

115 | 1962

## SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

K. H. Kwik

### Darstellung des Kreises durch ein Polynom

**TUHH**

*Technische Universität Hamburg-Harburg*

DARSTELLUNG DES KREISES DURCH EIN POLYNOM

von

K. H. Kwik

Hamburg, im Herbst 1962

Es wird gezeigt, wie man den Kreis durch ein Polynom niedrigen Grades ausreichend genau darstellen kann.

Inhaltsübersicht:

- A. Einführung
- B. Aufstellung des Polynoms
- C. Zusammenfassung
- D. Schrifttum

## A. Einführung

Nach einem bekannten Satz von Weierstraß (1815 - 1897) [1] läßt sich jede im interessierenden Bereich stetige Kurve durch ein Polynom darstellen. Ein Kreisbogen ist eine stetige Kurve, muß also nach obigem Satz durch ein Polynom dargestellt werden können. Eine bisher oft verwendete Methode zur Darstellung von stetigen Kurven durch Polynome ist die sogenannte Stützstellenmethode. Hierbei "zwingt" man das Polynom durch einige Stützstellen (= Aufmaße der Kurve) zu gehen. Je mehr Stützstellen man verwendet, umso größer wird die Genauigkeit der Approximation und umso höher der Grad des Polynoms. Diese Methode setzt aber die Kenntnis der möglichst genauen Aufmaße der betrachteten Kurve voraus. Beim Kreisbogen lassen sich die Aufmaße mit Hilfe der Kreisgleichung zwar exakt angeben, bei einer beliebigen, gestrakt vorgegebenen Kurve ist dies jedoch nicht ohne weiteres der Fall. Bildet das betrachtete Kurvenstück nur einen Teil einer Gesamtkontur, so wird es gewisse Randwerte besitzen, die nicht geändert werden dürfen, damit es mit den benachbarten Kurvenstücken richtig anschließt. Unter Randwerte versteht man die Ordinaten und die Ableitungen am Anfang und am Ende der Kurve, sowie die Abrundung am Anfang der Kurve im betrachteten Intervall. Will man das Kurvenstück durch ein Polynom darstellen, so muß also das Polynom der Bedingung genügen, daß es die gleichen Randwerte besitzt wie die vorgegebene Kurve. Bei der Näherung mit Hilfe der Stützstellenmethode wird aber diese Bedingung nur unvollkommen erfüllt. In diesem Falle ist zweifellos die Verwendung einer Methode, bei der zur Aufstellung der Polynome die Kenntnis der Randwerte erforderlich und ausreichend ist, von Vorteil (siehe z.B. [2]). Die Randwerte können beim Kreis sofort aus der Kreisgleichung, bei einer beliebigen, gestrakt vorgegebenen Kurve schnell und ausreichend genau auf graphischem Wege ermittelt werden.

Wir wollen den Kreis nach der letztgenannten Methode durch ein Polynom darstellen, und zwar durch ein Polynom niedrigen

Grades der Form

$$\varrho_0 \cdot \xi^{1/2} + \sum a_n \cdot \xi^n$$

( n = 1, 2 usw.)

Wir werden feststellen, daß der Kreis für die meisten technischen Zwecke damit ausreichend genau wiedergegeben wird.

### B. Aufstellung des Polynoms

Wir stellen das Polynom für einen Viertelkreis auf und betrachten dazu den Viertelkreis im rechtwinkligen Koordinatensystem ( Abbildung 1 ).  $x$  sei die Abszisse und  $y$  die Ordinate. Mit  $R$  = Kreisradius bilden wir die dimensionslose Abszisse  $\xi = \frac{x}{R}$  und die dimensionslose Ordinate  $\eta = \frac{y}{R}$ .

