

55 | Februar 1959

## SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Dr. H. Baumann

### Rollzustände zweiter Art

**TUHH**

*Technische Universität Hamburg-Harburg*

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Prof. Dr.-Ing. G. Weinblum

Rollzustände zweiter Art

von

Dr. H. Baumann

Hamburg, im Februar 1959

# ROLLZUSTÄNDE ZWEITER ART

von Dr.H.Baumann  
Institut für Schiffbau der Universität Hamburg

## 1. Einleitung

Die Periode gefährlicher Rollzustände, d.h. solcher mit grosser Amplitude, unterscheidet sich bekanntlich nur wenig von der (amplitudenabhängigen) Eigenperiode des Schiffes. Diese sogenannten Resonanzzustände kommen dadurch zustande, dass die natürliche Dämpfung des Schiffes durch Leistungszufuhr aus den Wellen aufgehoben wird. Dabei braucht die Periode der auftreffenden Wellen nicht immer gleich der Rollperiode zu sein.

In einer früheren Arbeit des Verfassers [1]<sup>\*)</sup> wurde gezeigt, dass bei Schiffen in seitlicher Dünung hauptsächlich mit zwei Arten von Rollzuständen zu rechnen ist:

Bei den Rollzuständen erster Art erfolgt die Entdämpfung durch die periodische Neigung  $\vartheta(t)$  der Wellenoberfläche. Rollperiode und Wellenperiode sind einander gleich.

Bei den Rollzuständen zweiter Art erfolgt die Entdämpfung durch die periodische Auf- und Abbeschleunigung  $\beta(t) \cdot g$  der Wellenoberfläche. Auf eine Rollschwingung entfallen zwei Dünungswellen.

Während die Rollzustände erster Art in jedem Lehrbuch behandelt werden, sind diejenigen der zweiten Art bisher kaum beachtet worden. Das mag daran liegen, dass sich ihre Beobachtung auf See nicht besonders aufdrängt; denn die beiden Arten von Rollzuständen unterscheiden sich zwar grundsätzlich in der Ursache, aber wenig in der Erscheinung.

Als Ursache für die Erregung von Rollzuständen zweiter Art kommen allgemein periodische Schwankungen der Stabilität des Schiffes in Betracht. Im einzelnen sind drei Fälle denkbar:

- a) Im Falle seitlicher Dünung nimmt das Schiff, wenn etwa die Viertelwellenlänge grösser ist als die Schiffsbreite, an der Orbitalbewegung des Wassers teil; es erfährt also eine kinematische Beschleunigung, deren lotrechte Komponente  $k(t) = \beta(t) \cdot g$  als periodische Gewichtsschwankung  $\Delta P = \beta(t) \cdot P$  in Erscheinung tritt. Das statische Moment nimmt demzufolge die Gestalt

$$M_{St} = [1 + \beta(t)] \cdot P \cdot h(\varphi) \quad (A)$$

\*) Schrifttumsangaben am Schluß der Arbeit

an, wo  $h(\psi)$  den Hebelarm der statischen Stabilität bei einer Krängung  $\psi$  aus der Gleichgewichtslage bedeutet und die Periode von  $\beta(t)$  gleich der Periode der auftreffenden Wellen ist. Solche Rollzustände konnten vom Verfasser sowohl im Versuchstank als auch am Navipendulum leicht verifiziert werden. In der Theorie dürften sie erstmalig bei Vedeler [2] erwähnt worden sein.

Bild 1 zeigt die am Navipendulum beobachteten Amplituden von Rollzuständen zweiter Art eines Schiffsmodells mit einem Stabilitätsumfang von  $\pm 180^\circ$ .

- b) Im Falle vorlicher oder achterlicher Dünung bewirken die am Schiff entlang laufenden Wellen eine periodische Schwankung der Hebelarmkurve. Messungen hierüber sind von Graff und Heckscher [3] angestellt worden; erste Berechnungen von Kempf [4].

Man kann den komplizierten Sachverhalt allerdings nur sehr grob durch einen Schwankungsfaktor im Sinne der Gl.(A) darstellen. Jedenfalls ist die Periode der Hebelarmschwankung für nicht zu kleine Rollwinkel gleich der Begegnungs- bzw. Überholungsperiode der Wellen, bei kleinem Rollwinkel kann sie auch halb so gross sein.

- c) Eine Erregungsart, welche zwar auf See nicht vorkommt, aber ebenfalls in einer periodischen Stabilitätsschwankung besteht, nämlich eine Höhenschwankung des Gewichtsschwerpunktes im Schiff, hat sich Grim [5] zunutze gemacht, um Versuche zum Fall b) in ruhigem Wasser durchführen zu können. Die Schwankungsperiode ist hier gleich der Umlaufperiode eines Gewichts.

Unsere folgenden Ausführungen gelten, soweit sich die Stabilitätsschwankungen im wesentlichen durch einen Ausdruck der Gestalt (A) darstellen lassen, mutatis mutandis für alle diese Fälle. Wir beschränken sie jedoch im Interesse präziser Formulierung und eindeutiger Aussagen auf das Schiff in seitlicher Dünung.

Zur mathematischen Analyse bedienen wir uns einer Methode, welche auch bei grossen Rollwinkeln (bis zur Grenze des Stabilitätsumfangs) leicht anwendbar ist: Wir verzichten auf eine genaue Erfassung der ohnehin unbekanntenen Wellenform zugunsten einfacher mathematischer Ausdrücke.

## 2. Die Bewegungsgleichung

Wir beschreiben das Rollen eines Schiffs in seitlicher Dünung durch die Differentialgleichung<sup>1)</sup>

$$J' \ddot{\varphi} + W(T_s) \dot{\varphi} + [1 + \beta(t)] \cdot P \cdot h(\varphi) = \alpha \quad (1)$$

Dazu sind folgende Voraussetzungen und Bemerkungen zu machen: (s. a. Bild 2)

Die Wellenlänge  $\lambda$  der Dünung sei im Vergleich zur Schiffsbreite  $B$  gross genug, mindestens

$$\lambda > 4B. \quad (2)$$

Dann nimmt das Schiff an der Orbitalbewegung des Wassers teil und kann unter Beibehaltung seines Deplacements rollen.

Zusätzlich zur Schwerebeschleunigung unterliegt das Schiff nun noch der Orbitalbeschleunigung vom Betrage  $r\omega^2$  ( $r$  = Orbitalradius,  $\omega$  = dessen Winkelgeschwindigkeit = Kreisfrequenz). Der resultierende Vektor (Scheinlotvektor = Druckgradient) schwankt periodisch sowohl in seiner Richtung als auch in seiner Grösse; er steht bekanntlich senkrecht auf der Wellenoberfläche. Die statische Gleichgewichtslage des Schiffs pendelt also wie diese um einen Winkel  $\bar{\nu}(t)$  gegen den Horizont; für dessen Amplitude, die Wellenschräge  $\bar{\nu}$ , gilt in einer Gerstnerschen Trochoidenwelle die Beziehung

$$\sin \bar{\nu} = \frac{r\omega^2}{g} = \frac{2\pi r}{\lambda} \quad (3)$$

Bei einer Krängung  $\varphi$  aus der jeweiligen statischen Gleichgewichtslage ist der Hebelarm  $h(\varphi)$  wegen (2) derselbe wie in ruhigem Wasser. Das Schiffsgewicht nimmt jedoch wegen der Grössenschwankung des Scheinlotvektors einen veränderlichen Momentanwert

$$[1 + \beta(t)] \cdot P \quad (4)$$

an, wobei  $\beta(t)$  im Wellental positiv, auf dem Wellenberg negativ ist.

<sup>1)</sup> Der Punkt über einem Grössensymbol bedeutet, wie üblich, die Ableitung nach der Zeit. Auf ausführliche Bezeichnung der Funktionsargumente wird häufig verzichtet, wenn sie sich von selbst versteht.

In sinusförmiger Dünung gilt

$$\dot{\beta}(t) = \pm \omega \cdot \beta(t), \quad (5a)$$

$$\beta^2(t) + \dot{\beta}^2(t) = \frac{4\pi^2 r^2}{\lambda^2}; \quad (5b)$$

also ist z.B. für die Standardwelle ( $2r : \lambda = 1:20$ )

$$|\dot{\beta}| = |\dot{\beta}| = \frac{\pi}{20} \approx 0,157. \quad (6)$$

Der Rollwinkel gegen den Horizont ist

$$\varphi(t) = \psi(t) + \dot{\beta}(t). \quad (7)$$

Das Trägheitsmoment  $J'$  des Schiffs sei konstant. Die Frequenzabhängigkeit seines hydrodynamischen Anteils kann vernachlässigt werden, solange die von dem rollenden Schiff ausgehende Welle die Voraussetzung (2) erfüllt.

Das Dämpfungsmoment <sup>W</sup> von Schiffen ist noch zu wenig erforscht, als dass man dafür einen analytischen Ausdruck angeben könnte. Es hängt in hydrodynamisch komplizierter Weise u.a. von der Schiffsform, der Schwerpunktlage, der Rollperiode und den Augenblickswerten des Rollwinkels und der Winkelgeschwindigkeit ab. Wir berücksichtigen nur seine Abhängigkeit von der Rollperiode  $\bar{T}_S$  und setzen es proportional der Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\psi}$  relativ zur Wasseroberfläche.

### 3. Die Grundfunktionen für das ungedämpfte Rollen in ruhigem Wasser

Als Grundlage für die Berechnung der erzwungenen Rollschwingungen betrachten wir das ungedämpfte Rollen in ruhigem Wasser. Wir setzen also

$$W = 0 \quad \text{und} \quad r = 0, \quad \text{also} \quad \dot{\beta}(t) \equiv 0, \quad \beta(t) \equiv 0. \quad (8)$$

Dann sind  $\dot{\beta}(t)$  und  $\psi(t)$  identisch, und die Bewegungsgleichung lautet

$$J' \ddot{\psi}_0 + P \cdot h(\psi_0) = 0. \quad (9)$$

Da hier keine Dämpfung wirkt, ist die Summe aus kinetischer und potentieller Energie konstant:

$$\frac{1}{2} J' \dot{\psi}_0^2 + U(\psi_0) = U(\bar{\psi}) \quad (10)$$

mit

$$U(\psi_0) = P \int_0^{\psi_0} h(\psi) \cdot d\psi. \quad (11)$$

Wir bilden nun drei für die mathematische Behandlung der Rollzustände zweiter Art wichtige Grundfunktionen der Amplitude, nämlich

- a) die Rollperiode,
- b) das Phasenumlauf-Integral und
- c) den Mittelwert der kinetischen Energie.

a) Für das Zeitdifferential der freien Schwingung  $\psi_0(t)$  folgt aus (10)

$$dt(\psi) = \sqrt{\frac{1}{2} \gamma'} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{U(\bar{\psi}) - U(\psi)}}, \quad (12)$$

woraus sich für die Rollperiode in ruhigem Wasser das "uneigentliche" Integral

$$T_c(\bar{\psi}) = \sqrt{\frac{1}{2} \gamma'} \cdot 4 \cdot \int_0^{\bar{\psi}} \frac{d\psi}{\sqrt{U(\bar{\psi}) - U(\psi)}} \quad (13)$$

ergibt. Über die Auswertung solcher Integrale in Sonderfällen sind in [1] einige Angaben gemacht worden. Die Bilder 3a und 3b geben als Beispiele die Vierteloszillogramme der freien Rollschwingung bei verschiedenen Amplituden, und zwar a) für ein Schiff mit positiver Zusatzstabilität, d.h. mit anfänglich überlinearer, später unterlinearer Hebelarmkurve, sowie b) für ein Schiff mit sinusförmiger, also rein unterlinearer Hebelarmkurve. Die Verbindungskurve der Maxima stellt die Abhängigkeit der Eigenperiode von der Rollamplitude dar.

