

480 | Dezember 1987

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Christian Heckel

Potentialtheoretische Berechnungen des Strömungsfeldes eines Deltaflügels mit Hilfe von Elementarwirbeln

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

Potentialtheoretische Berechnungen des Strömungsfeldes eines Deltaflügels mit Hilfe von Elementarwirbeln

Christian Heckel, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1987

© Technische Universität Hamburg-Harburg
Schriftenreihe Schiffbau
Schwarzenbergstraße 95c
D-21073 Hamburg

<http://www.tuhh.de/vss>

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG
Bericht Nr. 480

Potentialtheoretische Berechnungen des Strömungsfeldes
eines Deltaflügels mit Hilfe von Elementarwirbeln

von

Christian Heckel

Dezember 1987

ISBN 3 - 89220 - 480 - 2

Copyright Institut für Schiffbau
 Universität Hamburg
 Lammerssieth 90
 D-2000 Hamburg 60

Potentialtheoretische Berechnungen des Strömungsfeldes eines Deltaflügels mit Hilfe von Elementarwirbeln

1. Einleitung

Für die Berechnung von Strömungsfeldern und den hierdurch induzierten Druckverteilungen hat sich in vielen Fällen die Anwendung der Potentialtheorie bewährt (z. B. Isay [1]). Insbesondere zeigt sich bei Flügelprofilen, auch unter Berücksichtigung von Kavitationserscheinungen, eine sehr gute Übereinstimmung von Theorie und Messung (Isay [2]). Die Eignung der Potentialtheorie motivierte daher ihre Anwendung auf die Berechnung des Strömungsfeldes eines Deltaflügels. Experimentelle Untersuchungen dieses Flügeltyps (z.B. Hummel [3]) weisen für Profile mit kleinem Seitenverhältnis typische Eigenschaften auf. Bei entsprechenden Anstellwinkeln rollt sich die seitliche Umströmung der Profilkanten zu einem über dem Profil liegenden Wirbel auf; man spricht von der ersten Ablösung. Diese Wirbel treffen mit ihren äußeren Schichten wieder auf das Profil. In Ölfilmbildern erkennt man deutlich die Linie des Wiederanlegens, die bei größeren Anstellwinkeln mit der Mittellinie des Profils zusammenfällt.

Abgehobene Wirbel bewirken im allgemeinen einen nichtlinearen Anstieg des Auftriebsbeiwertes mit dem Anstellwinkel. In den Druckmessungen zeigen sich entsprechend ausgeprägte Druckminima an der Profilloberfläche unterhalb der freien Wirbel.

2. Theoretische Betrachtung des Problems

Im vorliegenden Fall wird versucht, das Geschwindigkeitsfeld mit Hilfe von Elementarwirbeln zu modellieren. Das Strömungsfeld wird als inkompressibel und stationär angenommen. Ein Elementarwirbel der Zirkulation Γ_ξ besteht aus einem gebundenen und zwei freien halbunendlichen Wirbelsegmenten. Diese Konstellation wird durch eine Deltaform der Elementarwirbel realisiert, d.h. die äußeren freien Wirbel sind um den Winkel β von der Hufeisenform nach außen gespreizt. Durch diese Wahl der äußeren Form kann der Anteil des Spitzenwirbels dargestellt werden. Abbildung 1 zeigt den Elementarwirbel und sein Koordinatensystem. Die Koordinaten des gebundenen Wirbels sind:

$$\vec{r}_0 = \{\xi, \eta_\xi, \zeta\} \quad , \quad -b_\xi \leq \zeta \leq b_\xi$$

Die Koordinatenvektoren der beiden Spitzenwirbel lauten:

$$\vec{r}_1 = \{\xi + X, \eta_\xi, b_\xi + X \tan\beta\} \quad , \quad 0 \leq X \leq \infty$$

$$\vec{r}_2 = \{\xi + X, \eta_\xi, -b_\xi - X \tan\beta\}$$

Die Wirbelachsenvektoren sind durch folgende Ausdrücke gegeben:

$$d\vec{r}_0 = \{0, 0, d\xi\}$$

$$d\vec{r}_1 = \{dX, 0, \tan\beta dX\}$$

$$d\vec{r}_2 = \{dX, 0, -\tan\beta dX\}$$

Das induzierte Geschwindigkeitsfeld nach dem Biot-Savartschen Gesetz lautet:

$$\vec{V} = \frac{\Gamma_\xi}{4\pi} \int_{-b_\xi}^{b_\xi} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0) \times d\vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} + \frac{\Gamma_\xi}{4\pi} \int_0^\infty \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1) \times d\vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} - \frac{\Gamma_\xi}{4\pi} \int_0^\infty \frac{(\vec{r} - \vec{r}_2) \times d\vec{r}_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} \quad (2.1)$$

mit: $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ und $\vec{V} = u_\gamma\vec{e}_x + v_\gamma\vec{e}_y + w_\gamma\vec{e}_z$. Die Berechnung der Vektorprodukte ergibt:

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \frac{\Gamma_\xi}{4\pi} \int_{-b_\xi}^{b_\xi} \frac{(y - \eta_\xi) \vec{e}_x - (x - \xi) \vec{e}_y}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta_\xi)^2 + (z - \zeta)^2}^3} d\zeta \\ &+ \frac{\Gamma_\xi}{4\pi} \int_0^\infty \frac{(y - \eta_\xi)\tan\beta \vec{e}_x + (z - b_\xi - x\tan\beta + \xi\tan\beta) \vec{e}_y - (y - \eta_\xi) \vec{e}_z}{\sqrt{(x - \xi - X)^2 + (y - \eta_\xi)^2 + (z - b_\xi - X\tan\beta)^2}^3} dX \\ &- \frac{\Gamma_\xi}{4\pi} \int_0^\infty \frac{-(y - \eta_\xi)\tan\beta \vec{e}_x + (z + b_\xi + x\tan\beta - \xi\tan\beta) \vec{e}_y - (y - \eta_\xi) \vec{e}_z}{\sqrt{(x - \xi - X)^2 + (y - \eta_\xi)^2 + (z + b_\xi + X\tan\beta)^2}^3} dX \end{aligned} \quad (2.2)$$

Nach der Integration erhält man für die Geschwindigkeitskomponenten:

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \frac{\Gamma_\xi}{4\pi} \{ (y - \eta_\xi)(A + (B + C)\tan\beta) \vec{e}_x \\ &+ (-(x - \xi)A + (z - b_\xi - (x - \xi)\tan\beta)B - (z + b_\xi + (x - \xi)\tan\beta)C) \vec{e}_y \\ &+ (y - \eta_\xi)(-B + C) \vec{e}_z \} \end{aligned} \quad (2.3)$$

mit den folgenden Abkürzungen:

$$\begin{aligned} A &\equiv \frac{1}{(x - \xi)^2 + (y - \eta_\xi)^2} \\ &\cdot \left(\frac{(b_\xi - z)}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta_\xi)^2 + (b_\xi - z)^2}} + \frac{(b_\xi + z)}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta_\xi)^2 + (b_\xi + z)^2}} \right) \\ B &\equiv \frac{\sqrt{1 + \tan^2\beta}}{((x - \xi)\tan\beta - z + b_\xi)^2 + (y - \eta_\xi)^2(1 + \tan^2\beta)} \\ &\cdot \left(1 + \frac{x - \xi + (z - b_\xi)\tan\beta}{\sqrt{1 + \tan^2\beta}\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta_\xi)^2 + (z - b_\xi)^2}} \right) \\ C &\equiv \frac{\sqrt{1 + \tan^2\beta}}{((x - \xi)\tan\beta + z + b_\xi)^2 + (y - \eta_\xi)^2(1 + \tan^2\beta)} \\ &\cdot \left(1 + \frac{x - \xi - (z + b_\xi)\tan\beta}{\sqrt{1 + \tan^2\beta}\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta_\xi)^2 + (z + b_\xi)^2}} \right) \end{aligned}$$

3. Anwendung des Modells zur Behandlung des Deltaflügels

Man betrachtet einen Deltaflügel mit einem Öffnungswinkel von 2λ und einer Tiefe l . Aufgrund der Nichtlinearität wird die Flügelfläche mit einer Neigung um den Winkel $k\alpha$ gegenüber der (x, z) -Ebene betrachtet. In Abbildung 2 ist das Koordinatensystem für zwei Elementarwirbel eingezeichnet.

Das System der Wirbel ist mit x , y und z bezeichnet. Für die Berechnungen wird der Flügel in eine Zahl von Elementarflügeln eingeteilt, auf deren $1/4$ Linien jeweils eine Elementarwirbel plazierte ist. Mit N Elementarwirbeln berechnen sich die Lagepunkte dieser Wirbel nach den folgenden Beziehungen:

$$\frac{\xi_i}{l} = \frac{1}{N} \left(i - \frac{3}{4} \right)$$

$$\frac{\eta_i}{l} = \frac{(1-i)}{N} \tan(k\alpha) \quad i = 1, \dots, N$$

Es erweist sich als notwendig, bei festem x in z -Richtung mehrere Elementarwirbel unterschiedlicher Spannweite anzuordnen, um der lokalen Änderung der Zirkulation in Spannweitenrichtung Rechnung zu tragen. Hierzu wird eine äquidistante Verteilung beim ersten Wirbel in x -Richtung gewählt und gefordert, daß sich die Wirbel in der (x, z) -Ebene betrachtet überlagern, das bedeutet, es kommt pro x -Schritt ein zusätzlicher Wirbel in Spannweitenrichtung hinzu. Das in Abbildung 3 gezeigte Wirbelsystem besteht nach den obigen Annahmen also aus 5 Elementarwirbeln. In diesem Beispiel gibt es 5 freie Zirkulationskoeffizienten Γ_{ij} ($i = 1, 2$; $j = 1, 2$ für $i = 1$ und $j = 1, 2, 3$ für $i = 2$). Diese Koeffizienten werden durch die Strömungsrandbedingung an den Aufpunkten bestimmt. Ihre Zahl ist gleich der Zahl der Elementarwirbel. Als Aufpunkte werden jeweils die $3/4$ Punkte der Elementarflügel gewählt, diese liegen genau zwischen zwei gebundenen Wirbellinien. Die z -Koordinaten liegen in der Mitte der sich ergebenden Netzstruktur, damit haben die Aufpunkte den größtmöglichen Abstand zu den Wirbeln. Für das Beispiel in Abbildung 3 sind die Aufpunkte eingezeichnet. Ihre Lage bestimmt man mit Hilfe der folgenden Beziehungen:

$$\frac{x_i}{l} = \frac{1}{N} \left(i - \frac{1}{4} \right) \quad i = 1, \dots, N$$

$$\frac{y_i}{l} = \frac{1}{N} \left(\frac{1}{2} - i \right) \tan(k\alpha)$$

Die für die Berechnungen noch fehlenden Größen b_{ij} und z_{ij} lassen sich unter den gegebenen Annahmen leicht berechnen, hierbei bezeichnet M die Zahl der zusätzlichen Wirbel in z -Richtung an der Stelle $i = 1$. Somit läuft i von 1 bis N und j von 1 bis $M + i$, die Größen b_{ij} geben die Spannweiten der Elementarwirbel an:

$$b_{i1} = \xi_i \tan\lambda \quad i = 1, \dots, N$$

$$b_{1j} = \xi_1 \frac{\tan\lambda}{M+1}$$

$$b_{ij} = b_{i-1, j-1} + (\xi_i - \xi_{i-1}) \tan\beta \quad i \neq 1 \quad j \neq 1$$

$$z_{ij} = \frac{1}{2} (b_{i, j+1} + 2(x_i - \xi_i) \tan\beta + b_{i, j+2}) \quad i \neq N \quad j \neq M + i$$

$$z_{i, M+i} = \frac{1}{2} (b_{i, M+i} + (x_i - \xi_i) \tan\beta) \quad i \neq N$$

$$z_{Nj} = \frac{1}{2}(b_{Nj+1} + b_{Nj+2} + \frac{3}{2}(l - x_N) \tan\beta) \quad j \neq M + N$$

$$z_{NM+N} = \frac{1}{2}(b_{NM+N} + \frac{3}{4}(l - x_N))$$

In Abbildung 4 ist eine typische Verteilung der Elementarwirbel aufgezeichnet. In diesem Fall wurde zusätzlich mit veränderlichem Winkel β bei den innenliegenden Wirbeln gearbeitet.

