

540 | März 1994

## SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Andrés Cura Hochbaum

### Ein Finite-Volumen-Verfahren zur Berechnung turbulenter Schiffsumströmungen

**TUHH**

*Technische Universität Hamburg-Harburg*

# **Ein Finite-Volumen-Verfahren zur Berechnung turbulenter Schiffsumströmungen**

Andrés Cura Hochbaum, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1993

ISBN: 3-89220-540-x

© Technische Universität Hamburg-Harburg  
Schriftenreihe Schiffbau  
Schwarzenbergstraße 95c  
D-21073 Hamburg

<http://www.tuhh.de/vss>

**Ein Finite-Volumen-Verfahren  
zur Berechnung turbulenter Schiffsumströmungen**

Dissertation  
zur Erlangung des Grades  
Doktor-Ingenieur  
der Universität Hamburg

vorgelegt von

Andrés Cura Hochbaum  
aus Montevideo

Hamburg  
Dezember 1993

**Tag der Disputation: 3.3.1994**

**Gutachter: Prof. Dr. H. Söding**

**Dr. J. Kux**

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr. 540

Ein Finite-Volumen-Verfahren  
zur Berechnung turbulenter Schiffsumströmungen

Andrés Cura Hochbaum

März 1994

# Inhalt

|   |           |
|---|-----------|
| Symbolverzeichnis   | ii        |
| Abbildungsverzeichnis                                       | iv        |
| <b>1 Einleitung</b>   | <b>1</b>  |
| <b>2 Grundgleichungen</b>                                   | <b>7</b>  |
| 2.1 Navier-Stokes-Gleichungen . . . . .                     | 7         |
| 2.2 Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen . . . . . | 8         |
| 2.3 Turbulenzmodellierung . . . . .                         | 9         |
| <b>3 Diskretisierung des Strömungsgebiets</b>               | <b>11</b> |
| 3.1 Eigenschaften des numerischen Gitters . . . . .         | 11        |
| 3.2 Gittererzeugung . . . . .                               | 13        |
| <b>4 Diskretisierung der Erhaltungsgleichungen</b>          | <b>15</b> |
| 4.1 Transformation . . . . .                                | 15        |
| 4.2 Finite-Volumen-Methode . . . . .                        | 17        |
| 4.2.1 Approximation der Diffusionsterme . . . . .           | 19        |
| 4.2.2 Approximation der Konvektionsterme . . . . .          | 21        |
| 4.3 Aufstellung des Gleichungssystems . . . . .             | 26        |
| 4.4 Randbedingungen . . . . .                               | 27        |
| <b>5 Lösungsalgorithmus</b>                                 | <b>31</b> |
| 5.1 Druck-Geschwindigkeitskopplung . . . . .                | 31        |
| 5.1.1 Bestimmung der Massenflüsse . . . . .                 | 32        |
| 5.1.2 Druckkorrekturgleichung(en) . . . . .                 | 34        |
| 5.2 Iteratives Lösungsverfahren . . . . .                   | 38        |
| <b>6 Anwendung auf Schiffsumströmungen</b>                  | <b>42</b> |
| 6.1 Allgemeines . . . . .                                   | 42        |
| 6.2 Ergebnisse für das Wigley-Schiff . . . . .              | 43        |
| 6.3 Ergebnisse für den HSVA-Tanker . . . . .                | 55        |
| <b>7 Zusammenfassung und Ausblick</b>                       | <b>79</b> |
| <b>Literatur</b>  | <b>80</b> |

# Symbolverzeichnis

Weitere Symbole, die nur in einzelnen Abschnitten angesprochen werden, sind in den entsprechenden Textteilen definiert.

## Lateinische Buchstaben

|               |   |        |
|---------------|---|--------|
| $a$           | Koeffizienten der diskretisierten Impulsgleichungen   | (S.26) |
| $A_j^{(i)}$   | Komponente in kartesischer Richtung $j$ des Hilfsvektors $\vec{A}^{(i)}$                                      | (S.18) |
| $A_j$         | Komponente in kartesische Richtung $j$ des Hilfsvektors $\vec{A}$   | (S.18) |
| $B$           | Schiffsbreite   |        |
| $C_B$         | Blockkoeffizient  |        |
| $C_p$         | $= \frac{p-p_0}{\rho/2U_0^2}$ Druckbeiwert  |        |
| $Conv_i^{nb}$ | Konvektionsfluß in Richtung $i$ durch Zellseite $nb$  | (S.22) |
| $Diff_i^{nb}$ | Diffusionsfluß in Richtung $i$ durch Zellseite $nb$   | (S.21) |
| $f$           | Bezeichnung für Interpolationsfaktoren  | (S.25) |
| $f_i$         | äußere Kraft (pro Volumeneinheit) in kartesischer Richtung $i$  |        |
| $Fluss_{nb}$  | Massenfluß durch Zellseite $nb$   | (S.21) |
| $J$           | $= \frac{\partial(y^1, y^2, y^3)}{\partial(x^1, x^2, x^3)}$ Jacobi-Determinante der Koordinatentransformation | (S.16) |
| $k$           | turbulente kinetische Energie   | (S.9)  |
| $L$           | Schiffslänge  |        |
| $\vec{n}$     | aus der Zelle hinauszeigender Einheitsnormalenvektor  |        |
| $nb$          | Bezeichnung für Zellseiten $e, w, n, s, t, b$   | (S.20) |
| $NB$          | Bezeichnung für Nachbarzellmittelpunkte $E, W, N, S, T, B$  | (S.20) |
| $P$           | Mittelpunkt der betrachteten Zelle  | (S.20) |
| $p$           | Druck   |        |
| $p_0$         | ungestörter Druck   |        |
| $Q$           | Rechte Seiten der Druckkorrekturgleichungen   | (S.36) |
| $q^{(i)}$     | Expansionsfaktor in krummliniger Richtung $i$   | (S.23) |
| $R_n$         | $= U_0 L/\nu$ Reynoldszahl  |        |
| $S$           | Rechte Seiten der diskretisierten Impulsgleichungen   | (S.26) |
| $S_0$         | gesamte benetzte Fläche (unterhalb der Wasserlinie)   |        |
| $t$           | Zeit  |        |
| $T$           | Tiefgang  |        |
| $U_0$         | Anströmgeschwindigkeit  |        |
| $U_\tau$      | $= \sqrt{\tau_w/\rho}$ Wandschubspannungsgeschwindigkeit  |        |
| $v_i$         | Geschwindigkeitskomponente in kartesischer Richtung $i$   |        |
| $x^i$         | krummlinige Koordinate in Richtung $i$  |        |
| $y^i$         | kartesische Koordinate in Richtung $i$  |        |
| $y^+$         | innere Koordinate (dimensionsloser Wandabstand)   | (S.10) |

## Griechische Buchstaben

|                |  |        |
|----------------|--|--------|
| $\alpha$       | Koeffizienten der Druckkorrekturgleichungen          | (S.36) |
| $\alpha_p$     | Unterrelaxationsfaktor des Druckes                   | (S.38) |
| $\alpha_v$     | Unterrelaxationsfaktor der Geschwindigkeiten         | (S.32) |
| $\delta S$     | Fläche der betreffenden Zelleseite                   |        |
| $\delta V$     | Zellvolumen  |        |
| $\varepsilon$  | Dissipationsrate der turbulenten kinetischen Energie |        |
| $\mu, \nu$     | Zähigkeit des Fluids ( $\nu = \mu/\rho$ )            |        |
| $\mu_{eff}$    | = $\mu + \mu_t$ effektive Zähigkeit                  |        |
| $\mu_t, \nu_t$ | turbulente Zähigkeit ( $\nu_t = \mu_t/\rho$ )        |        |
| $\rho$         | Dichte des Fluids                                    |        |
| $\tau_{ij}$    | viskose Spannung                                     | (S.7)  |
| $\tau_w$       | Betrag der Wandschubspannung                         |        |

# Abbildungsverzeichnis

|    |   |    |
|----|---|----|
| 1  | Rechengebiet und Koordinatensystem . . . . .                                      | 12 |
| 2  | Bezeichnung der Punkte im Gitter . . . . .  | 20 |
| 3  | Ablauf des iterativen Lösungsverfahrens . . . . .                                 | 40 |
| 4  | Spantenriß. Wigley-Schiff . . . . .   | 45 |
| 5  | Numerisches Gitter. Wigley-Schiff . . . . .                                       | 46 |
| 6  | Numerisches Gitter. Wigley-Schiff, Hauptspant . . . . .                           | 46 |
| 7  | Isolinien der Axialgeschwindigkeit. Wigley-Schiff, Spant $x/L = 0.9$ . . . . .    | 47 |
| 8  | Richtungsfeld der Quergeschwindigkeit. Wigley-Schiff, Spant $x/L = 0.9$ . . . . . | 48 |
| 9  | Isolinien der Axialgeschwindigkeit. Wigley-Schiff, Spant $x/L = 1.0$ . . . . .    | 49 |
| 10 | Richtungsfeld der Quergeschwindigkeit. Wigley-Schiff, Spant $x/L = 1.0$ . . . . . | 50 |
| 11 | Druckbeiwert in Längsrichtung. Wigley-Schiff . . . . .                            | 51 |
| 12 | Wandschubspannungsgeschwindigkeit in Längsrichtung. Wigley-Schiff . . . . .       | 51 |
| 13 | Axialgeschwindigkeit im Nachlauf. Wigley-Schiff . . . . .                         | 53 |
| 14 | Widerstandsbeiwert in reibungsfreier Strömung. Wigley-Schiff . . . . .            | 53 |
| 15 | Druck und Geschwindigkeit in reibungsfreier Strömung. Wigley-Schiff . . . . .     | 54 |
| 16 | Spantenriß. HSVA-Tanker . . . . .   | 56 |
| 17 | Numerisches Gitter. HSVA-Tanker . . . . .   | 57 |
| 18 | Numerisches Gitter. HSVA-Tanker, Spant $x/L = 0.940$ . . . . .                    | 58 |
| 19 | Numerisches Gitter. HSVA-Tanker, Spant $x/L = 0.976$ . . . . .                    | 58 |
| 20 | Numerisches Gitter. HSVA-Tanker, Wasserlinienebene . . . . .                      | 59 |
| 21 | Numerisches Gitter. HSVA-Tanker, Heckkontur . . . . .                             | 59 |
| 22 | Isolinien der Axialgeschwindigkeit. HSVA-Tanker, Spant $x/L = 0.940$ . . . . .    | 61 |
| 23 | Richtungsfeld der Quergeschwindigkeit. HSVA-Tanker, Spant $x/L = 0.940$ . . . . . | 62 |
| 24 | Isolinien des Druckbeiwertes. HSVA-Tanker, Spant $x/L = 0.940$ . . . . .          | 63 |
| 25 | Isolinien der Scheinzähigkeit. HSVA-Tanker, Spant $x/L = 0.940$ . . . . .         | 64 |
| 26 | Isolinien der Axialgeschwindigkeit. HSVA-Tanker, Spant $x/L = 0.976$ . . . . .    | 65 |
| 27 | Richtungsfeld der Quergeschwindigkeit. HSVA-Tanker, Spant $x/L = 0.976$ . . . . . | 66 |
| 28 | Isolinien der Axialgeschwindigkeit. HSVA-Tanker, Spant $x/L = 1.042$ . . . . .    | 67 |
| 29 | Richtungsfeld der Quergeschwindigkeit. HSVA-Tanker, Spant $x/L = 1.042$ . . . . . | 68 |
| 30 | Druckbeiwert in Längsrichtung. HSVA-Tanker . . . . .                              | 70 |
| 31 | Druckbeiwert in Spantumfangersrichtung. HSVA-Tanker . . . . .                     | 70 |
| 32 | Wandschubspannungsgeschwindigkeit in Längsrichtung. HSVA-Tanker . . . . .         | 71 |
| 33 | Wandschubspannungsgeschw. in Spantumfangersrichtung. HSVA-Tanker . . . . .        | 71 |
| 34 | Axialgeschwindigkeit im Nachlauf. HSVA-Tanker . . . . .                           | 72 |
| 35 | Isolinien des Druckbeiwertes auf dem Rumpf, Seitenansicht. HSVA-Tanker . . . . .  | 73 |
| 36 | Isolinien des Druckbeiwertes auf dem Rumpf, Bodenansicht. HSVA-Tanker . . . . .   | 73 |
| 37 | Anstrichversuch. Doppelmodell HSVA-Tanker . . . . .                               | 74 |
| 38 | Richtungsfeld der Wandschubspannung. HSVA-Tanker . . . . .                        | 74 |
| 39 | Richtungsfeld der Geschwindigkeit. HSVA-Tanker, Wasserlinienebene . . . . .       | 75 |
| 40 | Richtungsfeld der Geschwindigkeit. HSVA-Tanker, Symmetrie-Ebene . . . . .         | 75 |
| 41 | Gitterabhängigkeit der numerischen Lösung. HSVA-Tanker . . . . .                  | 77 |
| 42 | Gebietsabhängigkeit der numerischen Lösung. HSVA-Tanker . . . . .                 | 77 |
| 43 | Konvergenzgeschichte der Widerstandsbeiwerte. HSVA-Tanker, Hinterschiff . . . . . | 78 |
| 44 | Konvergenzgeschichte der numerischen Lösung. HSVA-Tanker . . . . .                | 78 |

# 1 Einleitung

Die Prognose des Schiffswiderstandes und des Propellerzustroms spielt eine wichtige Rolle beim Entwurf des Schiffsrumpfs und -Propellers. In der Vergangenheit war man für zuverlässige Aussagen über diese Aspekte des Schiffsentwurfs ausschließlich auf Modellversuche angewiesen. Heute erlauben stark gestiegene Rechnerkapazitäten und verbesserte Methoden die numerische Berechnung der viskosen, turbulenten Schiffsumströmung auch für reale Schiffsgemetrien und Reynoldszahlen [12,24,39]. Obwohl die Genauigkeit noch nicht für alle interessierenden Fragen ausreicht [27,41] und somit Modellversuche auf absehbare Zeit unverzichtbar bleiben werden, sind solche Rechnungen jetzt schon in der Lage, wichtige Informationen über die Strömungsverhältnisse zu liefern und z.B. Aufschluß darüber zu geben, ob eine Heckform günstiger erscheint als eine andere [21]. Berechnungen liefern einen detaillierten Einblick in die Strömung, der im Modellversuch nur mit erheblichen Kosten und Zeitaufwand (Laser-Doppler-Velocimetrie, Druckanbohrungen) erreicht werden kann. Für den praktischen Entwurfsprozeß benutzt man daher auch Verfahren zur Berechnung viskoser Strömungen, da sie unser Verständnis der äußerst komplexen Hinterschiffsumströmung bei vertretbarem Zeit- und Kostenaufwand verbessern. Eine Vor-Optimierung der Schiffsförm durch den Einsatz numerischer Strömungsmechanik (CFD = computational fluid dynamics) im frühen Entwurfsstadium kann eventuelle Mängel rechtzeitig aufdecken und die Anzahl der notwendigen Modellversuche reduzieren. Unter CFD-Experten besteht allgemeiner Konsens darüber, daß die numerische Simulation turbulenter Schiffsumströmungen in den nächsten Jahren die wichtigste Ergänzung zu den Modellversuchen sein wird.

Die Berechnung der viskosen, turbulenten Schiffsumströmung ist eine junge Disziplin. Ihre Vorläufer waren die 3D-Grenzschichtrechnungen der 70er Jahre. Diese setzten eine vorherige Berechnung der reibungsfreien Strömung voraus. Zunächst wurde die Potentialströmung um das Schiff mittels eines Panelverfahrens [15,59] berechnet, um die Verteilung der Geschwindigkeit auf dem Rumpf zu ermitteln. Anschließend wurde die Strömung in Wandnähe durch Lösen von Differentialgleichungen berechnet, die durch Vereinfachungen aus den Impulsgleichungen und der Kontinuitätsgleichung gewonnen wurden [25]. Durch diese Vorgehensweise können dort recht gute Ergebnisse erzielt werden, wo eine dünne Grenzschicht vorliegt und weder starker 'cross flow' noch eine Rückströmung oder Ablösung auftreten [26]. Praktisch relevant sind aber vor allem die Zuströmung zum Propeller und die Ablösung am Hinterschiff. Diese können von Grenzschichtverfahren nicht behandelt werden.

Anfang der 80er Jahre zeigten erste sogenannte Navier-Stokes-Löser [6,55,18], meist noch mit Vereinfachungen in den Gleichungen ('Parabolisierung'), die Möglichkeiten solcher Verfahren und führten zu einer Verschiebung der Forschungsaktivitäten weg von Grenzschichtverfahren hin zu immer komplexeren Navier-Stokes-Modellen. Während eine Grenzschichtrechnung vom mathematischen Modell her nur die Ermittlung zuverlässiger Information am Rumpf ermöglicht, typischerweise für die vorderen 95 Prozent der Schiffslänge, unterliegen die Navier-Stokes-Verfahren keinerlei Beschränkungen im Hinblick auf ihren Gültigkeitsbereich. Erst damit ist eine Vorhersage des Propellerzustroms und des Schiffswiderstandes prinzipiell möglich geworden.

Im letzten Jahrzehnt fand eine rasante Entwicklung im Bereich der Berechnung viskoser Schiffsumströmungen statt. Der 'Workshop on Ship Viscous Flow' in Göteborg 1990 [27] und die '6th International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics' in Iowa 1993 [41] zeigen deutliche Fortschritte gegenüber den anfänglichen Rechnungen und geben zugleich den Stand des Wissens wieder.

Die meisten Verfahren lösen die Impulsgleichungen und die Kontinuitätsgleichung durch Anwendung von Finite-Differenzen- bzw. Finite-Volumen-Methoden, um daraus die zeitlich *gemittelten* Geschwindigkeiten und den Druck für die inkompressible Schiffsumströmung zu bestimmen. Finite-Elemente-Methoden sind kaum vertreten, was auf die nicht direkte Übertragbarkeit der in der Strukturmechanik entwickelten Verfahren zurückzuführen ist. Methoden, die eine 'künstliche Kompressibilität' des Fluids ansetzen, um die weiterentwickelten Verfahren der Luftfahrt auch für inkompressible Strömung einsetzen zu können, haben sich ebenfalls bisher nicht durchgesetzt. Statt dessen werden speziell für inkompressible Strömungen entwickelte Verfahren angewendet, bei denen die Kopplung der Druck- und Geschwindigkeitsfelder iterativ erfolgt. In der Regel benutzen diese Verfahren keine Mehrgittertechnik, was auf die Schwierigkeiten der Implementierung dieser Technik in bereits bestehenden Verfahren hindeutet. Ferner wird noch mehrheitlich der wandnahe Bereich durch vorgegebene Verläufe für die Geschwindigkeit (Wandfunktionen) überbrückt, die im Laufe der Rechnung angepaßt werden. Die benutzten Rechengitter sind meist strukturiert und nichtadaptiv; die Zellanzahl bewegt sich um  $10^5$ .

Wegen der vielen noch ungelösten Schwierigkeiten sowie des großen Rechenaufwandes und Speicherplatzbedarfs beschränken sich die Rechnungen üblicherweise noch auf den Fall eines mit konstanter Geschwindigkeit geradeaus fahrenden Schiffes (ohne Anhänge) unter Vernachlässigung der freien Wasseroberfläche. Ferner wird oft nur die Hinterschiffsumströmung berechnet. Da die Berechnung turbulenter Schiffsumströmungen mit zunehmender Reynoldszahl  $R_n = U_0 L / \nu$  ( $U_0$  ist die Schiffsgeschwindigkeit,  $L$  die Schiffslänge und  $\nu$  die kinematische Zähigkeit des Fluids) komplizierter wird, rechnet man üblicherweise die Strömung um das Schiffmodell statt um die Großausführung. Auch ich werde mich in dieser Arbeit auf diesen vereinfachten Fall beschränken.

Die Ermittlung der freien Oberfläche als Bestandteil der Rechnung ist prinzipiell möglich [16,33,41]. Auch die Umströmung der Großausführung (mit Wandfunktionen) wurde in jüngster Zeit von einigen Autoren angegangen [21,56], und sogar der sehr anspruchsvolle Fall eines Schiffes in Schräganströmung wurde bereits berechnet [40]. Diese Rechnungen liefern zwar wichtige Informationen über die Möglichkeiten und den Verbesserungsbedarf der Verfahren, zeigen aber auch, daß die Methoden dafür noch nicht ausgereift sind.

Während sich in anderen Ländern, vor allem in den USA und in Japan, viele Forschungsgruppen und Versuchsanstalten seit vielen Jahren mit der Berechnung viskoser Schiffsumströmungen befassen, wurde dies in Deutschland lange vernachlässigt. Dagegen sind in anderen Anwendungsbereichen der Strömungsmechanik (z.B. Luftfahrttechnik, Turbomaschinenbau) auch in Deutschland numerische Verfahren zur Berechnung viskoser Strömungen entwickelt worden. Abgesehen von sporadischen Anwendungen einiger

Forschungsgruppen außerhalb des Schiffbaus auf Schiffe (z.B. Majumdar et al. in [27]), beschränkt sich der Einsatz von CFD für viskose Schiffsumströmungen auf die Anwendung kommerziell erhältlicher Mehrzweckprogramme (Navier-Stokes Solver wie PHOENIX oder STAR-CD). Diese wurden nicht für Schiffsumströmungen entwickelt und sind deswegen nicht auf die Besonderheiten solcher Strömungen zugeschnitten. Die bisherige Erfahrung mit solchen Programmen zeigt einen mäßigen Erfolg. Der Benutzer hat keinen Zugang zum Quellprogramm, wodurch Erweiterungen und Verbesserungen nur bedingt möglich sind. Neue Programmversionen bzw. 'updates' kommen nur zögerlich, und es besteht eine völlige Abhängigkeit vom Softwarelieferant. Somit stellt der Erwerb solcher Programme keine befriedigende Lösung dar, wenn es darum geht, den erwähnten Rückstand aufzuholen. Aus diesen Feststellungen heraus ergab sich die Aufgabe, durch die Entwicklung eines eigenen, speziell auf Schiffsumströmungen zugeschnittenen Programms den Vorsprung anderer Länder abzubauen und die Basis für Verbesserungen zu schaffen, indem bei dieser Entwicklung modernere Techniken ausgenutzt werden bzw. die Voraussetzungen für ihre Implementierung geschaffen werden. Ich verstehe diese Arbeit als ersten Schritt in diese Richtung.

Zur Berechnung der inkompressiblen viskosen Schiffsumströmung werden die Erhaltungsgleichungen für den Impuls in drei Raumrichtungen und für die Masse gelöst. Die Erhaltungssätze in Form von Differentialgleichungen unter der Voraussetzung eines Newtonschen Fluids, werden von den Navier-Stokes-Gleichungen und der Kontinuitätsgleichung gegeben (s.2.1). Unsere Strömungen folgen in sehr guter Näherung den Gesetzen eines inkompressiblen Newtonschen Fluids, bei denen die viskosen Spannungen proportional zu den Deformationsraten der Flüssigkeit sind. Die Navier-Stokes-Gleichungen und die Kontinuitätsgleichung stellen ein nichtlineares System partieller Differentialgleichungen in den drei Geschwindigkeitskomponenten und dem Druck dar. Für technisch relevante Strömungen mit Turbulenz und komplexer Geometrie ist dieses Gleichungssystem analytisch nicht lösbar. Es besteht aber die Möglichkeit einer numerischen Lösung, wobei keine analytischen Ausdrücke für die Unbekannten gesucht werden, sondern ihre Werte an endlich vielen Stellen im Strömungsgebiet. Hierfür werden sowohl das 3D-Strömungsgebiet als auch die Differentialgleichungen diskretisiert [1,48]. Der Raum in einer großen Umgebung um das Schiff wird mittels eines sogenannten numerischen Gitters in Zellen (Finite-Volumen) lückenlos unterteilt. Für jede Zelle werden die Erhaltungsgleichungen aufgestellt. Die Differentialausdrücke in den Gleichungen werden durch algebraische Ausdrücke approximiert, in denen nur Werte der Unbekannten in Zellmittelpunkten auftreten. Dieses Vorgehen führt zu einem großen, allerdings schwachbesetzten, nichtlinearen algebraischen Gleichungssystem mit z.B. einer halben Million Unbekannten. Dieses Gleichungssystem wird iterativ gelöst.

Das Differentialgleichungssystem bestehend aus den Navier-Stokes-Gleichungen und der Kontinuitätsgleichung ist elliptisch in den Raumkoordinaten und parabolisch in der Zeit. Diese mathematische Eigenschaft bedeutet physikalisch, daß Störungen sich in alle Richtungen im Raum ausbreiten können. Somit übt die gesamte Umgebung einen Einfluß auf ein Fluidteilchen aus. Das Verfahren zur Lösung des Differentialgleichungssystems muß dieser Eigenschaft Rechnung tragen. Dies stellt einen wichtigen Unterschied zu den Grenzschichtverfahren dar. Die dort in den Gleichungen getroffenen Vereinfachungen führen

das Differentialgleichungssystem in ein im Raum parabolisches System über. Störungen können sich dann nur stromabwärts ausbreiten, so daß bei der numerischen Lösung aus bekannten Werten stromaufwärts die Unbekannten weiter stromabwärts schrittweise bestimmt werden können was den Rechenaufwand und den Speicherbedarf drastisch reduziert. Auf der anderen Seite versagen diese Verfahren, wenn die Voraussetzungen für die gemachten Vereinfachungen nicht mehr zutreffen, wie es üblicherweise im Heckbereich eines Schiffes der Fall ist.

Nach heutiger Auffassung beschreiben die Navier-Stokes-Gleichungen und die Kontinuitätsgleichung auch turbulente inkompressible Strömungen vollständig. Insofern könnte man durch Lösung derselben auch turbulente Strömungen berechnen, ohne die Turbulenz extra 'modellieren' zu müssen. Man bezeichnet dies als direkte numerische Simulation (DNS). Die dafür nötige extrem hohe Auflösung, sowohl im Raum als auch in der Zeit (eine turbulente Strömung ist stets instationär), läßt diese Vorgehensweise für die uns interessierende 3D-Strömung mit hoher Reynoldszahl als völlig utopisch erscheinen [5,34]. Aus diesem Grund wird eine statistische Betrachtungsweise der turbulenten Strömung eingeführt. Eine Aufspaltung der Unbekannten (Momentanwerte für Druck und Geschwindigkeiten) jeweils in einen zeitlich gemittelten Wert und eine Schwankung und eine zeitliche Mittelung der Erhaltungsgleichungen führen zu den Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen (s.2.2). Diese Gleichungen unterscheiden sich formell von den ursprünglichen Gleichungen nur durch einige zusätzliche Terme. Diese neuen Terme enthalten Korrelationen der (unbekannten) Geschwindigkeitsschwankungen, die turbulente Spannungen genannt werden. In den übrigen Termen der Differentialgleichungen stehen die mittleren Werte der Geschwindigkeiten und des Druckes anstelle ihrer Momentanwerte. Diese Vorgehensweise führt dazu, daß jetzt mehr Unbekannte als Gleichungen vorhanden sind. Dieses 'Schließungsproblem' wird durch die Einführung eines sogenannten Turbulenzmodells behoben (s.2.3).

Das Turbulenzmodell ermöglicht die Approximation der turbulenten Spannungen abhängig von den mittleren Geschwindigkeiten und ggf. dem mittleren Druck. Algebraische Turbulenzmodelle [3,5] benötigen dafür keine zusätzlichen Differentialgleichungen; sie werden deswegen auch Nullgleichungs-Turbulenzmodelle genannt. Da der Transport von Turbulenz bei diesen Modellen nicht berücksichtigt wird, kann nur eine sich im Gleichgewicht befindende Strömung (gleichgroße Produktion und Dissipation von Turbulenz) mit guter Näherung durch solche Turbulenzmodelle beschrieben werden (z.B. dünne Grenzschichtströmung). Dies trifft im Nachlauf eines Schiffes nicht zu und muß bei der Auswertung der Ergebnisse berücksichtigt werden. Vorteile dieser Modelle sind ihre uneingeschränkte Gültigkeit in unmittelbarer Wandnähe, ihre leichte Programmierung und der geringe Rechenaufwand. Ein- und Zweigleichungs-Turbulenzmodelle bestimmen die turbulenten Spannungen über charakteristische turbulente Größen, für die zusätzliche Erhaltungsgleichungen gelöst werden müssen. Der bekannteste Vertreter dieser Modelle ist das  $k-\varepsilon$ -Modell von Launder und Spalding [28]. Da das Standard  $k-\varepsilon$ -Modell von einer voll turbulenten Strömung ausgeht, ist es in unmittelbarer Wandnähe nicht gültig. Die physikalische Randbedingung an einer Wand, nämlich die Haftbedingung, wird daher nur indirekt durch 'Wandfunktionen' aufgestellt, die den wandnahen Bereich nach einem vorgeschriebenen Verlauf (meist dem logarithmischen Wandgesetz) überbrücken. Diese

Wandfunktionen werden aber aus vereinfachten Theorien (z.B. 2D-Grenzschicht) hergeleitet und können nicht die komplizierte, stark dreidimensionale Strömung im hinteren Heckbereich beschreiben. Für eine Auflösung der Strömung bis zur Wand hin, ohne Wandfunktionen, kann eine Erweiterung des Standardmodells eingesetzt werden, was allerdings mit zusätzlichen Schwierigkeiten verbunden ist. Die genannten Turbulenzmodelle basieren alle auf dem Prinzip der Wirbelviskosität (s.2.3), das physikalisch nur beschränkt gültig ist. Anspruchsvollere, allerdings wesentlich rechenaufwendigere und noch nicht ganz ausgereifte Modelle sind bei technischen Anwendungen hin und wieder angewandt worden. In dieser Arbeit wird ein algebraisches Turbulenzmodell benutzt und auf die Benutzung von Wandfunktionen verzichtet. Das erfordert eine extrem feine Auflösung in Wandnähe, was die Konvergenz des Verfahrens stark beeinträchtigt (s.5.2). Durch den Verzicht auf Wandfunktionen sollen aber die komplizierten Strömungsverhältnisse im hinteren Heckbereich besser erfaßt werden. Die Turbulenzmodellierung selbst stellt keinen Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit dar. Bei den durchgeführten Anwendungsrechnungen wurde eine von P. Sames geschriebene Programm-Routine nach dem Modell von Cebeci-Smith [5] eingesetzt.

Die zur Diskretisierung des Raumes benutzten 'strukturierten', nichtorthogonalen randangepaßten Gitter (s.3.1) werden, durch Lösung eines dafür geeigneten Differentialgleichungssystems, 'numerisch' erzeugt (s.3.2). Dazu müssen zunächst die Netze auf allen Rändern des Rechengebiets erstellt werden, insbesondere auch auf dem Schiffsrumpf. Letzteres erfordert eine Schnittstelle zwischen dem 'Netzerzeuger' und einem Programm zur Beschreibung von Schiffsoberflächen. Eine Schnittstelle zum Programm EUMEDS [50] wurde von E. Gerlach geschaffen.

Die Wahl einer nichtversetzten Anordnung der Variablen im Gitter ('nonstaggered grid'), wobei die Geschwindigkeiten und der Druck im Mittelpunkt der Zellen gespeichert werden, und die Wahl der kartesischen Geschwindigkeitskomponenten als Unbekannte (s.4.1) führen zu einem deutlich einfacheren und programmtechnisch günstigeren Verfahren als die im o.g. Workshop von Göteborg 1990 noch mehrheitlich vertretenen 'konventionellen' Verfahren, die auf versetzten Gittern ('staggered grid') basieren. Dieser bereits von anderen Autoren, z.B. Perić [42] und Majumdar et al. [31], erfolgreich eingeschlagene Weg wird durch eine spezielle Bestimmung der Massenflüsse durch die Zellseiten ermöglicht, die numerische Schwierigkeiten vermeidet, welche sonst bei Anwendung eines nichtversetzten Netzes auftreten.

