

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr. 273

Über dreidimensionale Grenzschichten  
an gekrümmten Wänden

von

J. Kux

Hamburg 1971

## I n h a l t

	Seite
1. Zusammenfassung	1
2. Einleitung	2
3. Bezeichnungen und Konventionen	7
4. Die Grundgleichungen	9
5. Die Gleichungen für die laminare inkompressible Grenzschicht	16
I. Die allgemeinen Bewegungsgleichungen und die Kontinuitätsgleichung für laminare Strömung	16
II. Die Gleichungen für die laminare inkompressible Grenzschicht	18
III. Die Energiegleichung für die laminare Grenzschicht	28
6. Die Gleichungen für die inkompressible turbulente Grenzschicht	31
7. Die mechanische Energiegleichung der Turbulenz im inkompressiblen Fall	36
8. Zur Definition integraler Grenzschicht- parameter	39
9. Formulierung integraler Gleichungen für Grenzschichten an gekrümmten Wänden	53
A. Die Impulsgleichung	53
I. Herleitung und Diskussion	53
II. Vergleich mit der zweidimensionalen Theorie	60
III. Verallgemeinerungen	63
B. Die Gleichung für die mechanische Energie	64
Anhang	69
	104
Verzeichnis der verwendeten Symbole	105
Literaturverzeichnis	111

## 1. Zusammenfassung

Die dreidimensionalen Grenzschichtgleichungen werden für beliebig gekrümmte Wände in der Schreibweise des Tensorkalküls allgemein formuliert. Sie gelten dann für jedes, auch für ein nicht orthogonales Koordinatensystem auf der Wandfläche, und die Dicke der Grenzschicht braucht nicht mehr klein zu sein gegen die auftretenden Krümmungsradien. Zusätzlich zu dem Einfluß der Wandkrümmung wird auch die Wirkung der Änderung dieser Krümmung auf die Grenzschicht diskutiert, und es werden die Vereinfachungen angegeben, die bei verschiedenen Größenordnungen dieser geometrischen Gegebenheiten im laminaren und im turbulenten Fall möglich sind. Für die Definition integraler Grenzschichtparameter werden Beziehungen aufgestellt und die Gleichungen für die Behandlung der Grenzschicht mittels integraler Verfahren hergeleitet ohne spezielle Annahmen über das Strömungsprofil. Der Charakter der hergeleiteten Gleichungen wird besprochen, es wird mit Spezialfällen, die in der Literatur schon behandelt sind, verglichen.

## 2. Einleitung

Die Grenzschichttheorie hat sich in den fast sieben Jahrzehnten, die seit ihrer Begründung durch Prandtl vergangen sind, zu einem mächtigen Werkzeug entwickelt, geeignet, in der Hand von Forschern und Konstrukteuren zur Bewältigung von Strömungsproblemen zu dienen. Es ist jedoch im wesentlichen die Theorie der Grenzschichten zweidimensionaler Strömungen, die in ungezählten Arbeiten so weit vorangetrieben wurde, daß heute brauchbare Verfahren für die Berechnung der Grenzschicht zur Verfügung stehen. Der Untersuchung echt dreidimensionaler Grenzschichten ist dagegen vergleichsweise viel geringere Aufmerksamkeit gewidmet worden. Die Begründung hierfür liegt einerseits darin, daß schon bei der zweidimensionalen Grenzschicht noch genügend Fragen zu klären sind bezüglich des eigentlichen Strömungsmechanismus. Andererseits ist die Theorie dreidimensionaler Grenzschichten ungleich viel komplizierter. Schiffe, Flugkörper und Strömungsmaschinen sind jedoch geometrische Gebilde, an denen das strömende Medium Wände vorfindet, die meist in komplizierter Weise gekrümmt sind. Die Grenzschichten, die sich ausbilden, sind also alles andere als zweidimensional.

Die geometrischen Verhältnisse legen die Beschreibung in einem sogenannten Normalkoordinatensystem nahe, einem Koordinatensystem  $u^1, u^2, u^3$  derart, daß die  $u^3$ -Kurven ( $u^1 = \text{const.}, u^2 = \text{const.}$ ) in Richtung der Normale der Wandfläche verlaufen, also Geraden sind, während die anderen beiden Kurvenscharen Koordinatenkurven auf der Wandfläche sind. Diese Kurvenscharen auf der Wand brauchen nicht orthogonal zueinander zu sein. Theoretisch läßt sich auf einer gegebenen Wandfläche meist ein orthogonales Koordinatennetz konstruieren. Die Krümmungslinien bieten sich an [38]. Aber es ist zunächst nicht gesagt, daß sie die geeigneten Koordinaten sind zur Behandlung der Grenzschicht. Ausgang jeder Grenzschichtrechnung ist die Kenntnis einer äußeren Strömung. Wenn dieses äußere Geschwindigkeitsfeld das Ergebnis einer Messung

oder eines numerischen Berechnungsverfahrens ist (z.B. mit Hilfe der Potentialtheorie ermittelt - man vergleiche die Verfahren in [16], [17], [18], [30], [31], [78] -), so wird dieses Feld nur in diskreten Punkten auf der Wandfläche und/oder im Raum bekannt sein. Die Strömungslinien dieser Außenströmung sind dann noch nicht gegeben, weder auf der Wandfläche noch gar auf der noch nicht bekannten äußeren Randfläche der Grenzschicht.

In den meisten der bisherigen Arbeiten zur Theorie der Grenzschichten an gekrümmten Wänden standen Spezialfälle zur Diskussion: Rotationskörper - eventuell mit vernachlässigbarer Längskrümmung - in axialer Anströmung, oder gekrümmte Wände (ohne Querkrümmung), oder die gewählten Koordinatensysteme waren orthogonal und durch eine spezielle Orientierung ausgezeichnet (Richtung der Außenströmung oder der Krümmungslinien).

Es entspricht der praktischen Problemstellung viel mehr, im Großen, auf der Fläche, kein ausgezeichnetes Koordinatensystem vorzugeben. Bei einem Schiffsrumpf z.B. ist dessen Riß gegeben, und es ist erwünscht, von diesem aus mit möglichst wenig Aufwand zu den Ergebnissen der Grenzschichtrechnung vorzustoßen. Die Berechnung der Außenströmung wird es erfordern, daß man die Wandfläche in geeigneter Weise aufteilt, um auf diskreten Elementen Singularitäten anzubringen oder um in diskreten Punkten gewisse Randbedingungen zu erfüllen. Es ist angenehm, daß man diese Aufteilung vornehmen kann, ohne die Krümmungslinien oder ähnliche zu kennen. Es ist ein großer Vorteil, daß sich die numerischen potentialtheoretischen Verfahren durchführen lassen, indem die Wandfläche nach Gutdünken, nur unter gewisser, aber weitgehend gefühlsmäßiger Berücksichtigung ihrer Krümmung, in Elemente zerlegt wird. Dieser Vorteil sollte bei der Grenzschichtberechnung nicht verloren gehen. Anzustreben ist also ein Verfahren, das mit dem gegebenen, meist nicht orthogonalen Punktnetz auskommt und die notwendige Information über

Außenströmung, Wandkrümmung und deren Änderung nur in diesen diskreten Punkten benötigt, sich gegebenenfalls mit Interpolation behilft.

Vermutlich werden auch Differenzenverfahren angewendet werden auf die Lösung dreidimensionaler Grenzschichten an gekrümmten Wänden [15], [27], [80]; sie haben sich bei zweidimensionalen Problemen gut bewährt [3], [6], [8], [9], [24], [68], [69] und sogar bei chemisch reagierenden Gemischen in der Grenzschicht gute Ergebnisse geliefert [5], [6], [33]. Es ist jedoch für den dreidimensionalen Fall besonders interessant, integrale Verfahren anzuwenden, da sie das Problem auf ein zweidimensionales reduzieren. Dann ist also nurmehr ein Differenzenverfahren auf der Wandfläche anzuwenden und nicht mehr eines in einem dreidimensionalen Punktnetz, welches natürlich einen ungleich höheren Rechenaufwand erfordern würde. Der Verlust an detaillierter Information über das Strömungsbild wird bei den integralen Verfahren wieder aufgewogen durch a) den verminderten Rechenaufwand und b) dadurch, daß die leidige Frage der Anfangsprofile bei dreidimensionalen Differenzenverfahren entfällt. Im Fall der turbulenten Grenzschicht kommt hinzu, daß über die Verteilung der Schubspannung über die Grenzschicht theoretisch fundierte Aussagen noch nicht möglich sind. Auch integrale Verfahren benötigen für diesen Fall allerdings Annahmen, die z.B. die Wandschubspannung (oder die Dissipation, falls die Energiegleichung mit herangezogen wird) mit den anderen Grenzschichtgrößen in Beziehung setzen. Für zweidimensionale turbulente Grenzschichten hat man mit empirischen Beziehungen (vgl. [43], [79]) relativ gute Ergebnisse erzielt, und dies sowohl bei integralen Verfahren (vgl. Schlußfolgerungen in [35], [74]) als auch bei Differenzenverfahren ([7], [35]). Bei dreidimensionalen Grenzschichten fehlt es noch an experimentellem Material, nur wenige Messungen liegen vor [23], [24], ja selbst für den rotationssymmetrischen Fall liegen nur wenige Messungen vor (z.B. [44], [87]), die detaillierte Information

über die Grenzschicht liefern. Viele integrale Verfahren gehen davon aus, explizite Annahmen über das Strömungsprofil zu machen, sowohl für die Komponente in Richtung der Außenströmung am Grenzschichtrand, als auch für den "cross flow" (quer dazu). Meist wird von den Stromlinien am Außenrand der Grenzschicht ausgegangen [12], [13], [24], [34], [70], [71], [82], aber nicht immer [28], und die Voraussetzung gemacht, daß der "cross flow" klein ist. Annahmen dieser Art für die Formulierung eines integralen Verfahrens für die dreidimensionale Grenzschicht finden sich schon bei Prandtl [57].

Es wird immer zweckmäßig sein, mit einem Verfahren zu arbeiten, welches die explizite Bestimmung der Krümmungs- oder Stromlinien nicht benötigt. Schon die Ermittlung dieser Richtungsfelder ist aufwendig, das maschinelle Konstruieren von Feldlinien in einem gegebenen Richtungsfeld aber ist sehr leicht fehlerhaft und unsicher.

Als Ausgangspunkt für mögliche Verfahren (Differenzenverfahren oder integrale Verfahren) ist es daher notwendig, die Grundgleichungen aufzustellen für die Strömung an Wänden beliebiger Krümmung ohne Voraussetzungen über das Richtungsfeld der Außenströmung. Diese Aufgabe wird in der vorliegenden Arbeit unter konsequenter Benutzung der Tensorschreibweise zunächst in Angriff genommen. Dabei wird exakt zwischen Raumtensoren und Flächentensoren unterschieden und im Raum und auf der Fläche je eine kovariante Ableitung erklärt.

Erst in flächenkovarianter Schreibweise sind die Gleichungen geeignet, um aus ihnen die integralen Gleichungen für die Grenzschicht zu ermitteln. Erst dann sind sie überhaupt auch für dicke Grenzschichten brauchbar. Eine Integration über die Koordinate  $u^3$  ist dann möglich, da die  $u^3$ -Komponente nurmehr Parameter, eben ein Flächenskalar, ist. In krummlinigen Koordinaten ist eine Integration von Tensorfeldern nicht ohne weiteres vorzunehmen [25].

Auch bei integralen Verfahren bleibt, daß sich die Wandkrümmung darin äußert, daß kovariante Ableitungen an die Stelle der gewöhnlichen Ableitungen treten. Wie auch immer die numerische Behandlung aussehen wird, die Christoffel-Symbole und/oder der zweite Haupttensor der Fläche, also die "Übertragungen" in der Fläche und aus dieser heraus, müssen in den Punkten bekannt sein, in denen die Grenzschichtparameter berechnet werden sollen.

Einfluß auf die Grenzschicht hat jedoch nicht nur die Krümmung sondern auch die Änderung der Krümmung der Wandfläche. Selbst im Zweidimensionalen ist das Problem des Einflusses der Krümmungsänderung nur wenig behandelt worden [4], [36], [52]. Aber es ist an wirklichen Gebilden oft die Regel, daß konvexe Bereiche in konkave übergehen und umgekehrt, was eine äußerst starke Änderung der Krümmung bedeuten kann. Die Frage dieses zusätzlichen Einflusses der Wand wird hier bei den Abschätzungen mit berücksichtigt, und es wird versucht, ein einigermaßen vollständiges Bild der Wechselwirkung Wandgeometrie - Grenzschicht zu bekommen.

Möglicherweise sind die gefundenen Beziehungen zusammengekommen der geeignete Ausgangspunkt zu einer Erweiterung der Arbeit von van Dyke [21] auf echt dreidimensionale Strömungen an gekrümmten Wänden unter konsequenter Anwendung des Verfahrens der "matched inner and outer asymptotic expansions". Hierbei wäre zu beachten, daß das Koordinatensystem für die innere Entwicklung und das für die äußere ganz verschieden sein werden im allgemeinen Fall. Es wird unter Umständen möglich sein, sogar integrale Verfahren in erster, zweiter usw. Näherung anzugeben, um dicke Grenzschichten zu berechnen.

### 3. Bezeichnungen und Konventionen

Die analytische Tensorschreibweise (Ricci-Kalkül) wird konsequent angewendet.

Kleine lateinische oder griechische Indizes kennzeichnen den Charakter der Größe als tensoriell bezüglich räumlichen Transformationen.

Kleine griechische Indizes mit einem Querstrich kennzeichnen den Charakter der betreffenden Größe als tensoriell bezüglich Transformationen innerhalb der Wandfläche.

Der dreidimensionale physikalische Raum ist selbstverständlich euklidisch. Die Wandfläche stellt einen in diesen eingebetteten zweidimensionalen gekrümmten Raum dar mit einer vorgegebenen Metrik, der Flächenmetrik.

Es muß immer streng unterschieden werden zwischen räumlichen Tensoren und Flächentensoren und, da die Koordinatensysteme krummlinig sein dürfen, zwischen kovarianten und kontravarianten Komponenten bei beiden Arten von Tensoren.

Über einem gleichlautenden Index in oberer Stellung und in unterer Stellung in einem Term wird summiert (Einsteinsches Summations-Abkommen!).

Lateinische Indizes durchlaufen die Werte 1,2,3.

Griechische Indizes durchlaufen die Werte 1,2.

Große lateinische Indizes werden benutzt, um die Komponenten eines Tensors bezüglich eines übergeordneten (nicht wandorientierten) räumlichen cartesischen Koordinatensystems zu bezeichnen.

Einfache Ableitungen werden mit einem Strich bezeichnet:  $v^{\alpha}_{|\beta}$

Kovariante Ableitungen bezüglich der Flächenmetrik werden mit zwei Strichen bezeichnet:  $\tau^{\alpha\beta}_{||\gamma}$

Räumliche kovariante Ableitungen werden mit drei Strichen bezeichnet:  $v^i_{|||j}$

Der antisymmetrische Teil eines Tensors wird durch

$$t_{[ij]} = \frac{1}{2} (t_{ij} - t_{ji})$$

und der symmetrische Teil mit  $t_{(ij)}$

$$t_{(ij)} = \frac{1}{2} (t_{ij} + t_{ji})$$

bezeichnet.

Es wird bei Abschätzungen das Symbol  $O$  verwendet:

Es ist  $f(x) = O(k(x))$ , wenn in dem betrachteten Bereich der  $x$ -Werte bei einer Bewegung von  $x$  immer gilt:

$$\frac{f(x)}{k(x)} \quad \text{bleibt beschränkt.}$$

Bei starker Krümmung sind in konkaven Wandbereichen Normalkoordinaten nur in der Nähe der Wand geeignet zur Beschreibung der Strömung. Es wird immer stillschweigend vorausgesetzt, daß in konkaven Bereichen  $k < O(1/5)$  ist, bzw. wenn  $k \cong O(1/5)$ , daß es sich um einen konvexen Bereich handelt. Es wird nicht jedesmal wieder auf diese Annahme hingewiesen.

Für die Determinante einer Matrix, z.B. der Elemente eines Tensors 2. Stufe  $T^\alpha_\beta$ , wird geschrieben  $\det(T^\alpha_\beta)$ .

Hinweise auf das Literaturverzeichnis werden in eckigen Klammern [...] angegeben.

Die Nummer einer zitierten Gleichung wird in runden Klammern (...) angegeben. Die Gleichungen in den Anhängen sind durch (A. ...) gekennzeichnet.

#### 4. Die Grundgleichungen

Wir gehen aus von den allgemein gültigen Bewegungsgleichungen

$$\rho \frac{dv^i}{dt} = \rho (v^i_{,t} + v^i_{,j} v^j) = -p^i + \tau^{ij}_{,j} \quad (1)$$

In denen gleich ein Term für von außen wirkende Volumenkraft fortgelassen wurde. Diese Einschränkung kann nicht gemacht werden, wenn es sich um Probleme von Temperatur- und Strömungs-Grenzschichten handelt bei natürlicher Konvektion, es käme dort der hydrostatische Auftrieb hinzu, oder bei Plasmen, es kämen dort elektromagnetische Kraftwirkungen hinzu.

Obige Gleichungen werden ergänzt durch die Kontinuitätsgleichung

$$\rho_{,t} + (\rho v^j)_{,j} = 0 \quad (2)$$

und durch die Energiegleichungen.

Die Gleichung für die mechanische Energie folgt aus der Bewegungsgleichung durch Überschiebung mit  $v_i$

$$\rho \frac{d\frac{1}{2}(v^i v_i)}{dt} = \rho \left[ \left( \frac{1}{2} v^i v_i \right)_{,t} + \left( \frac{1}{2} v^i v_i \right)_{,j} v^j \right] = -v_i p^i + v_i \tau^{ij}_{,j} \quad (3)$$

Die Gleichung für die Gesamtenergie  $h$  lautet:

$$\rho \frac{dh}{dt} = \rho (h_{,t} + h_{,j} v^j) = (v^j \tau_j^i - q^i)_{,i} \quad (4)$$

Hierin ist  $q_i = -\lambda T_{,i}$  der Wärmestrom ( $\lambda$  ist die Wärmeleitfähigkeit,  $T$  die Temperatur). Für  $h$  gilt:

$$h = i + \frac{1}{2} v_i v^i \quad (5)$$

mit 
$$i = e + \frac{p}{\rho} \quad (6)$$

der Enthalpie (  $e$  = innere Energie)

Wir setzen:

$$\phi = \frac{1}{2} (v_{i m j} + v_{j m i}) \tau^{ij} = v_{m j}^i \tau_i^j \quad (7)$$

unter der Annahme  $\tau^{ij} = \tau^{(ij)}$  .  $\phi$  heißt Dissipation.

Damit wird

$$\rho \frac{dh}{dt} = \rho \frac{di}{dt} + \rho \frac{d(\frac{1}{2} v^i v_i)}{dt} = v^j \tau_{j m i}^i + \phi + (\lambda T^{ii})_{m i} \quad (8)$$

Abziehen der Gleichung für die mechanische Energie ergibt:

$$\rho \frac{di}{dt} = \rho (i_{t t} + v^j i_{i j}) = v^j p_{i j} + \phi + (\lambda T^{ii})_{m i} \quad (9)$$

Für ideale Gase gilt

$$i = c_p \cdot T \quad (10)$$

Somit leitet man her:

$$\rho c_p (T_{t t} + v^j T_{i j}) = v^j p_{i j} + \phi + (\lambda T^{ii})_{m i} \quad (11)$$

die, genauer gesagt, die Gleichung für das Temperaturfeld für ein kalorisch perfektes Gas ( $c_p = \text{const.}$ ) ist.

Mittels

$$\begin{aligned} (\lambda T^{ii})_{m i} &= \left( \frac{\lambda}{\mu c_p} \mu^{i j} \right)_{m j} = \left[ \frac{1}{Pr} (\mu h^{ij}) \right]_{m j} - \left[ \frac{1}{Pr} (v^i \mu v_i^{ij}) \right]_{m j} \\ &= \frac{1}{Pr} \left[ (\mu h^{ij})_{m j} - (v^i \tau_i^j)_{m j} \right] \end{aligned}$$

läßt sich im laminaren Fall noch schreiben:

$$\varrho \frac{dh}{dt} = \frac{Pr-1}{Pr} \left( v^i \tau_{ij} \right)_{||j} + \frac{1}{Pr} \left( \mu h^{ij} \right)_{||j} \quad (12)$$

oder, für  $Pr \approx 1$ , ein recht häufiger Fall:

$$\varrho \frac{dh}{dt} = \left( \mu h^{ij} \right)_{||j} \quad (13)$$

Für inkompressible Medien gilt:

$$\frac{di}{dt} = c \frac{dT}{dt} + \frac{1}{\varrho} \frac{dp}{dt} \quad (14)$$

so daß folgt:

$$\varrho c \frac{dT}{dt} = -p_{it} + \phi + (\lambda T^{ii})_{||i} \quad (15)$$

als Gleichung für das Temperaturfeld.

Ausgehend von der in beliebigen Koordinatensystemen gültigen allgemeinen tensoriellen Form der Grundgleichungen soll nun angegeben werden, wie sich diese Grundgleichungen in einem Normalkoordinatensystem, welches auf eine gegebene Wandfläche bezogen ist, darstellen. Die Grundlagen aus der Differentialgeometrie und dem Tensorkalkül, die hierzu notwendig sind, findet man im Anhang zusammengestellt. Dort wird ersichtlich, daß es für den vorliegenden Zweck notwendig war, besagte Grundlagen erheblich aufzubereiten.

Sei  $b_{\beta}^{\alpha}$  der zweite Haupttensor der gegebenen Fläche.

$$H = \frac{1}{2} b_{\alpha}^{\alpha} \quad \text{und} \quad K = \det(b_{\beta}^{\alpha})$$

heißen mittlere Krümmung und Gaußsche Krümmung der Fläche. Man definiert, um im zweidimensionalen Koordinatensystem

der Fläche rechnen zu können, die Versetzer oder "Shifter"

$$s_{\nu}^{\bar{\alpha}} = \delta_{\nu}^{\alpha} - u^3 b_{\nu}^{\alpha} \quad (16)$$

Hierin ist  $u^3$  die Koordinate entlang der Flächennormalen; es ist  $u^3 = 0$  auf der Fläche. Man hat dann, als auf die Fläche versetzte Vektoren

$$v^{\bar{\alpha}} = s_{\nu}^{\bar{\alpha}} v^{\nu} \quad (17)$$

Es gilt:  $v^{\bar{3}} = v^3$  ist ein Flächenskalar. Außerdem wird die wichtige Größe

$$J = \det(s_{\nu}^{\bar{\alpha}}) = 1 - 2H u^3 + K(u^3)^2 \quad (18)$$

definiert. Zur Abkürzung sei weiterhin

$$v^{\bar{\alpha}}_{\parallel\bar{\beta}} = s_{\beta}^{\nu} v^{\bar{\alpha}}_{\parallel\nu}, \quad b_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}} = s_{\beta}^{\nu} b_{\nu}^{\alpha} \quad (19)$$

Unter Anwendung des im Anhang angegebenen Formelapparates, und indem man bei Vektorgleichungen die dritte Gleichung (die der Normalkomponente) jeweils getrennt behandelt, findet man:

Die Kontinuitätsgleichung:

$$g_{it} + v^{\bar{k}}_{\parallel\bar{k}} + \frac{1}{J} (J v^3)_{,3} = 0 \quad (20)$$

Die Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} g(v^{\bar{\alpha}}_{,t} + v^{\bar{\alpha}}_{\parallel\bar{\beta}} v^{\bar{\beta}} - b_{\bar{\nu}}^{\bar{\alpha}} v^{\bar{\nu}} v^3 + v^{\bar{\alpha}}_{,3} v^3) = \\ = -p^{\bar{\alpha}} + \frac{1}{J} (J \tau^{\bar{\alpha}3})_{,3} + \tau^{\bar{\alpha}\bar{\beta}}_{\parallel\bar{\beta}} - b_{\bar{\nu}}^{\bar{\alpha}} \tau^{\bar{\nu}3} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} g(v^3_{,t} + v^3_{\parallel\bar{\beta}} v^{\bar{\beta}} + b_{\bar{\nu}\bar{\mu}} v^{\bar{\nu}} v^{\bar{\mu}} + v^3_{,3} v^3) = \\ = -p^3 + \frac{1}{J} (J \tau^{33})_{,3} + b_{\bar{\nu}\bar{\mu}} \tau^{\bar{\nu}\bar{\mu}} + \tau^{3\bar{\beta}}_{\parallel\bar{\beta}} \end{aligned} \quad (22)$$

Die Energiegleichung:

$$\begin{aligned} \varrho \left( i_{tt} + v^{\bar{\beta}} i_{t\bar{\beta}} + v^3 i_{t3} \right) &= v^{\bar{\alpha}} p_{\bar{\alpha}} + v^3 p_3 + \\ &+ \frac{1}{j} \left( j \lambda T^{\beta 3} \right)_{\bar{\beta}} + \left( \lambda T^{\bar{\alpha}} \right)_{\bar{\alpha}} + v^{\bar{\nu}} \tau_{\bar{\nu}}^3 + v^3 \tau_{\bar{\mu}}^3 \\ &+ v^{\bar{\nu}} \tau_{\bar{\mu}}^{\bar{\nu}} + b_{\bar{\mu}\bar{\nu}} v^{\bar{\nu}} \tau_3^{\bar{\mu}} + v^3 \tau_3^3 \\ &- b_{\bar{\mu}}^{\bar{\nu}} v^3 \tau_{\bar{\nu}}^{\bar{\mu}} \end{aligned} \quad (23)$$

Die Gleichung für die mechanische Energie:

$$\begin{aligned} \varrho \left( \left[ \frac{1}{2} v^i v_i \right]_{tt} + v^{\bar{\alpha}} \left[ \frac{1}{2} v^i v_i \right]_{\bar{\alpha}} + v^3 \left[ \frac{1}{2} v^i v_i \right]_{t3} \right) &= \\ &= -v^{\bar{\alpha}} p_{\bar{\alpha}} - v^3 p_3 + v^3 \frac{1}{j} \left( j \tau_3^3 \right)_{\bar{\beta}} - \\ &- v^{\bar{\alpha}} \tau_{\bar{\alpha}}^3 b_{\bar{\sigma}}^{\bar{\sigma}} - v^{\bar{\alpha}} b_{\bar{\alpha}}^{\bar{\nu}} \tau_{\bar{\nu}}^3 + v^{\bar{\alpha}} \tau_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}} \tau_{\bar{\beta}}^{\bar{\nu}} + \\ &+ v^3 \tau_3^{\bar{\alpha}} \tau_{\bar{\alpha}}^{\bar{\nu}} + v^3 \tau_3^3 b_{\bar{\sigma}}^{\bar{\sigma}} + v^3 b_{\bar{\nu}}^{\bar{\mu}} \tau_{\bar{\mu}}^{\bar{\nu}} \end{aligned} \quad (24)$$

Für die mechanische Energie, ein Skalar, ist die Schreibweise  $\frac{1}{2} v^i v_i$  beibehalten worden. Bei den Umrechnungen wurde  $\tau^{ij} = \tau^{(ij)}$  vorausgesetzt, also im laminaren und im turbulenten Fall, Symmetrie des Spannungstensors. Selbstverständlich ist

$$\tau_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}} = s_{\bar{\alpha}}^{\bar{\nu}} s_{\bar{\mu}}^{\bar{\beta}} \tau_{\bar{\nu}}^{\bar{\mu}}, \quad \tau_3^{\bar{\alpha}} = s_{\bar{\nu}}^{\bar{\alpha}} \tau_3^{\bar{\nu}}, \quad \text{usw.}$$

Die Gleichungen sind völlig allgemein und beschreiben ohne jede Vernachlässigung die Strömung an einer gekrümmten Wand. Sie sind in flächenkovarianter Form angegeben, d.h. es sind echte Tensorgleichungen im zweidimensionalen Raum Wandfläche.  $v^3$  und  $u^3$  sind nurmehr als Parameter aufzufassen oder als Flächenskalare zu betrachten. Die Gleichungen sind gültig in beliebigen, auch nicht-orthogonalen Koordinatensystemen auf der Fläche.

Die Gleichungen (20) bis (24) wurden aus den räumlich-kovarianten Gleichungen (1), (2), (9) und (3) erhalten, indem

diese in einem sogenannten Normalkoordinatensystem angeschrieben wurden, für das sie selbstverständlich genau so gültig sind, wie für jedes andere Koordinatensystem. Das Normalkoordinatensystem verwendet als  $u^3$ -Achse die Flächennormale, seine beiden anderen Achsen fallen mit denen des Flächenkoordinatensystems zusammen.

Bemerkenswert an diesen Beziehungen ist, daß nur, wenn alle vier Werte  $b_\beta^\alpha u^3$  klein sind,  $v^\alpha \approx v^{\bar{\alpha}}$  angesetzt werden kann. Wenn man an Grenzschichten denkt, so gilt diese Näherung also nur für so dünne Grenzschichten, daß  $u^3$  (der Wandabstand) klein genug ist, um  $b_\beta^\alpha u^3$  zu vernachlässigen. Im allgemeinen wird  $v^{\bar{\alpha}}$  eine Linearkombination der  $v^\alpha$  sein. Wählt man jedoch auf der Fläche die Krümmungslinien (siehe Anhang I) als Koordinatenlinien, so wird  $b_\beta^\alpha$  diagonal, und es ist  $v^{\bar{1}} = (1 - b_1^1 u^3) v^1$  und  $v^{\bar{2}} = (1 - b_2^2 u^3) v^2$ .

Für die allgemeine Behandlung dicker Grenzschichten an gekrümmten Wandflächen ist es unerlässlich, von den Gleichungen (20), (21), (22), (23) und (24) auszugehen. Nur in Spezialfällen wird es möglich sein, eine exakte Herleitung der Grenzschichtgleichungen vorzunehmen, ohne von den hier angegebenen Gleichungen auszugehen. In der Literatur sind eine ganze Reihe Spezialfälle dreidimensionaler Grenzschichten behandelt worden. Die Spezialisierung besteht entweder in der Annahme spezieller Koordinatenlinien, z.B. den Krümmungslinien, Annahmen über die Krümmung der Fläche (etwa eine Hauptkrümmung vernachlässigbar oder exakt  $K=0$ ), Annahmen über die Strömungsrichtung bezüglich der Krümmungslinien oder aber der Annahme, daß die Grenzschicht dünn ist [59].

Es ist hier nur die Rede von den Differentialgleichungen gewesen. Auch im Folgenden werden sie im Vordergrund stehen. Eine besondere Behandlung der Randbedingungen erübrigt sich aber bis zu einem gewissen Grade, da Randbedingungen an der Wand nicht erst auf die Wand versetzt werden müssen und echte

Variablentransformationen nicht vorgenommen werden.  
Für die Zahl der erfüllbaren Randbedingungen gelten die aus  
der Theorie der Differentialgleichungen bekannten Beschrän-  
kungen.

5. Die Gleichungen für die laminare inkompressible Grenzschicht

I. Die allgemeinen Bewegungsgleichungen und die Kontinuitätsgleichung für laminare Strömung

Die allgemeinen Gleichungen für die laminare Strömung sind

$$\rho(v^i_{,t} + v^i_{||j} v^j) = -p^{,i} + \left[ \mu(g^{je} v^i_{||e} + g^{ik} v^j_{||k}) \right]_{||j} - \frac{2}{3} \left[ \mu v^m_{||m} \right]_{||j} g^{ij} \quad (25)$$

$$\rho_{,t} + (\rho v^j)_{||j} = 0 \quad (26)$$

Nach Newton ist eine lineare Abhängigkeit des Spannungstensors vom Tensor der Deformationsgeschwindigkeit vorausgesetzt. Äußere Volumenkräfte sind nicht berücksichtigt worden, und es ist nach Stokes für die beiden Zähigkeitskoeffizienten  $\mu', \mu$  die Beziehung  $\mu' + \frac{2}{3}\mu = 0$  als gültig angenommen.

