

150 | 1965

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Dr.-Ing. Maria Kirsch

Umströmung von Körpern auf flachem Wasser und in Kanälen

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

Umströmung von Körpern auf flachem Wasser und in Kanälen

Dr.-Ing. Maria Kirsch

Institut für Schiffbau der Universität Hamburg

Problemstellung

Durch das Vorhandensein eines Körpers wird die Strömung in einer Flüssigkeit beeinflusst. Die gleiche Wirkung kann erzielt werden durch eine bestimmte Verteilung von Singularitäten in der Flüssigkeit. Man sagt dann, der Körper werde durch diese Singularitäten erzeugt. — Zur Berechnung des Geschwindigkeitspotentials benutzt man meist an Stelle des Körpers seine Singularitätenverteilung.

Da jegliches Hindernis in der Flüssigkeit einen Einfluß auf die Strömung ausübt, ist es klar, daß einem Körper in begrenzter Flüssigkeit eine andere Singularitätenverteilung entspricht als in unbegrenzter Flüssigkeit. — Will man bei irgendwelchen Berechnungen die gleiche Singularitätenverteilung für begrenzte und für unbegrenzte Flüssigkeit zugrunde legen, so muß man sich zunächst über das Aussehen des Körpers in diesen beiden Fällen Klarheit schaffen, d. h. man muß die Deformierung auf Grund der Flüssigkeitsbegrenzung bestimmen. Erst dann, wenn die tatsächliche Kontur des Körpers bekannt ist, hat man beispielsweise die Möglichkeit, die Geschwindigkeit der Strömung direkt am Körper zu ermitteln.

In der vorliegenden Veröffentlichung soll an Hand einiger Beispiele der Einfluß von festen Flüssigkeitsbegrenzungen auf die Form des Körpers und auf die Strömungsgeschwindigkeit direkt am Körper und in seiner näheren Umgebung festgestellt werden.

Die Strömung wird stets als Potentialströmung mit der Translationsgeschwindigkeit u_0 angenommen.

1. Der ebene Fall eines Dipols

Durch einen Dipol wird in unbegrenzter Flüssigkeit in einer Parallelströmung ein Kreis erzeugt. Aus der Stromfunktion

$$\psi = u_0 y \left(1 - \frac{b^2}{x^2 + y^2} \right) \quad (1)$$

erhält man für $\psi = 0$ die Gleichung des Kreises mit dem Radius b . Hierbei ist das Koordinatensystem so gewählt, daß der Dipol im Koordinatenursprung liegt und die Parallelströmung in Richtung der x -Achse verläuft (Bild 1). Die Größe b des Radius hängt von der Dipolstärke ab.

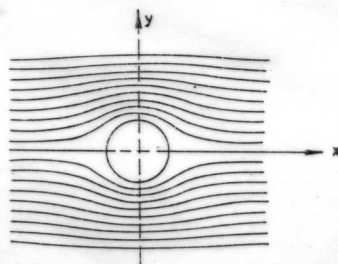


Bild 1 Die Strömung um einen Kreis

Wird die Flüssigkeit nun durch zwei parallele Geraden im Abstand $\pm h$ von der x -Achse begrenzt, so lautet nach Lamb [1] die Gleichung der Stromfunktion:

$$\psi = u_0 y - \frac{\pi u_0 b^2}{2h} \frac{\sin \frac{\pi y}{h}}{\operatorname{Co}f \frac{\pi x}{h} - \cos \frac{\pi y}{h}} \quad (2)$$

Für den Grenzübergang $h \rightarrow \infty$ geht die Gl. (2) in (1) über. Aus (2) erhält man für $\psi = 0$ die Konturen der durch den gleichen Dipol erzeugten Querschnitte für verschiedene Größen h , bzw. für verschiedene Verhältnisse h/b . In Bild 2 sind die y -Ordinaten der Querschnitte bei $x = 0$ und $x = 0,5b$ als Funktionen des Verhältnisses h/b dargestellt, in Bild 3 die Konturen selbst. — Man sieht daraus, daß die Deformierung bei Verringerung von h/b zunimmt, daß aber selbst bei sehr kleinen h/b -Werten der Kreischarakter des Querschnitts in etwa erhalten bleibt. Der Vergleich der Zahlenwerte in Tabelle 1a zeigt, daß der Unterschied der beiden Durchmesser bei $x = 0$ und $y = 0$ sogar für $h/b = 2$ nur gut 1 % beträgt. — Diese Feststellung ist insofern von Interesse, als daraus gefolgert werden kann, daß die Rotationsymmetrie von Rotationskörpern, die infolge begrenzter Wassertiefe deformiert werden, nicht verlorengeht, so daß auch im Flachwasser mit ihnen als Rotationskörpern gerechnet werden kann.

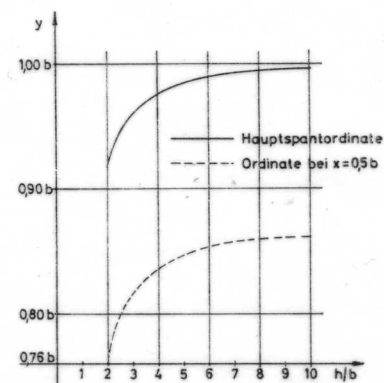


Bild 2 $y = f(h/b)$ für den Querschnitt, der durch einen Dipol erzeugt wird

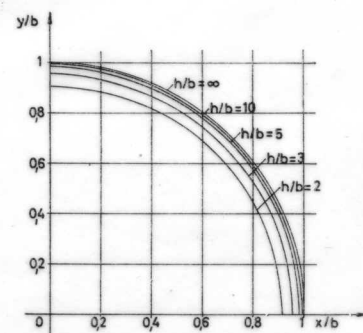


Bild 3 Die Querschnitte, die durch einen Dipol bei verschiedenen Wassertiefen erzeugt werden

Tabelle 1 Die Querschnitte, die durch einen Dipol auf verschiedenen Wassertiefen erzeugt werden und die x-Komponenten der Geschwindigkeit.