Die gemittelten Erhaltungsgleichungen werden nach der Finite-Volumen-Methode (FVM) diskretisiert [36,48,58]. Dabei werden die Gleichungen zur Impuls- und Massenerhaltung in jeder Zelle des Gitters erfüllt. Bei einer Addition der diskretisierten Erhaltungsgleichungen für alle Zellen heben sich die Impuls- und Massenflüsse durch alle Zellseiten, die nicht auf Rändern liegen, paarweise auf. Somit werden automatisch die Erhaltungssätze für das ganze Rechengebiet eingehalten. Diese 'konservative Eigenschaft' der FVM und ihre physikalisch anschaulichere Betrachtungsweise machen sie attraktiver als die Finite-Differenzen-Methode (FDM), die ursprünglich in der Strömungsmechanik überwiegend benutzt wurde [1].

Die Approximation der Konvektionsterme (s.4.2) spielt eine entscheidende Rolle für die Stabilität und Genauigkeit des Verfahrens. Das sehr verbreitete 'upwind differencing scheme' (UDS) zur Approximation der Geschwindigkeit in den Konvektionstermen führt zwar zu einem numerisch sehr stabilen Verfahren, weist aber neben bekannten Schwächen (numerische Diffusion) auch einen *Konsistenzmangel* auf (s.4.2.2), worauf in der Literatur nicht hingewiesen wird. Der dabei entstehende Diskretisierungsfehler geht nicht gegen Null, wenn die Zellen im Gitter verschwindend klein werden. Hier wird deswegen hauptsächlich das sogenannte 'linear upwind differencing scheme' (LUDS) angewendet. Das LUDS kann auf groben Gittern zu numerisch bedingten Oszillationen führen. In den durchgeführten Anwendungsrechnungen hat sich dieses Schema aber bewährt. Alternativ stehen eine Reihe anderer Schemata zur Verfügung, die aber in dieser Arbeit nicht getestet werden.

Wegen des benutzten nichtversetzten Gitters ist auch die Bestimmung der Massenflüsse in den Konvektionstermen von großer Bedeutung. Eine lineare Interpolation der dafür nötigen Geschwindigkeiten an den Zellseiten kann Druck und Geschwindigkeiten in den diskretisierten Gleichungen entkoppeln, was zu unphysikalischen Druckoszillationen führen kann [34]. Um dies zu vermeiden, wird eine von Rhie und Chow [45] entwickelte Interpolationstechnik angewendet, in welcher die Zellseitengeschwindigkeiten an den Druckgradienten durch die betreffende Seite gekoppelt werden (s.5.1.1). Eine Erweiterung nach Miller und Schmidt [32] vermeidet eine unzulässige Abhängigkeit der somit interpolierten Massenflüsse (und dadurch der Ergebnisse) vom gewählten Unterrelaxationsfaktor der Geschwindigkeiten beim iterativen Lösungsverfahren, die bei manchen Anwendungen dieser Technik festzustellen ist. Eine leichte Änderung der Interpolationsvorschrift erhöht die Eignung für stark unregelmäßige Gitter.

Das Gleichungssystem bestehend aus den diskretisierten Erhaltungsgleichungen wird durch Anwendung der SIMPLE-Methode von Patankar und Spalding [35] iterativ gelöst. Bei dieser Methode werden die Geschwindigkeitsverteilung und die Druckverteilung nicht gleichzeitig, sondern nacheinander ermittelt und in einer iterativen Prozedur miteinander gekoppelt. Nach konvergierter Iteration erfüllen die Geschwindigkeiten und die Drücke in allen Zellen des Gitters mit einer vorgegebenen Genauigkeit die diskretisierten Erhaltungsgleichungen.

## 2 Grundgleichungen

### 2.1 Navier-Stokes-Gleichungen

Die inkompressible Strömung eines Newtonschen Fluids wird durch die Navier-Stokes-Gleichungen und die Kontinuitätsgleichung beschrieben. In kartesischen Koordinaten und konservativer Formulierung lauten sie unter Verwendung der Summationskonvention

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial y^j} = f_i - \frac{\partial p}{\partial y^i} + \frac{\partial}{\partial y^j} \underbrace{\left[ \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial y^j} + \frac{\partial v_j}{\partial y^i} \right) \right]}_{\tau_{ij}} \quad (1)$$
$$\frac{\partial(\rho v_j)}{\partial y^j} = 0 \quad .$$

Alle vorkommenden Indizes laufen von 1 bis 3. Die Summationskonvention besagt, daß in einem Term über gleich bezeichnete Indizes zu summieren ist, z.B. bedeutet

$$\frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial y^j} = \frac{\partial(\rho v_i v_1)}{\partial y^1} + \frac{\partial(\rho v_i v_2)}{\partial y^2} + \frac{\partial(\rho v_i v_3)}{\partial y^3} \quad .$$

$\rho$  bezeichnet die konstante Dichte,  $v_i$  die Geschwindigkeitskomponente in Richtung der Koordinatenachse  $i$ ,  $f_i$  die Komponente einer äußeren Kraft (z.B. Gewicht) pro Volumeneinheit,  $p$  den Druck,  $\mu$  die Zähigkeit,  $y^i$  die kartesische Koordinate in Richtung  $i$  und  $t$  die Zeit.  $\tau_{ij}$  steht für die viskosen Spannungen, die für Newtonsche Fluide in inkompressibler Strömung proportional zu den Deformationsraten der Flüssigkeit sind.

Betrachten wir als Kontrollvolumen in der Strömung ein quaderförmiges, ortsfestes Volumenelement mit infinitesimalen Kantenlängen, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenebenen sind. (1) liefert je eine skalare Gleichung für die Erhaltung des Impulses pro Volumeneinheit in Richtung  $i$  im o.g. Kontrollvolumen. Der erste Term in dieser Gleichung ist die zeitliche Änderung des Impulses im Kontrollvolumen. Der zweite Term gibt den Saldo des Impulstransports durch Konvektion aus dem und in das Kontrollvolumen; er wird als Konvektionsterm bezeichnet. Auf der rechten Seite erscheinen die Massen- und Oberflächenkräfte (pro Volumeneinheit), die auf das Kontrollvolumen wirken. Der letzte Term stellt einen Netto-Impulstransport durch Diffusion dar; er wird Diffusionsterm genannt. Die zweite Gleichung in (1) ist eine skalare Gleichung; sie garantiert die Erhaltung der Masse pro Volumeneinheit. Da die Strömung inkompressibel ist, ist der Saldo des Massentransports aus dem und in das Kontrollvolumen gleich Null.

Es handelt sich um ein nichtlineares System partieller Differentialgleichungen in den vier Unbekannten  $v_i$  und  $p$ . Analytische Lösungen dieses Systems sind nur für einfache laminaire Strömungen bekannt, z.B. für die 'Couette-Strömung' und für die 'Hagen-Poiseuille-Strömung' [47]. Für technisch relevante 3D-Strömungen dagegen, mit Turbulenz und komplexer Geometrie wie in dem uns interessierenden Fall, ist eine analytische Lösung nicht möglich, so daß eine numerische Lösung des Systems notwendig ist.

## 2.2 Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen

Die Navier-Stokes-Gleichungen und die Kontinuitätsgleichung beschreiben auch turbulente inkompressible Strömungen vollständig [5]. Bei einer numerischen Lösung ohne gesonderte Turbulenzbehandlung müssen allerdings auch die kleinsten Zeit- und Längenskalen der Turbulenz (Dauer und Größe der kleinsten Turbulenzwirbel, in denen kinetische Energie dissipiert wird) durch die getroffene Diskretisierung aufgelöst werden. Die dafür erforderliche Anzahl an Gitterzellen und die sehr kleinen Zeitschritte bei der Zeitintegration (Diskretisierung des Zeitterms in Gleichung (1)) machen dieses Vorgehen auf den heutigen Rechnern für die meisten technischen Anwendungen nicht realisierbar. Legt man für eine Plausibilitätsabschätzung einer solchen Vorgehensweise die sogenannten Kolmogoroff-Skalen zugrunde, [17], so ergibt sich die erforderliche Zellanzahl zu  $N \sim R_n^{\frac{3}{4}}$ . Für Schiffsumströmungen, mit Reynoldszahlen zwischen etwa  $10^7$  (Modell) und  $10^9$  (Großausführung), stellt dies auf Jahrzehnte eine unüberwindbare Hürde dar.

Aus diesem Grund wird eine statistische Betrachtungsweise der turbulenten Strömung eingeführt. Wenn die in (1) auftretenden Momentanwerte der Geschwindigkeiten und des Druckes als Summe eines Mittelwertes ( $\bar{v}_i$  bzw.  $\bar{p}$ ) und einer Schwankung ( $v'_i$  bzw.  $p'$ ) geschrieben werden,

$$\begin{aligned} v_i &= \bar{v}_i + v'_i , \\ p &= \bar{p} + p' , \end{aligned}$$

und eine 'geeignete' Mittelung der Gleichungen durchgeführt wird, erhält man die Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen, auch RANSE genannt (Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations)

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho\bar{v}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\bar{v}_i\bar{v}_j)}{\partial y^j} &= f_i - \frac{\partial\bar{p}}{\partial y^i} + \frac{\partial}{\partial y^j} \left[ \mu \left( \frac{\partial\bar{v}_i}{\partial y^j} + \frac{\partial\bar{v}_j}{\partial y^i} \right) \right] - \frac{\partial(\rho\overline{v'_i v'_j})}{\partial y^j} \\ \frac{\partial(\rho\bar{v}_j)}{\partial y^j} &= 0 . \end{aligned} \tag{2}$$

Da wir zunächst an inkompressiblen, im Mittel stationären Strömungen interessiert sind, ist hier eine zeitliche Mittelung angebracht. Deswegen wird an dieser Stelle der Zeitterm fortgelassen. In anderen Fällen muß man an andere Formen der Mittelwertbildung denken, z.B. 'massengewichtete Mittelung' bei kompressiblen Strömungen [5] oder 'Ensemble-Mittelwert' bei im Mittel instationären Strömungen [34]. Die RANSE unterscheiden sich formell von den Navier-Stokes-Gleichungen durch den letzten Term, die Divergenz des Reynoldstensors  $-\rho\overline{v'_i v'_j}$ . Dieser Term stellt einen neuen Impulstransport dar, der wie zusätzliche Spannungen an den Seiten des betrachteten Kontrollvolumens wirkt. Daher spricht man vom Reynoldsspannungstensor, und seine Komponenten werden Reynoldsspannungen oder auch turbulente Spannungen genannt. In den anderen Termen der Gleichungen stehen jetzt stets Mittelwerte anstelle von Momentanwerten. Zu den ursprünglich vier Unbekannten sind sechs unbekannte Größen hinzugekommen, nämlich die sechs voneinander unterschiedlichen Komponenten des symmetrischen Reynoldstensors.

Damit wieder so viele Unbekannte wie Gleichungen vorhanden sind, wird ein 'Turbulenzmodell' eingeführt, das empirische Information heranzieht.

### 2.3 Turbulenzmodellierung

Wir beschränken uns auf Turbulenzmodelle, die auf dem Ansatz von Boussinesq (siehe z.B. [17,47]) und damit auf der Wirbelviskositätshypothese (3) basieren. Diese stellen bei weitem die Mehrheit der für technische Anwendungen eingesetzten Turbulenzmodelle dar.

$$-\overline{\rho v'_i v'_j} = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial y^j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial y^i} \right) - 2/3 \rho \delta_{ij} k \quad (3)$$

Die Elemente des Reynoldstensors werden durch einen skalaren Faktor  $\mu_t$  in einen linearen Zusammenhang mit den Gradienten der mittleren Geschwindigkeiten gebracht. Wegen der Analogie zu dem Ausdruck der viskosen Spannungen wird  $\mu_t$  turbulente Zähigkeit, Scheinzähigkeit oder auch Wirbelviskosität (eddy viscosity) genannt. Im zweiten Term auf der rechten Seite steht  $\delta_{ij}$  für das Kronecker Symbol ( $\delta_{ij} = 1$ , falls  $i = j$  ist, sonst  $\delta_{ij} = 0$ ) und  $k = \frac{1}{2} \overline{v'_i v'_i}$  für die turbulente kinetische Energie.

Wenn man diesen Ausdruck für die Reynoldsspannungen in (2) einsetzt, folgt

$$\frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial y^j} = f_i - \frac{\partial(p + 2/3 \rho k)}{\partial y^i} + \frac{\partial}{\partial y^j} \left[ \underbrace{(\mu + \mu_t)}_{\mu_{eff}} \left( \frac{\partial v_i}{\partial y^j} + \frac{\partial v_j}{\partial y^i} \right) \right] \quad (4)$$

$$\frac{\partial(\rho v_j)}{\partial y^j} = 0 \quad .$$

Die Querstriche für die Bezeichnung von Mittelwerten wurden der Einfachheit halber weglassen. Die Gleichungen haben dieselbe Form wie die Navier-Stokes-Gleichungen, wenn man eine effektive Zähigkeit  $\mu_{eff} = \mu + \mu_t$  einführt, die jetzt keine konstante Stoffgröße mehr ist, und  $(p + 2/3 \rho k)$  zu einer Größe zusammenfaßt.

Das Turbulenzmodell dient zur Bestimmung der turbulenten Zähigkeit, ggf. auch der turbulenten kinetischen Energie  $k$ . Aus einer Dimensionsanalyse erkennt man, daß die turbulente kinematische Zähigkeit ( $\nu_t = \mu_t/\rho$ ) proportional zu einer charakteristischen Geschwindigkeit und einer charakteristischen Länge gesetzt werden kann:  $\nu_t \sim V_c L_c$ .

Beim sehr verbreiteten Zweigleichungs-Turbulenzmodell  $k$ - $\epsilon$  [28] wählt man als Geschwindigkeitsmaß  $V_c = \sqrt{k}$  und als Längenmaß  $L_c = k^{3/2}/\epsilon$ , wobei  $\epsilon$  die Dissipationsrate von  $k$  ist. Für die Ermittlung von  $k$  und  $\epsilon$  werden zwei zusätzliche Differentialgleichungen gelöst. Algebraische (Nullgleichungs-) Turbulenzmodelle dagegen bestimmen  $\nu_t$  nur anhand von empirischen Formeln, in welche die Geschwindigkeiten und die Koordinaten (der Wandabstand) eingehen. Bei Anwendung eines algebraischen Modells wird der Term  $2/3 \cdot \rho k$

vernachlässigt, weil in diesem Fall die turbulente kinetische Energie nicht ermittelbar ist. Nach meiner Auffassung ist es in diesem Fall vorzuziehen, den Ausdruck  $(p + 2/3 \cdot \rho k)$  statt nur  $p$  als die gesuchte Größe anzusehen und bei der Auswertung der Ergebnisse zu beachten, daß diese Größe nur dort eine gute Approximation für den Druck darstellt, wo die turbulente kinetische Energie eine untergeordnete Rolle spielt. Im Folgenden wird vereinfachend für diesen Ausdruck  $p$  geschrieben.

In der vorliegenden Arbeit wird ein algebraisches Turbulenzmodell nach Cebeci-Smith [5] eingesetzt. Die turbulente kinematische Zähigkeit wird zunächst nach zwei verschiedenen Formulierungen bestimmt, die zwischen einer inneren in unmittelbarer Wandnähe gelegenen Schicht und einem äußeren Restbereich unterscheiden. Anschließend wird der kleinste der beiden Werte gewählt:

$$\nu_t = \min(\nu_{t_{inner}}, \nu_{t_{outer}}) \quad .$$

Die Formulierung für die innere Schicht lautet

$$\nu_{t_{inner}} = l_m^2 |\omega| \quad ,$$

$$l_m = \kappa y [1 - \exp(-y^+/A^+)] \quad .$$

$|\omega|$  ist der Betrag der Rotation des mittleren Geschwindigkeitsvektors,  $l_m$  der Mischungsweg,  $\kappa = 0,4$  die von Kármán-Konstante,  $y$  der Wandabstand und  $A^+ = 26$ . Die innere Koordinate  $y^+ = y U_\tau / \nu$  wird mit Hilfe der Wandschubspannungsgeschwindigkeit  $U_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho}$  definiert, wobei  $\tau_w$  der Betrag der Wandschubspannung ist.

In der äußeren Schicht ist

$$\nu_{t_{outer}} = \alpha \delta^* U_\delta \gamma(y/\delta) \quad ,$$

$$\gamma(\eta) = (1 + 5.5\eta^6)^{-1} \quad .$$

$\alpha = 0.0168$  ist die Clauser-Konstante,  $\delta^*$  die Verdrängungsdicke,  $U_\delta$  die wandparallele Geschwindigkeit am Rande der Grenzschicht,  $\gamma$  die Klebanoff–Abklingfunktion und  $\delta$  die angesetzte Grenzschichtdicke.

Zur Bestimmung der ortsabhängigen turbulenten kinematischen Zähigkeit  $\nu_t$  wird die (gesuchte) Geschwindigkeitsverteilung benötigt. Da die Geschwindigkeiten im Rahmen eines iterativen Verfahrens bestimmt werden, liefert das Turbulenzmodell für jede neue Approximation der Geschwindigkeiten ein neues  $\nu_t$ .

## 3 Diskretisierung des Strömungsgebiets

### 3.1 Eigenschaften des numerischen Gitters

Zur numerischen Lösung des Gleichungssystems (4) muß das Strömungsgebiet diskretisiert werden. Mittels eines numerischen Gitters werden Punkte in einer Umgebung des Schiffes (Rechengebiet) verteilt. Je acht benachbarte Punkte begrenzen ein Kontrollvolumen. Für jedes Kontrollvolumen (Zelle) werden die Erhaltungsgleichungen aufgestellt. Für eine effektive Verteilung der Punkte im Rechengebiet sowie für die Aufstellung von Randbedingungen ist ein randangepaßtes Gitter zweckmäßig (Abb.5,6). Die Gitterpunkte sollen möglichst nur dort angehäuft werden, wo sie für eine angemessene Auflösung der Strömung nötig sind; das ist dort, wo große Gradientenänderungen der Variablen zu erwarten sind, z.B. in Wandnähe. Wir sind zunächst an Hinterschiffsumströmungen interessiert, so daß nur der Raum um den hinteren Schiffsteil diskretisiert werden muß. Abb.1 (oben) zeigt schematisch das unter Ausnutzung der Symmetrien um die Mittellängsebene und die Wasserlinienebene gewählte Rechengebiet für die Berechnung der Hinterschiffsumströmung um ein Doppelmodell sowie das kartesische Koordinatensystem  $y^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Hier werden nur 'strukturierte' Gitter benutzt, auf denen die Gitterlinien als Koordinatenlinien eines globalen, krummlinigen Koordinatensystems angesehen werden können. Dies ermöglicht es die einzelnen Gitterknoten (Schnittpunkte der Gitterlinien) durch ihre krummlinigen Koordinaten zu lokalisieren. Meine Methode kann aber ohne Einschränkung auch auf 'blockstrukturierte' Gitter angewendet werden. Für die Kommunikation zwischen den verschiedenen Blöcken müssen allerdings geeignete Vorkehrungen im Computerprogramm implementiert werden. Die Ränder des Strömungsgebiets fallen mit Gitterflächen bzw. Koordinatenflächen zusammen. Der Berechnungsraum wird durch die Gitterflächen lückenlos in topologisch quaderförmige Zellen unterteilt. Es liegt nahe, alle Inkremente der krummlinigen Koordinaten gleich 1 zu definieren, so daß die krummlinigen Koordinaten der Knoten ganze Zahlen sind und einer Numerierung der Gitterflächen entsprechen. Abb.1 (unten) zeigt das Definitionsgebiet der krummlinigen Koordinaten  $x^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), auch transformiertes Gebiet genannt. Das Rechengebiet wird in einen Quader abgebildet. Der Einströmrand ( $A, B, C, D, A$ ) und der Ausströmrand ( $A', B', C', D', A'$ ) fallen mit den Koordinatenflächen  $x^1 = x^1_{min}$  und  $x^1 = x^1_{max}$  zusammen. Die Symmetrie-Ebene unterhalb der Kiellinie ( $A, B, B', A', A$ ) und die Wasserlinienebene ( $D, C, C', D', D$ ) fallen mit den Koordinatenflächen  $x^2 = x^2_{min}$  und  $x^2 = x^2_{max}$  zusammen. Der Rumpf und die Symmetrie-Ebene hinter dem Schiff ( $D, A, A', D', D$ ) bzw. der Außenrand ( $C, B, B', C', C$ ) fallen mit den Koordinatenflächen  $x^3 = x^3_{min}$  bzw.  $x^3 = x^3_{max}$  zusammen.

Durch die Zuordnung von Gitterflächen und Rändern wird gleichzeitig die Topologie des zu erzeugenden Gitters festgelegt. Es handelt sich um ein sogenanntes H-O-Netz. Die Gitterlinien verlaufen in Längsrichtung etwa wie Stromlinien (Abb.20), und in Spantumfangsrichtung begleiten sie die Spantkontur (Abb.18). Letzteres ist über den größten Bereich des Rumpfes eines üblichen Handelsschiffes, wegen des flachen Bodens, zweckmäßig. Im hinteren Heckbereich und im Nachlauf des Schiffes wäre allerdings auch auf Spantebene eine H-Topologie geeigneter. Die Beibehaltung der O-Topologie nach hinten hin,

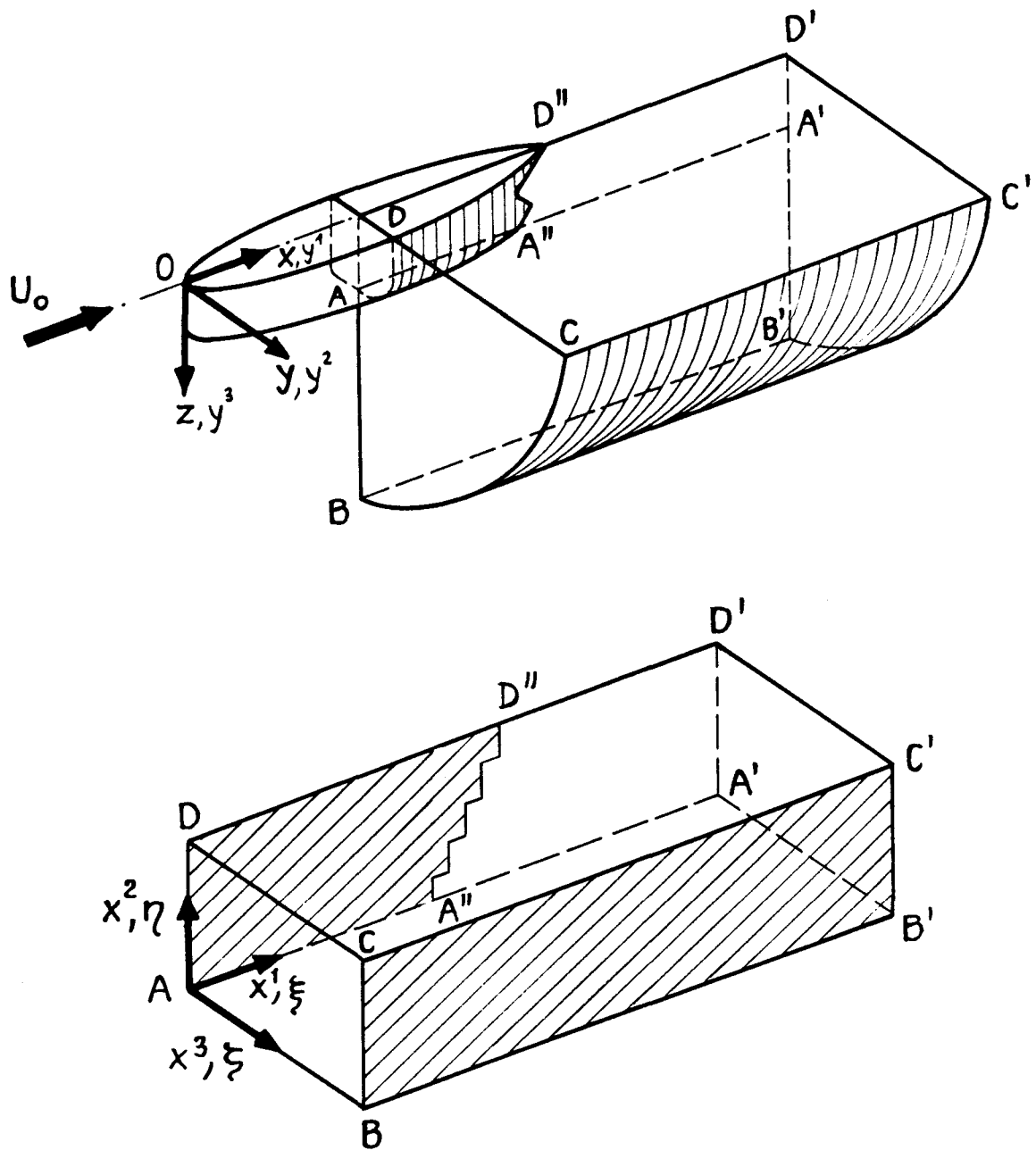


Abbildung 1: Rechengebiet und Koordinatensystem.  
 Oben: physikalisches Gebiet. Unten: transformiertes Gebiet.

bedingt durch das strukturierte Gitter, führt zu einer 'Singularität' im Netz entlang der Fortsetzung der Kiellinie hinter dem Schiff. Dies kann man daran erkennen, daß dort zwei verschiedene Gitterflächen ( $x^2 = x_{min}^2$  und  $x^3 = x_{min}^3$ ) im physikalischen Gebiet auf eine und dieselbe Ebene zusammenfallen (Abb.1). Während i.a. die Zellseiten aus Vierecken bestehen, entarten bei den Zellen entlang der 'Kante'  $A''A'$  des Rechengebiets die Zellseiten auf den Gitterflächen  $x^1 = const$  in Dreiecke (Abb.19). Dies kann die Genauigkeit der numerischen Lösung beeinträchtigen. Solange dieser Effekt nur lokal beschränkt bleibt, kann er aber im Kauf genommen werden.

Eine weitere, einschränkende Eigenschaft des benutzten Netzes besteht darin, daß die Gitterflächen  $x^1 = const$  mit vorgegebenen Spantebenen zusammenfallen. Dies ermöglicht eine einfache Erzeugung des Gitters auf dem Schiffsrumpf, welches für die Erzeugung des 3D-Netzes vorliegen muß. Es hat aber den Nachteil, daß dadurch die Heckkontur des Schiffes i.a. nur stufenförmig approximiert werden kann (Abb.17,21). Durch Aufhebung dieser Einschränkung und Anwendung blockstrukturierter Gitter lassen sich die erwähnten Schwächen des Gitters teilweise oder ganz beheben. Dies stellt andererseits erheblich mehr Anforderungen an den Netzerzeuger und an das Programm zur Lösung der Erhaltungsgleichungen, die sich in der jetzigen Entwicklungsphase noch nicht rechtfertigen lassen. Spätere Anwendungen auf kompliziertere Fälle und mit höheren Genauigkeitsansprüchen werden aber solche Erweiterungen unabdingbar machen. Die Erstellung eines geeigneten numerischen Gitters bedarf vieler Erfahrung und nimmt erheblich mehr Zeit in Anspruch als die Rechnung selbst.

## 3.2 Gittererzeugung

Die Genauigkeit des Verfahrens zur Lösung der Erhaltungsgleichungen wird durch Unglattigkeiten des Gitters beeinträchtigt. Diese sollten daher möglichst vermieden werden. Eine sehr verbreitete Methode zur Erstellung von Netzen mit den gewünschten Eigenschaften ist die sogenannte elliptische Gittererzeugung [53,54], wobei das Gitter durch die numerische Lösung eines elliptischen Differentialgleichungssystems erzeugt wird. Dafür dienen üblicherweise Poisson-Gleichungen für die krummlinigen Koordinaten  $x^i$  abhängig von den unabhängigen Variablen  $y^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Zur Lösung des Gleichungssystems ist eine Transformation zweckmäßig, bei der die Rollen der abhängigen und unabhängigen Variablen vertauscht werden [11]. Ein nach dieser Methode entwickeltes Programm ermöglicht die Erzeugung eines strukturierten Gitters für das ganze Rechengebiet. Eventuelle Unstetigkeiten auf den Rändern werden nicht ins Feld übertragen.

Ausgehend von den gegebenen Knotenverteilungen auf den Rändern des Rechengebiets werden die kartesischen Koordinaten der inneren Knoten als Lösung des transformierten, nichtlinearen, gekoppelten Gleichungssystems gefunden. Setzt man alle rechten Seiten der Poisson-Gleichungen zu Null, so resultiert das 'regelmäßigste' Gitter, welches die Randgeometrie und die gegebenen Knotenverteilungen erlauben. Durch die Wahl von rechten Seiten ungleich Null kann man Einfluß auf die Verteilung der Punkte im Feld nehmen. Dies ermöglicht die Anhäufung der Gitterpunkte an bestimmten Stellen, Linien oder Flächen, wie es z.B. für die Auflösung einer Grenzschicht nötig ist.

Das Poisson-Gleichungssystem wird nach der Finite-Differenzen-Methode diskretisiert, wobei alle Ableitungen durch zentrale finite Differenzen (FD) approximiert werden. Es wird mit einem sogenannten FAS-Mehrgitterverfahren [4,13] iterativ gelöst. Die starke Anisotropie in der Koeffizientenmatrix des resultierenden diskretisierten Systems infolge der extrem unterschiedlichen Zellseitenverhältnisse des zu erzeugenden Netzes führt dazu, daß die üblichen Glättungsverfahren [48] in Verbindung mit der benutzten Gittervergrößerung (standard coarsening) nicht geeignet sind [51,52]. Als 'Glätter' wird deswegen eine in verschiedene  $x^i$ -Richtungen alternierende Flächenrelaxation benutzt (alternating plane relaxation), wobei alle Variablen jeweils auf einer Fläche implizit bestimmt werden. Dies erfolgt wiederum mittels eines zweidimensionalen Mehrgitterverfahrens [11].

Schon bei der Erzeugung relativ kleiner Netze (z.B. 50000 Zellen) sind deutliche Rechenzeitersparnisse (Faktor  $> 5$ ) gegenüber dem konventionellen Eingitterverfahren festzustellen. Die Rechenzeit beträgt dann beispielsweise nur noch eine Minute auf einer gängigen Workstation. Die erreichten Konvergenzfaktoren pro Arbeitseinheit (work unit=Aufwand eines Iterationsdurchgangs auf dem feinsten Gitter) sind mit  $\rho_{wu} \approx 0,7$  in Anbetracht der erwähnten Anisotropie recht zufriedenstellend. Da diese Faktoren sich auch bei der Erzeugung größerer Netze wenig ändern, wird die Überlegenheit des Mehrgitterverfahrens immer größer, da die Konvergenz eines Eingitterverfahrens immer schlechter wird. Die reine Rechenzeit für die Erzeugung des numerischen Gitters ist bei Benutzung eines festen Gitters, welches nur einmal vor Beginn der tatsächlichen Rechnung erzeugt wird, nebensächlich. Bei Strömungsproblemen mit beweglichen Rändern, z.B. bei Berücksichtigung der freien Oberfläche, könnte diese Zeit aber durchaus von Bedeutung werden, wenn das Gitter im Laufe der Rechnung wiederholt erzeugt werden muß.