Für die Bestimmung der Zirkulationskoeffizienten wird die Strömungsrandbedingung benötigt, sie lautet im System des Flügels:

$$V_0 + V_\gamma + v_q = 0,$$

mit der Y_F -Komponente $V_0 = u_o \sin\alpha$ der Anströmung \vec{V}_∞ sowie V_γ und v_q , den wirbel- bzw. quellinduzierten Geschwindigkeiten. Da das System des Flügels nicht mit dem System der Wirbel übereinstimmt, muß zusätzlich eine Drehung der Koordinatenachsen um den Winkel $k\alpha$ berücksichtigt werden. Die endgültige Beziehung lautet:

$$u_o \sin\alpha + u_\gamma \sin(k\alpha) + v_\gamma \cos(k\alpha) + v_q = 0 \quad (3.1)$$

Die Komponenten u_γ und v_γ sind die Superpositionen aller Geschwindigkeitskomponenten der Einzelwirbel.

Die Verwendung von diskreten Wirbeln berücksichtigt nicht, daß die wirbelinduzierte U -Komponente (im Flügelsystem (X_F, Y_F, Z_F)) für $Y_F \rightarrow \pm 0$ den Wert $\pm \frac{1}{2}\gamma(X_F, Z_F)$ annimmt. Eine Berücksichtigung dieses Grenzwertes in der Randbedingung ist nicht notwendig, da der Anteil $u_\gamma \sin(k\alpha)$ verglichen mit dem Term $v_\gamma \cos(k\alpha)$ klein ist. Bei der Berechnung der Geschwindigkeitskomponenten wird dieser Anteil berücksichtigt.

4.1 Ergebnisse ohne Dickeneinfluß

Mit Hilfe der angegebenen Beziehungen wurde ein Programm zur Auswertung geschrieben. Neben anderen getesteten Wirbel- und Aufpunktverteilungen werden die besten Ergebnisse jedoch mit den angegebenen Verteilungen erzielt. Durch die Aufteilung des Profils in Elementarflügel läßt sich der Gesamtauftriebsbeiwert leicht bestimmen, er ergibt sich als Quotient der Summe der Auftriebskräfte aller Elementarflügel und $\rho/2 u_o^2 F$. F ist die Fläche des Profils, bei einem Deltaflügel ist $F = l^2 \tan\lambda$:

$$C_A = \frac{1}{F \rho/2 u_o^2} \sum_{i,j} K_{Aij} = \frac{4}{\tan\lambda} \cdot \sum_{i,j} \frac{\Gamma_{ij}}{u_o l} \cdot \frac{b_{ij}}{l} \quad (4.1)$$

mit $K_{Aij} = 2\rho u_o \Gamma_{ij} b_{ij}$ als Auftriebskraft des Elementarwirbels i, j (Schlichting, Truckenbrodt [5]).

Die Zahl der Elementarwirbel ist frei wählbar, es wurden bis zu 25 Wirbel in x -Richtung verteilt. Bei der Verteilung der Wirbel in z -Richtung zeigte sich, daß die Zahl der zusätzlichen Wirbel besonders bei schmalen Profilen nicht zu groß sein durfte, da ansonsten Instabilitäten im Gleichungssystem auftreten. Eine mögliche Ursache dieser Instabilitäten ist, daß in diesen Fällen die Aufpunkte zu dicht lagen. Dies kann dadurch erklärt werden, daß die umliegenden Wirbel an diesen Punkten ähnliche Geschwindigkeiten induzieren. Als Folge davon stehen im Gleichungssystem der Strömungsrandbedingung ähnliche Gleichungen.

Bei den meisten Berechnungen wurden daher keine zusätzlichen Wirbel in z -Richtung bei der ersten Wirbellinie in x angenommen. Abbildung 5 zeigt

eine typische Wirbelverteilung mit 15 Elementarwirbeln in Längsrichtung und ohne zusätzlichen Wirbel in z -Richtung. Die Gesamtzahl der Wirbel beträgt somit 120 Wirbel.

Mit $\beta = 0^\circ$ ließ sich eine gute Übereinstimmung der berechneten Auftriebsbeiwerte mit den gemessenen Werten feststellen. Mit wachsender Anzahl der Elementarwirbel und steigendem Anstellwinkel nähert sich der berechnete C_A -Wert dem gemessenen an, dabei wurde vorausgesetzt, daß sich die freien Wirbel unter dem halben Anstellwinkel vom Profil lösen. Diese Annahme wurde auch von Gersten [4] gemacht.

Die experimentellen Daten stammen aus einer Arbeit von Hummel [3]. Für 120 und 210 (20 Wirbel in x -Richtung) Wirbel ergaben sich die folgenden Auftriebsbeiwerte im Vergleich zu den gemessenen:

α	C_A 120 Wirbel	C_A 210 Wirbel	C_A gemessen
$5,0^\circ$	0,117	0,118	0,10
$10,0^\circ$	0,254	0,257	0,24
$15,0^\circ$	0,413	0,418	0,42
$20,5^\circ$	0,616	0,623	0,65

In einem zweiten Schritt wurden mit Hilfe der aus den diskreten Zirkulationen der Elementarwirbel bestimmten Zirkulationsverteilungen die Geschwindigkeitskomponenten an den Aufpunkten im System des Fügels berechnet. Die einfachste Möglichkeit hierfür ist

$$\gamma_{ij}(\xi_i, z_{ij}) = \frac{\Gamma_{ij}^*}{\Delta x}$$

$$\Gamma_{ij}^* = \sum_{l=1}^j \Gamma_{il}$$

mit Δx als Abstand zweier Wirbel in x -Richtung. Der Wert von Γ_{ij}^* ist die örtliche Zirkulation, hervorgerufen durch die Summe der gebundenen Wirbel an diesem Ort. Für die Berechnung der Zirkulationsverteilung an den Rändern wurde die folgende Beziehung gewählt:

$$\gamma_{ij}(\xi_i, z_{ij}) = \frac{\Gamma_{ij}^* \cdot \Delta z}{\Delta F}$$

In Abbildung 6 ist für den Fall der Seitenkante die Fläche ΔF , deren Höhe Δz sowie der Aufpunkt der Wirbeldichte eingezeichnet.

Die an den Aufpunkten der Strömungsrandbedingung zu berechnenden Zirkulationsverteilungen wurden durch lineare Interpolation bestimmt, da die Aufpunkte in der Mitte zwischen den Wirbeln liegen, gilt:

$$\gamma_{ij}(x_i, z_{ij}) = \frac{\gamma_{i+1,j} + \gamma_{i,j}}{2}$$

In Abbildung 7 sind die Geschwindigkeitskomponenten für die Saug- und Druckseite berechnet und den Ergebnissen der Experimente gegenüber gestellt worden. Man erkennt, daß an der Profilloberseite die U -Komponenten etwas überhöht sind, während die W -Komponenten in Spannweitenrichtung kleiner ausfallen. Diese Unterschiede lassen sich darauf zurückführen, daß im vorliegenden Modell der Aufrollvorgang der freien Wirbel zu einem ausgeprägten, stark nach innen zur Profilmittte geneigten Spitzenwirbel nicht berücksichtigt wurde.

Die Geschwindigkeitskomponenten auf der Profilverseite zeigten ebenfalls leichte Unterschiede zum Experiment, die U -Komponenten waren wiederum etwa größer und die W -Komponenten stiegen zum Profilrand stärker an als die gemessenen Werte.

Die Berechnungen der Druckbeiwerte erfolgte mit Hilfe der Bernoullischen Gleichung

$$p_o + \frac{\rho}{2}u_o^2\cos^2\alpha + \frac{\rho}{2}u_o^2\sin^2\alpha = p + \frac{\rho}{2}U^2 + \frac{\rho}{2}V^2 + \frac{\rho}{2}W^2$$

mit der Anströmung: $\vec{V}_\infty = u_o\cos\alpha \vec{e}_{X_F} + u_o\sin\alpha \vec{e}_{Y_F}$

Der dimensionslose Druckbeiwert wurde in der folgenden Form definiert:

$$c_p = \frac{p_o - p}{\frac{\rho}{2}u_o^2}$$

Da V wegen der Strömungsrandbedingung verschwindet, gilt an der Profiloberfläche:

$$c_p = \left(\frac{U}{u_o}\right)^2 + \left(\frac{W}{u_o}\right)^2 - 1 \quad (4.2)$$

In der U -Komponente ist der Anteil der Anströmung enthalten.

$$U = u_o\cos\alpha \pm \frac{\gamma}{2} + u_\gamma$$

Obwohl schon der Vergleich der Geschwindigkeitskomponenten deutliche Unterschiede zeigte, sind diese bei den c_p -Verteilungen besonders auffällig. Die Abbildungen 8a – 8c zeigen berechnete und gemessene Druckverläufe (Abbildung 8d) für verschiedene Schnitte in X_F -Richtung, aufgetragen über die auf 1 normierte Halbspannweite $S/B(X_F)$ mit $B(X_F) = X_F \tan\lambda$. Die Berechnungen wurden für 120, 210 und 325 Wirbel durchgeführt, der Anstellwinkel betrug $20,5^\circ$. Die ausgeprägten Druckminima bei ca. 60% der örtlichen Halbspannweite, wie sie die experimentellen Daten zeigen, treten nicht auf. Der Grund ist auch hier im Nichtaufrollen der Spitzenwirbel der Elementarwirbel zu einem einzigen Spitzenwirbel zu suchen. Die Veränderungen mit wachsender Wirbelzahl sind gering, die Konvergenz ist gut. Auffällig ist auch, daß der Druck auf der Profilverseite bei den Berechnungen größere Werte liefert als das Experiment.

4.2 Berücksichtigung des Spitzenwirbels

Das bisher behandelte Modell enthält den Spitzenwirbel nicht implizit. Unter der Annahme, daß sich alle Spitzenwirbel der Elementarwirbel zu einem einzigen Spitzenwirbel vereinigen, wurde das Modell erweitert.

Dazu wurden Schnittebenen betrachtet, die senkrecht zu den Achsen der freien Wirbel angeordnet waren. Diese Ebenen schneiden das Profil an den Stellen ξ_i in Spannweitenrichtung (Abbildung 11a). Die durch diese Ebenen hindurchtretenden Wirbel wurden für eine Schwerpunktsbestimmung berücksichtigt. Die Schwerpunkt in z und y -Richtung lassen sich nach den folgenden Beziehungen berechnen:

$$z_{Sp}(i) = \frac{\sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^{M+k} b_{kl} \Gamma'_{kl} \Delta F'_{kl}}{\sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^{M+k} \Gamma'_{kl} \Delta F'_{kl}}$$

$$y_{Sp}(i) = \frac{\sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^{M+k} \eta_k \Gamma'_{kl} \Delta F'_{kl}}{\sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^{M+k} \Gamma'_{kl} \Delta F'_{kl}}$$

Dabei stellt Γ'_{kl} die örtliche Zirkulation der freien Wirbel in der betrachteten Ebene da. An den Orten des Profils ist $\Gamma'_{kl} = \Gamma^*_{kl}$.

Als schwierig erwies sich die Wahl der Flächenelemente $\Delta F'_{kl}$. Hier wurde die Projektion des Profiltails stromaufwärts in der betrachtete Ebene als Gesamtfläche betrachtet. Die Flächenelemente wurden auf ähnliche Weise wie bei der Berechnung der Werte für Γ^*_{kl} bestimmt (Abbildung 11b). Sie sind um den Faktor $\tan(k\alpha)$ kleiner als die Flächenelemente in Abbildung 6.

Für 120, 210 und 325 Wirbel ergaben die Schwerpunktsberechnungen folgende charakteristische Größen: Die Wirbelachsen lagen in z -Richtung gemittelt bei 53,5%, 55,5% und 57,1% der Halbspannweite, die Verhältnisse α'/α des Winkels der Wirbelachse zur Profloberfläche zum Anstellwinkel betrug gemittelt 15,0%, 14,2% und 13,4%. Die Winkelverhältnisse konvergierten schlecht. Die Abbildung 9 zeigt die geometrische Lage des Spitzenwirbels für 120 Wirbel.