a) Die halbe Querschnittslänge, die y-Ordinate für $x = 0$, die Geschwindigkeit im Konturpunkt bei $x = 0$ und die Geschwindigkeit u_x^*/u_0 im Ersatzpunkt $(0, b)$

h/b	L/2b	y/b	$u_x(0, y)/u_0$	$u_x(0, b)/u_0$
2	0,9183	0,9080	2,4409	2,2337
3	0,9596	0,9565	2,1893	2,0966
5	0,9842	0,9838	2,0669	2,0336
10	0,9960	0,9958	2,0170	2,0074
∞	1,0000	1,0000	2,0000	2,0000

b) Die y-Ordinate bei $x = 0,5b$, die Geschwindigkeit u_x/u_0 in diesem Punkt und die Geschwindigkeit u_x^*/u_0 im Ersatzpunkt $(0,5b, 0,8660b)$

h/b	y/b	$u_x(0,5b, y)/u_0$	$u_x(0,5b, 0,8660b)/u_0$
2	0,7620	1,6919	1,7168
3	0,8163	1,5892	1,5938
5	0,8474	1,5325	1,5331
10	0,8612	1,5081	1,5081
∞	0,8660	1,5000	1,5000

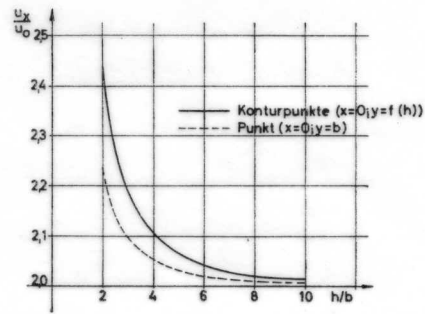
Zu untersuchen ist noch die Frage, wie groß der Fehler wird, wenn die Geschwindigkeit am Körper berechnet werden soll und statt dessen die Geschwindigkeit in gewissen Ersatzpunkten ermittelt wird, die bei gleicher Singularitätenverteilung in unbegrenzter Flüssigkeit Konturpunkte darstellen, in begrenzter Flüssigkeit aber um so weiter von der tatsächlichen Körperoberfläche entfernt sind, je enger die Begrenzung, d. h. je kleiner das Verhältnis h/b ist.

Im Falle des Dipols sind uns bei gleicher Dipolstärke die Konturen der Querschnitte für verschiedene Verhältnisse h/b bekannt (Bild 3). Deshalb kann die Geschwindigkeit direkt in den Konturpunkten und in den Ersatzpunkten berechnet und miteinander verglichen werden.

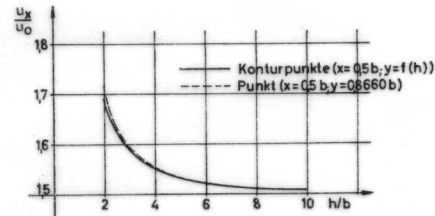
Aus Gleichung (2) erhält man durch partielle Differentiation nach y die x-Komponente der Geschwindigkeit:

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = u_0 y - \frac{u_0 \pi^2 b^2}{2h^2} \frac{\cos \frac{\pi y}{h} \left(\cos \frac{\pi x}{h} - \cos \frac{\pi y}{h} \right) - \sin^2 \frac{\pi y}{h}}{\left(\cos \frac{\pi x}{h} - \cos \frac{\pi y}{h} \right)^2} \quad (3)$$

Für $h/b = 2$ wird aus (3) die Geschwindigkeit u_x , bzw. u_x/u_0 im Konturpunkt $x = 0$, $y = 0,9080 \cdot b$ berechnet und im sogenannten Ersatzpunkt $x = 0$, $y = b$; die Geschwindigkeit im Ersatzpunkt soll mit u_x^* bezeichnet werden. Ein Vergleich der beiden Geschwindigkeiten in einigen Kontur- und ihren Ersatzpunkten für mehrere Verhältnisse h/b wird in Tabelle 1 gebracht; in Bild 4 ist der Sachverhalt graphisch dargestellt. Man erkennt, daß die Abweichungen für $x = 0,5b$ sehr gering sind, für $x = 0$ jedoch gerade bei kleinen h/b -Verhältnissen erheblich größer. Dazu ist zu bemerken, daß der durch einen Dipol erzeugte Querschnitt einen sehr speziellen Fall darstellt und daher die Ergebnisse bezüglich der Geschwindigkeit nur von rein theoretischem Interesse sind. Sie sind hier nur der Vollständigkeit halber gebracht worden, und sie erlauben keinerlei Schlußfolgerungen hinsichtlich der Frage, ob man in anderen Fällen bei Geschwindigkeitsberechnungen die tatsächlichen Konturpunkte durch die vorher definierten Ersatzpunkte annähern darf. Um hierüber zu gültigen Aussagen zu gelangen, bedarf es einer allgemeineren Körperkontur als des durch einen Dipol erzeugten Kreises.



a) Die Geschwindigkeit am Hauptspant und im Punkt $(0, b)$



b) Die Geschwindigkeit in den Konturpunkten bei $x = 0,5b$ und im Punkt $(x = 0,5b; y = 0,8660b)$

Bild 4 Vergleich der Geschwindigkeit an den durch einen Dipol erzeugten Querschnitten bei Berücksichtigung und bei Außerachtlassung der Deformierung durch den Flachwassereinfluß

2. Die Strömung um ein Oval

Die nächst einfachste Singularitätenverteilung nach einem Dipol ist die Verteilung einer Quelle und einer Senke gleicher Stärke in einer Flüssigkeit im Abstand $2a$ voneinander. Hierdurch wird ein ovaler Querschnitt erzeugt, auch Rankinesches Oval [2] genannt. Das Koordinatensystem werde so gewählt, daß der Quell- und der Senkenpunkt im Abstand $\pm a$ vom Koordinatenursprung auf der x-Achse liegen. Dann lautet die Gleichung der Stromfunktion in unbegrenzter Flüssigkeit:

$$\psi = u_0 y - \frac{u_0 b}{2 \operatorname{arctg} \frac{a}{b}} \left(\operatorname{arctg} \frac{a-x}{y} - \operatorname{arctg} \frac{a+x}{y} \right) \quad (4)$$

Für $\psi = 0$ erhält man die Gleichung des Ovals; die Breite $2b$ des Ovals ist von der Quellstärke abhängig. Die partielle Differentiation von (4) nach y ergibt wieder die x-Komponente der Geschwindigkeit:

$$\frac{u_x}{u_0} = 1 + \frac{b}{2 \operatorname{arctg} \frac{a}{b}} \left(\frac{a-x}{(a-x)^2 + y^2} + \frac{a+x}{(a+x)^2 + y^2} \right) \quad (5)$$