Für die Erstellung des 3D-Netzes müssen die Netze auf allen sechs Randflächen des Rechengebiets vorliegen. Die Netze auf dem Einström- und Ausströmrand sowie auf der Wasserlinienebene werden ebenfalls nach der beschriebenen Prozedur aus den Knoten auf den Kanten des Berechnungsgebiets numerisch erzeugt. Auf der Symmetrie-Ebene unterhalb der Kiellinie sowie auf dem Außenrand (kreiszyklische Mantelfläche) lassen sich geeignete Gitter sehr einfach analytisch erzeugen. Für die Erstellung eines Gitters auf dem Rumpf (und der Symmetrie-Ebene im Nachlauf des Schiffes) werden an das Programm EUMEDES zur Beschreibung von Schiffsoberflächen [50] die gewünschte Spantverteilung und die Verteilung der Punkte auf jedem Spant über die Bogenlänge übergeben. Dieses Programm liefert dann die kartesischen Koordinaten aller Knoten auf diesem Rand. Wenn die Schiffsgometrie bereits in Form einer EUMEDES-Eingabedatei vorliegt, erfordert die Erzeugung des Gitters um ein Hinterschiff typischerweise 1 bis  $1\frac{1}{2}$  Mann-Tage.

## 4 Diskretisierung der Erhaltungsgleichungen

### 4.1 Transformation

Bei Anwendung nichtorthogonaler, randangepaßter Gitter schreibt man die Erhaltungsgleichungen (4) für die Diskretisierung üblicherweise auf allgemeine, krummlinige Koordinaten um. Diese Transformation kann verschieden durchgeführt werden: Je nachdem, ob die kartesischen Geschwindigkeitskomponenten weiterhin als Unbekannte geführt werden sollen oder nicht und ob die streng konservative Form der Gleichungen beibehalten werden soll, ergeben sich Formulierungen der Erhaltungsgleichungen, die unterschiedliche Schwierigkeiten bei ihrer numerischen Lösung hervorrufen.

Je nach Anordnung der Variablen im Gitter unterscheidet man zwischen versetzten (staggered) und nichtversetzten Gittern (nonstaggered grid). Im Falle eines versetzten Gitters werden die Unbekannten an verschiedenen Orten in einer Gitterzelle definiert. Typischerweise wird auf jeder Zellseite jeweils eine Geschwindigkeitskomponente gespeichert und der Druck im Zellmittelpunkt. Dies war lange Zeit üblich, um eine Entkopplung von Druck und Geschwindigkeiten in den diskretisierten Erhaltungsgleichungen zu vermeiden, damit keine unphysikalischen Druckoszillationen (Schachbretteffekt) auftreten [14,36]. Bei versetzten Gittern spricht vieles dafür, gitterorientierte kontravariante bzw. physikalische Komponenten einzuführen und die Impulsbilanzen in Richtung der krummlinigen Koordinaten aufzustellen. Dies führt zu einer nichtkonservativen Formulierung mit vielen 'metrischen Koeffizienten'. Insbesondere treten in den Gleichungen zweite Ableitungen der krummlinigen Koordinaten auf, die sehr empfindlich für Gitterunglattheiten sind. Die Beibehaltung der kartesischen Geschwindigkeiten kann bei versetzten Gittern zu Genauigkeitsproblemen führen.

Modernere Verfahren [42,31] vermeiden Druckoszillationen durch eine spezielle Interpolationstechnik für die Massenflüsse durch die Zellseiten (s.5.1.1). Dies macht eine Versetzung des Gitters überflüssig. In nichtversetzten Gittern werden alle Geschwindigkeitskomponenten und der Druck an demselben Punkt in der Zelle definiert, z.B. im Zellmittelpunkt. In diesem Fall spricht alles dafür, die kartesischen Geschwindigkeitskomponenten beizubehalten und die Impulsbilanzen weiterhin in den kartesischen Richtungen aufzustellen (partielle Transformation). Dies führt zu einer streng konservativen Formulierung mit wenigen metrischen Koeffizienten in den transformierten Gleichungen, vor allem aber ohne zweite Ableitungen der krummlinigen Koordinaten. Die nichtversetzte Anordnung der Variablen im Gitter hat auch programmtechnisch viele Vorteile, insbesondere bei Anwendung eines Mehrgitterverfahrens, und reduziert den Rechenaufwand und den Speicherplatzbedarf (s.4.3).

Daher wird hier, auch im Hinblick auf eine künftige Implementierung der Mehrgittertechnik, eine nichtversetzte Anordnung gewählt. Die kartesischen Geschwindigkeiten und der Druck werden im Zellmittelpunkt definiert. Die partielle Transformation von (4) nach den Gesetzen der Tensoranalysis führt zu

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial x^l} \left\{ J \frac{\partial x^l}{\partial y^j} \left[ \rho v_i v_j - \mu_{eff} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial y^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \right) \right] \right\} = f_i - \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial x^l} \left( J \frac{\partial x^l}{\partial y^i} p \right) \quad (5)$$

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial x^l} \left( J \frac{\partial x^l}{\partial y^j} \rho v_j \right) = 0 \quad .$$

$y^i$  und  $x^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) bezeichnen die kartesischen bzw. die krummlinigen Koordinaten.  $J$  ist die Jacobi-Determinante der Koordinatentransformation  $y^i = y^i(x^1, x^2, x^3)$ . Die erste Gleichung in (5) bedeutet weiterhin den Impulssatz in Richtung der kartesischen Koordinatenachse  $i$ . Die zweite Gleichung ist die transformierte Kontinuitätsgleichung. Die Faktoren  $\frac{\partial x^l}{\partial y^j}$  und  $J$  enthalten nur 'metrische' Information. Diese Größen werden aus der Gittergeometrie bestimmt und sind somit bekannt. Alle Ableitungen von unbekanntem Größen sind Ableitungen nach krummlinigen Koordinaten.

Die Beibehaltung der kartesischen Geschwindigkeiten als Unbekannte ermöglicht es auch, die Transformation der Gleichungen zu umgehen, indem Gleichung (4) direkt integriert und der Gaußsche Satz angewendet wird. Diese Vorgehensweise bleibt auch auf unstrukturierten Gittern gültig. Alternativ wird hier eine elegante Herleitung von Gleichung (5) gezeigt. Dafür und für die spätere Diskretisierung der Erhaltungsgleichungen werden Elemente der Differentialgeometrie eingeführt:

$$\text{kovariante Vektorbasis:} \quad \vec{a}_i = \frac{\partial y^l}{\partial x^i} \vec{e}_l \quad (6)$$

$$\text{kontravariante Vektorbasis:} \quad \vec{a}^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^l} \vec{e}_l \quad (7)$$

$\vec{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) bezeichnet die kartesische Einheitsvektorbasis. Der Vektor  $\vec{a}_i$  ist tangential zu der Gitterlinie  $x^j$  und  $x^k = \text{const}$  ( $i, j, k$  voneinander verschieden). Der Vektor  $\vec{a}^i$  steht senkrecht auf der Gitterebene  $x^i = \text{const}$ . Es gilt, z.B. [2]:

$$\vec{a}^i = \frac{\vec{a}_j \times \vec{a}_k}{J} \quad \text{oder, komponentenweise:} \quad J \frac{\partial x^i}{\partial y^l} = \epsilon_{lmn} \frac{\partial y^m}{\partial x^j} \frac{\partial y^n}{\partial x^k} \quad i, j, k \text{ zyklisch} \quad (8)$$

$$J = \vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3) = \epsilon_{ijk} \frac{\partial y^i}{\partial x^1} \frac{\partial y^j}{\partial x^2} \frac{\partial y^k}{\partial x^3} \quad (9)$$

$\epsilon_{ijk}$  steht für das Permutationssymbol, dessen Wert  $\pm 1$  ist, wenn  $i, j, k$  eine gerade bzw. eine ungerade Permutation von 1, 2, 3 darstellt, und Null, falls zwei oder mehr Indizes den gleichen Wert nehmen. In (8) sind die Werte von  $i, j, k$  'zyklisch' zu wählen, d.h. nach einer geraden Permutation von 1, 2, 3.

Betrachten wir ein durch die Koordinatenflächen  $x^i = x_0^i$  und  $x^i = x_0^i + dx^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) begrenztes infinitesimales Volumenelement. Die Ausdrücke für sein Volumen und für den Flächenvektor auf einer Koordinatenfläche  $x^i = \text{const}$  sind

$$\begin{aligned} dV &= \vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3) dx^1 dx^2 dx^3 \\ &= J dx^1 dx^2 dx^3 \quad , \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
(\vec{n}dS)_{x^i=const} &= \pm \vec{a}_j \times \vec{a}_k dx^j dx^k \\
&= \pm J \vec{a}^i dx^j dx^k \quad i, j, k \text{ zyklisch} .
\end{aligned} \tag{11}$$

$dS$  ist die Seitenfläche und  $\vec{n}$  der aus dem Volumenelement hinauszeigenden Einheitsnormalenvektor. Das positive Vorzeichen in (11) gilt für  $x^i = x_0^i + dx^i$ , das negative Vorzeichen für  $x^i = x_0^i$ .

Eine metrische Identität (sie läßt sich durch Ausschreiben der linken Seite unter Berücksichtigung von (8) bestätigen) drückt aus, daß die Seiten des betrachteten Volumenelementes eine geschlossene Fläche darstellen

$$\frac{\partial}{\partial x^l} \left( J \frac{\partial x^l}{\partial y^j} \right) = 0 . \tag{12}$$

Gleichung (5) läßt sich nun mit der Kettenregel der Differentiation und dieser Identität direkt aus (4) herleiten. Beispielsweise wird der Konvektionsterm transformiert

$$\frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial y^j} = \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial y^j} = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial x^l} \left( J \frac{\partial x^l}{\partial y^j} \rho v_i v_j \right) .$$

## 4.2 Finite-Volumen-Methode

Die Gleichungen in (5) werden Term für Term über eine Zelle integriert. Das Volumenintegral über die Zelle wird mittels (10) in ein Dreifachintegral über die krummlinigen Koordinaten umgeschrieben. In jedem Term, bis auf den Term der äußeren Kraft, läßt sich eine Integration nach jeweils einer krummlinigen Koordinate geschlossen durchführen. Die Anwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung auf die verbleibenden Integrale führt zu

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^3 \left\{ \overline{J \frac{\partial x^l}{\partial y^j} \left[ \rho v_i v_j - \mu_{eff} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial y^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \right) \right]} \right\}_{x^l}^{x^l + \delta x^l} \delta x^m \delta x^n = \\
&= \overline{f_i} \delta V - \sum_{l=1}^3 \left\{ \overline{J \frac{\partial x^l}{\partial y^i} p} \right\}_{x^l}^{x^l + \delta x^l} \delta x^m \delta x^n
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\sum_{l=1}^3 \left\{ \overline{J \frac{\partial x^l}{\partial y^j} \rho v_j} \right\}_{x^l}^{x^l + \delta x^l} \delta x^m \delta x^n = 0 \quad l, m, n \text{ zyklisch} .$$

$\delta V$  ist das Volumen der Zelle.  $\delta x^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sind die Inkremente der krummlinigen Koordinaten. Die Ausdrücke in geschweiften Klammern bezeichnen die Differenz der betreffenden Ausdrücke an den Zellseiten  $x^l + \delta x^l$  und  $x^l$ . Die Querstriche bezeichnen die Mittelwerte dieser Ausdrücke auf der entsprechenden Zellseite bzw. in der Zelle.

Im Folgenden werden die Mittelwerte durch die Werte in den jeweiligen Mittelpunkten ersetzt und die Querstriche fortgelassen. Dies stellt eine Approximation 2. Ordnung der

Integrale unter der Voraussetzung dar, daß die Werte in den Mittelpunkten vorliegen oder mit Fehlern von 2. oder höherer Ordnung ermittelt werden. Der Mittelpunkt der Zelle bzw. einer Zellseite wird durch arithmetische Mittelung der kartesischen Koordinaten der Eckpunkte der Zelle bzw. der Zellseite bestimmt. Die Einführung folgender Definitionen vereinfacht Gleichung (13):

$$\vec{A}^{(i)} = J \vec{a}^i \delta x^j \delta x^k \quad \text{oder, komponentenweise: } A_n^{(i)} = J \frac{\partial x^i}{\partial y^n} \delta x^j \delta x^k \quad . \quad (14)$$

Die Werte der Indizes  $i, j, k$  sind dabei zyklisch zu wählen. Der Index in Klammern gehört zur Bezeichnung des Vektors und stellt keine Tensorkomponente dar. Nach Gleichung (11) läßt sich dann der 'finite' Flächenvektor auf einer Zellseite  $x^l = \text{const}$ , hier  $\vec{A}$  genannt, durch einen der drei auf der Zellseite bereits eingeführten Vektoren darstellen

$$\vec{A} = (\vec{n} \delta S)_{x^l = \text{const}} = \pm \vec{A}^{(l)} \quad \text{bzw.} \quad A_j = \pm A_j^{(l)} \quad . \quad (15)$$

$\delta S$  bezeichnet die Fläche der Zellseite. Das positive Vorzeichen gilt für die Seite  $x^l + \delta x^l$ , das negative Vorzeichen für die Seite  $x^l$ . Der Vektor  $\vec{A}$  zeigt stets aus der Zelle hinaus.

Einsetzen dieser Definitionen in (13) ergibt mit einigen Umformungen folgende Gleichungen für die Impuls- und Massenerhaltung in einer Zelle

$$\underbrace{\sum_{\text{Seiten}} \rho v_i v_j A_j}_{\text{Konvektionsterme}} - \underbrace{\sum_{\text{Seiten}} \frac{\mu_{eff}}{J} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x^q} A_j A_j^{(q)} + \frac{\partial v_j}{\partial x^q} A_j A_i^{(q)} \right)}_{\text{Diffusionsterme}} = \underbrace{f_i \delta V}_{\text{Massenkraft}} - \underbrace{\sum_{\text{Seiten}} p A_i}_{\text{Drucksterme}} \quad (16)$$

$$\sum_{\text{Seiten}} \underbrace{\rho v_j A_j}_{\text{Massenfluss}} = 0 \quad .$$

Die Werte der Indizes  $q, r, s$  sind zyklisch zu wählen. Die Summensymbole bezeichnen eine Addition über alle sechs Seiten der betrachteten Zelle.

Die Beziehungen (14), (15), (8) und (9) dienen zur Bestimmung von  $A_j^{(i)}$ ,  $A_j$  und  $J$  in den Mittelpunkten der Zellseiten. Die dabei auftretenden Komponenten der kovarianten Basisvektoren werden durch zentrale FD approximiert. Da nur die kartesischen Koordinaten der Zellecken gespeichert werden, müssen dafür fehlende Koordinaten (in Zell-, Zellseiten- und Zellkantenmittelpunkte) durch Mittelung bestimmt werden. Da die in den Diffusionstermen verbliebenen Ableitungen ebenfalls durch zentrale FD approximiert werden (s.4.2.1), kann man bei näherer Betrachtung von Gleichung (16) und o.g. Beziehungen feststellen, daß sich alle Inkremente  $\delta x^i$  aufheben. Die Inkremente der krummlinigen Koordinaten werden im Folgenden, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, alle zu 1 gesetzt.

Programmtechnisch reduziert sich somit die Bestimmung der metrischen Größen an einer Zellseite auf die Berechnung der drei Kreuzprodukte und des Spatproduktes der nach Gleichung (6) aus kartesischen Koordinatendifferenzen gebildeten Vektoren  $\vec{a}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Analog wird das Zellvolumen  $\delta V$  durch das Spatprodukt der Verbindungsvektoren der entgegengesetzten Zellseitenmittelpunkte bestimmt. Da wir zunächst an stationären Strömungen interessiert sind, ist die Bestimmung des Zellvolumens unproblematisch. Im Falle einer instationären Strömung ist eine genauere Bestimmung von  $\delta V$  erforderlich. lumen des gesamten Rechengebiets ergibt [23].

Falls eine äußere Kraft vorhanden ist, liegt der Wert  $f_i$  im Zellmittelpunkt vor, so daß der mit Massenkraft bezeichnete Term in (16) keiner weiteren Behandlung bedarf. Die erforderlichen Drücke an den Seiten der Zelle werden zwischen den Werten in den Mittelpunkten der jeweils benachbarten zwei Zellen (entlang der verbindenden Koordinatenlinie) linear interpoliert. Zur weiteren Beschreibung der Diskretisierung werden die Mittelpunkte der betrachteten Zelle und der Nachbarzellen, die mit dieser Zelle eine gemeinsame Seite haben, mit P, E (east), W (west), N (north), S (south), T (top) und B (bottom) bezeichnet, Abb.2 (oben). Nicht 'unmittelbar' benachbarte Zellmittelpunkte werden mit Großbuchstabenkombinationen bezeichnet. Abb.2 (unten) zeigt schematisch einige dieser Zellmittelpunkte. Zellseiten- und Zellkantenmittelpunkte werden entsprechend mit Kleinbuchstaben bezeichnet. Nicht abgebildete Punkte werden sinngemäß bezeichnet.

#### 4.2.1 Approximation der Diffusionsterme

Die in den Diffusionstermen auftretenden Ableitungen der Geschwindigkeitskomponenten nach den krummlinigen Koordinaten (in Zellseitenmittelpunkten) werden durch zentrale finite Differenzen diskretisiert. Z.B. gilt für die Seite e der betrachteten Zelle P :

$$\frac{\partial v_i}{\partial x^1} \approx v_{iE} - v_{iP} \qquad \frac{\partial v_i}{\partial x^2} \approx v_{i_{ne}} - v_{i_{se}}$$

Die dem Index beigefügten Buchstaben bezeichnen den Ort, wo die betreffende Variable ausgewertet wird. Da die Werte aller Unbekannten nur in den Zellmittelpunkten gespeichert werden, werden die fehlenden Werte in Zellkantenmittelpunkten linear interpoliert. Der Diffusionsterm für diese Zellseite lautet:

$$\begin{aligned} Diff_i^e &= \frac{\mu_{eff}}{J} \left[ (v_{iE} - v_{iP}) A_j A_j^{(1)} + (v_{i_{ne}} - v_{i_{se}}) A_j A_j^{(2)} + (v_{i_{te}} - v_{i_{be}}) A_j A_j^{(3)} \right] \\ &+ \frac{\mu_{eff}}{J} \left[ (v_{jE} - v_{jP}) A_j A_i^{(1)} + (v_{j_{ne}} - v_{j_{se}}) A_j A_i^{(2)} + (v_{j_{te}} - v_{j_{be}}) A_j A_i^{(3)} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

Auf dieser Zellseite gilt  $A_j = + A_j^{(1)}$ . Die effektive Zähigkeit  $\mu_{eff}$  an der Zellseite wird zwischen den Werten in P und E ebenfalls linear interpoliert. Bis auf den Term in  $A_j A_j^{(1)}$ , werden alle Terme auf der rechten Seite in (17) explizit behandelt. Sie werden in die rechte Seite (Quellterm) der Impulsgleichung gebracht und mit Werten des vorangegangenen Iterationsschrittes ausgewertet (s.4.3). Diese Terme verschwinden für laminare Strömung und orthogonale Gitter (wie man aus (4), (8) und (14) erkennen kann). In unserem Fall

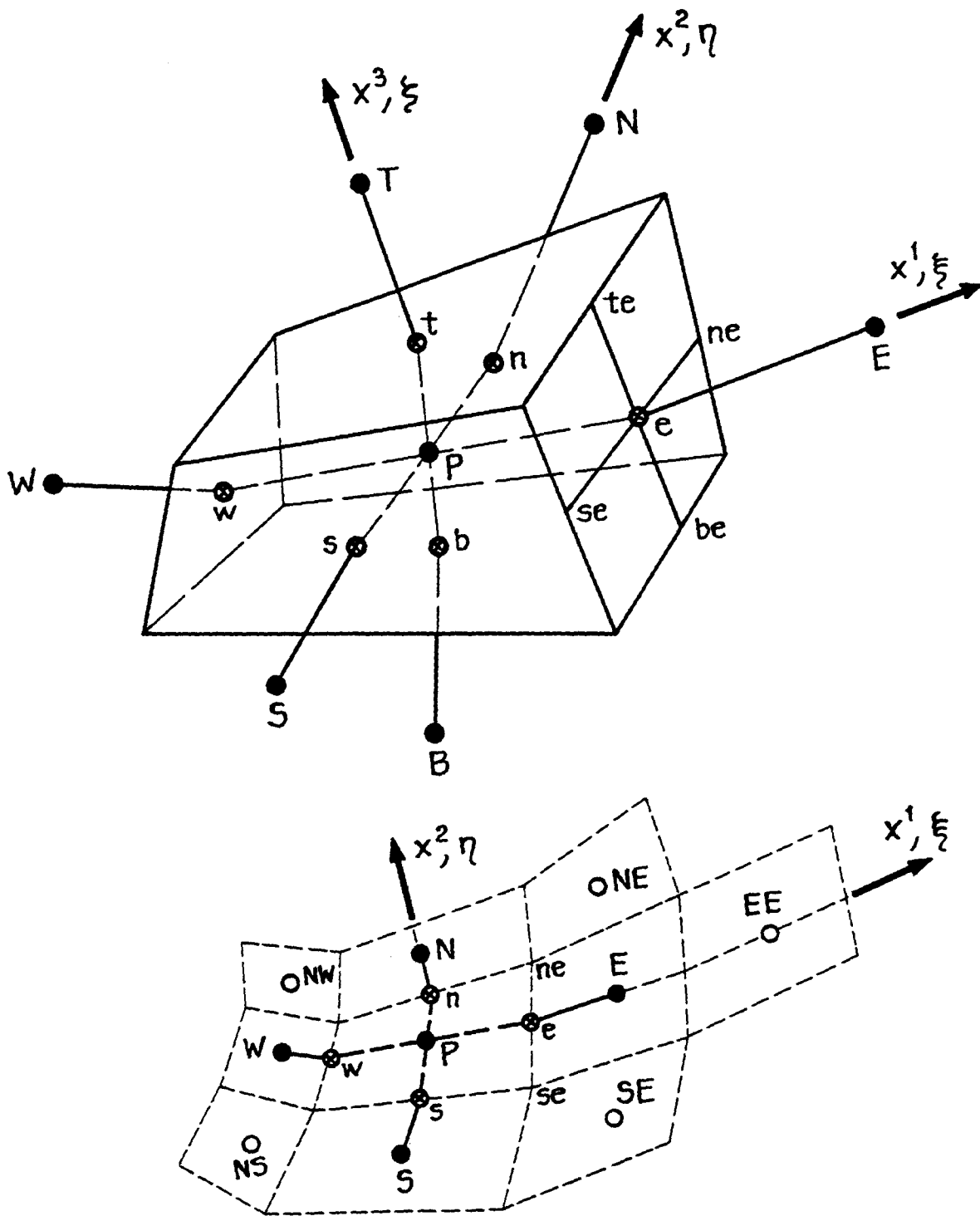


Abbildung 2: Bezeichnung der Punkte im Gitter. Oben: Zelle mit Zellmittelpunkt P.  
 Unten: schematische Darstellung einer Umgebung von Zelle P.

einer turbulenten Strömung und eines nichtorthogonalen Gitters mit großen Zellseitenverhältnissen können sie aber durchaus von Bedeutung sein. Der Grund, sie explizit zu behandeln, besteht darin, daß diese Terme (zum Teil) einen negativen Einfluß auf die Konditionierung der Matrix des resultierenden algebraischen Gleichungssystems ausüben würden (s.4.3). Der Diffusionsfluß in kartesischer Richtung  $i$  durch die Seite  $e$  kann dann geschrieben werden

$$Diff_i^e = a_E^{(d)} (v_{iE} - v_{iP}) + S_i^{(d)e} , \quad (18)$$

$$a_E^{(d)} = \frac{\mu_{eff}}{J} A_j A_j^{(1)} , \quad S_i^{(d)e} = \text{Rest} .$$

In  $S_i^{(d)e}$  sind die o.g. explizit behandelten Terme unter 'Rest' zusammengefaßt worden. Der Koeffizient  $a_E^{(d)}$  ist unabhängig von der betrachteten Richtung  $i$  und nichtnegativ. Für die anderen Zellseiten erhält man analoge Ausdrücke.

#### 4.2.2 Approximation der Konvektionsterme

Die Vervollständigung der Diskretisierung von Gleichung (16) wird weiterhin am Beispiel der Seite  $e$  der betrachteten Zelle gezeigt. Der Konvektionsterm für diese Zellseite ist

$$Conv_i^e = (v_i \underbrace{\rho v_j A_j}_{Fluss})_e = v_{i e} Fluss_e . \quad (19)$$

$Fluss_e$  bezeichnet den Massenfluß durch die Seitenfläche  $e$ .  $Fluss_e$  ist positiv, wenn das Fluid aus der Zelle hinausströmt. Die Ermittlung der fehlenden Geschwindigkeiten im Mittelpunkt der Seitenfläche hat einen großen Einfluß auf die Stabilität und Genauigkeit des Verfahrens. Die Geschwindigkeiten  $v_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) für  $Fluss_e$  werden nach Rhie und Chow [45] interpoliert, wobei außer den Geschwindigkeiten in den Zellmittelpunkten  $E$  und  $P$  auch Drücke eingehen (s.5.1.1). Das am weitesten verbreitete Verfahren zur Bestimmung der Geschwindigkeiten  $v_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) in (19) ist das sogenannte 'Upwind Differencing Scheme' (UDS). Auch andere Verfahren wie das 'Central Differencing Scheme' (CDS) und das 'Linear Upwind Differencing Scheme' (LUDS) finden verbreitet Anwendung. Nur das UDS besitzt (in Abwesenheit von Diffusions- und Quelltermen) alle wünschenswerten Eigenschaften eines Diskretisierungsschemas, nämlich die konservative Eigenschaft (conservativeness), die Transporteigenschaft (transportiveness) und das Beschränktheitsprinzip (boundedness), z.B. [48]. Dies darf aber nicht darüber hinwegtäuschen, daß es letztendlich um die Größe der Diskretisierungsfehler geht. In dieser Hinsicht schneidet das UDS am schlechtesten ab. Im Folgenden werden die drei o.g. Verfahren mit ihren Vor- und Nachteilen vorgestellt. U.a. [36,42] untersuchen ausführlich diese und andere Schemata zur Approximation der Konvektionsterme.

#### Upwind Differencing Scheme

Bei diesem Schema wird für  $Fluss_e \geq 0$   $v_{i e} = v_{iP}$  gesetzt, andernfalls  $v_{i e} = v_{iE}$ . Der Massenfluß  $Fluss_e$  ist bei dieser Entscheidung als bekannt anzusehen (es wird der gespeicherte Wert vom vorangegangenen Iterationsschritt benutzt). Der Konvektionsterm für

die betrachtete Zellseite ist dann

$$Conv_i^e = -max(0, -Fluss_e)(v_{iE} - v_{iP}) + Fluss_e v_{iP} \quad . \quad (20)$$

Für die anderen Zellseiten ergeben sich analoge Ausdrücke. Nach (16) besagt die Massenerhaltung, daß die Summe aller Massenflüsse durch die Seiten der Zelle verschwinden muß. Insofern müßten sich die Beiträge zum Hauptdiagonalelement der resultierenden Systemmatrix aufheben, die der letzte Term in (20) und die entsprechenden letzten Terme in den Konvektionstermen der anderen Zellseiten liefern. Da aber die Massenerhaltung erst beim Erreichen der Konvergenz des iterativen Lösungsverfahrens erfüllt wird, könnte der Gesamtbeitrag dieser Terme zum o.g. Hauptdiagonalelement im Laufe der Iteration durchaus negativ sein, was beim Einsatz gängiger Iterationsverfahren nachteilig ist. Aus diesem Grund werden der letzte Term in (20) und die entsprechenden Terme für die anderen Zellseiten zu Null gesetzt. Dies verletzt keinesfalls die einzuhaltenden Erhaltungsgleichungen und hat sich für Stabilität und Konvergenz des Verfahrens bewährt. Dadurch gewährleistet aber erst eine konvergierte Lösung die Gleichheit der Beträge der Konvektionsflüsse zweier Zellen durch die gemeinsame Seite (konservative Eigenschaft).

Der Konvektionsfluß in kartesischer Richtung  $i$  durch die Seite  $e$  kann dann in allgemeiner Form (sie soll auch für die anderen Schemata gelten) geschrieben werden

$$Conv_i^e = -a_E^{(c)e}(v_{iE} - v_{iP}) - a_W^{(c)e}(v_{iW} - v_{iP}) - S_i^{(c)e} \quad , \quad (21)$$

$$a_E^{(c)e} = max(0, -Fluss_e) \quad , \quad a_W^{(c)e} = 0 \quad , \quad S_i^{(c)e} = 0 \quad .$$

Die benutzte Notation wird am Beispiel des Koeffizienten  $a_E^{(c)e}$  erläutert. Die Kleinbuchstaben  $c$  und  $e$  bedeuten, daß dieser Koeffizient aus dem Konvektionsterm (convection) der Zellseite  $e$  herrührt. Das zusätzliche Großbuchstabe  $E$  bezeichnet, welchen Zellmittelpunkt (außer  $P$ ) dieser Koeffizient betrifft. Die mit  $a$  bezeichneten Koeffizienten sind unabhängig von der betrachteten Richtung  $i$  und nichtnegativ.

Die Anwendung des UDS führt zu einem numerisch sehr stabilen Verfahren, hat aber den Nachteil, daß die dadurch entstehenden Diskretisierungsfehler sich wie zusätzliche Diffusion auswirken [36,43]. Diese vom Verfahren eingeführte 'falsche' bzw. 'numerische Diffusion' macht sich insbesondere dann in den Ergebnissen bemerkbar, wenn die Zellen im Gitter sehr schräg durchströmt werden und starke Geschwindigkeitsgradienten quer zur lokalen Stromrichtung vorhanden sind.

Darüber hinaus stellt das UDS ein inkonsistentes Verfahren dar. Die Konsistenzbedingung besagt, daß die diskretisierten Erhaltungsgleichungen in die exakten Differentialgleichungen übergehen müssen, wenn alle Maschenweiten im Gitter gegen Null gehen (unabhängig von der Art dieses Grenzübergangs). Meiner Ansicht nach bleibt diese für Finite-Differenzen-Verfahren selbstverständliche Bedingung auch für Finite-Volumen-Verfahren gültig. Bei Anwendung des UDS wird sie aber nicht erfüllt, wie sich leicht auf einem unregelmäßigen kartesischen Gitter zeigen läßt, indem man die Approximationen

der Konvektionsflüsse durch die sechs Zellseiten in Taylorreihen im Zellmittelpunkt entwickelt und addiert. Die Impulsflüsse durch die einzelnen Zellseiten werden durch das UDS zwar (mit 1. Ordnung) konsistent approximiert, aber die (algebraische) Summe derselben ergibt i.a. nicht den Differentialausdruck des Konvektionstermes in Gleichung (4), wenn alle Zellen verschwindend klein werden:

$$Conv_i = \delta y^1 \delta y^2 \delta y^3 \left[ \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial y^j} + \frac{1 - q_{(j)}}{2q_{(j)}} \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial y^j} + O(\delta y^1, \delta y^2, \delta y^3) \right] . \quad (22)$$

$Conv_i$  bezeichnet die Summe der Konvektionsterme aller Zellseiten und  $\delta y^j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) die Maschenweite in Richtung  $j$  der betrachteten Zelle im unregelmäßigen kartesischen Gitter.  $q_{(j)}$  ist das Verhältnis der Maschenweite  $\delta y^j$  dieser Zelle zur Maschenweite der in Richtung  $j$  stromaufwärts gelegenen Nachbarzelle (Expansionsfaktor). Die mit  $j$  bezeichneten Indizes in Klammern gehören zur Bezeichnung der Expansionsfaktoren. Über diese Indizes wird nicht summiert. Der letzte Term steht für die Terme 1. und höherer Ordnung in den erwähnten Reihenentwicklungen der Konvektionsterme. Der Faktor  $\delta y^1 \delta y^2 \delta y^3 \equiv \delta V$  stammt aus der durchgeführten Integration über die Zelle.