Es ist

$$\begin{aligned} \eta(\xi=0) &= \eta_0 = 0 & ( = \text{Anfangsordinate} ) \\ \eta(\xi=1) &= \eta_1 = 1 & ( = \text{Endordinate} ) \\ 0 &\leq \eta \leq 1, & 0 \leq \xi \leq 1 \end{aligned}$$

Zur Aufstellung des Polynoms schreiben wir außer der Anfangsordinate  $\eta_0$  und der Endordinate  $\eta_1$  die Anfangsabrundung  $\varrho_0$  und die Endneigung  $\eta'_1$  vor. Für den betrachteten Viertelkreis ist laut Definition [2]

$$\begin{aligned} \text{die Anfangsabrundung } \varrho_0 &= \sqrt{\frac{2R}{\text{Intervall}}} = \sqrt{2} \\ \text{und die Endneigung } \eta'_1 &= \eta'(\xi=1) = 0. \end{aligned}$$

Das Polynom muß also folgenden Bedingungen genügen:

$$\begin{aligned} \varrho_0 &= \sqrt{2} \\ \eta_0 &= 0 \\ \eta_1 &= 1 \\ \eta'_1 &= 0 \end{aligned}$$

Durch folgendes Polynom 2. Grades sind obige Bedingungen zu erfüllen:

$$\eta = \varrho_0 \cdot \xi^{1/2} + a_1 \cdot \xi + a_2 \cdot \xi^2$$

Die Ermittlung der Koeffizienten  $a_1$  und  $a_2$  dauert eine Minute. Wir erhalten:

$$a_1 = -\frac{3}{2} \varrho_0 + 2 \eta_1 = -\frac{3}{2}\sqrt{2} + 2$$
$$a_2 = \frac{1}{2} \varrho_0 - \eta_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2} - 1$$

Das Polynom lautet also:

$$\eta = \sqrt{2} \cdot (\xi^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\xi + \frac{1}{2}\xi^2) + (2\xi - \xi^2) \dots\dots\dots \text{Polynom 1}$$

oder nach der in [2] erläuterten symbolischen Schreibweise:

$$\eta = \sqrt{2} \left( \frac{2 \cdot \varrho_0}{\eta_0 \eta_1 \eta_1'} \right) + 1 \left( \frac{2 \cdot \eta_1}{\varrho_0 \eta_0 \eta_1'} \right)$$

Die Aufmaße der in Klammern gesetzten Funktionen ('Einflußfunktionen') sind als Tabellenwerte vorhanden [3], so daß die ganze Rechenarbeit zur Ermittlung der Gesamtaufmaße nach Polynom 1 sich auf eine einfache Addition von Produkten beschränkt.

Die Aufmaße nach Polynom 1 sowie nach der Kreisgleichung, die in dimensionsloser Form bekanntlich

$$\eta = \sqrt{1 - (1 - \xi)^2}$$

lautet, sind in Tabelle 1 niedergelegt. Man erkennt, wie gut der Kreis durch Polynom 1 dargestellt wird.

Ein Nachteil des Polynoms 1 ist, daß die Krümmung (= 2. Ableitung) an der Stelle  $\xi = 1$  von der des exakten Kreises verschieden ist. Aus Polynom 1 ergibt sich nämlich die Krümmung zwangsläufig zu

$$\eta_1'' = -0,939340,$$

während die Krümmung des exakten Kreises ja bekanntlich

$$\eta_1'' = -1$$

beträgt. Dieser Nachteil verschwindet, wenn wir zur Aufstellung des Polynoms die Bedingung  $\eta_1'' = -1$  von vornherein vorschreiben. Außer den vier bereits erwähnten Bedingungen  $\varrho_0 = \sqrt{2}$ ,  $\eta_0 = 0$ ,  $\eta_1 = 1$  und  $\eta_1' = 0$  tritt also diese neue Bedingung hinzu. Die fünf Bedingungen werden durch ein Polynom 3. Grades folgender Form erfüllt:

$$\eta = \varrho_0 \cdot \xi^{\frac{1}{2}} + a_1 \cdot \xi + a_2 \cdot \xi^2 + a_3 \cdot \xi^3$$