Verschiedene Messungen (Engler [7] und Hoeijmachers, Vaastra und Verhaagen [8]) zeigen fast unabhängig vom Anstellwinkel und Seitenverhältnis für das Winkelverhältnis α'/α einen Wert von 25–27%. Die Lage der Wirbelachse lag bei den betrachteten Experimenten bei ca. 60% der Halbspannweite.

Für die Berechnungen der w -Komponente wurde das Modell des Spitzenwirbels aus Kapitel 2 verändert. Die Abbildung 10 zeigt das Modell zweier Spitzenwirbel mit dem halben Öffnungswinkel λ' und dem Winkel α'' ($\alpha'' = k\alpha - \alpha'$), der die Neigung der Wirbelachsen gegenüber dem Koordinatensystem angibt. Der Spitzenwirbel beginnt in der Profilspitze, der Winkel zwischen der Profilfläche und der Achse des Spitzenwirbels ist α' . Dieses Modell wurde gewählt, um auch den Einfluß des Nachbarwirbels zu berücksichtigen. Das Koordinatensystem soll identisch sein mit dem aus Abbildung 1. Die Berechnung aller Geschwindigkeitskomponenten erfolgte wie im Fall des deltaförmigen Elementarwirbels. Die Ortsvektoren und ihre Änderungen haben die folgende Form:

$$\vec{r}_1 = \{\xi + X, \eta_\xi + X \tan \alpha'', X \tan \lambda'\} \quad , \quad 0 \leq X \leq \infty$$

$$\vec{r}_2 = \{\xi + X, \eta_\xi + X \tan \alpha'', -X \tan \lambda'\}$$

$$d\vec{r}_1 = \{dX, dX \tan \alpha'', \tan \lambda' dX\}$$

$$d\vec{r}_2 = \{dX, dX \tan \alpha'', -\tan \lambda' dX\}$$

Das induzierte Geschwindigkeitsfeld nach dem Biot-Savartschen Gesetz lautet:

$$\vec{v} = \frac{\Gamma_\xi}{4\pi} \int_0^\infty \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1) \times d\vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} - \frac{\Gamma_\xi}{4\pi} \int_0^\infty \frac{(\vec{r} - \vec{r}_2) \times d\vec{r}_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} \quad (4.3)$$

Die Berechnung der Vektorprodukte ergibt:

$$\begin{aligned}
\vec{v} = & \frac{\Gamma_\xi}{4\pi} \{ ((y - \eta_\xi) \tan \lambda' - z \tan \alpha'') \vec{e}_x + (z - (x - \xi) \tan \lambda') \vec{e}_y + (\eta_\xi - y + (x - \xi) \tan \alpha'') \vec{e}_z \} \\
& \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{(x - \xi - X)^2 + (y - \eta_\xi - X \tan \alpha'')^2 + (z - X \tan \lambda')^2}^3} dX \\
- & \frac{\Gamma_\xi}{4\pi} \{ ((\eta_\xi - y) \tan \lambda' - z \tan \alpha'') \vec{e}_x + (z + (x - \xi) \tan \lambda') \vec{e}_y + (\eta_\xi - y + (x - \xi) \tan \alpha'') \vec{e}_z \} \\
& \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{(x - \xi - X)^2 + (y - \eta_\xi - X \tan \alpha'')^2 + (z + X \tan \lambda')^2}^3} dX \quad (4.4)
\end{aligned}$$

Nach der Integration erhält man für die Geschwindigkeitskomponenten:

$$\begin{aligned}
\vec{v} = & \frac{\Gamma_\xi}{4\pi} \{ ((y - \eta_\xi) \tan \beta - z \tan \alpha'') D - ((\eta_\xi - y) \tan \beta - z \tan \alpha'') E \} \vec{e}_x \\
& + ((z - (x - \xi) \tan \lambda') D - (z + (x - \xi) \tan \lambda') E) \vec{e}_y \\
& + (-(y - \eta_\xi) + (x - \xi) \tan \alpha'') (D - E) \vec{e}_z \quad (4.5)
\end{aligned}$$

mit den folgenden Abkürzungen:

$$\begin{aligned}
D \equiv & \left(1 + \frac{x - \xi + (y - \eta_\xi) \tan \alpha'' + z \tan \lambda'}{\sqrt{(1 + \tan^2 \alpha'' + \tan^2 \lambda') ((x - \xi)^2 + (y - \eta_\xi)^2 + z^2)}} \right) \\
& \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha'' + \tan^2 \lambda'}}{(1 + \tan^2 \alpha'' + \tan^2 \lambda') ((x - \xi)^2 + (y - \eta_\xi)^2 + z^2) - (x - \xi + (y - \eta_\xi) \tan \alpha'' + z \tan \lambda')^2} \\
E \equiv & \left(1 + \frac{x - \xi + (y - \eta_\xi) \tan \alpha'' - z \tan \lambda'}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha'' + \tan^2 \lambda'} \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta_\xi)^2 + z^2}} \right) \\
& \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha'' + \tan^2 \lambda'}}{(1 + \tan^2 \alpha'' + \tan^2 \lambda') ((x - \xi)^2 + (y - \eta_\xi)^2 + z^2) - (x - \xi + (y - \eta_\xi) \tan \alpha'' - z \tan \lambda')^2}
\end{aligned}$$

Dieses Modell wurde für die Berechnungen der z -Komponente der Geschwindigkeit an der Profloberseite benutzt. Dazu wurde der Spitzenwirbel in die Proflnase gelegt und nach den Winkeln α'' und λ' der Schwerpunktsrechnung ausgerichtet. Die berechneten Druckbeiwerte sind in den Abbildungen 8e – 8g für 120, 210 und 325 Wirbel wiedergegeben. Der Einfluß des Spitzenwirbels ist deutlich zu erkennen. Die Maximalwerte der Messungen werden überschritten. Es fällt auf, daß die Maxima der c_p -Verteilung mit wachsender Wirbelzahl leicht ansteigen. Dieser Effekt beruht darauf, daß mit wachsender Wirbelzahl sich die Wirbelachse der Profloberfläche annähert. Wie bereits erwähnt, zeigten die Verhältnisse α'/α mit steigender Wirbelzahl nur schwache Konvergenz. Bei der Verwendung des obigen Wirbelmodells

führt eine geringe Verkleinerungen des Winkels der Wirbelachse zum Profil zu einer deutlichen Erhöhung der z -Komponente der Geschwindigkeit. Allerdings muß bedacht werden, daß die Berechnung der Schwerpunkte nicht überbewertet werden darf. In den betrachteten Schnitten tritt kein ausgeprägter Wert am Ort der erwarteten Lage des Spitzenwirbels auf, vielmehr liegen die größten Werte an den Rändern. Eine Optimierung der Wirbellage läßt den Schluß auf eine weitere Verbesserung der c_p -Verteilung zu. In den Abbildungen 12a und 12b sind die Geschwindigkeitskomponenten an Ober- und Unterseite für 120 und 210 Wirbel aufgezeichnet. Die Übereinstimmung mit den experimentellen Werten ist befriedigend.

5. Berücksichtigung des Dickeneinflusses

In einem weiteren Schritt wurde versucht, den Einfluß der Dicke zu berücksichtigen. Die Geschwindigkeitskomponenten ergeben sich durch partielle Differentiation des Quellpotentials, das Potential eines Deltafügels lautet:

$$\Phi(X_F, Y_F, Z_F) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^l d\xi_F \int_{-\xi_F \tan \lambda}^{\xi_F \tan \lambda} \frac{q(\xi_F, \zeta_F) d\zeta_F}{\sqrt{(X_F - \xi_F)^2 + Y_F^2 + (Z_F - \zeta_F)^2}} \quad (5.1)$$

Der Index F soll zeigen, daß die Betrachtungen im System des Profils stattfinden. Zur Vereinfachung wurde nun angenommen, daß statt der kontinuierlichen Quellverteilung $q(\xi_F, \zeta_F)$ eine stufenweise Verteilung in Z_F -Richtung vorliege, wie in Abbildung 13 dargestellt. Dabei wurde die Geometrie verwendet, die sich durch die Verteilung der Hufeisenwirbel ergibt. Die Quellverteilungen haben die Breite der Abstände der Einzelwirbel. Sie werden in einem Bereich $Z_F(i) - \frac{\Delta Z_F}{2}$ bis $Z_F(i) + \frac{\Delta Z_F}{2}$ nur von ξ_F abhängig angenommen und haben einen ξ_F -Bereich von $X_{F,A}(Z_F(i))$ bis l . Damit wird aus Gleichung (5.1), unter der Voraussetzung man habe K Stufen über das gesamte Profil verteilt, die folgende Beziehung:

$$\Phi(X_F, Y_F, Z_F) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^K \int_{X_{F,A}}^l d\xi_F \int_{Z_F(i) - \frac{\Delta Z_F}{2}}^{Z_F(i) + \frac{\Delta Z_F}{2}} \frac{q(\xi_F, Z_F(i)) d\zeta_F}{\sqrt{(X_F - \xi_F)^2 + Y_F^2 + (Z_F - \zeta_F)^2}} \quad (5.2)$$

ΔZ_F ist der Abstand zwischen zwei Quellverteilungen und muß nicht konstant sein.

Nach partieller Differentiation und einer Integration nach ζ ergeben sich für $Y_F \rightarrow \pm 0$ die folgenden Beziehungen:

$$u_q = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^K \int_{X_{F,A}}^l \frac{q(\xi_F, Z_F(i))}{X_F - \xi_F} \cdot \left(\frac{(Z_F - Z_F(i) - \frac{\Delta Z_F}{2})}{\sqrt{(X_F - \xi_F)^2 + (Z_F - Z_F(i) - \frac{\Delta Z_F}{2})^2}} - \frac{(Z_F - Z_F(i) + \frac{\Delta Z_F}{2})}{\sqrt{(X_F - \xi_F)^2 + (Z_F - Z_F(i) + \frac{\Delta Z_F}{2})^2}} \right) d\xi_F \quad (5.3)$$

$$v_q = \lim_{Y_F \rightarrow \pm 0} \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^K \int_{X_{F,A}}^l \frac{q(\xi_F, Z_F(i)) Y_F}{Y_F^2 + (X_F - \xi_F)^2}$$

$$\cdot \left(\frac{-(Z_F - Z_F(i) - \frac{\Delta Z_F}{2})}{\sqrt{(X_F - \xi_F)^2 + (Z_F - Z_F(i) - \frac{\Delta Z_F}{2})^2}} + \frac{(Z_F - Z_F(i) + \frac{\Delta Z_F}{2})}{\sqrt{(X_F - \xi_F)^2 + (Z_F - Z_F(i) + \frac{\Delta Z_F}{2})^2}} \right) d\xi_F \quad (5.4)$$

$$w_q = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^K \int_{X_{F,A}}^l q(\xi_F, Z_F(i))$$

$$\cdot \left(\frac{1}{\sqrt{(X_F - \xi_F)^2 + (Z_F - Z_F(i) - \frac{\Delta Z_F}{2})^2}} - \frac{1}{\sqrt{(X_F - \xi_F)^2 + (Z_F - Z_F(i) + \frac{\Delta Z_F}{2})^2}} \right) d\xi_F \quad (5.5)$$

Bei Betrachtung der Gleichung 5.4 erkennt man, daß nur im Fall $\xi_F \rightarrow X_F$ und $Z_F = Z_F(i)$ ein Anteil in Form einer behebbaren Singularität übrig bleibt. Es ist:

$$v_q = \frac{1}{4\pi} \lim_{\substack{\xi_F \rightarrow X_F \\ Y_F \rightarrow \pm 0}} \int_{X_F - \delta}^{X_F + \delta} \frac{q(\xi_F, Z_F(i)) Y_F \frac{\Delta Z_F}{2}}{Y_F^2 + (X_F - \xi_F)^2} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{(X_F - \xi_F)^2 + (\frac{\Delta Z_F}{2})^2}} \right) d\xi_F$$

Mit den Substitutionen $\chi = \xi_F - X_F$ und $\tau = \frac{\chi}{Y_F}$ erhält man:

$$v_q = \frac{1}{4\pi} \lim_{Y_F \rightarrow \pm 0} \int_{-\delta/Y_F}^{+\delta/Y_F} \frac{\pm q(Y_F \tau + X_F, Z_F(i)) \frac{\Delta Z_F}{2}}{1 + \tau^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{Y_F^2 + \tau^2 Y_F^2 + (\frac{\Delta Z_F}{2})^2}} d\tau$$

Unter Verwendung des Integrals

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{1 + \tau^2} = \pi$$

erhält man schließlich:

$$v_q = \pm \frac{1}{2} q(X_F, Z_F = Z_F(i)) \quad \text{für } Y_F \rightarrow \pm 0 \quad (5.6)$$

Auch in der Beziehung (5.3) für die Komponente u_q tritt im Fall $\xi_F \rightarrow X_F$ eine Singularität auf, diese braucht nur für den Fall, $Z_F = Z_F(i)$ behandelt zu werden, da ansonsten das Integral 0 ist. Mit der Substitution

$$\xi_F = \frac{1}{2} (1 + X_{F,A}) - \frac{1}{2} (1 - X_{F,A}) \cos\theta \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$X_F = \frac{1}{2} (1 + X_{F,A}) - \frac{1}{2} (1 - X_{F,A}) \cos\varphi \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

und der folgenden bekannten Entwicklung für die Quellverteilung (Schlichting, Truckenbrodt [5]) läßt sich die Singularität beheben:

$$\frac{q(\xi_F, Z_F(i))}{2u_o} = B_{0i} (\cot \frac{\theta}{2} - 2\sin\theta) + B_{1i} (\tan \frac{\theta}{2} - 2\sin\theta) + B_{2i} \sin 2\theta + \dots \quad (5.7)$$

Dabei geben die Koeffizienten B_{0i} und B_{1i} den Einfluß des vorderen bzw. hinteren Nasenradius der i -ten Quellverteilung wieder.