Aus (22) kann man erkennen, daß die Größe  $Conv_i/\delta V$  beim Grenzübergang  $\delta y^i \rightarrow 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) nur dann in den erwarteten Ausdruck übergeht, wenn alle Expansionsraten gleich 1 sind, d.h. wenn das Gitter regelmäßig ist. Daß der entstehende Diskretisierungsfehler bei üblichen Gitterverfeinerungstechniken trotzdem abnimmt (wenn auch sehr langsam), weil das Gitter dabei immer regelmäßiger wird, behebt das Problem nicht. In den Zellen am Rand des Rechengebiets bleibt die festgestellte Inkonsistenz üblicherweise auch in diesem Fall bestehen, und in der Praxis wird das UDS vornehmlich auf groben Gittern mit Expansionsraten zwischen  $\frac{2}{3}$  und  $\frac{3}{2}$  verwendet, wodurch der Diskretisierungsfehler in (22) in Regionen großer Geschwindigkeitsgradienten besonders groß sein kann.

Der 'inkonsistente' Fehler entsteht, weil die konvektierten Geschwindigkeiten auf entgegengesetzten Zellseiten durch Werte in Punkten approximiert werden, die in ungleichen Abständen stromaufwärts liegen. Die Konsistenz läßt sich in einfacher Weise wieder herstellen, indem man diese ungleiche 'Versetzung' stromaufwärts vermeidet. Da aber dabei die konservative Eigenschaft des Verfahrens verloren geht, stellt dies keine zufriedenstellende Alternative dar.

### Central Differencing Scheme

Bei diesem Schema wird  $v_{i_e}$  in (19) zwischen den Werten in den Zellmittelpunkten  $P$  und  $E$  linear interpoliert. Durch Einführung des Interpolationsfaktors  $f_{1P} = \overline{Pe} / (\overline{Pe} + \overline{eE})$ , (s. Skizze auf S.25), ist

$$v_{i_e} = (1 - f_{1P}) v_{iP} + f_{1P} v_{iE} = v_{iP} + f_{1P} (v_{iE} - v_{iP}) .$$

Der Konvektionsterm für die betrachtete Zellseite ergibt sich dann zu

$$Conv_i^e = f_{1P} Fluss_e (v_{iE} - v_{iP}) + Fluss_e v_{iP} . \quad (23)$$

Für die anderen Zellseiten ergeben sich analoge Ausdrücke. Der letzte Term in (23) und die entsprechenden Terme der anderen Zellseiten werden auch hier zu Null gesetzt.

Der Konvektionsfluß in kartesischer Richtung  $i$  durch die Seite  $e$  lautet

$$\begin{aligned} Conv_i^e &= -a_E^{(c)e} (v_{iE} - v_{iP}) - a_W^{(c)e} (v_{iW} - v_{iP}) - S_i^{(c)e} , \\ a_E^{(c)e} &= -f_{1P} Fluss_e , \quad a_W^{(c)e} = 0 , \quad S_i^{(c)e} = 0 . \end{aligned}$$

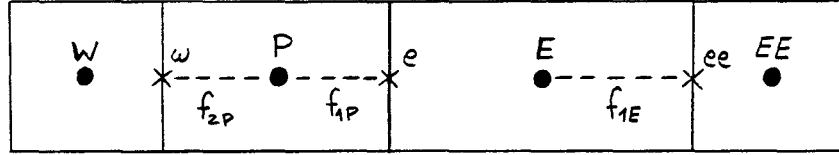
Dieses Verfahren hat einen Abbruchfehler 2. Ordnung (bei einer Betrachtung nach Taylorreihen-Entwicklungen auf einem regelmäßigen kartesischen Gitter), und erzeugt auf unregelmäßigen Gittern erheblich weniger numerische Diffusion als das UDS. Das CDS erfüllt weder die Transporteigenschaft noch (in Abwesenheit von Diffusions- und Quelltermen) das Beschränktheitsprinzip und führt für konvektionsdominierte Strömungen wie um Schiffe auf üblichen (relativ groben) Gittern zu einem instabilen Verfahren. Es besteht aber die Möglichkeit das CDS in einer sogenannten 'deferred correction' Prozedur zu implementieren [22]. Dabei wird der Konvektionsfluß durch eine gegebene Zellseite so zusammengesetzt:

$$Conv_i = Conv_i^{UDS} + \gamma [ Conv_i^{CDS} - Conv_i^{UDS} ] \quad (25)$$

$Conv_i^{UDS}$  und  $Conv_i^{CDS}$  stehen für die Konvektionsflüsse durch die betreffende Zellseite nach dem UDS (20) bzw. nach dem CDS (23).  $\gamma$  ist ein Mischungsfaktor, dessen Wert zwischen 0 und 1 zu wählen ist. Der zweite Term auf der rechten Seite in (25) wird in den Quellterm der Impulsgleichung gebracht und explizit behandelt, so daß die Diagonaldominanz der resultierenden Systemmatrix (auch bei Wahl eines großen Mischungsfaktors) durch den möglicherweise negativen Gesamtbeitrag aller Seiten zum Hauptdiagonalelement beim CDS nicht beeinträchtigt wird. Für  $\gamma = 0$  resultiert das UDS. Für  $\gamma = 1$  erhält man nach Konvergenz des iterativen Lösungsverfahrens die Genauigkeit des CDS. Die Wahl von  $\gamma = 1$  ist nicht immer möglich, weil das Konvergenzverhalten des Verfahrens zu sehr unter der expliziten Behandlung leidet. Für mäßige Werte des Mischungsfaktors (z.B. 0.5) ist aber kaum eine Konvergenzverschlechterung festzustellen, und die Ergebnisse sind oft schon deutlich besser als mit UDS. Auf groben Gittern können u.U. Oszillationen in den Ergebnissen auftreten.

### Linear Upwind Differencing Scheme

Bei diesem Schema wird  $v_{i_e}$  in (19) aus den Werten in den zwei stromaufwärts gelegenen Zellmittelpunkten ( $W$  und  $P$  bzw.  $EE$  und  $E$ , je nach Vorzeichen von  $Fluss_e$ ) durch lineare Extrapolation ermittelt. Durch Einführung der Interpolationsfaktoren  $f_{2P} = \overline{Pw} / (\overline{Pw} + \overline{wW})$  und  $f_{1E} = \overline{Eee} / (\overline{Eee} + \overline{eeEE})$ , (s. Skizze auf S.25), ist



$$\begin{aligned}
 v_{i_e} &= v_{iP} - f_{2P} (v_{iW} - v_{iP}) && , \text{ falls } Fluss_e \geq 0 \text{ , und} \\
 v_{i_e} &= v_{iP} + (1 + f_{1E}) (v_{iE} - v_{iP}) - f_{1E} (v_{iEE} - v_{iE}) && , \text{ falls } Fluss_e < 0 \text{ .}
 \end{aligned}$$

Der Konvektionsterm für die betrachtete Zellseite ergibt sich dann zu

$$\begin{aligned}
 Conv_i^e &= - \max(0, -Fluss_e) (1 + f_{1E}) (v_{iE} - v_{iP}) \\
 &- \max(0, Fluss_e) f_{2P} (v_{iW} - v_{iP}) \\
 &+ \max(0, -Fluss_e) f_{1E} (v_{iEE} - v_{iP}) + Fluss_e v_{iP} \text{ .} \quad (26)
 \end{aligned}$$

Für die anderen Zellseiten ergeben sich analoge Ausdrücke. Der letzte Term in (26) sowie die entsprechenden Terme der anderen Zellseiten werden auch hier zu Null gesetzt.

Der Konvektionsfluß in kartesischer Richtung  $i$  durch die Seite  $e$  lautet

$$\begin{aligned}
 Conv_i^e &= -a_E^{(c)e} (v_{iE} - v_{iP}) - a_W^{(c)e} (v_{iW} - v_{iP}) - S_i^{(c)e} \text{ ,} \\
 a_E^{(c)e} &= \max(0, -Fluss_e) (1 + f_{1E}) \\
 a_W^{(c)e} &= \max(0, Fluss_e) f_{2P} \\
 S_i^{(c)e} &= -\max(0, -Fluss_e) f_{1E} (v_{iEE} - v_{iP}) \text{ .} \quad (27)
 \end{aligned}$$

Auch dieses Verfahren hat einen Abbruchfehler 2. Ordnung auf einem kartesischen regelmäßigen Gitter und erzeugt erheblich weniger numerische Diffusion als das UDS. Das LUDS erfüllt nicht das Beschränktheitsprinzip und kann auf groben Gittern zu Oszillationen (Über- und Unterschließen der numerischen Lösung) führen. Dies ist bei den durchgeführten Rechnungen nur lokal beschränkt aufgetreten (Abb.34).

Die numerische Diffusion ist kaum zu quantifizieren. Ein Abbruchfehler 'diffusiver Natur' (proportional zu zweiten Ableitungen der Geschwindigkeit) bedeutet nicht unbedingt, daß sich dieser Fehler in Form einer künstlichen Dissipation von Impuls in den Ergebnissen widerspiegeln wird. Ein solcher Fehler ist eigentlich bei Anwendung jedes Schemas auf einem unregelmäßigen Gitter vorhanden. Insofern bleibt die numerische Diffusion ein vager Begriff und sorgt stets für unterschiedliche Interpretationen. Der Grund für die Entstehung

numerischer Diffusion ist die Interpolation der konvektierten Geschwindigkeit entlang Gitterlinien, die oft in keinem Zusammenhang mit den lokalen Strömungsverhältnissen stehen, anstatt entlang Stromlinien. Außer den hier besprochenen Verfahren zur Approximation der Konvektionsterme stehen eine Reihe weiterer Verfahren zur Verfügung. Diese versuchen, durch Approximationen höherer Ordnung [29], Kombination verschiedener Schemata [61] oder durch die Berücksichtigung der lokalen Stromrichtung bei der Bestimmung der Konvektionsterme die numerische Diffusion zu verringern. Ein Beispiel für letzteres Verfahren stellt das 'skew upwind differencing scheme' (SUDS) von Raithby [44] dar. Raithbys Verfahren ist allerdings für eine 3D-Anwendung sehr rechenaufwendig und hat sich deswegen bisher nicht durchgesetzt. Auf der anderen Seite neigen Verfahren höherer Ordnung zu numerisch bedingten Oszillationen, so daß auch sie keine zufriedenstellende Lösung bieten.

### 4.3 Aufstellung des Gleichungssystems

Nach Vervollständigung der Diskretisierung von Gleichung (16) werden die getroffenen Approximationen für die Konvektions-, Diffusions-, und Druckterme der jeweiligen Zellseiten sowie für die Massenkraft zusammengestellt. Die Impulsgleichungen ( $i=1,2,3$ ) für eine Zelle mit Zellmittelpunkt P sind:

$$\begin{aligned}
 a_P v_{iP} - \sum_{NB} a_{NB} v_{iNB} &= S_i + S_i^{(p)} \quad , \quad NB = E, W, N, S, T, B \\
 a_{NB} &= a_{NB}^{(c)} + a_{NB}^{(d)} \quad , \quad a_P = \sum_{NB} a_{NB} \\
 a_E^{(c)} &= a_E^{(c)e} + a_E^{(c)w} \\
 a_W^{(c)} &= a_W^{(c)e} + a_W^{(c)w} \\
 a_N^{(c)} &= a_N^{(c)n} + a_N^{(c)s} \\
 a_S^{(c)} &= a_S^{(c)n} + a_S^{(c)s} \\
 a_T^{(c)} &= a_T^{(c)t} + a_T^{(c)b} \\
 a_B^{(c)} &= a_B^{(c)t} + a_B^{(c)b} \\
 S_i &= S_i^{(c)} + S_i^{(d)} \\
 S_i^{(c)} &= \sum_{nb} S_i^{(c)nb} \quad , \quad S_i^{(d)} = \sum_{nb} S_i^{(d)nb} \quad , \quad nb = e, w, n, s, t, b
 \end{aligned} \tag{28}$$

Die Koeffizienten  $a_{NB}$  der Unbekannten in den Nachbarzellmittelpunkten stellen sich aus einem Anteil  $a_{NB}^{(c)}$  (aus den Konvektionsflüssen durch die Seite  $nb$  und durch die dazu entgegengesetzte Seite von Zelle P) und einem Anteil  $a_{NB}^{(d)}$  (aus dem Diffusionsfluß durch die Seite  $nb$  von Zelle P) zusammen. Der Koeffizient  $a_P$  ist die Summe der Koeffizienten der Unbekannten in den Nachbarzellmittelpunkten. Auf der rechten Seite der Gleichung

und anfangs sowie bei Quelltermen  $S_i^{(p)}$  befinden sich die äußeren Kräfte (falls vorhanden). Die Druckterme werden im Rahmen der angewandten SIMPLE-Methode (s.5.1) explizit behandelt und sind im Quellterm  $S_i^{(p)}$  zusammengefaßt.

(28) liefert je eine Gleichung für die gesuchten Geschwindigkeiten  $v_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) im Zellmittelpunkt P. Der Druck hat dagegen keine 'eigene' Gleichung. Die Massenerhaltung in der betrachteten Zelle

$$\sum_{nb} Fluss_{nb} = 0 \quad , \quad nb = e, w, n, s, t, b \quad (29)$$

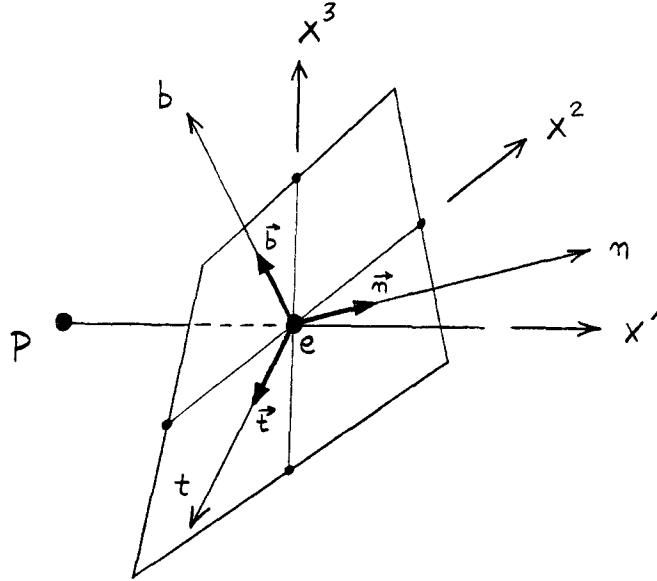
liefert eine vierte Gleichung, die später herangezogen wird.

Die Gleichungen (28) für die drei Geschwindigkeitskomponenten sind durch die Koeffizienten und Quellterme gekoppelt. Die Koeffizienten der Gleichungen für die verschiedenen Richtungen sind gleich. Dies stellt einen großen Vorteil des gewählten nichtversetzten Gitters dar und hat programmtechnisch insbesondere bei Anwendung der Mehrgittertechnik weitgehende Konsequenzen.

Bei Aufstellung der diskretisierten Impulsgleichungen in jeder Zelle des Gitters entsteht ein extrem großes, nichtlineares algebraisches Gleichungssystem in den drei Geschwindigkeitskomponenten (und den Drücken) in allen Zellmittelpunkten des Gitters. Die Systemmatrix ist sehr schwach besetzt. In jeder Zeile derselben sind nur sieben Elemente ungleich Null. Da alle Koeffizienten in (28) nichtnegativ sind (wie man aus (18) und z.B. (27) erkennen kann) und das Hauptdiagonalelement  $a_P$  der resultierenden Systemmatrix sich aus der Summe der restlichen Elemente auf der betreffenden Zeile ergibt, ist eine (schwache) Diagonaldominanz der Systemmatrix gewährleistet. Dies ist für die Konvergenz des benutzten iterativen Lösungsverfahrens von entscheidender Bedeutung.

## 4.4 Randbedingungen

Wegen des elliptischen Charakters des partiellen Differentialgleichungssystems (4) müssen auf allen Rändern des Rechengebiets Randbedingungen (RB) angesetzt werden (s.6.1). Vorkommende RB sind z.B. die Haftbedingung auf dem Schiffsrumpf und die Symmetriebedingung auf einer abgrenzenden Symmetrie-Ebene des Rechengebiets. Es werden keine RB für den Druck angesetzt. Die Drücke an den Rändern werden aus den im Feld bestimmten Werten linear extrapoliert. Die Randbedingungen werden in das diskretisierte Gleichungssystem eingebracht, indem die Koeffizienten und Quellterme der Gleichungen von den Zellen, die eine oder mehr Seiten auf Rändern haben, entsprechend geändert werden. Zur Erläuterung der Implementierung von RB am Beispiel der zwei o.g. Fälle wird ein lokales orthogonales Koordinatensystem  $t, n, b$  im Mittelpunkt der betrachteten Seite  $e$  von Zelle P eingeführt (s. Skizze auf S.28). Für andere Seiten und bei anderen RB geht man analog vor.



Die Koordinatenachse  $n$  steht senkrecht auf der Zellseite.  $\vec{n}$  ist der in (4.1) bereits eingeführte aus der Zelle hinauszeigende Einheitsnormalenvektor.  $\vec{t}$ ,  $\vec{n}$  und  $\vec{b}$  bilden eine rechtshändige Einheitsvektorbasis.  $x^i$  bezeichnen weiterhin die krummlinigen Koordinaten. Die Geschwindigkeitskomponenten im neuen, lokalen Koordinatensystem werden mit  $u, v, w$  bezeichnet. Die 'effektiven' Spannungen auf der Seite  $e$  lassen sich schreiben

$$\begin{aligned}\tau_t &= \mu_{eff} \left( \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial v}{\partial t} \right) \\ \tau_n &= 2 \mu_{eff} \frac{\partial v}{\partial n} \\ \tau_b &= \mu_{eff} \left( \frac{\partial w}{\partial n} + \frac{\partial v}{\partial b} \right) .\end{aligned}\tag{30}$$

Die Normalableitung im Punkt  $e$  einer skalaren Größe  $\phi$  läßt sich unter Ausnutzung der in (4.1) und (4.2) eingeführten Definitionen schreiben

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{1}{J} \frac{\partial \phi}{\partial x^q} \frac{A_j^{(q)} A_j^{(1)}}{\delta S} .$$

Wenn auf der Zellseite  $\phi \equiv 0$  ist und die Ableitung auf der rechten Seite der Gleichung durch eine seitliche FD-Approximation 1. Ordnung angenähert wird, ergibt sich die Normalableitung zu

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{1}{J} \phi_P \frac{A_j^{(1)} A_j^{(1)}}{\delta S} .\tag{31}$$

Die im Programm tatsächlich gewählte FD-Approximation 2. Ordnung für die erwähnte Ableitung führt zu besseren Ergebnissen ohne nennenswerten Mehraufwand, würde aber hier die nachfolgenden Erläuterungen unnötig erschweren.

## Haftbedingung

An einer nichtbeweglichen Wand sind alle Geschwindigkeitskomponenten Null. Auf der betrachteten Seite  $e$  ist dann  $u = v = w \equiv 0$ , und somit  $Fluss_e = 0$  und  $\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial b} = 0$  für  $\phi = u, v, w$ . Aus der Kontinuitätsbedingung folgt  $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$ , und die Spannungen (30) ergeben sich zu

$$\begin{aligned}\tau_t &= \mu_{eff} \frac{\partial u}{\partial n} \\ \tau_n &= 0 \\ \tau_b &= \mu_{eff} \frac{\partial w}{\partial n} .\end{aligned}$$

Der Diffusionsfluß durch die Seite  $e$  läßt sich entsprechend der bisherigen Vorgehensweise approximieren. Vektoriell dargestellt ist

$$\overrightarrow{Diff}^e = \mu_{eff} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \vec{t} + \frac{\partial w}{\partial n} \vec{b} \right) \delta S .$$

Da die Ableitungen im Punkt  $e$  von  $u$  und  $w$  nach den krummlinigen Koordinaten  $x^2$  und  $x^3$  auch Null sind, ergibt sich mit (31)

$$\overrightarrow{Diff}^e = -\frac{\mu_{eff}}{J} A_j^{(1)} A_j^{(1)} (u_P \vec{t} + w_P \vec{b}) .$$

Der Faktor in Klammern ist der wandparallele Anteil des Geschwindigkeitsvektors im Zellmittelpunkt  $P$ . Er kann durch die Geschwindigkeitskomponenten  $v_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) im globalen kartesischen Koordinatensystem ausgedrückt werden

$$u_P \vec{t} + w_P \vec{b} = \left( v_{iP} - \frac{v_{jP} A_j^{(1)}}{A_k^{(1)} A_k^{(1)}} A_i^{(1)} \right) \vec{e}_i .$$

Die Komponente in kartesischer Richtung  $i$  des Diffusionsflusses durch die Seite  $e$  ist dann

$$Diff_i^e = -\frac{\mu_{eff}}{J} (v_{iP} A_j^{(1)} A_j^{(1)} - v_{jP} A_j^{(1)} A_i^{(1)}) . \quad (32)$$

Der erste Term auf der rechten Seite in (32) liefert einen nichtnegativen Beitrag zum Hauptdiagonalelement der entsprechenden Zeile in der resultierenden Systemmatrix und wird unter  $a_P^{plus}$  gesondert gespeichert, um die allgemeine Form beizubehalten. Der zweite Term auf der rechten Seite wird explizit behandelt.

Der Konvektionsfluß in kartesischer Richtung  $i$  durch die Seite  $e$  ist

$$Conv_i^e = Fluss_e v_{i_e} = 0 . \quad (33)$$

Die Beiträge der Seite  $e$  zu den diskretisierten Impulsgleichungen der Zelle  $P$  sind dann

$$\begin{aligned}a_E^{(c)e} &= 0 , \quad a_W^{(c)e} = 0 , \quad S_i^{(c)e} = 0 \\ a_E^{(d)} &= 0 , \quad a_P^{plus} = \frac{\mu_{eff}}{J} A_j^{(1)} A_j^{(1)} , \quad S_i^{(d)e} = \frac{\mu_{eff}}{J} v_{jP} A_j^{(1)} A_i^{(1)} .\end{aligned} \quad (34)$$

Bei der Zusammenstellung der Gleichungen für diese Zelle ist, anders als im allgemeinen Fall (28),

$$a_P = \sum_{NB} a_{NB} + a_P^{\text{plus}} \quad , \quad NB = E, W, N, S, T, B \quad .$$

### Symmetriebedingung

An einer Symmetrie-Ebene sind die Normalgeschwindigkeit und die Normalableitung der zur Symmetrie-Ebene parallelen Geschwindigkeitskomponenten Null. Auf der betrachteten Seite e, die Teil der Symmetrie-Ebene sei, ist dann  $v \equiv 0$ , und somit  $Fluss_e = 0$  und  $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial b} = 0$ , und ferner  $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial n} = 0$ . Die Spannungen (30) ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \tau_t &= 0 \\ \tau_n &= 2 \mu_{eff} \frac{\partial v}{\partial n} \\ \tau_b &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Der Diffusionsfluß durch die Seite e läßt sich approximieren

$$\overrightarrow{Diff}^e = 2 \mu_{eff} \frac{\partial v}{\partial n} \vec{n} \delta S \quad .$$

Da die Ableitungen im Punkt e von  $v$  nach den krummlinigen Koordinaten  $x^2$  und  $x^3$  auch Null sind, ergibt sich mit (31)

$$\overrightarrow{Diff}^e = -\frac{2 \mu_{eff}}{J} A_j^{(1)} A_j^{(1)} v_P \vec{n} \quad .$$

Der Normalenanteil des Geschwindigkeitsvektors im Zellmittelpunkt P kann durch die Geschwindigkeitskomponenten  $v_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) im globalen kartesischen Koordinatensystem ausgedrückt werden:

$$v_P \vec{n} = \frac{v_{jP} A_j^{(1)}}{A_k^{(1)} A_k^{(1)}} A_i^{(1)} \vec{e}_i \quad .$$

Die Komponente in kartesischer Richtung  $i$  des Diffusionsflusses durch die Seite e ist dann

$$Diff_i^e = -\frac{2 \mu_{eff}}{J} v_{jP} A_j^{(1)} A_i^{(1)} \quad . \quad (35)$$

Die rechte Seite in (35) wird explizit behandelt.

Der Konvektionsfluß durch die Seite e ist wie im vorherigen Falle einer undurchlässigen Wand gleich Null. Die Beiträge der Seite e zu den diskretisierten Impulsgleichungen der Zelle P sind dann

$$\begin{aligned} a_E^{(c)e} &= 0 \quad , \quad a_W^{(c)e} = 0 \quad , \quad S_i^{(c)e} = 0 \\ a_E^{(d)} &= 0 \quad , \quad S_i^{(d)e} = -\frac{2 \mu_{eff}}{J} v_{jP} A_j^{(1)} A_i^{(1)} \quad . \end{aligned} \quad (36)$$

## 5 Lösungsalgorithmus

### 5.1 Druck-Geschwindigkeitskopplung

Zur iterativen Lösung der diskretisierten Erhaltungsgleichungen wird die SIMPLE-Methode von Patankar und Spalding [35] angewendet. Bei dieser Methode werden die Impulsgleichungen und die Massenerhaltung sukzessiv behandelt. Zunächst wird das Gleichungssystem bestehend nur aus den Impulsgleichungen (28) in allen Zellen mit 'gegebenen' Drücken  $p^*$  (Quelltermen  $S_i^{(p)}$ ) gelöst. Die Koeffizienten und die Quellterme  $S_i$  werden dabei auch als bekannt angesehen und festgehalten (Picard-Linearisierung). Als  $p^*$  und für die Bestimmung der Koeffizienten und Quellterme dienen zunächst die Startwerte, dann die Werte des vorangegangenen 'globalen' Iterationsschrittes.

Zur Lösung des resultierenden linearen Gleichungssystems wird ein in verschiedenen Richtungen alternierendes Linien-Relaxationsverfahren eingesetzt. Man bezeichnet dies als *innere* Iteration, um sie von der *äußeren* bzw. globalen Iteration des Gesamtsystems zu unterscheiden. Wegen der Linearisierung und der explizit behandelten Terme lohnt es sich nicht, die Impulsgleichungen an dieser Stelle genau zu lösen. In der Regel reicht schon ein einziger innerer Iterationsschritt. Die so ermittelten Geschwindigkeiten  $v_i^*$  in den Zellmittelpunkten und die sich damit ergebenden Massenflüsse  $Fluss_{nb}^*$  durch die Zellseiten erhalten i.a. nicht die Masse.

Anschließend werden Druckkorrekturen  $p'$  in allen Zellen des Gitters gesucht, die ihrerseits Geschwindigkeits- und Massenflußkorrekturen ( $v_i'$  und  $Fluss_{nb}'$ ) hervorrufen, so daß die hiermit korrigierten Geschwindigkeiten und Massenflüsse die Massenerhaltung in jeder Zelle erfüllen. Die o.g. Linearisierung und Vereinfachungen bei der Bestimmung der Korrekturen machen eine mehrmalige Wiederholung der beschriebenen Prozedur nötig (äußere Iteration). Die korrigierten Größen

$$\begin{aligned} p^{**} &= p^* + p' \\ v_i^{**} &= v_i^* + v_i' \\ Fluss_{nb}^{**} &= Fluss_{nb}^* + Fluss_{nb}' \end{aligned} \quad (37)$$

dienen zur Bestimmung der Koeffizienten und Quellterme im nächsten Iterationsschritt.

Nichtversetzte Gitter erfordern spezielle Vorkehrungen bei der Interpolation der für die Massenflüsse nötigen Geschwindigkeiten, um numerisch bedingte Druckoszillationen zu vermeiden. Zur Erläuterung der angewandten Interpolationstechnik und für die anschließende Herleitung einer Druckkorrekturgleichung wird der Druckquellterm in (28) in nichtkonservativer Form ausgeschrieben. Für die Geschwindigkeit in kartesischer Richtung  $i$  im Punkt  $P$  gilt

$$v_{iP} = \frac{\sum a_{NB} v_{iNB} + S_i}{a_P} - (p_e^* - p_w^*) \frac{A_i^{(1)}}{a_P} - (p_n^* - p_s^*) \frac{A_i^{(2)}}{a_P} - (p_t^* - p_b^*) \frac{A_i^{(3)}}{a_P} . \quad (38)$$

Anders als in Gleichung (16) bezeichnet hier  $A_i^{(j)}$  die  $i$ -te Komponente des Hilfsvektors  $\vec{A}^{(j)}$  im Zellmittelpunkt  $P$  statt an den Zellseiten.

Für die Stabilität des iterativen Verfahrens ist eine Unterrelaxation der Geschwindigkeiten (39) nötig, wodurch die Diagonaldominanz der Systemmatrix erhöht wird. Typische Werte für den Unterrelaxationsfaktor  $\alpha_v$  variieren zwischen 0,4 und 0,8 abhängig von der Reynoldszahl und vom benutzten Gitter.

$$v_{iP}^* = (1 - \alpha_v) v_{iP}^{\text{alt}} + \alpha_v v_{iP}^{\text{neu}} \quad (39)$$

$v_{iP}^{\text{alt}}$  bezeichnet den Wert aus dem vorangegangenen äußeren Iterationsschritt,  $v_{iP}^{\text{neu}}$  den Wert nach (38). Die Unterrelaxation wird üblicherweise in die Geschwindigkeitsgleichung (38) integriert, indem der bekannte erste Term auf der rechten Seite dem Quellterm  $S_i$  hinzugefügt wird und  $\hat{a}_P = \frac{a_P}{\alpha_v}$  anstelle des Hauptdiagonalelementes  $a_P$  gesetzt wird. Die Iterationsvorschrift zur Bestimmung der mit den 'gegebenen' Drücken geschätzten Geschwindigkeiten  $v_i^*$  ( $i = 1, 2, 3$ ) in den Zellmittelpunkten lautet dann

$$v_{iP}^* = \frac{\sum a_{NB} v_{iNB}^* + S_i}{\hat{a}_P} - (p_e^* - p_w^*) \frac{A_i^{(1)}}{\hat{a}_P} - (p_n^* - p_s^*) \frac{A_i^{(2)}}{\hat{a}_P} - (p_t^* - p_b^*) \frac{A_i^{(3)}}{\hat{a}_P} . \quad (40)$$

### 5.1.1 Bestimmung der Massenflüsse

Eine lineare Interpolation der Geschwindigkeiten z.B. im Zellseitenmittelpunkt  $e$  zwischen den mit (40) ermittelten Geschwindigkeiten in den Zellmittelpunkten  $P$  und  $E$  entspräche

$$\begin{aligned} \overline{v_{ie}^*} &= \left\{ \frac{\sum a_{NB} v_{iNB}^* + S_i}{\hat{a}_M} \right\}_e \\ &- \left\{ (p_e^* - p_w^*) \frac{A_i^{(1)}}{\hat{a}_M} \right\}_e - \left\{ (p_n^* - p_s^*) \frac{A_i^{(2)}}{\hat{a}_M} \right\}_e - \left\{ (p_t^* - p_b^*) \frac{A_i^{(3)}}{\hat{a}_M} \right\}_e \end{aligned} \quad (41)$$

$\overline{v_{ie}^*}$  ist die linear interpolierte Geschwindigkeit in Richtung  $i$ . Die geschweiften Klammern bezeichnen eine lineare Interpolation der betreffenden Ausdrücke zwischen den Werten in  $M = P$  und  $M = E$ . Die Bezeichnung von Zellseiten und Nachbarmittelpunkten in den Klammern bezieht sich auf die aktuelle Zelle  $M$ . Da die Drücke an den Zellseiten linear interpoliert werden, kann man aus (41) erkennen, daß eine oszillierende Druckverteilung z.B. mit alternierenden Werten  $\pm 1$  von Zelle zu Zelle in allen Richtungen auf einem kartesischen regelmäßigen Gitter dieselben Zellseitengeschwindigkeiten hervorrufen würde wie eine konstante Druckverteilung. Die Überlagerung einer solchen 'numerischen Störung' auf die Lösung bliebe also von den Geschwindigkeiten unbemerkt ('checkerboard effect').