Praktische Formeln für den Schiffbau findet man bei Jens [6].

Da die numerische oder planimetrische Auswertung des Integrals (13) wegen des bei  $\psi = \bar{\psi}$  verschwindenden Nenners Schwierigkeiten bereitet, transformieren wir sie mit dem Ansatz

$$\psi_0(t) = \bar{\psi} \cdot \sin \alpha(t), \quad (14)$$

d.h. wir stellen das Oszillogramm der Schwingung als Projektion eines Bildpunktes dar, welcher auf dem Kreis mit dem Radius  $\bar{\psi}$  ungleichförmig

aber periodisch umläuft. Für die stets positive Phasengeschwindigkeit ergibt sich aus (10) der Ausdruck

$$\dot{\alpha}^2 = \frac{2}{\gamma_1} \cdot \frac{U(\bar{\psi}) - U(\psi_0)}{\bar{\psi}^2 - \psi_0^2} \quad (15)$$

Die Rollperiode kann nun offenbar in der Gestalt

$$T_0(\bar{\psi}) = \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\dot{\alpha}} \quad (16)$$

oder, bei Einführung der Periode kleiner Schwingungen,

$$T_0(0) = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\gamma_1}{P \cdot M_0 g}} \quad (17)$$

und Wahrnehmung der Symmetrie von (15) auch in der Gestalt

$$\tau(\bar{\psi}) \equiv \frac{T_0(\bar{\psi})}{T_0(0)} = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\frac{1}{2} P \cdot M_0 g \cdot (\bar{\psi}^2 - \psi_0^2)}{U(\bar{\psi}) - U(\psi_0)}} \cdot d\alpha \quad (18)$$

geschrieben werden. Der Integrand

$$w(\psi_0, \bar{\psi}) \equiv \sqrt{\frac{\frac{1}{2} P \cdot M_0 g \cdot (\bar{\psi}^2 - \psi_0^2)}{U(\bar{\psi}) - U(\psi_0)}} \quad (19)$$

nimmt auf den Grenzen des Integrationsintervalls die Werte

$$w(0, \bar{\psi}) = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} P \cdot M_0 g \cdot \bar{\psi}^2}{U(\bar{\psi})}} \quad \text{bzw.} \quad w(\bar{\psi}, \bar{\psi}) = \sqrt{\frac{M_0 g \cdot \bar{\psi}}{h(\bar{\psi})}} \quad (20)$$

an und verläuft im Innern regulär. Da sein Differentialquotient

$$\frac{dw}{d\alpha} = \frac{dw}{d\psi_0} \cdot \frac{d\psi_0}{d\alpha} \quad (21)$$

sind

für  $\varphi = \sigma$  bzw.  $\alpha = \pi/2$  verschwindet, sind die Werte (20) Extrema. Solange nun die Hebelarmkurve einseitig gekrümmt (unterlinear oder überlinear) verläuft, ist  $w(\varphi, \bar{\varphi})$  im Integrationsintervall monoton, und die Werte (20) sind die absoluten Extrema. Das Verhältnis

$$q(\bar{\varphi}) \equiv \frac{w(\bar{\varphi}, \bar{\varphi})}{w(0, \bar{\varphi})} = \sqrt{\frac{2U(\bar{\varphi})}{\bar{\varphi} \cdot P \cdot h(\bar{\varphi})}} \quad (22)$$

ist für die Beispiele der Bilder 3a und 3b in Bild 4 dargestellt worden<sup>2)</sup>. Die Auftragung zeigt, dass sich  $q(\bar{\varphi})$  erst bei beträchtlichen Rollamplituden um mehr als etwa 20% von 1 unterscheidet, dass also der Integrand (19) bei mittleren Amplituden auf ein verhältnismässig enges Intervall beschränkt ist. Infolgedessen kann der in (18) geforderte Mittelwert des Integranden numerisch oder planimetrisch leicht gebildet werden. Bei einseitig gekrümmter Hebelarmkurve liefert bereits das arithmetische Mittel der Extrema (20) für nicht allzugrosse Amplituden eine gute Näherung.

Wir können dann die Rollperiode in ruhigem Wasser durch die algebraische Näherungsformel

$$\tau_0(\bar{\varphi}) \approx \frac{1}{2} \cdot \left( \sqrt{\frac{\frac{1}{2} P \cdot M_0 g \cdot \bar{\varphi}^2}{U(\bar{\varphi})}} + \sqrt{\frac{M_0 g \cdot \bar{\varphi}}{h(\bar{\varphi})}} \right) \quad (23a)$$

$$\approx \frac{1+q(\bar{\varphi})}{2} \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{2} P \cdot M_0 g \cdot \bar{\varphi}^2}{U(\bar{\varphi})}}, \quad (23b)$$

also mittels der Verhältnisse zwischen den Flächen unter der Anfangstangente der Hebelarmkurve und unter der Kurve selbst sowie zwischen den betr. Ordinaten im Schwingungsumkehrpunkt  $\bar{\varphi}$ , darstellen.

2) Das Quadrat dieser Funktion hat übrigens schon in [1] zur Abschätzung der mit Rollzuständen erster Art verbundenen leeseitigen Krängung gedient.

Zwei Beispiele mögen die Leistungsfähigkeit des Verfahrens illustrieren:  
 In dem unterlinearen Fall einer sinusförmigen Hebelarmkurve mit dem  
 Stabilitätsumfang  $\psi_u$ ,

$$h(\psi) = h_{\max} \cdot \sin \frac{\pi \psi}{\psi_u},$$

liefert (23a) den Ausdruck

$$\tau(\bar{\psi}) \approx \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\frac{\pi \bar{\psi}}{2 \psi_u}}{\sin \frac{\pi \bar{\psi}}{2 \psi_u}} + \sqrt{\frac{\frac{\pi \bar{\psi}}{\psi_u}}{\sin \frac{\pi \bar{\psi}}{\psi_u}}} \right), \quad (24)$$

dessen Wert erst bei  $\bar{\psi} = \frac{2}{3} \psi_u$  (wo bereits  $h(\psi) = 0,413 \cdot \overline{Mog} \cdot \psi$  ist) um 1% von dem des bekannten elliptischen Integrals abweicht. In dem stark überlinearen Fall eines Schiffs ohne Anfangsstabilität ( $\overline{Mog} = 0$ ), dessen Hebelarmkurve

$$h(\psi) = a \cdot \psi^3$$

lauten möge, müssen wir auf (15) zurückgreifen und finden durch entsprechendes Vorgehen:

$$\begin{aligned} T_0(\bar{\psi}) &= \sqrt{\frac{\gamma'}{2}} \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{\bar{\psi}^2 - \psi^2}{\frac{a}{4}(\bar{\psi}^4 - \psi^4)}} \cdot d\alpha \\ &= \frac{1}{\bar{\psi}} \cdot \sqrt{\frac{2\gamma'}{a}} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 + \psi^2/\bar{\psi}^2}} \\ &\approx \frac{\pi}{\bar{\psi}} \cdot \sqrt{\frac{2\gamma'}{a}} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \end{aligned} \quad (25)$$

Dies Resultat unterscheidet sich von dem mit Hilfe des vollständigen elliptischen Integrals 1. Gattung darstellbaren Wert [7] nur um 2,3%, obgleich immerhin  $\varphi = 1/\sqrt{2}$  ist.

b) Das normierte Phasenumlauf-Integral

$$\Phi(\bar{\psi}) \equiv \frac{1}{\pi \bar{\psi}} \cdot \sqrt{\frac{\gamma'}{2 \mathcal{U}(\bar{\psi})}} \cdot \oint \dot{\psi} \cdot d\psi, \quad (26)$$

\* Gleichgute Annäherung kann für die Hebelarmkurven  $h(\psi) \sim \psi \cdot \left[1 - \left(\frac{\psi}{\psi_u}\right)^4\right]$  und  $h(\psi) \sim \psi \cdot \left[1 - \left(\frac{\psi}{\psi_u}\right)^4\right]$  nachgewiesen werden.

welches bei linearem Hebelarmverlauf den Wert 1 hat, kann leicht planimetrisch gewonnen werden. In Bild 5 sind die  $\phi(\bar{\psi})$  - Kurven der beiden den Bildern 3a und 3b zugrundeliegenden Schiffstypen wiedergegeben worden. Wir wollen jedoch auch hierfür eine algebraische Näherungsformel angeben. Mit dem Ansatz (14) nimmt der Ausdruck (26) die Gestalt

$$\phi(\bar{\psi}) = \sqrt{\frac{\gamma'}{2U(\bar{\psi})}} \cdot \frac{\bar{\psi}}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \cos^2 \alpha \cdot \dot{\alpha} \cdot d\alpha \quad (27)$$

an, wo  $\dot{\alpha}$  wieder durch (15) gegeben ist. Die bei  $\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$  usw. liegenden Extrema betragen also

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(0) = \dot{\alpha}(\pi) = \dot{\alpha}(2\pi) &= \sqrt{\frac{2U(\bar{\psi})}{\gamma' \cdot \bar{\psi}^2}} \\ \dot{\alpha}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dot{\alpha}\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= \frac{1}{\phi(\bar{\psi})} \cdot \sqrt{\frac{2U(\bar{\psi})}{\gamma' \cdot \bar{\psi}^2}} \end{aligned} \quad (28)$$

mit  $\phi(\bar{\psi})$  gemäss Gl.(22).

Im Falle einseitig gekrümmter Hebelarmkurve, wo  $\dot{\alpha}(\alpha)$  monoton zwischen diesen Werten verläuft, setzen wir näherungsweise

$$\dot{\alpha}(\alpha) = \sqrt{\frac{2U(\bar{\psi})}{\gamma' \cdot \bar{\psi}^2}} \cdot \frac{1}{2} \left[ \left(1 + \frac{1}{\phi(\bar{\psi})}\right) + \left(1 - \frac{1}{\phi(\bar{\psi})}\right) \cdot \cos 2\alpha \right] \quad (29)$$

und erhalten aus (27) den algebraischen Ausdruck

$$\phi(\bar{\psi}) \approx \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{\phi(\bar{\psi})}\right) + \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{\phi(\bar{\psi})}\right) \quad (30a)$$

$$\approx \frac{3}{4} + \frac{1}{4\phi(\bar{\psi})} \quad (30a)$$

$$\approx \frac{1}{4} \cdot \left(3 + \sqrt{\frac{\bar{\psi} \cdot P \cdot h(\bar{\psi})}{2U(\bar{\psi})}}\right) \quad (30b)$$

Die Werte dieses Ausdrucks sind in Bild 5 eingetragen worden.