Mit der Annahme  $\mu = \text{const.}$  (räumlich und zeitlich) ergibt sich wegen  $v^j_{||k||j} = v^j_{||j||k}$ :

$$\rho(v^i_{,t} + v^i_{||j} v^j) = -p^{,i} + \mu g^{je} v^i_{||e||j} + \frac{\mu}{3} g^{ik} v^j_{||j||k} \quad (27)$$

$$\rho_{,t} + (\rho v^j)_{||j} = 0 \quad (28)$$

Für den inkompressiblen Fall wird daraus, wenn noch die kinematische Zähigkeit  $\nu = \mu/\rho$  eingeführt wird, in Flächenkoordinaten:

$$\begin{aligned} v^{\bar{\alpha}}_{,t} + v^{\bar{\alpha}}_{||\bar{\beta}} v^{\bar{\beta}} - b^{\bar{\alpha}}_{\bar{\nu}} v^{\bar{\nu}} v^{\bar{\beta}} + v^{\bar{\alpha}}_{||\bar{\beta}} v^{\bar{\beta}} = -\frac{1}{\rho} p^{,\bar{\alpha}} + \\ + \nu \left\{ a^{\sigma\tau} v^{\bar{\alpha}}_{||\bar{\sigma}||\bar{\tau}} + \frac{1}{J} (J v^{\bar{\alpha}}_{||\bar{\beta}})_{||\bar{\beta}} - 2b^{\bar{\alpha}\bar{\epsilon}} v^{\bar{\beta}}_{||\bar{\epsilon}} - \right. \\ \left. - b^{\bar{\alpha}}_{\bar{\tau}} b^{\bar{\tau}}_{\bar{\epsilon}} v^{\bar{\beta}} - b^{\bar{\alpha}\bar{\tau}}_{||\bar{\tau}} v^{\bar{\beta}} \right\} \end{aligned} \quad (29)$$

$$v^3_{it} + v^3_{i\bar{\beta}} v^{\bar{\beta}} + b_{\bar{\sigma}\tau} v^{\bar{\sigma}} v^{\bar{\tau}} + v^3_{i3} v^3 = -\frac{1}{g} p^{i3} +$$
$$+ v \left\{ a^{\sigma\tau} v^3_{i\bar{\sigma}\bar{\tau}} + \frac{1}{J} (J v^3_{i3})_{i3} + 2 b_{\bar{\mu}}^{\bar{\nu}} v^{\bar{\mu}}_{i\bar{\nu}} + b_{i\bar{\sigma}}^{\bar{\tau}} v^{\bar{\tau}} - b_{\bar{\tau}}^{\bar{\sigma}} b_{\bar{\sigma}}^{\bar{\tau}} v^3 \right\} \quad (30)$$

$$v^{\bar{\mu}}_{i\bar{\nu}} + \frac{1}{J} (J v^3)_{i3} = 0 \quad (31)$$

## II. Die Gleichungen für die laminare inkompressible Grenzschicht

Wir gehen aus von den dimensionslosen Gleichungen für die allgemeine Strömung

$$\begin{aligned}
 v_{1t}^{\bar{3}} + v_{1\beta}^{\bar{3}} v^{\bar{\beta}} - b_{\bar{v}}^{\bar{\alpha}} v^{\bar{v}} v^{\bar{3}} + v_{13}^{\bar{\alpha}} v^{\bar{3}} &= \\
 &= -\frac{1}{g} p^{\bar{\alpha}} + \frac{1}{Re} \left\{ a^{\sigma\tau} v_{1\bar{\sigma}}^{\bar{\alpha}} v_{1\bar{\tau}}^{\bar{\alpha}} + \frac{1}{J} \left( J v_{13}^{\bar{\alpha}} \right)_{1\bar{3}} \right. \\
 &\quad \left. - b_{\bar{\tau}}^{\bar{\alpha}} b_{\bar{\sigma}}^{\bar{\tau}} v^{\bar{\sigma}} - b_{1\bar{\tau}}^{\bar{\alpha}\bar{\sigma}} v^{\bar{3}} - 2b_{\bar{\tau}}^{\bar{\alpha}\bar{\sigma}} v_{1\bar{\sigma}}^{\bar{3}} \right\}
 \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
 v_{1t}^{\bar{3}} + v_{1\beta}^{\bar{3}} v^{\bar{\beta}} + b_{\bar{\sigma}\bar{\tau}}^{\bar{v}} v^{\bar{\sigma}} v^{\bar{\tau}} + v_{13}^{\bar{3}} v^{\bar{3}} &= \\
 &= -\frac{1}{g} p^{\bar{1}\bar{3}} + \frac{1}{Re} \left\{ a^{\sigma\tau} v_{1\bar{\sigma}}^{\bar{3}} v_{1\bar{\tau}}^{\bar{3}} + \frac{1}{J} \left( J v_{13}^{\bar{3}} \right)_{1\bar{3}} \right. \\
 &\quad \left. + 2b_{\bar{\mu}}^{\bar{v}} v_{1\bar{\mu}}^{\bar{v}} - b_{\bar{\tau}}^{\bar{\sigma}} b_{\bar{\sigma}}^{\bar{\tau}} v^{\bar{3}} + b_{\bar{\tau}}^{\bar{\sigma}} v_{1\bar{\sigma}}^{\bar{\tau}} \right\}
 \end{aligned} \tag{33}$$

$$v_{1\bar{\sigma}}^{\bar{3}} + \frac{1}{J} \left( J v_{13}^{\bar{3}} \right)_{1\bar{3}} = 0 \tag{34}$$

(Für die dimensionslosen Größen wurden wieder die gleichen Bezeichnungen gewählt!)

Die Größenordnung der Terme in diesen Gleichungen soll abgeschätzt werden. Dabei ist zu beachten:

1. Es soll eine beliebige, gekrümmte Wandfläche vorgegeben sein (wenn auch ohne Wellen oder Dellen derart, daß die Strömung sofort abreißen würde), so daß also die Tensoren  $b_{\alpha\beta}$ ,  $b_{\beta}^{\alpha}$  und ihre räumlichen Ableitungen als vorgegeben anzusehen sind.
2. Es soll kein ausgezeichnetes Koordinatensystem vorgegeben sein, etwa derart, daß  $v^2 \ll v^1$  wäre oder  $b_{\beta}^{\alpha}$  z.B. näherungsweise diagonal.

Es liegen nun fünf charakteristische Größen vor, die die Größenordnung der Terme bestimmen:

1.  $\mathcal{V}$  , eine charakteristische Geschwindigkeit. Sie ist so zu wählen, daß in dem betrachteten Bereich keine der mit  $\mathcal{V}$  dimensionslos gemachten Geschwindigkeiten (wir schreiben wieder  $v^\alpha$  ) die Größenordnung 1 überschreitet. Eine Unterscheidung zwischen  $v^1$  und  $v^2$  der Größenordnung nach wird nicht vorgenommen, da wir davon ausgehen, daß das Flächenkoordinatensystem nicht nach der Strömung orientiert ist.
2.  $L$  , eine charakteristische Länge, die, vgl. [64], so zu wählen ist, daß die dimensionslosen  $V_{\alpha\beta}^\alpha, V_{\alpha\beta}^\alpha$  und  $a^\Gamma_\alpha = x^\Gamma_\alpha$  , (die Flächen-Basisvektoren) in dem betrachteten Bereich die Größenordnung 1 nicht überschreiten.
3.  $k'$  , ein Maß für die Krümmung der Wandfläche. Man setze etwa  $k' = \text{Norm}(b^\alpha_\beta)$  . Als Norm ist vorzugsweise die Spektralnorm [11] zu wählen. Dann ist  $k'$  gleich der größeren der beiden Hauptkrümmungen. Wir setzen dann  $k = k' \cdot L$  (  $L$  = charakteristische Länge). Es wird dann auch für die auf  $L$  bezogenen Basisvektoren  $a^\Gamma_{\alpha\beta} = O(k)$ .
4.  $\Delta'$  , ein Maß für die Änderung der Krümmung beim Fortschreiten auf der Fläche in einer Richtung. Es ist auch hier ein oberer Grenzwert zu wählen für die Größe  $b^\alpha_\beta$ . Wir setzen  $\Delta = \Delta' \cdot (L)^2$ .
5.  $\delta$  , die Grenzschichtdicke, wie sie auch immer definiert sein möge. An ihr werden die anderen Größenordnungen gemessen. Wir schreiben für  $\delta/L$  wieder  $\delta$ .

Mit  $a^\Gamma_{\alpha\beta}$  und  $a^\Gamma_\lambda$  ist auch die Größenordnung von  $\overline{\begin{Bmatrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{Bmatrix}}$  nach ( A.33 ) bestimmt, nämlich gleich  $O(k)$  . Dies ist

zu beachten bei allen Abschätzungen von Termen mit kovarianten Ableitungen, wie  $v^\alpha{}_{||\beta}$  und  $b^\alpha{}_{\beta||\gamma}$ . Der Druck wird mit  $(g_\infty/2) \cdot (\mathcal{V})^2$ , die Zeit mit  $L/\mathcal{V}$  dimensionslos gemacht. Die auf die Fläche "geschifteten" Geschwindigkeiten  $v^{\bar{\alpha}}$  sind nur solange von der Größenordnung von  $v^\alpha$  (also 1), als der zweite Term in  $s_{\bar{\nu}}^{\bar{\alpha}} = s_{\nu}^{\alpha} - u^3 b_{\nu}^{\alpha}$  nicht von einer Ordnung größer als 1 wird, d.h. nur solange  $k \leq O(1/\delta)$  ist, da ja in der Grenzschicht  $u^3 = O(\delta)$ . Weiterhin ist mit  $a^I_k = O(1)$  auch  $a_{\alpha\beta} = O(1)$  und  $O(v^{\bar{\alpha}}) = O(v_{\bar{\alpha}})$ .

Im allgemeinen, und das ist auch sinnvoll, wird eine Abschätzung der Terme vorgenommen, nachdem die Gleichungen auf "physikalische Komponenten" umgeschrieben sind, wie sie z.B. von McConnel [48] und Truesdell [76], [77] angegeben worden sind. Über die Definition von "physikalischen Komponenten" in nicht-orthogonalen Koordinatensystemen herrscht aber noch keine Übereinstimmung zwischen den Autoren [25], [63], [84]. Ericksen [25] betont, daß es alle Autoren vermeiden, für den metrischen Fundamentaltensor physikalische Komponenten einzuführen. Auch ist die Behandlung von  $b^\alpha{}_{\beta}$ , dem zweiten Haupttensor der Fläche, nicht eindeutig. (Teilweise wird er, wie  $a_{\alpha\beta}$ , unverändert gelassen, [65]). Auf die Diskussion der Frage, ob die  $u^\alpha$  als dimensionsbehaftet anzusehen sind oder nicht in [25], wird besonders hingewiesen. Hier wird die Abschätzung der Größenordnung der Terme direkt an den eigentlichen Tensorgleichungen durchgeführt. Es sei noch einmal darauf hingewiesen, daß angegebene Größenordnungen Höchstwerte sind. Z.B. bei  $v^\alpha$  kann durchaus in gewissen Bereichen eine Komponente sehr klein sein. Die Aussage ist, daß keine der Komponenten die angegebene Größenordnung merklich überschreitet.

Die Diskussion der Größenordnung der einzelnen Terme gestaltet sich langwierig, da die Abhängigkeit von  $\Delta$  und  $k$  zu berücksichtigen ist und diese in Konkurrenz zueinander treten, so daß Terme mit  $O(k) \cdot O(\Delta)$  je nach Verhältnis von  $k$  zu  $\Delta$  verschiedene Größenordnungen annehmen können. An und

für sich ist ein zweidimensionales Schema zu wählen, um  $k$  und  $\Delta$  getrennt variieren zu lassen. Die unten angegebenen Gleichungen sind daher als zusammenfassendes Ergebnis anzusehen, da nicht jedes Paar  $\Delta, k$  extra berücksichtigt wurde.

Da die Parameter  $k$  und  $\Delta$  mit  $\delta$  (alle dimensionslos) verglichen werden, so sind die Größenordnungen  $\delta$ ,  $1$  und  $1/\delta$  natürlich ausgezeichnet. Es empfiehlt sich aber, eine feiner gestufte Skala der Größenordnungen vorzuziehen, der Art

$$k \leq 0(\delta), 0(\delta) < k < 0(1), k = 0(1), 0(1) < k < 0(1/\delta), \\ k = 0(1/\delta), k > 0(1/\delta)$$

und für  $\Delta$  entsprechend. Man hat also in etwa Schritte der Größe  $\delta^{1/2}$ .

Die erste Näherung besteht dann in der Berücksichtigung aller Terme der größten auftretenden Ordnung und der Vernachlässigung der Terme, die eine um  $\delta^{1/2}$  kleinere Ordnung haben. In zweiter Näherung wären dann diese wiederum mit zu berücksichtigen, nicht aber die, die eine um  $\delta$  kleinere Größenordnung haben als die schon in erster Näherung berücksichtigten, usw.

Das physikalische Problem ist dreidimensional. Die Größenordnung von  $v^\alpha$  ist also vorgegeben, nicht die von  $\bar{v}^\alpha$ .  $\bar{v}^\alpha$  ist die abgeleitete Größe, die sowohl durch die Anströmung als auch durch die Wandkrümmung in ihrer Größenordnung bestimmt wird. So werden also Terme mit Ableitungen von  $\bar{v}^\alpha$  zusätzlich eine Abhängigkeit von  $\Delta$  aufweisen. Der Einfluß von  $\Delta$  auf die Größenordnungen kommt, außer über diese Terme, auch noch über die Zähigkeitsbehafteten Glieder, die kovariante Ableitungen des zweiten Haupttensors enthalten, zur Wirkung und über die Kontinuitätsgleichung, die ja die Größenordnung von  $v^3$  bestimmt. Eine Abhängigkeit von  $k$  ist in allen Termen gegeben.

Der Druckterm  $p^{1\alpha}$  in den tangentialen Bewegungsgleichungen (32) setzt sich zusammen aus dem Druck am äußeren Rande der Grenzschicht, der durch die (zähigkeitsfreie) Außenströmung vorgegeben ist, und einer Änderung über die Grenzschichtdicke bis hin zur Wand. Eine Abschätzung für diesen letzteren Anteil bekommt man mit Hilfe der Bewegungsgleichung in (Flächen-) Normalenrichtung. Für diese liegt aber erst dann eine Abschätzung vor, wenn die Größenordnung von  $1/Re$  aus den tangentialen Gleichungen ermittelt worden ist. Man geht also so vor, daß man von der Änderung von  $p^{1\alpha}$  vom Grenzschicht-Außenrand bis zur Wand zunächst absieht. Aus der Forderung, daß ein Gleichgewichtszustand möglich sein soll zwischen konvektiver Beschleunigung links und den Zähigkeitsgliedern rechts, folgert man die Größenordnung von  $1/Re$ . (Dabei wird angenommen, daß die kinematische Zähigkeit des Fluidums in dem gewünschten Bereich liegt, andernfalls sich sowieso die Idee der Grenzschicht nicht anwenden ließe.) Mit der Größenordnung von  $1/Re$  zeigt sich dann, welche Glieder in der Gleichung in Normalenrichtung zu berücksichtigen sind. Aus deren Größenordnung wiederum läßt sich nachträglich die Annahme über die Korrektur im Druckglied  $p^{1\alpha}$  prüfen.

In der nachfolgenden Zusammenstellung sind die sich ergebenden Gleichungssysteme für verschiedene Größenordnungen der Krümmung ( $\kappa$ ) oder/und der Krümmungsänderung ( $\Delta$ ) zusammengestellt. Es wurde so vorgegangen, daß alle Terme, deren Größenordnung um einen Faktor  $\delta$  kleiner ist als die größte auftretende Ordnung, vernachlässigt wurden. Glieder, die um einen Faktor  $\delta^{1/2}$  kleiner sind, wurden in spitzen Klammern ( $\langle \dots \rangle$ ) hinzugefügt.

Als Ergebnis erhält man die Gleichungen:

$k < 0(1)$ ,  $\Delta$  bel.

$$v_{\parallel\beta}^{\alpha} v^{\beta} + v_{13}^{\alpha} v^3 = -\frac{1}{g} p^{\alpha} + \frac{1}{\text{Re}} v_{13}^{\alpha} \quad (35)$$

$$0 = p^{13}$$

$k = 0(1)$ ,  $\Delta \leq 0(\frac{1}{g})$

$$v_{\parallel\beta}^{\alpha} v^{\beta} + v_{13}^{\alpha} v^3 = -\frac{1}{g} p^{\alpha} + \frac{1}{\text{Re}} v_{13}^{\alpha} \quad (36)$$

$$b_{\bar{\mu}\bar{\nu}} v^{\bar{\mu}} v^{\bar{\nu}} = -\frac{1}{g} p^{13}$$

$k = 0(1)$ ,  $\Delta > 0(\frac{1}{g})$

$$v_{\parallel\beta}^{\alpha} v^{\beta} + v_{13}^{\alpha} v^3 = -\frac{1}{g} p^{\alpha} + \frac{1}{\text{Re}} v_{13}^{\alpha} \quad (37)$$

$$b_{\bar{\mu}\bar{\nu}} v^{\bar{\mu}} v^{\bar{\nu}} + v_{13}^3 v^3 = -\frac{1}{g} p^{13} + \frac{1}{\text{Re}} \left\{ v_{13}^3 + b_{\bar{\tau}\parallel\bar{\sigma}} v^{\bar{\tau}} \right\}$$

In diesen Gleichungen sind natürlich, abhängig von  $\Delta$ , in  $v_{\parallel\beta}^{\alpha} v^{\beta}$  unter Umständen einige Terme enthalten, deren Größenordnung kleiner ist, als zu ihrer Berücksichtigung notwendig wäre. Desgleichen in  $b_{\bar{\tau}\parallel\bar{\sigma}} v^{\bar{\tau}}$ .

$0(1) < k < 0(1/g)$ ,  $\Delta$  bel.

$$v_{\parallel\beta}^{\alpha} v^{\beta} + v_{13}^{\alpha} v^3 \langle -b_{\bar{\nu}}^{\alpha} v^{\bar{\nu}} v^3 \rangle =$$

$$= -\frac{1}{g} p^{\alpha} + \frac{1}{\text{Re}} \left\{ v_{13}^{\alpha} \langle +\frac{J_{13}}{J} v_{13}^{\alpha} \rangle \right\} \quad (38)$$

$$b_{\bar{\nu}\bar{\mu}} v^{\bar{\nu}} v^{\bar{\mu}} \langle +v_{13}^3 v^3 \rangle = -\frac{1}{g} p^{13}$$

$$k = 0(1/\delta), \quad \Delta \leq 0(1/\delta)$$

$$\begin{aligned} v^{\bar{\alpha}} v^{\bar{\beta}} - b^{\bar{\alpha}} v^{\bar{\nu}} v^{\bar{\beta}} + v^{\bar{\alpha}} v^{\bar{\beta}} - \frac{1}{g} p^{1\alpha} + \\ + \frac{1}{\text{Re}} \left\{ a^{\lambda\sigma} s^{\frac{\sigma}{g}} \left[ 2s^{\frac{\delta}{\lambda}} \left\{ \frac{\bar{\alpha}}{\sigma\nu} \right\} \left\{ \frac{\bar{\nu}}{\delta\eta} \right\} - \left\{ \frac{\mu}{\lambda\sigma} \right\} s^{\frac{\delta}{\mu}} \left\{ \frac{\bar{\alpha}}{\delta\eta} \right\} \right] v^{\bar{\eta}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{J} \left( J v^{\bar{\alpha}} \right)_{13} + b^{\bar{\alpha}} b^{\bar{\tau}} v^{\bar{\sigma}} \right\} \end{aligned} \quad (39)$$

$$b^{\bar{\nu}} v^{\bar{\nu}} v^{\bar{\mu}} + v^{\bar{\beta}} v^{\bar{\beta}} = -\frac{1}{g} p^{1\beta} + \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{1}{J} \left( J v^{\bar{\beta}} \right)_{13} - b^{\bar{\sigma}} b^{\bar{\tau}} v^{\bar{\beta}} \right\}$$

$$k = 0(1/\delta), \quad \Delta > 0(1/\delta)$$

$$\begin{aligned} v^{\bar{\alpha}} v^{\bar{\beta}} - b^{\bar{\alpha}} v^{\bar{\nu}} v^{\bar{\beta}} + v^{\bar{\alpha}} v^{\bar{\beta}} = -\frac{1}{g} p^{1\alpha} + \\ + \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \left[ \left\langle \frac{J_{15}}{J} \left\{ \frac{\bar{\alpha}}{\delta\eta} \right\} \right\rangle + \right. \right. \\ \left. \left. + a^{\lambda\sigma} s^{\frac{\sigma}{g}} \left[ 2s^{\frac{\delta}{\lambda}} \left\{ \frac{\bar{\alpha}}{\sigma\nu} \right\} \left\{ \frac{\bar{\nu}}{\delta\eta} \right\} - \left\{ \frac{\mu}{\lambda\sigma} \right\} s^{\frac{\delta}{\mu}} \left\{ \frac{\bar{\alpha}}{\delta\eta} \right\} \right] \right] v^{\bar{\eta}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{J} \left( J v^{\bar{\alpha}} \right)_{13} + b^{\bar{\alpha}} b^{\bar{\tau}} v^{\bar{\sigma}} \left\langle + b^{\bar{\alpha}\bar{\tau}} v^{\bar{\beta}} \right\rangle \right\} \end{aligned} \quad (40)$$

$$b^{\bar{\sigma}} v^{\bar{\sigma}} v^{\bar{\tau}} + v^{\bar{\beta}} v^{\bar{\beta}} = -p^{1\beta} + \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{1}{J} \left( J v^{\bar{\beta}} \right)_{13} - b^{\bar{\sigma}} b^{\bar{\tau}} v^{\bar{\beta}} \right\}$$

Es ist angebracht, die erhaltenen Gleichungen mit den in der Literatur schon behandelten Spezialfällen zu vergleichen. Aus der großen Zahl von Veröffentlichungen seien ausgewählt die Arbeiten von: Davis, Werle und Wornom [14], Der und Raetz [15], Fanelop [27], Landweber [37], Lin [41], Murphy [52], [53], Shevelev [67], Smith und Clutter [68], [69], Teipel [72], [73] und Warsi [80]. Sofern nicht anders vermerkt, ist in diesen Arbeiten die Energiegleichung nicht berücksichtigt.

Davis, Werle und Wornom [14] betrachten die kompressible, laminare Grenzschicht am Rotationskörper (axial angeströmt, orthogonale Koordinaten) und geben hierfür, wie sie betonen, eine konsequente Formulierung der Gleichungen für Impuls und Energie. Unter der angegebenen Spezialisierung entsprechen ihre Gleichungen den Gleichungen (38) allerdings ohne den Term  $\langle v^3_{,3} v^3 \rangle$  in der Gleichung für die Normalkomponente. Es sind eine Reihe von Arbeiten erschienen, z.B. [9], [58], in denen in der ersten Gleichung zwar rechts das Glied  $\frac{1}{Re} \frac{J_{,3}}{J} v^2_{,3}$  (bezogen auf den Spezialfall der Rotations-symmetrie) berücksichtigt wird, jedoch nicht links das Glied  $-b \frac{\alpha}{v} v^{\bar{v}} v^3$ . Die Frage, ob dieses letztgenannte Glied zu berücksichtigen ist (sowie in der zweiten Gleichung das Glied  $v^3_{,3} v^3$ ), ist weitgehend durch die Größenordnung von  $v^3$  bestimmt. Diese ergibt sich wiederum aus der Kontinuitätsgleichung (34), und hier äußert sich der Einfluß der Krümmung (außer durch  $J$ ) wesentlich durch die Größe der Christoffel-Symbole in dem Term  $v^{\bar{x}} u_{\bar{x}}$ . Bei längs-angeströmten Rotationskörpern verschwindet eine der tangentialen Geschwindigkeitskomponenten. Nur der Einfluß der Längskrümmung geht über die Christoffel-Symbole ein. Davis, Werle und Wornom berücksichtigen die Längskrümmung.

Der und Raetz [15] behandeln die laminare Grenzschicht in einem orthogonalen Koordinatensystem. Die angegebenen Gleichungen gelten unter der Voraussetzung einer dünnen Grenzschicht, also  $p^{13} = 0$ . Es wird der allgemeine dreidimensionale Fall behandelt, der Krümmungstensor tritt jedoch nicht auf. Das aufgestellte Gleichungssystem, es enthält die Energiegleichung, ist elliptisch in Normalenrichtung und hyperbolisch in Richtung der Flächenkoordinaten. Das System wird dann jedoch in ein rein hyperbolisches überführt.

Fanelop [27] betrachtet die dünne, laminare, kompressible Grenzschicht in einem orthogonalen Koordinatensystem.

Praktisch enthalten seine Gleichungen kovariante Ableitungen, da die Krümmung der Stromlinien (der Außenströmung) berücksichtigt wird. Eine Entwicklung nach einem kleinen Parameter

(etwa Stromliniendivergenz) wird vorgenommen, so daß sich Gleichungen nullter, erster usw. Ordnung ergeben, ähnlich wie bei van Dyke [21]. Die Krümmungsabhängigkeit der Zähigkeitsbehafteten Terme ist vernachlässigt. Auch die Energiegleichung wird behandelt.

Landweber [37] gibt Gleichungen an für die dreidimensionale Grenzschicht. Sie entsprechen den Gleichungen (36) mit einem Term  $v^3_{13} v^3$  links in der dritten Gleichung.

Lin [41] hat ein recht vollständiges Gleichungssystem angegeben. Er unterscheidet zwischen der kovarianten Ableitung auf der Fläche und der im Raum. Auch ist nicht die Einschränkung auf orthogonale Koordinaten in der Fläche gemacht, so daß als Einschränkung im wesentlichen die auf dünne Grenzschichten bleibt. Es wird nicht zwischen Raum- und Flächentensoren unterschieden. Eine Entwicklung nach Potenzen von  $Re^{-1/2}$  wird vorgenommen, ähnlich wie bei Fannelop [27].

Murphy [52], [53] hat laminare Grenzschichten an einer in Strömungsrichtung gekrümmten Wand untersucht und betrachtet Krümmungen sowohl der Größenordnung 1 als auch  $1/\delta$ . Das behandelte Problem ergibt im ersten Fall Gleichungen, die den Beziehungen (35) entsprechen, im zweiten Fall solche, die den Gleichungen (38) vergleichbar sind. Murphy läßt auch Änderungen der Krümmung der Ordnung  $1/\delta$  zu. Der Unterschied zu den Gleichungen (39) im Fall starker Krümmungen folgt daraus, daß  $v^2 = 0$  und  $\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \right\} = 0$  ist, für das ebene Problem. Daher fallen bei der ebenen Strömung in den tangentialen Gleichungen (39) rechts die Glieder mit den Christoffel-Symbolen fort, und es folgt aus der Kontinuitätsgleichung, daß  $v^3$  so klein ist, daß in der dritten Gleichung die Glieder mit  $1/Re$  und links  $v^3_{13} v^3$  in Fortfall kommen.

Shevelev [67] behandelt den Fall kleiner Krümmung. Der zweite Haupttensor tritt nicht explizit auf. Seine Gleichungen entsprechen den Gleichungen (35) in physikalischen Komponenten. Das verwendete Koordinatensystem ist nicht orthogonal, und es werden echt dreidimensionale Grenzschichten betrachtet.

Smith und Clutter [68], [69] gehen für den rotationssymmetrischen Fall von Beziehungen aus, die die Querkrümmung nur in der Kontinuitätsgleichung berücksichtigen. Sie behandeln die Zweistoffgrenzschicht (Energiesatz!) in orthogonalen Koordinaten mittels eines Differenzenverfahrens in Längsrichtung, welches dann auf gewöhnliche Differentialgleichungen führt.

Teipel [72], [73] diskutiert wie Murphy den Fall starker Krümmung und geht von demselben Gleichungssystem aus wie Murphy, ist allerdings an Lösungen für periodisch instationäre Grenzschichten interessiert und berücksichtigt daher noch den instationären Term.

Warsi [80] betrachtet sogar den allgemeinen Fall des rotierenden Flügels. Die Behandlung entspricht der von Der und Raetz [15], jedoch wird das Gleichungssystem durch eine geeignete Transformation in ein rein parabolisches verwandelt, welches numerisch gelöst wird [19].

III. Die Energiegleichungen für die laminare Grenzschicht

Allgemein gilt, bei konstantem  $\mu$ , für die Enthalpie:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}(i_{1t} + v^{\bar{\beta}} i_{1\bar{\beta}} + v^3 i_{13}) &= v^{\bar{\alpha}} p_{1\bar{\alpha}} + v^3 p_{13} + (\lambda T^{\bar{\alpha}})_{1\bar{\alpha}} + \frac{1}{J} (J \lambda T^3)_{13} \\
 &+ 2\mu \left\{ \frac{1}{2} (v^{\bar{\mu}}_{1\bar{\nu}} + v^{\bar{\nu}}_{1\bar{\mu}}) v^{\bar{\nu}}_{1\bar{\mu}} + \frac{1}{2} (v^{\bar{\lambda}}_{13} + v^3_{1\bar{\lambda}}) v^{\bar{\lambda}}_{13} + \right. \\
 &+ \frac{1}{2} (v^3_{1\bar{\lambda}} + v^{\bar{\lambda}}_{13}) v^3_{1\bar{\lambda}} + (v^3_{13})^2 + v^{\bar{\nu}} (b_{\bar{\nu}\bar{\mu}} v^{\bar{\mu}}_{13} + \\
 &+ b_{\bar{\nu}}^{\bar{\mu}} v^3_{1\bar{\mu}}) - 2v^3 b_{\bar{\nu}}^{\bar{\mu}} v^{\bar{\nu}}_{1\bar{\mu}} + \frac{1}{2} b_{\bar{\lambda}\bar{\mu}} b_{\bar{\nu}}^{\bar{\lambda}} v^{\bar{\mu}}_{13} v^{\bar{\nu}}_{13} + \\
 &\left. + b_{\bar{\mu}}^{\bar{\nu}} b_{\bar{\nu}}^{\bar{\mu}} (v^3)^2 \right\} \quad (42)
 \end{aligned}$$

und für die mechanische Energie:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}\left(\left[\frac{1}{2} v^i v_i\right]_{1t} + v^{\bar{\beta}} \left[\frac{1}{2} v^i v_i\right]_{1\bar{\beta}} + v^3 \left[\frac{1}{2} v^i v_i\right]_{13}\right) &= \\
 &- v^{\bar{\alpha}} p_{1\bar{\alpha}} - v^3 p_{13} + \mu \left\{ v^{\bar{\alpha}} v_{\bar{\alpha}}^{\bar{\sigma}}_{1\bar{\sigma}} + v^{\bar{\alpha}} \frac{1}{J} (J v_{\bar{\alpha}13})_{13} \right. \\
 &+ v^3 v_3^{\bar{\sigma}}_{1\bar{\sigma}} + v^3 \frac{1}{J} (J v_{313})_{13} - v_{\bar{\alpha}} b_{\bar{\tau}}^{\bar{\alpha}} b_{\bar{\sigma}}^{\bar{\tau}} v^{\bar{\sigma}}_{13} - \\
 &- 2v^{\bar{\alpha}} b_{\bar{\alpha}}^{\bar{\sigma}} v^3_{1\bar{\sigma}} + 2v^3 b_{\bar{\alpha}}^{\bar{\sigma}} v_{\bar{\sigma}}^{\bar{\alpha}}_{13} - \\
 &\left. - b_{\bar{\tau}}^{\bar{\sigma}} b_{\bar{\sigma}}^{\bar{\tau}} (v^3)^2 \right\} \quad (43)
 \end{aligned}$$

Grenzschichtnäherungen:

Für die Enthalpiegleichung gilt in erster Näherung, sofern  $k \leq 0(1)$  ist:

$$\begin{aligned} g(i_{1t} + v^{\bar{\beta}} i_{1\bar{\beta}} + v^3 i_{13}) &= \\ &= v^{\bar{\alpha}} p_{1\bar{\alpha}} + v^3 p_{13} + \frac{1}{J} (J \lambda T^{13})_{13} + \mu (v \bar{\lambda}_{13} v^{\bar{\lambda}}_{13}) \end{aligned} \quad (44)$$

oder aber, sofern  $k > 0(1)$  ist:

$$\begin{aligned} g(i_{1t} + \langle v^{\bar{\beta}} i_{1\bar{\beta}} \rangle + v^3 i_{13}) &= \\ &= v^{\bar{\alpha}} p_{1\bar{\alpha}} + v^3 p_{13} + \frac{1}{J} (J \lambda T^{13})_{13} + \\ &+ \mu \left\{ 2 v^{\bar{\nu}} b_{\bar{\nu}\bar{\mu}} v^{\bar{\mu}}_{13} + b_{\bar{\lambda}\bar{\mu}} b_{\bar{\nu}}^{\bar{\lambda}} v^{\bar{\mu}}_{13} v^{\bar{\nu}} + \right. \\ &\left. + v \bar{\lambda}_{13} v^{\bar{\lambda}}_{13} \right\} \end{aligned} \quad (45)$$

Hierin ist benutzt worden, daß die Dicke der Temperaturgrenzschicht  $\delta_T$  meist  $\cong \delta$  ist, da

$$\frac{\delta_T}{\delta} \sim \frac{1}{\sqrt{Pr}}$$

(vgl. [64]). Bezüglich des Terms mit  $p^{13}$  ist zu sagen, daß für seine Größenordnung gilt, was bei den Bewegungsgleichungen gesagt wurde:

Für  $k < 0(1)$  ist  $p_{13} = 0$  zu setzen.

Für die Gleichung der mechanischen Energie erhält man Abschätzungen aus den Abschätzungen der Bewegungsgleichungen unter Berücksichtigung der Größenordnung von  $v^3$ , die wiederum aus der Kontinuitätsgleichung folgt. Man findet:

Für  $k \leq O(1)$

$$\begin{aligned} \vartheta \left( \left[ \frac{1}{2} v^i v_i \right]_{it} + v^{\bar{\beta}} \left[ \frac{1}{2} v^i v_i \right]_{i\bar{\beta}} + v^3 \left[ \frac{1}{2} v^i v_i \right]_{i3} \right) = \\ = -v^{\bar{\alpha}} p_{i\bar{\alpha}} + \mu v^{\bar{\alpha}} \frac{1}{J} \left( J v_{\bar{\alpha}i3} \right)_{i3} \end{aligned} \quad (46)$$

Für  $O(1) < k < O(1/\delta)$

$$\begin{aligned} \vartheta \left( \left[ \frac{1}{2} v^i v_i \right]_{it} + \langle v^{\bar{\beta}} \left[ \frac{1}{2} v^i v_i \right]_{i\bar{\beta}} \rangle + v^3 \left[ \frac{1}{2} v^i v_i \right]_{i3} \right) = \\ = -v^{\bar{\alpha}} p_{i\bar{\alpha}} + \mu v^{\bar{\alpha}} \frac{1}{J} \left( J v_{\bar{\alpha}i3} \right)_{i3} \end{aligned} \quad (47)$$

Für  $k = O(1/\delta)$

$$\begin{aligned} \vartheta \left( \left[ \frac{1}{2} v^i v_i \right]_{it} + \langle v^{\bar{\beta}} \left[ \frac{1}{2} v^i v_i \right]_{i\bar{\beta}} \rangle + v^3 \left[ \frac{1}{2} v^i v_i \right]_{i3} \right) = \\ = -v^{\bar{\alpha}} p_{i\bar{\alpha}} - v^3 p_{i3} + \mu \left\{ v^{\bar{\alpha}} \frac{1}{J} \left( J v_{\bar{\alpha}i3} \right)_{i3} + \right. \\ \left. + v^3 \frac{1}{J} \left( J v_{3i3} \right)_{i3} \right\} \end{aligned} \quad (48)$$

6. Die Gleichungen für die inkompressible turbulente Grenzschicht

Da sich das Phänomen Turbulenz nach wie vor einer exakten mathematisch-physikalischen Behandlung entzieht, so fehlt in den Gleichungen ein theoretisch fundierter Zusammenhang zwischen Schubspannungstensor und Geschwindigkeitsvektor, wie er im laminaren Fall durch den Newtonschen Ansatz gegeben ist.

Schreiben wir

$$v^{\bar{\alpha}} = \overline{v^{\alpha}} + v'^{\alpha} \quad , \quad v^{\beta} = \overline{v^{\beta}} + v'^{\beta} \quad , \quad p = \overline{p} + p'$$

wobei  $v'^{\alpha}$  die überlagerte, turbulente Schwankung des Geschwindigkeitsvektors ist und der Querstrich über das ganze Symbol ( $\overline{\quad}$ ) wie üblich zeitliche (oder Ensemble-) Mittelung bedeutet, so lautet die Kontinuitätsgleichung nach Mittelung:

$$\overline{v^{\bar{\alpha}}}_{,\bar{\alpha}} + \frac{1}{J} (J \overline{v^{\beta}})_{,\beta} = 0 \quad (49)$$

also

$$\overline{v^{\bar{\alpha}}}_{,\bar{\alpha}} + \frac{1}{J} (J \overline{v^{\beta}})_{,\beta} = 0$$

d.h., für den Mittelwert des Geschwindigkeitsvektors gilt die Gleichung wie bei laminarer Strömung.