Setzt man nun diese Substitutionen in der Gleichung (5.3) ein und verwendet weiterhin die folgenden bekannten Integrale (Schlichting, Truckenbrodt [5]),

$$\int_0^\pi \frac{\sin n\theta \sin\theta}{\cos\theta - \cos\varphi} d\theta = -\pi \cos n\varphi$$

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{\cos\theta - \cos\varphi} d\theta = \pi \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}$$

so erhält man ($\xi_F \rightarrow X_F$) :

$$\frac{u_q}{u_o} = \sum_{i=1}^K \{ B_{0i} (1 + 2\cos\varphi) + B_{1i} (-1 + 2\cos\varphi) - B_{2i} \cos 2\varphi - \dots \}$$

Die Bestimmung der Quellverteilung erfolgt über die Erfüllung der Strömungsrandbedingung. Sie besagt, daß bei dünnen Profilen die Quellverteilung proportional zur Steigung der Dickenlinie $Y_D(X_F)$ (Schlichting, Truckenbrodt [5]) ist:

$$\frac{dY_D}{dX_F} = \frac{q(X_F, Z_F)}{2u_o} \quad (5.8)$$

Diese Randbedingung muß für alle Quellverteilungen erfüllt werden. Für die Berechnungen wurden NACA Four Digit (Abbort, Doenhoff [6]) betrachtet, deren Dickenlinie sich nach der folgenden Beziehung berechnen läßt:

$$\frac{Y_D}{l} = \frac{t}{0,20} (0,2969\sqrt{X_F} - 0,126X_F - 0,3516X_F^2 - 0,2843X_F^3 - 0,1015X_F^4) \quad (5.9)$$

Die Größe t gibt das Verhältnis der maximalen Dicke zur Länge l an. Es wurde angenommen, daß der Parameter t für jede Quellverteilung erhalten bleibt.

6. Ergebnisse mit Dickeneinfluß

Mit Hilfe der in Kapitel 5 angegebenen Beziehungen wurde ein Auswertungsprogramm geschrieben. Zur Vereinfachung wurden nur Elementarwirbel in Hufeisenform ($\beta = 0$) betrachtet. Die Linien der Aufpunkte in X_F -Richtung bildeten die Mitten der Quellverteilungen. Die Steigung der Dickenlinie wurde mit Hilfe der Beziehung (5.7) entwickelt. Die Koeffizienten B_{1i} treten nicht auf. Die Berechnung der quellinduzierten Geschwindigkeiten erfolgte an den Stellen der Aufpunkte der Wirbelbelegung. Mit diesen Geschwindigkeitskomponenten wurden mit Hilfe der Strömungsrandbedingung (3.1) die Zirkulationskoeffizienten und die Gesamtgeschwindigkeiten neu berechnet. Die Abbildung 14 zeigt unter der Voraussetzung von NACA 0004 Profilen die Geschwindigkeitsvektoren an der Proflober- und unterseite, sowie die c_p -Verteilung für 120 Wirbel. Ein Vergleich mit experimentellen Ergebnissen war nicht möglich, da bei den Experimenten von Hummel ein Profil mit geringem pfeilförmigen Dickenverlauf verwendet wurde.

7. Zusammenfassung

Mit Hilfe des hier vorgestellten Verfahrens ist es möglich, das Strömungsfeld eines Deltafügels ausreichend zu beschreiben. Die berechneten Auftriebsbeiwerte stimmen mit den gemessenen gut überein.

Der Aufrollvorgang des realen Spitzenwirbels wird im vorliegenden Modell nicht berücksichtigt, dadurch sind die berechneten Geschwindigkeitskomponenten und Druckbeiwerte ungenauer. Diese Ungenauigkeiten sind eine Folge der nachträglichen Einführung eines einfachen Spitzenwirbels. Wie experimentelle und theoretische Untersuchungen gezeigt haben (Engler [7], Ludwig[9]), ist das Strömungsfeld des abgelösten Spitzenwirbels eines Deltaflügels komplizierter. Eine bessere 3-dimensionale potentialtheoretische Lösung wird in der Arbeit von Johnson, Tinoco, Lu und Epton [10] vorgestellt.

Dieser Bericht entstand im Rahmen eines Forschungsvorhabens der deutschen Forschungsgesellschaft (DFG-Is 10/32).

Literaturhinweis:

- [1] W. H. Isay: Moderne Probleme der Propellertheorie. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1970)
- [2] W. H. Isay: Kavitation. Schiffahrts-Verlag 'Hansa' C. Schroedter & Co. Hamburg 1981
- [3] D. Hummel: Umströmung scharfkantiger schlanker Deltaflügel Zeitschrift für Flugwissenschaften 15 (1967) Heft 10 S.376-385
- [4] K. Gersten: Nichtlineare Tragflächentheorie insbesondere für Tragflügel mit kleinem Seitenverhältnis. Ingenieur-Archiv, 30. Band, 6. Heft, 1961, S.431-452
- [5] H. Schlichting, E. Truckenbrodt: Aerodynamik des Flugzeuges. Band 1 und 2. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1969
- [6] I. H. Abbott, A. E. von Doenhoff: Theory of Wing Sections. Dover Publications Inc. New York 1959
- [7] R. H. Engler: Experimentelle Untersuchungen der Struktur und des "Aufplatzens" der Wirbel an einem angestellten Deltaflügel -ausgeführt im Windkanal mittels Ultraschall-. Forschungsbericht DFVLR-FB 87-06
- [8] H. W. M. Hoeijmackers, W. Vaastra, N. G. Verhaagen: Vortex Flow over Delta and Double-Delta Wings. Journal of Aircraft. Vol.20, No.9, September 1983, p.825-832
- [9] H. Ludwig: Zur Erklärung der Instabilität der über angestellten Deltaflügeln auftretenden freien Wirbelkerne. Zeitschrift für Flugwissenschaften 10 (1962) S.242-249
- [10] F. T. Johnson, E. N. Tinoco, P. Lu, M. A. Epton: Three Dimensional Flow over Wings with Leading-Edge Vortex Separation. AIAA Journal Vol.18, No.4, April 1980, p.367-380

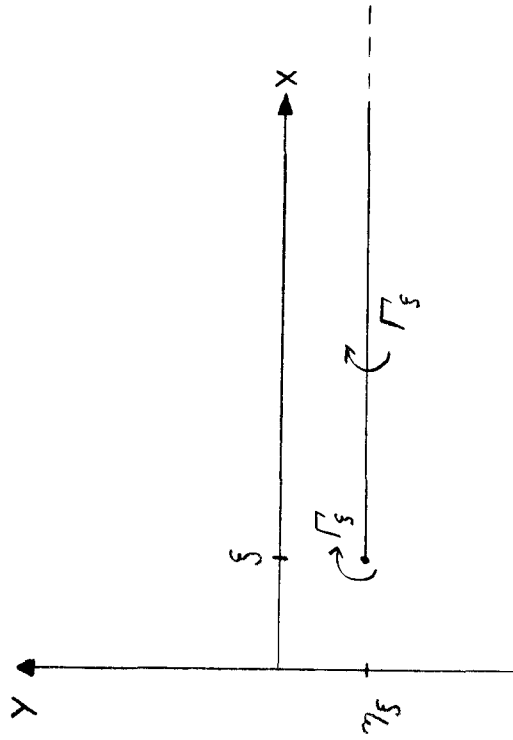
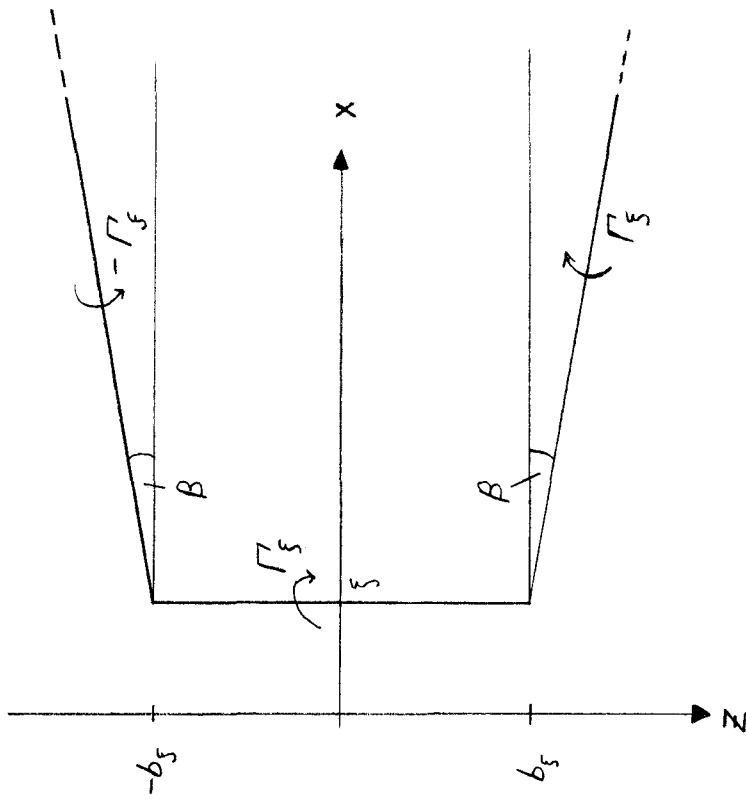