- c) Wir betrachten nun noch das über die Periode der freien Schwingung erstreckte normierte Mittel der kinetischen Energie

$$\eta_0(\bar{\varphi}) = \frac{2}{T_0(\bar{\varphi})} \cdot \int_0^{T_0(\bar{\varphi})} \left( 1 - \frac{U(\psi)}{U(\bar{\varphi})} \right) dt. \quad (31)$$

Auf diese, im allgemeinen von Hebelarmverlauf und Amplitude abhängige Grösse wird im folgenden wiederholt Bezug genommen. Sie ist so normiert, dass sich bei linearem Hebelarm, also vorzugsweise bei kleinen Amplituden, der Wert 1 ergibt. Es ist leicht einzusehen, dass bei überlinearem Verhalten der Hebelarmkurve wegen des kürzeren Aufenthalts im Bereich kleiner Geschwindigkeiten (Umkehrpunkte)  $\eta_0(\bar{\varphi}) > 1$ , bei unterlinearem Verhalten dagegen  $\eta_0(\bar{\varphi}) < 1$  wird und bei Annäherung der Rollamplitude an die Grenze des Stabilitätsumfangs  $\eta_0(\bar{\varphi})$  dem Wert null zustrebt. - Eine obere Schranke für  $\eta_0(\bar{\varphi})$  kann leicht aus der Betrachtung der Energiekurve  $U(\psi)$  gewonnen werden, wenn man die Schar der Parabeln  $n$ -ten Grades

$$U_n(\psi) = a_n \cdot |\psi^n|, \quad n \geq 2 \quad (32)$$

ins Auge fasst. Mit  $x = \psi/\bar{\varphi}$  und Benutzung von (12) und (13) nimmt nämlich der Ausdruck (31) die Gestalt

$$\eta_{0,n} = \frac{I_n}{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}} \quad (33)$$

an, in welcher die Amplitude  $\bar{\varphi}$  nicht mehr erscheint und wo

$$I_n = 2 \cdot \int_0^1 (1-x^n) \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} = 2 \cdot \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} - 2 \cdot \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^n}} \quad (34a)$$

oder auch

$$I_n = 2 \cdot \int_0^1 \sqrt{1-x^n} \cdot dx = 2x \cdot \sqrt{1-x^n} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{n \cdot x^n dx}{\sqrt{1-x^n}} \quad (34b)$$

zu setzen ist. Bei Elimination des letzten Terms von (34a) und (34b)

wird

$$I_n = \frac{2n}{n+2} \cdot \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \quad (35)$$

und somit

$$\eta_{0,n} = \frac{2n}{n+2} \quad (36)$$

Mit wachsendem Exponenten  $n$  strebt also  $\eta_{0,n}$  gegen den Grenzwert  $\frac{2}{3}$ . Dieser hat jedoch für Schiffe schon keine Bedeutung mehr; er entspricht einem Körper, der sich über eine gewisse Strecke frei bewegen kann, aber an deren Enden hart reflektiert wird. Als höchster Exponent der Energiekurve eines Schiffes dürfte  $n=6$  genügen, woraus dann  $\eta_{0,n} \leq 1,5$  folgt. Wir können also für Schiffe

$$\sigma \leq \eta(\bar{\psi}) \leq \eta_{\max} = \begin{cases} 1 & \text{im unterlinearen Fall} \\ 1,5 & \text{im überlinearen Fall} \end{cases} \quad (37)$$

setzen.

Bild 6 gibt die  $\eta_0(\bar{\psi})$ -Kurven der beiden Schiffstypen, deren Hebelarmkurven in den Bildern 3a und 3b gezeigt werden. Sie sind mit Hilfe der Identität

$$\tau(\bar{\psi}) \cdot \eta_0(\bar{\psi}) \equiv \Phi(\bar{\psi}) \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{3} P \cdot M_0 g \cdot \bar{\psi}^2}{U(\bar{\psi})}} \quad (38)$$

welche aus der Energiegleichung (10) leicht beweisbar ist, aus den planimetrierten  $\Phi(\bar{\psi})$ -Werten (Bild 5) und den  $\tau(\bar{\psi})$ -Werten der Bilder 3a und 3b gebildet worden. Wenn man für  $\Phi(\bar{\psi})$  und  $\tau(\bar{\psi})$  die Näherungsformeln (30a) bzw. (23b) benutzt, kann man im Bereich einseitig gekrümmter Hebelarmkurven noch

$$\eta(\bar{\psi}) \approx \frac{1}{1 + \varphi(\bar{\psi})} + \frac{1}{2 \varphi(\bar{\psi})} \quad (39)$$

schreiben. Die nach dieser Formel errechneten Näherungswerte sind in Bild 6 eingetragen worden.

4. Die Rollzustände zweiter Art

Bei Integration über  $d\varphi = d\psi + d\vartheta$  liefert die Bewegungsgleichung (1) für die Energie

$$E(t) = \frac{1}{2} \mathcal{Y}' \dot{\varphi}^2 + \mathcal{U}(\psi) \quad (40)$$

die Beziehung

$$-E(t) = W(T_S) \int \dot{\varphi} \cdot \dot{\varphi} \cdot dt + P \int h(\psi) \cdot \dot{\vartheta} \cdot dt + P \int \beta \cdot h(\psi) \cdot \dot{\varphi} \cdot dt . \quad (41)$$

Da für stationäre Rollzustände mit der Periode  $T_S$

$$E(t+T_S) = E(t) \quad (42)$$

ist, muss die Summe der rechtsstehenden Integrale über eine Rollperiode verschwinden:

$$W(T_S) \int_0^{T_S} \dot{\varphi} \cdot \dot{\varphi} \cdot dt + P \int_0^{T_S} h(\psi) \cdot \dot{\vartheta} \cdot dt + P \int_0^{T_S} \beta \cdot h(\psi) \cdot \dot{\varphi} \cdot dt = 0. \quad (43)$$

Das erste Integral stellt den Energieverlust durch Dämpfung dar, es ist stets positiv. Die beiden anderen Integrale müssen also zusammen einen negativen Wert haben, d.h. die Anfachung der Rollbewegung aus der Dämpfung (Wirkleistung) darstellen. Nun haben die Erregerfunktionen  $\dot{\vartheta}(t)$  und  $\beta(t)$  die Periode  $T_W$ , die Schwingungsfunktionen in dem hier zu betrachtenden Fall der Rollzustände zweiter Art die Periode

$$T_S = 2 T_W . \quad (44)$$

Infolgedessen hat das zweite Integral den Wert null, d.h. die periodische Wellenneigung  $\dot{\psi}(t)$  überträgt keine Wirkleistung, ist also an dem Vorgang nicht wesentlich beteiligt. Wir werden deshalb ihren Einfluss erst nachträglich betrachten und vorläufig

$$\varphi(t) \equiv \psi(t) \quad (45)$$

setzen. Das dritte Integral liefert jedoch bei geeigneter Phasenlage zwischen  $\beta(t)$  und  $\psi(t)$  einen von null verschiedenen Wert, welcher dem des ersten entgegengesetzt gleich sein muss, damit sich Dämpfung und Anfachung aufheben.

Wir haben also nun die Bewegungsgleichung

$$J \cdot \ddot{\psi} + W(T_s) \cdot \dot{\psi} + [1 + \beta(t)] \cdot P \cdot h(\psi) = 0 \quad (46)$$

bzw. die Energiegleichung

$$W(T_s) \int_0^{T_s} \dot{\psi}^2 dt + P \int_0^{T_s} \beta(t) \cdot h(\psi) dt = 0 \quad (47)$$

(unter Ausschluss der trivialen Lösung  $\psi(t) \equiv 0$ ) zu betrachten. Letztere leitet uns auf einen einfachen Ansatz für den Zusammenhang der Funktionen  $\psi(t)$  und  $\beta(t)$  hin, welcher eine bequeme, im ungedämpften Fall exakt durchführbare Integration der Differentialgleichung (46) ermöglicht.

a) Phasenerlegung

Die Erregerfunktion  $\beta(t)$  soll nun in zwei um  $90^\circ$  phasenverschobene Anteile zerlegt werden:

$$\beta(t) = \beta_b(t) + \beta_w(t), \quad (48)$$

deren erster die Verstimmung, deren zweiter die Entdämpfung des Schiffes besorgt (Blind- bzw. Wirk-Erregung). Es soll also (mit  $dU = P \cdot h(\psi) \cdot d\psi$ ) gelten:

$$\oint \beta_b(t) dU(\psi) = 0 \quad (49)$$

$$\oint \beta_w \cdot dU(\psi) = -W(T_s) \cdot \int_0^{T_s} \dot{\psi}^2 \cdot dt, \quad (50)$$

wo die Umlaufintegrale über eine Rollperiode  $T_s$ , also über 2 Umläufe im U- $\xi$ -Plan zu erstrecken sind.

Die Blinderregung  $\beta_b(t)$  muss wegen (49) mit der potentiellen Energie  $U(t)$  phasenrein verlaufen. Wir setzen daher an:

$$\beta_b(t) = \bar{\beta}_b \cdot (1 - 2u(\psi)) + \beta_0 \quad (51)$$

mit

$$0 \leq u(\psi) \equiv \frac{U(\psi)}{U(\bar{\psi})} \leq 1. \quad (52)$$

Ihre Amplitude  $\bar{\beta}_b$  ist je nach Phasenlage positiv oder negativ, und die Konstante  $\beta_0$  ergibt sich aus der Forderung, dass die lotrechte Wechsel-

beschleunigung im zeitlichen Mittel verschwinde,

$$\int_0^{T_w} \beta(t) \cdot dt = 0. \quad (53)$$

Die Wirkerregung  $\beta_w(t)$  verläuft wegen (50) in entgegengesetzter Phase zur zeitlichen Änderung der potentiellen Energie,  $\frac{dU}{dt}$ ; sie hat dort einfache Nullstellen, wo  $\psi(t)$  oder  $\dot{\psi}(t)$  verschwindet. Wenn wir mit stets positiver Wirkamplitude  $\bar{\beta}_w$

$$\beta_w(t) = -\bar{\beta}_w \cdot 2 \cdot \sqrt{u(\psi) \cdot (1-u(\psi))} \operatorname{sg}(\psi \dot{\psi}) \quad (54)$$

setzen, so kann wegen der Beziehung

$$\left(1 + 2u(\psi)\right)^2 + 4 \cdot u(\psi) \cdot (1-u(\psi)) = 1 \quad (55)$$

die Erregerfunktion auch in der Gestalt

$$\beta(t) = -\bar{\beta} \cdot \sin(2\gamma(t) - \gamma_0) + \beta_0 \quad (56a)$$

$$= \bar{\beta}_b \cdot \cos 2\gamma(t) - \bar{\beta}_w \cdot \sin 2\gamma(t) + \beta_0 \quad (56b)$$

mit

$$\bar{\beta}_b = \bar{\beta} \cdot \sin \gamma_0, \quad \bar{\beta}_w = \bar{\beta} \cdot \cos \gamma_0 \quad (57)$$

geschrieben werden. Dann bedeutet  $\gamma_0$  die Phasenlage und  $\gamma(t)$  das (nicht gleichförmige!) Durchlaufen eines Phasenszyklus. Für die Amplitude der Erregung gilt

$$\bar{\beta}^2 = \bar{\beta}_b^2 + \bar{\beta}_w^2. \quad (58)$$

Da die Wirkerregung wegen der Symmetrie des Ansatzes (54) keinen Beitrag zu dem Integral (53) liefert, hängt die Konstante  $\beta_0$  nur von dem Oszillogramm der Blinderregung  $\beta_b(t)$  ab. Auf Grund des Ansatzes (51) ist

$$\frac{\beta_0}{\beta_b} = \frac{2}{T_w} \cdot \int_0^{T_w} u(\psi) \cdot dt = 1 \quad (59a)$$

$$= 1 - \eta(\bar{\psi}). \quad (59b)$$

Die Funktion  $\eta(\bar{\psi})$  unterscheidet sich von der in Gleichung (31) gegebenen Grundfunktion  $\eta_0(\bar{\psi})$ , weil die Form des Oszillogramms  $\psi(t)$  der erzwungenen Schwingung von derjenigen des Oszillogramms  $\psi(t)$  der freien Schwingung abweicht. Wir können, wie nachträglich gezeigt wird, in erster Näherung

$$\eta(\bar{\psi}) = \eta_0(\bar{\psi}) - \frac{1}{8} \bar{\beta}_b \cdot (2\eta_0(\bar{\psi}) - \eta_0^2(\bar{\psi}) + \delta) \quad (60)$$

setzen, wo

$$|\delta| \leq \eta_0(\bar{\psi}) \cdot (2 - \eta_0(\bar{\psi})) \leq 1 \quad (61)$$

ist.