Multiplikation der Kontinuitätsgleichung mit  $v^{\bar{\alpha}} = \overline{v^{\alpha}} + v'^{\alpha}$  liefert, nach Abziehen der Kontinuitätsgleichung (49):

$$\overline{v'^{\alpha} v'^{\beta}}_{,\bar{\alpha}} + \overline{v'^{\alpha}} \frac{1}{J} (J v'^{\beta})_{,\beta} = 0 \quad (50)$$

Mit  $v^3 = v^3 + v'^3$  erhält man ebenso

$$\overline{v^{13} v'^{\bar{1}\bar{3}}} + \overline{v^{13} \frac{1}{J} (J v'^3)}_{13} = 0 \quad (51)$$

Setzen wir auf der linken Seite der Bewegungsgleichungen (21), (22)  $v^{\bar{\alpha}} = \overline{v^{\bar{\alpha}}} + v'^{\bar{\alpha}}$  und  $v^3 = \overline{v^3} + v'^3$  ein, so erhalten wir, nach Mittelung

$$\begin{aligned} & \varrho \left( \overline{v^{\bar{\alpha}}_{it} + v^{\bar{\alpha}}_{\bar{\mu}\bar{\beta}} v^{\bar{\beta}} - b^{\bar{\alpha}\bar{\nu}} \overline{v^{\bar{\nu}} v^3} + \overline{v^{\bar{\alpha}}_{13} v^3} \right) + \\ & + \varrho \overline{v'^{\bar{\alpha}}_{\bar{\mu}\bar{\beta}} v'^{\bar{\beta}}} - b^{\bar{\alpha}\bar{\nu}} \varrho \overline{v'^{\bar{\nu}} v^3} + \varrho \overline{v'^{\bar{\alpha}}_{13} v'^3} = -p^{\bar{\alpha}} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \varrho \left( \overline{v^3_{it} + v^{\bar{\alpha}}_{\bar{\mu}\bar{\beta}} v^{\bar{\beta}} - b^{\bar{\alpha}\bar{\nu}} \overline{v^{\bar{\nu}} v^3} + \overline{v^3_{13} v^3} \right) + \\ & + \varrho \overline{v'^3_{\bar{\mu}\bar{\beta}} v'^{\bar{\beta}}} + \varrho b^{\bar{\alpha}\bar{\nu}} \overline{v'^{\bar{\nu}} v'^3} + \varrho \overline{v'^3_{13} v'^3} = -p^{13} + \dots \end{aligned}$$

Mit Hilfe der beiden Gleichungen (50) und (51) kann man dies umschreiben in:

$$\begin{aligned} & \varrho \left( \overline{v^{\bar{\alpha}}_{it} + v^{\bar{\alpha}}_{\bar{\mu}\bar{\beta}} v^{\bar{\beta}} - b^{\bar{\alpha}\bar{\nu}} \overline{v^{\bar{\nu}} v^3} + \overline{v^{\bar{\alpha}}_{13} v^3} \right) = \\ & = -p^{\bar{\alpha}} - \left( \varrho \overline{v'^{\bar{\alpha}}_{\bar{\mu}\bar{\beta}} v'^{\bar{\beta}}} \right)_{\bar{\mu}\bar{\beta}} + b^{\bar{\alpha}\bar{\nu}} \varrho \overline{v'^{\bar{\nu}} v'^3} - \frac{1}{J} \left( J \overline{v'^{\bar{\alpha}}_{13} v'^3} \varrho \right)_{13} + \dots \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} & \varrho \left( \overline{v^3_{it} + v^{\bar{\alpha}}_{\bar{\mu}\bar{\beta}} v^{\bar{\beta}} + b^{\bar{\alpha}\bar{\nu}} \overline{v^{\bar{\nu}} v^3} + \overline{v^3_{13} v^3} \right) = \\ & = -p^{13} - \left( \varrho \overline{v'^3_{\bar{\mu}\bar{\beta}} v'^{\bar{\beta}}} \right)_{\bar{\mu}\bar{\beta}} - b^{\bar{\alpha}\bar{\nu}} \varrho \overline{v'^{\bar{\nu}} v'^3} - \frac{1}{J} \left( J \varrho \overline{v'^3_{13} v'^3} \right)_{13} + \dots \end{aligned} \quad (53)$$

Damit hat man in Flächenkoordinaten die tensoriellen Reynolds-Gleichungen.

Die Größen

$$-\overline{\rho v^{1\alpha} v^{1\beta}}, \quad -\overline{\rho v^{1\alpha} v^{1\beta}}, \quad -\overline{\rho v^{1\beta} v^{1\beta}}$$

sind die Komponenten des (schon versetzten) Reynoldsschen turbulenten Schubspannungstensors. Sie kommen hinzu zu dem laminaren Schubspannungstensor. Die angeschriebenen Terme kommen also zu den nicht angeschriebenen laminaren Termen hinzu.

Der Einfluß der Krümmung äußert sich hier wieder in der Größe  $\mathcal{J}$ , in den Termen  $-\overline{b_{\alpha\beta}^{\mathcal{J}} \rho v^{1\alpha} v^{1\beta}}$  und  $\overline{b_{\alpha\beta}^{\mathcal{J}} (\rho v^{1\alpha} v^{1\beta})}$  und in den beiden Zusatztermen bei jeder der kovarianten Ableitungen.

Die Erfahrung zeigt, daß die turbulenten Schubspannungen erheblich größer sind als die laminaren. Wir können also in den tangentialen Bewegungsgleichungen die nicht angeschriebenen (zähigkeitsbehafteten) Terme gleich vernachlässigen und in Abhängigkeit von  $k$  und  $\Delta$ , wie im laminaren Fall, die Größenordnungen der Terme abschätzen. Wenn auch nahe der Wand von einer Isotropie der Turbulenz nicht mehr die Rede sein kann, so können wir doch noch annehmen [32], daß  $v^1$ ,  $v^2$  und  $v^3$  die gleiche Größenordnung  $\nu$  haben. Der Parameter  $\nu$  kommt also jetzt bei Abschätzungen zu  $L, k, \Delta, \nu$  und  $\delta$  hinzu. Dann läßt sich  $\overline{v^1 v^2}$  zum Beispiel abschätzen durch  $R_{12} (\nu)^2$ , wobei  $R_{12}$  der Korrelationskoeffizient ist, der also  $\leq O(1)$  ist ( $R_{11} \equiv 1$ ). Weiterhin setzen wir für  $\nu^2 / U^2$  wieder einfach  $\nu^2$ . Für die linken Seiten ist die Abschätzung identisch mit der im laminaren Fall.

Da die Turbulenz in der Grenzschicht ihre Energie aus der Außenströmung bezieht, so ist natürlich zu fordern, daß  $\nu$  immer merklich kleiner als  $O(V^\alpha)$  ist. Eine Schwäche dieser Art von Abschätzung ist natürlich, daß die Turbulenz nicht unabhängig ist von der Zähigkeit  $\mu$  des Mediums, also die

Größenordnungen von  $1/Re$  und  $\nu$  nicht unabhängig sind. Aber schon die Annahme einer Größenordnung  $\nu$  für den gesamten spektralen Bereich der Turbulenz ist eine stark vereinfachende Hypothese. Auch die Krümmung hat einen Einfluß auf die Turbulenz. Dies ersieht man aus der Energiegleichung für die Turbulenz in der Grenzschicht, angesprochen unter Berücksichtigung der Krümmung. Schließlich ist noch zu beachten, daß nahe der Wand sicherlich  $O(\nu) \approx O(\nu^*)$  möglich ist. Mit anderen Worten, in dem Bereich  $0 \leq u^3 \leq \delta$  sind die Größenordnungen der turbulenten Schubspannungsterme nicht unabhängig von  $u^3$  abzuschätzen.

Ergebnis: (Wir schreiben wieder  $v^{\bar{\alpha}}$  statt  $\overline{v^{\alpha}}$ )

$$k \leq O(1)$$

$$\begin{aligned} \rho (v^{\bar{\alpha}}_{\parallel\bar{\beta}} v^{\bar{\beta}} + v^{\bar{\alpha}}_{13} v^3) &= -p^{\bar{\alpha}} + \tau^{\bar{\alpha}3}_{13} \\ 0 &= -p^{13} + \tau^{33}_{13} \end{aligned} \quad (54)$$

$$O(1) < k < O(1/\delta)$$

$$\begin{aligned} \rho (v^{\bar{\alpha}}_{\parallel\bar{\beta}} v^{\bar{\beta}} + v^{\bar{\alpha}}_{13} v^3 \langle -b^{\bar{\alpha}}_{\bar{\nu}} v^{\bar{\nu}} v^3 \rangle) &= -p^{\bar{\alpha}} + \tau^{\bar{\alpha}3}_{13} \\ + \langle \tau^{\bar{\alpha}\bar{\beta}}_{\parallel\bar{\beta}} - b^{\bar{\alpha}}_{\bar{\nu}} \tau^{\bar{\nu}3} + \frac{J_{13}}{J} \tau^{\bar{\alpha}3} \rangle & \end{aligned} \quad (55)$$

$$b_{\bar{\nu}\bar{\mu}} v^{\bar{\nu}} v^{\bar{\mu}} \langle +v^{\bar{\alpha}}_{13} v^3 \rangle = -p^{13} + \tau^{33}_{13} + \langle \tau^{3\bar{\beta}}_{\parallel\bar{\beta}} + b_{\bar{\nu}\bar{\mu}} \tau^{\bar{\nu}\bar{\mu}} + \frac{J_{13}}{J} \tau^{33} \rangle$$

$$k = O(1/\delta)$$

$$\begin{aligned} \rho (v^{\bar{\alpha}}_{\parallel\bar{\beta}} v^{\bar{\beta}} + v^{\bar{\alpha}}_{13} v^3 - b^{\bar{\alpha}}_{\bar{\nu}} v^{\bar{\nu}} v^3) &= -p^{\bar{\alpha}} + \tau^{\bar{\alpha}3}_{13} + \tau^{\bar{\alpha}\bar{\beta}}_{\parallel\bar{\beta}} - b^{\bar{\alpha}}_{\bar{\nu}} \tau^{\bar{\nu}3} + \frac{J_{13}}{J} \tau^{\bar{\alpha}3} \\ b_{\bar{\nu}\bar{\mu}} v^{\bar{\nu}} v^{\bar{\mu}} + v^{\bar{\alpha}}_{13} v^3 &= -p^{13} + \tau^{33}_{13} + \tau^{3\bar{\beta}}_{\parallel\bar{\beta}} + b_{\bar{\nu}\bar{\mu}} \tau^{\bar{\nu}\bar{\mu}} + \frac{J_{13}}{J} \tau^{33} \end{aligned} \quad (56)$$

In diesen Gleichungen wurde statt  $-\rho \overline{v^{1i} v^{1j}}$ , für den Schubspannungstensor,  $\tau^{ij}$  geschrieben. In spitzen Klammern ( $\langle \dots \rangle$ ) sind wieder die Terme hinzugefügt, die nur um einen Faktor  $\delta^{1/2}$  kleiner sind als die dominierenden. Für den Druckterm gilt, was bei der Diskussion der laminaren Gleichungen gesagt wurde. In den Termen  $\tau^{\alpha\beta}_{1\beta}$ ,  $b_{\bar{\nu}\bar{\mu}} \tau^{\bar{\nu}\bar{\mu}}$  und  $\tau^{33}_{13} + \frac{J_{13}}{J} \tau^{33} = \frac{1}{J} (J \tau^{33})_{13}$  sind die Normalspannungen enthalten. Diese werden meist vernachlässigt, sollen jedoch im Bereich der Ablösung von Bedeutung sein [60].

Ein Vergleich der obigen Gleichungen mit den in der Literatur behandelten Spezialfällen fällt merklich dürftiger aus, als dies bei den laminaren Grenzschichten der Fall war.

Für die turbulente Grenzschicht am Rotationskörper mit Längskrümmung hat Landweber [37] Gleichungen angegeben, die [55] entsprechen, wobei aber in den tangentialen Gleichungen  $\langle -b \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\nu}} \tau^{\bar{\nu}3} \rangle$  und in der dritten Gleichung  $\langle \tau^{3\beta}_{1\beta} + b_{\bar{\nu}\bar{\mu}} \tau^{\bar{\nu}\bar{\mu}} \rangle$  entfallen. Sain [62] gibt ein ähnliches Gleichungssystem an, welches die Normalspannungen  $-\rho \overline{v^{12} v^{12}}$  berücksichtigt ( $v^{12}$  tangential, senkrecht zum Meridian).

Cebeci, Smith und Mosinskis [7] berechnen turbulente Grenzschichten an Rotationskörpern bei Vernachlässigung der Längskrümmung für kompressible Medien, indem sie alle Normalspannungen vernachlässigen,  $p^{13} = 0$  setzen, in der ersten Gleichung aber einen  $\frac{J_{13}}{J} \tau^{\alpha 3}$  entsprechenden Term rechts berücksichtigen. Sie verwenden die Energiegleichung. Ähnlich gehen Cebeci und Smith [9] in einer anderen Arbeit vor, während Cebeci [8] für schlanke Rotationskörper auch ohne Energiegleichung auskommt.

7. Die mechanische Energiegleichung der Turbulenz

Energiegleichung:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} v^i v_i \right] = -\frac{1}{\rho} p_{ii} v^i + v (v^j v^i)_{,ij} - \underbrace{v (v^i)_{,ij} v^j}_{= \phi} \quad (57)$$

Setzen wir  $v^i = \bar{v}^i + v'^i$  ,  $p = \bar{p} + p'$

d.h.  $v^i v_i = \bar{v}^i \bar{v}_i + 2\bar{v}^i v'_i + v'^i v'_i$

und gemittelt:  $\overline{v^i v_i} = \bar{v}^i \bar{v}_i + q^2$        $q^2 = \overline{v'^i v'_i}$

so ergibt sich nach Mittelung und Abzug der Gleichung für die mechanische Energie, gebildet mit dem Mittelwert  $\bar{v}^i$  [32]:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} q^2 \right] = -\overline{\left( v'^i \frac{p'}{\rho} \right)_{,i}} - \overline{\left( v'^i \frac{q^2}{2} \right)_{,i}} - \overline{v'^i v'^j} \bar{v}_{j,i} + \underbrace{v \left\{ \overline{\left( v'^j v'^i \right)_{,ij}} \right\} - \left\{ \overline{\left( v'^i \right)_{,ij} v'^j} \right\}}_{= \varphi} \quad (58)$$

d.h. die Änderung der mechanischen Energie der Turbulenz ist gleich der konvektiven Diffusion der Energie  $\frac{q^2}{2} + \frac{p'}{\rho}$  durch die Turbulenz, plus der Energieproduktion durch Wechselwirkung mit der mittleren Strömung, plus Arbeit (pro Zeit- und Masseneinheit) der zähen Schubspannungen der Turbulenz, plus Dissipation  $\varphi$  durch Turbulenz.

Umformuliert auf die Fläche:

(für  $\bar{v}^j$  schreiben wir wieder  $v^j$ )

$$\begin{aligned}
 & \left[ \frac{q^2}{2} \right]_{it} + v^{\bar{\beta}} \left[ \frac{q^2}{2} \right]_{i\bar{\beta}} + v^3 \left[ \frac{q^2}{2} \right]_{i3} = \\
 & - \overline{\left( v^{1\bar{\alpha}} \left[ \frac{p'}{g} + \frac{q^2}{2} \right] \right)}_{i\bar{\alpha}} - \frac{1}{J} \overline{\left( J v^{13} \left[ \frac{p'}{g} + \frac{q^2}{2} \right] \right)}_{i3} \\
 & - \overline{v^{1\bar{\alpha}} v^{1\bar{\beta}}}_{i\bar{\alpha}i\bar{\beta}} v_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} - \overline{v^{1\bar{\alpha}} v^{1\bar{\beta}}}_{i\bar{\alpha}i\bar{\beta}} b_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} v^3 - \overline{v^{1\bar{\alpha}} v^{13}}_{i\bar{\alpha}i3} b_{\bar{\alpha}3} v^{\bar{\beta}} + \\
 & - \overline{v^{1\bar{\alpha}} v^{13}}_{i\bar{\alpha}i3} v_{3i\bar{\alpha}} - \overline{v^{1\bar{\alpha}} v^{13}}_{i\bar{\alpha}i3} v_{\bar{\alpha}i3} - \overline{v^{13} v^{13}}_{i3i3} v_{3i3} \\
 & + v \left\{ \overline{\left( v^{1\bar{\alpha}} v^{1\bar{\beta}} \right)}_{i\bar{\alpha}i\bar{\beta}} + \frac{1}{J} \overline{\left( J v^{1\bar{\alpha}} v^{13} \right)}_{i\bar{\alpha}i3} + \overline{\left( v^{13} v^{1\bar{\beta}} \right)}_{i3i\bar{\beta}} + \right. \\
 & + \frac{1}{J} \overline{\left( J v^{13} v^{13} \right)}_{i3i3} - b_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \overline{v^{13} v^{1\bar{\alpha}}}_{i\bar{\alpha}i3} - b_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \overline{\left( v^{13} v^{1\bar{\alpha}} \right)}_{i\bar{\alpha}i3} + \\
 & \left. + b_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \overline{\left( v^{1\bar{\alpha}} v^{1\bar{\beta}} \right)}_{i\bar{\alpha}i\bar{\beta}} \right\} \\
 & - v \left\{ \overline{v^{1\bar{\beta}}}_{i\bar{\beta}} v^{1(\bar{\mu})}_{i\bar{\mu}} + \overline{v^{1\bar{\beta}}}_{i3} v^{1(\bar{\mu})}_{i\bar{\mu}} + \overline{v^{13}}_{i3} \overline{\left( v^{1(3i\bar{\mu})} \right)}_{i\bar{\mu}} + \right. \\
 & + 2 \overline{v^{13}}_{i3} \overline{v^{13}}_{i3} + \overline{v^{1\bar{\beta}}}_{i\bar{\beta}} \overline{v^{1(\bar{\mu})}}_{i\bar{\mu}} b_{\bar{\beta}\bar{\mu}} + \overline{v^{13}}_{i3} \overline{v^{1(\bar{\mu})}}_{i\bar{\mu}} b_{\bar{\beta}\bar{\mu}} + \\
 & \left. + b_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} b_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \overline{v^{1\bar{\mu}} v^{1\bar{\nu}}}_{i\bar{\mu}i\bar{\nu}} + 2 b_{\bar{\beta}\bar{\mu}} b_{\bar{\nu}\bar{\mu}} \overline{v^{13} v^{13}}_{i3i3} \right\}
 \end{aligned}$$

(59)

Die Gleichung für die mechanische Energie der Turbulenz bei inkompressibler Strömung läßt sich mit Hilfe der aus der Kontinuitätsgleichung folgenden Beziehung

$$\overline{v'^j v'^i}_{m_i m_j} = 0$$

umformen:

$$\begin{aligned} \overline{(v'^j v'^i)_{m_j}}_{m_i} - \overline{v'^i v'^j}_{m_i m_j} &= \overline{(v'^j (v'^i_{m_j} + g_{jl} v'^l_{mk} g^{ki}))}_{m_i} - \\ &\quad - \overline{(v'^i_{m_j} + g^{jl} v'^l_{mk} g^{ki}) v'^j}_{m_i} \\ &= \overline{(v'^j v'^i)_{m_j}}_{m_i} + \left(\frac{q^2}{2}\right)_{m_j m_l} g^{jl} - \overline{v'^i_{m_j} v'^j}_{m_i} - \\ &\quad - \overline{v'^j_{m_i} v'^k_{m_l} g_{jk} g^{il}} \\ &= \left(\frac{q^2}{2}\right)_{m_j m_l} g^{jl} - \overline{v'^j_{m_i} v'^k_{m_l} g_{jk} g^{il}} \\ &= \left(\frac{q^2}{2}\right)_{m_j}^{m_j} - \overline{v'^j_{m_i} v'^j}_{m_i} \end{aligned}$$

Dann erhält man in Flächenkoordinaten:

$$\begin{aligned} \left[\frac{q^2}{2}\right]_{1t} + v^{\bar{\beta}} \left[\frac{q^2}{2}\right]_{1\bar{\beta}} + v^3 \left[\frac{q^2}{2}\right]_{13} &= \\ &= - \overline{(v'^{\bar{\alpha}} \left[\frac{p'}{g} + \frac{q^2}{2}\right])}_{1\bar{\alpha}} - \frac{1}{J} \overline{(J v'^3 \left[\frac{p'}{g} + \frac{q^2}{2}\right])}_{13} \\ &\quad + v \left\{ \left(\frac{q^2}{2}\right)_{1\bar{\alpha}} + \frac{1}{J} \overline{(J \left(\frac{q^2}{2}\right)_{13})}_{13} - v'^{\bar{\alpha}}_{1\bar{\beta}} v'^{\bar{\beta}}_{1\bar{\alpha}} - b^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}} b^{\bar{\beta}}_{\bar{\alpha}} v'^3 v'^3 \right. \\ &\quad + 2 b^{\bar{\alpha}}_{\bar{\nu}} \overline{v'^3 v'^{\bar{\nu}}}_{1\bar{\alpha}} - \overline{v'^{\bar{\alpha}}_{13} v'^{\bar{\nu}}_{13}} - \overline{v'^3_{1\bar{\beta}} v'^{\bar{\nu}}_{1\bar{\beta}}} - b^{\bar{\beta}}_{\bar{\nu}} b^{\bar{\nu}}_{\bar{\beta}} \overline{v'^{\bar{\nu}} v'^{\bar{\beta}}}_{1\bar{\alpha}} \\ &\quad \left. + 2 b^{\bar{\alpha}}_{\bar{\nu}} \overline{v'^{\bar{\nu}} v'^3}_{1\bar{\alpha}} \right\} - v^{\bar{\alpha}}_{1\bar{\beta}} \overline{v'^{\bar{\alpha}} v'^{\bar{\beta}}}_{1\bar{\alpha}} - b^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}} v^3 \overline{v'^{\bar{\alpha}} v'^{\bar{\beta}}}_{1\bar{\alpha}} \\ &\quad - b^{\bar{\alpha}}_{\bar{\nu}} v^{\bar{\nu}} \overline{v'^{\bar{\alpha}} v'^3}_{1\bar{\alpha}} - v^3_{1\bar{\alpha}} \overline{v'^{\bar{\alpha}} v'^3}_{1\bar{\alpha}} - v^{\bar{\alpha}}_{13} \overline{v'^{\bar{\alpha}} v'^3}_{1\bar{\alpha}} - v^3_{13} \overline{v'^3 v'^3}_{13} \end{aligned}$$

## 8. Zur Definition integraler Grenzsichtparameter

Bei der Definition integraler Grenzsichtparameter für dreidimensionale Grenzsichten (Impulsverlustdicken, Verdrängungsdicke, Energieverlustdicke usw.) muß mit einiger Sorgfalt verfahren werden.

Es werde die dreidimensionale Grenzsichtströmung (Strömung I) eines zähen kompressiblen Mediums an einer beliebig gekrümmten Wandfläche betrachtet. Es werde weiterhin eine zweite Strömung eines hypothetischen zähigkeitsfreien Mediums (Strömung II) betrachtet. Größen, die sich auf letztere beziehen, werden mit großen Buchstaben bezeichnet, Größen, die sich auf erstere beziehen, mit kleinen. Die Geschwindigkeiten seien also etwa  $v^\alpha$  und  $V^\alpha$ , die Dichten  $\rho$  und  $\rho$ . Sei weiterhin  $t$  bzw.  $T$  eine tensorielle (also speziell skalare oder vektorielle, und nur solche sollen hier betrachtet werden). Eigenschaft des einen oder anderen Mediums (z.B. Dichte, Enthalpie, Impuls usw.). Die Grenzsicht (Strömung I) habe eine Dicke  $\delta$ , die, gemessen in Richtung der Flächennormalen der Wand, eine Funktion der Ortskoordinaten auf der Wand ist:  $\delta = \delta(u^1, u^2)$ .

Zur Formulierung der Ansätze werde ein Kontrollvolumen  $\mathcal{K}$  betrachtet, welches aus der Grenzsicht herausgeschnitten wird durch eine Mantelfläche  $\mathcal{M}$ , die wiederum gebildet wird durch alle Normalen zur Wandfläche durch die Punkte einer vorgegebenen, geschlossenen, doppelpunktfreien Kurve  $\bar{\mathcal{L}}$  auf der Wandfläche.  $\bar{\mathcal{L}}$  berande einen Bereich  $d\mathcal{S}$  der Wandfläche derart, daß dieser in  $u^1$ - und  $u^2$ -Richtung infinitesimale Ausdehnung habe und sein Umfang auch noch als infinitesimal anzusprechen ist.  $\mathcal{K}$  hat also eine infinitesimale Grundfläche  $d\mathcal{S}$  und infinitesimales Volumen, aber eine endliche Höhe  $\delta$ .  $\mathcal{K}$  wird also begrenzt durch die abwickelbare Fläche (Torse)  $\mathcal{M}$ , die Grundfläche  $d\mathcal{S}$  und die Fläche, die  $\mathcal{M}$  aus der Grenzsicht-Randfläche herausschneidet.

Weiterhin soll nun der Fluß von  $t$  oder  $T$  [25] aus dem (oder in das) Volumen  $\mathcal{K}$  (oder ein Teilvolumen  $\mathcal{K}'$ ) betrachtet werden. Schließlich sei noch vorausgesetzt, daß beide Strömungen an der Grenzschicht-Randfläche  $u^3 = \delta$  gleich seien ( $V^\alpha(\delta) = v^\alpha(\delta)$ ,  $p = q$ ).

und die Wandfläche impermeabel sei (keine Ausblasung, keine Absaugung, keine Ablation).

Für die Berechnung eines Flusses wird also die Integration über die Mantelfläche  $\mathcal{M}$  maßgeblich sein. Gerechnet werde in dem Normalkoordinatensystem der Wandfläche.

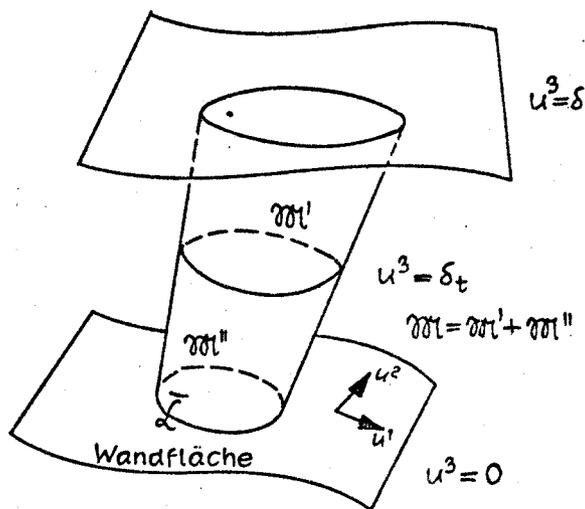
Dann wird es zweckmäßig sein, Integrationen über  $\mathcal{M}$  auf Integrationen über  $u^3$  und Integrationen im Raum der

Wandfläche zu reduzieren. Die Versetzer oder Shifter  $S_{\nu}^{\bar{\alpha}}$  vermitteln den Zusammenhang zwischen dreidimensionalem Schichtraum und der Fläche. Ihre Determinante stellt die Funktionaldeterminante der linearen Transformation zwischen Raum und Fläche dar. Für ein Oberflächenelement  $dO_{\mathcal{M}}$  von  $\mathcal{M}$  gilt also: (19)

$$dO_{\mathcal{M}} = J du^3 d\bar{s} \tag{61}$$

wobei  $d\bar{s}$  ein Linienelement auf der Kurve  $\bar{\mathcal{L}}$  auf der Wandfläche ist.

Um eine Integration im krummlinigen Normalkoordinatensystem über tensorielle (nichtskalare) Größen vornehmen zu können, müssen diese Größen [25] an einen Ort "versetzt" sein. Bezüglich  $u^3$  werden die Größen zweckmäßig auf die Fläche  $u^3 = 0$ , die Wandfläche, "versetzt".



Wir betrachten nun eine spezielle Eigenschaft der Strömung I, beschrieben durch die tensorielle Größe  $t$  (die Indizes, schon auf die Fläche konvertiert, werden nicht angeschrieben) und die gleiche Eigenschaft in Strömung II, beschrieben durch  $T$ . Wir denken uns nun eine Fläche  $u^3 = \delta_t$ , undurchlässig für Strömung II, mit  $0 < \delta_t < \delta$ , die von  $\bar{K}$  ein Teilvolumen  $\bar{K}'$  und von  $\mathcal{M}$  eine Teilfläche  $\mathcal{M}'$  abteilt, wobei  $\mathcal{M}'$  (bzw.  $\bar{K}'$ ) zwischen den Flächen  $u^3 = \delta_t$  und  $u^3 = \delta$  liege. Die Lage von  $u^3 = \delta_t$ , d.h. der Wert von  $\delta_t$  werde nun bestimmt durch die Forderung: Fluß von  $t$  für Strömung I durch  $\mathcal{M}$  gleich Fluß von  $T$  für Strömung II durch  $\mathcal{M}'$ . Also:

$$\iint_{\mathcal{M}'} T V^\alpha v_\alpha dO_{\mathcal{M}'} = \iint_{\mathcal{M}} t v^\alpha v_\alpha dO_{\mathcal{M}} \quad (62)$$

Hierin ist  $v_\alpha$  die Normale auf  $\mathcal{M}$ . Per definitionem hat  $v_\alpha$  keine Komponente normal zur Wandfläche, so daß für das Skalarprodukt zwischen Geschwindigkeitsvektor und Normale auf  $\mathcal{M}$  (bzw.  $\mathcal{M}'$ ) gleich  $v^\alpha v_\alpha$  (bzw.  $V^\alpha v_\alpha$ ) geschrieben werden kann. Die Beziehung schreibt man um in:

$$\oint_{\bar{L}} \int_{\delta_t}^{\delta} T V^\alpha v_\alpha J du^3 d\bar{s} = \oint_{\bar{L}} \int_0^{\delta} t v^\alpha v_\alpha J du^3 d\bar{s}$$

oder

$$\oint_{\bar{L}} \int_{\delta_t}^{\delta} T V^{\bar{\alpha}} v_{\bar{\alpha}} J du^3 d\bar{s} = \oint_{\bar{L}} \int_0^{\delta} t v^{\bar{\alpha}} v_{\bar{\alpha}} J du^3 d\bar{s} \quad (63)$$

Mit Hilfe des Satzes von Gauß für die Fläche (A.208) finden wir:

$$\iint_{d\bar{x}} \left[ \int_{\delta_t}^{\delta} T V^{\bar{\alpha}} J du^3 - \int_0^{\delta} t v^{\bar{\alpha}} J du^3 \right]_{;\bar{\alpha}} dO_{d\bar{x}} = 0 \quad (64)$$

Dabei wurde benutzt, daß  $v^{\bar{z}}$  unabhängig von  $u^3$  ist. Da der Wandflächenbereich  $\overline{d\bar{x}}$  beliebig vorgegeben werden kann, bedeutet diese Beziehung, daß der Divergenzausdruck, der den Integranden darstellt, verschwinden muß:

$$\left[ \int_{\delta_t}^{\delta} TV^{\bar{z}} J du^3 - \int_0^{\delta} tv^{\bar{z}} J du^3 \right]_{\parallel \bar{z}} = 0 \quad (65)$$

oder

$$\left[ \int_0^{\delta} (TV^{\bar{z}} - tv^{\bar{z}}) J du^3 - \int_0^{\delta_t} TV^{\bar{z}} J du^3 \right]_{\parallel \bar{z}} = 0 \quad (66)$$

Diese Gleichung ist die Definitionsgleichung für  $\delta_t$ , für die Verdrängungsdicke der Eigenschaft  $t$ . Sie ist ohne Bezug auf die Form spezieller Probleme aus allgemeinen Überlegungen gewonnen worden. Sie ist zunächst eine Integrodifferentialgleichung für  $\delta_t$ . Da  $TV^{\bar{z}}$  überall als bekannt angenommen wird und auch die Geometrie der Wand bekannt ist, ist das Integral

$$\int_0^{\delta_t} TV^{\bar{z}} J du^3$$

im Prinzip bekannt, und wenn wir definieren

$$(TV^{\bar{z}})_{\text{ref}} \hat{\delta}_t = \int_0^{\delta_t} TV^{\bar{z}} J du^3 \quad (67)$$

so ist  $\hat{\delta}_t = \hat{\delta}_t(\delta_t)$  und  $\delta_t$  als Umkehrfunktion aus  $\hat{\delta}_t$  zu ermitteln.  $(TV^{\bar{z}})_{\text{ref}}$  ist ein Referenzwert, so daß  $\hat{\delta}_t$  als Dicke angesprochen werden kann. Wenn  $T$  ein Tensor ist (z.B. ein Vektor), dann sollen die Indizes schon durch

Versetzer in Flächenindizes konvertiert sein, so wie für die Geschwindigkeit  $V^{\vec{z}}$  geschrieben wird. In diesen Versetzern und in der Größe  $J$  ist die Geometrie der Wand enthalten.  $T_{\text{ref}} \cdot \hat{\delta}_t$  ist ein Flächentensor;  $\hat{\delta}_t$  allein ist kein Flächentensor sondern allenfalls eine mehrkomponentige Größe, über die Indizes an  $\hat{\delta}_{..}$  wird also nicht summiert.