Die Koeffizienten  $a_1$ ,  $a_2$  und  $a_3$  lassen sich ebenfalls rasch ermitteln. Wir erhalten:

$$a_1 = -\frac{15}{8} \varrho_0 + 3 \eta_1 + \frac{1}{2} \eta_1' = -\frac{15}{8} \sqrt{2} + 3 - \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{5}{4} \varrho_0 - 3 \eta_1 - \eta_1' = \frac{5}{4} \sqrt{2} - 3 + 1$$

$$a_3 = -\frac{3}{8} \varrho_0 + \eta_1 + \frac{1}{2} \eta_1' = -\frac{3}{8} \sqrt{2} + 1 - \frac{1}{2}$$

Das Polynom lautet:

$$\eta = \sqrt{2} \cdot \left( \xi^{\frac{1}{2}} - \frac{15}{8} \xi + \frac{5}{4} \xi^2 - \frac{3}{8} \xi^3 \right) + (3\xi - 3\xi^2 + \xi^3) \\ + \left( -\frac{1}{2} \xi + \xi^2 - \frac{1}{2} \xi^3 \right) \dots \dots \dots \text{Polynom 2}$$

oder symbolisch:

$$\eta = \sqrt{2} \left( \frac{3 \cdot \varrho_0}{\eta_0 \eta_1 \eta_1' \eta_1''} \right) + 1 \left( \frac{3 \cdot \eta_1}{\varrho_0 \eta_0 \eta_1' \eta_1''} \right) \\ - 1 \left( \frac{3 \cdot \eta_1'}{\varrho_0 \eta_0 \eta_1 \eta_1''} \right)$$

Die Aufmaße der Einflußfunktionen entnehmen wir wieder dem zitierten Tabellenwerk. Die nach Polynom 2 berechneten Aufmaße des Kreises sind in Tabelle 1 ebenfalls niedergelegt. Man erkennt wieder die gute Näherung des exakten Kreises.

Eine noch bessere Approximation wird erreicht, wenn wir die dritte Ableitung an der Stelle  $\xi = 1$  gleich Null vorschreiben, wie es ja beim exakten Kreis auch der Fall ist. Wir haben jetzt also folgende sechs Bedingungen:

$$\varrho_0 = \sqrt{2}$$

$$\eta_0 = 0$$

$$\eta_1 = 1$$

$$\eta_1' = 0$$

$$\eta_1'' = -1$$

$$\eta_1''' = 0,$$

die durch ein Polynom 4. Grades der Form

$$\eta = \varrho_0 \cdot \xi^{\frac{1}{2}} + a_1 \cdot \xi + a_2 \cdot \xi^2 + a_3 \cdot \xi^3 + a_4 \cdot \xi^4$$

erfüllt werden müssen. Die Koeffizienten dieses Polynoms ergeben sich zu:

$$a_1 = -\frac{35}{16} \varrho_0 + 4 \eta_1 + \eta_1''' = -\frac{35}{16} \sqrt{2} + 4 - 1$$

$$a_2 = \frac{35}{16} \varrho_0 - 6 \eta_1 - \frac{5}{2} \eta_1''' = \frac{35}{16} \sqrt{2} - 6 + \frac{5}{2}$$

$$a_3 = -\frac{21}{16} \varrho_0 + 4 \eta_1 + 2 \eta_1''' = -\frac{21}{16} \sqrt{2} + 4 - 2$$

$$a_4 = \frac{5}{16} \varrho_0 - \eta_1 - \frac{1}{2} \eta_1''' = \frac{5}{16} \sqrt{2} - 1 + \frac{1}{2}$$

Damit lautet das Polynom:

$$\begin{aligned} \eta &= \sqrt{2} \cdot \left( \xi^{\frac{1}{2}} - \frac{35}{16} \xi + \frac{35}{16} \xi^2 - \frac{21}{16} \xi^3 + \frac{5}{16} \xi^4 \right) \\ &\quad + (4\xi - 6\xi^2 + 4\xi^3 - \xi^4) \\ &\quad + \left( -\xi + \frac{5}{2} \xi^2 - 2\xi^3 + \frac{1}{2} \xi^4 \right) \dots\dots\dots \text{Polynom 3} \end{aligned}$$

oder symbolisch:

$$\begin{aligned} \eta &= \sqrt{2} \left( \frac{4 \cdot \varrho_0}{\eta_0 \eta_1 \eta_1' \eta_1'' \eta_1'''} \right) + 1 \left( \frac{4 \cdot \eta_1}{\varrho_0 \eta_0 \eta_1' \eta_1'' \eta_1'''} \right) \\ &\quad - 1 \left( \frac{4 \cdot \eta_1''}{\varrho_0 \eta_0 \eta_1 \eta_1' \eta_1'''} \right) \end{aligned}$$