Aus Gl. (5) kann man die Länge L des Ovals bestimmen: Für $x = \pm L/2$ ist $y = 0$; ferner weiß man, daß in diesen Punkten die Geschwindigkeit $u_x = 0$ sein muß. Damit erhält man:

$$\frac{L}{2} = \sqrt{a^2 + \frac{ab}{\operatorname{arctg} \frac{a}{b}}} \quad (6)$$

In Bild 5 sind die Länge und die Geschwindigkeit für den Konturpunkt bei $x = 0$ als Funktionen des Verhältnisses a/b dargestellt; Tabelle 2 gibt die zugehörigen Zahlenwerte. Wird nun die Parallelströmung durch zwei Geraden im Abstand $\pm h$ von der x-Achse begrenzt, so gilt nach Lamb [1] für die Stromfunktion:

Tabelle 2 Die Länge des Rankineschen Ovals und die Geschwindigkeit am Oval bei $x = 0$ in Abhängigkeit von a/b in unbegrenzter Flüssigkeit.

a/b	1	2	3	6	8	10	12
$L/2a$	1,5077	1,2049	1,1256	1,0576	1,0423	1,0334	1,0276
u_x/u_0	1,6366	1,3613	1,2402	1,1186	1,0851	1,0673	1,0556

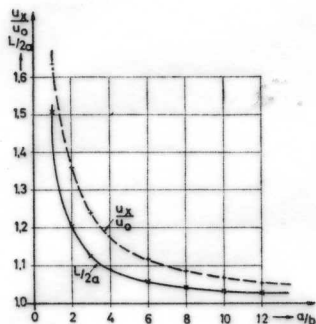


Bild 5 Die Länge und die Geschwindigkeit des Rankineschen Ovals als Funktionen des Verhältnisses a/b in unbegrenzter Flüssigkeit (am Hauptspant)

$$\psi = u_0 y - \frac{u_0 b}{2 \operatorname{arctg} \frac{a}{b}} \left(\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \operatorname{ang} \frac{\pi(a-x)}{2h}}{\operatorname{tg} \frac{\pi y}{2h}} + \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \operatorname{ang} \frac{\pi(a+x)}{2h}}{\operatorname{tg} \frac{\pi y}{2h}} \right) \quad (7)$$

Für die Geschwindigkeit in x-Richtung ergibt sich

$$\frac{u_x}{u_0} = \frac{1}{u_0} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 1 + \frac{\pi b}{4h \cos^2 \frac{\pi y}{2h} \operatorname{arctg} \frac{a}{b}} \left(\frac{\operatorname{Im} \operatorname{ang} \frac{\pi(a-x)}{2h}}{\operatorname{Im} \operatorname{ang}^2 \frac{\pi(a-x)}{2h} + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi y}{2h}} + \frac{\operatorname{Im} \operatorname{ang} \frac{\pi(a+x)}{2h}}{\operatorname{Im} \operatorname{ang}^2 \frac{\pi(a+x)}{2h} + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi y}{2h}} \right) \quad (8)$$

Aus den beiden Gleichungen erhält man, wie im Falle unbegrenzter Flüssigkeit, die Konturpunkte sowie die halbe Länge und die halbe Breite des Ovals. Letztere wird nun kleiner als b ausfallen. Der Unterschied zu b wird um so größer sein, je kleiner das Verhältnis h/b ist. — In Bild 6 sind die Ordinaten des Ovals bei $x = 0$ und $x = 0,5a$ über h/b mit a/b als Parameter aufgetragen, in Bild 7 in Abhängigkeit von a/b mit h/b als Parameter. Bild 8 und 9 zeigen die Zusatzgeschwindigkeit*) am Oval als Funktion des Verhältnisses h/b , einmal bei $x = 0$ und zum andern bei $x = 0,5a$. Tabelle 3 enthält die errechneten Werte zu den Bildern 6 bis 9, sowie die Angaben über die Zusatzgeschwindigkeit in den entsprechenden

*) Unter der Zusatzgeschwindigkeit Δu_x ist die Differenz der beiden Geschwindigkeiten u_x und u_0 zu verstehen: $\Delta u_x = u_x - u_0$.

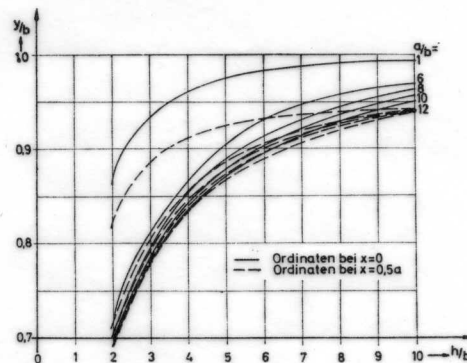


Bild 6 Die Ordinaten des Ovals als Funktion der Wassertiefe

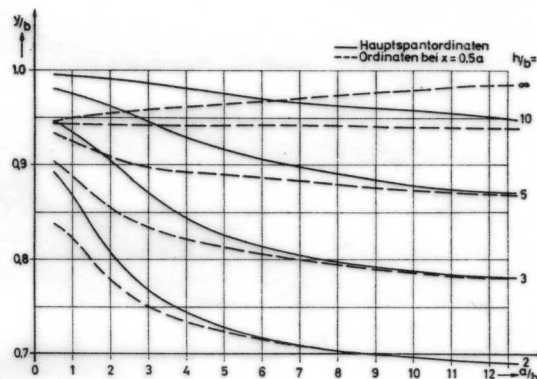


Bild 7 Die Ordinaten des Ovals in Abhängigkeit von a/b

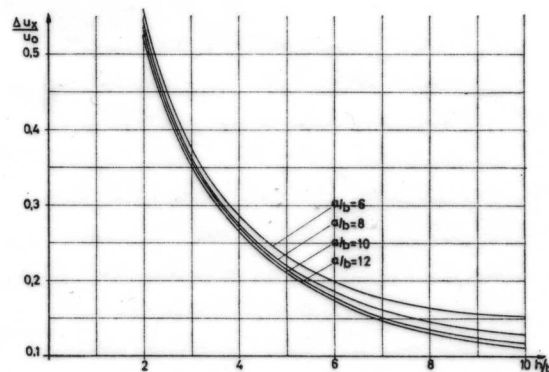


Bild 8 Die Zusatzgeschwindigkeit am Oval in Abhängigkeit von der Wassertiefe (am Hauptspant)