Es soll hier auf eine zweite Art der Definition integraler Grenzschichtparameter hingewiesen werden. Bei dieser Variante ist die Differenz  $T-t$  einer bestimmten Eigenschaft in den beiden Strömungen zu betrachten und zugleich die Differenzgeschwindigkeit  $V^{\alpha} - v^{\alpha}$ . Man setzt dann an: (vgl. Zeichnung S. 40)

$$\iint_{\mathcal{M}''} T V^{\alpha} v_{\alpha} dO_{\mathcal{M}''} = \iint_{\mathcal{M}} (T-t)(V^{\alpha} - v^{\alpha}) v_{\alpha} dO_{\mathcal{M}} \quad (68)$$

Dies führt auf

$$\left[ \int_0^{\delta} (T-t)(V^{\vec{z}} - v^{\vec{z}}) J du^3 - \int_0^{\delta_t} T V^{\vec{z}} J du^3 \right]_{||\vec{z}} = 0 \quad (69)$$

Hier ist also  $\delta_t$  so festgelegt worden, daß der Verlust der Eigenschaft  $T$  (bzw.  $t$ ) bei Strömung I (zäh) gegenüber Strömung II berücksichtigt wird, indem für Strömung II für den Fluß von  $T$  ein verringertes Volumen zur Verfügung steht. So definierte  $\delta_t$  wären als Verlustdicken anzusprechen. Sie sind also von Verdrängungsdicken zu unterscheiden, die gemäß (66) definiert sind.

Die für zweidimensionale Strömungen übliche Definition der Verdrängungsdicke entspricht der hier angegebenen Definition für die Verdrängung des Massestromes ( $t = \rho$ ). Nicht so die üblichen Definitionen für Impulsverlustdicke und Energieverlustdicke; bei diesen erscheint eine Eigenschaft der

Strömung I multipliziert mit einer Differenz aus beiden Strömungen.

Bei der Definition (69) handelt es sich um den echten Verluststrom: Die Differenz  $T-t$  wird mit dem Geschwindigkeitsverlust  $V^\alpha - v^\alpha$  in der Grenzschicht multipliziert.

Im zweidimensionalen Fall wird die Impulsverlustdicke  $\delta_2$  definiert durch ( $V$  entspricht  $V^1$ ,  $v$  entspricht  $v^1$ )

$$\delta_2 (\rho v^2)_{\text{ref}} = \int_0^\delta \rho v (V-v) dy$$

[63], [78], d.h. es ist nicht  $T-t$  sondern nur  $t$  (hier  $\rho v$ , der Impuls) mit der Geschwindigkeitsdifferenz multipliziert worden. Anders wird bei der Energie verfahren:

$$\delta_3 (\rho v^3)_{\text{ref}} = \int_0^\delta \rho v (V^2 - v^2) dy$$

Hier ist weder eine Energiedifferenz  $T-t = \rho V^2 - \rho v^2$  noch eine Geschwindigkeitsdifferenz gewählt worden, sondern der Massestrom  $\rho v$  wurde mit der Differenz der Geschwindigkeitsquadrate multipliziert. Die Ausdrücke  $\rho v V$  und  $\rho v V^2$  sind kein Impulsstrom bzw. Energiestrom, weder für Strömung II noch für Strömung I.

Wohl ist  $(\int_0^\delta \rho v V dy)_{ix}$  der Impuls, der am äußeren Grenzschicht- rand zu berücksichtigen ist: Aus der Kontinuitätsgleichung ergibt sich als Massestrom, der die Randfläche durchtritt,  $(\int_0^\delta \rho v dy)_{ix}$  und für  $V$  konstant über die Grenzschichtdicke ist der Impulsfluß eben  $(\int_0^\delta \rho v V dy)_{ix}$ . Da  $\rho v^2$  der echte Impulsstrom in der Grenzschicht ist, so hat  $(\int_0^\delta \rho v (V-v) dy)_{ix}$  schon den Charakter einer Impulsstrom-Differenz. Als solche ergab sich ein analoger Ausdruck bei den bekannten Rechnungen zu der in ihrer Ebene homogen angeströmten ebenen Platte [64]. Aber auch dort ist dieser Ausdruck keiner der explizit betrachteten Impulsströme an den Grenzen des Kontrollbereiches,

sondern eine rechnerische Größe, die sich nach Differenzbildung ergibt.

Es sei noch angegeben, daß aus (69) natürlich folgt:

$$\left[ \int_0^\delta t(v^{\bar{\alpha}} - v^{\underline{\alpha}}) J du^3 - \int_{\delta_t}^\delta T v^{\bar{\alpha}} J du^3 + \int_0^\delta T v^{\underline{\alpha}} J du^3 \right]_{\parallel \bar{\alpha}} = 0 \quad (70)$$

eine Beziehung, die auch für  $V^{\alpha} = \text{const.}$  in  $0 \leq u^3 \leq \delta$  nicht die bei zweidimensionalen Grenzschichten üblicherweise als sogenannte Impulsverlustdicke definierte Größe, verallgemeinert auf den dreidimensionalen Fall, enthält.

Wir wählen hier die Definition (66) und haben für die Impulsverdrängungsdicke  $\delta_2$

$$\left[ \int_0^\delta (\rho v^{\bar{\alpha}} v^{\bar{\beta}} - \rho v^{\underline{\alpha}} v^{\underline{\beta}}) J du^3 - \int_0^{\delta_2} \rho v^{\bar{\alpha}} v^{\bar{\beta}} J du^3 \right]_{\parallel \bar{\beta}} = 0 \quad (71)$$

für die eigentliche Verdrängungsdicke  $\delta_1$

$$\left[ \int_0^\delta (\rho v^{\bar{\beta}} - \rho v^{\underline{\beta}}) J du^3 - \int_0^{\delta_1} \rho v^{\bar{\beta}} J du^3 \right]_{\parallel \bar{\beta}} = 0 \quad (72)$$

und für die Verdrängungsdicke irgend einer anderen skalaren Eigenschaft ( $\bar{E}$  bzw.  $\bar{e}$ ) wie Enthalpie, mechanische Energie, Konzentration usw.:

$$\left[ \int_0^\delta (\bar{E} v^{\bar{\beta}} - \bar{e} v^{\underline{\beta}}) J du^3 - \int_0^{\delta_e} \bar{E} v^{\bar{\beta}} J du^3 \right]_{\parallel \bar{\beta}} = 0 \quad (73)$$

In dieser Form definiert, ist also die Impulsverdrängungsdicke eine zweikomponentige Größe, wie das zu verlangen ist bei einem Flächenvektor, wie ihn der Impuls ja darstellt, nach Versetzung auf die Fläche.

Mit diesen Definitionen, nur aus einer physikalischen Betrachtung an einem infinitesimalen Kontrollvolumen hergeleitet, lassen sich Impuls- und Energiesatz einfacher formulieren, wie weiter unten deutlich wird. Ein Nachteil ist, daß die Definitionen komplizierte Differentialgleichungen sind. Ist die Strömung bekannt ( $V^\alpha$  und  $v^\alpha$  bekannt), z.B. als Ergebnis einer Messung, dann ist es möglich, die Größen

$$\begin{aligned}
 (PV^{\bar{\alpha}}V^{\bar{\beta}})_{\text{ref } \Delta_{\alpha\beta}^2} &= \int_0^\delta (pV^{\bar{\alpha}}V^{\bar{\beta}} - \rho v^{\bar{\alpha}}v^{\bar{\beta}}) J du^3 \\
 (PV^{\bar{\beta}})_{\text{ref } \Delta_{\beta}^1} &= \int_0^\delta (pV^{\bar{\beta}} - \rho v^{\bar{\beta}}) J du^3 \\
 (\bar{E}V^{\bar{\beta}})_{\text{ref } \Delta_{\beta}^3} &= \int_0^\delta (\bar{E}V^{\bar{\beta}} - \bar{e}v^{\bar{\beta}}) J du^3
 \end{aligned} \tag{74}$$

die in (71), (72) und (73) auftreten, durch Integration zu ermitteln. Für einen Vergleich von Experiment und Theorie muß dann die Lösung der partiellen Differentialgleichungen mit Hilfe eines geeigneten numerischen Verfahrens vorgenommen werden. Dabei sind dann die  $\Delta \dots$  gegeben, die  $\hat{\delta} \dots$  zu ermitteln.

Für die oben eingeführten Größen  $\hat{\delta}$  (67) lauten die Differentialgleichungen (71), (72), (73) jetzt

$$\begin{aligned}
 [(PV^{\bar{\alpha}})_{\text{ref } \Delta_{\alpha}^1} - \hat{\delta}_{\alpha}^1]_{\parallel \bar{\alpha}} &= 0 \\
 [(PV^{\bar{\alpha}}V^{\bar{\beta}})_{\text{ref } \Delta_{\alpha\beta}^2} - \hat{\delta}_{\alpha\beta}^2]_{\parallel \bar{\beta}} &= 0 \\
 [(\bar{E}V^{\bar{\beta}})_{\text{ref } \Delta_{\beta}^3} - \hat{\delta}_e^3]_{\parallel \bar{\beta}} &= 0
 \end{aligned} \tag{75}$$

sogenannte [63] inhomogene lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung; sie sind nicht miteinander gekoppelt. Nach der allgemeinen Theorie dieser Gleichungen besteht prinzipiell keine Schwierigkeit für ihre Auflösung. Wir schreiben sie etwas um mit

$$a_1^\beta = (pV^{\bar{\alpha}})_{\text{ref}}$$

$$a_2^{\alpha\beta} = (pV^{\bar{\alpha}}V^{\bar{\beta}})_{\text{ref}}$$

$$a_3^\beta = (EV^{\bar{\beta}})_{\text{ref}}$$

$$b_1 = \frac{1}{J} (J(V^\beta p)_{\text{ref}})_{|\beta} + \overline{\left\{ \begin{matrix} \beta \\ \beta \lambda \end{matrix} \right\}} (pV^\lambda)_{\text{ref}}$$

$$b_3 = \frac{1}{J} (J(EV^\beta)_{\text{ref}})_{|\beta} + \overline{\left\{ \begin{matrix} \beta \\ \beta \lambda \end{matrix} \right\}} (EV^\lambda)_{\text{ref}} \quad (76)$$

$$b_2^{\alpha} = \frac{1}{J} (J(pV^{\bar{\alpha}}V^\beta)_{\text{ref}})_{|\beta} + \overline{\left\{ \begin{matrix} \beta \\ \beta \lambda \end{matrix} \right\}} (pV^{\bar{\alpha}}V^\lambda)_{\text{ref}} + \overline{\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \lambda \end{matrix} \right\}} (pV^\beta V^\lambda)_{\text{ref}}$$

$$c_1 = \frac{1}{J} (J(pV^\beta)_{\text{ref}} \Delta_{\beta 1})_{|\beta} + \overline{\left\{ \begin{matrix} \beta \\ \beta \lambda \end{matrix} \right\}} (pV^\lambda)_{\text{ref}} \Delta_{\lambda 1}$$

$$c_3 = \frac{1}{J} (J(EV^\beta)_{\text{ref}} \Delta_{\beta 3})_{|\beta} + \overline{\left\{ \begin{matrix} \beta \\ \beta \lambda \end{matrix} \right\}} (EV^\lambda)_{\text{ref}} \Delta_{\lambda 3}$$

$$c_2^{\alpha} = \frac{1}{J} (J(pV^{\bar{\alpha}}V^\beta)_{\text{ref}} \Delta_{\alpha\beta 2})_{|\beta} + \overline{\left\{ \begin{matrix} \beta \\ \beta \lambda \end{matrix} \right\}} (pV^{\bar{\alpha}}V^\lambda)_{\text{ref}} \Delta_{\alpha\lambda 2} + \\ + \overline{\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \lambda \end{matrix} \right\}} (pV^\beta V^\lambda)_{\text{ref}} \Delta_{\beta\lambda 2}$$

Damit hat man die Gleichungen in der Form

$$a_1^\beta \hat{\delta}_{1\beta} + b_1 \hat{\delta}_1 + c_1 = 0$$

$$a_2^{1\beta} \hat{\delta}_{12\beta} + b_2^1 \hat{\delta}_{12} + c_2^1 = 0$$

$$a_2^{2\beta} \hat{\delta}_{2\beta} + b_2^2 \hat{\delta}_2 + c_2^2 = 0$$

$$a_3^\beta \hat{\delta}_{e\beta} + b_3 \hat{\delta}_e + c_3 = 0$$

(77)

Die Integration jeder dieser partiellen linearen inhomogenen Differentialgleichungen läßt sich vollständig auf die Integration eines Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückführen. In einem  $u^1 - u^2 - \hat{\delta}$ -Raum läßt sich bekanntlich ein Vektorfeld definieren, das Richtungsfeld des Mongeschen Vektors

$$\{ a_{::1}, a_{::2}, b_{::} \hat{\delta}_{..} + c_{..} \}$$

Die Kurven, die die Feldlinien dieses Richtungsfeldes darstellen, sind die Charakteristiken, ihre Projektionen auf die  $u^1 - u^2$ -Ebene (des  $u^1 - u^2 - \hat{\delta}$ -Raumes!) heißen Grundcharakteristiken. Man erhält  $\hat{\delta}$  aus der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{d\hat{\delta}_{..}}{dt} = b_{::}(\tilde{u}^1(t), \tilde{u}^2(t)) \cdot \hat{\delta}_{..} + c(\tilde{u}^1(t), \tilde{u}^2(t))$$

Stellen  $\bar{E}$  bzw.  $\bar{E}$  die mechanische Energie dar, so schreiben wir  $\delta_3$  statt  $\delta_e$  und  $\hat{\delta}_3$  statt  $\hat{\delta}_e$ .

Die Grundcharakteristiken für jede der Gleichungen (77) sind zu ermitteln aus:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{u}_1^\alpha}{dt} &= a_1^\alpha & \frac{d\tilde{u}_{21}^\alpha}{dt} &= a_2^{1\alpha} \\ \frac{d\tilde{u}_{22}^\alpha}{dt} &= a_2^{2\alpha} & \frac{d\tilde{u}_3^\alpha}{dt} &= a_3^\alpha \end{aligned} \quad (78)$$

also ist durch die Strömungsrichtung der Referenzströmung (z.B. Strömung II auf der Körperoberfläche) das Richtungsfeld der Charakteristiken vorgegeben.

Die Lösungskurven  $\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2, \hat{\delta}_3$  sind mit geeigneten Charakteristikenverfahren zu ermitteln. In den Größen  $C..$  sind die Werte  $v^\alpha$  und  $q$  enthalten. Diese muß das Experiment liefern und, um das Charakteristikenverfahren durchführen zu können, muß eventuell zwischen den Punkten, an denen Geschwindigkeitsprofile gemessen werden (zweidimensional) interpoliert werden.

Einerseits lassen sich also aus Meßwerten mittels numerischer Verfahren die  $\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2$  und  $\hat{\delta}_3$  ausrechnen. Andererseits lassen sie sich, wie im nächsten Abschnitt angegeben, aus den Erhaltungssätzen theoretisch berechnen. Der Vergleich geschieht also auf der Ebene der Hilfsgrößen  $\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2$  und  $\hat{\delta}_3$ . Die eigentlichen Größen  $\delta_1, \delta_2$  und  $\delta_3$  brauchen für diesen Vergleich gar nicht ermittelt zu werden.

Differentialgleichungen der Art (75) bzw. (77) für integrale Grenzschichtparameter scheinen bisher noch nicht allgemein angegeben worden zu sein. Die Gleichung für die Verdrängungsdicke findet sich bei Sedney [66], der jedoch spezielle Annahmen bezüglich der Koordinaten macht. In seiner Gleichung ist  $\hat{\delta}_1$  eine quadratische Funktion von  $\delta_1$ . Moore [51] hat

schon 1952 eine ähnliche Gleichung angegeben, geht jedoch von Näherungen aus. Es sei noch auf das Buch von Loitsianski [42] und die Arbeiten von Lighthill [40] und Fanelop [26] verwiesen. Für den rotationssymmetrischen Fall ohne Längskrümmung hat Mayer [47] gewisse "wirkliche" Grenzschichtparameter angegeben, unter der Annahme

$V^1 = \text{const.}$ , in  $0 \leq u^3 \leq \delta$ . Allerdings wurde die übliche Definition für die Impulsverlustdicke im zweidimensionalen Fall gewählt;  $\hat{\delta}..$  ist eine quadratische Funktion von  $\delta..$  jeweils.

Für den Fall, daß  $V^\alpha$  im Bereich der Grenzschicht hinreichend konstant ist, um aus den Integralen  $\bar{E}$  herausziehen zu dürfen, kann man, wegen

$$\begin{aligned} \int_0^\delta (\rho V^\alpha v^\beta - \rho v^\alpha v^\beta) J du^3 &= \\ &= \int_0^\delta v^\beta (\rho V^\alpha - \rho v^\alpha) J du^3 + \\ &\quad + \int_0^\delta \rho v^\beta (V^\alpha - v^\alpha) J du^3 \quad (79) \\ &= \int_0^\delta v^\alpha (\rho V^\beta - \rho v^\beta) J du^3 + \int_0^\delta \rho v^\alpha (V^\beta - v^\beta) J du^3 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \int_0^\delta (\bar{E} v^\alpha - \bar{e} v^\alpha) J du^3 &= \\ &= \bar{E} \int_0^\delta (\rho V^\alpha - \rho v^\alpha) J du^3 + \int_0^\delta \rho v^\alpha (\bar{E} - \bar{e}) J du^3 \quad (80) \end{aligned}$$

und mit den Definitionen  $\overset{V}{\Delta}_{\alpha 1} = \overset{\Delta}{\Delta}_{\alpha 1}$

$$\begin{aligned} (pV^{\bar{\alpha}} V^{\bar{\beta}})_{\text{ref}} \overset{V}{\Delta}_{\alpha\beta 1} &= \int_0^{\delta} v^{\bar{\beta}} (pV^{\bar{\alpha}} - g v^{\bar{\alpha}}) J du^3 \\ (pV^{\bar{\alpha}} V^{\bar{\beta}})_{\text{ref}} \overset{V}{\Delta}_{\alpha\beta 2} &= \int_0^{\delta} g v^{\bar{\beta}} (V^{\bar{\alpha}} - v^{\bar{\alpha}}) J du^3 \\ (pV^{\bar{\alpha}} E)_{\text{ref}} \overset{V}{\Delta}_{\alpha\beta 3} &= \int_0^{\delta} g v^{\bar{\alpha}} (E - e) J du^3 \end{aligned} \quad (81)$$

die Gleichungen (75) für  $\hat{\delta}_{\alpha 2}$  und  $\hat{\delta}_3$  auch schreiben:

$$\begin{aligned} \left[ (pV^{\bar{\alpha}} V^{\bar{\beta}})_{\text{ref}} \left( \overset{V}{\Delta}_{\alpha\beta 1} + \overset{V}{\Delta}_{\alpha\beta 2} - \hat{\delta}_{\alpha 2} \right) \right]_{\parallel \bar{\beta}} &= 0 \\ \left[ (\bar{E} V^{\bar{\beta}})_{\text{ref}} (\bar{E} \Delta_1 + \Delta_3 - \hat{\delta}_3) \right]_{\parallel \bar{\beta}} &= 0 \end{aligned} \quad (82)$$

In vielen Arbeiten zur Theorie dreidimensionaler Grenzschichten, die in den letzten Jahren erschienen sind (z.B. [13], [45], [54], [79]), war es üblich, sofern überhaupt integrale Parameter definiert wurden, zwei Verdrängungsdicken

$$(pV^{\alpha})_{\text{ref}} \delta_{1\alpha} = \int (pV^{\alpha} - g v^{\alpha}) du^3$$

vier Impulsverlustdicken (meist  $\nu_{\alpha\beta}$  bezeichnet)

$$(pV^{\alpha} V^{\beta})_{\text{ref}} \delta_{2\alpha\beta} = \int g v^{\beta} (V^{\alpha} - v^{\alpha}) du^3$$

und zwei Energieverlustdicken

$$(EV^{\alpha})_{\text{ref}} \delta_{3\alpha} = \int g v^{\alpha} (E - e) du^3$$

zu definieren. Es entsprechen sich  $\delta_{3\alpha}$  und  $\overset{\vee}{\Delta}_{\alpha 3}$   
und  $\delta_{2\alpha\beta}$  und  $\overset{\vee}{\Delta}_{\alpha\beta 2}$ .

Diese Größen (im allgemeinen dreidimensionalen Fall also die  $\overset{\vee}{\Delta}..$ ) sind einfache Verallgemeinerungen unter Berücksichtigung der Krümmungsverhältnisse des zweidimensionalen Falles. Sie sind jedoch an sich nur Hilfsgrößen, eine eigentliche Bedeutung als Verdrängungsdicke von Massen-, Impuls- oder Energiefluß kommt ihnen bei echt dreidimensionalen Grenzschichten nicht zu.

Für den rotationssymmetrischen Fall ohne Längskrümmung sind die Grenzschichtparameter schon früh durch einen Geometriefaktor verbessert worden [23], [58], [82], [83], [84], der dem Faktor  $\mathcal{J}$  äquivalent ist, der hier verwendet wird.

9. Formulierung integraler Gleichungen für Grenzschichten an gekrümmten Wänden

A. Die Impulsgleichungen

I. Herleitung und Diskussion

Wir gehen aus von den Gleichungen für die laminare und turbulente Grenzschicht:

$$\begin{aligned} \rho v^{\bar{\alpha}}_{,t} + \rho (v^{\bar{\alpha}}_{,||\bar{\beta}} v^{\bar{\beta}} + v^{\bar{\alpha}}_{,13} v^3) &= \\ &= -\rho^{\bar{\alpha}} + \frac{1}{J} (J\tau^{\bar{\alpha}3})_{,13} \end{aligned} \quad (83)$$

$$\rho v^{\bar{\beta}}_{,||\bar{\mu}} v^{\bar{\mu}} = -\rho^{\bar{\beta}} + \frac{1}{J} (J\tau^{\bar{\beta}3})_{,13} \quad (84)$$

und der Kontinuitätsgleichung

$$\rho_{,t} + (\rho v^{\bar{\gamma}})_{,||\bar{\gamma}} + \frac{1}{J} (J\rho v^3)_{,13} = 0 \quad (85)$$

D.h., turbulente Normalspannungen sind vernachlässigt. Die Gleichungen sind im laminaren und turbulenten Fall in erster Näherung gültig für Krümmungen mit  $k < O(1/\delta)$ , vgl. (55).

Multipliziert man die tangentialen Bewegungsgleichungen mit  $J$ , die Kontinuitätsgleichung mit  $Jv^{\bar{\alpha}}$  und addiert, so erhält man:

$$J(\rho v^{\bar{\alpha}})_{,t} + J(\rho v^{\bar{\alpha}} v^{\bar{\beta}})_{,||\bar{\beta}} + (J\rho v^{\bar{\alpha}} v^3)_{,13} = -J\rho^{\bar{\alpha}} + (J\tau^{\bar{\alpha}3})_{,13}$$

oder (A.188):

$$J(\rho v^{\bar{\alpha}})_{,t} + (J\rho v^{\bar{\alpha}} v^{\bar{\beta}})_{,||\bar{\beta}} + (J\rho v^{\bar{\alpha}} v^3)_{,13} = -J\rho^{\bar{\alpha}} + (J\tau^{\bar{\alpha}3})_{,13}$$

Hierin muß  $p^{12}$  ersetzt werden. Aus (84) erhält man durch Integration:

$$P_\delta - P_0 = - \int_0^\delta \rho b_{\bar{v}\bar{u}} v^{\bar{v}} v^{\bar{u}} du^3 + \int_0^\delta \frac{1}{J} (\tau^{33} J)_{,3} du^3$$

Für eine hypothetische zähigkeitsfreie Strömung, die bis an den Körper (die Wand) reicht, kann man schreiben:

$$P_\delta - P_0 = - \int_0^\delta \rho b_{\bar{v}\bar{u}} v^{\bar{v}} v^{\bar{u}} du^3$$

Wir nehmen nun an, in guter Näherung sei erfüllt:

$$P_\delta = P_0 \quad (87)$$

d.h. die zähigkeitsfreie, bis zur Wand reichende Strömung hat auf der Fläche  $u^3 = \delta$  (in dem Normalkoordinatensystem) gerade die Druckverteilung, die die wirkliche Strömung (mit im Bereich  $u^3 \geq \delta$  vernachlässigbarer Zähigkeit) bei Vorhandensein der Grenzschicht auf dieser Fläche ( $u^3 = \delta$ ) aufweist. Diese Näherung wird um so besser erfüllt sein, je geringer die Grenzschichtdicke ist und je geringer der Einfluß der Krümmung auf die hypothetische Strömung ist, d.h., je geringer der Unterschied zwischen  $P_0$  und  $P_\delta$  ist.

Aus (84) erhalten wir

$$P - P_0 = \int_0^{u^3} \rho b_{\bar{v}\bar{u}} v^{\bar{v}} v^{\bar{u}} du^3 + \int_0^{u^3} \frac{1}{J} (J \tau^{33})_{,3} du^3$$

Faßt man zusammen, so kann man schreiben:

$$\begin{aligned}
 p = P_0 + \int_0^\delta b \bar{v} \bar{u} (P V^{\bar{v}} V^{\bar{u}} - g v^{\bar{v}} v^{\bar{u}}) du^3 + \\
 + \int_0^{u^3} g b \bar{v} \bar{t} v^{\bar{v}} v^{\bar{t}} du^3 \\
 - \int_{u^3}^\delta \frac{1}{J} (J \tau^{33})_{13} du^3
 \end{aligned} \tag{88}$$

und für die Ableitung  $p^{1\bar{\alpha}}$  erhält man  $P_0^{1\bar{\alpha}}$  und die Ableitungen der angegebenen Integrale. Diese Ableitungen können bei starken Änderungen der Krümmung ( $\Delta$  groß) Werte annehmen, die in die Größenordnung der Glieder der tangentialen Bewegungsgleichungen kommen. Die Integration bringt jedoch einen Faktor  $\delta$  in der Größenordnung. Es sei also angenommen, daß in erster Näherung  $p^{1\bar{\alpha}} = P_0^{1\bar{\alpha}}$  gesetzt werden kann. Erst recht also kann  $p^{1\alpha} = P^{1\alpha}$  angesehen werden.

Für die Außenströmung gilt:

$$J(PV^{\bar{\alpha}})_{1t} + J(PV^{\bar{\alpha}}V^{\bar{\beta}})_{1\bar{\beta}} + (JPV^{\bar{\alpha}}V^3)_{13} = -JP^{1\bar{\alpha}}$$

oder (A.188):

(89)

$$J(PV^{\bar{\alpha}})_{1t} + (JPV^{\bar{\alpha}}V^{\bar{\beta}})_{1\bar{\beta}} + (JPV^{\bar{\alpha}}V^3)_{13} = -JP^{1\bar{\alpha}}$$

Zieht man die Gleichungen (86) von den Gleichungen (89) ab, so erhält man

$$\begin{aligned}
 (PV^{\bar{\alpha}} - g v^{\bar{\alpha}})_{1t} J + (PV^{\bar{\alpha}}V^{\bar{\beta}} - g v^{\bar{\alpha}}v^{\bar{\beta}})_{1\bar{\beta}} J + \\
 + [(PV^{\bar{\alpha}}V^3 - g v^{\bar{\alpha}}v^3) J]_{13} = \\
 = - (P^{1\bar{\alpha}} - p^{1\bar{\alpha}}) J - (J \tau^{\bar{\alpha}3})_{13}
 \end{aligned} \tag{90}$$

Wir formen um

$$(pV^{\bar{\alpha}}v^{\bar{\beta}} - qv^{\bar{\alpha}}v^{\bar{\beta}})_{||\bar{\beta}} J =$$

$$\left[ (pV^{\bar{\alpha}}v^{\bar{\beta}} - qv^{\bar{\alpha}}v^{\bar{\beta}}) J \right]_{||\bar{\beta}} - J_{|\bar{\beta}} (pV^{\bar{\alpha}}v^{\bar{\beta}} - qv^{\bar{\alpha}}v^{\bar{\beta}})$$

Letzteres Glied ist nun, wenn die Änderung der Krümmung nicht zu stark ist ( $\Delta < O(1/\delta)$ ), vernachlässigbar. An Orten starker Krümmungsänderung (Krümmungssprünge) ist diese Vernachlässigung nicht zulässig.

Nun wird über  $u^3$  von 0 bis  $\delta$  integriert und man hat:

$$\int_0^\delta (pV^{\bar{\alpha}} - qv^{\bar{\alpha}})_{||\bar{\beta}} J du^3 + \left[ \int_0^\delta (pV^{\bar{\alpha}}v^{\bar{\beta}} - qv^{\bar{\alpha}}v^{\bar{\beta}}) J du^3 \right]_{||\bar{\beta}} =$$

$$= -\tau_{\bar{\alpha}^3}^{\bar{\alpha}^3} \quad (91)$$

Dabei ist verwendet worden, daß für  $u^3 = \delta$  gilt  $pV^{\bar{\alpha}}v^{\bar{\beta}} = qv^{\bar{\alpha}}v^{\bar{\beta}}$  und  $\tau_{\bar{\alpha}^3}^{\bar{\alpha}^3} = 0$  und für  $u^3 = 0$  gilt  $J=1$  und  $v^{\bar{\beta}} = v^{\bar{\beta}} = 0$ .  $\tau_{\bar{\alpha}^3}^{\bar{\alpha}^3}$  bezeichnet den Wert  $\tau_{\bar{\alpha}^3}^{\bar{\alpha}^3}(u^3=0)$ . Die kovariante Flächenableitung kann aus dem Integral herausgezogen werden, da der Integrand an der oberen Grenze verschwindet und die untere Grenze konstant ist. Außerdem ist

$$\int_0^\delta (P^{|\bar{\alpha}} - p^{|\bar{\alpha}}) J du^3 = 0$$

gesetzt worden.

Mit (74) und (75) wird aus (88)

$$\left[ (PV^\alpha)_{\text{ref}} \hat{\delta}_1 \right]_{\text{it}} + \left[ (PV^\alpha V^\beta)_{\text{ref}} \hat{\delta}_2 \right]_{\parallel \bar{\beta}} = -\tau_0^{\bar{\alpha}3} \quad (92)$$

eine formal recht einfache Gleichung für die Größen  $\hat{\delta}_2$ .  
 Im stationären Fall sind die Gleichungen sogar dann völlig entkoppelt, wenn  $\tau_0^{\bar{1}3}$  nicht von  $\hat{\delta}_2$  oder  $\hat{\delta}_1$  und wenn  $\tau_0^{\bar{2}3}$  nicht von  $\hat{\delta}_2$  oder  $\hat{\delta}_1$  abhängt.  
 Diese Entkoppelung ist zwar mathematisch ein großer Vorteil, physikalisch ist jedoch so lange nichts gewonnen, wie keine geeigneten Ausdrücke für  $\tau_0^{\bar{1}3}$  und  $\tau_0^{\bar{2}3}$  vorliegen, oder Angaben über das Verhältnis dieser beiden Größen zueinander. Für die Wandschubspannung turbulenter Grenzschichten ist man aber noch immer darauf angewiesen, empirisch Gesetzmäßigkeiten aufzufinden, und hierfür liegen, für echt dreidimensionale Grenzschichten, noch nicht genügend Messungen vor.

Im stationären Fall liegt also ein Differentialgleichungssystem folgender Form vor:

$$\hat{a}^{11} \hat{\delta}_{211} + \hat{a}^{12} \hat{\delta}_{212} + \hat{b}^1 \hat{\delta}_2 + \hat{c}^1 = 0 \quad (93)$$

$$\hat{a}^{21} \hat{\delta}_{211} + \hat{a}^{22} \hat{\delta}_{212} + \hat{b}^2 \hat{\delta}_2 + \hat{c}^2 = 0$$

mit

$$\hat{a}^{\alpha\beta} = (PV^\alpha V^\beta)_{\text{ref}}$$

$$\hat{c}^\alpha = \tau_0^{\bar{\alpha}3} \quad (94)$$

$$\hat{b}^\alpha = \left[ (PV^\alpha V^\beta)_{\text{ref}} \right]_{\parallel \bar{\beta}}$$

Hier ist noch einmal anzumerken, daß  $\hat{\delta}_2$  zwar eine zweikomponentige Größe ist, aber erst  $\rho V^{\infty} \hat{\delta}_2$  ein Flächenvektor ist,  $\hat{\delta}_3$  allein also als Skalar betrachtet werden kann.

In der angeschriebenen Form läßt sich über den Charakter der Differentialgleichungen nichts aussagen. Es kommt auf die funktionelle Form von  $\hat{C}^{\alpha} = \tau_0^{\infty 3}$  an. Im turbulenten Fall gilt es, wie gesagt, durch Messungen genügend experimentelles Material zu sammeln, um empirische Gesetze entwickeln zu können. Im laminaren Fall ist bis zur angegebenen Größenordnung der Krümmung zu setzen:

$$\tau_0^{\infty 3} = \frac{1}{Re} 2 H(v^{\infty 13})_0 \quad (95)$$

Da in der Literatur eine Definition der Impulsverlustdicke verwendet wird, die der hier gegebenen Definition einer Impulsverdrängungsdicke nicht äquivalent ist, können die integralen Beziehungen hier nicht als Verallgemeinerungen von bisher behandelten Spezialfällen angesehen und mit diesen ohne weiteres verglichen werden.

Trotzdem seien einige Arbeiten erwähnt:

Millikan legte 1931 ein integrales Verfahren vor [49], welches die Begriffe Verdrängungsdicke bzw. Verlustdicke nicht explizit benutzt. Für das Geschwindigkeitsprofil wird ein Potenzansatz gemacht. Messungen an Luftschiffmodellen [44] bestätigten die Brauchbarkeit des Verfahrens. Mayer [47] hat Beziehungen angegeben, welche unter Verwendung der Energiegleichung den Fall dicker Grenzschichten an Zylindern oder in Rohren erfaßt.

Das Verfahren von Wieghardt [82] benutzt Impuls- und Energiesatz und berücksichtigt Quer- und Längskrümmung. Es ist für dünne laminare Grenzschichten gültig, für die Hartree-Profilе angesetzt wurden. Die von Walz [79] angegebenen Verfahren für dünne Grenzschichten benutzen auch im rotationssymmetrischen Fall empirische Beziehungen, die im wesentlichen aus Messungen in ebenen Strömungen erhalten wurden. Sie haben sich gut bewährt. Rotta [61] gibt ein Verfahren zweiter Ordnung an für ebene und achsensymmetrische Hyperschallströmung mit Längskrümmung. Es wird ein leicht abgewandeltes Pohlhausen-Profil für die Geschwindigkeit angesetzt. Eckert [23] berücksichtigt in seinem Verfahren nur die Querkrümmung und nimmt die Grenzschicht als dünn an. Sain [62] betrachtet einen Spezialfall mit dicker Grenzschicht (turbulent) am Rotationskörper. Johnston [34] hat echt dreidimensionale dünne Grenzschichten behandelt. Er benutzt Profile nach Vorschlägen von Prandtl [57] und Mager [45] und arbeitet mit einem orthogonalen Koordinatensystem. Myring [54] läßt beliebige Koordinaten in der Fläche zu, macht aber auch die Annahme der dünnen Grenzschicht und setzt Profile für die Geschwindigkeit in Richtung der Außenströmung und für den "cross-flow" an.