Abb. 1

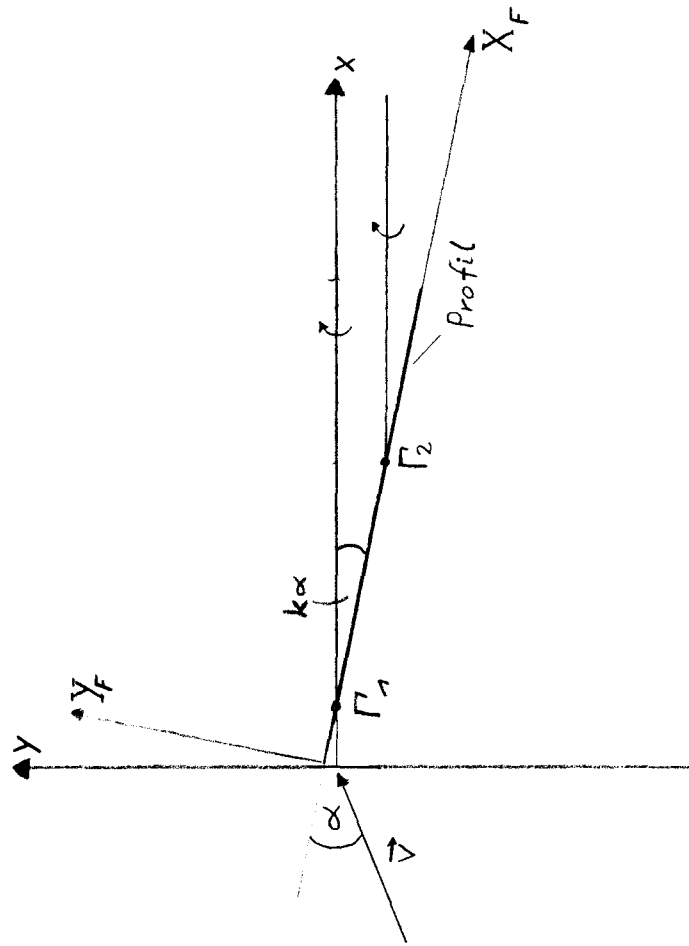
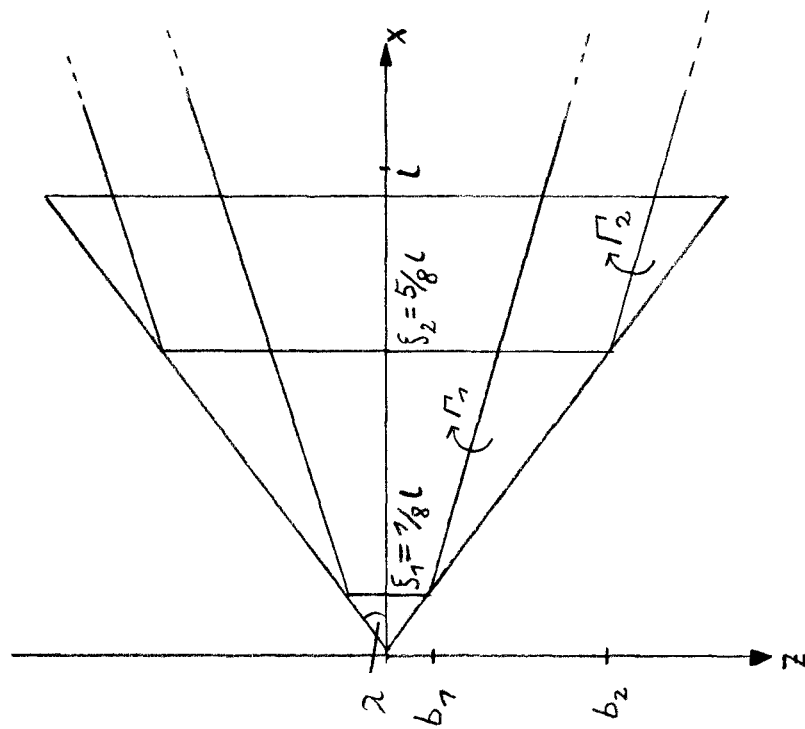


Abb. 2

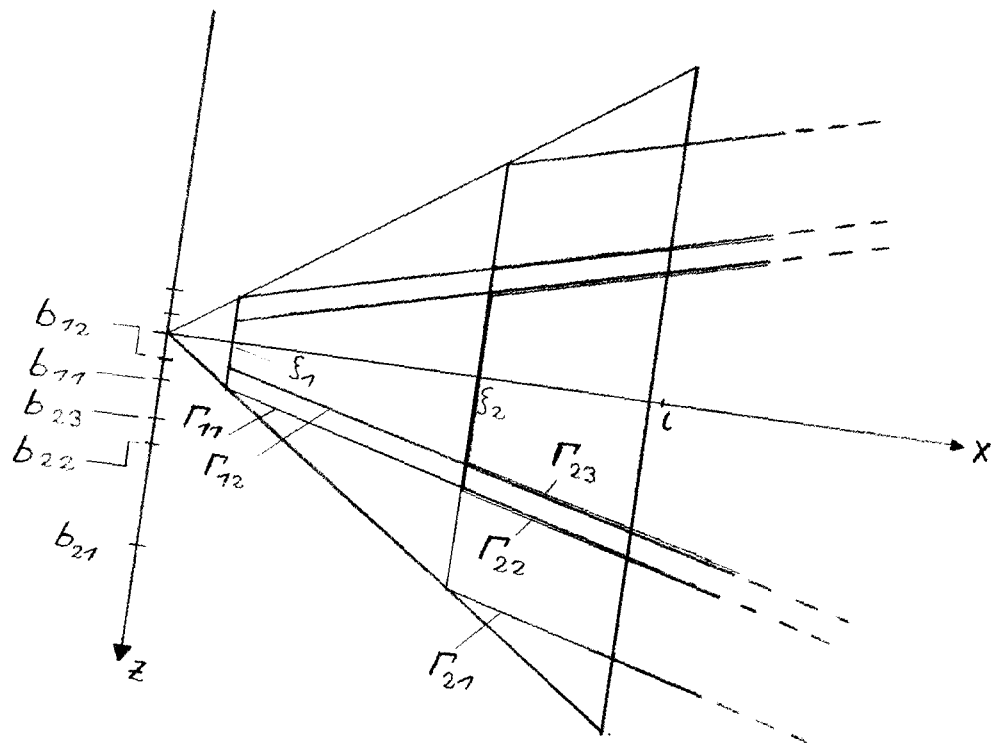


Abb. 3

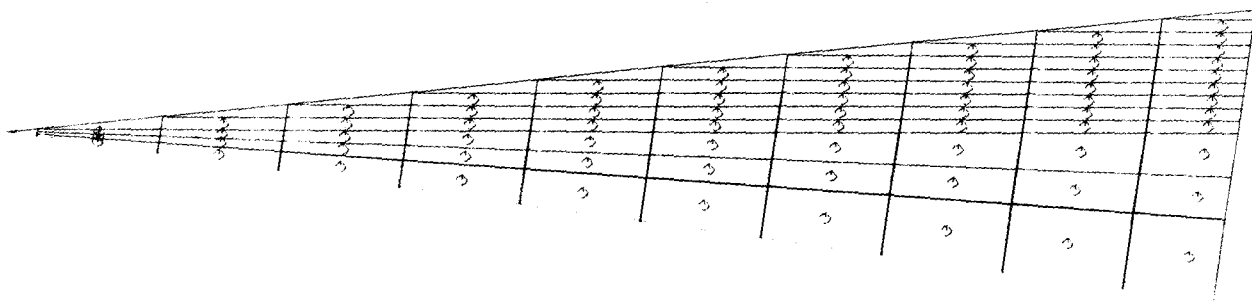


Abb. 4

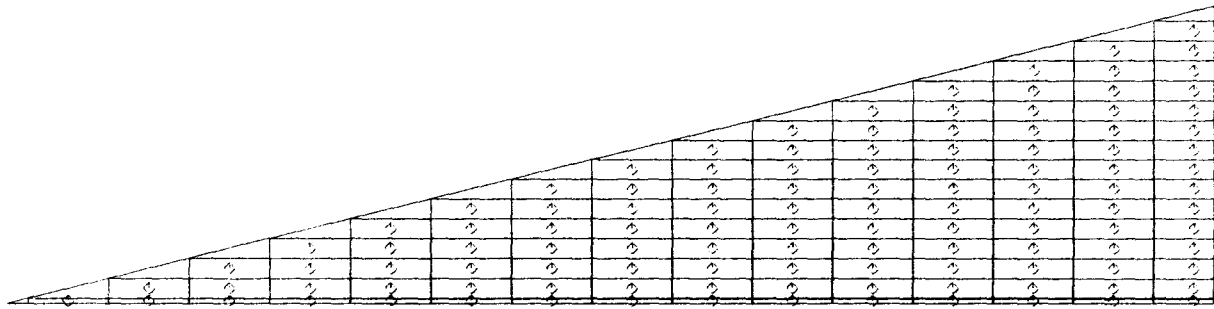


Abb. 5

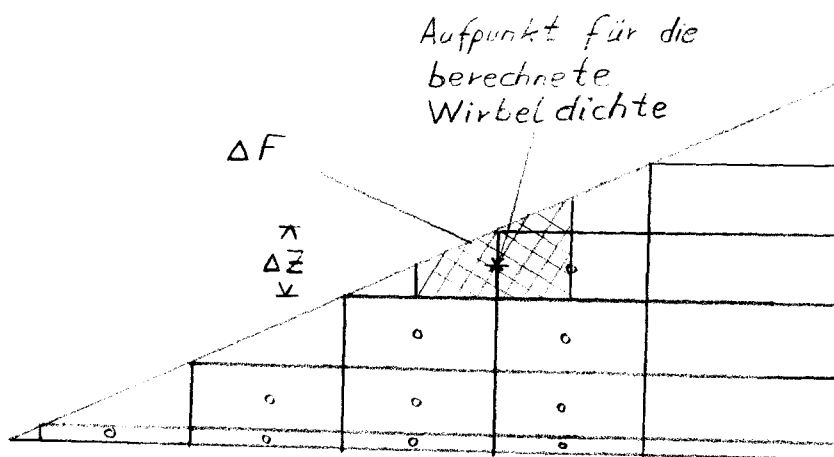
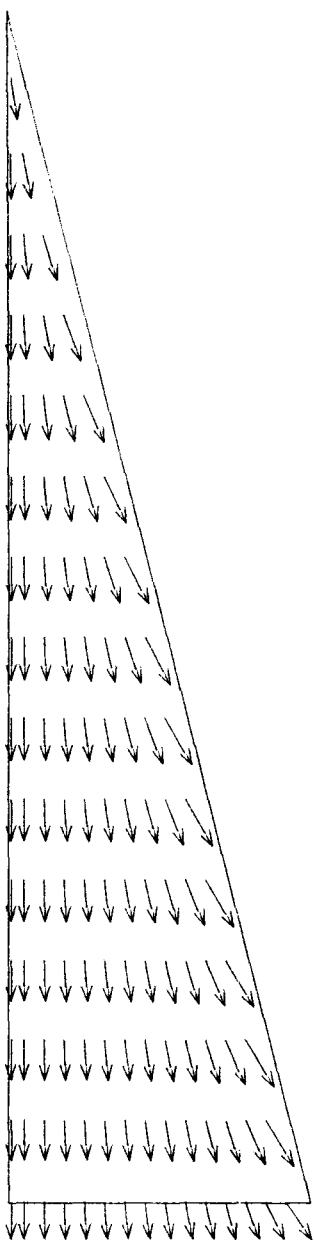
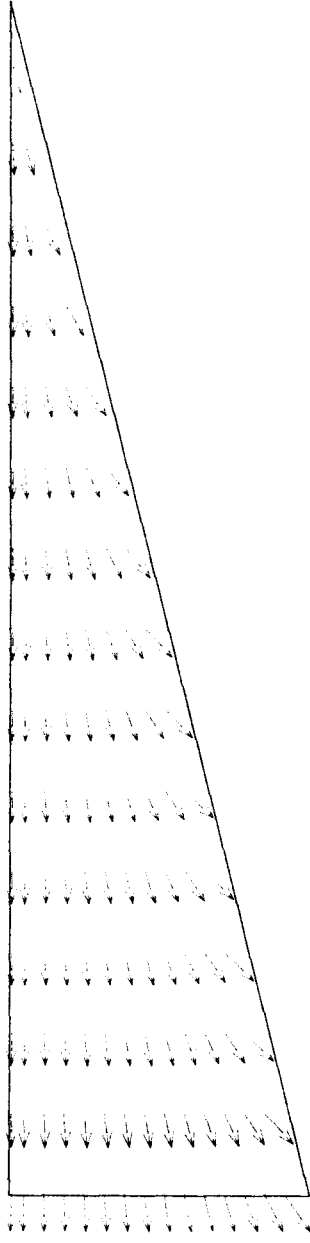