#### b) Amplitudenbeziehungen

Wir gehen nun so vor, dass wir zunächst (b<sub>1</sub>) das erzwungene Rollen des Schiffs ohne Dämpfung ( $W = 0$ ) betrachten; hier verschwindet wegen (50) die Wirkerregung ( $\beta_w(t) \equiv 0$ ). Sodann (b<sub>2</sub>) berechnen wir aus der Integralbedingung (50) die zum Ausgleich der Dämpfung  $W(T_S)$  notwendige Wirkerregung. Den Einfluss, der sich daraus ergibt, dass die Wirkerregung das dämpfende Moment wegen der ungleichen Perioden nicht identisch, sondern nur im Mittel über jede Rollperiode  $T_S$  ausgleicht, dass also auf das Schiff noch ein Blindmoment

$$N(t) = W(T_S) \cdot \dot{\psi} + \beta_w \cdot P \cdot h(\psi) \quad (62)$$

wirkt, betrachten wir nachträglich.

b1. Mit den Beziehungen

$$W=0 \quad \beta_w(t) \equiv 0 \quad \psi(t) = \psi_1(t) \quad (63)$$

nimmt die Differentialgleichung (46) die Gestalt

$$J' \ddot{\psi}_1 + [1 + \beta_b(t)] \cdot P \cdot h(\psi_1) = 0 \quad (64)$$

an. Diese lässt sich, nach Einführung des Ansatzes (51), als Bewegungsgleichung eines in ruhigem Wasser frei rollenden Ernter-Schiffes mit dem modifizierten Hebelarm

$$\begin{aligned} h_p(\psi) &= [1 + \beta_b(\psi)] \cdot h(\psi) \\ &= [1 + \beta_0 + \bar{\beta}_b \cdot (1 - 2u(\psi))] \cdot h(\psi) \end{aligned} \quad (65)$$

auffassen. Wir können also analog zu (10) bis (13) die Krümmungsenergie

$$\begin{aligned} U_p(\psi) &= P \cdot \int_0^\psi h_p(\alpha) \cdot d\alpha \\ &= U(\bar{\psi}) \cdot [(1 + \beta_0) \cdot u(\psi) + \bar{\beta}_b \cdot u(\psi) \cdot (1 - u(\psi))], \end{aligned} \quad (66)$$

die Gesamtenergie

$$\frac{1}{2} J' \dot{\psi}^2 + U_p(\psi) = U_p(\bar{\psi}) \quad (67)$$

und das Zeitdifferential der erzwungenen Rollschwingung  $\psi_1(t)$

$$dt(\psi_1) = \sqrt{\frac{1}{2} J'} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{U_p(\bar{\psi}) - U_p(\psi)}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} \gamma'} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{U(\bar{\varphi}) - U(\psi)} \cdot \sqrt{1 + \beta_0 - \bar{\beta}_k \cdot u(\psi)}} \quad (68)$$

angeben.

Zur weiteren Berechnung führen wir das Zeitdifferential der freien Rollschwingung  $\psi_0(t)$  gemäss (12) ein und schreiben (s. Bild 7):

$$dt(\psi_1) = \frac{dt(\psi_0)}{\sqrt{1 + \beta_0 - \bar{\beta}_k \cdot u(\psi_0)}} \quad (69)$$

Wir erhalten so für die Periode der erzwungenen Rollbewegung den Ausdruck

$$T_S = \int_0^{T_0(\bar{\varphi})} \frac{dt}{\sqrt{1 + \beta_0 - \bar{\beta}_k \cdot u(\psi_0)}} \quad (70)$$

Der aus der lotrechten Wechselbeschleunigung resultierende Verstimmungsfaktor

$$\frac{T_S}{T_0(\bar{\varphi})} = \frac{1}{T_0(\bar{\varphi})} \cdot \int_0^{T_0(\bar{\varphi})} [1 + \beta_0 - \bar{\beta}_k \cdot u(\psi_0)]^{-\frac{1}{2}} dt \quad (71)$$

ist also gleich dem über die Periode der freien Rollschwingung gemittelten Ausdruck  $[1 + \beta_0 - \bar{\beta}_k \cdot u(\psi_0)]^{-\frac{1}{2}}$ .

Die exakte Berechnung dieses Mittelwertes bereitet im allgemeinen grosse Schwierigkeiten. Wir beschränken uns daher auf eine für alle  $\bar{\psi}$  gültige Näherung erster Ordnung in  $\bar{\beta}_b$ . Es ist - vergl. auch (59) -

$$\left[1 + \beta_0 - \bar{\beta}_b \cdot u(\psi_0)\right]^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} \bar{\beta}_b \cdot (1 - \eta(\bar{\psi}) - u(\psi_0)) + \frac{3}{8} \bar{\beta}_b^2 \cdot \left(\frac{\dots}{\dots}\right)^2 \quad (72)$$

Für die absolute Konvergenz der Entwicklung muss

$$\left| \bar{\beta}_b \cdot (1 - \eta(\bar{\psi}) - u(\psi_0)) \right| < 1 \quad (73)$$

vorausgesetzt werden. Wegen (37), (60), (61) und (52) ergibt sich daraus, wie nachträglich gezeigt wird, für die Amplitude der Blinderregung die Beschränkung

$$\begin{aligned} -0,83 < \bar{\beta}_b < +0,83 & \quad \text{im unterlinearen Fall} & (74) \\ -0,60 < \bar{\beta}_b < +0,66 & \quad \text{im überlinearen Fall} \end{aligned}$$

(NB. Für eine Standardwelle (6) ist  $|\bar{\beta}_b| \approx 0,167$ ). Mit

$$\eta(\bar{\psi}) \approx \eta_0(\bar{\psi}) \quad (\text{vgl. (60)})$$

und 
$$\frac{1}{T_0(\bar{\psi})} \int_0^{T_0(\bar{\psi})} u(\psi) \cdot dt = 1 - \frac{1}{2} \eta_0(\bar{\psi}) \quad (\text{vgl. (31)})$$

erhalten wir dann für den Verstimmungsfaktor (71) den Näherungsausdruck

$$\frac{T_S}{T_0(\bar{\psi})} \approx 1 - \frac{1}{2} \bar{\beta}_b \cdot (1 - \eta_0(\bar{\psi}) - 1 + \frac{1}{2} \eta_0(\bar{\psi})) \quad (75)$$

$$\approx 1 + \frac{1}{4} \bar{\beta}_b \cdot \eta_0(\bar{\psi}). \quad (75)$$

Da nun  $T_S = 2T_w$  ist, haben wir hiermit eine implizite Darstellung der Resonanzkurven zweiter Art (zunächst für Schiffe ohne Rolldämpfung)

gefunden. Ihre analytische Umformung in eine explizite Gestalt  $\bar{\psi}(\bar{\beta}_b, T_w)$

ist wegen des transzendenten Charakters der Funktionen  $T_0(\bar{\psi})$  und  $\zeta(\bar{\psi})$  nicht möglich. Wir können aber bei gegebener Grundkurve  $T_0(\bar{\psi})$  mittels der Formel (75) unter Benützung der in (31) erklärten Werte  $\zeta(\bar{\psi})$  leicht die beiden zu einer bestimmten Blinderregungsamplitude  $\pm/\beta_0$  gehörigen Äste der Resonanzkurven zweiter Art gewinnen. Die Bilder 8a und 8b zeigen das Resultat für die beiden oben gekennzeichneten Hebelarmkurven, wobei  $\beta_0 = 0.2$  angenommen wurde.

Unsere Betrachtung hat gezeigt, dass die Rollperiode eines Schiffes durch die Auf- und Abbewegung der Wellen nur um wenige Prozent verstimmt wird. Rollzustände zweiter Art sind also nicht bei jeder Dünungsperiode möglich. Wegen des steilen Anstiegs der Resonanzkurven treten sie jedoch in dem betreffenden Periodenintervall mit nicht geringen Amplituden auf.

b2. Wenn wir nun die Rolldämpfung des Schiffes gemäss der Integralbeziehung (50) mit dem Wirkanteil  $\beta_w(t)$  der Erregung ins Gleichgewicht setzen, so erhalten wir mit dem Ansatz (54) für die Wirkamplitude  $\bar{\beta}_w$  die Beziehung

$$\bar{\beta}_w \cdot 2U(\bar{\psi}) \cdot \oint \sqrt{u(\psi)(1-u(\psi))} \cdot du(\psi) = W(T_s) \cdot \int_0^{T_s} \dot{\psi}^2 \cdot dt, \quad (76)$$

wo der Wurzelausdruck das Vorzeichen von  $\psi, \dot{\psi}$  hat.

Nun stellt der Integrand des Umlauf-Integrals, über  $u(\psi)$  aufgetragen, einen Kreis mit dem Radius  $1/2$  dar. Da dieser in der Zeit  $T_s$  zweimal durchlaufen wird, ist die linke Seite gleich  $\bar{\beta}_w \cdot U(\bar{\psi}) \cdot \pi$ . Wird auf der rechten Seite  $\dot{\psi}^2$  mittels (67) ausgedrückt, so folgt bei Erweiterung mit  $T_s$

$$\bar{\beta}_w \cdot U(\bar{\psi}) \cdot \pi = \frac{T_s \cdot W(T_s)}{s} \cdot \frac{2}{\gamma'} \cdot \frac{1}{T_s} \cdot \int_0^{T_s} (U_{\beta}(\bar{\psi}) - U_{\beta}(\psi)) \cdot dt, \quad (77)$$

so dass schliesslich

$$\bar{\beta}_w = 2 \cdot \frac{T_s \cdot W(T_s)}{2\pi \cdot \gamma'} \cdot \frac{2}{T_s} \cdot \int_0^{T_s} \frac{U_{\beta}(\bar{\psi}) - U_{\beta}(\psi)}{U(\bar{\psi})} \cdot dt \quad (78)$$

ist. Die Wirkamplitude der Erregung kann also in zwei Faktoren zerlegt werden:

$$\bar{\beta}_w = 2 D(T_s) \cdot \eta_\beta(\bar{\psi}) \quad (79)$$

Hier bedeutet

$$D(T_s) = \frac{T_s \cdot W(T_s)}{2\pi \mathcal{J}'}$$

den dimensionslosen Dämpfungsbeiwert des mit der Periode  $T_s$  rollenden Schiffes. Die Bilder 9 und 10 zeigen Beispiele für die Grösse von D. Der Mittelwert  $\eta_\beta(\bar{\psi})$  nimmt nach Einsetzen von (66) die Gestalt

$$\eta_\beta(\bar{\psi}) = \frac{2}{T_s} \cdot \int_0^{T_s} [1 - u(\varphi)] \cdot [1 + \beta_0 - \beta_0 \cdot u(\varphi)] \cdot dt \quad (80)$$

an. Es wird nachträglich bewiesen, dass hieraus näherungsweise

$$\begin{aligned} \eta_\beta(\bar{\psi}) &\approx \eta_0(\bar{\psi}) + \frac{1}{8} \cdot \beta_0 \cdot (2\eta_0(\bar{\psi}) - 5\eta_0^2(\bar{\psi}) + \delta) \\ \text{mit} \quad |\delta| &\leq \eta_0(\bar{\psi}) \cdot (2 - \eta_0(\bar{\psi})) \leq 1 \end{aligned} \quad (81)$$

folgt.