Wie aus der Aufmaßtabelle ersichtlich, wird durch Polynom 3 eine sehr gute Näherung des Kreises erzielt. Der größte Fehler liegt bei  $\xi = 0,05$  und beträgt ungefähr 0,5 % des exakten Aufmaßes. Dieser Fehler läßt sich natürlich weiter reduzieren, wenn wir zur Aufstellung des Polynoms entsprechend mehr Bedingungen vorschreiben.

### C. Zusammenfassung

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß sich der Kreis durch Polynome niedrigen Grades ausreichend genau darstellen läßt. Die Polynome 1, 2 und 3 sind so beschaffen, daß sie einfachen Randbedingungen des Kreisbogens genügen. Polynom 1 hat mit dem exakten Kreis im betrachteten Intervall außer der gleichen Anfangs- und Endordinate die gleiche Anfangsabrundung und End-

neigung. Polynom 2 hat außerdem mit dem exakten Kreis die gleiche Endkrümmung und Polynom 3 die gleiche Endkrümmung und den gleichen Krümmungszuwachs am Ende des Intervalls. Mit Hilfe der tabellierten Einflußfunktionen wird die Rechenarbeit zur Berechnung der Aufmaße auf ein Minimum reduziert.

Diese Arbeit ist in Zusammenhang mit dem Entwurf eines Halbbalanceruders eines Schiffes entstanden. Bekanntlich ist beim Halbbalanceruder die Kontur jenes Ruderteils, der sich hinter der Flosse befindet, zwecks Erhaltung eines konstanten Spaltes beim Ruderlegen kreisförmig. Der kreisförmige ''Nasenteil'' und der ''Schwanzteil'' des Ruders, der sich ebenfalls leicht durch ein Polynom darstellen läßt, müssen strakend zusammengefügt werden können, damit eine hydrodynamisch günstige Form des Ruders erreicht wird. Für solche und ähnliche Zwecke, wobei es also weniger auf die exakte Wiedergabe der Aufmaße als auf die Einhaltung gewisser Randbedingungen ankommt, ist zur Darstellung des Kreises die Verwendung des Polynoms 2 der Einfachheit und der ausreichenden Genauigkeit wegen zu empfehlen.

#### D. Schrifttum

- [1] Weierstraß, K. Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reellen Veränderlichen. Sitzungsberichte der Akad. zu Berlin, 1885, S.633-639; S.789-805.
- [2] Kwik, K. H. Grundlagen zur Darstellung der Profilform von Schiffsrudern. Schiff und Hafen 1962, S.853-859.
- [3] Kwik, K. H. Tabellen zur Darstellung der Konturen von Schiffslinien und Ruderprofilen. Bericht Nr.114 des Instituts für Schiffbau der Universität Hamburg.

$\xi = \frac{x}{R}$	$\eta = \frac{y}{R}$			
	Kreisgleichung	Polynom 1	Polynom 2	Polynom 3
0	0	0	0	0
0,02	0,198997	0,197457	0,196873	0,197967
0,05	0,312250	0,309430	0,308061	0,310549
0,1	0,435890	0,432153	0,429696	0,433929
0,2	0,6	0,596476	0,592594	0,598539
0,3	0,714143	0,711840	0,707382	0,713355
0,4	0,8	0,799036	0,794669	0,799686
0,5	0,866025	0,866117	0,862326	0,865955
0,6	0,916515	0,917211	0,914300	0,916530
0,7	0,953939	0,954774	0,952863	0,953961
0,8	0,979796	0,980403	0,979432	0,979804
0,9	0,994987	0,995209	0,994936	0,994988
1,0	1,0	1,0	1,0	1,0