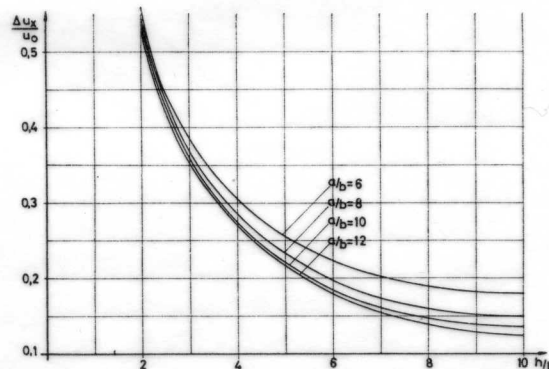


Bild 9 Die Zusatzgeschwindigkeit am Oval in Abhängigkeit von der Wassertiefe (Konturpunkt bei $x = 0,5 a$)

Tabelle 3 Die Ordinaten des Rankineschen Ovals für $x = 0$ und $x = 0,5a$ bei verschiedenen Wassertiefen und die x -Komponenten der Zusatzgeschwindigkeit in diesen und den entsprechenden Punkten des in unbegrenzter Flüssigkeit erzeugten Ovals.

		$\frac{\Delta u_x}{u_0}$ Zusatzgeschwindigkeit am Querschnitt		$\frac{\Delta u_x^*}{u_0}$ Zusatzgeschwindigkeit im Vergleichspunkt	
a/b	h/b	x/a	y/b	x/a	y/b
6	2	0	0,7169	0,5588	0,5587
		3	0,8135	0,3734	0,3732
		5	0,9060	0,2323	0,2319
		10	0,9696	0,1507	0,1505
		∞	1,0000	0,1186	0,1186
8	2	0	0,7038	0,5430	0,5430
		3	0,7973	0,3621	0,3621
		5	0,8902	0,2196	0,2195
		10	0,9634	0,1266	0,1266
		∞	1,0000	0,0851	0,0851
10	2	0	0,6961	0,5339	0,5339
		3	0,7875	0,3559	0,3559
		5	0,8793	0,2142	0,2142
		10	0,9566	0,1159	0,1159
		∞	1,0000	0,0673	0,0673
12	2	0	0,6910	0,5279	0,5279
		3	0,7810	0,3519	0,3520
		5	0,8717	0,2114	0,2144
		10	0,9509	0,1103	0,1103
		∞	1,0000	0,0556	0,0556

Ersatzpunkten, die gleich den Konturpunkten des Ovals in unbegrenzter Flüssigkeit sind; beispielsweise hat die Zusatzgeschwindigkeit für $h/b = 2$ und $a/b = 6$ im Konturpunkt ($x = 0, y = 0,7169b$) den Wert $\Delta u_x = 0,5588u_0$ und im Ersatzpunkt ($x = 0, y = b$) den Wert $\Delta u_x = 0,5587u_0$.

Der Vergleich der Werte $\Delta u_x/u_0$ und $\Delta u_x^*/u_0$ in Tabelle 3 läßt erkennen, daß die Größenunterschiede selbst bei extremen Fällen so gering sind, daß sie im Rahmen der Zeichengenauigkeit in den Bildern 8 und 9 nicht angegeben werden konnten. Deshalb kann man für die Ermittlung der Geschwindigkeit ohne weiteres die Ersatzpunkte an Stelle der tatsächlichen Konturpunkte zugrunde legen.

Da das Oval einen bedeutend allgemeineren Querschnitt darstellt als beispielsweise der durch einen Dipol erzeugte Kreis, ist die Schlußfolgerung erlaubt, daß auch bei anderen Querschnitten die Geschwindigkeit in den Konturpunkten gleich der Geschwindigkeit in den Ersatzpunkten gesetzt werden darf. Das bedeutet, daß man bei derartigen Rechnungen stets die Singularitätenverteilung der unbegrenzten Flüssigkeit zugrunde legen kann.

Die Zusatzgeschwindigkeit am Oval zwischen zwei parallelen Geraden ist auch von Glazebrook [3] berechnet worden. Aber im Unterschied zu der vorliegenden Veröffentlichung, in welcher die Quellenintensität konstant gehalten wird, nimmt Glazebrook die Quellenintensität als Funktion der Größe h an, d. h. er verstärkt die Quellenintensität bei Verringerung von h derart, daß die Breite des Ovals stets gleich $2b$ bleibt. Darum wird, verglichen mit dem hier betrachteten Oval, das Oval von Glazebrook um so dicker sein, je kleiner das Verhältnis h/b ist und desto größer wird der Unterschied in der Geschwindigkeit werden. Bild 10 und 11, die einen Vergleich der Geschwindigkeiten bringen, bestätigen diese Überlegung.

3. Das Ovoid im Rohr nach Lamb

Nachdem der Einfluß fester Begrenzungen der Flüssigkeit auf die Umströmung von Körpern an Hand zweier Beispiele

für das ebene Problem untersucht worden ist, soll nun der Übergang zum räumlichen Problem erfolgen. Dabei beschränken wir uns, wegen der Schwierigkeit der allgemeinen Aufgabe, auf den Fall des rotationssymmetrischen Ovoids, das — analog dem Oval im ebenen Fall — durch eine Quelle und eine Senke gleicher Intensität in räumlich unbegrenzter Flüssigkeit in einer Parallelströmung erzeugt wird. Befinden sich die Quelle und die Senke im Abstand $\pm a$ auf der x -Achse und verläuft die Parallelströmung in Richtung der x -Achse, so lautet die Gleichung der Stromfunktion:

$$\psi = \frac{1}{2} u_0 r^2 + \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{x-a}{[(x-a)^2 + r^2]^{1/2}} - \frac{x+a}{[(x+a)^2 + r^2]^{1/2}} \right) \quad (9)$$

Mit r ist der Radius des Querschnitts an einer beliebigen Stelle x bezeichnet, mit Q die Quellstärke, aus der sich die Breite $2b$ des Ovoids bei $x = 0$ ergibt:

$$b^2 (a^2 + b^2)^{1/2} = \frac{Qa}{\pi u_0} \quad (10)$$

Wegen der Rotationssymmetrie können wir uns auf die xz -Ebene beschränken, für welche $r = z$ ist.