Da wir die explizite Abhängigkeit der Rolldämpfung von der Amplitude vernachlässigt haben, ist es sinnvoll, auch die Amplitudenabhängigkeit der Wirkerregung (79) unberücksichtigt zu lassen, umso mehr, als bei wachsender Rollamplitude der Dämpfungsbeiwert erfahrungsgemäss zunimmt (vgl. Bild 10), der Mittelwert  $\eta_0(\bar{\psi})$  dagegen abnimmt (Bild 9), so dass sich die Tendenzen zum Teil ausgleichen. Wir können also im Rahmen der ohnehin vorhandenen Unsicherheit mit der vereinfachten Formel

$$\bar{\beta}_w \approx 2 D(T_s) \approx \text{const} \quad (82)$$

rechnen.

Im Gegensatz zu den Rollzuständen erster Art, wo die Wirkamplitude der Erregung im wesentlichen der Rollamplitude proportional ist, liegt also hier der Fall vor, dass die Wirkamplitude im wesentlichen von der

Rollamplitude unabhängig ist.

Infolgedessen ist für das Eintreten eines Rollzustandes zweiter Art, auch bei kleinster Amplitude, eine durchaus endliche Dünungsstärke

$$H:\lambda \cong 2D(T_S) : \pi \quad (83)$$

Voraussetzung. Für ein Schiff geringer Dämpfung ( $D \approx 0,03$ ) genügt schon etwa  $H:\lambda = 1:50$ . Der Erregungsüberschuss geht als Blinderregung in die entdämpfte Bewegungsgleichung (64) ein. Die in den Bildern 9a und 9b gezeigten Resonanzkurven gelten also auch für Schiffe mit Rolldämpfung, wenn gemäss (58)

$$\bar{\beta}_6 = \pm \sqrt{\bar{\beta}^2 - 4D^2(T_S)} \quad (84)$$

gesetzt wird.

### c) Beständige Rollzustände

Um zu entscheiden, welche Punkte der Resonanzkurven beständige Rollzustände darstellen, d.h., um das Vorzeichen in (84) zu bestimmen, gehen wir wieder von dem in [1] gegebenen Kriterium aus, wonach ein beständiger Schwingungszustand vorliegt, wenn beim Übergang zu jedem stationären Nachbarszustand gleicher Periode die Amplituden von Erregung und Schwingung ungeachtet ihrer Phase gleichzeitig zu- oder abnehmen.

Wir haben dann das Kriterium

$$C \equiv \frac{\partial \bar{\beta}^2}{\partial \bar{\varphi}^2} \begin{array}{l} > 0: \text{ beständig} \\ = 0: \text{ indifferent} \\ < 0: \text{ unbeständig} \end{array} \quad (85)$$

auf die aus (58), (75) und (82) gebildete Amplitudenbeziehung

$$\bar{\beta}^2 = \left( \frac{T_S}{T_0(\bar{\varphi})} - 1 \right)^2 \cdot \frac{16}{\sigma^2(\bar{\varphi})} + 4D^2(T_S) \quad (86)$$

anzuwenden.

Für die Steigung der Resonanzkurven  $\bar{\varphi}(\bar{\beta}, T_s)$  bei gegebener Wellenstärke ( $\bar{\beta} = \text{const}$ ) gilt

$$\frac{d|\bar{\varphi}|}{dT_s} = - \frac{\partial \bar{\beta}^2 / \partial T_s}{\partial \bar{\beta}^2 / \partial |\bar{\varphi}|} = - \frac{\partial \bar{\beta}^2 / \partial T_s}{2|\bar{\varphi}| \cdot C} \quad (87)$$

Die Resonanzkurven verlaufen also auf der Grenze des Beständigkeitsbereichs, wo  $C = 0$  ist, lotrecht; desgleichen auf der Abszissenachse  $\bar{\varphi} = 0$ . Mit (86) folgt noch, wenn  $D = \text{const}$  gesetzt wird<sup>3)</sup>,

$$\frac{d|\bar{\varphi}|}{dT_s} = \frac{1}{|\bar{\varphi}| \cdot C} \cdot \frac{16}{T_0^2(\bar{\varphi}) \cdot \varphi_0^2(\bar{\varphi})} \cdot (T_0(\bar{\varphi}) - T_s) \quad (88a)$$

bzw.

$$\frac{d|\bar{\varphi}|}{d\omega_s} = \frac{1}{|\bar{\varphi}| \cdot C} \cdot \frac{16\nu_0(\bar{\varphi})}{\omega_s^3 \cdot \varphi_0^2(\bar{\varphi})} \cdot (\nu_0(\bar{\varphi}) - \omega_s) \quad (88b)$$

Auch für die Resonanzkurven zweiter Art gilt demnach bei Auftragung von  $|\bar{\varphi}|$  über der Periode oder auch über der Frequenz die Regel, dass ihre Steigung in Punkten beständiger Rollzustände ( $C > 0$ ) links der Grundkurve positiv, rechts davon negativ ist. Dadurch ist das Vorzeichen in (84) bestimmt. Bei überlinearem Verhalten des Schiffes gilt das Pluszeichen, bei unterlinearem das Minuszeichen. Wir schreiben kurz:

$$\bar{\beta}_b > 0 \quad \text{überlinear,} \\ \bar{\beta}_b < 0 \quad \text{unterlinear,} \quad (89)$$

In den Bildern 8a und 8b sind die Kurventeile, welche nicht-beständige Rollzustände darstellen, gestrichelt worden. Dass auch das gestrichelte Abszissenintervall, welches der durch das Kriterium (85) nicht erfassbaren

3)  $D = \text{const}$  bedeutet, dass der Dämpfungskoeffizient  $W$  der Frequenz proportional ist. In dem durch die Voraussetzung (2) beschränkten Frequenzbereich ist dies eine tragbare Annahme.

trivialen Lösung  $\psi(t) \equiv 0$  angehört, nicht-beständige Rollzustände darstellt, zeigt die folgende Betrachtung.

d) Das kritische Periodenintervall

Im Grenzfall kleiner Amplituden kann

(89)

$$h(\psi) = \overline{M_0 g} \cdot \psi \quad (90)$$

und

$$T_0^{(1)} = 2\pi \sqrt{\frac{\gamma'}{P \cdot \overline{M_0 g}}} \quad (91)$$

gesetzt werden. Der spezielle Hebelarmverlauf kommt hier nicht zur Auswirkung; dafür treten wesentliche Eigenschaften dieser Rollzustände umso deutlicher hervor.

Die Bewegungsgleichung (64) des entdämpften Schiffes nimmt jetzt die Gestalt einer linearen (sog. Hill'schen) Differentialgleichung an:

$$\mathcal{J}' \ddot{\psi} + [1 + \beta_0(t)] \cdot P \cdot \overline{M_0 g} \cdot \psi = 0. \quad (92)$$

Auf Grund unseres Ansatzes (51) erhalten wir mit

$$u(\psi) = \psi^2 / \bar{\psi}^2 \quad (93)$$

für den stationären Rollzustand die nichtlineare Differentialgleichung

$$\mathcal{J}' \ddot{\psi} + [1 + \beta_0 + \beta_1 \cdot (1 - 2 \cdot \frac{\psi^2}{\bar{\psi}^2})] \cdot P \cdot \overline{M_0 g} \cdot \psi = 0. \quad (94)$$

Der Hebelarmverlauf

$$h_p(\psi) = [1 + \beta_0 + \beta_1 \cdot (1 - 2 \cdot \frac{\psi^2}{\bar{\psi}^2})] \cdot \overline{M_0 g} \cdot \psi \quad (95)$$

des Ersatzschiffes, welches in ruhigem Wasser gemäss der Differentialgleichung (94) frei rollt, ist also eine kubische Parabel. Dementsprechend ist die Form des Rolloszillogramms nicht sinusförmig, und zwar umso weniger, je stärker die Blinderregung ist. Die Rollperiode ist trotzdem von der Rollamplitude unabhängig, weil diese zum Stabilitätsumfang der Hebelarmkurve (95) (d.i. derjenige Winkel  $\psi = \psi_u$ , für welchen die eckige Klammer verschwindet) in einem festen, nur durch die Blinderregung bestimmten Verhältnis steht, nämlich

$$\frac{\bar{\psi}^2}{\psi_u^2} = \frac{2\bar{\beta}_b}{1 + \beta_0 + \bar{\beta}_b} \quad (96)$$

Die Resonanzkurven verlaufen also lotrecht. Infolgedessen kann sich  $\bar{\psi}$  unabhängig von  $\bar{\beta}$  beliebig ändern, d.h. Resonanzzustände zweiter Art sind bei kleiner Amplitude indifferent, denn der Ausdruck (85) wird null.

Die Rollperiode berechnet sich aus (68), wenn man (91) und (93) benutzt und  $\psi/\bar{\psi} = x$  setzt, als Vollständiges Elliptisches Integral 1. Gattung<sup>4)</sup>:

$$T_S = \frac{T_0(0)}{\sqrt{1 + \beta_0}} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{T_0(0)}{\sqrt{1 + \beta_0}} \cdot \frac{2}{\pi} K \quad (97)$$

mit

$$k^2 = \frac{\bar{\beta}_b}{1 + \beta_0} \quad (98)$$

Wir können auch die Erregung als Funktion des Parameters  $k^2$  mit Hilfe elliptischer Integrale darstellen. Für die Blinderregung erhalten wir aus (98) und (59) das Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} \bar{\beta}_b - k^2 \beta_0 &= k^2 & (99) \\ [1 - \eta(0)] \cdot \bar{\beta}_b - \beta_0 &= 0 & (99) \end{aligned} \right\}$$

4) Jahnke und Emde

mit der Lösung

$$\bar{\beta}_6 = \frac{k^2}{1 - k^2 [1 - \eta(0)]}, \quad \beta_0 = \frac{k^2 [1 - \eta(0)]}{1 - k^2 [1 - \eta(0)]} \quad (100)$$

Der von der Oszillogrammform, nicht jedoch von der Amplitude  $\bar{\psi}$ ,  
Der Mittelwert  
abhängige Mittelwert

$$\eta(0) = \frac{2}{T_s} \int_0^{T_s} [1 - u(\psi)] \cdot dt \quad (101)$$

noch  
kann mit Hilfe von (68) und (93), wenn wieder  $\psi/\bar{\psi} = x$  gesetzt  
wird, in die Gestalt

$$\eta(0) = 2 - \frac{2}{T_s} \cdot \sqrt{\frac{\gamma'}{P. \text{Möß.} (1 + \beta_0)}} \cdot 4 \cdot \int_0^1 \frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (102)$$

gebracht werden, so dass man mit Hilfe von (91) und (97) sowie des  
Vollständigen Elliptischen Integrals

$$D \equiv \int_0^1 \frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad 5) \quad (103)$$

den Ausdruck

$$\eta(0) = 2 \cdot \left( 1 - \frac{D}{K} \right) \quad (104)$$

erhält. Hiermit können wir nun unter Benutzung sowohl der Blind-  
amplitude  $\bar{\beta}_k$  der Erregung als auch von (100) die Rollperiode (97)  
als Funktion von  $k^2$  berechnen.