## II. Vergleich mit der zweidimensionalen Theorie

Es ist interessant, Gleichung (91) mit der entsprechenden Gleichung der zweidimensionalen Theorie zu vergleichen. Nach [85] z.B. hat man ( $v^2 = 0$  im zweidimensionalen Fall)

$$v^1_{it} + v^1 v^1_{11} + v^3 v^1_{13} = -\frac{1}{g} p_{11} + \left(\frac{\tilde{t}}{g}\right)_{13} \quad (96)$$

Man setzt dann üblicherweise:

$$-\frac{1}{g} p_{11} = v^1_{it} + v^1 v^1_{11} \quad (97)$$

Genauer und zweifellos nicht falsch ist aber

$$-\frac{1}{g} p_{11} = v^1_{it} + v^1 v^1_{11} + v^3 v^1_{13} \quad (98)$$

Weiterhin gilt wegen

$$\begin{aligned} v^1_{11} + v^3_{13} &= 0 \\ \text{auch } v^1 v^1_{11} + v^1 v^3_{13} &= 0 \end{aligned} \quad (99)$$

Letzteres und der Ausdruck für  $-1/g p_{11}$  nach (97) führt, in (96) eingesetzt, auf

$$v^1_{it} - v^1_{it} + v^1 v^1_{11} - 2 v^1 v^1_{11} - (v^1 v^3)_{13} = -\left(\frac{\tilde{t}}{g}\right)_{13} \quad (100)$$

Es muß aber ebenso gelten

$$\begin{aligned} v^1_{11} + v^3_{13} &= 0 \\ \text{und also} & \\ v^1 v^1_{11} + v^1 v^3_{13} &= 0 \end{aligned} \quad (101)$$

Dies letztere und  $-1/\varrho p_{11}$  nach (98) führt, in (96) eingesetzt, auf:

$$V^1_{1t} - v^1_{1t} + 2V^1 v^1_{11} - 2v^1 v^1_{11} + (V^1 v^3 - v^1 v^3)_{13} = \left(\frac{\tau}{\varrho}\right)_{13} \quad (102)$$

(102) und (100) sind also an und für sich gleichberechtigt. Integriert man diese Gleichungen, so führt (102) auf

$$\left[ \int_0^\delta (V^1 - v^1) du^3 \right]_{1t} + \left[ \int_0^\delta ((V^1)^2 - (v^1)^2) du^3 \right]_{11} = \frac{\tau_0}{\varrho_0} \quad (103)$$

eine Gleichung, die in ihrem Aufbau mit (91) identisch ist. (Es ist auch hier angenommen, daß keine Ausblasung, Absaugung oder Ablation stattfindet.) Gleichung (100) jedoch führt bekanntlich auf:

$$\begin{aligned} & \left[ \int_0^\delta (V^1 - v^1) du^3 \right]_{1t} + \\ & + \left[ \int_0^\delta (V^1 v^1_{11} - 2v^1 v^1_{11}) du^3 \right] - [v^1 v^3]_0^\delta = \frac{\tau_0}{\varrho_0} \end{aligned} \quad (104)$$

Es ist erst diese Form, die es nahelegt, die Aufspaltung

$$\begin{aligned} & \int_0^\delta (V^1 v^1_{11} - 2v^1 v^1_{11}) du^3 = \\ & = \left[ \int_0^\delta v^1 (V^1 - v^1) du^3 \right]_{11} + V^1_{11} \int_0^\delta (V^1 - v^1) du^3 \\ & \quad - V^1_{11} \int_0^\delta v^1_{11} du^3 \end{aligned} \quad (105)$$

vorzunehmen. Nur auf diese Weise kommt der als Impuls-  
verlustdicke bekannte Ausdruck

$$\int_0^{\delta} v^1 (v^1 - v^1) du^3$$

in die Bewegungsgleichungen hinein. Die Anwendung von (99),  
aber Nichtanwendung von (101) ist hierfür offenbar der  
einzige Grund. Wir haben gesehen, daß physikalische Über-  
legungen nur auf eine Impulsverdrängungsdicke gemäß  
Gleichung (66), allenfalls auf eine Impulsverlustdicke  
gemäß Gleichung (69), führen.

### III. Verallgemeinerungen

Bei starker Krümmung bzw. dicker Grenzschicht ist statt von (83) auszugehen von:

$$\begin{aligned} & \varrho (v^{\bar{\alpha}}{}_{it} + v^{\bar{\alpha}}{}_{||\bar{\beta}} v^{\bar{\beta}} + v^{\bar{\alpha}}{}_{i3} v^3 - b^{\bar{\alpha}}{}_{\bar{\nu}} v^{\bar{\nu}} v^3) = \\ & = -p^{\bar{\alpha}} + \frac{1}{J} (J \tau^{\bar{\alpha}3})_{,3} + b^{\bar{\alpha}}{}_{\bar{\nu}} \tau^{\bar{\nu}3} \end{aligned} \quad (106)$$

Die Elimination von  $v^3$  ist hier stark erschwert. Man findet als Impulsgleichung dann statt (91)

$$\begin{aligned} & \left[ \int_0^{\delta} (\rho v^{\bar{\alpha}} - \varrho v^{\bar{\alpha}}) J du^3 \right]_{it} - \\ & - \int_0^{\delta} b^{\bar{\alpha}}{}_{\bar{\nu}} \left( \int_0^{u^3} \rho_{it} J du^3 v^{\bar{\nu}} - \int_0^{u^3} \varrho_{it} J du^3 v^{\bar{\nu}} \right) du^3 \\ & + \int_0^{\delta} (\rho v^{\bar{\alpha}} v^{\bar{\beta}} - \varrho v^{\bar{\alpha}} v^{\bar{\beta}})_{||\bar{\beta}} J du^3 \\ & - \int_0^{\delta} b^{\bar{\alpha}}{}_{\bar{\nu}} \left( \int_0^{u^3} (\rho v^{\bar{\nu}})_{||\bar{\gamma}} J du^3 v^{\bar{\nu}} - \int_0^{u^3} (\varrho v^{\bar{\nu}})_{||\bar{\gamma}} J du^3 v^{\bar{\nu}} \right) du^3 \\ & = -\tau_0^{\bar{\alpha}3} - \int_0^{\delta} b^{\bar{\alpha}}{}_{\bar{\nu}} \tau^{\bar{\nu}3} J du^3 \end{aligned} \quad (107)$$

eine Gleichung, deren Behandlung größte Schwierigkeiten bereiten dürfte, insbesondere da nun der Verlauf von  $\tau^{\bar{\nu}3}$  über die Grenzschichtdicke oder eine Näherung für den letzten Term auf der rechten Seite benötigt wird.

B. Die Gleichung für die mechanische Energie

Indem wir Gleichung (21) mit  $v_{\bar{x}}$  überschieben, Gleichung (22) mit  $v^3$  und Gleichung (20) mit  $\frac{1}{2} v^{\bar{x}} v_{\bar{x}} + \frac{1}{2} v^3 v_3 = \frac{1}{2} v^i v_i$  multiplizieren und die drei erhaltenen Beziehungen addieren, finden wir:

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \frac{1}{2} \rho v^i v_i \right)_{it} \right] J + \left[ \left( \frac{1}{2} \rho v^i v_i v^{\bar{\beta}} \right)_{\parallel \bar{\beta}} + \frac{1}{J} \left( \frac{1}{2} \rho v^i v_i v^3 J \right)_{i3} \right] J \\ & = -J (v^{\bar{x}} p_{i\bar{x}} + v^3 p_{i3}) + v^i \tau_i^j{}_{\parallel j} \end{aligned} \quad (108)$$

Zur Abkürzung wurde  $v^i \tau_i^j{}_{\parallel j}$  geschrieben und nicht nach Tangential- und Normalkomponenten aufgespalten.

Für die Außenströmung gilt:

$$\rho (V_{\bar{x}it} + V_{\bar{x}\parallel \bar{\beta}} V^{\bar{\beta}} + V_{\bar{x}i3} V^3 - b_{\bar{x}\bar{v}} V^{\bar{v}} V^3) = -P_{i\bar{x}} \quad (109)$$

$$\rho (V_{3it} + V_{3i\bar{\beta}} V^{\bar{\beta}} + V_{3i3} V^3 + b_{\bar{\mu}\bar{v}} V^{\bar{\mu}} V^{\bar{v}}) = -P_{i3} \quad (110)$$

Bilden wir hiermit  $-J (v^{\bar{x}} p_{i\bar{x}} + v^3 p_{i3})$  und subtrahieren davon (108), so ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \left[ v^{\bar{x}} \rho V_{\bar{x}it} + v^3 \rho V_{3it} - \left( \frac{1}{2} \rho v^i v_i \right)_{it} \right] \\ & + \left[ v^{\bar{x}} \rho V_{\bar{x}\parallel \bar{\beta}} V^{\bar{\beta}} + v^3 \rho V_{3\bar{\beta}} V^{\bar{\beta}} - \left( \frac{1}{2} \rho v^i v_i v^{\bar{\beta}} \right)_{\parallel \bar{\beta}} \right] J \\ & + \left[ \rho v^{\bar{x}} V_{\bar{x}i3} V^3 + \rho v^3 V_{3i3} V^3 - \frac{1}{J} \left( \frac{1}{2} \rho v^i v_i v^3 J \right)_{i3} \right] J \\ & - b_{\bar{\mu}\bar{v}} \left[ \rho v^{\bar{\mu}} V^{\bar{v}} V^3 - \rho v^3 V^{\bar{\mu}} V^{\bar{v}} \right] J \\ & = - \left[ v^{\bar{x}} (P_{i\bar{x}} - P_{i\bar{x}}) + v^3 (P_{i3} - P_{i3}) \right] J - v^i \tau_i^j{}_{\parallel j} \end{aligned} \quad (111)$$

Es werden einige Umformungen vorgenommen:

$$\begin{aligned} v^i p V_{iit} &= p v^i V_{iit} - g v^i V_{iit} + g v^i V_{iit} + p v^i V_{iit} \\ &= V_{iit} [v^i (p-g) - (p v^i - g v^i)] + \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} p v^i V_i\right)_{it} - \frac{1}{2} v^i V_i p_{it} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^i p V_{i\bar{i}\bar{\beta}} V^{\bar{\beta}} &= p v^i V_{i\bar{i}\bar{\beta}} V^{\bar{\beta}} - g v^i V_{i\bar{i}\bar{\beta}} V^{\bar{\beta}} - p v^i V_{i\bar{i}\bar{\beta}} V^{\bar{\beta}} \\ &\quad + g v^i V_{i\bar{i}\bar{\beta}} V^{\bar{\beta}} + p v^i V_{i\bar{i}\bar{\beta}} V^{\bar{\beta}} \\ &= V_{i\bar{i}\bar{\beta}} V^{\bar{\beta}} [v^i (p-g) - (p v^i - g v^i)] + \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} p v^i V_i V^{\bar{\beta}}\right)_{\bar{i}\bar{\beta}} - \frac{1}{2} v^i V_i (p V^{\bar{\beta}})_{\bar{i}\bar{\beta}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^i p V_{i13} V^3 &= p v^i V_{i13} V^3 - g v^i V_{i13} V^3 - p v^i V_{i13} V^3 + \\ &\quad + g v^i V_{i13} V^3 + p v^i V_{i13} V^3 \\ &= V_{i13} V^3 [v^i (p-g) - (p v^i - g v^i)] + \\ &\quad + \frac{1}{J} \left(\frac{1}{2} p v^i V_i V^3 J\right)_{13} - \frac{1}{2} v^i V_i \frac{1}{J} (J p V^3)_{13} \end{aligned}$$

$$v^i p V^{\bar{\beta}} v^j = v^i v^j V^{\bar{\beta}} - v^j V^{\bar{\beta}} (v^i - v^i)$$

Eingesetzt bleibt:

$$\begin{aligned}
 & \left[ \left( \frac{1}{2} \rho v^i v_i - \frac{1}{2} \rho v^i v_i \right)_{,t} + v_{it} v^i (\rho - \rho) - v_{it} (\rho v^i - \rho v^i) \right] J \\
 & + \left[ \left( \frac{1}{2} \rho v^i v_i v^{\bar{\beta}} - \frac{1}{2} \rho v^i v_i v^{\bar{\beta}} \right)_{,t} \right. \\
 & \quad \left. + v_{i\bar{\beta}} v^{\bar{\beta}} v^i (\rho - \rho) - v_{i\bar{\beta}} v^{\bar{\beta}} (\rho v^i - \rho v^i) \right] J \\
 & + \left[ \left[ \left( \frac{1}{2} \rho v^i v_i v^3 - \frac{1}{2} \rho v^i v_i v^3 \right) J \right]_{,3} \frac{1}{J} \right. \\
 & \quad \left. + v_{i3} v^3 v^i (\rho - \rho) - v_{i3} v^3 (\rho v^i - \rho v^i) \right] J \\
 & + b_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \left[ \rho v^3 v^{\bar{\nu}} (v^{\bar{\mu}} - v^{\bar{\mu}}) - \rho v^{\bar{\mu}} v^{\bar{\nu}} (v^3 - v^3) \right] J \\
 & + \left[ v^z (P_{1z} - p_{1z}) + v^3 (P_{13} - p_{13}) \right] J \\
 & = - v^i \tau_i^j{}_{||j}
 \end{aligned}
 \tag{112}$$

Diese Gleichung ist von 0 bis  $\delta$  über  $u^3$  zu integrieren. Im allgemeinen wird man  $P_{i\bar{\alpha}} \approx p_{i\bar{\alpha}}$  annehmen und  $v^3 (P_{13} - p_{13})$  auch vernachlässigen. Im inkompressiblen Fall verschwinden die drei Terme mit  $(\rho - \rho)$ .

Es wird wieder

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta} \left( \frac{1}{2} \rho v^i v_i v^{\bar{\beta}} - \frac{1}{2} g v^i v_i v^{\bar{\beta}} \right)_{\parallel \bar{\beta}} J du^3 &= \\ &= \left[ \int_0^{\delta} \left( \frac{1}{2} \rho v^i v_i v^{\bar{\beta}} - \frac{1}{2} g v^i v_i v^{\bar{\beta}} \right) J du^3 \right]_{\parallel \bar{\beta}} \\ &\quad - \int_0^{\delta} \left( \frac{1}{2} \rho v^i v_i v^{\bar{\beta}} - \frac{1}{2} g v^i v_i v^{\bar{\beta}} \right) J_{\parallel \bar{\beta}} du^3 \end{aligned}$$

berücksichtigt und letzteres Integral vernachlässigt.  
Das entspricht also der Annahme: Änderung der Krümmung  
 $\Delta < 1/\delta$  . Man erhält:

$$\begin{aligned} &\left[ \int_0^{\delta} \left( \frac{1}{2} \rho v^i v_i - \frac{1}{2} g v^i v_i \right) J du^3 \right]_{it} \\ &+ \int_0^{\delta} v_{it} v^i (\rho - g) J du^3 - \int_0^{\delta} v_{it} (\rho v^i - g v^i) J du^3 \\ &+ \left[ \int_0^{\delta} \left( \frac{1}{2} \rho v^i v_i v^{\bar{\beta}} - \frac{1}{2} g v^i v_i v^{\bar{\beta}} \right) J \right]_{\parallel \bar{\beta}} \quad (113) \\ &+ \int_0^{\delta} v_{i\bar{\mu}\bar{\beta}} v^{\bar{\beta}} v^i (\rho - g) J du^3 - \int_0^{\delta} v_{i\bar{\mu}\bar{\beta}} v^{\bar{\beta}} (\rho v^i - g v^i) J du^3 \\ &+ \int_0^{\delta} v_{i3} v^3 v^i (\rho - g) J du^3 - \int_0^{\delta} v_{i3} v^3 (\rho v^i - g v^i) J du^3 \\ &+ \int_0^{\delta} b_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \left[ \rho v^3 v^{\bar{\nu}} (v^{\bar{\mu}} - v^{\bar{\mu}}) - \rho v^{\bar{\mu}} v^{\bar{\nu}} (v^3 - v^3) \right] J du^3 \\ &= - \int_0^{\delta} v^i \tau_{ij} du^3 \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist sehr allgemein. Die Funktion auf der rechten Seite ist nur im laminaren Fall bekannt. In ihr ist der Einfluß der Krümmung enthalten. Im turbulenten Fall ist man auf empirische Zusammenhänge für diesen Term angewiesen, wie in der zweidimensionalen Theorie.

Betrachten wir den Fall, daß  $k \leq O(1)$  ist. Dann ist  $v^3$  vernachlässigbar ( $v^3 = O(\delta)$ ). Wir nehmen dies auch von  $V^3$  und von  $V_{z13}$  an. Nehmen wir weiterhin noch an, daß  $V_{z1t}$ ,  $V_{z1\bar{\beta}} V^{\bar{\beta}}$  und  $V_{z13} V^3$  aus den Integralen herausgezogen werden dürfen, so bleibt:

$$\begin{aligned}
 & \left[ \int_0^\delta \left( \frac{1}{2} \rho V^{\bar{z}} V_{\bar{z}} - \frac{1}{2} \rho v^{\bar{z}} v_{\bar{z}} \right) J du^3 \right]_{it} \\
 & + (V_{z1t})_{ref} (\rho V^{\bar{z}})_{ref} [\hat{\delta}_g - \hat{\delta}_1] \\
 & + \left[ (\bar{E} V^{\bar{\beta}})_{ref} \hat{\delta}_3 \right]_{\bar{\beta}} + (V_{z1\bar{\beta}} V^{\bar{\beta}})_{ref} (\rho V^{\bar{z}})_{ref} [\hat{\delta}_g - \hat{\delta}_1] \\
 & = - \int_0^\delta v^i \tau_i^j{}_{||j} du^3 \tag{114}
 \end{aligned}$$

Mit

$$(\rho V^{\bar{z}})_{ref} \hat{\delta}_g = \int_0^\delta v^{\bar{z}} (\rho - \rho) J du^3$$

als sogenannter Dichteverlustdicke.

Für den stationären inkompressiblen Fall bleibt:

$$\begin{aligned}
 & \left[ (\bar{E} V^{\bar{\beta}})_{ref} \hat{\delta}_3 \right]_{\bar{\beta}} - (V_{z1\bar{\beta}} V^{\bar{\beta}} \rho V^{\bar{z}})_{ref} \hat{\delta}_1 \\
 & = - \int_0^\delta v^i \tau_i^j{}_{||j} du^3 \tag{115}
 \end{aligned}$$

## Anhang

### Zur Geometrie der Schichten und Schalen

#### Zusammenstellung einiger wichtiger Beziehungen

Unter einer Schicht oder Schale wollen wir einen Bereich des dreidimensionalen Raumes verstehen, der durch zwei Flächen begrenzt wird und der dadurch gekennzeichnet ist, daß der Abstand dieser Flächen klein ist gegenüber der Ausdehnung der begrenzenden Flächen. Es bleibt dabei offen, ob der Bereich und die Flächen sich ins Unendliche erstrecken oder ob im Endlichen eine weitere Begrenzung auftritt, ob die Flächen sich an Punkten oder Randkurven berühren oder ob es sich gar um zwei ineinander enthaltene in sich geschlossene Flächen handelt, die Schale also wieder in sich zurückkehrt und außer den beiden Flächen keine weitere Berandung hat. Der Abstand der beiden Flächen wird als Schicht- oder Schalendicke angesprochen.

Handelt es sich in der Statik um eine Schale, so ist meist die Geometrie beider Berandungsflächen bekannt, und es wird das Verhalten des Kontinuums, welches die Schale ausfüllt, untersucht, wenn von außen Belastungen einwirken. Ist die Belastung so stark, daß endliche Deformationen hervorgerufen werden, so ändert sich selbstverständlich auch die Geometrie (Beulung).

Handelt es sich um Strömungsgrenzschichten an einer Wand, so ist die Geometrie dieser Wandfläche meist gegeben, die zweite Berandungsfläche aber unbekannt; ihre Lage ist zu finden in Abhängigkeit von der (zähigkeitsfreien) Außenströmung, der Wandgeometrie und den inneren Strömungsgesetzmäßigkeiten (laminar oder turbulent, stationär oder instationär, kompressibel oder inkompressibel) der Grenzschicht.

Die Geometrie der Schalen und Schichten legt es nahe, zu ihrer Beschreibung ein Koordinatensystem zu wählen, das sich auf eine geeignet zu wählende Fläche bezieht. Bei einer Schale wird es z.B. eine passend auszusuchende mittlere Fläche oder eine der Randflächen vor der Deformation sein, bei einer Strömungs- oder Temperatur-Grenzschicht wird es die Wandfläche sein.

Um eine Grenzschicht an einer beliebig gekrümmten Fläche zu behandeln, insbesondere dann, wenn ihre Dicke nicht mehr als klein angesehen werden kann, muß ein gewisser Formelapparat bemüht werden. Dieser steht größtenteils zur Verfügung und ist in gängigen Lehrbüchern der Differentialgeometrie und der Tensoranalysis zu finden. Der Schwerpunkt bei der Anwendung auf Schichten oder Schalen liegt aber auf der Darstellung von Operatoren der Tensoranalysis in einem Koordinatensystem, welches an dem gekrümmten Unterraum Wandfläche orientiert ist. Da es nicht möglich war, die benötigten Formeln in einem oder einigen wenigen Büchern oder Arbeiten zu finden, so wird in diesem Anhang noch einmal eine Zusammenstellung gegeben, wobei einige Beziehungen, in der Form jedenfalls, neu sein dürften.

Es wurden die im Verzeichnis unter den Nummern [1], [10], [20], [25], [29], [39], [46], [55], [56], [63], [65], [75], [81] stehenden Bücher oder Arbeiten herangezogen und die Beziehungen in einer konsequenten Tensorschreibweise angegeben.

Im gesamten Raum sei zunächst ein cartesisches Koordinatensystem zugrunde gelegt. Die Fläche, die als Bezugsfläche dienen soll, werde beschrieben durch den Ortsvektor

$$x^I = x^I(u^1, u^2) \quad (\text{A.1})$$

$u^1$  und  $u^2$  sind die gewählten Flächenkoordinaten, und  $x^I$  ist also als Funktion von diesen gegeben.

Die Basisvektoren auf der Fläche sind daher:

$$a_{\alpha}^I = x^I_{|\alpha} \quad (A.2)$$

Da der Raum euklidisch ist und wir ein cartesisches Koordinatensystem gewählt haben, ist der Maßtensor des Raumes der Einheitstensor und es ist  $a_{\alpha}^I = a_{I\alpha}$ . Die Maßbestimmung auf der Fläche hingegen ist gegeben durch den Fundamental-

$$a_{\alpha\beta} = a_{\alpha}^I a_{I\beta} \quad (A.3)$$

Für ihn gilt

$$a_{\alpha\beta} = a_{(\alpha\beta)}, \quad a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha} \quad (A.4)$$

Mittels

$$a_{\alpha\beta} a^{\beta\gamma} = \delta_{\alpha}^{\gamma} \quad (A.5)$$

wird  $a^{\beta\gamma}$  definiert und schließlich noch

$$a = \det(a_{\alpha\beta}) \quad (A.6)$$

Für  $a^{\beta\gamma}$  gilt entsprechend

$$a^{\alpha\beta} = a^{(\alpha\beta)}, \quad a^{\alpha\beta} = a^{\beta\alpha} \quad (A.7)$$

und man kann definieren:

$$a^{I\alpha} = a^{\alpha\nu} a^I_{\nu} \quad (A.8)$$

Wir führen die relativen Tensoren  $e^{ijk}$ ,  $e^{\alpha\beta}$  und  $e_{ijk}$ ,  $e_{\alpha\beta}$  ein mittels

$$e^{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \alpha\beta = 12 \\ -1 & \text{" } \alpha\beta = 21 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (A.9)$$

$$e^{ijk} = e_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } ijk = 123 \text{ oder } 312 \text{ oder } 231 \\ -1 & \text{" } ijk = 321 \text{ " } 132 \text{ " } 213 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (A.10)$$

Für die Fläche definieren wir die absoluten Tensoren

$$\varepsilon_{\alpha\bar{\beta}} = \sqrt{a} \ e_{\alpha\beta} \quad , \quad \varepsilon^{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = (\sqrt{a})^{-1} e^{\alpha\beta} \quad (\text{A.11})$$

Für den dreidimensionalen euklidischen Raum mit seinem cartesischen Koordinatensystem ist, wie schon gesagt, der Maßtensor der Einheitstensor, seine Determinante also gleich 1 und es gilt also:

$$\varepsilon_{IJK} = e_{ijk} \quad (\text{A.12})$$

$$\varepsilon^{IJK} = e^{ijk} \quad (\text{A.13})$$

Auf der Fläche läßt sich noch

$$\varepsilon_{\alpha}^{\bar{\beta}} = \varepsilon_{\alpha\bar{\nu}} a^{\nu\beta} = a_{\alpha\nu} \varepsilon^{\bar{\nu}\bar{\beta}} \quad (\text{A.14})$$

$$\varepsilon^{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = a^{\alpha\nu} \varepsilon_{\bar{\nu}\bar{\beta}} = a_{\beta\nu} \varepsilon^{\bar{\alpha}\bar{\nu}} \quad (\text{A.15})$$

definieren, im Raum entsprechend

$$\varepsilon^{IJK}, \varepsilon^{IJ}{}^K, \varepsilon^I{}^{JK}, \varepsilon_{IJK}, \varepsilon_{IJ}{}^K, \varepsilon_{I}{}^{JK} \quad (\text{A.16})$$

Wir sehen, daß

$$\varepsilon^{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = -\varepsilon^{\bar{\beta}\bar{\alpha}} \quad , \quad \varepsilon_{\alpha\bar{\beta}} = -\varepsilon_{\bar{\beta}\alpha} \quad (\text{A.17})$$

$$\varepsilon_{\alpha}^{\bar{\beta}} = -\varepsilon^{\bar{\beta}}{}_{\alpha}$$

und entsprechend

$$\varepsilon^{IJK} = -\varepsilon^{JIK} \quad , \quad \text{u.s.w.} \quad (\text{A.18})$$

Wir können identifizieren

$$e^{\alpha\beta} = e^{\alpha\beta\gamma} = e^{\gamma\alpha\beta} = -e^{\alpha\gamma\beta} \quad (\text{A.19})$$

$$e_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta\gamma} = e_{\gamma\alpha\beta} = -e_{\alpha\gamma\beta} \quad (\text{A.20})$$

Es gilt der sogenannte Entwicklungssatz:

$$e^{\alpha\bar{\nu}} e_{\bar{\beta}\bar{\nu}} = e^{\alpha\nu} e_{\beta\nu} = \delta_{\beta}^{\alpha} \quad (\text{A.21})$$

$$e^{IJK} e_{LMK} = e^{ijk} e_{lmk} = \delta_L^I \delta_M^J - \delta_M^I \delta_L^J \quad (\text{A.22})$$

Wir führen ein

$$\delta_{\lambda\mu}^{\alpha\beta} = e^{\alpha\bar{\beta}} e_{\bar{\lambda}\bar{\mu}} = e^{\alpha\beta} e_{\lambda\mu} \quad (\text{A.23})$$

und sehen, daß gilt:

$$\delta_{\lambda\beta}^{\alpha\beta} = \delta_{\lambda}^{\alpha} \quad (\text{A.24})$$

$$\delta_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} = 2 \quad (\text{A.25})$$

Weiterhin läßt sich schreiben:

$$\det(T^{\alpha}_{\beta}) = \frac{1}{2} \delta_{\rho\sigma}^{\mu\nu} T^{\bar{\rho}}_{\bar{\mu}} T^{\bar{\sigma}}_{\bar{\nu}} \quad (\text{A.26})$$

und

$$T[\alpha\bar{\beta}] = \frac{1}{2} (T^{\alpha\bar{\beta}} - T^{\bar{\beta}\alpha}) = \frac{1}{2} \delta_{\lambda\mu}^{\alpha\beta} T^{\bar{\lambda}\bar{\mu}} \quad (\text{A.27})$$

Es gelten die Beziehungen

$$\delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta} T^{\bar{\mu}}_{\bar{\alpha}} = \delta_{\nu}^{\beta} T^{\bar{\alpha}}_{\bar{\alpha}} - T^{\bar{\beta}}_{\bar{\nu}} \quad (\text{A.28})$$

d.h.

$$\delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = \delta_{\nu}^{\beta} \delta_{\mu}^{\alpha} - \delta_{\mu}^{\beta} \delta_{\nu}^{\alpha}$$

Weiterhin seien folgende Formeln zusammengestellt:

$$\det(T^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}}) \delta_{\bar{\lambda}}^{\bar{\alpha}} = \delta_{\bar{\rho}\bar{\sigma}}^{\bar{\mu}\bar{\nu}} T^{\bar{\rho}}_{\bar{\lambda}} T^{\bar{\sigma}}_{\bar{\nu}} \quad (\text{A.29})$$

$$e^{\alpha\bar{\lambda}} e_{\bar{\beta}\bar{\mu}} + e^{\alpha\bar{\mu}} e_{\bar{\beta}\bar{\lambda}} = 2a^{\alpha\beta} a^{\lambda\mu} - a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} - a^{\alpha\mu} a^{\beta\lambda} \quad (\text{A.30})$$

$$e^{\bar{\beta}\bar{\mu}} a_{\mu\alpha} e^{\bar{\alpha}\bar{\nu}} a_{\nu\beta} = -\delta_{\nu}^{\beta} \quad (\text{A.31})$$

In einem krummlinigen Koordinatensystem ergibt die einfache Differentiation einer tensoriellen Größe (Vektor, Tensor zweiter Stufe usw.), nicht wieder eine tensorielle Größe einer um eins höheren Stufe, da die Basisvektoren nicht (räumlich) konstant sind, sondern bei einer Ableitung nach den Koordinaten eine Änderung erfahren, die berücksichtigt werden muß. Die sogenannten Übertragungen in dem Koordinatensystem (hier also der Fläche) oder Christoffel-Symbole geben diese Änderung an. Sie sind definiert durch

$$a^{\text{I}\alpha}{}_{|\beta} = - \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \gamma \end{array} \right\} a^{\text{I}\gamma} \quad (\text{A.33})$$

d.h. 
$$\left\{ \begin{array}{c} \gamma \\ \alpha \beta \end{array} \right\} = a^{\text{I}\gamma} a_{\text{I}\alpha|\beta} \quad (\text{A.34})$$

$$[\alpha\beta, \gamma] = a_{\gamma\nu} \left\{ \begin{array}{c} \nu \\ \alpha \beta \end{array} \right\} = a^{\text{I}\gamma} a_{\text{I}\alpha|\beta} \quad (\text{A.35})$$

und es gilt offensichtlich:

$$[\alpha\beta, \gamma] = [\beta\alpha, \gamma], \quad \left\{ \begin{array}{c} \gamma \\ \alpha \beta \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \gamma \\ \beta \alpha \end{array} \right\} \quad (\text{A.36})$$

Es ist

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \gamma \end{array} \right\} = \frac{1}{2} a^{\alpha\nu} (a_{\beta\nu|\gamma} - a_{\gamma\nu|\beta} - a_{\beta\gamma|\nu}) \quad (\text{A.37})$$

Es wird nun für die Fläche die sogenannte kovariante Ableitung eingeführt,

$$\begin{aligned} & T_{\bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_r}^{\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_q} = \\ & = T_{\bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_r}^{\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_q} - \sum_m \left\{ \begin{array}{c} \nu \\ \beta_m \gamma \end{array} \right\} T_{\bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_{m-1} \bar{\nu} \bar{\beta}_{m+1} \dots \bar{\beta}_r}^{\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_q} + \sum_n \left\{ \begin{array}{c} \alpha_n \\ \nu \gamma \end{array} \right\} T_{\bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_r}^{\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_{n-1} \bar{\nu} \bar{\alpha}_{n+1} \dots \bar{\alpha}_q} \end{aligned}$$

Speziell also:

$$T_{\parallel\alpha} = T_{\perp\alpha}$$

$$T_{\bar{z}\parallel\beta} = T_{\bar{z}\perp\beta} - \left\{ \begin{matrix} \bar{v} \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} T_{\bar{v}}$$

$$T_{\bar{z}\parallel\beta} = T_{\bar{z}\perp\beta} + \left\{ \begin{matrix} \bar{\alpha} \\ v\beta \end{matrix} \right\} T_{\bar{v}}$$

$$T_{\bar{z}\bar{\beta}\parallel\gamma} = T_{\bar{z}\bar{\beta}\perp\gamma} - \left\{ \begin{matrix} \bar{v} \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} T_{\bar{v}\bar{\beta}} - \left\{ \begin{matrix} \bar{\mu} \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\} T_{\bar{z}\bar{\mu}}$$

$$T_{\bar{z}\bar{\beta}\parallel\gamma} = T_{\bar{z}\bar{\beta}\perp\gamma} + \left\{ \begin{matrix} \bar{\alpha} \\ v\gamma \end{matrix} \right\} T_{\bar{v}\bar{\beta}} - \left\{ \begin{matrix} \bar{\mu} \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\} T_{\bar{z}\bar{\mu}}$$

$$T_{\bar{z}\bar{\beta}\parallel\gamma} = T_{\bar{z}\bar{\beta}\perp\gamma} + \left\{ \begin{matrix} \bar{\alpha} \\ v\gamma \end{matrix} \right\} T_{\bar{v}\bar{\beta}} + \left\{ \begin{matrix} \bar{\beta} \\ \mu\gamma \end{matrix} \right\} T_{\bar{z}\bar{\mu}}$$

In einem Raum einer bestimmten Dimensionszahl, der in einen Raum höherer Dimensionszahl eingebettet ist, läßt sich ein zu jenem orthogonaler Komplementärraum definieren. Im Falle einer Fläche im dreidimensionalen Raum ist das die Normale. Sie ist definiert durch:

$$n_I = n^I = \frac{1}{2} \epsilon^{IJK} \epsilon^{\bar{z}\bar{\beta}} a_{J\alpha} a_{K\beta} \quad (\text{A.39})$$

Die Krümmungseigenschaften der Fläche werden durch ihren zweiten Haupttensor  $b_{\alpha\beta}$  beschrieben. Seine Definition:

$$b_{\alpha\beta} = n_I a^I_{\alpha\parallel\beta} \quad (\text{A.40})$$

d.h.

$$b_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon_{IJK} \epsilon^{\bar{g}\bar{h}} a^I_{\alpha\parallel\beta} a^J_{\bar{g}} a^K_{\bar{h}}$$

Man sieht sofort:

$$b_{\alpha\beta} = b_{(\alpha\beta)} \quad , \quad b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha} \quad (A.41)$$

Es gilt:

$$b_{\alpha\beta} = - a^{\mathbb{I}}_{\alpha} n_{\mathbb{I}\beta} \quad (A.42)$$

und die Formel von Weingarten

$$n^{\mathbb{I}}_{\alpha} = - b_{\alpha\nu} a^{\mathbb{I}\nu} \quad (A.43)$$

Obwohl ein Flächentensor, ist  $b_{\alpha\beta}$ , schon aufgrund seiner Definition, auf den umgebenden Raum bezogen. Trotz seiner Symmetrie könnte eigentlich nur einer seiner Indizes mit einem Querstrich versehen werden, ohne daß man jedoch angeben könnte, welcher. Daher wird hier  $b_{\alpha\nu}$  geschrieben und die Bezeichnung  $b_{\bar{\alpha}\nu}$  für einen anderen Zweck, s.u., reserviert. Bei  $a_{\alpha\beta}$ , (ein reiner Flächentensor), wurde sowieso schon auf die Querstriche verzichtet.