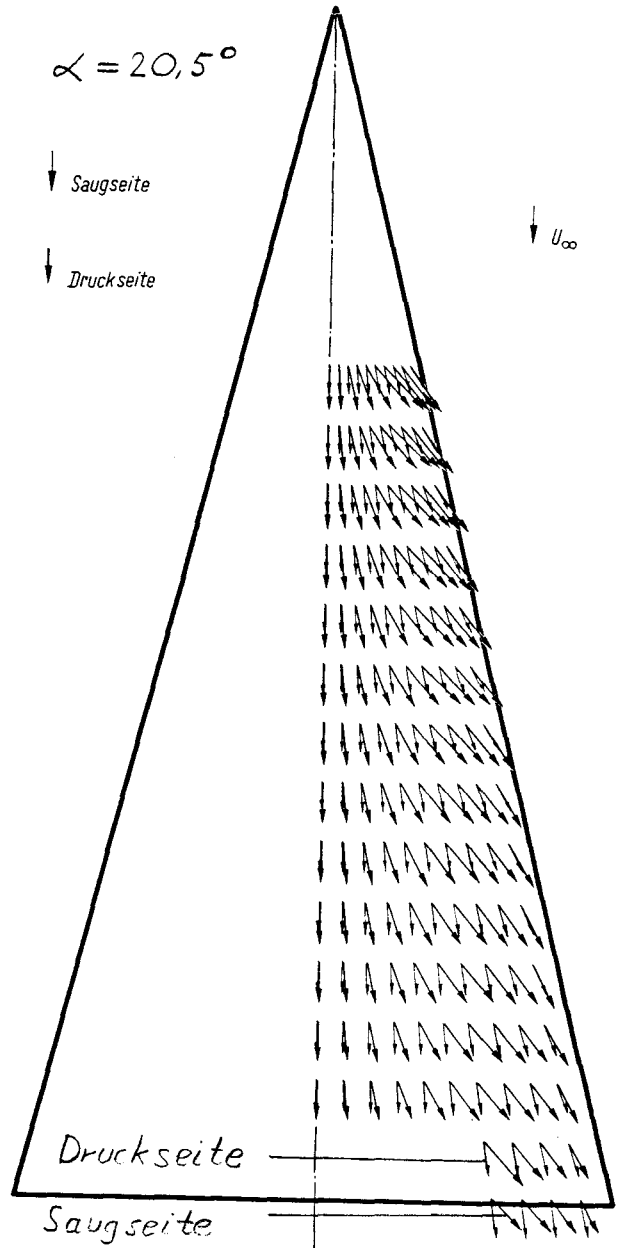
Abb. 6



Saugseite



Druckseite



Experiment

Abb. 7

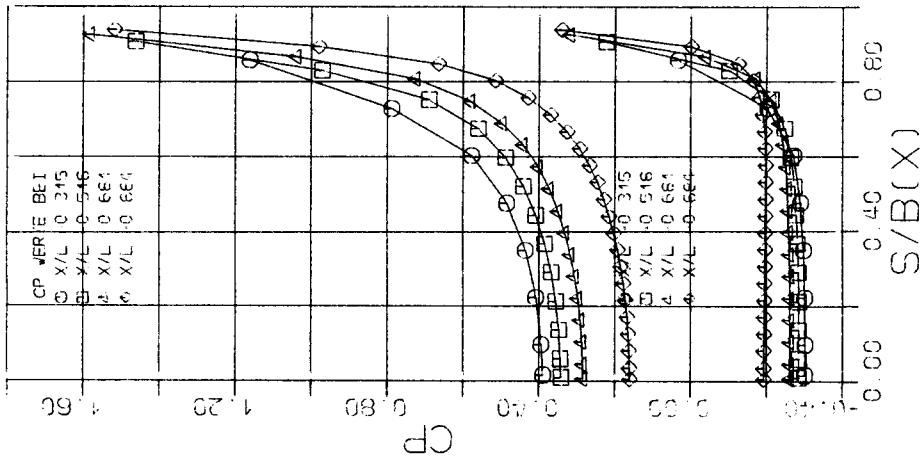


Abb. 8c

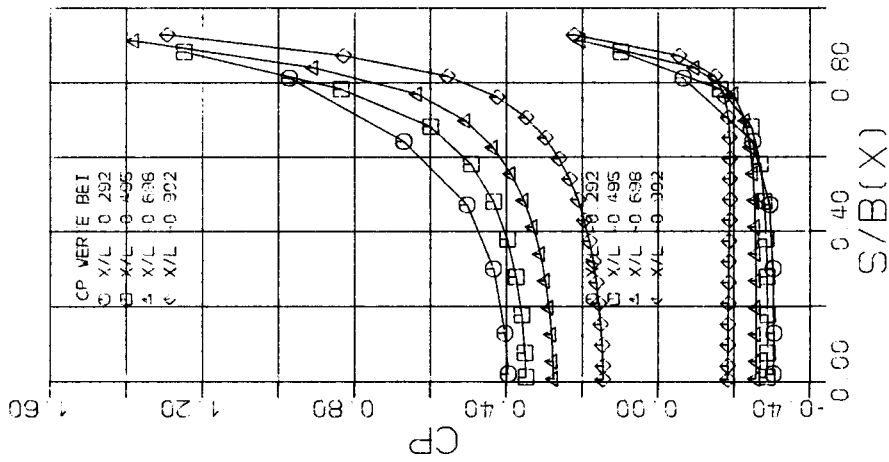


Abb. 8b

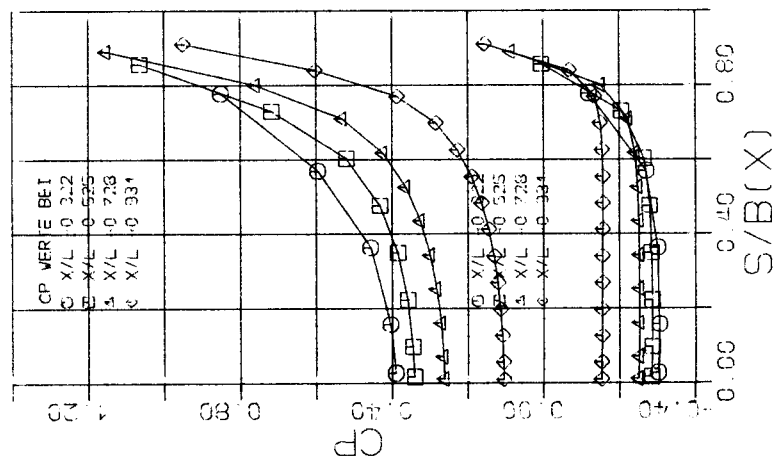


Abb. 8a

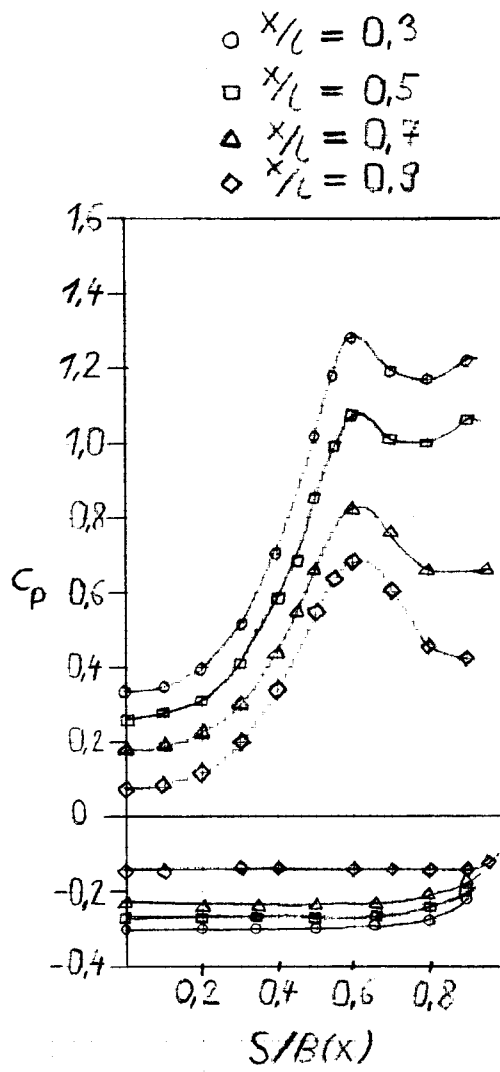
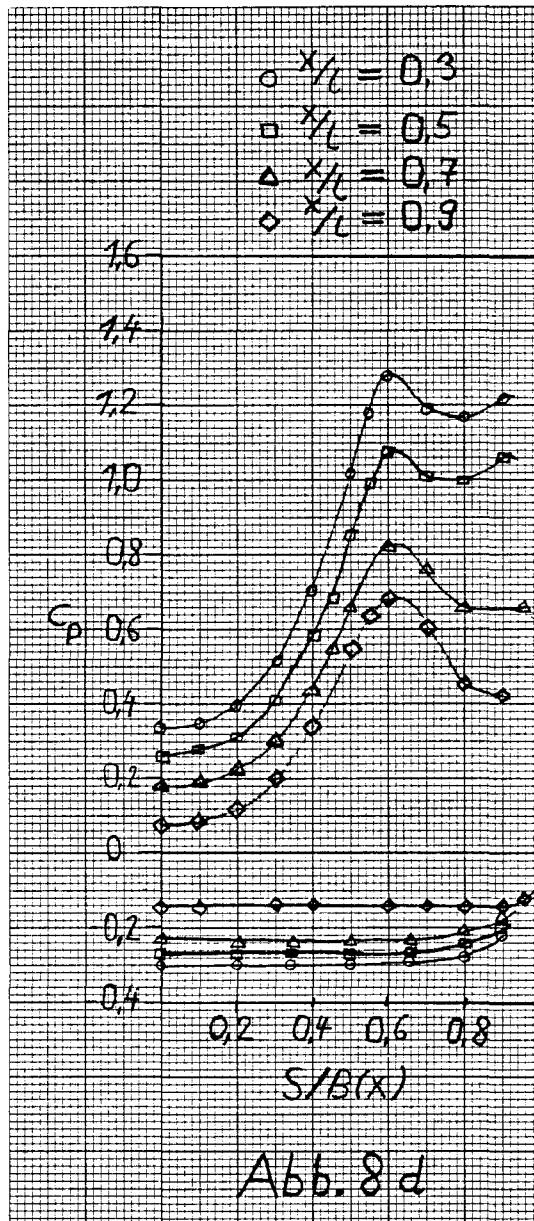