Zur Berechnung der Erregungs-Wirkamplitude (79) bilden wir noch  
mit Hilfe von (68) und (93) aus (80) den Ausdruck

$$\eta_{\beta}(0) = \frac{2}{T_s} \cdot \sqrt{\frac{\gamma' (1 + \beta_0)}{P. \text{Möß.}}} \cdot 4 \cdot \int_0^1 \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} \cdot dx, \quad (105)$$

5) Jahnke und Ende.  $D \equiv \frac{1}{k^2} (K - E)$  nicht zu verwechseln mit unserem Dämpfungsmaß  $D/T_s$ .

welcher ~~wiederum von der Rollamplitude unabhängig ist~~ und sich ebenfalls auf die Vollständigen Elliptischen Integrale K und D zurückführen lässt. Durch Prozesse, welche den auf (34a) und (34b) angewandten ähnlich sind, lässt sich zeigen, dass

$$\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} \cdot dx = \frac{2}{2} K - \frac{1}{3} \cdot (1+k^2) \cdot D \quad (106)$$

ist. Der Ausdruck (105) nimmt also mit (97) und (91) die Gestalt

$$\eta_{\beta}^{(0)} = \frac{1+\beta_0}{3} \cdot \left( 4 - (1+k^2) \cdot \frac{2D}{K} \right) \quad (107)$$

an.

In Bild 11 sind der Verstimmungsfaktor  $T_s/T_0(0)$  und die Wirkamplitude  $\bar{\beta}_w = 2D(\pi) \cdot \eta_{\beta}^{(0)}$  für den konstanten Dämpfungswert  $D = 0,2$  über der Blindamplitude  $\bar{\beta}_b$  aufgetragen worden. Es gestattet, zu jeder Rollperiode aus einer endlichen Umgebung der Eigenperiode  $T_0(0)$  den zur Aufrechterhaltung eines stationären Rollzustandes zweiter Art mit kleiner Amplitude notwendigen Erregerpfeil nach Grösse  $\bar{\beta}$  und Phase  $\beta_0$  bzw. in Komponentendarstellung  $(\bar{\beta}_b, \bar{\beta}_w)$  abzulesen.

Das Bild 11 ist jedoch auch geeignet, instationäre Vorgänge plausibel zu machen, insbesondere die Rollzustände zweiter Art in statu nascendi, sowie das Zustandekommen eines stationären Endzustandes zu betrachten. Wenn nämlich die Amplitude der lotrechten Wechselbeschleunigung den durch  $\bar{\beta}_{min}$  gegebenen Schwellwert übersteigt, welcher wegen der geringen Neigung der für stationäre Rollzustände berechneten  $\bar{\beta}_w$ -Kurve praktisch gleich  $2D(\pi)$  ist, und wenn dabei die doppelte Erregerperiode,  $2T_w$ , innerhalb des durch den Kreisbogen (mit  $\bar{\beta}_w$  um den Ursprung) gegebenen  $T_s$ -Intervalls liegt, so ist das Schiff instabil, weil der Überschuss der Wirkerregung  $\bar{\beta} \cdot \cos \beta_0$  über den zur Entdämpfung des Schiffes notwendigen Wert  $2D(\pi) \cdot \eta_{\beta}^{(0)}$  eine Anfachung bewirkt. Bei geringstem Anstoss entstehen dann Rollschwingungen mit der Periode  ~~$T_s = 2T_w$~~ , deren Amplitude solange anwächst, bis durch nichtlineare Einflüsse ein stationärer Zustand (gemäss den Bildern 8a und 8b) eintritt. - Da diese Betrachtung von beliebig kleinen Rollamplituden  $\bar{\psi} \rightarrow 0$  ausgehen kann,

stellt die triviale Lösung  $\psi(t) \equiv 0$  der Bewegungsgleichung (46), auf welche ja das Kriterium (85) nicht anwendbar ist, innerhalb des durch den Kreisbogen in Bild 11 bestimmten kritischen Periodenintervalls, das wir mit Hilfe von (75) für kleine  $|\bar{\beta}_k|$  näherungsweise in der Form

$$\left| \frac{T_s}{T_0(0)} - 1 \right| < \frac{1}{4} \cdot |\bar{\beta}_k| \quad (108)$$

angeben können, unbeständige Rollzustände zweiter Art dar.

Unter den genannten Bedingungen wächst nun die Rollamplitude  $\bar{\psi}$  ~~wächst nun~~ nach irgendeinem Anstoss solange, bis die veränderte Eigenperiode  $T_0(\bar{\psi})$  eine Blindamplitude der Erregung von so grossem Betrag erfordert, dass die verbleibende Wirkamplitude  $\bar{\beta}_w = \sqrt{\bar{\beta}^2 - \bar{\beta}_k^2}$  gleich dem Wert  $2D(\bar{\beta}_k) \cdot \gamma_{\beta}(\bar{\psi})$  wird, also mit der Dämpfung ins Gleichgewicht tritt. Da sich die zur Entdämpfung des Schiffes erforderliche Wirkamplitude der Erregung (79) ~~noch~~ bei endlichen Amplituden nur wenig ändert, ist also der stationäre Endzustand des beschriebenen Anfachungsvorgangs im wesentlichen durch das "Ausweichen der Resonanz" bestimmt. Dass es ein beständiger Zustand ist, erhellt daraus, dass zu einer grösseren Rollamplitude gleicher Periode wegen des weiteren Ausweichens der Resonanz eine grössere Blinderregung erforderlich ist, welche - sofern nicht die Dämpfung mit wachsender Amplitude maßgeblich abnimmt - nur aus einer stärkeren Erregung kommen kann. Man kann also von hier aus auch unser Beständigkeitskriterium (85) einsehen.

Unsere Betrachtung hat ergeben, dass in dem kritischen Periodenintervall (105) stets ein Rollzustand zweiter Art eintreten muss. Ausserhalb desselben ist die triviale Lösung  $\psi(t) \equiv 0$  beständig, das Schiff wird <sup>dort</sup> also nur unter besonderen Anstossbedingungen in einen Rollzustand zweiter Art versetzt werden. Auf See ist zwar mit allerlei Anstössen zu rechnen, doch ist die Erwartung für einen passenden Anstoss gering. Dieser müsste nämlich nicht nur dem Schiff eine verhältnismässig grosse Energie mitteilen, sondern auch noch nach Grösse und Phase ziemlich gut stimmen. Die in Bild 1 gezeigten Messpunkte konnten nur bei sehr gleichmässigem Lauf des Navipendulum-Geräts und vorsichtigem Verändern der Drehzahl erreicht werden. Bei ungeschicktem Vorgehen brach der ausserhalb des kritischen Periodenintervalls zwar beständige, aber recht diffizile Rollzustand zweiter Art zusammen.

Die grösste mit Sicherheit eintretende Rollamplitude  $\bar{\psi}_{max}$  ist in den beiden für spezielle Hebelarmkurven berechneten Bildern 8a und 8b markiert worden. ~~Wie ersichtlich, ist diese in Falle anfänglich überlinearer Hebelarmkurve (positive Zusatzstabilität) kleiner als im anderen Fall.~~ Da der Bildpunkt des Rollzustandes über dem Grenzpunkt des kritischen Periodenintervalls liegt, von welchem die (gestrichelt gezeichnete) Kurve unbeständiger Rollzustände ausgeht, gilt für die Amplitude  $\bar{\psi}_{max}$  bei nicht zu grosser Blinderregung die mittels (75) gebildete Bestimmungsgleichung

$$\left(1 + \frac{1}{4}\bar{\beta}_6 \cdot \gamma_0(\bar{\psi}_{max})\right) \cdot T_0(\bar{\psi}_{max}) = \left(1 - \frac{1}{4}\bar{\beta}_6\right) \cdot T_0(\omega), \quad (109)$$

bei deren Lösung die Vorzeichenregel (89) zu beachten ist.

Bei derselben Beschränkung von  $|\bar{\beta}_6|$  ist damit zu rechnen, dass schon ein geringes "Ausweichen der Resonanz" den stationären Rollzustand herbeiführt. Dann ist aber der Quotient  $\tau_0(\bar{\psi}_{max}) \equiv T_0(\bar{\psi}_{max})/T_0(\omega)$  nur wenig von 1 verschieden; er kann also gut durch unsere Näherungsformel (23) dargestellt werden. Wenn wir darüberhinaus noch (siehe die Bilder 4 und 6)

$$\gamma(\bar{\psi}_{max}) \approx 1 \quad \text{sowie} \quad \gamma_0(\bar{\psi}_{max}) \approx 1 \quad (110)$$

setzen, so finden wir - da dann die beiden Wurzelausdrücke in (20) einander gleich sind - mittels der etwas groben Näherungsformel

$$\tau(\bar{\psi}_{max}) \approx \sqrt{\frac{M_0 g \cdot \bar{\psi}_{max}}{h(\bar{\psi}_{max})}} \quad (111)$$

eine sehr bequeme Bestimmungsgleichung für die grösste mit Sicherheit eintretende Amplitude der Rollzustände zweiter Art, nämlich:

$$h(\bar{\psi}_{max}) \approx \left(1 + \bar{\beta}_6\right) \cdot M_0 g \cdot \bar{\psi}_{max} \quad (112)$$

Diese Formel lässt sich leicht graphisch auswerten. Man hat die Hebelarmkurve mit derjenigen Ursprungsgeraden zu schneiden, welche die  $(1 + \bar{\beta}_6)$ -fache Steigung der Anfangstangente  $M_0 g \cdot \psi$  hat. ~~Die Steigung ist wegen (89) grösser oder kleiner, je nachdem die Hebelarmkurve anfänglich über- oder unterlinear verläuft.~~ Die algebraische Lösung der Gleichung (112) für

$$h(\psi) = \overline{M_0 g} \cdot \psi \cdot (1 + a \psi^2) \quad \text{lautet}$$

$$\overline{\psi}_{\max} \approx \sqrt{\frac{\overline{\beta_6}}{a}} \quad (113)$$

Sie ist wegen (89) reell.

Eine weit bessere Näherung könnte aus (109) mittels elliptischer Integrale gewonnen werden, doch dürfte dieser Aufwand im allgemeinen nicht erforderlich sein.

e) Nachträge

I. Einflüsse von  $\mathcal{J}(t)$  und  $N(t)$ .

Wir haben noch die Einflüsse sowohl der periodischen Richtungsschwankung  $\mathcal{J}(t)$  des Scheinlotvektors als auch des in (62) gegebenen Moments  $N(t)$  zu betrachten. Wenn wir diese jetzt untersuchen, können wir von der inzwischen gefundenen Tatsache Gebrauch machen, dass die Eigenperiode des Schiffes bei der grössten mit Sicherheit eintretenden Amplitude,  $T_0(\overline{\psi}_{\max})$ , zu derjenigen unendlich kleiner Schwingungen in dem Verhältnis  $1 - \frac{1}{2} \overline{\beta_6}$  steht, dass also der Amplitudeneinfluss praktisch nur einige Prozent beträgt. Wir können daher das Schiff im kritischen Periodenintervall als quasilineares System behandeln und seine Bewegung aus den drei Lösungen  $\psi_1(t)$ ,  $\psi_2(t)$ ,  $\psi_3(t)$  der Differentialgleichung (1) superponieren, welche den Erregungen durch<sup>1)</sup>

- 1) die periodische Grössenschwankung  $\beta(t) \cdot g$  des Scheinlotvektors,
- 2) die periodische Richtungsschwankung  $\mathcal{J}(t)$  desselben und
- 3) das momentane Differenzmoment  $N(t)$  zwischen Dämpfung und Anfachung gemäss den Differentialgleichungen

$$\mathcal{J}' \ddot{\psi}_1 + \left[ 1 + \beta(t) \right] \cdot P \cdot h(\psi_1) = 0 \quad (64)$$

$$\mathcal{J}' (\ddot{\psi}_2 + \mathcal{J}(t)) + W \cdot \dot{\psi}_2 + P \cdot h(\psi_2) = 0 \quad (114)$$

$$\mathcal{J}' \ddot{\psi}_3 + W \cdot \dot{\psi}_3 + P \cdot h(\psi_3) = -N(t) \quad (115)$$

entsprechen.