Die Definition

$$b^{\alpha}_{\beta} = a^{\alpha\nu} b_{\nu\beta} \quad (A.44)$$

ist also sinnvoll, nicht aber  $b^{\alpha\beta} = a^{\alpha\nu} b_{\nu\mu} a^{\mu\beta}$ . Auch ist  $T^{\bar{\alpha}} b_{\alpha\beta} T^{\bar{\beta}}$  kein richtig gebildeter Skalar, wohl aber  $T^{\bar{\alpha}} b_{\alpha\beta} T^{\bar{\beta}}$ . Mit anderen Worten:  $b_{\alpha\beta} T^{\bar{\beta}}$  ist ein Flächenvektor. Ist es notwendig,  $T^{\bar{\beta}}$  in seiner auf die Fläche versetzten Form  $T^{\bar{\beta}}$  zu benutzen, so ist zu schreiben  $b_{\alpha\beta} s^{\bar{\beta}}_{\bar{\nu}} T^{\bar{\nu}}$ . Zur Abkürzung werden definiert

$$b_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = s^{\bar{\nu}}_{\bar{\alpha}} b_{\nu\beta} \quad , \quad b^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}} = s^{\bar{\nu}}_{\bar{\beta}} b^{\alpha}_{\nu} \quad (A.45)$$

die damit natürlich von  $u^3$  abhängig sind. (Wir schreiben  $b^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}}$ , da  $b^{\alpha}_{\beta} = b_{\beta}^{\alpha}$  ist! Desgleichen  $b^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}}$ .)

Mit Hilfe von  $b_{\bar{\rho}}^{\alpha}$  werden die beiden Skalare

$$H = \frac{1}{2} b_{\alpha}^{\alpha} \quad (\text{A.46})$$

die mittlere Krümmung und

$$K = \frac{1}{2} \delta_{\gamma\nu}^{\alpha\beta} b_{\alpha}^{\gamma} b_{\beta}^{\nu} = \det(b_{\mu}^{\gamma}) \quad (\text{A.47})$$

definiert, die Gaußsche Krümmung. Es gelten die Beziehungen:

$$\varepsilon^{\bar{\lambda}\bar{\alpha}} b_{\alpha\beta} \varepsilon^{\bar{\beta}\bar{\gamma}} b_{\gamma\mu} = -K \delta_{\mu}^{\lambda} \quad (\text{A.48})$$

$$\delta_{\lambda\mu}^{\alpha\beta} b_{\alpha}^{\lambda} b_{\beta}^{\mu} = b_{\alpha}^{\alpha} b_{\beta}^{\beta} - b_{\mu}^{\beta} b_{\beta}^{\mu} \quad (\text{A.49})$$

$$K \delta_{\beta}^{\alpha} = 2H b_{\beta}^{\alpha} - b_{\alpha}^{\beta} b_{\beta}^{\alpha} \quad (\text{A.50})$$

$$2K = 4H^2 - b_{\alpha}^{\beta} b_{\beta}^{\alpha} \quad (\text{A.51})$$

Ist auf der Fläche durch

$$u^{\alpha} = u^{\alpha}(s)$$

eine Kurve gegeben, so lautet der (Einheits-)Tangentenvektor (an Fläche und Kurve)

$$\lambda^{\bar{I}} = a^{\bar{I}}_{\nu} \lambda^{\bar{\nu}}$$

mit

$$\lambda^{\bar{\nu}} = u^{\nu}_{,s} = \frac{du^{\nu}}{ds}$$

Die Vektorkrümmung (Querkrümmung) der Kurve ist definiert

$$\alpha^{\bar{I}} = \frac{d\lambda^{\bar{I}}}{ds}$$

(Bezüglich Längskrümmung in bestimmten Räumen vgl. [75] )

Mit (A.33) folgt

$$\varkappa^I = \left[ \frac{d\lambda^{\bar{\nu}}}{ds} + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} \lambda^{\bar{\alpha}} \lambda^{\bar{\beta}} \right] a^I_{\nu} + b_{\alpha\beta} \lambda^{\bar{\alpha}} \lambda^{\bar{\beta}} n^I$$

Damit folgt als Ausdruck für die Normalkrümmung einer Kurve auf einer Fläche

$$\varkappa_n = \varkappa^I n_I = b_{\alpha\beta} \lambda^{\bar{\alpha}} \lambda^{\bar{\beta}} \quad (\text{A.52})$$

Die Hauptkrümmungen sind definiert als die Lösungen  $\nu = \varkappa_1$  bzw.  $\nu = \varkappa_2$  der Säkulargleichung

$$\det(b_{\beta}^{\alpha} - \nu \delta_{\beta}^{\alpha}) = \frac{1}{2} \delta_{\gamma\nu}^{\alpha\beta} (b_{\alpha}^{\gamma} - \nu \delta_{\alpha}^{\gamma})(b_{\nu}^{\beta} - \nu \delta_{\nu}^{\beta}) = 0 \quad (\text{A.53})$$

Umgeschrieben lautet diese Gleichung

$$\nu^2 - 2H\nu + K = 0 \quad (\text{A.53})$$

Die Bezeichnung Hauptkrümmungen ist gerechtfertigt, da ja gerade  $\varkappa_1, \varkappa_2$  den auf Diagonalgestalt transformierten Tensor  $b^{\alpha}_{\beta}$  darstellen. Nach [75] sind aber gerade die Diagonalelemente eines Tensors  $T^{\alpha}_{\beta}$  gleich den "physikalischen Komponenten", die ja die "richtige" Dimension haben, unabhängig davon, welche Dimensionen die Koordinaten (und somit auch Fundamentaltensor, Haupttensor) haben. Bei symmetrischen Tensoren sind außerdem linke und rechte physikalische Komponenten gleich. Die Hauptkrümmungen  $\varkappa_1, \varkappa_2$  haben also die Dimension reziproker Längen, und es gilt für die Hauptkrümmungsradien

$$R_1 = -\frac{1}{\varkappa_1} \quad R_2 = -\frac{1}{\varkappa_2} \quad (\text{A.54})$$

wobei die Vorzeichen der Regel entsprechen, daß der Krümmungsradius als positiv angesehen wird, wenn der entsprechende

Krümmungsmittelpunkt auf der Seite der Fläche liegt, in die die Normale nicht weist.

Schließlich gilt noch

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 = 2H \quad (\text{A.55})$$

$$\varkappa_1 \cdot \varkappa_2 = K \quad (\text{A.56})$$

Zu jedem der beiden  $\varkappa$  liefert die Gleichung

$$\left( b_{\beta}^{\alpha} - \varkappa \delta_{\beta}^{\alpha} \right) \lambda_{\alpha} = 0 \quad (\text{A.57})$$

einen Vektor  $\lambda_{\alpha}$ , die Hauptkrümmungsrichtung. Das Feld der Hauptkrümmungsrichtungen bestimmt die Krümmungslinien auf der Fläche.

Wir betrachten nun wieder den Schichtraum oder Schalenraum. Seine Punkte sollen in einem der gegebenen Bezugsfläche angepaßten Koordinatensystem beschrieben werden. Wir wählen ein sogenanntes Normalsystem, bei dem die dritte Achse mit der Flächennormalen zusammenfällt und für welches, für Punkte auf der Fläche, die Basisvektoren mit denen des Flächenkoordinatensystems zusammenfallen. Ist  $x^I(u^1, u^2)$  der Ortsvektor zu dem Fußpunkt der Flächennormalen durch den Raumpunkt  $x^I$  der Schicht oder Schale, so ist

$$x^I = x^I(u^1, u^2) + u^3 \cdot n^I(u^1, u^2) \quad (\text{A.58})$$

Wir finden sofort als Basisvektoren in diesem System

$$g^I_{\alpha} = x^I_{,\alpha} = a^I_{\alpha} + n^I_{,\alpha} \cdot u^3 \quad (\text{A.59})$$

$$g^I_3 = x^I_{,3} = n^I \quad (\text{A.60})$$

und sehen, daß effektiv für  $u^3=0$ ,  $g^I_\alpha = a^I_\alpha$  ist.  
 $u^3=0$  ist also die Gleichung der Bezugsfläche in diesem Koordinatensystem  $u^1, u^2, u^3$ . Wegen (A.43) gilt

$$g^I_\alpha = a^I_\nu (\delta^\nu_\alpha - u^3 b^\nu_\alpha) \quad (\text{A.59a})$$

Mit der Definition

$$s^{\bar{\nu}}_\alpha = \delta^\nu_\alpha - u^3 b^\nu_\alpha \quad (\text{A.61})$$

führen wir einen Tensor ein, der von zwei Raumpunkten abhängt: dem Punkt im Schalenraum  $(u^1, u^2, u^3)$  und dem auf der Fläche  $(u^1, u^2)$ . Er ist ein Doppeltensor (im Sinne von [25]), symmetrisch, und entsprechend seinem Charakter mit einem überstrichenen und einem nicht überstrichenen Index versehen.  $s^{\bar{\nu}}_\alpha$  heißt Shifter oder Versetzer. Er stellt gemäß

$$g^I_\alpha = a^I_\nu s^{\bar{\nu}}_\alpha \quad (\text{A.62})$$

den Zusammenhang zwischen Flächentensoren und Tensoren im Schichtraum her.

Wir definieren  $s^{\bar{\alpha}}_{\bar{\nu}}$  mittels

$$s^{\bar{\nu}}_\alpha s^{\bar{\alpha}}_{\bar{\nu}} = \delta^\beta_\alpha \quad (\text{A.63})$$

und außerdem

$$J = \det(s^{\bar{\nu}}_\alpha) = \frac{1}{2} \delta^{\alpha\beta}_{\mu\nu} s^{\bar{\mu}}_\alpha s^{\bar{\nu}}_\beta \quad (\text{A.64})$$

Dann ist

$$J = 1 - 2Hu^3 + K(u^3)^2 \quad (\text{A.65})$$

und

$$s^{\bar{\beta}}_{\bar{\nu}} = \frac{1}{J} \left[ \delta^\beta_\nu + u^3 (b^\beta_\nu - 2H\delta^\beta_\nu) \right] \quad (\text{A.66})$$

Nun kann man schreiben

$$a^I_\alpha = s^{\bar{\nu}}_\alpha g^I_\nu \quad (\text{A.67})$$

Für die Maßbestimmung finden wir als Fundamentaltensor

$$g_{\alpha\beta} = g^I_{\alpha} g_{I\beta} = s^{\bar{v}}_{\alpha} a_{v\mu} s^{\bar{u}}_{\beta} \quad (\text{A.68})$$

$$g_{\alpha 3} = g_{3\alpha} = 0 \quad (\text{A.69})$$

$$g_{33} = 1 \quad (\text{A.70})$$

Für  $g_{33}$  könnte an sich noch ein beliebiger Faktor  $g_{33} = g_{33}(u^1, u^2)$  [66] zur Streckung oder Stauchung der Koordinate  $u^3$  eingeführt werden, da man nicht gezwungen ist,  $g_{33} = u^I u_I$  zu nehmen. Im Falle der Grenzschicht kann etwa  $\sqrt{Re}$  als Faktor gewählt werden.

Man definiert wieder  $g^{jk}$  mit

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k \quad (\text{A.71})$$

und

$$g = \det(g_{ij}) \quad (\text{A.72})$$

und findet:

$$J = \sqrt{\frac{g}{a}} \quad (\text{A.73})$$

Schließlich gilt explizit

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + u^3 \cdot 2b_{\alpha\beta} + (u^3)^2 c_{\alpha\beta} \quad (\text{A.74})$$

mit

$$c_{\alpha\beta} = b_{\alpha}^{\nu} b_{\nu\beta} = b_{\alpha\mu} a^{\mu\nu} b_{\nu\beta} \quad (\text{A.75})$$

Natürlich ist:

$$a_{\alpha\beta} = s^{\bar{v}}_{\alpha} g_{v\mu} s^{\bar{u}}_{\beta} \quad (\text{A.76})$$

Mit  $g^{ij}$  läßt sich definieren

$$g^{Ij} = g^{jl} g^I_l \quad (\text{A.77})$$

Mit den Versetzern  $s_{\bar{\nu}}^{\beta}$  und  $s_{\bar{\mu}}^{\alpha}$  ist der Zusammenhang zwischen beliebigen Raumtensoren im Schicht- bzw. Schalenraum und Flächentensoren für den Fall eines Normalkoordinatensystems bekannt.

Aus

$$\begin{aligned} T_{\bar{\alpha}} a^{I\alpha} + T_{\bar{3}} n^I &= T^{\bar{\alpha}} a_{\bar{\alpha}}^I + T^{\bar{3}} n^I \\ &= T_{\alpha} g^{I\alpha} + T_3 g^{I3} = T^{\alpha} g_{\alpha}^I + T^3 g^{I3} \end{aligned}$$

erhält man:

$$\begin{aligned} T_{\alpha} &= s_{\alpha}^{\bar{\nu}} T_{\bar{\nu}} & T_{\bar{\alpha}} &= s_{\bar{\alpha}}^{\nu} T_{\nu} \\ T^{\alpha} &= s_{\bar{\nu}}^{\alpha} T^{\bar{\nu}} & T^{\bar{\alpha}} &= s_{\bar{\nu}}^{\alpha} T^{\nu} \\ T_3 &= T_{\bar{3}} & T_{\bar{3}} &= T_3 \\ T^3 &= T_{\bar{3}} & T^{\bar{3}} &= T^3 \end{aligned} \quad (A.78)$$

Die entsprechenden Formeln für Tensoren 2. Stufe:

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} &= s_{\alpha}^{\bar{\nu}} s_{\beta}^{\bar{\mu}} T_{\bar{\nu}\bar{\mu}} & T_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} &= s_{\bar{\alpha}}^{\nu} s_{\bar{\beta}}^{\mu} T_{\nu\mu} \\ T^{\alpha\beta} &= s_{\bar{\nu}}^{\alpha} s_{\bar{\mu}}^{\beta} T^{\bar{\nu}\bar{\mu}} & T^{\bar{\alpha}\bar{\beta}} &= s_{\bar{\nu}}^{\alpha} s_{\bar{\mu}}^{\beta} T^{\nu\mu} \\ T^{\alpha}_{\beta} &= s_{\bar{\nu}}^{\alpha} s_{\bar{\beta}}^{\bar{\mu}} T^{\bar{\nu}}_{\bar{\mu}} & T^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}} &= s_{\bar{\nu}}^{\alpha} s_{\bar{\beta}}^{\bar{\mu}} T^{\nu}_{\bar{\mu}} \\ T^{\alpha 3} &= s_{\bar{\nu}}^{\alpha} T^{\bar{\nu} 3} & T^{\bar{\alpha} \bar{3}} &= s_{\bar{\nu}}^{\alpha} T^{\nu 3} \\ T_{\alpha 3} &= s_{\bar{\nu}}^{\alpha} T_{\bar{\nu} 3} & T_{\bar{\alpha} \bar{3}} &= s_{\bar{\nu}}^{\alpha} T_{\nu 3} \\ T^{\alpha}_{\ 3} &= s_{\bar{\nu}}^{\alpha} T^{\bar{\nu}}_{\ 3} & T^{\bar{\alpha}}_{\ \bar{3}} &= s_{\bar{\nu}}^{\alpha} T^{\nu}_{\ 3} \\ T^{3\alpha} &= s_{\bar{\nu}}^{\alpha} T^{3\bar{\nu}} & T^{\bar{3}\bar{\alpha}} &= s_{\bar{\nu}}^{\alpha} T^{3\nu} \\ T_{3\alpha} &= s_{\bar{\nu}}^{\alpha} T_{3\bar{\nu}} & T_{\bar{3}\bar{\alpha}} &= s_{\bar{\nu}}^{\alpha} T_{3\nu} \\ T^3_{\ \alpha} &= s_{\bar{\nu}}^{\alpha} T^3_{\ \bar{\nu}} & T^{\bar{3}}_{\ \bar{\alpha}} &= s_{\bar{\nu}}^{\alpha} T^3_{\ \nu} \\ T^{33} &= T_{33} = T^3_{\ 3} = T_{\bar{3}\bar{3}} = T^{\bar{3}\bar{3}} = T^3_{\ \bar{3}} = T_{\bar{3}}^{\bar{3}} \end{aligned} \quad (A.79)$$

Die Versetzer müßten eigentlich mit  $s_{\bar{z}}^i$  und  $s_i^{\bar{z}}$  bezeichnet werden. In einem Normalkoordinatensystem sind die Größen  $s_{\bar{z}}^3$  und  $s_3^{\bar{z}}$  jedoch = 0. Die allgemeinen Definitionen

$$s_{\bar{z}}^i = a_{\alpha}^I g_I^i \quad (\text{A.80})$$

und

$$s_i^{\bar{z}} = a_{I}^{\bar{z}} g^I_i \quad (\text{A.81})$$

zeigen dies sofort. In einem allgemeinen System gilt die Beziehung

$$a^{\alpha\beta} s_{\bar{z}}^i s_{\bar{\beta}}^j = g^{ij} \quad (\text{A.82})$$

und

$$g_{ij} a^{\alpha\beta} s_{\bar{z}}^i s_{\bar{\beta}}^j = 2 \quad (\text{A.83})$$

Die entsprechende Überlegung wie im krummlinigen Koordinatensystem der Fläche führt auch im Normalkoordinatensystem (und in jedem anderen krummlinigen System) des Raumes auf die Definition der Christoffel-Symbole:

$$g^{Ij}{}_{ik} = - \left\{ \begin{matrix} j \\ ki \end{matrix} \right\} g^{Ii} \quad (\text{A.85})$$

d.h.  $\left\{ \begin{matrix} l \\ jk \end{matrix} \right\} = g_I^l g_{jik}^I \quad (\text{A.86})$

$$[j k, l] = g_{lm} \left\{ \begin{matrix} m \\ jk \end{matrix} \right\} = g^I_l g_{Ijk} \quad (\text{A.87})$$

und es gilt offensichtlich:

$$[jk, l] = [kj, l] \quad (\text{A.88})$$

$$\left\{ \begin{matrix} l \\ jk \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} l \\ kj \end{matrix} \right\}$$

Als kovariante Ableitung im Raum wird nun definiert:

$$T_{j_1 \dots j_r \ \underline{m} k}^{i_1 \dots i_q} = T_{j_1 \dots j_r \ \underline{l} k}^{i_1 \dots i_q} - \sum_m \left\{ \begin{matrix} l \\ j m k \end{matrix} \right\} T_{j_1 \dots j_{m-1} \ \underline{l} j_{m+1} \dots j_r}^{i_1 \dots i_q} \\ + \sum_n \left\{ \begin{matrix} i n \\ l k \end{matrix} \right\} T_{j_1 \dots j_n \ \underline{l} i_{n+1} \dots i_q}^{i_1 \dots i_{n-1} \ \underline{l} i_{n+1} \dots i_q}$$

Speziell also

$$\begin{aligned} T_{\underline{m} i} &= T_{i i} \\ T_{i \ \underline{m} j} &= T_{i j} - \left\{ \begin{matrix} k \\ i j \end{matrix} \right\} T_k \\ T_{\underline{m} j}^i &= T_{i j} + \left\{ \begin{matrix} i \\ k j \end{matrix} \right\} T^k \\ T_{i j \ \underline{m} k} &= T_{i j k} - \left\{ \begin{matrix} l \\ i k \end{matrix} \right\} T_{i j} - \left\{ \begin{matrix} l \\ j k \end{matrix} \right\} T_{i l} \\ T_{j \ \underline{m} k}^i &= T_{j i k} + \left\{ \begin{matrix} i \\ l k \end{matrix} \right\} T_{j l} - \left\{ \begin{matrix} l \\ j k \end{matrix} \right\} T_{i l} \\ T_{\underline{m} k}^{i j} &= T_{i j k} + \left\{ \begin{matrix} i \\ l k \end{matrix} \right\} T^{l j} + \left\{ \begin{matrix} j \\ l k \end{matrix} \right\} T_{i l} \end{aligned}$$

Man beachte: Die Flächentensoren (Indizes mit Querstrich) haben zwar keine  $u^3$ -Komponente, können jedoch ohne weiteres Funktionen von  $u^3$  sein. Umgekehrt kann natürlich auch die  $u^3$ -Komponente eines räumlichen Tensors (im Normalkoordinatensystem) unabhängig von  $u^3$  sein. Da die  $a_{\alpha\beta}$ ,  $a^{\alpha\beta}$  nur von  $u^1, u^2$  abhängen, so sind auch die  $[\alpha, \beta, \gamma], \{\alpha\beta\}$  unabhängig von  $u^3$  und tragen einen Querstrich insgesamt, da sie sich auf die Flächenmetrik beziehen. Es sei daran erinnert, daß die Übertragungen, also die Christoffel-Symbole erster und zweiter Art keine Tensoren sind. Daher sollen sie auch nicht durch einen Kernbuchstaben mit Indizes dargestellt werden [1].

Um einen Zusammenhang zwischen der kovarianten Flächenableitung und der kovarianten (Schicht- oder Schalen-)Raum-Ableitung zu erhalten, muß erst einmal ein Zusammenhang zwischen

den auf die beiden Metriken ( $a_{\alpha\beta}$  und  $g_{ij}$ ) bezogenen Christoffel-Symbolen zweiter Art angegeben werden:

$$\left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha \beta \end{matrix} \right\} = \overline{\left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha \beta \end{matrix} \right\}} + s_{\alpha}^{\gamma} s_{\alpha\beta}^{\bar{\nu}} \quad (\text{A.90})$$

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta 3 \end{matrix} \right\} = -s_{\bar{\nu}}^{\alpha} b_{\beta}^{\nu} \quad (\text{A.91})$$

$$\left\{ \begin{matrix} 3 \\ \alpha \beta \end{matrix} \right\} = s_{\alpha}^{\bar{\nu}} b_{\nu\beta} \quad (\text{A.92})$$

$$\left\{ \begin{matrix} 3 \\ \alpha 3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 3 \alpha \end{matrix} \right\} = 0 \quad (\text{A.93})$$

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ 3 3 \end{matrix} \right\} = 0 \quad (\text{A.94})$$

$$\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 3 3 \end{matrix} \right\} = 0 \quad (\text{A.95})$$

Für  $u^3 = 0$  gilt also:

$$\left. \begin{matrix} | \\ u^3=0 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha \beta \end{matrix} \right\} = \overline{\left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha \beta \end{matrix} \right\}} \quad (\text{A.96})$$

$$\left. \begin{matrix} | \\ u^3=0 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta 3 \end{matrix} \right\} = -b_{\beta}^{\alpha} \quad (\text{A.97})$$

$$\left. \begin{matrix} | \\ u^3=0 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 3 \\ \alpha \beta \end{matrix} \right\} = b_{\alpha\beta} \quad (\text{A.98})$$

so daß man setzen könnte

$$\overline{\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta 3 \end{matrix} \right\}} = -b_{\beta}^{\alpha}, \quad \overline{\left\{ \begin{matrix} 3 \\ \alpha \beta \end{matrix} \right\}} = b_{\alpha\beta}, \quad \overline{\left\{ \begin{matrix} 3 \\ \alpha 3 \end{matrix} \right\}} = \overline{\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ 3 3 \end{matrix} \right\}} = \overline{\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 3 3 \end{matrix} \right\}} = 0 \quad (\text{A.99})$$

Als abkürzende Schreibweise führen wir ein:

$$b_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = s_{\bar{\alpha}}^{\sigma} b_{\sigma\beta}, \quad b_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}} = s_{\sigma}^{\bar{\alpha}} b_{\beta}^{\sigma},$$

$$T_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = s_{\bar{\beta}}^{\nu} T_{\bar{\alpha}\nu}, \quad T_{3\bar{\mu}} = s_{\bar{\mu}}^{\nu} T_{3\nu}, \dots$$

$$T_{\bar{\alpha}1\bar{3}} = T_{\bar{\alpha}13}$$

Damit schreibt sich um:

$$\begin{aligned}
 T_{\alpha\mu\beta} &= s_{\alpha}^{\bar{\nu}} s_{\beta}^{\bar{\mu}} [T_{\bar{\nu}\mu\bar{\mu}} - b_{\bar{\nu}\bar{\mu}} T_{\bar{3}}] \\
 T_{\alpha\mu 3} &= s_{\alpha}^{\bar{\nu}} T_{\bar{\nu}13} \\
 T_{3\mu\beta} &= s_{\beta}^{\bar{\mu}} [T_{\bar{3}\mu\bar{\mu}} + b_{\bar{\mu}\bar{\nu}} T_{\bar{\nu}}] \\
 T_{3\mu 3} &= T_{\bar{3}13} = T_{\bar{3}13} = T_{31\bar{3}} = T_{313} = T^3_{13} \\
 T^{\alpha}_{\mu\beta} &= s_{\bar{\nu}}^{\alpha} s_{\beta}^{\bar{\mu}} [T^{\bar{\nu}}_{\mu\bar{\mu}} - b_{\bar{\mu}\bar{\nu}} T^{\bar{3}}] \\
 T^{\alpha}_{\mu 3} &= s_{\bar{\nu}}^{\alpha} T^{\bar{\nu}}_{13} \\
 T^3_{\mu\beta} &= s_{\beta}^{\bar{\mu}} [T^{\bar{3}}_{\mu\bar{\mu}} + b_{\bar{\mu}\bar{\nu}} T^{\bar{\nu}}] \\
 T^3_{\mu 3} &= T^{\bar{3}}_{13} = T^{\bar{3}}_{13} = T^3_{1\bar{3}} = T^3_{13} = T_{313}
 \end{aligned} \tag{A.100}$$

Die Größe

$$\begin{aligned}
 I &= T^i_j T_i T^j \\
 &= T^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}} T^{\bar{\beta}}_{T_z} + T^{\bar{\alpha}}_{\bar{3}} T_z T^{\bar{3}} + T^{\bar{3}}_{\bar{\beta}} T^{\bar{\beta}}_{T_z} + T^{\bar{3}}_{\bar{3}} T_{\bar{3}} T^{\bar{3}}
 \end{aligned} \tag{A.101}$$

ist sowohl gegenüber räumlichen Transformationen als auch gegenüber Transformationen der Fläche in sich eine Invariante. Hingegen ist

$$\bar{I} = T^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}} T_{T_z} T^{\bar{\beta}} \tag{A.102}$$

nur eine Flächeninvariante (Flächenskalar).

Somit gilt:

$$I_{\mu\nu\gamma} = I_{\nu\mu\gamma} \quad (\text{A.103})$$

$$I_{\mu\nu\gamma} = I_{\mu\gamma\nu} \quad (\text{A.104})$$

und also  $I_{\mu\nu\gamma} = I_{\nu\mu\gamma}$  (A.105)

aber obwohl  $\bar{I}_{\mu\nu\gamma} = \bar{I}_{\nu\mu\gamma}$

so ist doch  $\bar{I}_{\mu\nu\gamma} \neq \bar{I}_{\nu\mu\gamma}$  ,  $\bar{I}_{\mu\nu\gamma} \neq \bar{I}_{\mu\gamma\nu}$

Aus (A.104) und (A.100) folgt:

$$T^{\alpha}_{\beta\mu\gamma} = s^{\alpha}_{\bar{\nu}} s^{\bar{\mu}}_{\beta} s^{\bar{\sigma}}_{\gamma} [T^{\bar{\nu}}_{\bar{\mu}\bar{\sigma}} - b_{\bar{\mu}\bar{\sigma}} T^{\bar{\nu}}_{\bar{3}} - b^{\bar{\nu}}_{\bar{\sigma}} T^{\bar{3}}_{\bar{\mu}}]$$

$$T^{\alpha}_{3\mu\gamma} = s^{\alpha}_{\bar{\nu}} s^{\bar{\sigma}}_{\gamma} [T^{\bar{\nu}}_{\bar{3}\bar{\sigma}} + b^{\bar{\mu}}_{\bar{\sigma}} T^{\bar{\nu}}_{\bar{\mu}} - b^{\bar{\nu}}_{\bar{\sigma}} T^{\bar{3}}_{\bar{3}}]$$

$$T^{\beta}_{\beta\mu\gamma} = s^{\bar{\mu}}_{\beta} s^{\bar{\sigma}}_{\gamma} [T^{\bar{3}}_{\bar{\mu}\bar{\sigma}} + b_{\bar{\nu}\bar{\sigma}} T^{\bar{\nu}}_{\bar{\mu}} - b_{\bar{\mu}\bar{\sigma}} T^{\bar{3}}_{\bar{3}}] \quad (\text{A.106})$$

$$T^{\beta}_{3\mu\gamma} = s^{\bar{\sigma}}_{\gamma} [T^{\bar{3}}_{\bar{3}\bar{\sigma}} + b^{\bar{\nu}}_{\bar{\sigma}} T^{\bar{3}}_{\bar{\nu}} + b_{\bar{\nu}\bar{\sigma}} T^{\bar{\nu}}_{\bar{3}}]$$

$$T^{\alpha}_{\beta\mu\bar{3}} = s^{\alpha}_{\bar{\nu}} s^{\bar{\mu}}_{\beta} T^{\bar{\nu}}_{\bar{\mu}\bar{3}}$$

$$T^{\alpha}_{3\mu\bar{3}} = s^{\alpha}_{\bar{\nu}} T^{\bar{\nu}}_{\bar{3}\bar{3}}$$

$$T^{\beta}_{\beta\mu\bar{3}} = s^{\bar{\mu}}_{\beta} T^{\bar{3}}_{\bar{\mu}\bar{3}}$$

$$T^{\beta}_{3\mu\bar{3}} = T^{\bar{3}}_{\bar{3}\bar{3}}$$

$$T_{\alpha \mu \gamma}^{\beta} = s_{\alpha}^{\bar{\nu}} s_{\mu}^{\beta} s_{\gamma}^{\bar{\sigma}} \left[ T_{\bar{\nu} \mu \bar{\sigma}}^{\bar{\mu}} - b_{\bar{\sigma}}^{\bar{\mu}} T_{\bar{\nu}}^{\bar{3}} - b_{\bar{\nu} \bar{\sigma}} T_{\bar{3}}^{\bar{\mu}} \right]$$

$$T_{\alpha \mu \gamma}^{\bar{3}} = s_{\alpha}^{\bar{\nu}} s_{\gamma}^{\bar{\sigma}} \left[ T_{\bar{\nu} \mu \bar{\sigma}}^{\bar{3}} + b_{\mu \bar{\sigma}} T_{\bar{\nu}}^{\bar{\mu}} - b_{\bar{\nu} \bar{\sigma}} T_{\bar{3}}^{\bar{3}} \right]$$

$$T_{\bar{3} \mu \gamma}^{\beta} = s_{\mu}^{\beta} s_{\gamma}^{\bar{\sigma}} \left[ T_{\bar{3} \mu \bar{\sigma}}^{\bar{\mu}} + b_{\bar{\sigma}}^{\bar{\nu}} T_{\bar{\nu}}^{\bar{\mu}} - b_{\bar{\sigma}}^{\bar{\mu}} T_{\bar{3}}^{\bar{3}} \right]$$

$$T_{\bar{3} \mu \gamma}^{\bar{3}} = s_{\gamma}^{\bar{\sigma}} \left[ T_{\bar{3} \mu \bar{\sigma}}^{\bar{3}} + b_{\bar{\sigma}}^{\bar{\nu}} T_{\bar{\nu}}^{\bar{3}} + b_{\bar{\nu} \bar{\sigma}} T_{\bar{3}}^{\bar{\nu}} \right]$$

$$T_{\alpha \mu \bar{3}}^{\beta} = s_{\alpha}^{\bar{\nu}} s_{\mu}^{\beta} T_{\bar{\nu}}^{\bar{\mu}} \bar{3}$$

$$T_{\alpha \mu \bar{3}}^{\bar{3}} = s_{\alpha}^{\bar{\nu}} T_{\bar{\nu}}^{\bar{3}} \bar{3}$$

$$T_{\bar{3} \mu \bar{3}}^{\beta} = s_{\mu}^{\beta} T_{\bar{3}}^{\bar{\mu}} \bar{3}$$

$$T_{\bar{3} \mu \bar{3}}^{\bar{3}} = T_{\bar{3}}^{\bar{3}} \bar{3}$$

(A.106)

$$T^{\alpha \beta \mu \gamma} = s_{\bar{\nu}}^{\alpha} s_{\mu}^{\beta} s_{\gamma}^{\bar{\sigma}} \left[ T^{\bar{\nu} \mu \bar{\sigma}} - b_{\bar{\sigma}}^{\bar{\mu}} T^{\bar{\nu} \bar{3}} - b_{\bar{\sigma}}^{\bar{\nu}} T^{\bar{3} \mu} \right]$$

$$T^{\alpha \bar{3} \mu \gamma} = s_{\bar{\nu}}^{\alpha} s_{\gamma}^{\bar{\sigma}} \left[ T^{\bar{\nu} \bar{3} \mu} + b_{\mu \bar{\sigma}} T^{\bar{\nu} \bar{\mu}} - b_{\bar{\sigma}}^{\bar{\nu}} T^{\bar{3} \bar{3}} \right]$$

$$T^{\bar{3} \beta \mu \gamma} = s_{\mu}^{\beta} s_{\gamma}^{\bar{\sigma}} \left[ T^{\bar{3} \bar{\mu} \bar{\sigma}} + b_{\bar{\sigma}}^{\bar{\nu}} T^{\bar{\nu} \bar{\mu}} - b_{\bar{\sigma}}^{\bar{\mu}} T^{\bar{3} \bar{3}} \right]$$

$$T^{\bar{3} \bar{3} \mu \gamma} = s_{\gamma}^{\bar{\sigma}} \left[ T^{\bar{3} \bar{3} \mu} + b_{\bar{\sigma}}^{\bar{\nu}} T^{\bar{\nu} \bar{3}} + b_{\bar{\nu} \bar{\sigma}} T^{\bar{3} \bar{\mu}} \right]$$

$$T^{\alpha \beta \mu \bar{3}} = s_{\bar{\nu}}^{\alpha} s_{\mu}^{\beta} T^{\bar{\nu} \bar{\mu}} \bar{3}$$

$$T^{\alpha \bar{3} \mu \bar{3}} = s_{\bar{\nu}}^{\alpha} T^{\bar{\nu} \bar{3}} \bar{3}$$

$$T^{\bar{3} \beta \mu \bar{3}} = s_{\mu}^{\beta} T^{\bar{3} \bar{\mu}} \bar{3}$$

$$T^{\bar{3} \bar{3} \mu \bar{3}} = T^{\bar{3} \bar{3}} \bar{3}$$

$$\begin{aligned}
 T_{\alpha\beta\|\gamma} &= s_{\alpha}^{\bar{\nu}} s_{\beta}^{\bar{\mu}} s_{\gamma}^{\bar{\sigma}} \left[ T_{\bar{\nu}\bar{\mu}\|\bar{\sigma}} - b_{\bar{\mu}\bar{\sigma}} T_{\bar{\nu}\bar{\sigma}} - b_{\bar{\nu}\bar{\sigma}} T_{\bar{\sigma}\bar{\mu}} \right] \\
 T_{\alpha\bar{\sigma}\|\gamma} &= s_{\alpha}^{\bar{\nu}} s_{\gamma}^{\bar{\sigma}} \left[ T_{\bar{\nu}\bar{\sigma}\|\bar{\sigma}} + b_{\bar{\sigma}}^{\bar{\mu}} T_{\bar{\nu}\bar{\mu}} - b_{\bar{\nu}\bar{\sigma}} T_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} \right] \\
 T_{\bar{\sigma}\beta\|\gamma} &= s_{\beta}^{\bar{\mu}} s_{\gamma}^{\bar{\sigma}} \left[ T_{\bar{\sigma}\bar{\mu}\|\bar{\sigma}} + b_{\bar{\sigma}}^{\bar{\nu}} T_{\bar{\nu}\bar{\mu}} - b_{\bar{\mu}\bar{\sigma}} T_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}} \right] \\
 T_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}\|\gamma} &= s_{\gamma}^{\bar{\sigma}} \left[ T_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}\|\bar{\sigma}} + b_{\bar{\sigma}}^{\bar{\nu}} T_{\bar{\nu}\bar{\sigma}} + b_{\bar{\sigma}}^{\bar{\mu}} T_{\bar{\sigma}\bar{\mu}} \right] \\
 T_{\alpha\beta\|\bar{\sigma}} &= s_{\alpha}^{\bar{\nu}} s_{\beta}^{\bar{\mu}} T_{\bar{\nu}\bar{\mu}\|\bar{\sigma}} \\
 T_{\alpha\bar{\sigma}\|\bar{\sigma}} &= s_{\alpha}^{\bar{\nu}} T_{\bar{\nu}\bar{\sigma}\|\bar{\sigma}} \\
 T_{\bar{\sigma}\beta\|\bar{\sigma}} &= s_{\beta}^{\bar{\mu}} T_{\bar{\sigma}\bar{\mu}\|\bar{\sigma}} \\
 T_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}\|\bar{\sigma}} &= T_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}\|\bar{\sigma}}
 \end{aligned} \tag{A.106}$$

Für Tensoren höherer Stufe können entsprechende Formeln angegeben werden.