Abb. 2 d



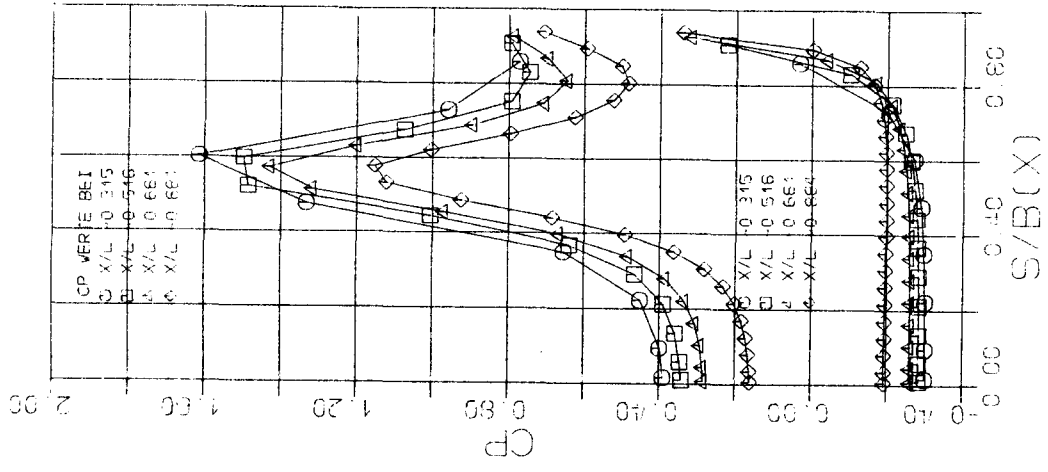


Abb. 8g

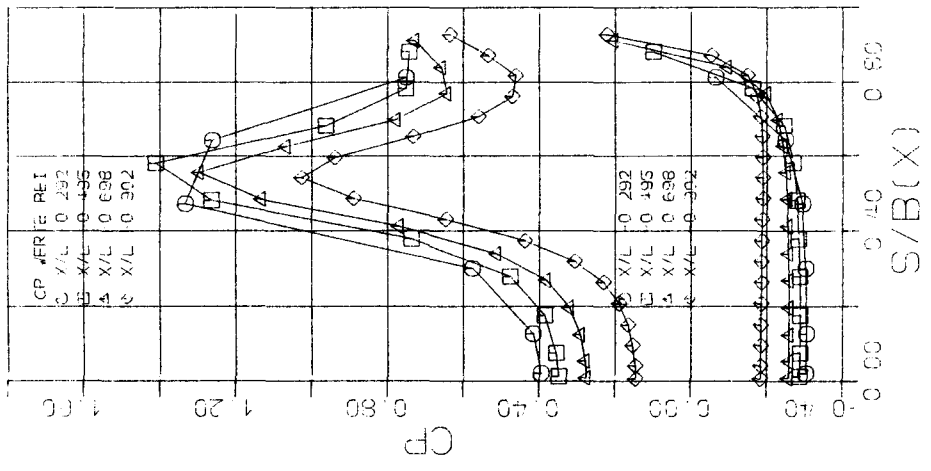


Abb. 8f

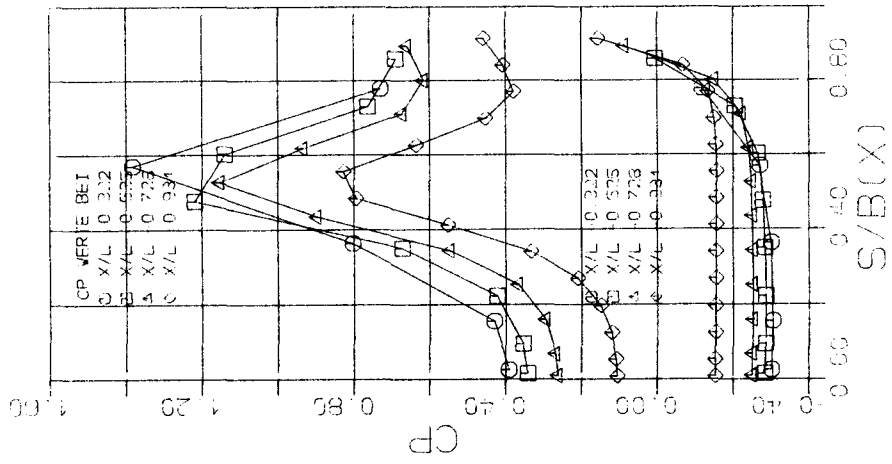
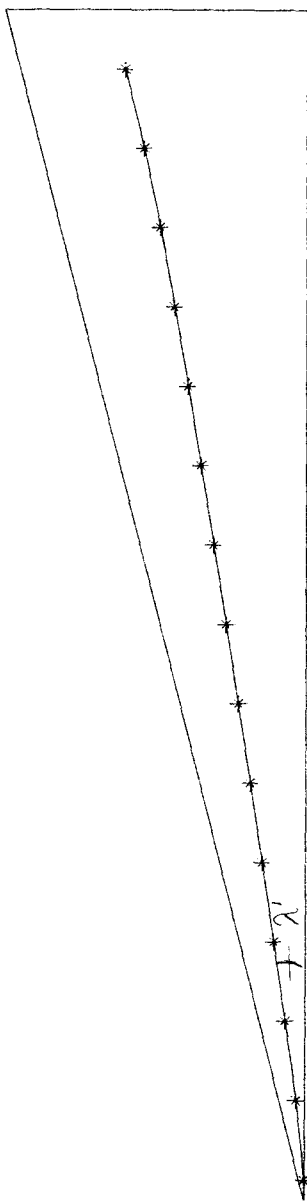
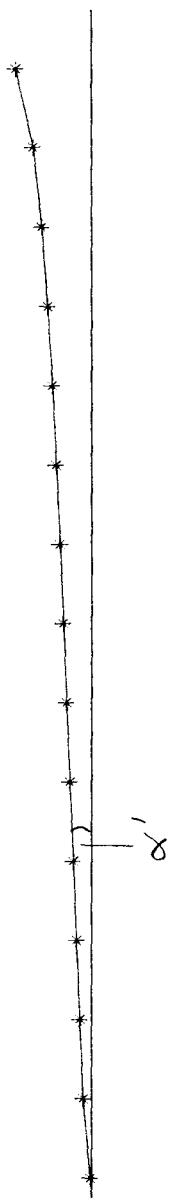


Abb. 8e



Lage des Spitzenwirbels $\alpha \approx 20,5^\circ$ $\lambda' \approx 3,1^\circ$ $\overline{\lambda} \approx 7,5^\circ$

Abb. 9

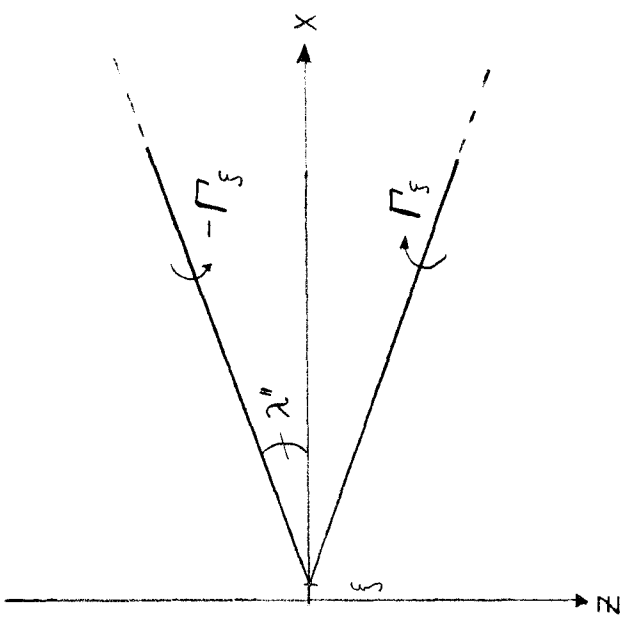


Abb. 10

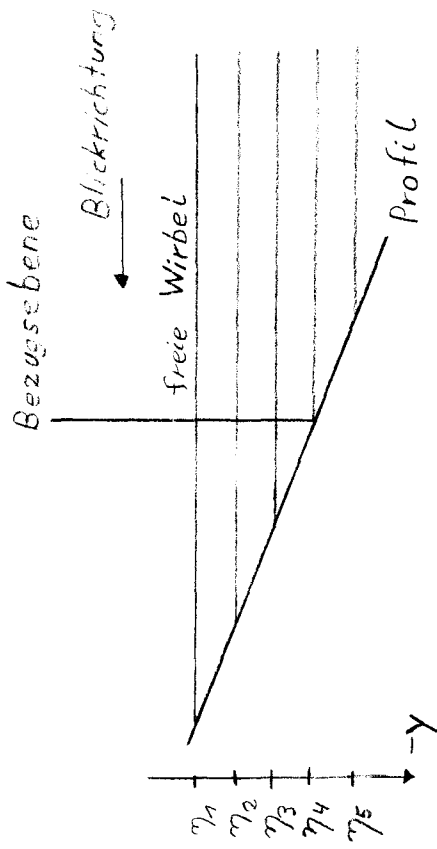
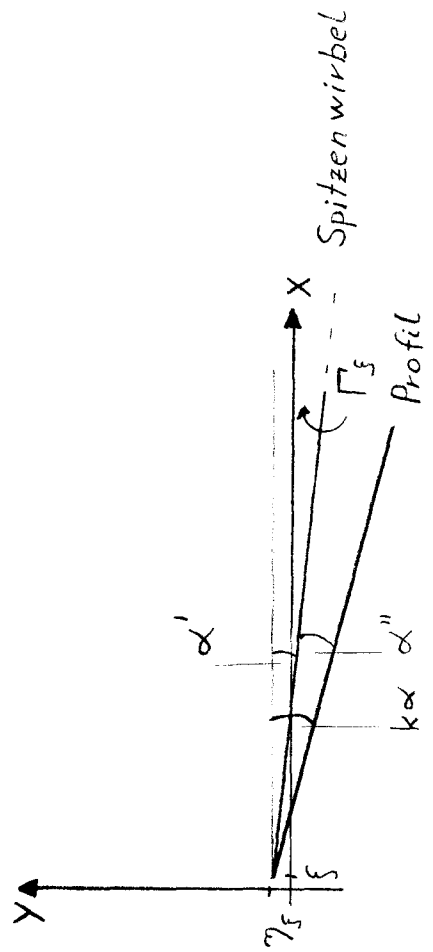


Abb. 11a

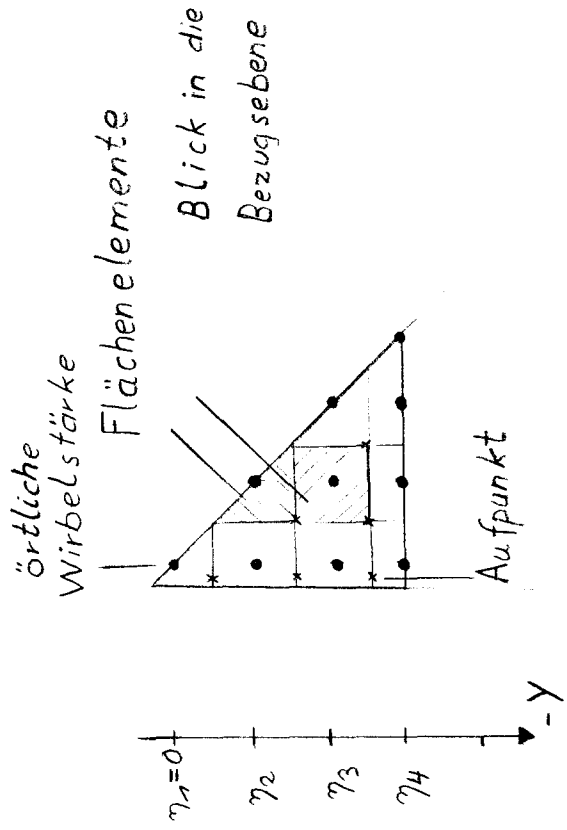
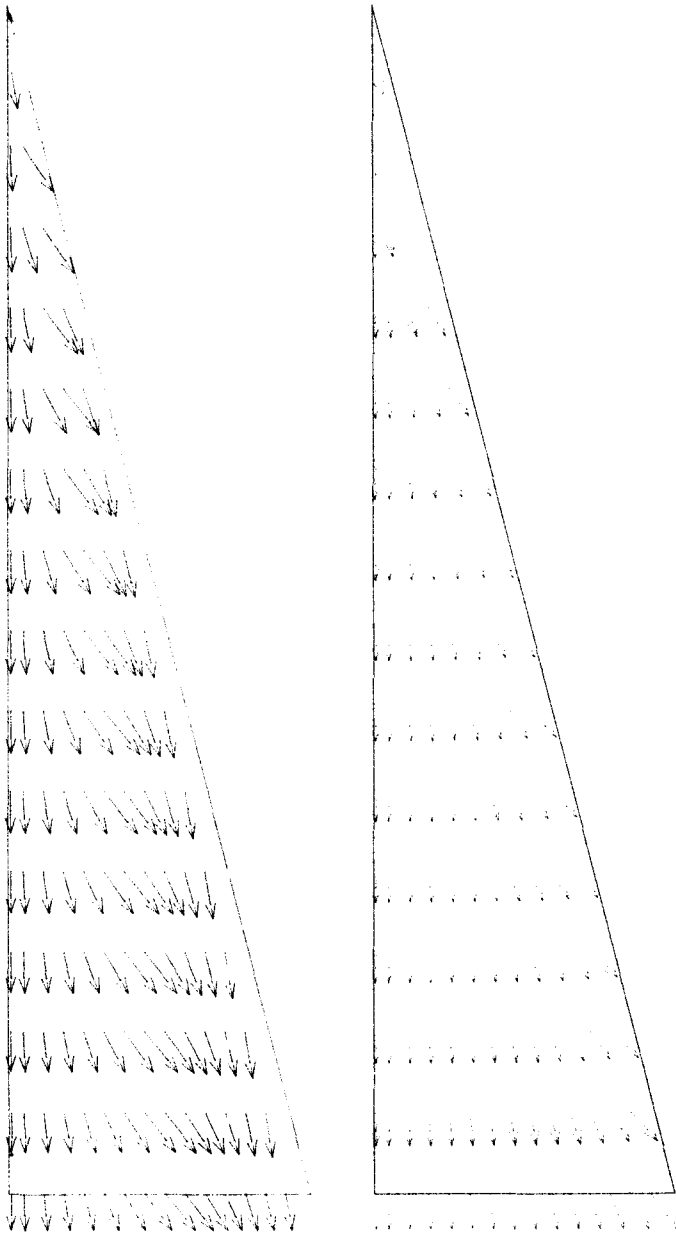