Wegen (5b) haben die Erregungen  $\beta(t)$  und  $\mathcal{J}(t)$  beide die Amplitude  $\frac{2\pi r}{\lambda}$  und die Periode  $T_w$ , sind aber in der Phase um  $90^\circ$  verschieden. Ihre Phasenlage zu der hier ausführlich behandelten Rollbewegung zweiter Art  $\psi_1(t)$  mit und der Periode  $T_s = 2T_w$  wird durch die Dämpfung bestimmt; sie kann aus der Ansatzgleichung (54) entnommen werden. In Bild 12 sind die Verhältnisse für  $\beta_0 \neq 0$ , also für den Fall, dass die Auf- und Abbeschleunigung  $\beta(t) \cdot g$  der Welle gerade eben die Dämpfungsschwelle  $2D(T_s)$  überwunden hat, qualitativ dargestellt worden. Da  $\beta_w(t)$  (hier  $\approx \beta(t)$ ) das entgegengesetzte Vorzeichen von  $\psi_1 \cdot \dot{\psi}_1$  hat, befindet sich das Schiff auf den Wellenflanken, wo  $\beta(t) = 0$  ist, entweder in der statischen Gleichgewichtslage zur Wellenoberfläche,  $\psi_1 = 0$ , oder in einer Lage grösster Krängung,  $\psi_1 = \pm \bar{\psi}_1$ ; ausserdem muss das Schiff im Wellental, wo  $\beta(t) > 0$  ist, zur statischen Gleichgewichtslage hin, auf dem Wellenberg dagegen in auskrängender Richtung schwingen. Im Sinne des richtigen Zeitablaufs sind die in Bild 12 dargestellten Lagen des Schiffes von links nach rechts zu lesen. Die Welle kommt also von rechts und die grössten Krängungen  $\pm |\bar{\psi}_1|$  des Rollzustandes zweiter Art treten ein, wenn sich das Schiff auf der rückwärtigen Flanke der Welle befindet.

Diesem Rollzustand überlagern wir nun noch den in [1] ausführlich dargestellten Rollzustand erster Art  $\psi_2(t)$  mit der Periode  $T_w$ . Bei quasilinearer Behandlung der Differentialgleichung (114) können wir jetzt mit der Ersatzfrequenz  $\nu_2 \approx \frac{2\pi}{T_s}$

$$\mathcal{J}' (\ddot{\psi}_2 + \nu_2^2 \dot{\psi}_2) + W \cdot \dot{\psi}_2 + \mathcal{J}' \nu_2^2 \psi_2 = 0 \quad (116)$$

schreiben, woraus sich für die resonanzferne Erregerfrequenz  $\omega_2 = \frac{2\pi}{T_w} \approx 2\nu_2$ , bei welcher die Dämpfung keine maßgebliche Rolle mehr spielt, die stationäre Näherungslösung

$$\psi_2(t) \approx -\frac{4}{3} \cdot \mathcal{J}(t) \quad (117)$$

ergibt.)

Wir finden so in den Zeitpunkten, zu denen sich das Schiff auf der rückwärtigen Flanke der Welle befindet, die Krängungen

$$\overline{\psi_{II}} \equiv \overline{\psi_2} \pm \overline{\psi_1} = -\frac{4}{3} \overline{\mathcal{J}} \pm \overline{\psi_1} \quad (118)$$

Da auf der vorderen Wellenflanke  $\psi_1(t) = 0$  ist, stellt  $\bar{\psi}_{II}$  die absolut grösste Krümmung dar. Sie tritt auf der rückwärtigen Wellenflanke ein und ist der Wellenneigung  $\dot{\psi}_1(t)$  entgegen, also leewärts gerichtet. Wegen (82) hat die Dünungsstärke  $\bar{\psi} = \sqrt{\beta}$  beim Erreichen der Dämpfungsschwelle den Wert  $2 D(T_s)$ ,

Unter Benutzung von (113) erhalten wir somit für den Betrag der absolut grössten Krümmung bei gleichzeitigem Auftreten von Rollzuständen erster und zweiter Art die Schätzformel

$$\bar{\psi}_{II} \approx \frac{8}{3} D(T_s) + \sqrt{\frac{\beta_b}{\alpha}} \quad (119)$$

Die ~~dominierende~~ ~~(62)~~ ~~Regel~~ ~~des~~ ~~Differenzialsystems~~ (62), dessen Umlaufintegral über  $d\psi$  wegen (50) bzw. (76) verschwindet, ~~ist die dreifache~~ ist die dreifache Rollfrequenz dominiert

$$\omega_3 = 3 \cdot \frac{2\pi}{T_s} \quad (120)$$

Im Grenzfall kleiner Schwingungen, von dem wir im kritischen Periodenintervall (108) nicht weit entfernt sind, lässt sich dies bei Verwendung von cos- und sin-Funktionen elementar zeigen. Die Amplitude  $\bar{N}$  tritt ein, wenn die Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\psi}_1(t)$  am grössten ist. Für kleine  $\sqrt{\beta_b}$  kann hierfür mit Hilfe von (10)

$$\bar{N} \approx W(T_s) \cdot \sqrt{\frac{2 U(\bar{\psi}_1)}{\gamma_1}} \quad (121)$$

geschrieben werden. Mit der Ersatzfrequenz - vgl. (28) -

$$\nu_3 \approx \frac{2\pi}{T_s} \approx \sqrt{\frac{2 U(\bar{\psi}_1)}{\gamma_1 \bar{\psi}_1^2}} \quad (122)$$

liefert nun (115) für die resonanzferne Erregerfrequenz (120) die stationäre Näherungslösung

$$\psi_3(t) \approx \frac{N(t)}{8 \gamma_1 \nu_3^2} \quad (123)$$

mit der Amplitude

$$\bar{\Psi}_3 \approx \frac{W(T_s) \cdot \Psi_3}{8 \mathcal{D}'(T_s)} \cdot \bar{\Psi}_1 \quad (124)$$

$$\approx \frac{1}{8} \mathcal{D}(T_s) \cdot \bar{\Psi}_1 \quad (124)$$

Da  $\mathcal{D}(T_s)$  bei Schiffen kaum mehr als etwa 0,2 beträgt, bewirkt also das Differenzmoment  $N(t)$  eine Oberschwingung  $\psi_3(t)$ , deren Amplitude nur wenige Prozent der Rollamplitude ausmacht.

\*\*> Wir untersuchen nun noch den Einfluss, welchen die Blinderregung  $\beta_6(t)$  auf die durch (59) bzw. (80) definierten Mittelwerte  $\eta(\bar{\Psi})$  und  $\eta_\beta(\bar{\Psi})$  in erster Näherung hat. Dazu betrachten wir die Integrale

$$\eta(\bar{\Psi}) = \frac{2}{T_s} \int_0^{T_s} [1 - u(\psi)] \cdot dt \quad (59a, b)$$

und

$$\eta_\beta(\bar{\Psi}) = \frac{2}{T_s} \int_0^{T_s} [1 - u(\psi)] \cdot [1 + \beta_0 - \beta_6 \cdot u(\psi)] \cdot dt, \quad (80)$$

Wenn wir in die Integranden die Funktion  $\psi_0(t)$  der freien Schwingung einführen, so erhalten wir wegen (69) die Integrale

$$\eta(\bar{\Psi}) = \frac{2}{T_s} \int_0^{T_0(\bar{\Psi})} [1 - u(\psi_0)] \cdot [1 + \beta_0 - \beta_6 \cdot u(\psi_0)]^{-1/2} \cdot dt \quad (125)$$

$$\eta_\beta(\bar{\Psi}) = \frac{2}{T_s} \int_0^{T_0(\bar{\Psi})} [1 - u(\psi_0)] \cdot [1 + \beta_0 - \beta_6 \cdot u(\psi_0)]^{+1/2} \cdot dt, \quad (126)$$

\*\* II. Die Mittelwerte  $\eta(\bar{\Psi})$  und  $\eta_\beta(\bar{\Psi})$ .

(126)

welche bei Entwicklung der zweiten Klammerfaktoren und Benutzung von (59b) sowie (75) bis auf höhere Potenzen von  $\bar{\beta}_6$  die Ausdrücke

$$\eta(\bar{\psi}) \approx \frac{2}{T_0(\bar{\psi})} \cdot \int_0^{T_0(\bar{\psi})} \left[ 1 - u(\psi) \right] \cdot \left[ 1 + \frac{1}{4} \bar{\beta}_6 \cdot \left( \eta_0(\bar{\psi}) - 2 \cdot [1 - u(\psi)] \right) \right] dt \quad (127)$$

$$\eta_{\beta}(\bar{\psi}) \approx \frac{2}{T_0(\bar{\psi})} \cdot \int_0^{T_0(\bar{\psi})} \left[ 1 - u(\psi) \right] \cdot \left[ 1 - \frac{1}{4} \bar{\beta}_6 \cdot \left( 3 \eta_0(\bar{\psi}) - 2 \cdot [1 - u(\psi)] \right) \right] dt \quad (128)$$

ergeben. Wir haben also im Wesentlichen die über eine Periode der freien Schwingung gemittelten Werte der Funktion  $[1 - u(\psi)]$  sowie ihres Quadrats zu bilden. Mit Hilfe von (31) und dem Symbol

$$\Delta \equiv \frac{1}{T_0(\bar{\psi})} \cdot \int_0^{T_0(\bar{\psi})} [1 - u(\psi)]^2 dt \quad (129)$$

erhalten wir zunächst

$$\eta(\bar{\psi}) \approx \eta_0(\bar{\psi}) + \frac{1}{4} \bar{\beta}_6 \cdot \eta_0^2(\bar{\psi}) - \bar{\beta}_6 \cdot \Delta \quad (130)$$

$$\eta_{\beta}(\bar{\psi}) \approx \eta_0(\bar{\psi}) - \frac{3}{4} \bar{\beta}_6 \cdot \eta_0^2(\bar{\psi}) + \bar{\beta}_6 \cdot \Delta \quad (131)$$

(131)

Nun ist der Mittelwert eines Quadrats stets grösser als das Quadrat des Mittelwerts, und es gilt insbesondere

$$0 \leq [\bar{1-u(\psi_0)}]^2 \leq [\bar{1-u(\psi)}] \leq 1 \quad (132)$$

Infolgedessen ist der Wert des Ausdrucks (129) auf das Intervall

$$\frac{1}{4} \mathcal{P}_0^2(\bar{\psi}) \leq \Delta \leq \frac{1}{2} \mathcal{P}_0(\bar{\psi}) \quad (133)$$

beschränkt. Wir setzen daher

$$\Delta = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{4} \mathcal{P}_0^2(\bar{\psi}) + \frac{1}{2} \mathcal{P}_0(\bar{\psi}) \right) + \frac{1}{8} \delta, \quad (134)$$

wo

$$|\delta| \leq \mathcal{P}_0(\bar{\psi}) \cdot (2 - \mathcal{P}_0(\bar{\psi})) \leq 1 \quad (135)$$

ist, und erhalten schliesslich aus (130) und (131) für den Einfluss der Blinderregung die Abschätzung