Dann haben wir für die Stromfunktion

$$\psi = \frac{1}{2} u_0 z^2 + \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{x-a}{[(x-a)^2 + z^2]^{1/2}} - \frac{x+a}{[(x+a)^2 + z^2]^{1/2}} \right) \quad (9)$$

und für die Geschwindigkeit

$$\frac{u_x}{u_0} = -1 + \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{x-a}{[(x-a)^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{x+a}{[(x+a)^2 + z^2]^{3/2}} \right) \quad (11)$$

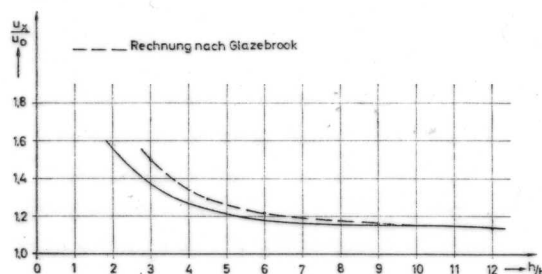


Bild 10 Vergleich der Zusatzgeschwindigkeit am Oval im Flachwasser mit den von Glazebrook berechneten Werten, bei denen die Intensität als Funktion der Wassertiefe angenommen ist, für $a/b = 6$ (am Hauptspant)

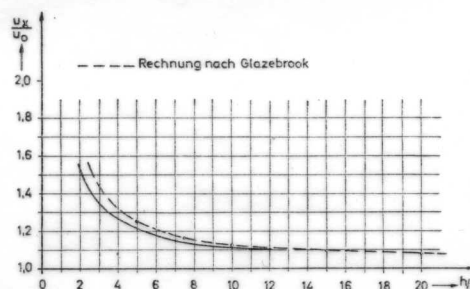


Bild 11 Vergleich der Zusatzgeschwindigkeit am Oval im Flachwasser mit den von Glazebrook berechneten Werten, bei denen die Intensität als Funktion der Wassertiefe angenommen ist, für $a/b = 10$ (am Hauptspant)

Aus Gl. (11) erhält man mit $u_x = 0$ und $z = 0$ für x die halbe Länge des Ovoids.

Soll nun die Flüssigkeit eine feste Begrenzung erhalten, so ist der rechnerisch am einfachsten zu behandelnde Fall wohl der, die Flüssigkeit durch einen unendlich langen Kreiszyylinder um die x -Achse mit dem Radius h zu begrenzen, weil in diesem Falle — wegen der Rotationssymmetrie des Ovoids —, alle Punkte eines Querschnitts den gleichen Abstand von der Begrenzung haben. Lamb hat sich in einer Untersuchung [4] mit dem Problem des Ovoids im Rohr beschäftigt. Danach gilt für die Stromfunktion im Intervall $-a < x < +a$:

$$\psi = \frac{1}{2} u_0 r^2 + \frac{Q}{2\pi h^2} (r^2 - h^2) - \frac{Q}{\pi h^2} \sum_k \frac{r J_0'(kr)}{k J_0^2(kh)} e^{-ka} \cos kx \quad (12)$$

und für die Geschwindigkeit

$$\frac{u_x}{u_0} = -1 - \frac{Q}{\pi h^2 u_0} \left(1 + \sum_k \frac{J_0(kb)}{J_0^2(kh)} e^{-ka} \right). \quad (13)$$

J_0 und J_0' sind Besselfunktionen, und es gilt

$$J_0'(kr) = -J_1(kr).$$

Aus den Gleichungen (12) und (13) wurden die Konturpunkte bei $x = 0$ und $x = 0,5a$ und die Geschwindigkeiten in diesen Punkten und in den Ersatzpunkten berechnet für $a/b = 6, 8, 10$ und 12 und für $h/b = 2, 3, 5$ und 10 . — Da

Tabelle 4 Die Ordinaten des Ovoids im Rohr bei $x = 0$ und $x = 0,5a$ und die Zusatzgeschwindigkeit in x -Richtung in diesen Punkten und den Punkten des Ersatzkörpers

a/b	h/b	x/a	z/b	$\frac{\Delta u_x}{u_0}$	$\frac{\Delta u_x^*}{u_0}$	x/a	z/b	$\frac{\Delta u_x}{u_0}$	$\frac{\Delta u_x^*}{u_0}$	
6	2	0	0,8993	0,25345	0,25345	0,5	0,8988	0,25440	0,25414	
			0,9544	0,11291	0,11291		0,9518	0,11769	0,11746	
	5	10	∞	0,9860	0,04278	0,04277	0,9801	0,05359	0,05350	
				0,9978	0,01798	0,01798	0,9907	0,03144	0,03122	
				1,0000	0,01351	0,01351	0,9925	0,02717	0,02717	
				0,9872	0,25195	0,25195	0,5	0,8972	0,25209	0,25204
8	2	0	0,9520	0,11198	0,11199	0,5	0,9512	0,11337	0,11330	
			0,9840	0,04078	0,04078		0,9814	0,04582	0,04579	
	5	10	∞	0,9973	0,01327	0,01327	0,9930	0,02130	0,02129	
				1,0000	0,00769	0,00769	0,9956	0,01612	0,01612	
				0,8962	0,25125	0,25125	0,5	0,8962	0,25127	0,25126
				0,9508	0,11167	0,11167	0,9506	0,11244	0,11240	
10	2	0	0,9829	0,04030	0,04030	0,5	0,9817	0,04264	0,04263	
			0,9968	0,01143	0,01144		0,9942	0,01650	0,01650	
	5	10	∞	1,0000	0,00495	0,00495	0,9971	0,01059	0,01059	
				0,8957	0,25087	0,25087	0,5	0,8956	0,25087	0,25087
				0,9502	0,11150	0,11150	0,9501	0,11171	0,11171	
				0,9822	0,04014	0,04016	0,9817	0,04124	0,04123	
12	2	0	0,9964	0,01066	0,01066	0,5	0,9948	0,01395	0,01395	
			1,0000	0,00345	0,00345		0,9979	0,00746	0,00746	