Zur 'Herleitung' (nicht im mathematischen Sinne) einer besser geeigneten Bestimmungsgleichung für die Geschwindigkeiten im Punkt  $e$  sollte man berücksichtigen, daß die Druckdifferenz  $(p_e^* - p_w^*)$  in (41) aus dem Druckgradienten in Richtung der krummlinigen Koordinate  $x^1$  stammt (Abb.2). Der zweite Term auf der rechten Seite von (41) wird durch folgendes Produkt ersetzt:

$$\left\{ \frac{p_e^* - p_w^*}{\epsilon w} \right\}_e \{\overline{\epsilon w}\}_e \left\{ A_i^{(1)} \right\}_e \left\{ \frac{1}{\hat{a}_M} \right\}_e \rightsquigarrow \frac{p_E^* - p_P^*}{P_e + \epsilon E} \{\overline{\epsilon w}\}_e A_i^{(1)} \left\{ \frac{1}{\hat{a}_M} \right\}_e .$$

Der zu interpolierende 'Druckgradient' wird durch den Gradienten durch die betrachtete Seite ersetzt.  $A_i^{(1)}$  wird wieder an der Zellseite bestimmt. Entsprechende Umformungen der zwei letzten Terme in (41), wobei die 'Druckgradienten' allerdings unverändert bleiben, führen zu

$$v_{ie}^* = \left\{ \frac{\sum a_{NB} v_{iNB}^* + S_i}{\hat{a}_M} \right\}_e - \frac{\{\overline{e\bar{w}}\}_e}{\overline{Pe} + eE} (p_E^* - p_P^*) A_i^{(1)} \left\{ \frac{1}{\hat{a}_M} \right\}_e \quad (42)$$

$$- \{p_n^* - p_s^*\}_e A_i^{(2)} \left\{ \frac{1}{\hat{a}_M} \right\}_e - \{p_t^* - p_b^*\}_e A_i^{(3)} \left\{ \frac{1}{\hat{a}_M} \right\}_e .$$

Der wesentliche Unterschied zu (41) besteht darin, daß hier die Druckdifferenz  $p_E^* - p_P^*$  bei einer eventuellen Oszillation des Druckes zu entsprechenden Oszillationen der Geschwindigkeiten  $v_{ie}^*$  führt, wodurch die vorher festgestellte Entkopplung behoben ist. Die Differenz von (42) und (41) (in vereinfachter Form) führt zu einer programmtechnisch günstigeren Bestimmungsgleichung der Zellseitengeschwindigkeiten:

$$v_{ie}^* = \overline{v_{ie}^*} + \left[ \{p_e^* - p_w^*\}_e - \underbrace{\frac{\{\overline{e\bar{w}}\}_e}{\overline{Pe} + eE}}_{\lambda} (p_E^* - p_P^*) \right] A_i^{(1)} \left\{ \frac{1}{\hat{a}_M} \right\}_e . \quad (43)$$

$\overline{v_{ie}^*}$  wird durch lineare Interpolation bestimmt. Der Faktor  $\lambda$  vor der Druckdifferenz  $p_E^* - p_P^*$  läßt sich durch den Interpolationsfaktor  $f_{1P} = \overline{Pe}/(\overline{Pe} + eE)$  (Skizze auf S.25) bzw. durch den Expansionsfaktor  $q_{(1)}$  von Zelle  $P$  zu Zelle  $E$  ausdrücken

$$\lambda = \frac{\{\overline{e\bar{w}}\}_e}{\overline{Pe} + eE} = 4 f_{1P} (1 - f_{1P}) = \frac{4 q_{(1)}}{(1 + q_{(1)})^2} . \quad (44)$$

$\lambda$  nimmt den Wert 1 im Falle eines regelmäßigen Gitters an und ist sonst  $< 1$ . Der letzte Term in (43) kann auch als ein Korrekturterm zu der linear interpolierten Geschwindigkeit  $\overline{v_{ie}^*}$  angesehen werden. Der Korrekturterm ist Null auf einem kartesischen *regelmäßigen* Gitter, wenn der Druckverlauf über die beteiligten Zellen  $W, P, E$  und  $EE$  parabolisch (insbesondere auch konstant oder linear) ist. Dies ist sinnvoll, weil die spezielle Interpolation der Zellseitengeschwindigkeiten nur zur Vermeidung von Oszillationen dienen soll.

Diese von Rhie und Chow (1983) entwickelte Technik wurde von Perić (1985) und später von anderen Autoren erfolgreich angewendet. Aus diesen Arbeiten geht allerdings nicht hervor, in welcher Weise eine Unregelmäßigkeit des Gitters berücksichtigt wird. Hier sorgt der Faktor  $\lambda$  in (43) für eine bessere Bestimmung der Geschwindigkeiten im Falle eines stark unregelmäßigen Gitters. Dies hat sich bei Gittervergrößerungen durch Weglassen jeder zweiten Gitterlinie in jeder Richtung (wobei die Expansionsfaktoren quadratisch zunehmen und sehr große Werte annehmen) bewährt. Der Faktor  $\lambda$  macht den Korrekturterm in (43) auch zu Null auf einem kartesischen *unregelmäßigen* Gitter (wenigstens) wenn der Druckverlauf über die beteiligten Zellen einen linearen Verlauf hat. Außerdem führt er dazu, daß im Grenzfall  $q_{(1)} \rightarrow 0$  bzw.  $q_{(1)} \rightarrow \infty$  der Korrekturterm wie erwartet

verschwindet. Ohne den o.g. Faktor ist der Korrekturterm auf einem solchen Gitter ungleich Null sowohl für einen parabolischen als auch für einen linearen Verlauf des Druckes und kann im Grenzfall extremer Expansionsraten unsinnige Werte annehmen.

Wie Miller und Schmidt [32] und Majumdar [30] berichten, sind die nach Gleichung (43) bestimmten Zellseitengeschwindigkeiten vom gewählten Unterrelaxationsfaktor  $\alpha_v$  abhängig, da  $\hat{a}_M = \frac{a_M}{\alpha_v}$  ist. Dadurch besteht auch eine unzulässige Abhängigkeit der Ergebnisse von  $\alpha_v$ , die sich besonders bei kleinen Unterrelaxationsfaktoren stark bemerkbar machen kann. Eine Modifikation von (43) nach Miller und Schmidt führt schließlich zu folgender Interpolationsvorschrift für die Geschwindigkeit in kartesischer Richtung  $i$  auf der betrachteten Zellseite  $e$

$$v_{ie}^* = (1 - \alpha_v)(v_{ie}^{*\text{alt}} - \overline{v_{ie}^{*\text{alt}}}) + \overline{v_{ie}^*} + \alpha_v \left[ \{p_e^* - p_w^*\}_e - \lambda(p_E^* - p_P^*) \right] A_i^{(1)} \left\{ \frac{1}{a_M} \right\}_e . \quad (45)$$

Für die mit 'alt' gekennzeichneten Größen werden die Werte des letzten äußeren Iterationsschrittes benutzt. Die zwei letzten Terme in (45) sind gleich der rechten Seite in (43). Beim Erreichen der Konvergenz des Verfahrens stimmen alte und aktuelle Werte überein. Somit ergibt sich (ohne nennenswerten Mehraufwand) ein von  $\alpha_v$  unabhängiges Ergebnis  $v_{ie}^*$ . Durchgeführte Rechnungen mit stark unterschiedlichen Unterrelaxationsfaktoren zeigen eine nahezu exakte Unabhängigkeit der konvergierten Lösung von den gewählten Relaxationsfaktoren.

Der mit den 'gegebenen' Drücken  $p^*$  bestimmte Massenfluß durch die Zellseite  $e$  ist

$$Fluss_e^* = \rho v_{ie}^* A_i^{(1)} . \quad (46)$$

Für die anderen Zellseiten gelten analoge Ausdrücke zu (45) und (46). Die Massenflüsse  $Fluss_w^*$ ,  $Fluss_s^*$  und  $Fluss_b^*$  der Zelle  $P$  sind gleich und haben umgekehrte Vorzeichen wie die Massenflüsse  $Fluss_e^*$ ,  $Fluss_n^*$  bzw.  $Fluss_t^*$  der westlichen, südlichen bzw. unteren Nachbarzelle (konservative Eigenschaft).

### 5.1.2 Druckkorrekturgleichung(en)

Aus den diskretisierten Erhaltungsgleichungen lassen sich für jede Zelle eine Druckkorrekturgleichung sowie Ausdrücke für die Korrekturen der Geschwindigkeiten im Zellmittelpunkt  $v'_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) und der Massenflüsse durch die Zellseiten  $Fluss'_{ni}$  herleiten. Diese Ausdrücke sind abhängig von den Druckkorrekturen  $p'$ . Die Druckkorrekturen werden durch Lösen des Gleichungssystems bestehend aus den Druckkorrekturgleichungen aller Zellen bestimmt. Bei der o.g. Herleitung werden mehr oder weniger plausible Vereinfachungen gemacht. Diese beeinträchtigen aber weder die zu lösenden Erhaltungsgleichungen noch die Randbedingungen (und somit auch nicht die Ergebnisse), sondern nur die Konvergenz des Verfahrens.

Die mit den gegebenen Drücken  $p^*$  nach (40), (45) und (46) bestimmten Geschwindigkeiten und Massenflüsse erfüllen nicht die diskretisierte Kontinuitätsgleichung. In jeder Zelle ist normalerweise

$$\sum_{nb} Fluss_{nb}^* = Q \neq 0 \quad , \quad nb = e, w, n, s, t, b \quad . \quad (47)$$

Die korrigierten Geschwindigkeiten  $v_i^{**}$  und Drücke  $p^{**}$  sollen die diskretisierten Impulsgleichungen (40) weiterhin erfüllen; d.h.

$$v_{iP}^{**} = \frac{\sum a_{NB} v_{iNB}^{**} + S_i}{\hat{a}_P} - (p_e^{**} - p_w^{**}) \frac{A_i^{(1)}}{\hat{a}_P} - (p_n^{**} - p_s^{**}) \frac{A_i^{(2)}}{\hat{a}_P} - (p_t^{**} - p_b^{**}) \frac{A_i^{(3)}}{\hat{a}_P} \quad . \quad (48)$$

Subtraktion der Gleichungen (48) und (40) voneinander führt zu

$$v'_{iP} = \underbrace{\frac{\sum a_{NB} v'_{iNB}}{\hat{a}_P}}_{\text{vernachlässigt}} - (p'_e - p'_w) \frac{A_i^{(1)}}{\hat{a}_P} - (p'_n - p'_s) \frac{A_i^{(2)}}{\hat{a}_P} - (p'_t - p'_b) \frac{A_i^{(3)}}{\hat{a}_P} \quad . \quad (49)$$

Der erste Term auf der rechten Seite wird beim SIMPLE-Verfahren vernachlässigt. Andere Verfahren berücksichtigen diesen Term durch Näherung, z.B. SIMPLEC [57], oder in einem zweiten Schritt, PISO [20]. Gleichung (49) dient zur Bestimmung der Geschwindigkeitskorrekturen im Zellmittelpunkt  $P$ , nachdem die Druckkorrekturen in allen Zellmittelpunkten bestimmt worden sind. Die dabei auftretenden Druckkorrekturen an den Zellseiten werden linear interpoliert.

In ähnlicher Weise lassen sich Gleichungen für die Korrekturen der Zellseitengeschwindigkeiten herleiten. Z.B. ist für die Seite  $e$

$$v'_{ie} = - \lambda (p'_E - p'_P) A_i^{(1)} \left\{ \frac{1}{\hat{a}_M} \right\}_e \quad (50)$$

$$- \{p'_n - p'_s\}_e A_i^{(2)} \left\{ \frac{1}{\hat{a}_M} \right\}_e - \{p'_t - p'_b\}_e A_i^{(3)} \left\{ \frac{1}{\hat{a}_M} \right\}_e \quad .$$

Die geschweiften Klammern bezeichnen weiterhin eine lineare Interpolation der betreffenden Ausdrücke zwischen den Werten in  $M = P$  und  $M = E$ . Der Ausdruck für die Korrektur des Massenflusses durch Seite  $e$  ist dann

$$Fluss'_e = - \lambda (p'_E - p'_P) \rho A_i^{(1)} A_i^{(1)} \left\{ \frac{1}{\hat{a}_M} \right\}_e \quad (51)$$

$$- \{p'_n - p'_s\}_e \rho A_i^{(1)} A_i^{(2)} \left\{ \frac{1}{\hat{a}_M} \right\}_e - \{p'_t - p'_b\}_e \rho A_i^{(1)} A_i^{(3)} \left\{ \frac{1}{\hat{a}_M} \right\}_e \quad .$$

Die zwei letzten Terme auf der rechten Seite in (51) verschwinden für orthogonale Gitter ( $A_i^{(j)} A_i^{(k)} = 0$  für  $j \neq k$ ). Auf leicht nichtorthogonalen Gittern können diese sogenannten Quergradiententerme vernachlässigt werden, wenn die Zellseitenverhältnisse nicht allzu groß sind, ohne die Gesamtkonvergenz des Verfahrens dadurch zu verschlechtern. Auf unseren (lokal) stark nichtorthogonalen Gittern (z.B.  $90 \pm 60^\circ$ ) mit extrem langgestreckten Zellen (z.B. Zellseitenverhältnis 1000/1) sind sie aber von Bedeutung und werden weiter berücksichtigt. Die Quergradiententerme beteiligen allerdings Druckkorrekturen in den weiter entfernten Zellmittelpunkten  $NE$ ,  $SE$ ,  $TE$  und  $BE$ , außer in  $E$  und  $P$  selbst, und führen (mit den entsprechenden Termen der anderen Zellseiten) zu einem schlecht konditionierten Druckkorrekturgleichungssystem. Daher werden sie üblicherweise entweder explizit oder wie hier im Rahmen einer zweiten Druckkorrektur behandelt. Letztere Möglichkeit erscheint günstiger [42], weil die Druckkorrekturgleichungen aus Stabilitätsgründen in jedem äußeren Iterationsschritt relativ genau gelöst werden müssen und dies ohnehin einen großen Teil des gesamten Rechenaufwandes bedeutet. Eine Aktualisierung der explizit behandelten Terme in jedem (inneren) Iterationsschritt bei der Lösung des Druckkorrekturgleichungssystems wäre extrem rechenaufwendig.

Die Massenflußkorrektur für die Seite  $e$  wird geschrieben

$$Fluss'_e = -\alpha_E (p'_E - p'_P) - Q^e , \quad (52)$$

$$\alpha_E = \lambda \rho A_i^{(1)} A_i^{(1)} \left\{ \frac{1}{\hat{a}_M} \right\}_e , \quad Q^e = \text{Rest} .$$

In  $Q^e$  sind die o.g. Quergradiententerme unter 'Rest' zusammengefaßt worden. Der Koeffizient  $\alpha_E$  ist positiv. Für die anderen Zellseiten erhält man analoge Ausdrücke. Die Massenflußkorrekturen  $Fluss'_w$ ,  $Fluss'_s$  und  $Fluss'_b$  der Zelle  $P$  sind gleich und haben umgekehrte Vorzeichen wie die Korrekturen  $Fluss'_e$ ,  $Fluss'_n$  bzw.  $Fluss'_t$  der westlichen, südlichen bzw. unteren Nachbarzelle.

Die korrigierten Flüsse (37) müssen die Massenerhaltung in der Zelle erfüllen. Daraus folgt mit (47)

$$\sum_{nb} Fluss'_{nb} = -Q , \quad nb = e, w, n, s, t, b . \quad (53)$$

Einsetzen der Ausdrücke der Flußkorrekturen aller Zellseiten in (53) ergibt die Druckkorrekturgleichung für die betrachtete Zelle  $P$

$$\alpha_P p'_P - \sum_{NB} \alpha_{NB} p'_{NB} = -Q + Q^{(2)} , \quad NB = E, W, N, S, T, B \quad (54)$$

$$\alpha_P = \sum_{NB} \alpha_{NB} , \quad Q^{(2)} = \sum_{nb} Q^{nb} , \quad nb = e, w, n, s, t, b .$$

Gleichung (54) ist linear. Die Koeffizienten und der Quellterm  $Q$  (Defekt der Massenerhaltung in der Zelle  $P$ ) sind an dieser Stelle bekannt. Der Koeffizient  $\alpha_P$  ist die Summe der Koeffizienten der Unbekannten in den Nachbarzellmittelpunkten.

Bei Aufstellung der Druckkorrekturgleichung in jeder Zelle des Gitters entsteht ein lineares algebraisches Gleichungssystem in den Druckkorrekturen  $p'$  aller Zellen, das ebenfalls mit einem Linienrelaxationsverfahren gelöst wird (2. innere Iteration). Die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems hat die gleichen Eigenschaften wie im Falle der (linearisierten) Impulsgleichungen. Im Gegensatz zu den Impulsgleichungen erfordert die Stabilität des Verfahrens eine relativ genaue Lösung dieses Gleichungssystems. Es werden so viele innere Iterationsschritte durchgeführt, bis das größte Residuum aller Gleichungen z.B. um eine Größenordnung reduziert worden ist.

Die Druckkorrekturgleichungen in Zellen mit Zellseiten auf Rändern des Rechengebiets beteiligen Werte der Druckkorrekturen auf diesen Rändern. Somit sind auch zur Lösung dieses Gleichungssystems 'Randbedingungen' nötig (keine physikalischen RB). Wenn auf einem Rand der Druck bekannt ist, kann man einfach die entsprechende Druckkorrektur zu Null setzen. Bei der Berechnung von Schiffsumströmungen ist aber üblicherweise der Druck auf keinem Rand des Rechengebiets gegeben (s.6.1). Vielmehr sind auf allen Rändern bis auf den Ausströmrand die Massenflüsse bekannt (gegeben auf dem Einströmrand und Null auf den Seitenrändern), so daß die Massenflußkorrekturen aller Zellseiten auf diesen Rändern per Definition Null sind. Aus der globalen Massenerhaltung folgt, daß der gesamte Massenfluß durch den Ausströmrand gleich groß sein muß wie der durch den Einströmrand, so daß auch dieser Massenfluß als bekannt angesehen werden kann. Wir betrachten vorübergehend auch die einzelnen Massenflüsse durch die Zellseiten auf dem Ausströmrand als bekannt und setzen auch auf diesem Rand die Flußkorrekturen zu Null. Die Gleichheit der Gesamtflüsse durch den Ein- und Ausströmrand  $Fluss^{ein} = Fluss^{aus}$  muß dann allerdings vor Lösung des Druckkorrekturgleichungssystems gewährleistet sein, da sonst keine Lösung existiert. Dies kann man durch Addition aller Gleichungen (53) erkennen. Durch die konservative Eigenschaft heben sich dabei alle Flußkorrekturen durch Zellseiten, die nicht auf Rändern liegen, paarweise auf. Da die Flußkorrekturen auf den Rändern auch Null sind, muß die Summe der Quellterme  $Q$  aller Zellen Null sein. Diese Bedingung reduziert sich schließlich (wieder aufgrund der konservativen Eigenschaft) auf die o.g. Forderung, die durch Multiplikation der Massenflüsse durch die Zellseiten auf dem Ausströmrand mit  $Fluss^{ein}/Fluss^{aus}$  erzwungen wird. Die einheitliche Randbedingung einer verschwindenden Flußkorrektur an allen Rändern wird verwirklicht, indem der Koeffizient und der Quellterm im Ausdruck (52) der betreffenden Zellseite zu Null gesetzt werden.

Die Linearität des Gleichungssystems bestehend aus den Druckkorrekturgleichungen (54) und der Ausdrücke für die Geschwindigkeits- (49) und Massenflußkorrekturen (51) ermöglicht die Druckkorrektur in zwei (oder mehr) Schritten durchzuführen. Zunächst werden alle Quergradiententerme  $Q^{nb}$  und somit der Quellterm  $Q^{(2)}$  in den Gleichungen aller Zellen zu Null gesetzt. Als Startwerte für die iterative Lösung der sich ergebenden 1. *Druckkorrekturgleichungen* werden die Druckkorrekturen überall zu Null gesetzt. Nach Ermittlung der Druckkorrekturen  $p'$  werden die Drücke korrigiert. Die Vereinfachungen

bei der Herleitung der Druckkorrekturgleichungen, insbesondere die Vernachlässigung der Geschwindigkeitskorrekturen auf den rechten Seiten in (49) und (50), machen eine (starke) Unterrelaxation des Druckfeldes nötig. Anstatt von (37) setzt man

$$p^{**} = p^* + \alpha_p p' \quad . \quad (55)$$

Typische Werte für den Unterrelaxationsfaktor  $\alpha_p$  variieren zwischen 0,2 und 0,6. Als Anhaltspunkt für die Wahl von  $\alpha_p$  kann die Beziehung  $\alpha_p = 1 - \alpha_v$  herangezogen werden, wobei  $\alpha_v$  der Unterrelaxationsfaktor der Geschwindigkeiten ist (39).  $\alpha_p$  hat keinen so großen Einfluß auf das Konvergenzverhalten des Verfahrens wie  $\alpha_v$ . Die korrigierten Drücke werden auf die Ränder des Rechengebiets linear extrapoliert und die dortigen 'tatsächlichen' Druckkorrekturen ermittelt. (Letztere werden bei der Korrektur der Geschwindigkeiten benötigt.) Dies scheint zunächst inkonsistent mit der 'Randbedingung' ( $Fluss' = 0$ ) der Druckkorrekturgleichung zu sein, die z.B. auf einem orthogonalen Gitter einer Nullgradientenbedingung in Wandnormalenrichtung für die Druckkorrektur entspricht, wie man aus Gleichung (51) erkennen kann. Man muß aber beachten, daß diese 'Randbedingung' (wie die Druckkorrekturen selbst) nur ein Hilfsmittel ist, um die diskretisierten Erhaltungsgleichungen zu lösen. Die Einhaltung dieser Bedingung bei der Bestimmung der Randdrücke würde zu einer physikalisch nicht vorhandenen Randbedingung für den Druck führen.

Anschließend werden die Geschwindigkeiten in den Zellmittelpunkten und die Massenflüsse mit (37), (49) und (52) korrigiert. Die Geschwindigkeiten und Massenflüsse werden an dieser Stelle auf keinen Fall unterrelaxiert, da nur die vollen Korrekturen die Einhaltung der Massenerhaltung in jeder Zelle sicherstellen.

In einem (optionalen) zweiten Schritt werden die Quergradiententerme in (51) bzw. (52) berücksichtigt. Sie, und somit der daraus resultierende Quellterm  $Q^{(2)}$  in (54), werden mit den bereits bestimmten Druckkorrekturen ausgewertet. Der Quellterm  $Q$  wird in den Gleichungen (54) aller Zellen zu Null gesetzt. Vor Lösung der sich ergebenden 2. *Druckkorrekturgleichungen* werden alle Druckkorrekturen wieder auf Null gesetzt. Der weitere Ablauf dieses zweiten Schrittes ist gleich wie bei der ersten Druckkorrektur. Die Einführung der zweiten Druckkorrektur hat sich bei den durchgeführten Rechnungen von Schiffsumströmungen bewährt. Obwohl der Rechenaufwand für jeden äußeren Iterationsschritt dadurch erheblich erhöht wird, ermöglicht die Berücksichtigung der Quergradiententerme größere Unterrelaxationsfaktoren der Geschwindigkeit ( $\alpha_v$ ), wodurch die Anzahl der nötigen äußeren Iterationsschritte verringert wird und die gesamte Rechenzeit bis um 40 Prozent reduziert werden kann. Vor allem wird das Verfahren dadurch etwas robuster, indem der Bereich von Relaxationsfaktoren, die zu Konvergenz führen, vergrößert wird.

## 5.2 Iteratives Lösungsverfahren

Nach Durchführung der Druckkorrektur(en) liegen neue Geschwindigkeiten nur in den Zellmittelpunkten vor. In Rändern (z.B. Symmetrie-Ebenen), wo die Geschwindigkeiten nicht oder nur teilweise gegeben sind, müssen sie aktualisiert werden. Die neuen Werte

im Feld werden auf solche Ränder unter (teilweiser) Berücksichtigung der dortigen RB extrapoliert. Abschließend wird das neue Geschwindigkeitsfeld an die Turbulenz-Routine ist ein äußerer Iterationsschritt abgeschlossen. Um eine konvergierte Lösung zu erreichen, die sowohl die diskretisierten Impulsgleichungen als auch die diskretisierte Kontinuitätsgleichung in allen Zellen des Gitters mit einer vorgegebenen Genauigkeit erfüllt, sind zahlreiche (z.B. 500) äußere Iterationsschritte erforderlich.

Abb.3 faßt den Gesamtablauf des Verfahrens als vereinfachtes Flußdiagramm zusammen. Die Startwerte für die Geschwindigkeiten im Feld werden durch Interpolation von gegebenen und geschätzten Werten auf den Rändern ermittelt. Die Drücke und die turbulenten Zähigkeiten werden mit Null initialisiert. Die Bestimmung der Koeffizienten und Quellterme der Impulsgleichungen erfolgt mit (18), (27) und (28). Die 'Lösung der Impulsgleichungen' beschränkt sich auf nur eine Relaxation. Die Bestimmung der Massenflüsse sowie der Koeffizienten und Quellterme der Druckkorrekturgleichungen erfolgt mit (45), (46), (52) und (54). Die Druckkorrekturgleichungen müssen relativ genau gelöst werden. Es hat sich bewährt, das größte Residuum aller Gleichungen im Laufe der inneren Iteration auf ein Zehntel des Anfangswertes zu reduzieren. Zur Korrektur der Drücke, der Geschwindigkeiten in den Zellmittelpunkten und der Massenflüsse werden die Gleichungen (55), (37), (49) und (52) benutzt. Wie bereits erwähnt, werden die Geschwindigkeiten an manchen Rändern aus den Werten im Inneren extrapoliert. Mit vorliegenden neuen Geschwindigkeiten und Drücken liefert das Turbulenzmodell neue Werte für die turbulente Zähigkeit in allen Zellen des Gitters.

Konvergenz wird angenommen, wenn die  $L_1$ -Norm (Summe der Beträge aller Residuen) der diskretisierten Kontinuitätsgleichungen aller Zellen *und* die jeweiligen  $L_1$ -Normen der diskretisierten Impulsgleichungen in den drei kartesischen Richtungen im Laufe der (äußeren) Iteration um 5 Größenordnungen reduziert wurden. Außerdem wird geprüft, ob sich die Ergebnisse an relevanten Stellen des Rechengebiets bei weiterer Reduktion der Residuen nicht mehr signifikant ändern.

Der Verzicht auf Wandfunktionen erfordert eine sehr feine Auflösung des Raumes in Wandnähe. Dies beeinträchtigt die Konvergenz des Verfahrens stark. Die Dicke der ersten Zellschicht am Schiffsrumpf wird so gewählt, daß sich der erste Zellmittelpunkt voraussichtlich innerhalb der laminaren Unterschicht befindet. Im Falle einer turbulenten Plattengrenzschicht wird in der Literatur, z.B. [17], dieser Bereich mit  $0 < y^+ < 5$  bis 8 angegeben, wobei  $y^+$  der dimensionslose Wandabstand ist. Nach Durchführung einer Rechnung wird geprüft, ob dies eingehalten wurde. In der Regel sind nur örtlich leichte Verletzungen dieser Bedingung festzustellen. Diese Bedingung führt zu extrem kleinen Maschenweiten in Wandnormalenrichtung (z.B.  $5 \cdot 10^{-5} \cdot$  Modelllänge), wodurch sehr langgestreckte Zellen in Hauptstromrichtung entstehen. Das benutzte strukturierte Gitter verstärkt dieses Problem, da diese feine Auflösung hinter dem Schiff beibehalten wird, obwohl die dort relativ glatte Strömung dies nicht erfordert. Die resultierenden Zellseitenverhältnisse führen zu einer 'steifen' Koeffizientenmatrix des diskretisierten Gleichungssystems. Die Koeffizienten der Unbekannten in den Nachbarmittelpunkten einer betrachteten Zelle, die in Hauptstromrichtung liegen, werden in manchen Bereichen

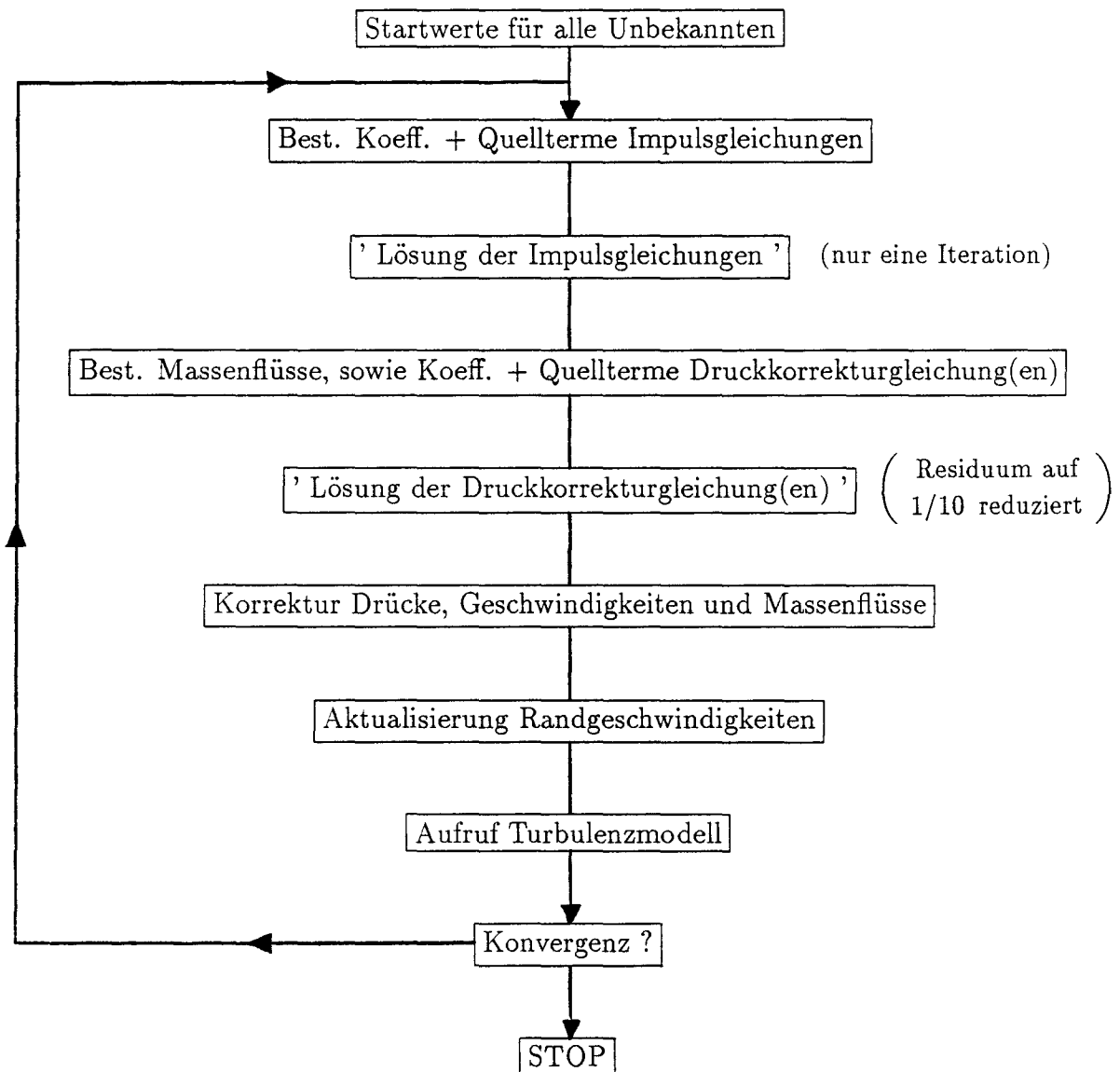


Abbildung 3: Ablauf des iterativen Lösungsverfahrens im Programm NEPTUN zur Berechnung turbulenter Schiffsumströmungen

(z.B. im Nachlauf des Schiffes) viel kleiner als die Koeffizienten in den anderen Nachbarmittelpunkten, obwohl erstere für die Lösung des Gleichungssystems (und physikalisch) maßgebend sind. Vermutlich könnte eine geeignete Skalierung der Koeffizientenmatrix dieses Problem lösen. Dies wurde allerdings noch nicht untersucht. Ferner würde eine Blockstrukturierung dazu beitragen das Problem, zu entschärfen. Bei Benutzung von Wandfunktionen ist die Dicke der ersten Zellschicht an der Wand typischerweise um einen Faktor 20 bis 30 größer, wodurch das Konvergenzverhalten des Verfahrens besser wird und deutlich weniger äußere Iterationsschritte erforderlich sind.