Abb. 11b

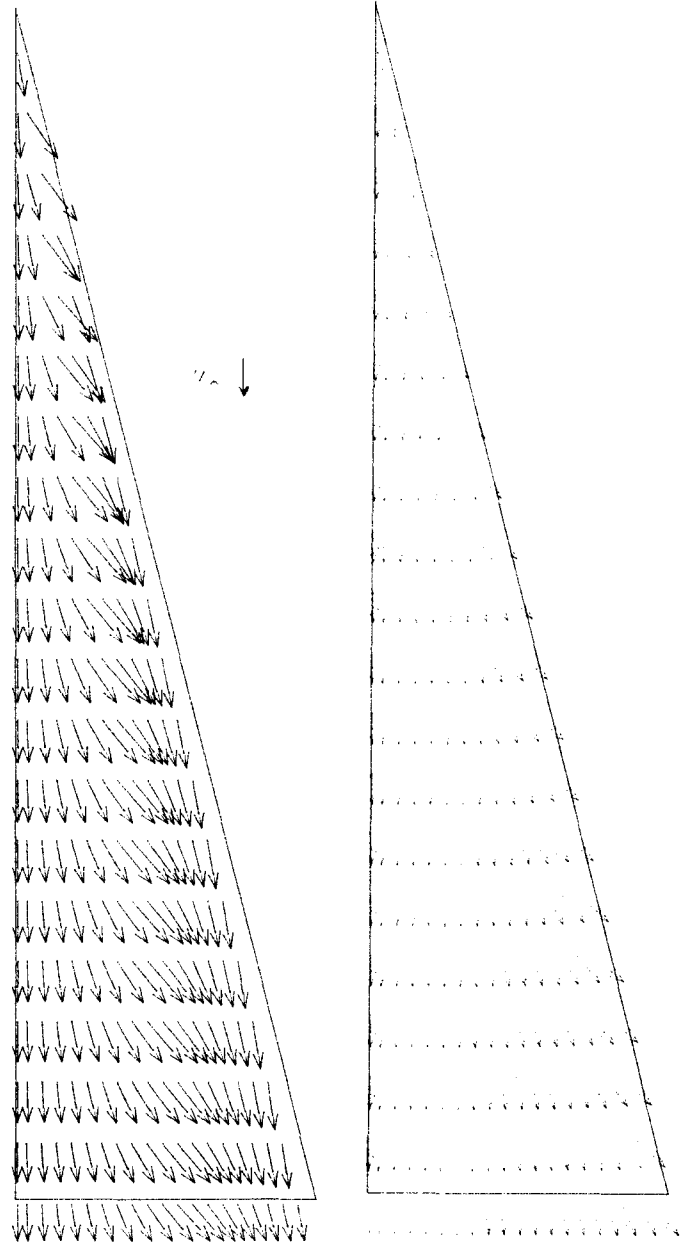


Saugseite

Druckseite

120 Wirbel

Abb. 12a

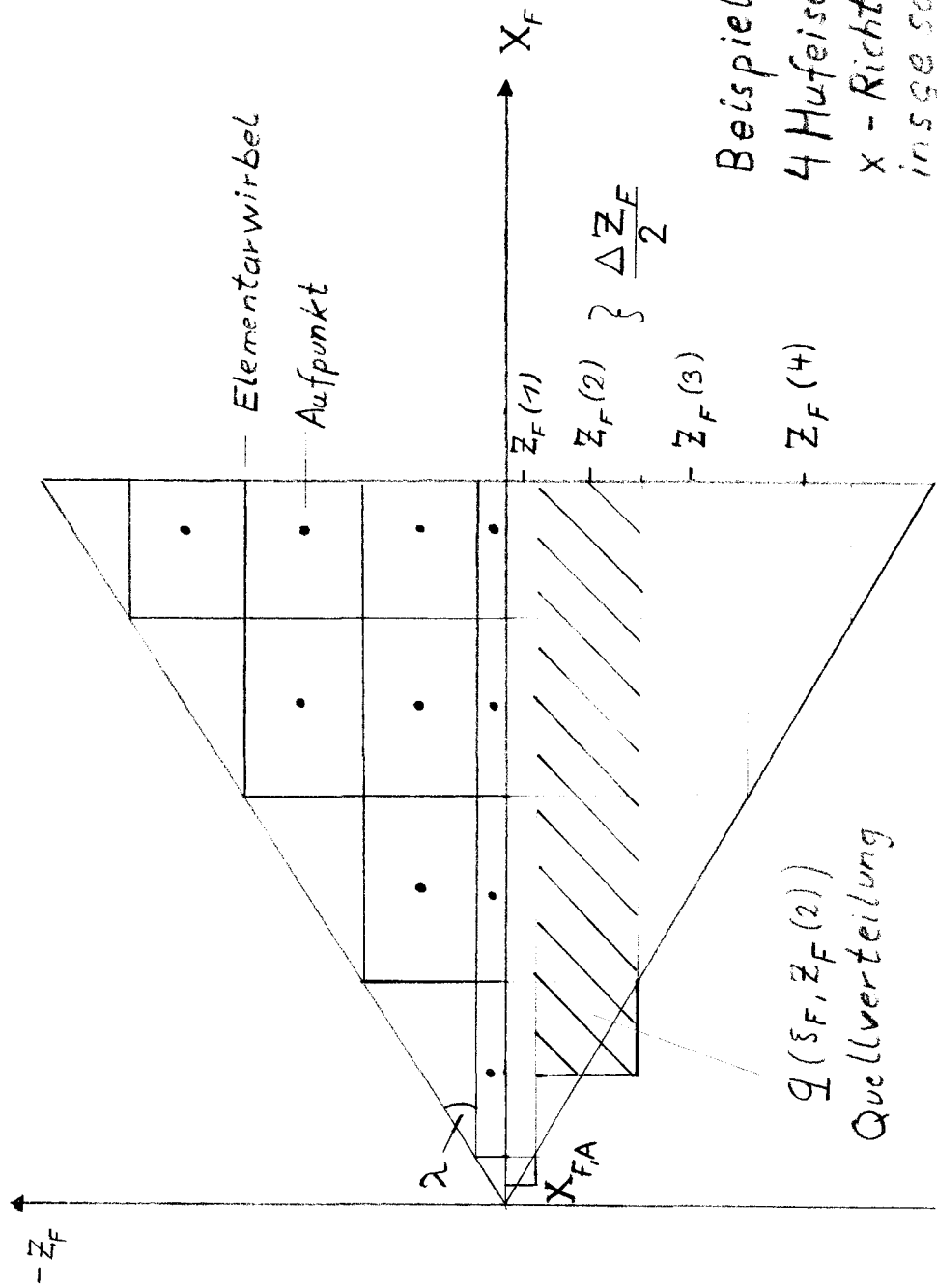


Saugseite

Druckseite

210 Wirbel

Abb. 12b



Beispiel:

4 Hufeisenwirbel in

x - Richtung,

insgesamt 10 Wirbel

4 Quellverteilungen pro

Flügelhälfte.

$K = 8$

Abb.13

Strömungsfeld mit Dickeneinfluß (NACA 0004)
 $\alpha = 20,5^\circ$ 120 Wirbel

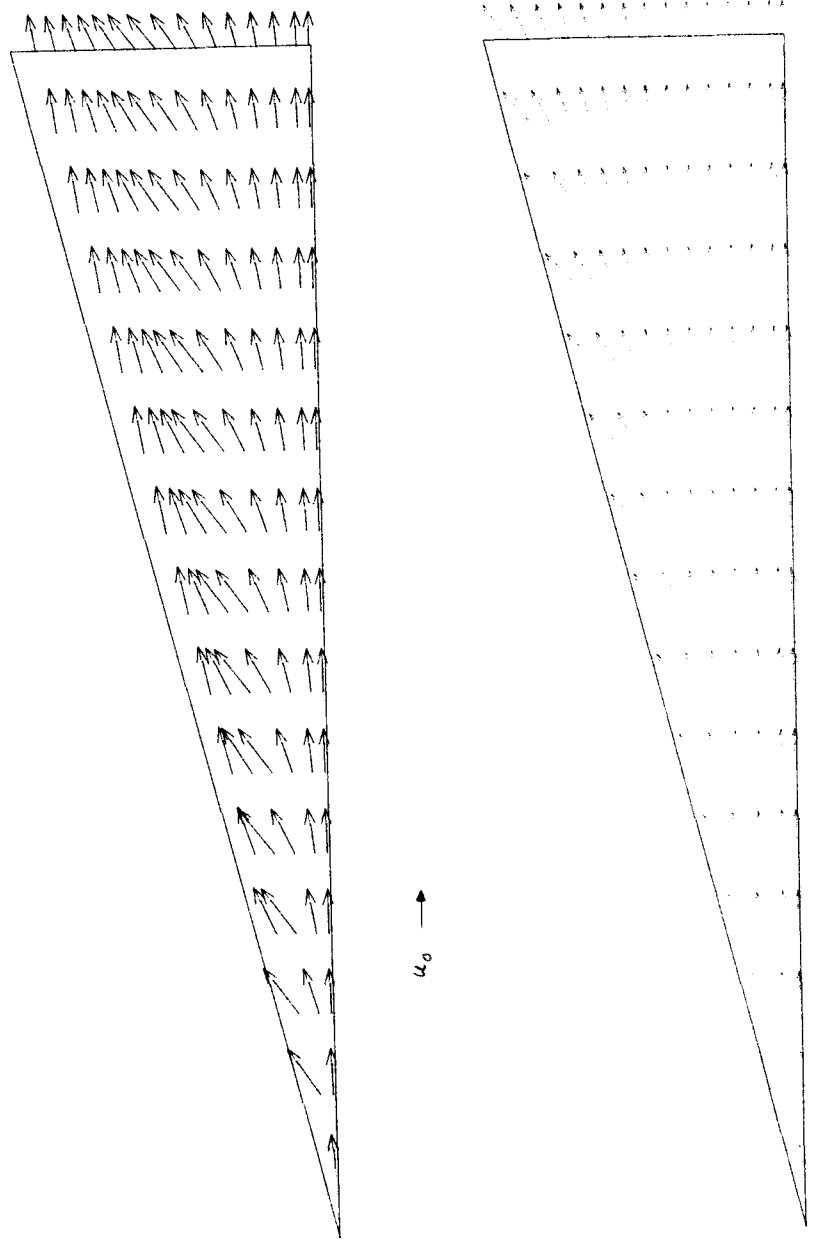
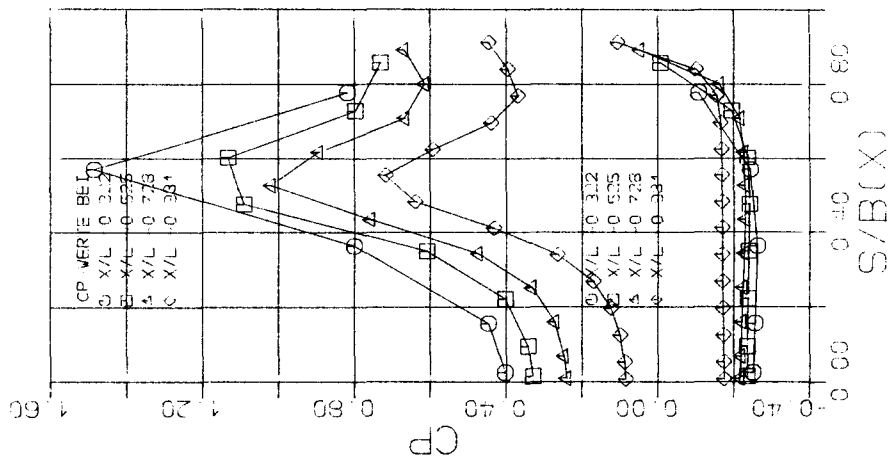


Abb. 14