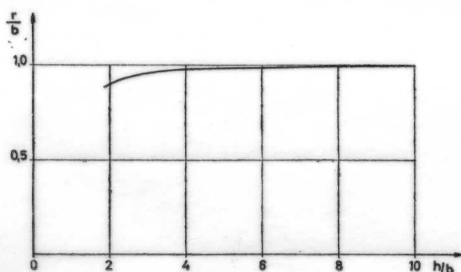


Bild 12 Der Radius des Ovoids bei $x = 0$, für $a/b = 8$

die maximale Geschwindigkeit am Ovoid nicht bei $x = 0$ sondern etwa bei $x = 0,95a$ auftritt, wurde für die extremen Verhältnisse $h/b = 2$ und $h/b = 3$ noch eine Kontrollrechnung für $x = 0,95a$ durchgeführt. Die numerischen Ergebnisse liegen in den Tabellen 4 und 5 vor. In Bild 12 ist der Querschnittsradius des Ovoids bei $x = 0$ für $a/b = 8$ als Funktion des Verhältnisses h/b aufgetragen, in Bild 13 die Zusatzgeschwindigkeit in den Ovoidpunkten bei $x = 0$ und $x = 0,5a$. Da die Geschwindigkeiten in diesen beiden Punkten sich bei gleichem h/b nur sehr wenig voneinander und von der Geschwindigkeit in den Ersatzpunkten unterscheiden, können sie statt durch vier Kurven durch eine einzige Kurve dargestellt werden. — Die numerischen Werte für die anderen a/b -Verhältnisse sind fast die gleichen wie für $a/b = 8$; deshalb wurde auf ihre graphische Darstellung verzichtet.

Bild 14 zeigt die Verteilung der Zusatzgeschwindigkeit über die Länge für $a/b = 8$ mit h/b als Parameter. Aus Tabelle 5 ist ersichtlich, daß die Zusatzgeschwindigkeit im Konturpunkt bei $x = 0,95a$ für $h/b = 2$ etwa um 6% größer ist als die Zusatzgeschwindigkeit in dem entsprechenden Ersatzpunkt; dieser Unterschied verringert sich allerdings mit wachsendem h/b ; für $h/b = 3$ beträgt er nur noch etwa 4,5%. — Da die Verhältnisse $h/b = 2$ und $h/b = 3$ sehr extreme Fälle darstellen und auch das Ovoid selbst als verhältnismäßig extremer Körper anzusehen ist — so werden beispielsweise für Widerstandsrechnungen Schiffe bedeutend besser durch Rotationsellipsoide angenähert —, kann man auch weiterhin die An-

Tabelle 5 Die Ordinaten des Ovoids im Rohr bei $x = 0,95a$ und die Zusatzgeschwindigkeit in x -Richtung in diesem Punkt und in dem entsprechenden Punkt des Ersatzkörpers

a/b	h/b	x/a	z/b	$\frac{\Delta u_x}{u_0}$	$\frac{\Delta u_x^*}{u_0}$	
6	2	0,95	0,7800	0,27295	0,25561	
			0,8028	0,18170	0,17365	
	5	10	∞	—	—	—
				0,8240	0,11459	0,11459
				0,7976	0,28893	0,26971
				0,8262	0,19237	0,18452
8	2	0,95	—	—	—	
			0,8475	0,12348	0,12348	
	5	10	∞	0,8154	0,29537	0,27714
				0,8418	0,19726	0,18854
				—	—	—
				0,8677	0,12574	0,12574
10	2	0,95	0,8300	0,29676	0,28012	
			0,8610	0,19505	0,18805	
	5	10	∞	—	—	—
				0,8849	0,12364	0,12364

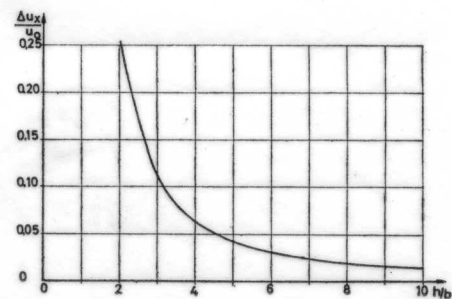


Bild 13 Die Zusatzgeschwindigkeit am Ovoid im Rohr bei $x = 0$ und $x = 0,5a$

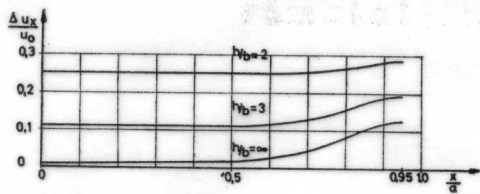


Bild 14 Die Verteilung der Zusatzgeschwindigkeit am Ovoid im Rohr für $a/b = 8$

nahme als erlaubt betrachten, daß die Geschwindigkeit in den Konturpunkten gleich der Geschwindigkeit in den entsprechenden Ersatzpunkten ist. Es ist fernerhin zu berücksichtigen, daß für Widerstandsrechnungen nicht die Zusatzgeschwindigkeit, sondern die Gesamtgeschwindigkeit und hierbei auch nicht die maximale Geschwindigkeit, sondern die mittlere Geschwindigkeit am Körper maßgeblich ist, wodurch eine weitere Verringerung des Fehlers zu erwarten ist. Man erkennt demnach aus den vorliegenden Ergebnissen, daß der Einfluß des Rohres auf die Deformierung des Ovoids und die Erhöhung der Geschwindigkeit zwar beträchtlich sind, der Unterschied in der Geschwindigkeit an den Kontur- und Ersatzpunkten dagegen gering.

Abschließend sei noch eine empirische Formel von Lock genannt:

$$\frac{\Delta u_h}{u_0} = \tau \cdot \lambda_1 \left(\frac{b}{h} \right)^2 \cdot \frac{\ell}{h} \cdot Q$$

mit

ℓ = halbe Körperlänge,

b = größter Körperradius,

h = Halbmesser des Rohres,

τ = Koeffizient zur Berücksichtigung der Querschnittsform des Rohres,

λ_1 = Koeffizient zur Berücksichtigung der Körperform.