Der Speicherplatzbedarf wurde (auf Kosten der Rechenzeit) beschränkt, um das Programm auch auf gängigen mittelgroßen Arbeitsplatzrechnern (Workstations) anwenden zu können. Es wird keine metrische Information mit Ausnahme der Zelleckpunktkoordinaten gespeichert. Für die Berechnung einer stationären Strömung sind mit dem benutzten algebraischen Turbulenzmodell 23 Feldelemente pro Zelle zu speichern. Dies führt bei doppelter Genauigkeit auf den größten verwendeten Gittern (etwa 120000 Zellen) zu einem erforderlichen Speicherplatz von ca. 25 MB. Der Rechenaufwand einer solchen Rechnung beträgt z.B. 7 Stunden auf dem Rechner Siemens/Fujitsu S100 des Regionalen Rechenzentrums der Universität Hamburg (allerdings mit einem sehr niedrigen Vektorisierungsgrad) und etwa 10 Stunden auf einer Workstation IBM RS6000/360. Die Berechnung derselben Strömung auf einem größeren Gitter mit einem Achtel an Zellen (z.B. 15000 statt 120000), welches durch Halbierung der Zellanzahl in allen drei Richtungen gewonnen wird (Standard-Gittervergrößerungstechnik), erfordert etwa 15 Minuten auf dem Rechner S100. Die Rechenzeit steigt also überproportional mit der Zellanzahl an, wie es bei Eingitter-Iterationsverfahren üblich ist. Wenn ein Potenzansatz für die Abhängigkeit der Rechenzeit von der Zellanzahl gemacht wird, beträgt der Exponent etwa 1,5 bis 1,7. Daher ist eine weitere Gitterverfeinerung durch Verdopplung der Zellanzahl in allen drei Richtungen derzeit nicht praktikabel.

Die bei der Netzerzeugung bereits implementierte Mehrgittertechnik wurde im Navier-Stokes-Löser noch nicht verwendet. Bei der Mehrgittermethode besteht eine nahezu lineare Abhängigkeit zwischen der Rechenzeit und der Gesamtzahl der Zellen, wodurch die Überlegenheit dieser Methode gegenüber herkömmlichen Eingitterverfahren bei feiner werdendem Gitter größer wird. Dies kann aber nur dann verwirklicht werden, wenn alle Bestandteile der Mehrgittermethode gut auf die betreffende Anwendung abgestimmt sind [13]. Insbesondere muß auch der sogenannte Glätter (Relaxationsverfahren zur Reduktion der räumlich hochfrequenten Residuen-Anteile) dafür geeignet sein. In unserem Fall wäre der Glätter die beschriebene SIMPLE-Methode. Diese Methode hat in Verbindung mit der üblichen Standard-Gittervergrößerungstechnik bei großen Reynoldszahlen [49] und stark voneinander verschiedenen Zellseitenverhältnissen schlechte Glättungseigenschaften. Um ein wirklich effizientes Mehrgitterverfahren zu erhalten, das auf üblichen Gittern wesentlich schneller als Eingitterverfahren rechnet, muß nach meiner Auffassung ein anderer Glätter als die SIMPLE-Methode eingesetzt werden. Ein solcher Glätter muß stark gekoppelte Variablen (Drücke und Geschwindigkeiten) 'impliziter' behandeln als das SIMPLE-Verfahren. Dies erfordert aber weitere Untersuchungen.

## 6 Anwendung auf Schiffsumströmungen

### 6.1 Allgemeines

Nach dem beschriebenen Verfahren wurde das FORTRAN-Programm NEPTUN zur Berechnung turbulenter Schiffsumströmungen geschrieben. Das Programm wurde zunächst an einfachen 2D-Strömungen erfolgreich getestet. Beispielsweise zeigten die Ergebnisse für die laminare Plattengrenzschicht und die laminare Strömung zwischen zwei parallelen Platten sehr gute Übereinstimmung mit bekannten analytischen Lösungen. Im Falle einer turbulenten Plattengrenzschicht zeigten die berechneten Geschwindigkeitsprofile eine nahezu völlige Übereinstimmung mit experimentellen Daten [9], nicht zuletzt weil das benutzte algebraische Turbulenzmodell anhand solcher Strömungen 'geeicht' worden ist. Auch die Ergebnisse für die laminare und die turbulente Parallelanströmung einer Platte mit Nachlauf waren im Einklang mit Messungen von Chen [7] und Patel [37].

Die Anwendung des Programms auf Schiffsumströmungen ist ohne einschränkende Maßnahmen nicht möglich bzw. nicht praktikabel. Es wird die Strömung um ein mit konstanter Geschwindigkeit geradeaus fahrendes Schiff ohne Anhänge berechnet, ohne die freie Wasseroberfläche zu berücksichtigen. Diese wird durch eine Symmetrie-Ebene ersetzt; die Schwerkraft wird vernachlässigt. Dies entspricht der stationären Strömung um das an der Wasserlinienebene gespiegelte, tiefgetauchte Schiff. Die Ermittlung der Verformung der freien Oberfläche als Bestandteil der viskosen Rechnung ist prinzipiell möglich, z.B. Farmer et al. [41], erhöht aber den Aufwand und die Schwierigkeiten des Problems erheblich. Es wird die Strömung um das Schiffmodell (Doppelmodell) statt um die Großausführung berechnet. Die Berechnung turbulenter Schiffsumströmungen wird mit zunehmender Reynoldszahl komplizierter: Je größer die Reynoldszahl, desto feiner muß der wandnahe Bereich aufgelöst werden, was die erforderliche Zellanzahl und die Konvergenzschwierigkeiten erhöht. Bei Verzicht auf Wandfunktionen führt die Bedingung, daß der wandnächste Zellmittelpunkt sich noch innerhalb der laminaren Unterschicht befinden soll, im Falle der Großausführung zu (relativ zur Schiffslänge) viel kleineren Maschenweiten in Wandnormalenrichtung als beim Modell, da die Reynoldszahl der Großausführung um zwei bis drei Größenordnungen höher liegt.

Ferner wird aufgrund des großen Rechenaufwandes und insbesondere des Speicherplatzbedarfs die Rechnung auf das Hinterschiff beschränkt. Obwohl mit dem geschriebenen Programm auch Ganzschiffsrechnungen durchgeführt werden können, liegt der Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit in der Untersuchung von Hinterschiffsumströmungen. Für die Ermittlung von Geschwindigkeitswerten auf dem Einströmrand und als Test werden aber bereits Ganzschiffsrechnungen (meist auf groben Gittern) durchgeführt. Die vertikale Ebene durch die Mittellängslinie des Schiffes stellt eine zweite Symmetrie-Ebene dar. Zur weiteren Abgrenzung des Rechengebiets dienen ein weit hinter dem Schiff gelegener Ausströmrand und ein in Radialrichtung weit gelegener Außenrand in Form einer kreiszylindrischen Lateralfäche. Die Berechnung wird in einem schiffsfesten Koordinatensystem durchgeführt, Abb.1 (oben). Das Schiff wird mit gegebener Geschwindigkeit  $U_0$  parallel angeströmt.

An allen Rändern des Rechengebiets müssen Randbedingungen (RB) angesetzt werden. Auf dem Rumpf des Schiffes gilt die Haftbedingung. Auf den Symmetrie-Ebenen (Wasserlinienebene, Mittellängsebene) werden die Normalkomponente der Geschwindigkeit und die Schubspannungen zu Null gesetzt. Am Einströmrand, etwa mittschiffs, werden alle Geschwindigkeitskomponenten gegeben. Sie werden aus Messungen und halbempirischen Formeln für turbulente Plattengrenzschichten und aus einer vorweg durchgeführten reibungslosen Ganzschiffsrechnung gewonnen. Dies stellt den Schwachpunkt der Beschränkung der Rechnung auf das Hinterschiff dar, da der Einfluß der Einströmwerte auf die Ergebnisse nicht vernachlässigbar ist. Am Ausströmrand, etwa eine Schiffslänge hinter dem Heck, werden die Geschwindigkeitsableitungen in x-Richtung zu Null gesetzt. Diese RB hat keine physikalische Rechtfertigung und sorgt nur dafür, daß keine vom numerischen Verfahren eventuell erzeugten Störungen am hinteren Rand des Rechengebiets stromaufwärts reflektiert werden. Testrechnungen zeigen, daß diese RB keinen wesentlichen Einfluß auf die Ergebnisse im interessierenden Bereich der Strömung (am Schiffsrumpf und im nahen Nachlauf) ausübt, wenn der Ausströmrand weit genug angesetzt wird. Auf dem Außenrand wird entweder eine ungestörte Strömung oder eine undurchlässige Wand ohne Schubspannungen (free slip wall) angenommen. Beides ist physikalisch nicht korrekt. Deswegen muß auch dieser Rand weit genug vom Schiff entfernt sein, z.B. eine Modelllänge  $L$  von der Mittellängslinie (s.6.3).

Das benutzte Turbulenzmodell berücksichtigt nicht den Transport von Turbulenz; es setzt ein Gleichgewicht zwischen Produktion und Dissipation von Turbulenzenergie voraus. Im Nachlauf des Schiffes ist dieser Ansatz besonders unrealistisch, weil dort der Transport von Turbulenz durch die Hauptströmung (Konvektion) ausschlaggebend ist. Deshalb werden die vom Turbulenzmodell am Rumpf und seitlich davon zuletzt ermittelten Werte der turbulenten Zähigkeit  $\nu_t$  nach hinten hin (entlang der Gitterlinien) beibehalten.

Im Folgenden werden einige Ergebnisse der Hinterschiffsumströmung zweier Schiffsrumpfformen vorgestellt. Die benutzten Gitter sind örtlich stark nichtorthogonal (z.B.  $90 \pm 60^\circ$ ) und haben sehr große Zellseitenverhältnisse (z.B. 1000/1). Die kleinste Zelldicke am Rumpf beträgt etwa  $5 \cdot 10^{-5} \cdot$  Modelllänge. Die maximalen Expansionsraten der Maschenweiten in den verschiedenen krummlinigen Richtungen sind  $< 1.5$ . Die Zellanzahl variiert zwischen etwa 80000 und 120000. Die Rechenzeit pro Iterationsschritt und Zelle beträgt (mit 2. Druckkorrektur) z.B.  $4 \cdot 10^{-4}$  Sekunden auf dem Rechner Siemens/Fujitsu S100. Dies führt zu CPU-Zeiten zwischen 4 und 8 Stunden, je nach Gittergröße und Konvergenzanforderungen. Der nötige Arbeits-Speicherplatz liegt zwischen 18 und 25 MB.

## 6.2 Ergebnisse für das Wigley-Schiff

Als erste schiffbauliche Anwendung des Programms wurde die Strömung um das Hinterschiff des Doppelmodells des sogenannten Wigley-Schiffes bei einer Reynoldszahl von  $4.5 \cdot 10^6$  gewählt. Für diesen Fall sind ausführliche Windkanalmessungen vorhanden [46,38]. Die Oberfläche dieses schlanken, schiffsähnlichen Körpers läßt sich im Koordinatensystem entspr. Abb.1 beschreiben durch

$$\frac{y}{2B} = \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \left[1 - \left(\frac{z}{T}\right)^2\right] ,$$

$$\frac{L}{B} = 10 , \quad \frac{L}{T} = 16 , \quad C_B = 0.44 .$$

Sowohl die Spanten, Abb.4, als auch die Wasserlinien haben parabolische Form. Das Schiff hat vertikale Steven. Vor- und Hinterschiff sind identisch. Die einfache Geometrie des Wigley-Schiffes erleichtert die Gittererzeugung erheblich.

Das Rechengebiet erstreckt sich in Längsrichtung vom Hauptspant bis zu einer Modelllänge hinter dem Heck ( $0.5 \leq x/L \leq 2$ ) und ebenfalls bis zu einer Modelllänge, gemessen von der Mittellängslinie, in Radialrichtung ( $0 \leq r/L \leq 1$ ,  $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ ). Das Gitter hat  $72 \cdot 32 \cdot 36$  Zellen in Längs-, Spantumfangs- und Radialrichtung. Abb.5 vermittelt einen globalen Eindruck des Gitters. Abb.6 zeigt einen 2D-Ausschnitt am Spant  $x/L = 0.9$ , wobei die sehr feine Auflösung des wandnahen Bereiches zu erkennen ist.

Abb.7 und 9 zeigen berechnete und gemessene Isolinien der Axialgeschwindigkeit an den Spanten  $x/L = 0.90$  und  $1.0$ . Die Übereinstimmung von Rechnung und Experiment ist wenig zufriedenstellend. Abgesehen von der qualitativen Ähnlichkeit der Isotachen erwartete ich bei dieser relativ einfachen Schiffsform eine bessere quantitative Vorhersage der Geschwindigkeitsverteilung im Feld. Der Grund für die schlechte Übereinstimmung ist noch nicht klar. Eine Untersuchung des Einflusses der am Hauptspant gegebenen Einstromwerte auf die Lösung machte eine gewisse Abhängigkeit der Isotachen von der Verteilung der Geschwindigkeit am Einströmrand deutlich, konnte aber die festgestellten Unterschiede nicht erklären.

Abb.8 und 10 zeigen die berechneten und gemessenen Richtungsfelder der Quergeschwindigkeit an den Spanten  $x/L = 0.90$  und  $1.0$ . Auch hier ist die Übereinstimmung wenig zufriedenstellend. Auffallend ist bei den Messungen die sehr schnelle Abnahme der Vertikalkomponente nach außen hin und vor allem die großen Normalkomponenten der Geschwindigkeit an den Symmetrie-Ebenen, die an der Güte der Messung zweifeln lassen.

Abb.11 zeigt die Verläufe des Druckbeiwertes  $C_p = (p - p_0)/(\frac{\rho}{2}U_0^2)$  am Rumpf entlang der Wasserlinie und der Kiellinie, aufgetragen über der dimensionslosen Längskoordinate  $x/L$ .  $p_0$  ist der ungestörte Druck. Die Meßwerte sind mit Symbolen eingetragen. Für die Kiellinie sind keine Meßwerte vorhanden. Der Druckverlauf an der Wasserlinie zeigt eine gute Übereinstimmung mit den Messungen.

Abb.12 zeigt die Verläufe der dimensionslos gemachten Wandschubspannungsgeschwindigkeit  $U_\tau/U_0$  entlang der Wasserlinie und der Kiellinie, aufgetragen über der dimensionslosen Längskoordinate  $x/L$ . Die Übereinstimmung der Lösung mit den Meßdaten (Symbole) ist nicht schlecht; die gerechneten Wandschubspannungen liegen etwas zu hoch. Auch in diesem Fall liegen keine Meßwerte für die Kiellinie vor.

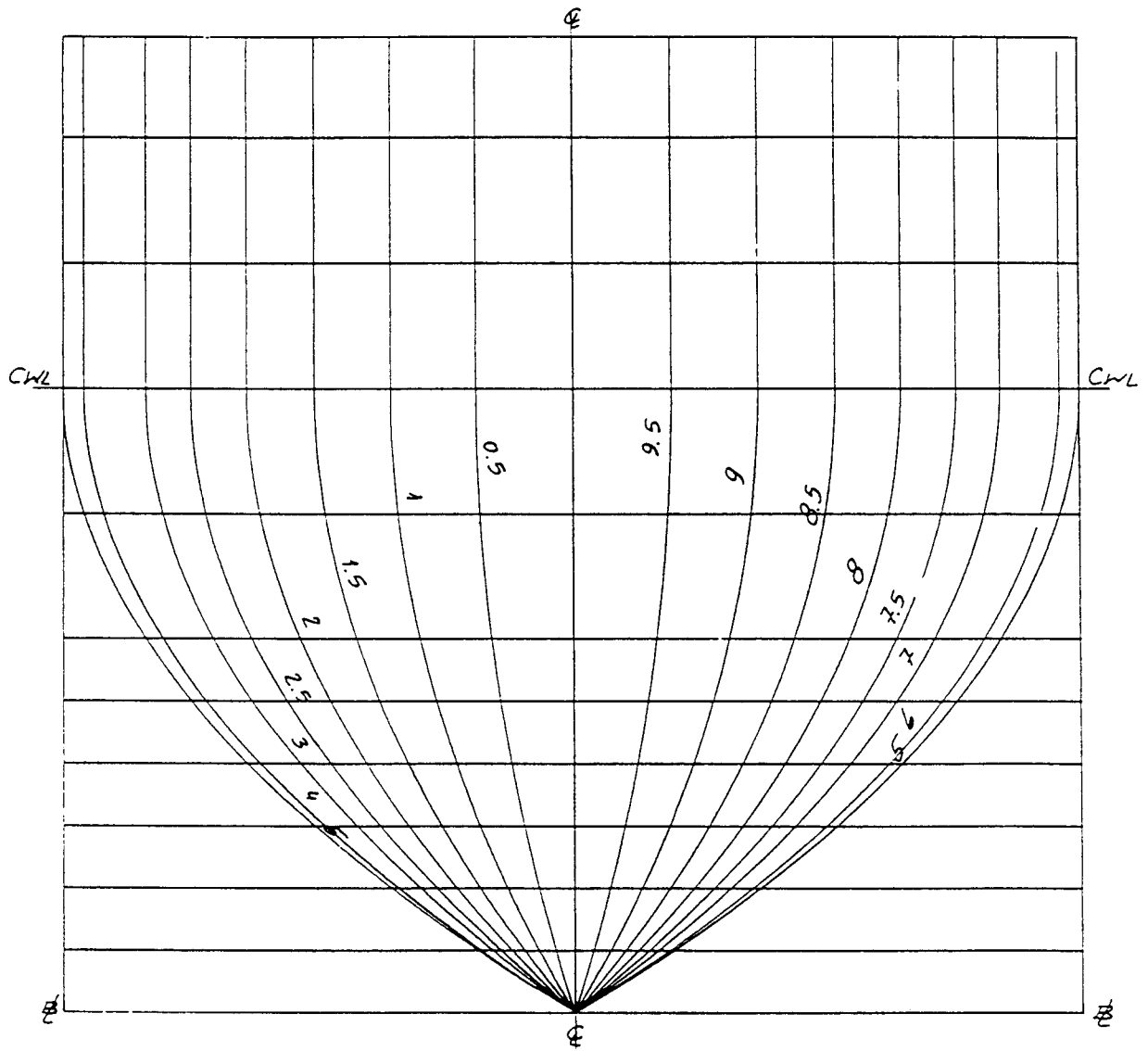


Abbildung 4: Spantenriß des Wigley-Schiffes, Chao et al. (1991).

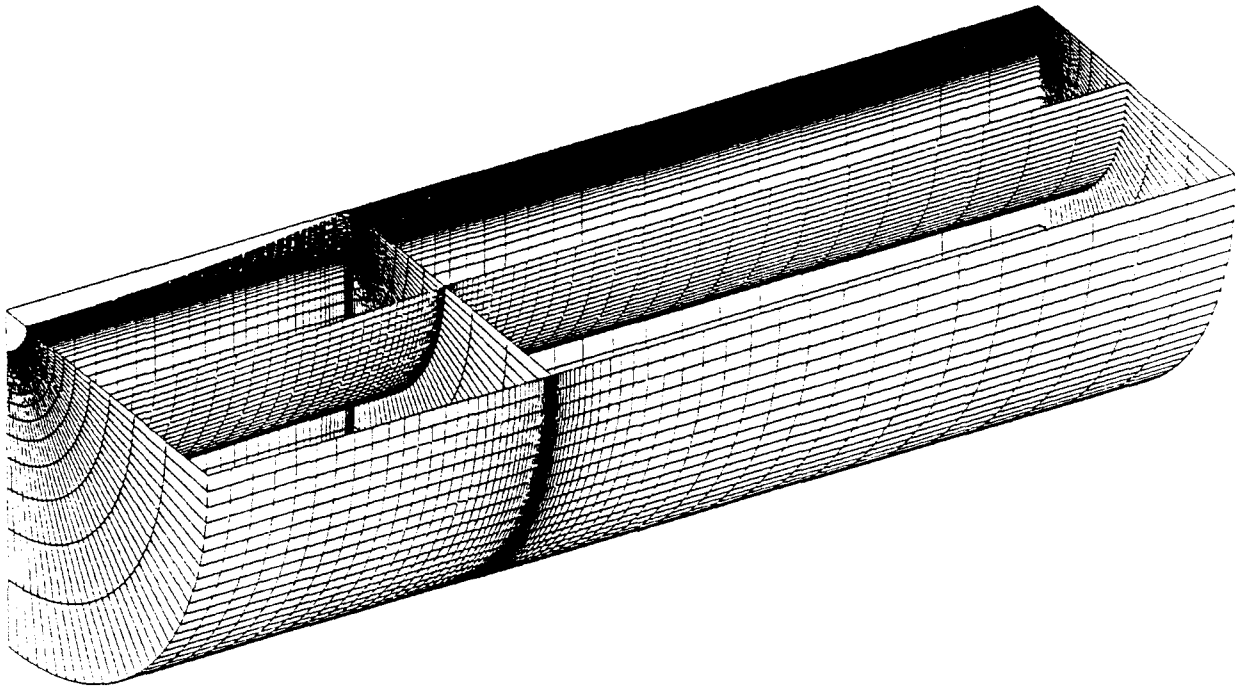


Abbildung 5: Ausschnitt aus dem Gitter um das Wigley-Hinterschiff. Nur ausgewählte Gitterflächen. Zellanzahl in Längs-, Spantumfangs- und Radialrichtung:  $72 \cdot 32 \cdot 36$ .

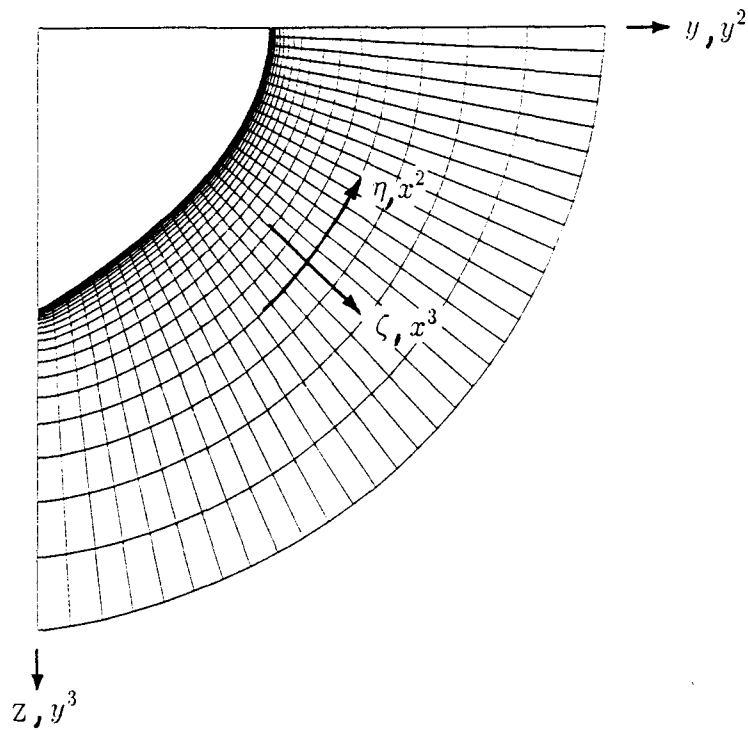


Abbildung 6: Numerisches Gitter am Hauptspant des Wigley-Schiffes. Ausschnitt aus 3D-Gitter. Die Dicke der ersten Zellschicht am Rumpf beträgt ca.  $5 \cdot 10^{-5}$  · Modelllänge.

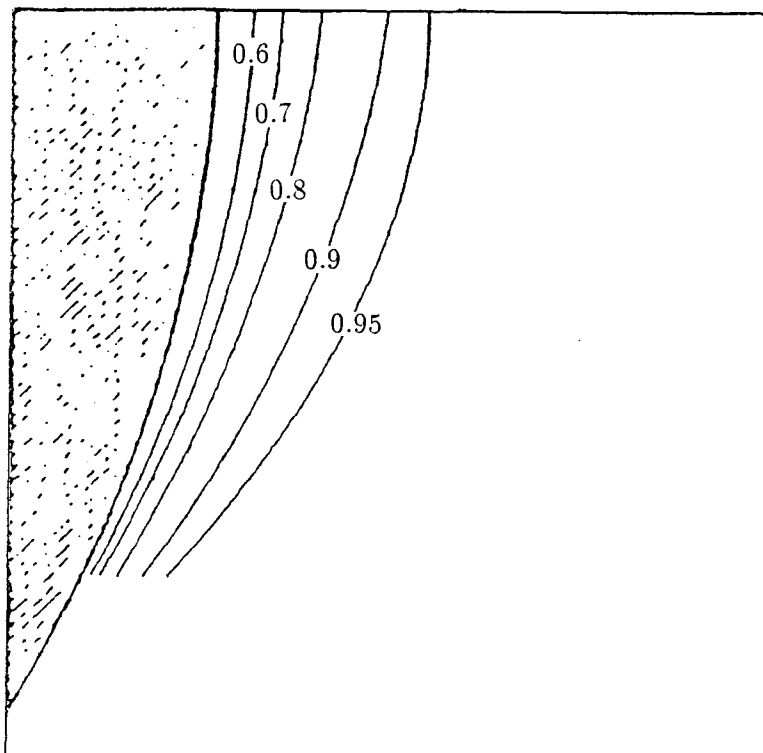
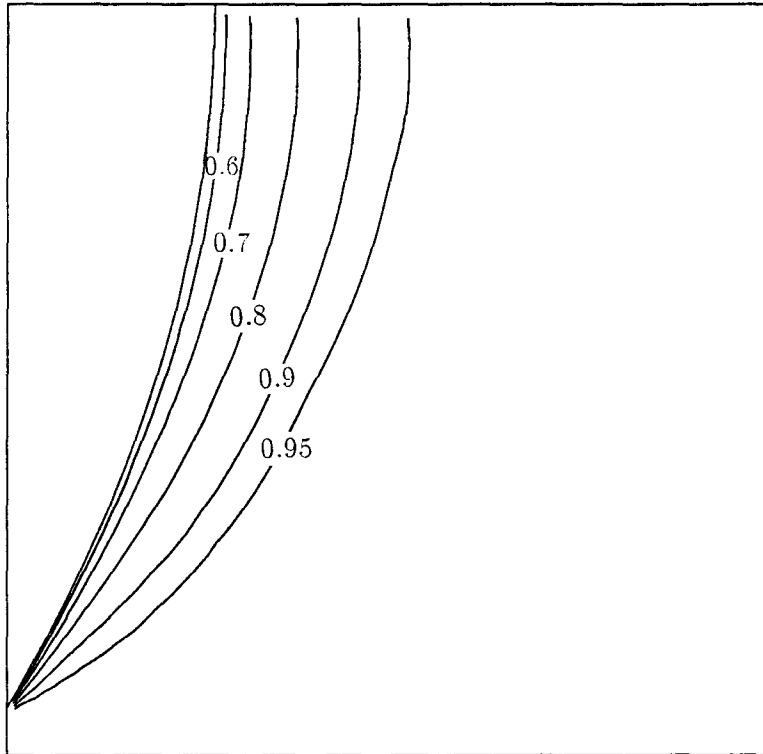


Abbildung 7: Isolinien der Axialgeschwindigkeit  $u/U_0$  für Wigley-Schiff,  $R_n = 4.5 \cdot 10^6$ , Spant  $x/L = 0.9$ . Oben: numerische Lösung. Unten: Messung von Sarda 1986.

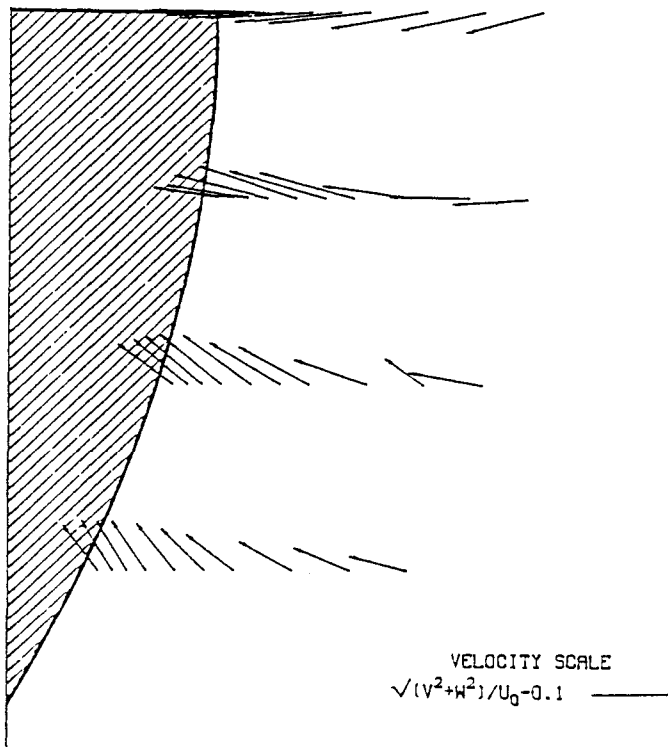
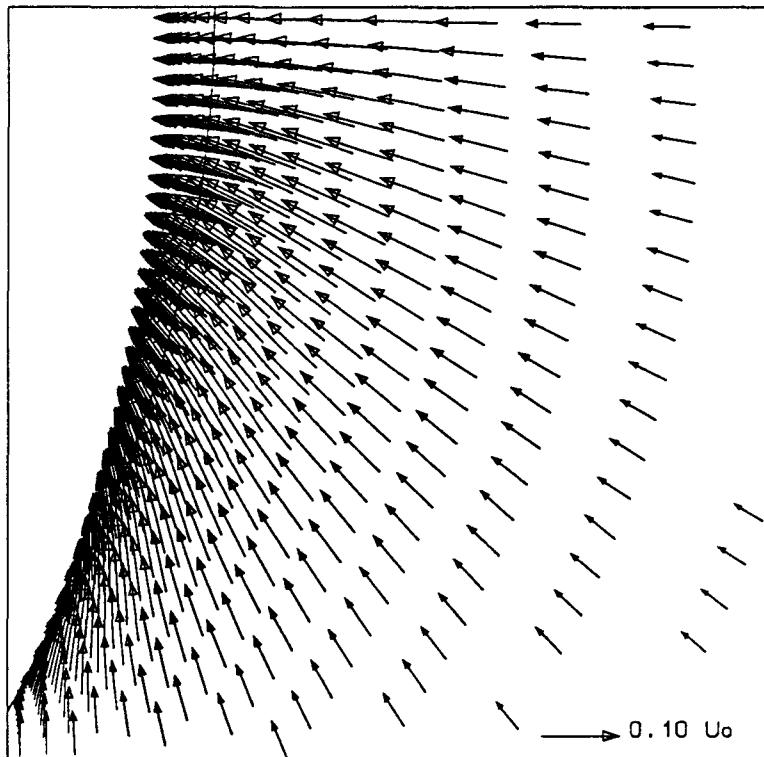


Abbildung 8: Richtungsfeld der Quergeschwindigkeit  $(v, w)$  für Wigley-Schiff,  $R_n = 4.5 \cdot 10^6$ , Spant  $x/L = 0.9$ . Oben: numerische Lösung. Unten: Messung von Sarda 1986.