Es interessieren die kovarianten Ableitungen der wichtigsten (geometrischen) Tensoren:

$$a_{\alpha\|\bar{\beta}}^I = b_{\alpha\bar{\beta}} n^I \quad \text{d.h.} \quad a_{\alpha\|\beta}^I = b_{\alpha\beta} n^I \tag{A.107}$$

$$a_{I\|\bar{\beta}}^{\alpha} = b_{\bar{\beta}}^{\alpha} n^I \quad \text{d.h.} \quad a_{I\|\beta}^{\alpha} = b_{\beta}^{\alpha} n_I \tag{A.108}$$

$$n_{I\|\bar{\beta}} = -b_{\bar{\beta}}^{\bar{\nu}} a_{I\nu} \quad \text{d.h.} \quad n_{I\|\beta} = -b_{\beta}^{\bar{\nu}} a_{I\nu}^I \tag{A.109}$$

$$a_{\alpha\beta\|\bar{\gamma}} = 0 \quad \text{d.h.} \quad a_{\alpha\beta\|\gamma} = 0 \quad \text{Satz v. Ricci} \tag{A.110}$$

$$a^{\alpha\beta\|\bar{\gamma}} = 0 \quad \text{d.h.} \quad a^{\alpha\beta\|\gamma} = 0 \tag{A.111}$$

$$a_{I\bar{\gamma}} = 0 \quad \text{d.h.} \quad a_{I\gamma} = 0 \tag{A.112}$$

$$\begin{aligned}
 e_{\bar{\mu}}^{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0, \quad e_{\bar{\sigma}\bar{\mu}\|\bar{\gamma}} = 0, \quad e_{\bar{\sigma}\bar{\beta}\|\bar{\gamma}} = 0, \quad e_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\|\bar{\gamma}} = 0 \\
 \text{d.h.} \quad e_{\bar{\mu}}^{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0, \quad e_{\bar{\sigma}\bar{\beta}\|\gamma} = 0, \quad e_{\bar{\sigma}\bar{\beta}\|\gamma} = 0, \quad e_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\|\gamma} = 0
 \end{aligned} \tag{A.113}$$

Dagegen verschwinden nicht  $b_{\bar{\beta}||\bar{\gamma}}^{\bar{\alpha}}$  und  $b_{\alpha\bar{\beta}||\bar{\gamma}}$   
 und  $b_{\bar{\beta}||\bar{\gamma}}^{\alpha}$  und  $b_{\alpha\beta||\bar{\gamma}}$

Für diese gilt:

$$b_{\bar{\beta}||\bar{\gamma}}^{\bar{\alpha}} = b_{\bar{\gamma}||\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}}, \quad b_{[\bar{\beta}||\bar{\gamma}]}^{\bar{\alpha}} = 0, \quad b_{\bar{\beta}||\bar{\gamma}}^{\alpha} = b_{\bar{\gamma}||\bar{\beta}}^{\alpha}, \quad b_{[\bar{\beta}||\bar{\gamma}]}^{\alpha} = 0$$

$$b_{\alpha\bar{\beta}||\bar{\gamma}} = b_{\alpha\bar{\gamma}||\bar{\beta}}, \quad b_{\alpha[\bar{\beta}||\bar{\gamma}]} = 0, \quad b_{\alpha\beta||\bar{\gamma}} = b_{\alpha\bar{\gamma}||\beta}, \quad b_{\alpha[\bar{\gamma}||\beta]} = 0 \quad (\text{A.114})$$

(Meinardi-Codazzi)

$$b_{[\alpha\bar{\beta}||\bar{\gamma}]} = 0 \qquad b_{[\alpha\beta||\bar{\gamma}]} = 0 \qquad (\text{A.115})$$

Für die räumlichen Tensoren gilt:

$$g^I{}_{jmk} = 0 \qquad (\text{A.116})$$

$$g_I{}^j{}_{mk} = 0 \qquad (\text{A.117})$$

$$g_{ijmk} = 0 \qquad (\text{Satz von Ricci}) \qquad (\text{A.118})$$

$$g^{ij}{}_{mk} = 0 \qquad (\text{A.119})$$

$$g_{ik} = 0 \qquad (\text{A.120})$$

Wenn in Analogie zu (A.11) oder (A.12) und (A.13) die absoluten Tensoren

$$\varepsilon_{ijk} = \sqrt{g} e_{ijk} \qquad (\text{A.121})$$

$$\varepsilon^{ijk} = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{ijk} \qquad (\text{A.122})$$

definiert werden, so gilt natürlich

$$\varepsilon^{ijk}{}_{ml} = 0, \quad \varepsilon_{ijk}{}_{ml} = 0, \quad \varepsilon^i{}_{jkml} = 0 \qquad (\text{A.123})$$

u.s.w.

Die Gleichungen (A.100) gelten auch, wenn die Tensoren Flächentensoren sind. Die Shifter sind dann ( $u^3 = 0$ ) gleich  $\delta_\alpha^\nu$  zu verstehen. Man findet mit (A.107), (A.108) und (A.109) sofort

$$a^I_{\alpha\parallel\beta} = 0, \quad a^I_{\alpha\parallel 3} = 0 \quad (\text{A.124})$$

$$a^{I\alpha}_{\parallel\beta} = 0, \quad a^{I\alpha}_{\parallel 3} = 0 \quad (\text{A.125})$$

$$a_{\alpha\beta\parallel\gamma} = 0, \quad a_{\alpha\beta\parallel 3} = 0 \quad (\text{A.126})$$

$$a^{\alpha\beta}_{\parallel\gamma} = 0, \quad a^{\alpha\beta}_{\parallel 3} = 0 \quad (\text{A.127})$$

$$n^I_{\parallel\alpha} = 0, \quad n^I_{\parallel 3} = 0 \quad (\text{A.128})$$

$$a_{\parallel\beta} = 0 \quad (\text{A.129})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\alpha\beta}_{\parallel\gamma} = 0, \quad \varepsilon_{\alpha\beta\parallel\gamma} = 0, \quad \varepsilon^\alpha_{\beta\parallel\gamma} = 0 \\ \varepsilon_{\alpha\beta\parallel 3} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.130})$$

Sofern es sich um Flächentensoren handelt, also Größen, die auf der Fläche definiert sind und keine  $u^3$ -Komponente haben, ergibt (A.105), (A.106), daß sich die räumliche kovariante Ableitung aus der kovarianten Flächenableitung herleitet durch anschließende Versetzung jedes Index. Dies wäre zu beachten bei den Ableitungen  $b_{\alpha\beta\parallel\gamma}$  und  $b^\alpha_{\beta\parallel\gamma}$ . Natürlich ist  $b_{\alpha\beta\parallel 3} = 0$ ,  $b^\alpha_{\beta\parallel 3} = 0$ .

Die Versetzer selbst sind weder räumliche noch Flächentensoren sondern nach [25] echte Doppeltensoren, da sie von den Koordinaten zweier Punkte abhängen.

Man kann schreiben

$$s^{\bar{\alpha}}_{\bar{\nu}} = a_I^\alpha g^I_{\bar{\nu}} \quad (\text{A.131})$$

$$s^{\bar{\mu}}_{\bar{\beta}} = a^I_\beta g_I^{\bar{\mu}} \quad (\text{A.132})$$

und nach [25] sind ihre Ableitungen so zu bilden, daß  $a_I^\alpha$  (bzw.  $a^I_\beta$ ) auf der Fläche ( $u^3=0$ ) und  $g^I_\nu$  (bzw.  $g_I^\mu$ ) im Raum ( $u^1, u^2, u^3$ ) differenziert wird. Man verifiziert daher sofort:

$$s_{\bar{\nu}||\beta}^\alpha = 0 \quad s_{\bar{\nu}||3}^\alpha = 0 \quad (\text{A.133})$$

$$s_{\bar{\beta}||\gamma}^{\bar{\mu}} = 0 \quad s_{\bar{\beta}||3}^{\bar{\mu}} = 0 \quad (\text{A.134})$$

Weiterhin ist

$$s_{\bar{\beta}||\gamma}^\alpha = -s_{\bar{\nu}}^\alpha s^{\bar{\nu}}_{\mu||\gamma} s^\mu_{\bar{\beta}} \quad (\text{A.135})$$

$$\text{und } s_{\bar{\nu}||\beta}^{\bar{\alpha}} = -b_{\bar{\nu}||\beta}^\alpha \cdot u^3 \quad (\text{A.136})$$

womit auch sofort

$$s_{\bar{\nu}||\beta}^{\bar{\alpha}} = s_{\bar{\beta}||\nu}^{\bar{\alpha}} \quad (\text{A.137})$$

gilt.

(Es gilt nicht  $s_{\bar{\beta}||\gamma}^\mu = s_{\bar{\gamma}||\beta}^\mu$  !)

Unter Verwendung dieser Beziehungen läßt sich auch die Flächenableitung eines Raumentensors leicht angeben, da seine  $u^1$ - und  $u^2$ -Komponenten dargestellt werden können durch den zugehörigen Versetzer mal die entsprechende Flächenkomponente, für die beide die Regeln zur Bildung der kovarianten Flächenableitung bekannt sind. Die  $u^3$ -Komponenten sind Flächenskalare und ihre kovarianten Ableitungen daher gleich der gewöhnlichen Ableitung. Mit diesen Bemerkungen ist klar, wie die Ausdrücke für

$$g^I_{i||\alpha}, g_I^i{}_{||\alpha}, g_{ij||\alpha}, g^{ij}{}_{||\alpha}, g_{i||\alpha} = g_{||\alpha}$$

$$E^{ijk}{}_{||\alpha}, E_{ijk}{}_{||\alpha}, E_i{}^j{}_{k||\alpha}, \text{ u. s. w.}$$

zu bilden sind.

Es sei noch angegeben:

$$n^I{}_{\parallel\alpha\beta} = -b_{\alpha\parallel\beta}^{\nu} a^I{}_{\nu} - b_{\alpha}^{\nu} b_{\nu\beta} n^I \quad (\text{A.138})$$

$$n_I n^I{}_{\parallel\alpha\beta} = -b_{\alpha}^{\nu} b_{\nu\beta} \quad (\text{A.139})$$

$$a_{I\nu} n^I{}_{\parallel\alpha\beta} = -b_{\alpha\nu\parallel\beta} \quad (\text{A.140})$$

Von Interesse sind auch Formeln für die Ableitungen der geometrisch wichtigen Größen  $H, K$  und  $J$ . Während  $H_{\parallel\alpha}$  und  $K_{\parallel\alpha}$  charakteristische Eigenschaften der Fläche jeweils wiedergeben, ist natürlich immer

$$H_{\parallel 3} = K_{\parallel 3} = 0$$

Wichtig sind jedoch die Beziehungen

$$\frac{J_{\parallel\alpha}}{J} = \frac{J_{\parallel\alpha}}{J} = s_{\bar{\tau}}^{\sigma} s_{\sigma\parallel\alpha}^{\bar{\tau}} = s_{\bar{\tau}}^{\sigma} s_{\alpha\parallel\sigma}^{\bar{\tau}} = -s_{\bar{\tau}}^{\sigma} b_{\sigma\parallel\alpha}^{\bar{\tau}} u^3 = -s_{\bar{\tau}}^{\sigma} b_{\alpha\parallel\sigma}^{\bar{\tau}} u^3 \quad (\text{A.141})$$

$$\frac{J_{\parallel 3}}{J} = s_{\bar{\tau}}^{\sigma} s_{\sigma\parallel 3}^{\bar{\tau}} = -s_{\bar{\tau}}^{\sigma} b_{\sigma}^{\bar{\tau}} = b_{\bar{\tau}}^{\bar{\tau}} \quad (\text{A.142})$$

Es läßt sich nun auch leicht die mittlere Krümmung im Schichtraum bzw. Schalenraum angeben:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} s_{\bar{\nu}}^{\alpha} b_{\alpha}^{\bar{\nu}} = \frac{1}{2} b_{\bar{\alpha}}^{\bar{\alpha}} \quad (\text{A.143})$$

Diese kann man ansehen sowohl als Spur des räumlichen Sub-Tensors  $\hat{b}_{\bar{\beta}}^{\alpha} = s_{\bar{\nu}}^{\alpha} b_{\beta}^{\bar{\nu}}$ , als auch die des reinen Flächentensors  $b_{\bar{\beta}}^{\alpha} = s_{\bar{\nu}}^{\alpha} b_{\beta}^{\bar{\nu}}$ .

Nach (A.142) gilt

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \frac{J_{\parallel 3}}{J} \quad (\text{A.144})$$

Bildet man die Determinanten der Matrizen  $\hat{b}_{\bar{\beta}}^{\alpha}$  oder  $b_{\bar{\beta}}^{\alpha}$  so bekommt man die Gaußschen Krümmungen:

$$\hat{K} = \frac{K}{J} (= \det \hat{b}_{\bar{\beta}}^{\alpha}) \quad (\text{A.145})$$

die Gaußsche Krümmung in der Fläche  $u^3 = \text{const.}$  im Raum, und

$$\bar{K} = J \cdot K (= \det(b_{\bar{\alpha}\bar{\beta}})) \quad (\text{A.146})$$

Wir bemerken noch:

$$\hat{H}_{13} = 2\hat{H}^2 - \hat{K} \quad (\text{A.147})$$

$$\hat{K}_{13} = 2\hat{H}\hat{K} \quad (\text{A.148})$$

$$\bar{K}_{13} = -2\hat{H}JK = -2\hat{H}\bar{K} \quad (\text{A.149})$$

$$\delta_{\lambda\mu}^{\alpha\beta} b_{\bar{z}}^{\bar{\lambda}} b_{\bar{y}}^{\bar{\mu}} = b_{\bar{z}}^{\bar{\alpha}} b_{\bar{y}}^{\bar{\beta}} - b_{\bar{y}}^{\bar{\alpha}} b_{\bar{z}}^{\bar{\beta}} \quad (\text{A.150})$$

$$\bar{K} \delta_{\bar{y}}^{\bar{\beta}} = 2\hat{H} b_{\bar{y}}^{\bar{\beta}} - b_{\bar{y}}^{\bar{\beta}} b_{\bar{z}}^{\bar{z}} \quad (\text{A.151})$$

$$2\bar{K} = 4\hat{H}^2 - b_{\bar{y}}^{\bar{\beta}} b_{\bar{z}}^{\bar{\beta}} \quad (\text{A.152})$$

Es sei noch die Definition des Riemann-Christoffel-Tensors angegeben, der ein Maß für die Krümmung des Raumes ist:

$$R_{ijkl}^i = \{i|j|k|l\}_{ik} - \{i|j|k\}_{il} + \{j|l\} \{i|pk\} - \{j|k\} \{i|pl\} \quad (\text{A.153})$$

bzw.

$$\bar{R}_{\alpha\beta\gamma}^{\lambda} = \{\bar{\lambda}|\alpha\beta\gamma\}_{\beta\gamma} - \{\bar{\lambda}|\alpha\beta\}_{\gamma} + \{\bar{\nu}|\alpha\gamma\} \{\bar{\lambda}|\nu\beta\} - \{\bar{\nu}|\alpha\beta\} \{\bar{\lambda}|\nu\gamma\} \quad (\text{A.154})$$

Es gilt:

$$T_{iujk} - T_{imkj} = R^l{}_{ijk} T_l \quad (\text{A.155})$$

$$T_{\bar{z}\mu\beta\gamma} - T_{\bar{z}\mu\gamma\beta} = \bar{R}^{\nu}{}_{\alpha\beta\gamma} T_{\bar{\nu}} \quad (\text{A.156})$$

$$T_{ijmkl} - T_{ijmlk} = R^m{}_{ikl} T_{mj} + R^m{}_{jkl} T_{im} \quad (\text{A.157})$$

$$T_{\bar{z}\bar{\beta}\mu\gamma\delta} - T_{\bar{z}\bar{\beta}\delta\gamma} = \bar{R}^{\nu}{}_{\alpha\gamma\delta} T_{\bar{\nu}\bar{\beta}} + \bar{R}^{\nu}{}_{\beta\gamma\delta} T_{\bar{z}\bar{\nu}} \quad (\text{A.158})$$

Für  $R_{ijkl} = g_{im} R^m{}_{jkl}$  (Riemann-Tensor, Krümmungstensor) (A.159)

gilt  $R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij}$  (A.160)

$R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0$ ,  $R_{i[jkl]} = 0$  (A.161)

Für  $\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = a_{\alpha\nu} \bar{R}^\nu{}_{\beta\gamma\delta}$  (A.162)

gilt  $\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\bar{R}_{\beta\alpha\gamma\delta} = -\bar{R}_{\alpha\beta\delta\gamma} = \bar{R}_{\gamma\delta\alpha\beta}$  (A.163)

$\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} + \bar{R}_{\alpha\gamma\delta\beta} + \bar{R}_{\alpha\delta\beta\gamma} = 0$  (A.164)

Es ist weiterhin

$K = \frac{1}{4} \epsilon^{\bar{\lambda}\bar{\alpha}} \epsilon^{\bar{\beta}\bar{\gamma}} \bar{R}_{\lambda\alpha\beta\gamma}$  (A.165)

$R_{ijkl}$  hat nur sechs voneinander unabhängige Komponenten:

$R_{1212}$ ,  $R_{3112}$ ,  $R_{3221}$ ,  $R_{1313}$ ,  $R_{2323}$ ,  $R_{1323}$

$\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$  hat sechzehn Komponenten, von denen zwölf verschwinden. Die übrigen vier sind nicht unabhängig

$\bar{R}_{1212} = -\bar{R}_{2112} = -\bar{R}_{1221} = \bar{R}_{2121}$  (A.166)

so daß es nur eine unabhängige Komponente gibt:

$\bar{R}_{1212} = aK$  (A.167)

Für diese Tensoren gelten die Beziehungen:

$R_{ijkl} = [jl, i]_{ik} - [jk, i]_{il} + \left\{ \begin{matrix} m \\ jk \end{matrix} \right\} [li, m] - \left\{ \begin{matrix} m \\ jl \end{matrix} \right\} [ki, m]$  (A.168)

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2} \{ g_{il}ikj + g_{jkil} - g_{ikjl} - g_{jl}ik \} + g^{mn} \{ [jk,m][il,n] - [ik,m][jl,n] \} \quad (\text{A.169})$$

$$\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = [\overline{\beta\delta,\alpha}]_{\gamma} - [\overline{\beta\gamma,\alpha}]_{\delta} + \left\{ \frac{\nu}{\beta\gamma} \right\} [\overline{\delta\alpha,\nu}] - \left\{ \frac{\nu}{\beta\delta} \right\} [\overline{\gamma\alpha,\nu}] \quad (\text{A.170})$$

$$\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} \{ a_{\alpha\delta\beta\gamma} + a_{\beta\gamma\alpha\delta} - a_{\alpha\gamma\beta\delta} - a_{\beta\delta\alpha\gamma} \} + a^{\mu\nu} \{ [\overline{\beta\gamma,\mu}] [\overline{\alpha\delta,\nu}] - [\overline{\alpha\gamma,\mu}] [\overline{\beta\delta,\nu}] \} \quad (\text{A.171})$$

$$\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \epsilon_{\alpha\bar{\beta}} \epsilon_{\bar{\gamma}\delta} K \quad (\text{A.172})$$

$$\bar{R}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma\delta} = a_{\alpha\gamma} K \quad (\text{A.173})$$

und der von Gauß bewiesene Satz

$$\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = b_{\beta\delta} b_{\alpha\gamma} - b_{\beta\gamma} b_{\alpha\delta} \quad (\text{A.174})$$

Man führt den Ricci-Tensor ein:

$$R_{ij} = R^k{}_{ijk} = -R^k{}_{ikj} \quad (\text{A.175})$$

$$\bar{R}_{\alpha\beta} = \bar{R}^{\gamma}{}_{\alpha\beta\gamma} = -\bar{R}^{\gamma}{}_{\alpha\gamma\beta} \quad (\text{A.176})$$

Auf Flächen gilt:

$$\bar{R}_{\alpha\beta} = -a_{\alpha\beta} K = -a_{\alpha\beta} \frac{\bar{R}_{1212}}{a} \quad (\text{A.177})$$

Die geodätische Invariante ist

$$R = R^j{}_j = g^{ij} R_{ij} \quad (\text{A.178})$$

Auf der Fläche

$$\bar{R} = \bar{R}^{\alpha}{}_{\alpha} = a^{\alpha\beta} \bar{R}_{\alpha\beta} \quad (\text{A.179})$$

gilt also

$$\bar{R} = -2K \quad (\text{A.180})$$

Zu erwähnen ist noch die Identität von Bianchi:

$$R^l{}_{ijk||m} + R^l{}_{ikm||j} + R^l{}_{imj||k} = 0 \quad (\text{A.181})$$

$$R_{lijk||m} + R_{likm||j} + R_{limj||k} = 0 \quad (\text{A.182})$$

$$\bar{R}^\alpha{}_{\beta\gamma\delta||\eta} + \bar{R}^\alpha{}_{\beta\delta\eta||\gamma} + \bar{R}^\alpha{}_{\beta\eta\gamma||\delta} = 0 \quad (\text{A.183})$$

$$\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta||\eta} + \bar{R}_{\alpha\beta\delta\eta||\gamma} + \bar{R}_{\alpha\beta\eta\gamma||\delta} = 0 \quad (\text{A.184})$$

Im Raum der Normalkoordinaten (Schichtraum, Schalenraum) ist, da es sich um den euklidischen Raum handelt, natürlich

$$R_{ijkl} \equiv 0 \quad (\text{A.185})$$

Trotzdem seien die (allgemeinen) Zusammenhänge

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = s_\alpha^{\bar{\nu}} s_\beta^{\bar{\mu}} (\bar{R}_{\nu\mu\gamma\delta} - b_{\nu\gamma} b_{\mu\delta} + b_{\nu\delta} b_{\mu\gamma})$$

$$R_{3\beta\gamma\delta} = s_\beta^{\bar{\mu}} (b_{\mu\delta||\gamma} - b_{\mu\gamma||\delta})$$

angegeben.

Um sowohl im Raum der Schicht oder Schale im System der Normalkoordinaten einerseits, als auch auf der Fläche (Bezugsfläche, Wandfläche, zweidimensionaler Raum) andererseits Tensoranalysis betreiben zu können, braucht man Beziehungen zwischen den Ausdrücken für Gradient, Divergenz, Rotation, Laplace-Operator usw. im einen und im anderen Raum.

Für den Gradienten sind solche Beziehungen durch die Formeln (A.105) (Gradient eines Skalars), (A.100) (Gradient eines Vektors), (A.106) (Gradient eines Tensors zweiter Stufe) und entsprechende Formeln für Tensoren höherer Stufe gegeben.

Es ist zu beachten, daß der durch die kovariante Flächen-  
ableitung rechts hinzukommende Index noch umzuwandeln ist,  
z.B.:

$$T_{\alpha}^{\beta}{}_{||\gamma} = S_{\alpha}^{\bar{\nu}} S_{\mu}^{\beta} S_{\gamma}^{\bar{\epsilon}} \left[ T_{\bar{\nu}}^{\bar{\mu}}{}_{||\bar{\epsilon}} - S_{\bar{\epsilon}}^{\lambda} b_{\lambda}^{\mu} T_{\bar{\nu}}^3 - b_{\nu\lambda} S_{\bar{\epsilon}}^{\lambda} T_3^{\bar{\mu}} \right]$$

Die Divergenz auf der Fläche wird definiert durch:

$$T^{\bar{\alpha}}{}_{||\bar{\alpha}} = S_{\bar{\nu}}^{\alpha} T^{\bar{\nu}}{}_{||\alpha} = \text{Div}(T^{\bar{\alpha}}) \quad (\text{A.186})$$

oder

$$T^{\bar{\alpha}\bar{\beta}}{}_{||\bar{\beta}} = S_{\bar{\beta}}^{\nu} \left( S_{\alpha}^{\bar{\nu}} S_{\mu}^{\bar{\beta}} T^{\alpha\mu} \right)_{||\nu} \quad (\text{A.187})$$

Man leitet her (A.141):

$$T^{\bar{\alpha}}{}_{||\bar{\alpha}} = \frac{1}{J} (J T^{\alpha})_{||\alpha} \quad (\text{A.188})$$

oder

$$T^{\bar{\alpha}\bar{\beta}}{}_{||\bar{\beta}} = \frac{1}{J} (J S_{\alpha}^{\bar{\alpha}} T^{\alpha\nu})_{||\nu} \quad (\text{A.189})$$

und findet:

$$T^{\alpha}{}_{||\alpha} = T^{\bar{\alpha}}{}_{||\bar{\alpha}} - 2\hat{H}T^3$$

$$T^3{}_{||3} = T^3{}_{||3}$$

$$T^{\alpha\beta}{}_{||\beta} = S_{\bar{\gamma}}^{\alpha} \left[ T^{\bar{\gamma}\bar{\beta}}{}_{||\bar{\beta}} - 2\hat{H}T^{\bar{\gamma}3} - b_{\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}} T^{\bar{\beta}3} \right]$$

$$T^{\beta\alpha}{}_{||\beta} = S_{\bar{\gamma}}^{\alpha} \left[ T^{\bar{\beta}\bar{\gamma}}{}_{||\bar{\beta}} - 2\hat{H}T^{\bar{\beta}\bar{\gamma}} - b_{\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}} T^{\bar{\beta}3} \right] \quad (\text{A.190})$$

$$T^{3\beta}{}_{||\beta} = T^{3\bar{\alpha}}{}_{||\bar{\alpha}} + b_{\bar{\alpha}\bar{\nu}} T^{\bar{\alpha}\bar{\nu}} - 2\hat{H}T^{33}$$

$$T^{\beta 3}{}_{||\beta} = T^{\bar{\alpha} 3}{}_{||\bar{\alpha}} + b_{\bar{\alpha}\bar{\nu}} T^{\bar{\alpha}\bar{\nu}} - 2\hat{H}T^{33}$$

$$T^{\alpha 3}{}_{||3} = S_{\bar{\nu}}^{\alpha} T^{\bar{\nu} 3}{}_{||3}$$

$$T^{3\alpha}{}_{||3} = S_{\bar{\nu}}^{\alpha} T^{3\bar{\nu}}{}_{||3}$$

$$T^{33}{}_{||3} = T^{33}{}_{||3}$$

und analoge Formeln für

$$T_{\alpha}^{\beta}{}_{||\beta}, T^{\beta}{}_{\alpha||\beta}, T_{3}^{\beta}{}_{||\beta}, T^{\beta}{}_{3||\beta}, T_{\alpha}^{\beta}{}_{||3}, T^{\beta}{}_{\alpha||3}$$

Für die Rotation auf der Fläche, ein Flächenskalar, gilt die Definition

$$\bar{r} = \varepsilon^{\bar{\alpha}\bar{\beta}} T_{\bar{\beta}||\bar{\alpha}} = \varepsilon^{\bar{\alpha}\bar{\beta}} s_{\bar{\alpha}}^{\nu} T_{\bar{\beta}||\nu} = \text{Rot}(T_{\bar{\beta}}) \quad (\text{A.191})$$

Im Raum ist

$$r^i = \varepsilon^{ijk} T_{k||j} = \text{rot}(T_k) \quad (\text{A.192})$$

Man findet unter Berücksichtigung der Symmetrie von  $s_{\bar{\gamma}}^{\nu}$  und  $b_{\nu\bar{\beta}}$  also auch der von  $b_{\bar{\gamma}\bar{\beta}}$  und der Antisymmetrie von  $\varepsilon^{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$

$$r^3 = r$$

$$r^{\alpha} = s_{\bar{\nu}}^{\alpha} \varepsilon^{\bar{\nu}\bar{\mu}} [T_{3||\bar{\mu}} - b_{\bar{\mu}}^{\bar{\gamma}} T_{\bar{\gamma}} - T_{\bar{\mu}||3}] \quad (\text{A.193})$$

Rotationsfreiheit eines Vektorfeldes im Raum erfordert also etwas mehr von dem zugeordneten Flächenvektorfeld als nur das Verschwinden der Flächenrotation.