Der Faktor Q ist nach Lock:

$$Q = 1 \quad \text{in 1. Näherung}$$

$$Q = 1 - \left(\frac{1}{h} \right)^2 \cdot q \quad \text{in 2. Näherung.}$$

Mit Hilfe dieser empirischen Formel soll die Zusatzgeschwindigkeit am Ovoid im Rohr berechnet werden. Es wird damit nur der Anteil infolge des Rohreinflusses gegeben, nicht aber die Zusatzgeschwindigkeit in unbegrenzter Flüssigkeit auf Grund der Körperform. Zum Vergleich mit den Werten nach Lamb muß dieser Anteil also noch hinzuaddiert werden. Für den Kreisquerschnitt ist nach Lock $\tau = 0,797$; der Koeffizient λ_1 für das Ovoid hat in Abhängigkeit von a/b folgende Werte:

a/b	6	8	10	12
λ_1	0,94	0,95	0,96	0,97

Es stellt sich bei der Rechnung heraus, daß die Formel von Lock nur für $h/b \geq 6$ brauchbare Ergebnisse liefert; dabei wird für Q die 1. Näherung benutzt für $\ell/h < 1$ und die 2. Näherung für $\ell/h > 1$. Aus einem Diagramm von Lock wird $q = 0,2$ entnommen für $a/b = 6$ und $q = 0,22$ für $a/b \geq 8$. Mit den genannten Größen wurde die Zusatzgeschwindigkeit infolge des Rohreinflusses für das Ovoid berechnet. Zu diesen Werten wurde die Geschwindigkeit am Ovoid in unbegrenzter Flüssigkeit addiert. Die so erhaltenen Werte sind in Tabelle 6 mit den entsprechenden Mittelwerten der Geschwindigkeit nach Lamb verglichen worden. Man sieht, daß zum Teil eine gute Übereinstimmung besteht.

Das Ovoid im Kanal nach Borden

Als nächst einfacher Fall nach dem Ovoid im Rohr wird nun angenommen, daß die Flüssigkeit um das Ovoid durch einen zylindrischen, in Richtung der x -Achse verlaufenden Kanal mit Rechteckquerschnitt begrenzt wird. Der Kanalquerschnitt werde definiert durch das Verhältnis h/K , wobei h die halbe Kanalhöhe und K die Kanalbreite bezeichnet. Für den Kanal und das Ovoid gelten dann die Verhältnisse h/b und $K/2b$, wobei durch Vorgabe von h/K und h/b das Verhältnis $K/2b$ bereits festgelegt ist (Bild 15). A. Borden [5] hat nach

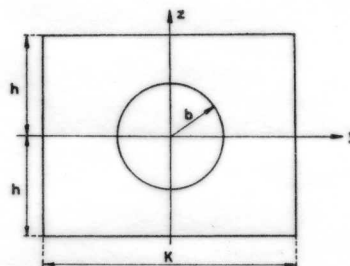


Bild 15 Ovoid im Kanal; Querschnitt in der yz -Ebene

dem Spiegelungsprinzip für den Fall eines Ovoids in einem rechteckigen Kanal die Zusatzgeschwindigkeit Δu_x für einige Punkte auf der y -Achse ermittelt; dabei hat sie für den Kanal die Verhältnisse $h/K = 0,5$ und $h/K = 0,25$ berücksichtigt, für

Tabelle 6 Die Geschwindigkeit am Ovoid im Rohr.

Ein Vergleich

a/b	h/b	$\frac{u_x}{u_0}$ (Lamb)	$\frac{\Delta u_{mh}}{u_0}$ [%]	$\frac{u_{mh}}{u_0}$ (Lamb)	$\frac{u_h}{u_0}$ (Lock)
6	2	1,253	0,75	1,261	
	3	1,113	2,30	1,136	
	4	1,065	2,77	1,093	
	5	1,043	2,83	1,071	
	6	1,031	2,85	1,060	1,059
	8	1,020	2,86	1,049	1,052
8	10	1,018	2,87	1,046	1,048
	∞	1,014	2,95	1,043	1,043
	2	1,252	0,75	1,259	
	3	1,112	1,60	1,128	
	4	1,063	2,10	1,084	
	5	1,041	2,20	1,063	
10	6	1,028	2,28	1,051	1,049
	8	1,016	2,34	1,039	1,042
	10	1,013	2,37	1,037	1,039
	∞	1,008	2,53	1,033	1,033
	2	1,251	0,75	1,259	
	3	1,112	1,28	1,124	
12	4	1,062	1,70	1,079	
	5	1,040	1,75	1,058	
	6	1,026	1,85	1,044	1,039
	8	1,014	1,93	1,033	1,037
	10	1,011	1,95	1,031	1,033
	∞	1,005	2,20	1,027	1,027
12	2	1,251	0,75	1,258	
	3	1,112	1,15	1,127	
	4	1,061	1,43	1,075	
	5	1,040	1,48	1,055	
	6	1,026	1,55	1,042	1,024
	8	1,014	1,60	1,030	1,031
∞	10	1,011	1,63	1,027	1,027
	∞	1,003	1,84	1,022	1,022

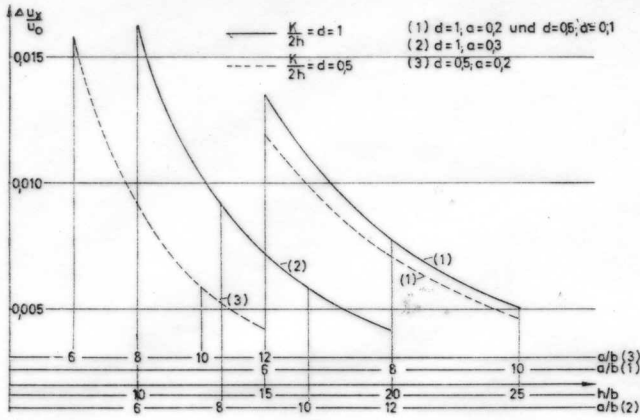


Bild 16 Die Geschwindigkeit am Ovoid im Kanal im Punkt (0; b; 0) nach Borden

Tabelle 7 Die Zusatzgeschwindigkeit am Ovoid im Kanal am Hauptspant im Punkt P (0; b; 0) nach Borden