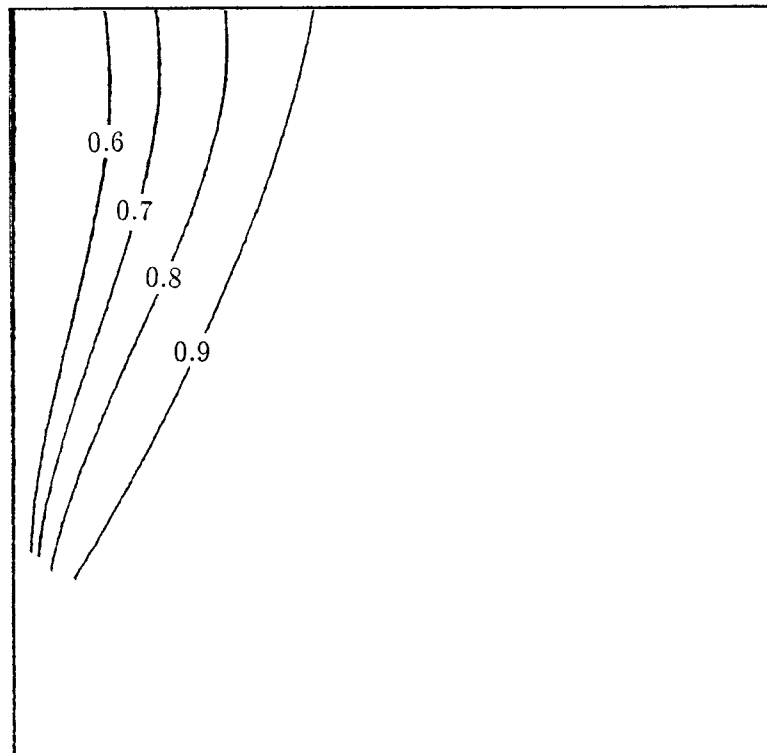
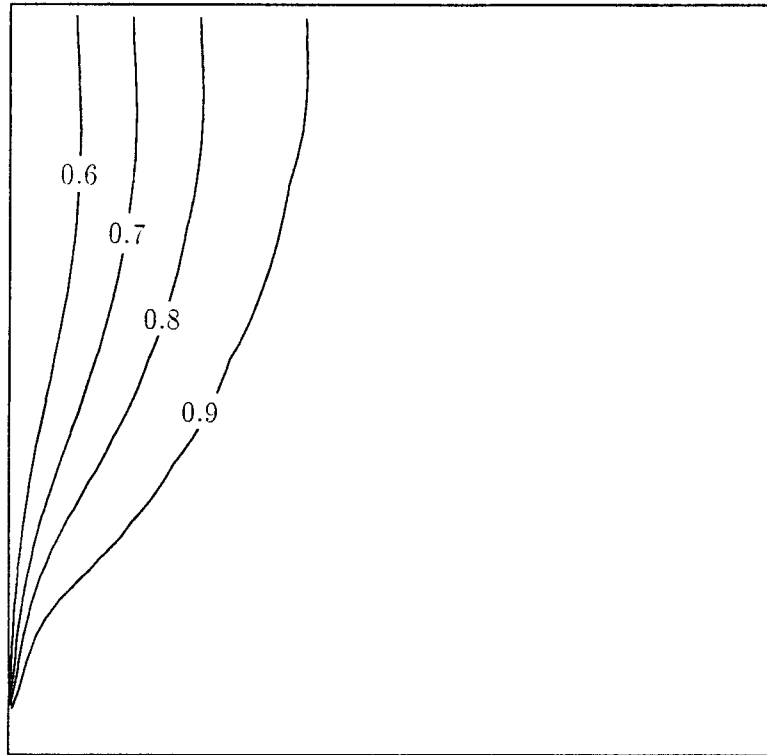


Abbildung 9: Isolinien der Axialgeschwindigkeit  $u/U_0$  für Wigley-Schiff,  $R_n = 4.5 \cdot 10^6$ , Spant  $x/L = 1.0$ . Oben: numerische Lösung. Unten: Messung von Sarda 1986.

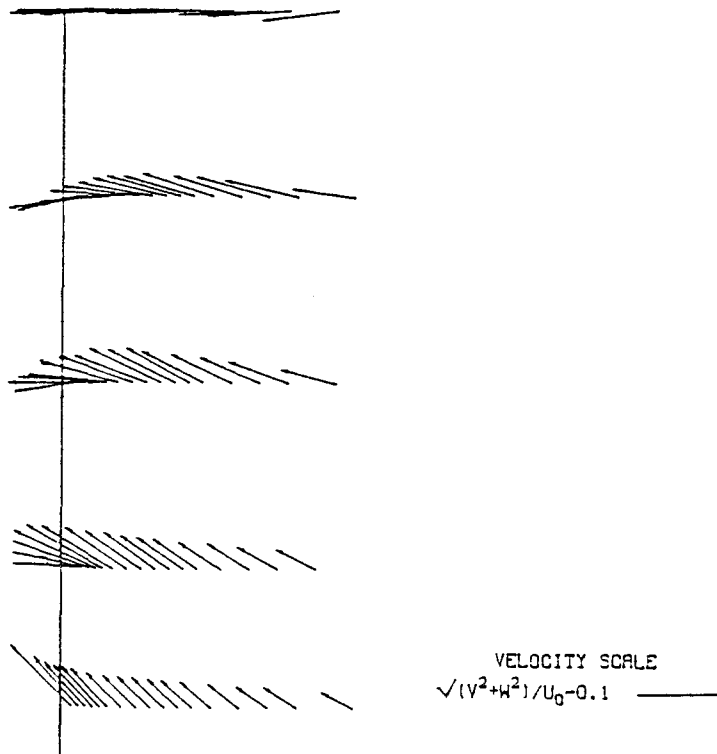
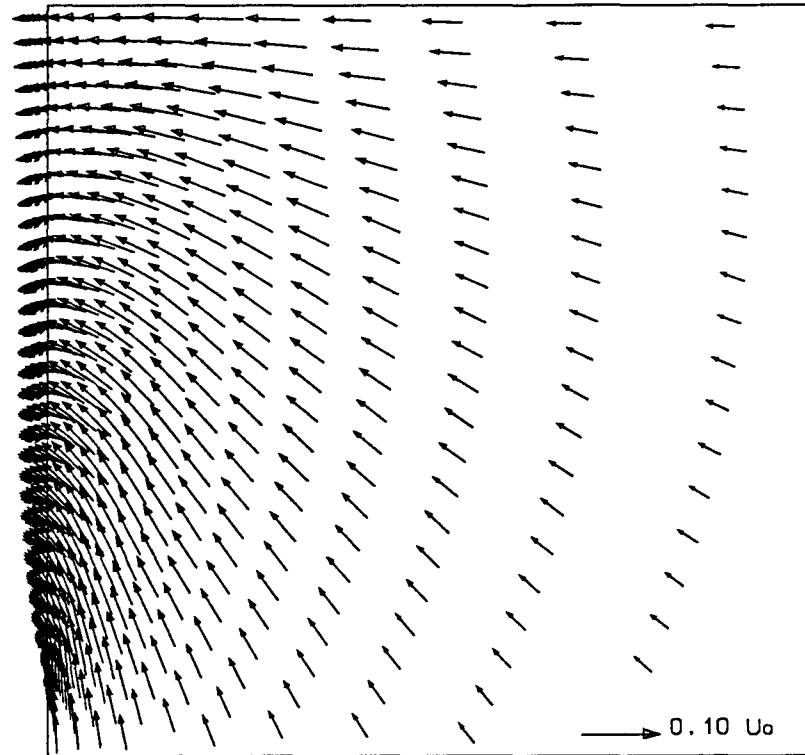


Abbildung 10: Richtungsfeld der Quergeschwindigkeit  $(v, w)$  für Wigley-Schiff,  $R_n = 4.5 \cdot 10^6$ , Spant  $x/L = 1.0$ . Oben: numerische Lösung. Unten: Messung von Sarda 1986.

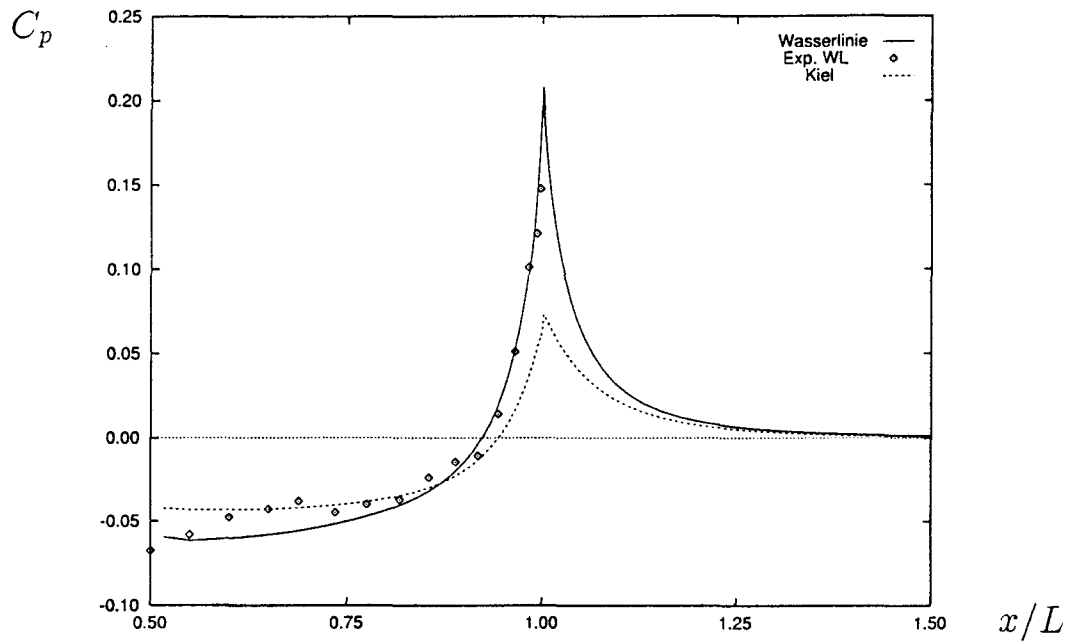


Abbildung 11: Verlauf des Druckbeiwertes  $C_p$  in Längsrichtung entlang der Wasserlinie und des Kiels für Wigley-Schiff,  $R_n = 4.5 \cdot 10^6$ . Kurven: numerische Lösung. Symbole: Messung von Watmuff und Joubert 1985, aus Patel et al. (1988).

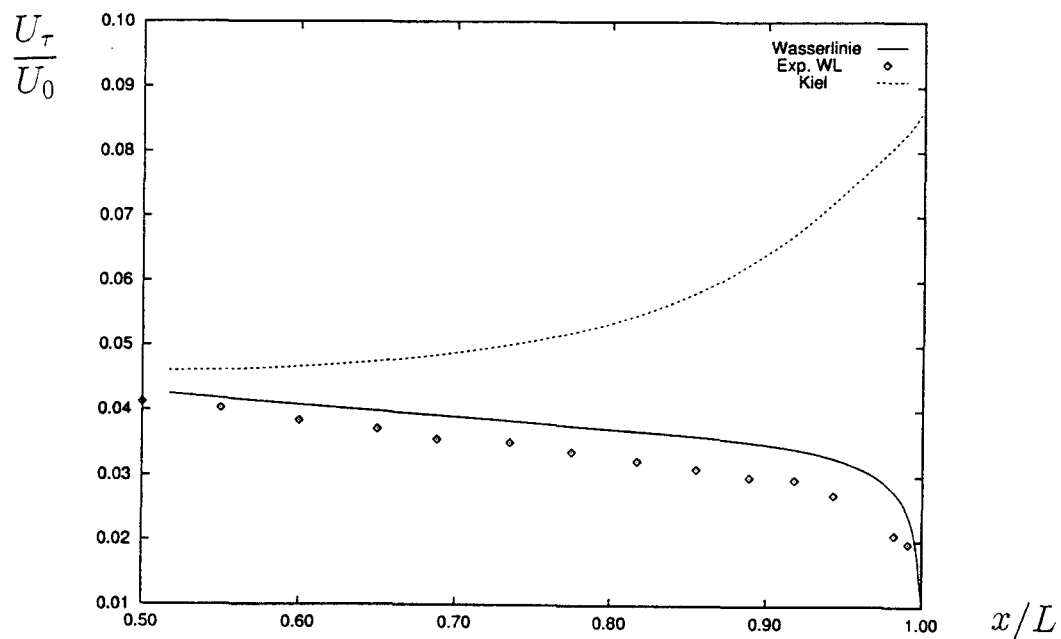


Abbildung 12: Verlauf der Wandschubspannungsgeschwindigkeit  $U_\tau/U_0$  entlang der Wasserlinie und des Kiels für Wigley-Schiff,  $R_n = 4.5 \cdot 10^6$ . Kurven: numerische Lösung. Symbole: Messung von Watmuff und Joubert 1985, aus Patel et al. (1988).

Abb.13 zeigt die Verläufe der dimensionslos gemachten Axialgeschwindigkeit  $u/U_0$  in Längsrichtung auf zwei verschiedenen Höhen (WL und  $z/T = 0.8$ ) auf der Symmetrie-Ebene im Nachlauf des Modells. Die Meßwerte sind mit Symbolen eingetragen. Der Verlauf auf der Höhe  $z/T = 0.8$  stimmt mit den Meßwerten recht gut überein. Entlang der Wasserlinie wird die Geschwindigkeit stets überschätzt.

Um die bei der Approximation der Konvektionsterme entstehenden numerischen Fehler zu untersuchen wurden *reibungslose* Ganzschiffsrechnungen mit den drei in (4.2.2) beschriebenen Diskretisierungsschemata durchgeführt. Sowohl die (molekulare) Zähigkeit des Fluids als auch die turbulente Scheinzähigkeit wurden zu Null gesetzt. Die Haftbedingung am Rumpf wurde durch eine 'free slip wall' Bedingung ersetzt. Demnach wurden die Euler-Erhaltungsgleichungen gelöst. Das bisherige Hinterschiffgitter wurde am Hauptspant gespiegelt und in Radialrichtung vergrößert. Alle drei Rechnungen wurden im gleichen Gitter und Rechenggebiet durchgeführt. Wegen der Symmetrie des Schiffes um den Hauptspant und der Vernachlässigung der Viskosität sind symmetrische bzw. antisymmetrische Verläufe bezüglich Hauptspant für alle Variablen zu erwarten. Abb.15 zeigt Ausschnitte der Verläufe des Druckbeiwertes  $C_p$  (oben), der Axialgeschwindigkeit  $u/U_0$  (mitte) und der Horizontalgeschwindigkeit  $v/U_0$  (unten) entlang der Wasserlinie und der Fortsetzungen der Mittellängslinie vor und hinter dem Modell. Die Lösung mit LUDS ist durchgezogen, mit UDS kurzgestrichelt und mit UDS/CDS (Mischungsfaktor  $\gamma = 0.5$ ) gestrichelt. Die berechneten Verläufe des Druckbeiwertes und der Horizontalgeschwindigkeit zeigen das erwartete Verhalten. Im gewählten Maßstab sind im unteren Bild kaum Unterschiede in  $v/U_0$  festzustellen. Der Nulldurchgang wird gut wiedergegeben. Die Approximation mit LUDS gibt im oberen Bild einen symmetrischeren Verlauf von  $C_p$  als mit UDS/CDS bzw. CDS. Besonders auffällig ist aber das Verhalten der Axialgeschwindigkeit  $u/U_0$  im Nachlauf des Modells (mittleres Bild). Die erwartete Symmetrie wird dort nur annähernd wiedergegeben. Eine Modelllänge hinter dem Heck ( $x/L = 2.$ ) sind noch deutliche Unterschiede zu der ungestörten Geschwindigkeit  $U_0$  festzustellen. Die Approximation mit UDS schneidet am schlechtesten ab. Die Rechnung mit UDS/CDS (jeweils 50 Prozent) bringt eine deutliche Verbesserung gegenüber UDS. Wider erwarten ist der Verlauf mit LUDS schlechter als mit UDS/CDS. Dies wird aber durch weitere Untersuchung beider Lösungen nicht bestätigt.

Das im Nachlauf festgestellte Phänomen ist auf die 'numerische Dissipation' von Impuls aufgrund der Diskretisierungsfehler zurückzuführen und läßt sich global anhand des Gesamtwiderstandes veranschaulichen. Da die untersuchte Strömung reibungs- und (nahezu) rotationsfrei ist, muß der resultierende Widerstand verschwinden. Abb.14 zeigt die bei den drei o.g. Rechnungen bestimmten Gesamtwiderstandsbeiwerte  $C_T$ . Die durch Integration über den gesamten Rumpf (unterhalb der Wasserlinie) ermittelte Druckkraft ist mit  $\frac{\rho}{2}U_0^2S_0$  dimensionslos gemacht worden, wobei  $S_0$  die benetzte Fläche ist. Der mit UDS bestimmte Beiwert  $C_T = 0.283 \cdot 10^{-3}$  beträgt mehr als 5 Prozent des zu erwartenden Wertes in reibungsbehafteter Strömung. Das UDS/CDS mit Mischungsfaktor 0.5 reduziert den Widerstandsbeiwert auf die Hälfte. Die Approximation der Konvektionsterme mit LUDS liefert mit  $C_T = 0.012 \cdot 10^{-3}$  einen vernachlässigbaren Wert.

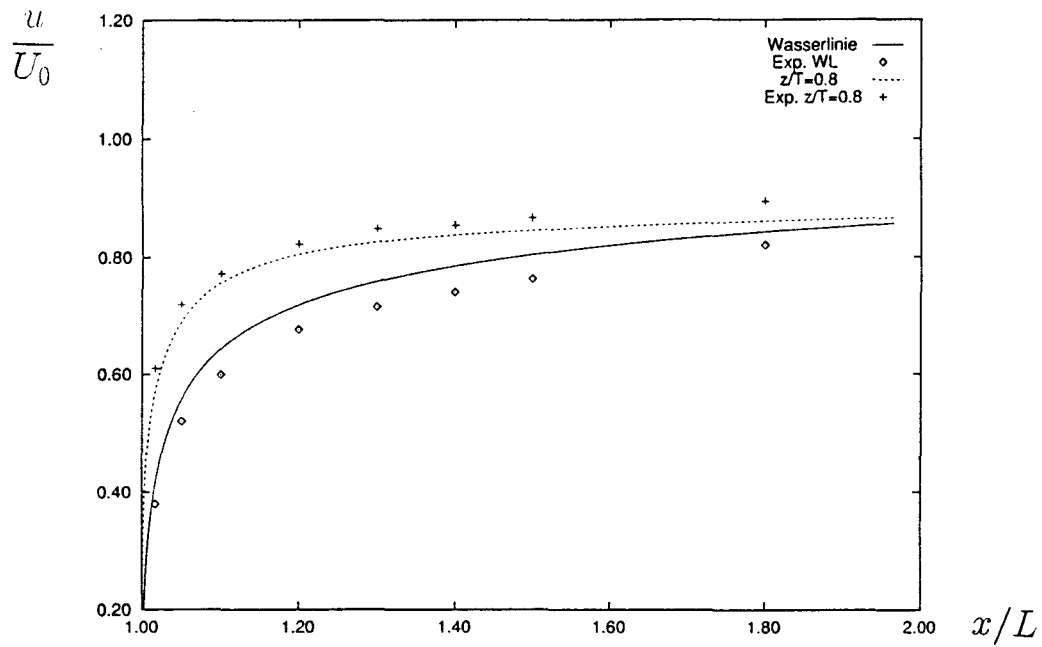


Abbildung 13: Verlauf der Axialgeschwindigkeit  $u/U_0$  in Längsrichtung für zwei Höhen ( $z/T = 0$ ,  $z/T = 0.8$ ) auf der Symmetrie-Ebene im Nachlauf des Wigley-Schiffes,  $R_n = 4.5 \cdot 10^6$ . Kurven: numerische Lösung. Symbole: Messung von Sarda 1986.

| <i>Schema</i> | $C_T \cdot 10^3$ |
|---------------|------------------|
| UDS           | 0.283            |
| UDS/CDS       | 0.143            |
| LUDS          | 0.012            |

Abbildung 14: Widerstandsbeiwert für Wigley-Schiff in reibungsfreier Strömung mit verschiedenen Diskretisierungsschemata.

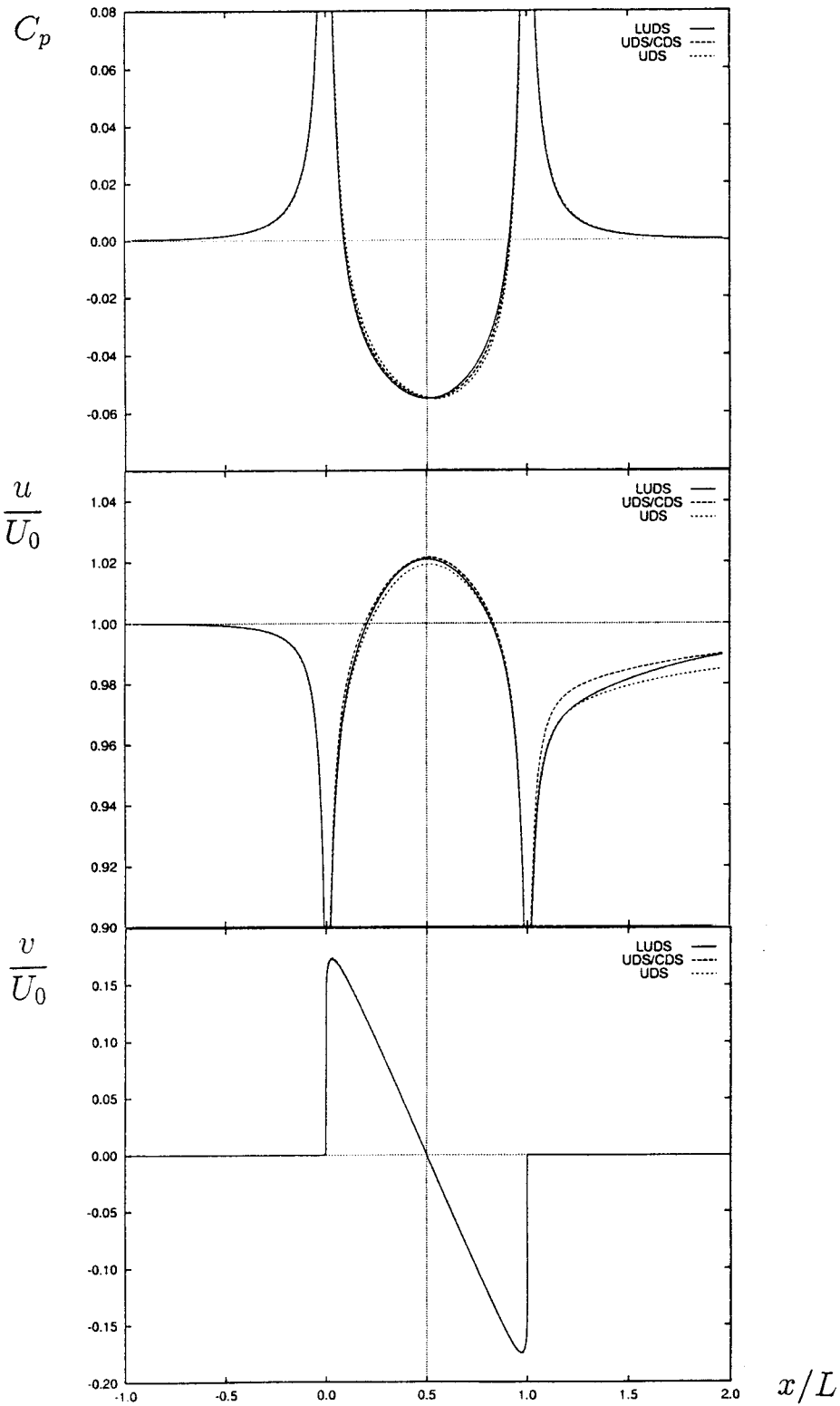


Abbildung 15: Verlauf des Druckbeiwertes  $C_p$  (oben), der Axialgeschwindigkeit  $u/U_0$  (mitte) und der Horizontalgeschwindigkeit  $v/U_0$  (unten) entlang der Wasserlinie und der Fortsetzungen der Mittellängslinie vor und hinter dem Modell mit verschiedenen Diskretisierungsschemata. Wigley-Schiff, reibungsfreie Ganzschiffsrechnung.

### 6.3 Ergebnisse für den HSVA-Tanker

Als weitere Anwendung des Programms wurde die Strömung um das Hinterschiff des Doppelmodells des sogenannten HSVA-Tankers [10] bei einer Reynoldszahl von  $5 \cdot 10^6$  gewählt. Abb.16 zeigt die Geometrie dieses völligen Schiffes mit

$$\frac{L}{B} = 6.6 \quad , \quad \frac{B}{T} = 2.7 \quad , \quad C_B = 0.85 \quad \text{und} \quad \frac{L^2}{S_0} = 4.30 \quad .$$

Dieser Fall (und eine Variante mit modifizierter Heckform) wurde im 'Workshop on Ship Viscous Flow' in Göteborg 1990 [27] als Test für die von etwa 20 Forschungsgruppen aus aller Welt präsentierten Rechnungen herangezogen, da hierfür ausführliche Messungen im Windkanal unseres Instituts durchgeführt worden sind [19,60]. Mittlerweile ist die Umströmung des Doppelmodells des HSVA-Tankers praktisch zu einem Standardtest für numerische Verfahren zur Berechnung turbulenter Schiffsumströmungen geworden. Die Darstellung meiner Ergebnisse entspricht weitgehend der in diesem Workshop gewählten Form, um einen direkten Vergleich mit den dort vorgestellten Ergebnissen zu ermöglichen.

Das gewählte Rechengebiet hat dieselben Abmessungen wie im Falle des Wigley-Schiffes ( $0.5 \leq x/L \leq 2$  ,  $0 \leq r/L \leq 1$ ). Das Gitter hat  $96 \cdot 32 \cdot 36$  Zellen in Längs-, Spantumfangs- und Radialrichtung und wird in Abb.17 bis 21 gezeigt. Abb.17 vermittelt einen globalen Eindruck des Gitters. Abb.18 und 19 zeigen 2D-Ausschnitte an charakteristischen Spanten. Am Spant  $x/L = 0.940$  kann man die sehr feine Auflösung in unmittelbarer Wandnähe erkennen. Am Spant  $x/L = 0.976$  (Propellerebene) läßt sich diese feine Auflösung aufgrund der Randgeometrie nicht überall beibehalten. Abb.20 zeigt das Gitter auf der Wasserlinienebene. Das strukturierte Gitter führt zu einer unnötig feinen Auflösung weit vom Rumpf entfernter Regionen. Die stufenförmige Approximation der Heckkontur ist besonders deutlich in Abb.21 zu erkennen. Der unstetige Verlauf des Hinterstevens kann Störungen (Unregelmäßigkeiten) in den Ergebnissen hervorrufen, wie es beim Verlauf des Wanddruckes entlang der Kiellinie an der Stelle  $x/L = 0.95$  vermutlich der Fall ist, Abb.30 .

Abb.22, 26 und 28 zeigen berechnete und gemessene Isolinien der Axialgeschwindigkeit an den Spanten  $x/L = 0.940$  ,  $0.976$  und  $1.042$ . Die Übereinstimmung von Rechnung und Experiment ist im Außenbereich recht gut, auch wenn die Schwächen des benutzten Turbulenzmodells (kein Transport) sich nach hinten hin allmählich bemerkbar machen. Die gemessenen Isotachen  $u/U_0 = 0.9$  zeigen auf allen drei Spanten im unteren Bereich die Folgen eines stromaufwärts gelegenen Halterungsdrahtes des Modells im Windkanal. Die Übereinstimmung der inneren Isotachen ist nicht zufriedenstellend. Die ausgeprägte Aufweitung derselben im unteren Bereich, die im Zusammenhang mit dem sogenannten Kimmwirbel steht, wird von der Rechnung nicht wiedergegeben. Besonders auffällig ist die Abwesenheit des charakteristischen 'Hakens' auf der Propellerebene ( $x/L = 0.976$ ). Dies kann man auch in allen Rechnungen des Workshops von Göteborg 1990 [27] feststellen. Es besteht mittlerweile die *Vermutung*, daß ein so kompliziertes Phänomen nur durch Anwendung eines anisotropen Turbulenzmodell (keine Wirbelviskositätshypothese) erfaßt werden kann, z.B. Visonneau in [41].

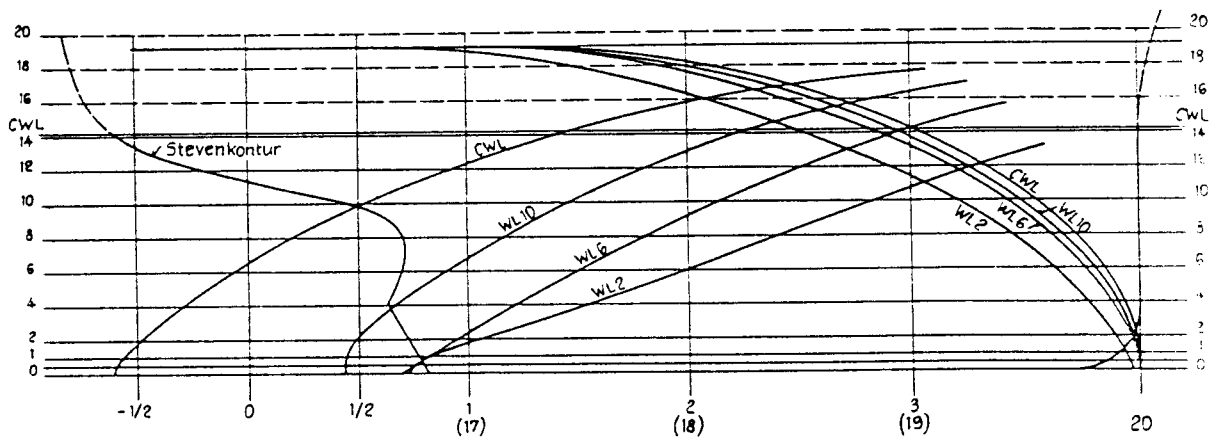
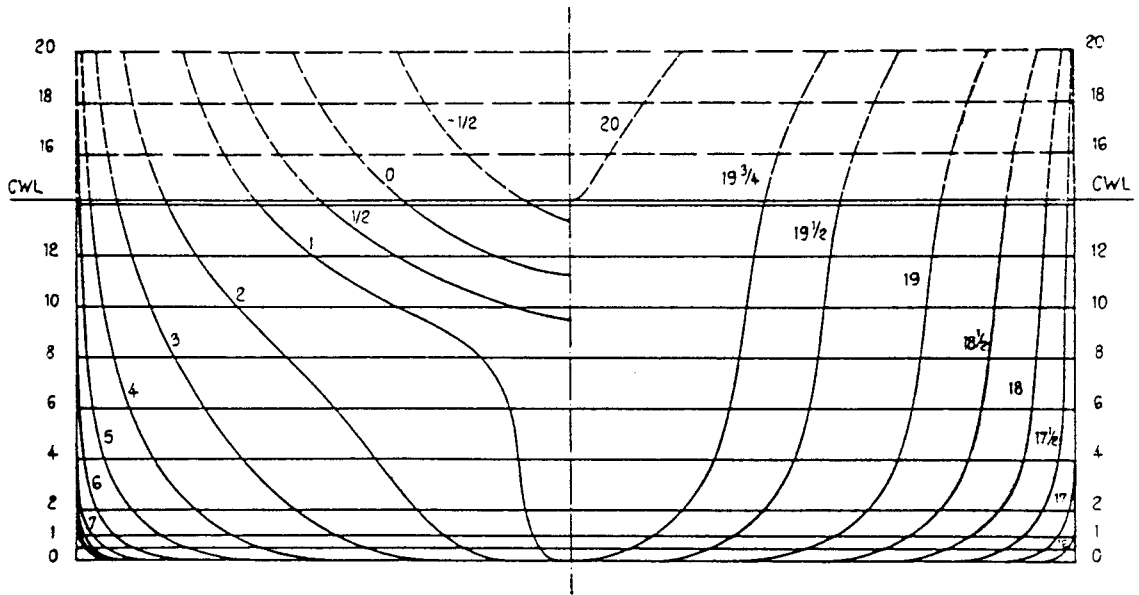


Abbildung 16: Spantenriß, Vor- und Hinterstevenkontur, sowie Wasserlinieneinläufe des HSVA-Tankers, Hoffmann (1976).