Der Laplace-Operator, angewandt auf einen Tensor  $T \dots$  beliebiger Stufe, ist im Normalkoordinatensystem definiert durch

$$\Delta T \dots = g^{\beta\gamma} T \dots_{||\beta||\gamma} + T \dots_{||3||3} \quad (\text{A.194})$$

und auf der Fläche definiert durch

$$\bar{\Delta} T \dots = a^{\beta\gamma} T \dots_{||\bar{\beta}||\bar{\gamma}} \quad (\text{A.195})$$

dabei soll gesetzt werden

$$T \dots_{||\bar{\alpha}} = s_{\bar{\alpha}}^{\nu} T \dots_{||\nu} \quad (\text{A.196})$$

Es gilt, unter Beachtung von

$$b_{\bar{\tau} \mu \gamma}^{\bar{\sigma}} = b_{\bar{\tau} \mu \gamma}^{\bar{\sigma}} \quad (\text{A.197})$$

$$\begin{aligned} \Delta T^\alpha &= g^{\beta \gamma} T^\alpha_{\mu \beta \mu \gamma} + T^\alpha_{\mu \beta \mu \beta} = \\ &= s_{\bar{\nu}}^\alpha \left\{ \bar{\Delta} T^{\bar{\nu}} + \frac{1}{J} (J T^{\bar{\nu}}_{13})_{13} - 2 b^{\bar{\nu} \bar{\sigma}} T^{\bar{\sigma}}_{1 \bar{\sigma}} \right. \\ &\quad \left. - b_{\bar{\tau}}^{\bar{\nu}} b_{\bar{\sigma}}^{\bar{\tau}} T^{\bar{\sigma}} - b_{\bar{\nu} \bar{\tau}}^{\bar{\tau}} T^{\bar{\sigma}} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta T^3 &= g^{\beta \gamma} T^3_{\mu \beta \mu \gamma} + T^3_{\mu \beta \mu \beta} = \\ &= \bar{\Delta} T^3 + \frac{1}{J} (J T^3_{13})_{13} + b^{\bar{\nu} \bar{\sigma}} T^{\bar{\nu}}_{1 \bar{\sigma}} \\ &\quad - b_{\bar{\tau}}^{\bar{\nu}} b_{\bar{\sigma}}^{\bar{\tau}} T^{\bar{\sigma}} + 2 b_{\bar{\mu}}^{\bar{\nu}} T^{\bar{\mu}}_{1 \bar{\nu}} \end{aligned} \quad (\text{A.198})$$

$$\Delta \varphi = \bar{\Delta} \varphi + \frac{1}{J} (J \varphi_{13})_{13} \quad (\text{A.199})$$

$$\begin{aligned} g^{\alpha \nu} (T^\alpha_{\mu \nu \mu \gamma} + T^3_{\mu \nu \mu \beta}) &= \\ &= s_{\bar{\mu}}^\alpha a^{\bar{\mu} \bar{\nu}} \left\{ T^{\bar{\tau}}_{1 \bar{\nu} 1 \bar{\tau}} + \frac{1}{J} (J T^3_{1 \bar{\nu}})_{13} + \right. \\ &\quad \left. + (b_{\bar{\nu} 13}^{\bar{\sigma}} - b_{\bar{\nu}}^{\bar{\tau}} b_{\bar{\tau}}^{\bar{\sigma}}) T_{\bar{\sigma}} - b_{\bar{\nu} 1 \bar{\sigma}}^{\bar{\sigma}} T^3 - b_{\bar{\nu}}^{\bar{\sigma}} T^3_{1 \bar{\sigma}} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T^\alpha_{\mu \beta \mu \gamma} + T^3_{\mu \beta \mu \beta} &= \\ &= T^{\bar{\tau}}_{13 1 \bar{\tau}} + b_{\bar{\nu}}^{\bar{\tau}} T^{\bar{\nu}}_{1 \bar{\tau}} + \frac{1}{J} (J T^3_{13})_{13} \end{aligned} \quad (\text{A.200})$$

Da der Schalenraum euklidisch ist, verschwindet, insbesondere auch im Normalkoordinatensystem, der Riemann-Tensor, und es ist z.B.

$$T^{\alpha}{}_{\parallel\beta\gamma} = T^{\alpha}{}_{\parallel\gamma\beta} \quad (\text{A.201})$$

Es ist jedoch auf der Fläche

$$\begin{aligned} T^{\bar{\alpha}}{}_{\parallel\bar{\beta}\bar{\gamma}} - T^{\bar{\alpha}}{}_{\parallel\bar{\gamma}\bar{\beta}} &= s_{\bar{\beta}}^{\mu} s_{\bar{\gamma}}^{\nu} (T^{\bar{\alpha}}{}_{\parallel\mu\nu} - T^{\bar{\alpha}}{}_{\parallel\nu\mu}) = \\ &= s_{\bar{\beta}}^{\mu} s_{\bar{\gamma}}^{\nu} \bar{R}^{\alpha}{}_{\mu\nu} T^{\bar{\lambda}} \\ &= s_{\bar{\beta}}^{\mu} s_{\bar{\gamma}}^{\nu} \varepsilon_{\bar{\lambda}}{}^{\bar{\alpha}} \varepsilon_{\mu\nu} K T^{\bar{\lambda}} \end{aligned} \quad (\text{A.202})$$

Für die Vektoren  $\overset{*}{T}{}^{\bar{\alpha}} = \varepsilon^{\bar{\alpha}\bar{\beta}} T_{\bar{\beta}}$  rechnet man mit (A.113) sofort nach

$$\text{Div}(\overset{*}{T}{}^{\bar{\alpha}}) = -\text{Rot}(T^{\bar{\alpha}}), \quad (\varepsilon^{\bar{\beta}\bar{\alpha}} T_{\bar{\beta}})_{\parallel\bar{\alpha}} = -\varepsilon^{\bar{\alpha}\bar{\beta}} T_{\bar{\beta}\parallel\bar{\alpha}} \quad (\text{A.203})$$

$$\text{Rot}(\overset{*}{T}{}^{\bar{\alpha}}) = \text{Div}(T^{\bar{\alpha}}), \quad (\varepsilon^{\bar{\alpha}\bar{\beta}} (\varepsilon_{\bar{\nu}\bar{\beta}} T^{\bar{\nu}}))_{\parallel\bar{\alpha}} = T^{\bar{\alpha}}{}_{\parallel\bar{\alpha}} \quad (\text{A.204})$$

Abschließend noch einige Integralsätze:

Der Satz von Stokes im Raum (auch Kelvin-Transformation)

$$\iint_{\mathcal{V}} \varepsilon^{ijk} T_{jmi} n_{\alpha} dO = \oint_{\mathcal{L}} T_j \lambda^j ds \quad (\text{A.205})$$

mit  $n_{\alpha}$  als Normalvektor auf der jeweils betrachteten Fläche  $\mathcal{V}$  und mit  $\lambda^j$  als Tangentenvektor an die Kurve  $\mathcal{L}$ , und auf der Fläche

$$\iint_{\mathcal{V}} \varepsilon^{\bar{\alpha}\bar{\beta}} T_{\bar{\beta}\parallel\bar{\alpha}} dO = \oint_{\mathcal{L}} T_{\bar{\nu}} \lambda^{\bar{\nu}} ds \quad (\text{A.206})$$

(Beachte:  $\lambda^3 \equiv 0$ ) (Fluß der Rotation des Vektors durch Fläche  $\mathcal{V}$  gleich Zirkulation desselben Vektors um Berandungskurve  $\mathcal{L}$  von  $\mathcal{V}$ ).

Der Satz von Gauß im Raum:

$$\oint_{\mathcal{T}} T^i n_i dO = \iiint_{\mathcal{V}} T^i{}_{;i} dv \quad (\text{A.207})$$

und eine Dimension niedriger, für die Fläche

$$\oint_{\mathcal{L}} T^{\alpha} v_{\alpha} ds = \iint_{\mathcal{T}} T^{\alpha}{}_{;\alpha} dO \quad (\text{A.208})$$

mit

$$v_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta} \lambda^{\beta} .$$

Weitere Sätze (Greenscher Satz)

$$\iiint_{\mathcal{V}} g^{ij} \varphi_{;ij} dv = \iint_{\mathcal{T}} \varphi_{;i} n^i dO \quad (\text{A.209})$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} \psi g^{ij} \varphi_{;ij} dv + \iiint_{\mathcal{V}} g^{ij} \varphi_{;i} \psi_{;j} dv = \iint_{\mathcal{T}} \psi \varphi_{;i} n^i dO \quad (\text{A.210})$$

$$\iint_{\mathcal{T}} a^{\alpha\beta} \varphi_{;\alpha\beta} dO = \oint_{\mathcal{L}} \varphi_{;\alpha} v^{\alpha} ds \quad (\text{A.211})$$

$$\iint_{\mathcal{T}} \psi a^{\alpha\beta} \varphi_{;\alpha\beta} dO + \iint_{\mathcal{T}} a^{\alpha\beta} \psi_{;\alpha} \varphi_{;\beta} dO = \oint_{\mathcal{L}} \psi a^{\alpha\beta} \varphi_{;\beta} v_{\alpha} ds \quad (\text{A.212})$$

Speziell für  $\psi = 1$  folgt:

$$\iint_{\mathcal{T}} a^{\alpha\beta} \varphi_{;\alpha\beta} dO = \oint_{\mathcal{L}} \varphi_{;\alpha} v^{\alpha} ds \quad (\text{A.213})$$

Außerdem

$$\iint_{\mathcal{T}} a^{\alpha\beta} [\psi \varphi_{|\alpha\bar{\beta}} - \varphi \psi_{|\alpha\bar{\beta}}] d\sigma = \oint_{\mathcal{L}} [\psi \varphi_{|\alpha} - \varphi \psi_{|\alpha}] \nu^{\bar{\alpha}} ds \quad (\text{A.214})$$

Ist  $a^{\alpha\beta} \varphi_{|\alpha\bar{\beta}} = -1$  auf  $\mathcal{T}$  und  $\varphi_{|\alpha} \nu^{\bar{\alpha}} = 0$  auf  $\mathcal{L}$ ,  
so ist

$$\iint_{\mathcal{T}} \psi d\sigma = \iint_{\mathcal{T}} a^{\alpha\beta} \varphi_{|\bar{\beta}} \psi_{|\alpha} d\sigma \quad (\text{A.215})$$



Verzeichnis der verwendeten Symbole

Die wichtigsten Symbole sind in alphabetischer Reihenfolge zusammengestellt. Die Seite, auf der sie eingeführt bzw. definiert werden, ist angegeben.

Symbol	Erläuterung	Seite
$a^I_\alpha, a^{I\alpha}$	Basisvektoren auf der Fläche	71
$a_{\alpha\beta}, a^{\alpha\beta}$	metrischer Tensor auf der Fläche	71
$a$	Determinante von $a_{\alpha\beta}$	71
$a_1^\beta, a_2^{\alpha\beta}, a_3^\beta$	Koeffizienten der Differentialgleichungen zur Definition der Verdrängungsdicken	47
$\hat{a}^{\alpha\beta}$	Koeffizienten der Differentialgleichungen des Impulssatzes	57
$b^\alpha_\beta, b_{\alpha\beta}$	der zweite Fundamentaltensor der Fläche	11
$\bar{b}^\alpha_\beta, \bar{b}_{\alpha\beta}$	der versetzte zweite Fundamentaltensor der Fläche	12
$b_1, b_2^\alpha, b_3$	Koeffizienten der Differentialgleichungen zur Definition der Verdrängungsdicken	47
$\hat{b}^\alpha$	Koeffizienten der Differentialgleichungen des Impulssatzes	57
$c$	spezifische Wärme eines inkompressiblen Mediums	11
$c_p$	spezifische Wärme eines Gases bei konstantem Druck	10

Symbol	Erläuterung	Seite
$c_1, c_2^\alpha, c^3$	Koeffizienten der Differentialgleichungen zur Definition der Verdrängungsdicken	47
$\hat{c}^\alpha$	Koeffizienten der Differentialgleichungen des Impulssatzes	57
$\bar{\mathcal{L}}$	Kurve auf der Wandfläche	39
$\overline{d\mathcal{L}}$	infinitesimaler Wandbereich	39
$e$	innere Energie	10
$\bar{e}, \bar{E}$	skalare Eigenschaft eines strömenden Mediums, z.B. Energie, Enthalpie	45
$e^{\alpha\beta}, e_{\alpha\beta}$	alternierender Tensor in zwei Dimensionen	71
$e^{ijk}, e_{ijk}$	alternierender Tensor in drei Dimensionen	71
$g^I_j, g^{Ij}$	Basisvektoren im Schichtraum	79
$g^{ij}, g_{ij}$	metrischer Tensor im Schichtraum für ein Normalkoordinatensystem	80
$g$	Determinante von $g_{ij}$	80
$h$	Gesamtenergie	9
$H$	mittlere Krümmung der Wand	11, 77
$\hat{H}$	mittlere Krümmung	93
$I$	Invariante	86
$i$	Enthalpie	9
$J$	Determinante der Versetzer	12

Symbol	Erläuterung	Seite
$k$	ein Maß für die Wandkrümmung	19
$K$	Gaußsche Krümmung der Wand	11, 77
$\hat{K}, \bar{K}$	totale Krümmungen	93, 94
$\bar{R}$	Volumenelemente der Grenzschicht quer durch diese hindurch	39
$\bar{R}'$	Teilbereich von $\bar{R}$	40
$L$	charakteristische Länge	19
$\mathcal{M}$	Mantelfläche von $\bar{R}$	39
$\mathcal{M}', \mathcal{M}''$	Teile von $\mathcal{M}$	40
$n^I$	Flächennormale	75
$P$	Druck, Grenzschichtströmung	9
$P$	Druck, Außenströmung	54
$p'$	überlagerte turbulente Schwankung des Druckes	31
$Pr$	Prandtl-Zahl = $\lambda / (\mu c_p)$	10
$q_i$	Wärmestrom	9
$q^2$	$= v^i v^j_i$	36
$R_1, R_2$	Hauptkrümmungsradien	78
$R_{\alpha\beta}$	Korrelationskoeffizient der Turbulenz	33
$R_{ijkl}$	Riemann-Tensor im Raum	94
$R_{ij}$	Ricci-Tensor im Raum	96
$R$	Krümmungsinvariante im Raum	96

Symbol	Erläuterung	Seite
$R_{\alpha\beta\gamma\delta}$	Riemann-Tensor der Fläche	94
$\bar{R}_{\alpha\beta}$	Ricci-Tensor der Fläche	96
$\bar{R}$	Krümmungsinvariante der Fläche	96
Re	Reynoldszahl = $U \cdot L / \nu$	18
$s_{\beta}^{\bar{\alpha}}, s_{\bar{\beta}}^{\alpha}$	Versetzer	12, 80
$\gamma$	Fläche	101
t, T	Symbole für tensorielle Eigenschaft	39
T	Temperatur	9
$u^1, u^2, u^3, u^{\alpha}, u^{\beta}$	krummlinige Koordinaten	2
$v^i, v^{\alpha}, v^3$	Geschwindigkeitskomponenten der Grenzschichtströmung	9
$v^{\bar{\alpha}}$	versetzte Geschwindigkeitskomponenten	12
$V^i, V^{\alpha}, V^3$	Geschwindigkeitskomponenten der hypo- thetischen Zähigkeitsfreien Strömung	39
$V^{\bar{\alpha}}$	versetzter Geschwindigkeitsvektor	41
$v^{\bar{\alpha}}, v^{\beta}$	überlagerte turbulente Geschwindig- keitsschwankungen	31
$\overline{v^{\bar{\alpha}}}, \overline{v^3}$	Mittelwerte der turbulenten Gesamt- geschwindigkeit	31
$\nu$	charakteristisches Geschwindigkeits- maß für die Turbulenz	33
U	charakteristische Geschwindigkeit	19
$\mathcal{V}$	Volumen	101
$x^I$	Ortsvektor im übergeordneten cartesischen Koordinatensystem	70

Symbol	Erläuterung	Seite
$\delta$	Grenzschichtdicke	19
$\delta_t (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$	Verdrängungsdicke	40
$\hat{\delta}_t (\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2, \hat{\delta}_3)$	Rechengröße	42
$\delta_\alpha^\beta$	Kroneckersymbol	12, 71
$\delta_{\alpha\mu}^{\alpha\beta}$	Hilfstensor	73
$\Delta$	charakteristisches Maß für Änderung der Krümmung	19
$\bar{\Delta}, \Delta$	Laplace Operator	69
$\Delta_{\alpha 1}, \Delta_{\alpha\beta 2}, \Delta_{\alpha 3}$	Hilfsgrößen	46
$\Delta_{\alpha\beta 1}, \Delta_{\alpha\beta 2}, \Delta_{\alpha\beta 3}$	Hilfsgrößen	51
$\varepsilon^{\alpha\bar{\beta}}, \varepsilon_{\alpha\bar{\beta}}, \varepsilon^{\alpha\bar{\beta}}, \varepsilon_{\alpha\bar{\beta}}$	alternierender Tensor in zwei Dimensionen auf die Wandmetrik bezogen	72
$\varepsilon^{ijk}, \varepsilon_{ijk}, \varepsilon^i{}_{jk}, \dots$	alternierender Tensor in drei Dimensionen auf die Metrik im Normalkoordinatensystem bezogen	90
$\alpha_n$	Normalkrümmung	78
$\alpha_1, \alpha_2$	Hauptkrümmungen	78
$\alpha^I$	vektorielle Krümmung	77
$\lambda$	Wärmeleitfähigkeit	9
$\lambda^I, \lambda^V$	Tangentialvektor	77
$\mu, \mu'$	Zähigkeitskoeffizienten	16
$\nu$	kinematische Zähigkeit	16
$\nu^\alpha$	Normale an eine Kurve	41
$\varrho$	Dichte des realen Mediums	9
$\rho$	Dichte für hypothetische Strömung	39
$\tau_i^j, \tau_\alpha^\beta, \tau_3^\alpha, \tau_\alpha^3, \tau_3^3$	Spannungstensor	9

Symbol	Erläuterung	Seite
$\tau_{\alpha}^{\bar{\beta}}, \tau_{\alpha}^{\beta}, \tau_{\beta}^{\bar{\alpha}}$	versetzter Spannungstensor	12
$\tau_{\alpha}^{\beta}_0$	Wandschubspannung	56
$\Phi$	Dissipation	10
$\varphi$	turbulente Dissipation	36

Literaturverzeichnis

- [ 1 ]        Aris, R.:
- "Vectors, Tensors and the Basic Equations of  
              Fluid Mechanics", Prentice Hall, Englewood  
              Cliffs, N.J. (1962), (286 Seiten)
- [ 2 ]        Becker, E.:
- "Berechnung von Reibungsschichten mit schwacher  
              Sekundärströmung nach dem Impulsverfahren",  
              Zeitschrift für Flugwissenschaften 7, 1959,  
              S.163-175
- [ 3 ]        Beckwith, I.E., Bushnell, D.M.:
- "Detailed Description and Results of a Method  
              for Computing Mean and Fluctuating Quantities  
              in Turbulent Boundary Layers", Technical Note,  
              National Aeronautics and Space Administration  
              TN D-4815, Oktober 1968 (116 Seiten)
- [ 4 ]        Betz, A.:
- "Verlauf der Strömungsgeschwindigkeit in der  
              Nähe einer Wand bei unstetiger Änderung der  
              Krümmung", Luftfahrtforschung, 19, 1942,  
              S.129-131
- [ 5 ]        Blottner, F.G.:
- "Nonequilibrium Laminar Boundary-Layer Flow of  
              Ionized Air", American Institute of Aeronautics  
              and Astronautics Journal, 2, No. 11, November 1964,  
              S.1921-1927

- [ 6 ]      Blottner, F.G.:  
            "Finite Difference Methods of Solution of the  
            Boundary Layer Equations", American Institute of  
            Aeronautics and Astronautics Journal, 8, No.2,  
            Februar 1970, S.193-205
- [ 7 ]      Cebeci, T., Smith, A.M.O., Mosinskis, G.:  
            "Recent Progress in the Calculation of Turbulent  
            Boundary Layers", Douglas Paper 5531, McDonnell-  
            Douglas Corporation, Mai 1969 (38 S.)
- [ 8 ]      Cebeci, T.:  
            "Laminar and Turbulent Incompressible Boundary  
            Layers on Slender Bodies of Revolution in Axial  
            Flow", Journal of Basic Engineering, September 1970,  
            S.545-554
- [ 9 ]      Cebeci, T.; Smith, A.M.O.:  
            "A Finite Difference Method for Calculating Compres-  
            sible Laminar and Turbulent Boundary Layers",  
            Journal of Basic Engineering, September 1970,  
            S.523-535
- [ 10 ]     Coburn, N.:  
            "Vector and Tensor Analysis",  
            MacMillan, New York, 1955 (341 S)
- [ 11 ]     Collatz, L.:  
            "Funktionalanalysis und Numerische Mathematik",  
            Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg,  
            1964 (371 S.)
- [ 12 ]     Cooke, J.C.:  
            "A Calculation Method for Three Dimensional  
            Turbulent Boundary Layers", Aeronautical Research  
            Council, Reports and Memoranda, R & M No.3199  
            (21.059), 1961, 19 Seiten

- [13] Cooke, J.C., Hall, M.G.:  
"Boundary Layers in Three Dimensions" in  
"Progress in Aeronautical Sciences", Ferri, A.,  
Küchemann, D., Sterne, L.H.G., editors,  
1962, Pergamon Press, S.221-282
- [14] Davis, R.T., Werle, M.J., Wornom, S.F.:  
"A Consistent Formulation of Compressible  
Boundary-Layer Theory with Second Order  
Curvature and Displacement Effects",  
American Institute of Aeronautics and Astro-  
nautics Journal, Technical Notes 8, No.9,  
September 1970, S.1701-1703
- [15] Der, J.Jr., Raetz, G.S.:  
"Solution of General Three-Dimensional Laminar  
Boundary Layer Problem by an Exact Numerical  
Method", Institute of Aeronautical Sciences  
Paper No.62-70, Januar 1962 (54 Seiten)
- [16] Djojodihardjo, R.H.:  
A Numerical Method for the Calculation of  
Nonlinear Unsteady Lifting Potential Flow  
Problems", Dissertation am Massachusetts  
Institute of Technology, Oktober 1968,  
Februar 1969 (159 Seiten)
- [17] Djojodihardjo, R.H.:  
"A Numerical Method for the Calculation of  
Nonlinear Unsteady Lifting Potential Flow  
Problems", American Institute of Aeronautics  
and Astronautics Paper 69-23, Januar 1969

- [ 18 ]      Djojodihardjo, R.H.:
- "A Numerical Method for the Calculation of Nonlinear Unsteady Lifting Potential Flow Problems", American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, Oktober 1969, S.2001-2009
- [ 19 ]      Douglas, J.Jr., Jones, B.F.Jr.:
- "On Predictor-Corrector Methods for Nonlinear Parabolic Differential Equations", Journal of the Society of Industrial and Applied Mathematics, 11, No.1, März 1963, S.195-204
- [ 20 ]      Duschek, A., Hochrainer, A.:
- "Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung", Springer-Verlag, Wien 1955, Teil I, II und III
- [ 21 ]      van Dyke, M.:
- "Higher approximations in boundary-layer theory", Journal of Fluid Mechanics 14, 1962, S.161-177, 481-495
- [ 22 ]      East, L.F., Hoxey, R.P.:
- "Low Speed Threedimensional Turbulent Boundary Layer Data", Teil I, Royal Aircraft Establishment TR 69041, März 1969 (64 Seiten), Teil II, Royal Aircraft Establishment TR 69137, Juli 1969 (52 Seiten)
- [ 23 ]      Eckert, H.U.:
- "Simplified Analysis of Turbulent Boundary Layer Development Along Cylindrical Surfaces with Variable Free-Stream Mach Number", Journal of the Aeronautical Sciences, Oktober 1954, S.695-706

- [ 24 ] Eichelbrenner, E.-A., Oudart, A.:  
"Méthode de Calcul de la Couche Limite Tridimensionnelle", Office National d'Études et de Recherches Aéronautiques, Publication No.76, 1955 (49 S.)
- [ 25 ] Ericksen, J.L.:  
"Tensor Fields" in "Handbuch der Physik", Flügge, S. (Herausgeber), Band III/1, "Prinzipien der klassischen Mechanik und Feldtheorie", Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1960, S.794-858
- [ 26 ] Fannelop, T.K.:  
"Displacement Thickness for Boundary Layers with Surface Mass Transfer", American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 4, No.6, Juni 1966, S.1142-1145
- [ 27 ] Fannelop, T.K.:  
"A Method of Solving the Three-Dimensional Laminar Boundary-Layer Equations with Application to a Lifting Re-Entry Body", American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 6, No.6 Juni 1968, S.1075-1084
- [ 28 ] Gadd, G.E.:  
"The Approximate Calculation of Turbulent Boundary Layer Development on Ship Hulls", Quarterly Transactions of the Royal Institution of Naval Architects 113, Januar 1971, S.59-71
- [ 29 ] Green, A.E., Zerna, W.:  
"Theoretical Elasticity", Clarendon Press, Oxford, 1968

- [ 30 ] Hess, J.L., Smith, A.M.O.:  
"Calculation of Non-Lifting Potential Flow about Arbitrary Three-Dimensional Bodies", Report No. E.S. 40622 vom 15. März 1962, Douglas Aircraft Division (177 Seiten)
- [ 31 ] Hess, J.L., Smith, A.M.O.:  
"Calculation of Potential Flow about Arbitrary Bodies" in "Progress Aeronautical Sciences" Volume 8, D. Küchemann (editor), 1967, S.1-138
- [ 32 ] Hinze, J.O.:  
"Turbulence", McGraw Hill Book Company, New York 1959 (586 Seiten)
- [ 33 ] Jaffe, N.A., Lind, R.C., Smith, A.M.O.:  
"Solution to the Binary Diffusion Laminar Boundary-Layer Equations with Second-Order Transverse Curvature", American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 5, No.9, September 1967, S.1563-1569
- [ 34 ] Johnston, J.P.:  
"On the Three-Dimensional Turbulent Boundary Layer Generated by Secondary Flow", Journal of Basic Engineering Series D, Trans. American Society of Mechanical Engineers, 82, 1960, S.622, 233-250
- [ 35 ] Kline, S.J., Sovran, G., Morkovin, M.V., Cockrell, D.J.:  
"Proceedings Computation of Turbulent Boundary Layer 1968 AFOSR-IFIP-Stanford Conference", Volumes I (590 Seiten), II (519 Seiten), Thermo-sciences Division, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, California, U.S.A.  
94305

- [36] Koppenfels, v.  
Luftfahrtforschung 17 (1940) S.189
- [37] Landweber, L.:  
Kapitel "Boundary Layers" und Appendix A in  
"Advanced Mechanics of Fluids", Rouse, H. (editor),  
John Wiley & Sons 1959, S.306-358, 407-420
- [38] Landweber, L.:  
"Characteristics of Ship Boundary Layers",  
8th Symposium on Naval Hydrodynamics, Pasadena,  
August 1970 (37 Seiten)
- [39] Lass, H.:  
"Vector and Tensor Analysis", McGraw Hill, 1950  
(347 Seiten)
- [40] Lighthill, M.J.:  
"On Displacement Thickness",  
Journal of Fluid Mechanics 4, 1958, S.383-392
- [41] Lin, C.C.:  
2.Teil des Kapitels 18 in Michal, A.D.,  
"Matrix and Tensor Calculus", John Wiley & Sons,  
New York, 1957, S.103-110
- [42] Loitsianski, L.G.:  
"Laminare Grenzschichten",  
in deutscher Sprache herausgegeben von  
W. Szablewski, Akademie-Verlag Berlin 1967
- [43] Ludwig, H., Tillmann, W.:  
"Untersuchungen über die Wandschubspannung in  
turbulenten Reibungsschichten",  
Ing.Arch. 17, S.288-299 , 1949

- [44] Lyon, H.M.:  
"A Study of the Flow in the Boundary Layer of Streamline Bodies", Aeronautical Research Council, Reports and Memoranda No.1622 (1934) (82 Seiten)
- [45] Mager, A.:  
"Generalization of Boundary-Layer Momentum-Integral Equations to Three-Dimensional Flows Including Those of Rotating System", National Advisory Committee of Aeronautics TR 1067 (1952), S.191-206
- [46] Martensen, E.:  
"Potentialtheorie", B.G. Teubner, Stuttgart 1968
- [47] Mayer, M.:  
"Theoretische und Experimentelle Untersuchungen über die Zerfaserung thermoplastischer Stoffe in Blasdüsen", Dissertation, T.H. Karlsruhe, 1964
- [48] McConnel, A.J.:  
"Applications of the Absolute Differential Calculus", Blackie, London, Glasgow (1951)
- [49] Millikan, C.B.:  
"The Boundary Layer and Skin Friction for a Figure of Revolution", Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Applied Mechanics, APM - 54 - 3 (1932), S.29-43
- [50] Moore, F.K.:  
"Three-Dimensional Compressible Laminar Boundary-Layer Flow", National Advisory Committee of Aeronautics TN 2279, März 1951

- [51] Moore, F.K.:  
"Displacement Effect of a Three-Dimensional Boundary Layer", National Advisory Committee of Aeronautics TN 2722, Juni 1952
- [52] Murphy, J.S.:  
"Some Effects of Surface Curvature on Laminar Boundary Layer Flow", Journal of the Aeronautical Sciences, Mai 1953, S.338-344
- [53] Murphy, J.S.:  
"Extensions of the Falkner Skan Similar Solutions to Flow with Surface Curvature", American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 3, No.11, November 1965, S.2043-2049
- [54] Myring, D.F.:  
"An Integral Prediction Method for Threedimensional Turbulent Boundary Layers in Incompressible Flow", Royal Aircraft Establishment TR 70147, August 1970, (71 Seiten)
- [55] Naghdi, P.M.:  
"Foundations of Elastic Shell Theory" in "Progress in Solid Mechanics", Volume IV, Kapitel 1, North Holland Publishing Company, Amsterdam 1963, S.1-90
- [56] Neuber, H.:  
"Allgemeine Schalentheorie", Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 29, (1949) S.97-108, 142-146
- [57] Prandtl, L.:  
"Über Reibungsschichten bei dreidimensionalen Strömungen", Betz Festschrift, 1945, S.134-141

- [58] Probst, R.F., Elliott, D.:  
"The Transverse Curvature Effect in Compressible Axially Symmetric Laminar Boundary-Layer Flow",  
Journal of the Aeronautical Sciences, März 1956,  
S.208-224
- [59] Rosenhead, L.:  
Herausgeber, "Laminar Boundary Layers",  
Clarendon Press, Oxford, 1965 (687 Seiten)
- [60] Rotta, J.C.:  
"Turbulent Boundary Layers in Incompressible Flow" in "Progress in Aeronautical Sciences",  
Volume 2, Ferri, Küchemann, Sterne (Herausgeber),  
Pergamon Press, 1962, S.1-219
- [61] Rotta, J.C.:  
"Grenzschichttheorie zweiter Ordnung für ebene und achsensymmetrische Hyperschallströmung",  
Zeitschrift für Flugwissenschaften 15 (1967),  
Heft 8/9, S.329-334
- [62] Sain, K.:  
"On the Thick Boundary Layer Near the Tail of a Body of Revolution", Thesis, Department of Mechanics and Hydraulics, Graduate College, University of Iowa, Januar 1941 (111 Seiten)
- [63] Sauer, R., Szabó, J. (Herausgeber):  
"Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs",  
Teil I, II, III und IV, Springer-Verlag, Berlin und Heidelberg, 1968
- [64] Schlichting, H.:  
"Grenzschicht-Theorie", G. Braun, Karlsruhe, 1965, 736 Seiten

- [65] Schmieder, L.:  
"Schalentheorie mit Schubverformungen in  
allgemeinen Koordinaten", Zeitschrift für Flug-  
wissenschaften 17 (1969), Teil I in Heft 11,  
S.391-404, Teil II in Heft 12, S.434-445
- [66] Sedney, R.:  
"Some Aspects of Three-Dimensional Boundary Layer  
Flows", Quarterly of Applied Mathematics, 15, No.2  
Juli 1957, S.113-122
- [67] Shevelev, Yu.D.:  
"Numerical Calculation of the Three-Dimensional  
Boundary Layer in an Incompressible Fluid",  
Mekhanika Zhidkosti i Gaza, 1, No. 5, S.112-117,  
1966
- [68] Smith, A.M.O., Clutter, D.W.:  
"Solution of the Incompressible Laminar Boundary-  
Layer Equations", American Institute of Aeronau-  
tics and Astronautics Journal, 1, No.9, September  
1963, S.2062-2071
- [69] Smith, A.M.O., Clutter, D.W.:  
"Machine Calculation of Compressible Laminar  
Boundary Layers", American Institute of Aeronau-  
tics and Astronautics Journal, 3, No.4, April 1965,  
S.639-647
- [70] Smith, P.D.:  
"Calculation Methods for Three-Dimensional  
Turbulent Boundary Layers", Aeronautical Research  
Council, Reports and Memoranda, R & M No.3523,  
1968, 42 Seiten

- [ 71 ]            Smith, P.D., Young, A.D.:  
                  "Approximate Solutions of the Three-Dimensional  
                  Laminar Boundary Layer Momentum Integral Equa-  
                  tions", Aeronautical Research Council, Current  
                  Papers, C.P. No.1064, 1969, 32 Seiten
- [ 72 ]            Teipel, I.:  
                  "Der Einfluß der Krümmung bei zweidimensionalen  
                  laminaren Grenzschichten", Deutsche Luft- und  
                  Raumfahrt FB 68-01, Januar 1968 (38 Seiten)
- [ 73 ]            Teipel, I.:  
                  "Die instationäre, laminare Grenzschicht an  
                  gekrümmten Oberflächen", Zeitschrift für Ange-  
                  wandte Mathematik und Mechanik 48 (1968),  
                  Heft 7, S.445-454
- [ 74 ]            Thompson, B.G.J.:  
                  "A Critical Review of Existing Methods of  
                  Calculating the Turbulent Boundary Layer",  
                  Aeronautical Research Council, Reports and  
                  Memoranda, R & M No.3447, 1967, 61 Seiten
- [ 75 ]            Tietz, H.:  
                  "Geometrie" in "Handbuch der Physik",  
                  S. Flügge (Herausgeber), Band II, S.117-197,  
                  Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg  
                  1955
- [ 76 ]            Truesdell, C.:  
                  "The physical components of vectors and tensors",  
                  Zeitschrift für Angewandte Mathematik und  
                  Mechanik, 38, Nr.10/11, Oktober/November 1953,  
                  S.345-356

- [77] Truesdell, C.:  
"Remarks on the paper 'The physical components of vectors and tensors'", Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 34, Nr.1/2, Januar/Februar 1954, kleine Mitteilungen, S.69-70
- [78] Vandrey, F.:  
"A Direct Iteration Method for the Calculation of the Velocity Distribution of Bodies of Revolution and Symmetrical Profiles", Admiralty Research Laboratory A.R.L./RI/G/HY/12/2, August 1951 (38 Seiten)
- [79] Walz, A.:  
"Strömungs- und Temperaturgrenzschichten", G. Braun, Karlsruhe, 1966 (259 Seiten)
- [80] Warsi, Z.U.A.:  
"A Numerical Method of Solving the Three-Dimensional Boundary Layer Equations with Application to a Rotating Flat Blade", American Institute of Aeronautics and Astronautics Paper 09-227, Februar 1969 (8 Seiten)
- [81] Weatherburn, C.E.:  
"Differentialgeometry of three dimensions", Band I und II, Cambridge University Press, 1927
- [82] Wieghardt, K.:  
"On a Simple Method for Calculating Laminar Boundary Layers", The Aeronautical Quarterly, V, May 1954
- [83] Wieghardt, K.:  
"Über Reibungsschichten bei Druckanstieg", Forschungshefte für Schiffstechnik, Heft 9, 1955

- [ 84 ]      Wieghardt, K.:  
              "Betrachtungen zum Zähigkeitswiderstand von Schiff-  
              fen", Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft  
              52, S.184-202
- [ 85 ]      Wieghardt, K.:  
              "Theoretische Strömungslehre",  
              B.G. Teubner, Stuttgart 1965 (226 Seiten)
- [ 86 ]      Williams, G., Hector, D.L.:  
              "A Note on Physical Components", Zeitschrift für  
              Angewandte Mathematik und Mechanik, 49, (1969),  
              Heft 11, S.665-670
- [ 87 ]      Winter, K.G., Rotta, J.C., Smith, K.G.:  
              "Untersuchungen der turbulenten Grenzschicht an  
              einem taillierten Drehkörper bei Unter- und Über-  
              schallströmung", Deutsche Luft- und Raumfahrt  
              FB 65-52, November 1965 (71 Seiten) oder Royal  
              Aircraft Establishment TR 68215, August 1968,  
              (106 Seiten)