(136)

$$\eta(\bar{\psi}) \approx \eta_0(\bar{\psi}) - \frac{1}{8} \bar{\beta}_k \cdot \left( \eta_0(\bar{\psi}) \cdot [2 - \eta_0(\bar{\psi})] + \delta \right), \quad (136)$$

(137)

$$\eta_{1/2}(\bar{\psi}) \approx \eta_0(\bar{\psi}) + \frac{1}{8} \bar{\beta}_k \cdot \left( \eta_0(\bar{\psi}) \cdot [2 - 5\eta_0(\bar{\psi})] + \delta \right). \quad (137)$$

III. Das Konvergenzintervall (74).

Mit Hilfe von (135) und (136) können wir nun als letzten Nachtrag das Konvergenzintervall der  $\bar{\beta}_k$ -Entwicklung (72) berechnen. Wenn wir die Beziehung (136) in der Form

$$\eta(\bar{\psi}) = \eta_0(\bar{\psi}) - a \cdot \bar{\beta}_k \quad (138)$$

mit

$$a = \frac{1}{8} \cdot \left( \eta_0(\bar{\psi}) \cdot [2 - \eta_0(\bar{\psi})] + \delta \right) \quad (139)$$

in die Konvergenzbedingung (73) einführen, so nimmt diese die Gestalt

$$\left| a \cdot \bar{\beta}_k^2 + m \cdot \bar{\beta}_k \right| < 1 \quad (140)$$

mit

$$m = 1 - \eta_0(\bar{\psi}) - a(\psi_0) \quad (141)$$

~~an. Die Grenzen des Konvergenzintervalls sind also formal durch den Schnitt der Parabel  $y_1 = a \cdot \bar{\beta}_k^2$  mit den beiden Geraden  $y_2 = \pm 1 - m \cdot \bar{\beta}_k$  gegeben (Bild 13). Nun sind jedoch die Beiwerte  $a$  und  $m$  keineswegs Konstante; ihr Wertevorrat erfüllt vielmehr wegen (37), (52) und (135) die Intervalle~~

~~$$0 \leq a \leq \frac{1}{4} \eta_0(\bar{\psi}) \cdot [2 - \eta_0(\bar{\psi})] \leq \frac{1}{4} \quad (142)$$~~

bzw.

~~$$-\eta_{\max} \leq m \leq 1. \quad (143)$$~~

an. Das Konvergenzintervall

$$\beta_I < \bar{\beta}_b < \beta_{II} \quad (142)$$

kann also durch Schnitt der Parabelschar

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a \cdot \bar{\beta}_b^{-2} \\ 0 &\leq a \leq \frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \quad (143)$$

mit den beiden Geradenscharen

$$\left. \begin{aligned} y_2 &= \pm 1 - m \bar{\beta}_b \\ -\eta_{max} &\leq m \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (144)$$

gefunden werden, wo die Intervalle der Scharparameter  $a$  und  $m$  aus (37), (123) und (135) bestimmt sind. In Bild 13 sind diese Scharen aufgezzeichnet worden. Die Abszissen derjenigen Schnittpunkte, welche der y-Achse auf verschiedenen Seiten am nächsten liegen, sind die Grenzen  $\beta_I < 0$  und  $\beta_{II} > 0$  des Konvergenzintervalls; denn für jedes  $\bar{\beta}_b$  zwischen diesen Abszissen ist die Bedingung (136) erfüllt, Die betreffenden Schnittpunkte und zugehörigen Konvergenzintervalle sind für  $\eta_{max}=1$  und 1,5 in der Zeichnung markiert worden. Nach Entnahme der zugehörigen Parameter  $a$  und  $m$  wurden die Konvergenzintervalle

$$-0,83 < \bar{\beta}_b < +0,83 \quad \text{für } \eta_{max}=1 \text{ (unterlinear)} \quad (145)$$

$$(190)$$

$$-0,60 < \bar{\beta}_b < +0,66 \quad \text{für } =1,5 \text{ (überlinear)} \quad (146)$$

rechnerisch gefunden

### 5. Zusammenfassung.

Vermöge eines Ansatzes, welcher die spezielle Wellenform unberücksichtigt läßt, haben wir die periodischen Lösungen der Bewegungsgleichung auf die normierten Grundfunktionen der freien Rollbewegung in ruhigem Wasser, nämlich die Rollperiode  $\tau(\bar{\psi})$  und das Phasenumlaufintegral  $\Phi(\bar{\psi})$  bzw. die daraus herleitbare Funktion  $\eta_0(\bar{\psi})$  zurückführen können. Die allgemeingültige Betrachtung hat zu folgender Einsicht geführt.

Rollzustände zweiter Art entstehen mit Sicherheit, wenn bei seitlicher Dünung die doppelte Wellenperiode in ein verhältnismäßig enges Intervall fällt, welches die Eigenperiode des Schiffes für kleine Amplituden enthält, und wenn die Dünungsstärke die Dämpfungsschwelle überschreitet. Das Schiff wird dann dynamisch instabil und schaukelt sich auf, bis seine Eigenperiode infolge des nicht-linearen Hebelarmverlaufs soweit verstimmt ist, daß ein beständiger Rollzustand eintritt. Die größte im kritischen Periodenintervall mögliche Amplitude hängt also von der Zusatzstabilität ab, sie kann leicht näherungsweise aus der Hebelarmkurve gewonnen werden. Außerhalb des kritischen Periodenintervalls sind Rollzustände zweiter Art mit noch größerer Amplitude zwar möglich, aber wenig wahrscheinlich.--Da bei normaler Dünungsstärke das kritische Periodenintervall schmal ist, erweisen sich die für die Grundfunktionen angegebenen Näherungsformeln als gut brauchbar.

Für zwei spezielle Beispiele, nämlich a) ein Schiff mit anfänglich überlinearem Verhalten (positive Zusatzstabilität) und b) ein Schiff mit sinusförmiger Hebelarmkurve, haben wir die Grundfunktionen sowie die Resultate (z.B. in Form von Resonanzkurven) angegeben.

Der Verfasser verdankt Herrn Prof. Dr.-Ing. G. Weinblum einen Forschungsauftrag des Office of Naval Research, Washington D. C., aus welchem die vorliegende Arbeit finanziert wurde.

### Schrifttum

- [1] Baumann, H.: "Rollzustände großer Amplituden in seitlicher Dünung."  
Schiffstechnik Heft 10 (1955), S. 189.
- [2] Vedeler, G.: ~~\*\*\*~~ ~~"Notes on the Rolling of Ships." TINA 67 (1925), S. 166.~~
- [3] Graff, W. und Heckscher, E.: "Widerstands- und Stabilitätsversuche  
mit drei Fischdampfermodellen." Werft, Reederei, Hafen  
22 (1941), S. 115.
- [4] Kempf, G.: "Die Stabilitätsbeanspruchung der Schiffe durch Wellen und  
Schwingungen." Werft, Reederei, Hafen 1938.
- [5] Grim, O.: "Rollschwingungen, Stabilität und Sicherheit im Seegang."  
Schiffstechnik Heft 1 (1952), S. 10.
- [6] Jens, J.: " Die Periodenbestimmung freier, ungedämpfter Schlinger-  
schwingungen." Schiffstechnik Heft 27 (1958), S. 125.
- [7] Scribanti, A.: " On the Heeling and Rolling of Ships of small initial  
Stability." TINA 46 (1904), S. 93.
- [8] Weinblum, G. und St. Denis, M.: "On the Motion of Ships at Sea."  
Annual meeting SNAME 1950.

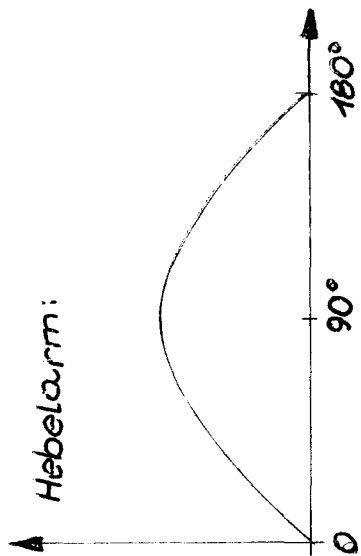
\*\*\*

"A Mathieu Equation for Ships Rolling among Waves I and II!"  
Det Kongelige Norske Videnskabers Selskabs Forhandlinger  
22 (1949) S. 113.

- Bild 1 Rollzustände zweiter Art am Navipendulum (Werft, Reederei, Hafen 22 (1941) S.103-104) bei 3 verschiedenen Dämpfungen.
- Bild 2 Zur Erläuterung der Bewegungsgleichung eines Schiffes in Dünung.
- Bild 3a Vierteloszillogramme und Viertelperioden eines Schiffes mit Zusatzstabilität, abhängig von der Rollamplitude.
- Bild 3b Vierteloszillogramme und Viertelperioden eines Schiffes mit sinusförmiger Hebelarmkurve, abhängig von der Rollamplitude.
- Bild 4 Die Amplitudenfunktion  $q(\bar{\psi})$  bei Rollschwingungen gemäss Bild 3a bzw. 3b.
- Bild 5 Die Phasenumlaufintegrale  $\phi(\bar{\psi})$  und die Näherungswerte nach Formel (30) bei Rollschwingungen gemäss Bild 3a bzw. 3b.
- Bild 6 Die Amplitudenfunktion  $\eta_0(\bar{\psi})$  bei Rollschwingungen gemäss Bild 3a bzw. 3b. *Näherungswerte nach (39).*
- Bild 7 Zur Erläuterung der Transformationsformel (69).
- Bild 8a Resonanzkurve zweiter Art eines Schiffes mit Zusatzstabilität. Die gestrichelten Kurventeile stellen unbeständige Rollzustände dar.  $\bar{\psi}_{max}$  ist die grösste mit Sicherheit eintretende Rollamplitude. Zustände mit grösserer Amplitude sind wenig wahrscheinlich.

- Bild 8b Resonanzkurve zweiter Art eines Schiffs mit sinusförmiger Hebelarmkurve.  
Die gestrichelten Kurventeile stellen unbeständige Rollzustände dar.  $\bar{\psi}_{max}$  ist die grösste mit Sicherheit eintretende Rollamplitude. Zustände mit grösserer Amplitude sind wenig wahrscheinlich.
- Bild 9 Zusammenstellung von an fahrenden Modellen gemessenen Dämpfungswerten nach Weinblum und St.Denis [8].
- Bild 10 Abhängigkeit der Dämpfungswerte von der Rollamplitude nach Grim [5].
- Bild 11 Zum Studium der (nicht beständigen) Rollzustände zweiter Art bei kleiner Amplitude.
- Bild 12 Phasenlage eines Schiffs in der Welle, wenn die Dünungsstärke gerade die für Rollzustände zweiter Art charakteristische Dämpfungsschwelle übersteigt.
- Bild 13 Zur Ermittlung des Konvergenzintervalls (73).

Rollamplitude  $\uparrow$  180° 160° 140° 120° 100° 80° 60° 40° 20°



Grundkurve  
(freie Schwingung)



0,8 1,0 1,2 1,4 1,6  $\blacktriangle \rightarrow T_5/T_0$