Tabelle 1      Aufmaße eines Viertelkreises

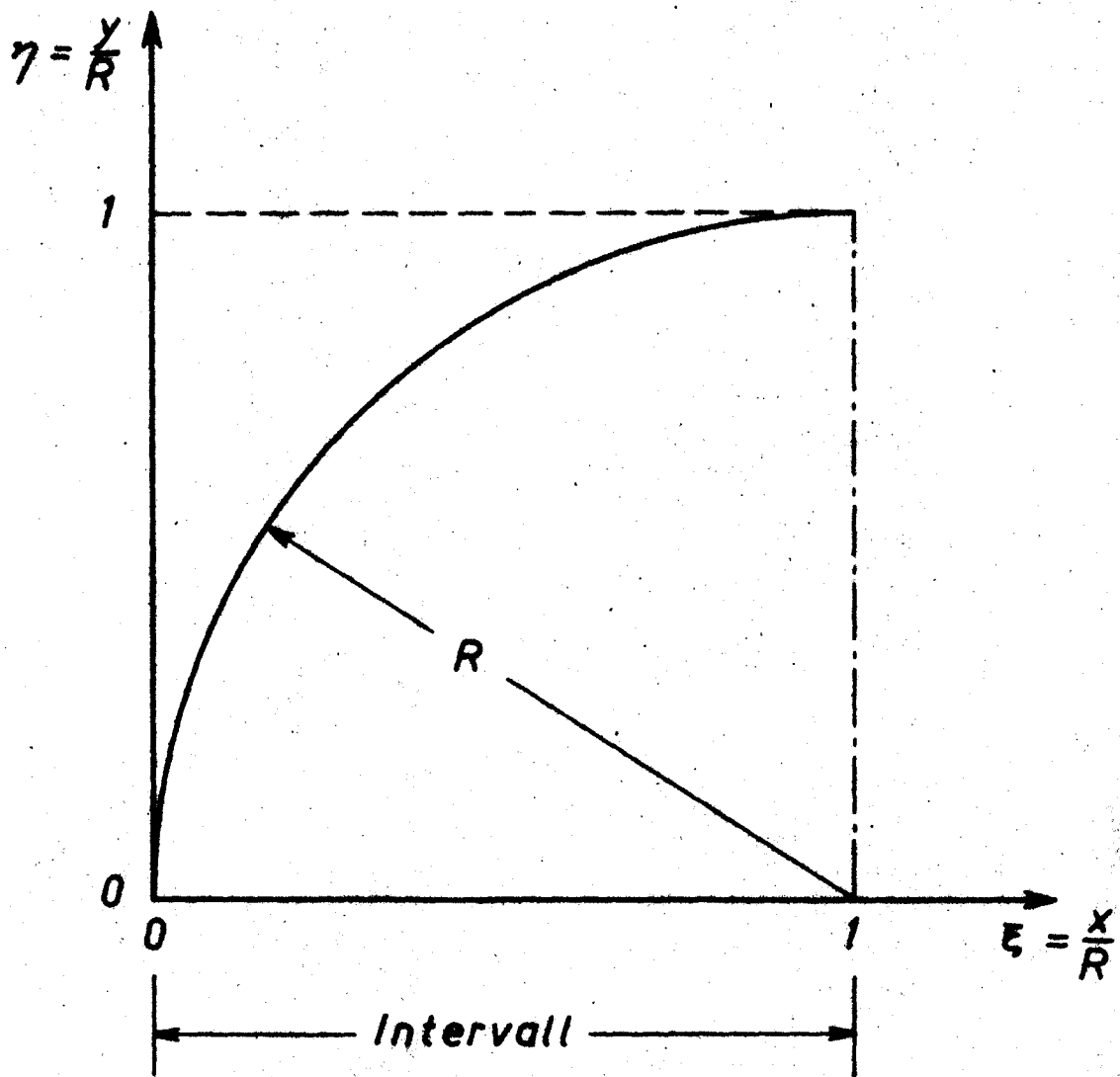


Abbildung 1 Viertelkreis im rechtwinkligen Koordinatensystem