d	a	a/b	b	h/b	$\frac{\Delta u_x}{u_0}$
1	0,2	10	0,02	25	0,00502
		8	0,025	20	0,00772
		6	0,033...	15	0,01350
	0,3	12	0,025	20	0,00411
		10	0,03	16,6...	0,00592
		8	0,0375	13,3	0,00923
0,5	0,1	6	0,05	10	0,01624
		10	0,01	25	0,00467
		8	0,0125	20	0,00704
	0,2	6	0,016...	15	0,01195
		12	0,016...	15	0,00414
		10	0,02	12,5	0,00586
		8	0,025	10	0,00908
		6	0,033...	7,5	0,01576

das Ovoid die Verhältnisse $a/b = 5, 6, 10, 12, 15$ und 20 und verschiedene Verhältnisse h/b . Aus den von A. Borden errechneten Werten $\Delta u_x/Q^*$ werden für verschiedene Verhältnisse a/b durch Vorgabe der Werte a und b die Quellintensität Q^* und damit die Zusatzgeschwindigkeiten $\Delta u_x/u_0$ berechnet. Da A. Borden die Rechnungen durchgeführt hat für Punkte, die teils innerhalb, teils außerhalb des Ovoids liegen, wird der Wert $\Delta u_x/u_0$ jeweils für $y = b$ interpoliert. Damit erhält man die Zusatzgeschwindigkeit für verschiedene Verhältnisse a/b und h/b in den Ersatzpunkten bei $x = 0$. Über die Deformationen des Ovoids liegen keine Angaben vor. Deshalb wird auf Grund der in den vorhergehenden Abschnitten gewonnenen Ergebnisse angenommen, daß die Geschwindigkeit in den tatsächlichen Konturpunkten ungefähr gleich der Geschwindigkeit in den Ersatzpunkten ist. In Tabelle 7 sind die Ergebnisse der Berechnung von $\Delta u_x/u_0$ zusammengestellt. Bild 16 und 17 zeigen $\Delta u_x/u_0$ als Funktion von h/b , einmal mit h/K und zum andern mit a/b als Parameter. Da bei letzterer Parameterwahl nur jeweils zwei Punkte für eine Kurve zur Verfügung stehen, sind diese Punkte stets durch Geraden verbunden worden.

Die Verhältnisse des Ovoids in einem Kanal mit quadratischem Querschnitt kommen augenscheinlich den Verhältnissen des Ovoids im Rohr recht nahe. Deshalb sollen für diesen Fall einige Ergebnisse der Rechnung nach Borden mit den Ergebnissen der Rechnung nach Lamb für das Ovoid im Rohr verglichen werden. Ein direkter Vergleich der Werte $\Delta u_x/u_0$ ist nur möglich für $a/b = 6$ und $h/b = 10$. Da die Verhältnisse für $h/b = 20$ und $h/b = 25$ sich von den Verhältnissen

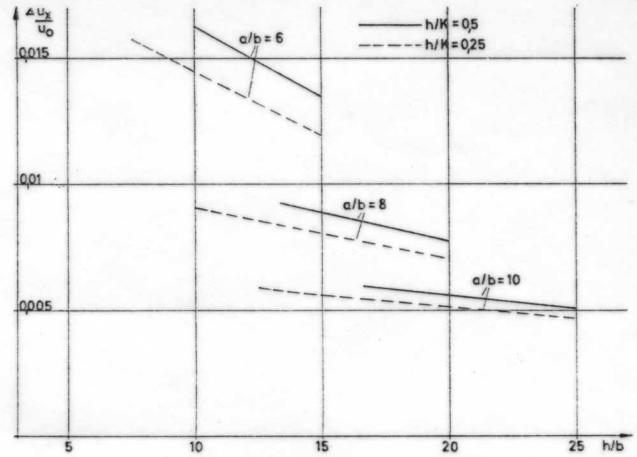


Bild 17 Die Zusatzgeschwindigkeit am Ovoid im Kanal

in unbegrenzter Flüssigkeit nur noch sehr wenig unterscheiden, erfolgte in diesen Fällen der Vergleich der Werte nach Borden mit denen unbegrenzter Flüssigkeit (Tab. 8).

Tabelle 8 Vergleich der Zusatzgeschwindigkeit am Ovoid im Kanal mit quadratischem Querschnitt nach Borden mit der Zusatzgeschwindigkeit am Ovoid im Rohr nach Lamb ($x = 0$)

a/b	h/b	$\frac{\Delta u_h}{u_0}$ (Borden)	$\frac{\Delta u_h}{u_0}$ (Lamb)
6	10	0,01624	0,01798
	25	0,00502	—
10	∞	—	0,00495
	20	0,00411	—
12	∞	—	0,00345
	20	0,00772	—
8	∞	—	0,00769

Schlußbemerkung

Für vier Beispiele ist der Einfluß fester Begrenzungen der Flüssigkeit auf die Umströmung des Körpers untersucht worden. In drei Fällen wurden die Deformationen des Körpers und die Zusatzgeschwindigkeiten am Körper in begrenzter Flüssigkeit berechnet. Um festzustellen, ob bei Berechnungen der Geschwindigkeit am Körper die für den Körper in unbegrenzter Flüssigkeit gültige Singularitätenverteilung benutzt werden kann, wurde die Geschwindigkeit in sogenannten Ersatzpunkten berechnet, die den Körperpunkten in unbegrenzter Flüssigkeit entsprechen. Die Ergebnisse rechtfertigten diese Näherung, so daß mit ihr also auch in Zukunft gerechnet werden darf.

(Eingegangen am 1. Dezember 1964)

Schrifttum

- [1] Lamb, H.: Lehrbuch der Hydrodynamik. 2. Aufl. Leipzig und Berlin: Teubner 1931.
- [2] Rankine, W. J. M.: On plane water lines in two dimensions. (Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1864, S. 369—391.)
- [3] Glazebrook, R.: Report of the Experiment Tank Committee 1908. Appendix. (Transactions of the Institution of Naval Architects. 51, S. 155—156, 1909.)
- [4] Lamb, H.: On the effect of the walls of an experimental tank on the resistance of a model. (Aeronautical Research Committee. Reports and Memoranda. Nr. 1010.)
- [5] Borden, A.: Wall corrections for flow about two- and three-dimensional symmetrical bodies in rectangular channels of infinite and finite lengths. (DTMB Report 864.) Washington 1954.