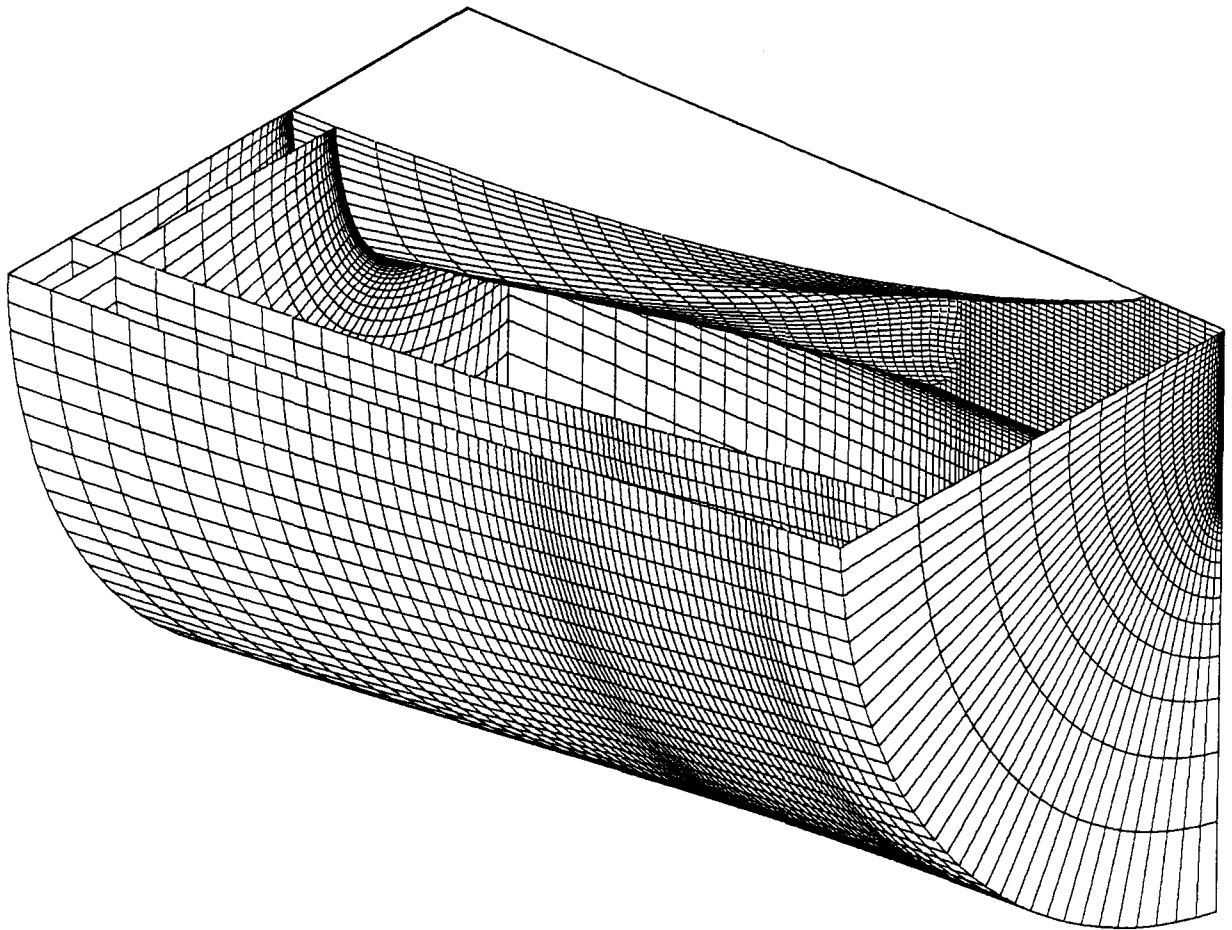


Abbildung 17: Ausschnitt aus dem Gitter um das HSVA-Tanker-Hinterschiff. Nur ausgewählte Gitterflächen. Zellanzahl in Längs-, Spantumfangs- und Radialrichtung: 96 · 32 · 36 .

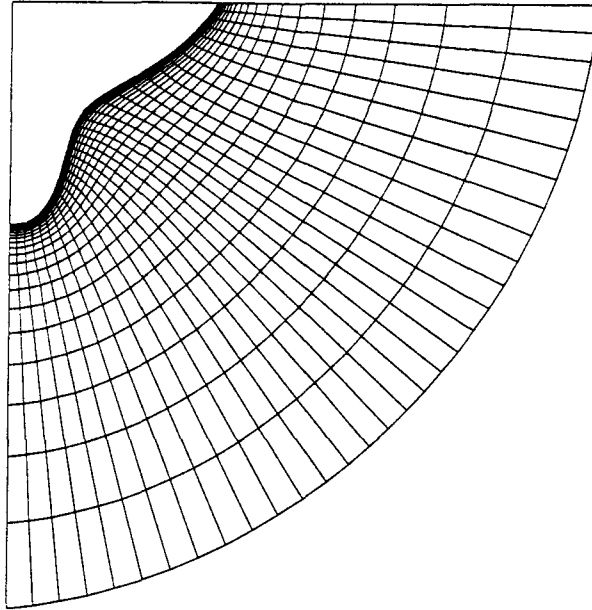


Abbildung 18: Numerisches Gitter am Spant  $x/L = 0.940$  des HSVA-Tankers. Ausschnitt aus 3D-Gitter.

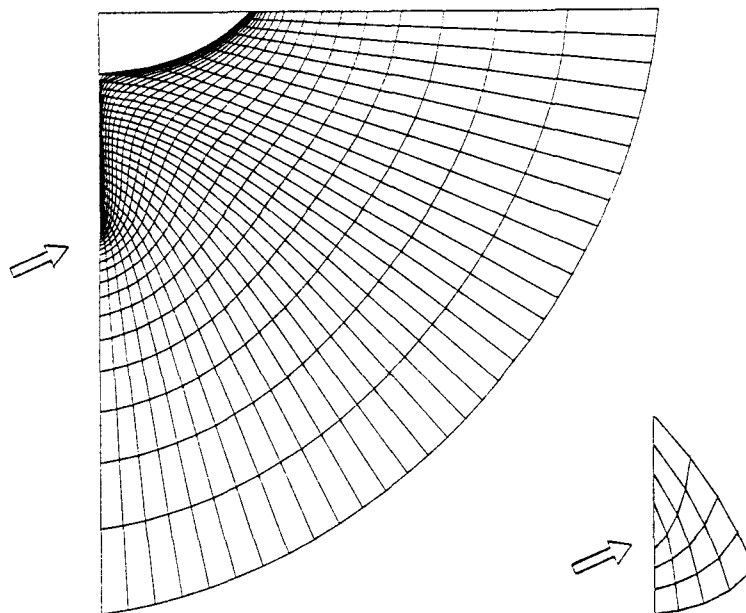


Abbildung 19: Numerisches Gitter am Spant  $x/L = 0.976$  des HSVA-Tankers. Ausschnitt aus 3D-Gitter. Rechts: Vergrößerung der topologisch entarteten (dreieckigen) Zelle auf der Fortsetzung der Kiellinie.

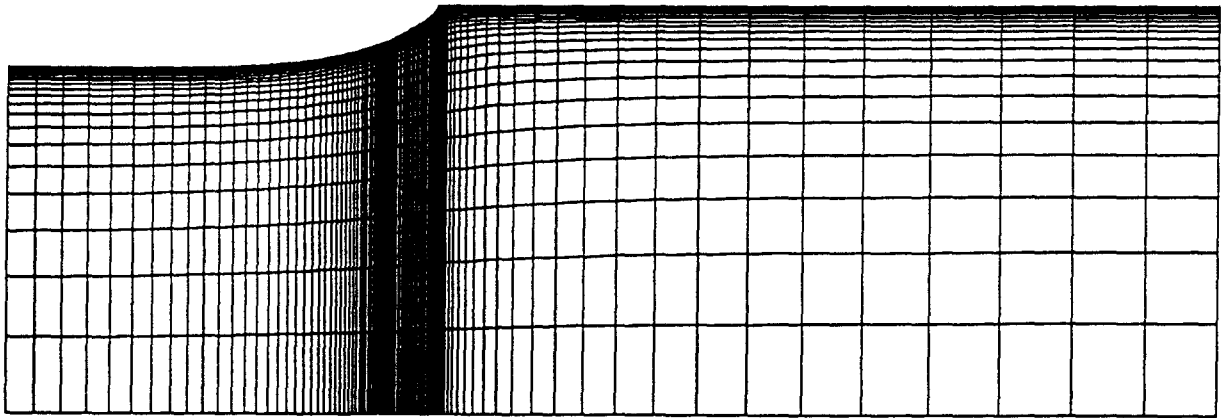


Abbildung 20: Numerisches Gitter auf der Wasserlinienebene des HSVA-Tankers. Ausschnitt aus 3D-Gitter. Wegen des strukturierten Gitters werden auch weit vom Rumpf entfernte Gebiete unnötigerweise zum Teil fein aufgelöst.

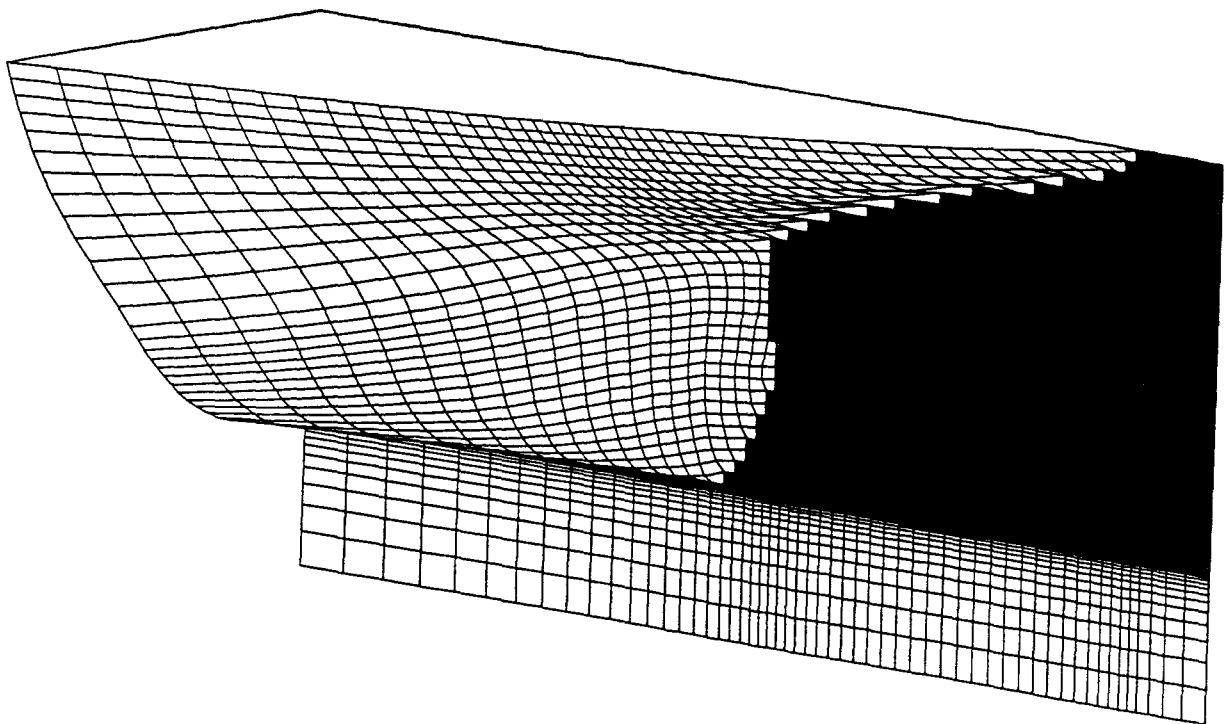


Abbildung 21: Approximation der Heckkontur des HSVA-Tankers durch das Gitter. Die Stufen können numerische Effekte in den Ergebnissen verursachen.

Abb.23, 27 und 29 zeigen die berechneten und gemessenen Richtungsfelder der Quergeschwindigkeit an den Spanten  $x/L = 0.940$ ,  $0.976$  und  $1.042$ . Diese Bilder zeigen denselben Trend wie die Isotachen: Während die Übereinstimmung im Außenbereich recht gut ist, werden die komplizierten Strömungsverhältnisse im Innenbereich nicht erfaßt. Das gemessene Richtungsfeld deutet am Spant  $x/L = 0.940$  auf die Entstehung eines Wirbels hin, welcher auf der Propellerebene schon voll entwickelt ist. Der berechnete Wirbel ist weniger ausgeprägt als im Experiment und ist erst weiter stromabwärts deutlich zu erkennen, Abb.29. Ferner liegt der berechnete Wirbel zu weit oben gegenüber der Messung.

Abb.24 zeigt berechnete und gemessene Isolinien des Druckbeiwertes  $C_p = (p - p_0)/(\frac{\rho}{2}U_0^2)$  am Spant  $x/L = 0.940$ . Die Übereinstimmung ist gut. Abb.25 zeigt Isolinien der vom Turbulenzmodell ermittelten und mit der molekularen Zähigkeit dimensionslos gemachten turbulenten Zähigkeit  $\nu_t/\nu$  am selben Spant. Im Feld erreicht die turbulente Scheinzähigkeit viel größere Werte als die Zähigkeit des Fluids (z.B. Faktor 1000). Leider liegen hierfür keine experimentell ermittelten Daten vor.

Abb.30 zeigt die Verläufe des Druckbeiwertes am Rumpf entlang der Wasserlinie und der Kiellinie, aufgetragen über der dimensionslosen Längskoordinate  $x/L$ . Die Meßwerte sind mit Symbolen eingetragen. Der Druckverlauf an der Wasserlinie zeigt eine gute Übereinstimmung mit den Messungen. An der Kiellinie ist die Lösung weniger gut, zeigt aber doch den qualitativ richtigen Verlauf. Der eng begrenzte Druckabfall an der Stelle  $x/L = 0.95$  ist numerisch bedingt. Auffallend ist, daß beide Verläufe aus noch ungeklärten Gründen das Druckminimum  $C_p = -0.15$  nicht erreichen. Dies ist auch bei den besseren Ergebnissen in [27] der Fall.

Abb.31 zeigt die Verläufe des Druckbeiwertes am Rumpf in Spantumfangsrichtung für drei verschiedene Spanten, aufgetragen über der mit dem jeweiligen Spantumfang dimensionslos gemachten Bogenlänge. Auch wenn die Meßwerte (Symbole) nicht genau wiedergegeben werden, folgen die berechneten Verläufe ihrem komplizierten Verhalten.

Abb.32 zeigt die Verläufe der dimensionslos gemachten Wandschubspannungsgeschwindigkeit  $U_\tau/U_0$  entlang der Wasserlinie und der Kiellinie, aufgetragen über der dimensionslosen Längskoordinate  $x/L$ . Die Übereinstimmung der Lösung mit den wenigen vorhandenen Meßwerten (Symbole) ist recht gut. Die Genauigkeit des Meßwertes bei  $x/L = 0.95$  ist fraglich, weil die zur Ermittlung der Wandschubspannung benutzte 'Clouser-Plot' Technik [19] in diesem Bereich der Strömung nicht mehr zuverlässig ist. Im hinteren Heckbereich zeigt die Rechnung einen Wiederanstieg der Wandschubspannung entlang der Wasserlinie ab etwa  $x/L = 0.986$  mit einem relativen Maximum kurz vor dem Schiffsende. Der Anstieg des Betrages der Wandschubspannung kann auch unterhalb der Wasserlinie im oberen Heckbereich festgestellt werden, Abb.38. Obwohl in [27] nicht darüber berichtet wird, zeigen auch einige der dortigen Rechnungen zumindest ansatzmäßig diesen Effekt. Ich halte dieses Phänomen für physikalisch plausibel. Die Fluidteilchen am flachen, langen oberen Heckteil werden von der darunterliegenden energiereichen Strömung beschleunigt, die bereits den Rumpf verlassen hat. Um dies zu bestätigen bzw. andere Erklärungen für diesen Effekt zu finden sind weitere Rechnungen an veränderten Heckformen nötig.

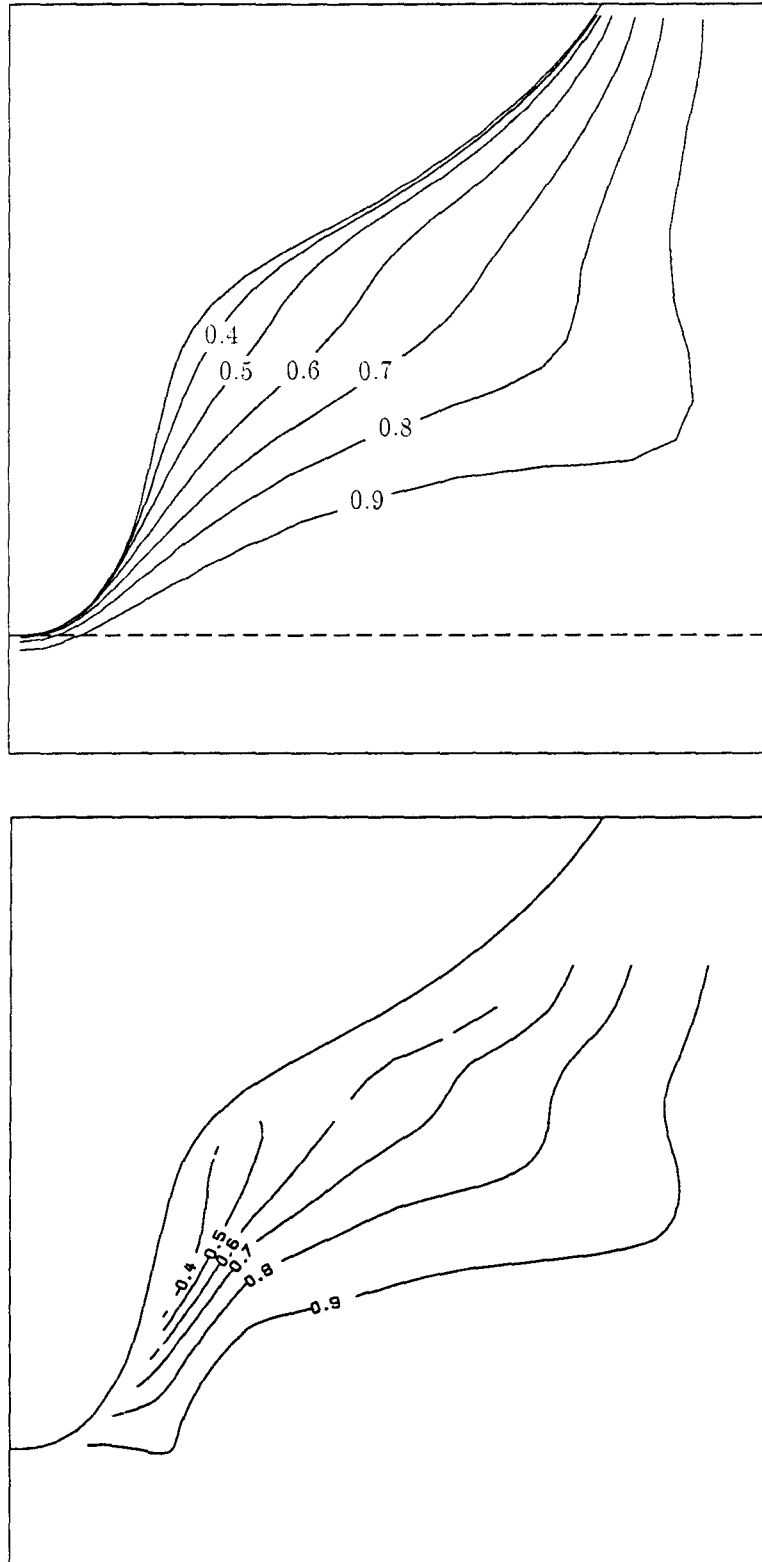


Abbildung 22: Isolinien der Axialgeschwindigkeit  $u/U_0$  für HSVA-Tanker,  $R_n = 5 \cdot 10^6$ , Spant  $x/L = 0.940$ . Oben: numerische Lösung. Unten: Messung von Wieghardt und Kux 1980.

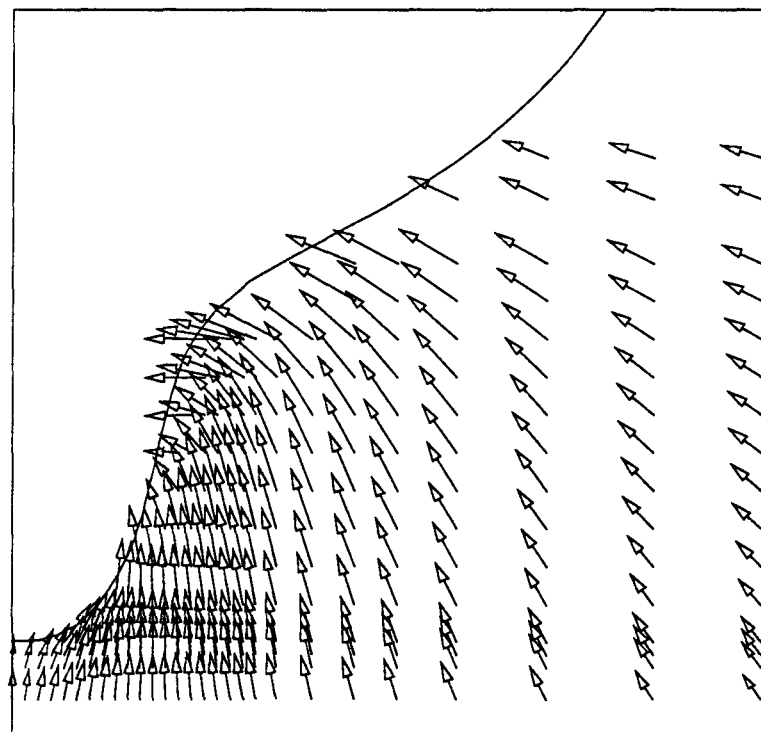
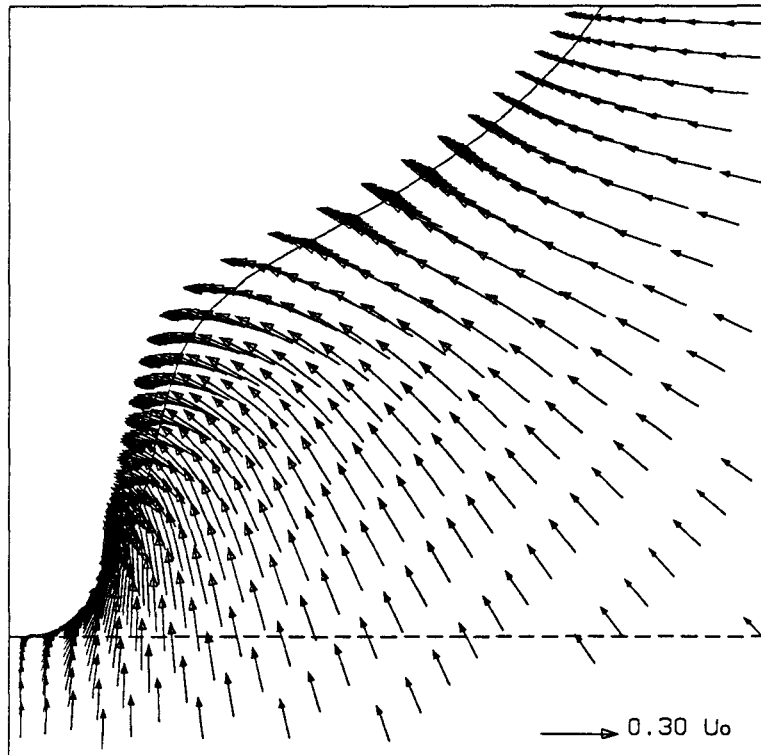


Abbildung 23: Richtungsfeld der Quergeschwindigkeit  $(v, w)$  für HSVA-Tanker,  $R_n = 5 \cdot 10^6$ , Spant  $x/L = 0.940$ . Oben: numerische Lösung. Unten: Messung von Wieghardt und Kux 1980.

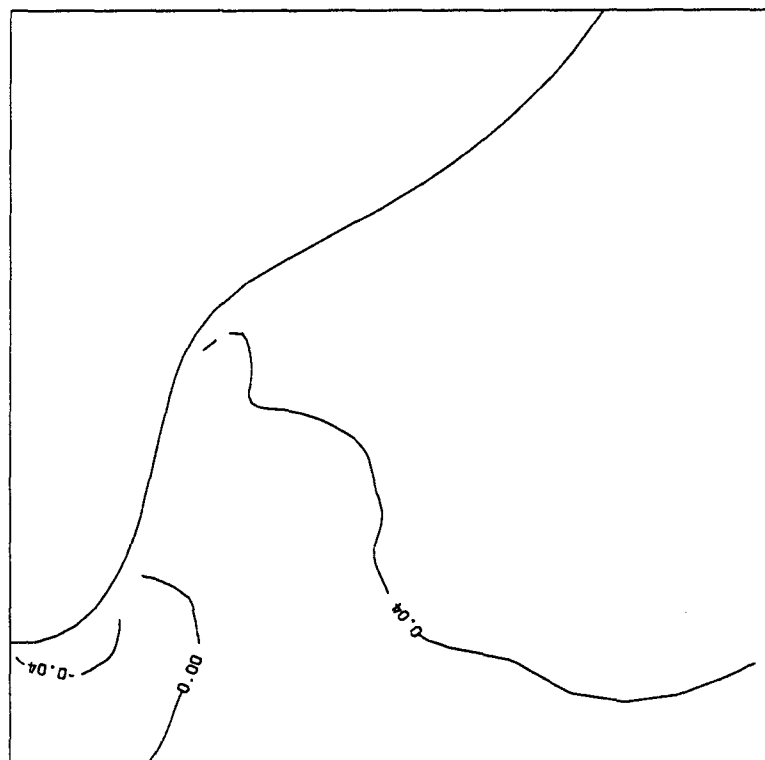
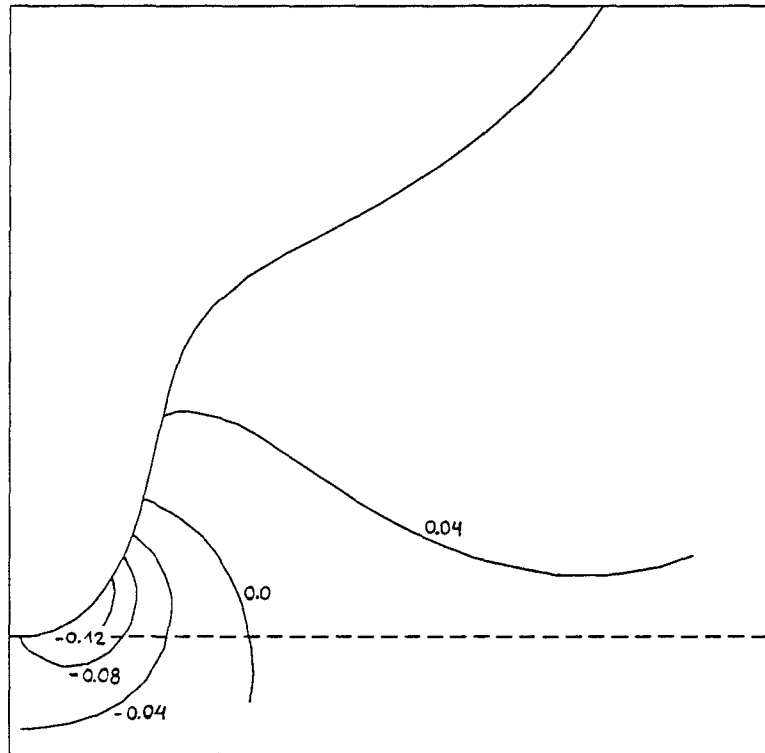


Abbildung 24: Isolinien des Druckbeiwertes  $C_p$  für HSVA-Tanker,  $R_n = 5 \cdot 10^6$ , Spant  $x/L = 0.940$ . Oben: numerische Lösung. Unten: Messung von Wieghardt und Kux 1980.

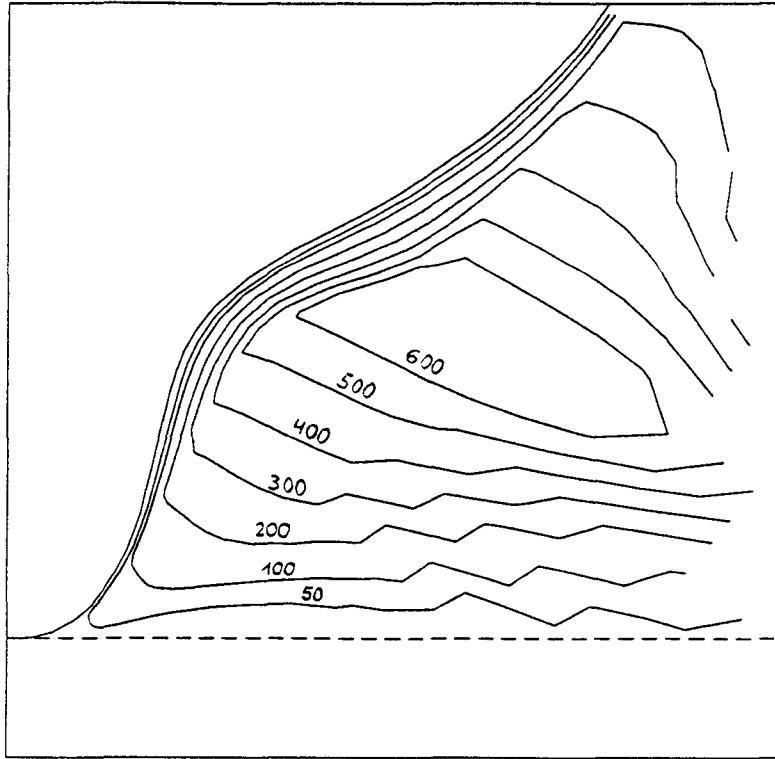


Abbildung 25: Isolinien der turbulenten Scheinzähigkeit  $\nu_t/\nu$  für HSVA-Tanker,  $R_n = 5 \cdot 10^6$ , Spant  $x/L = 0.940$ .

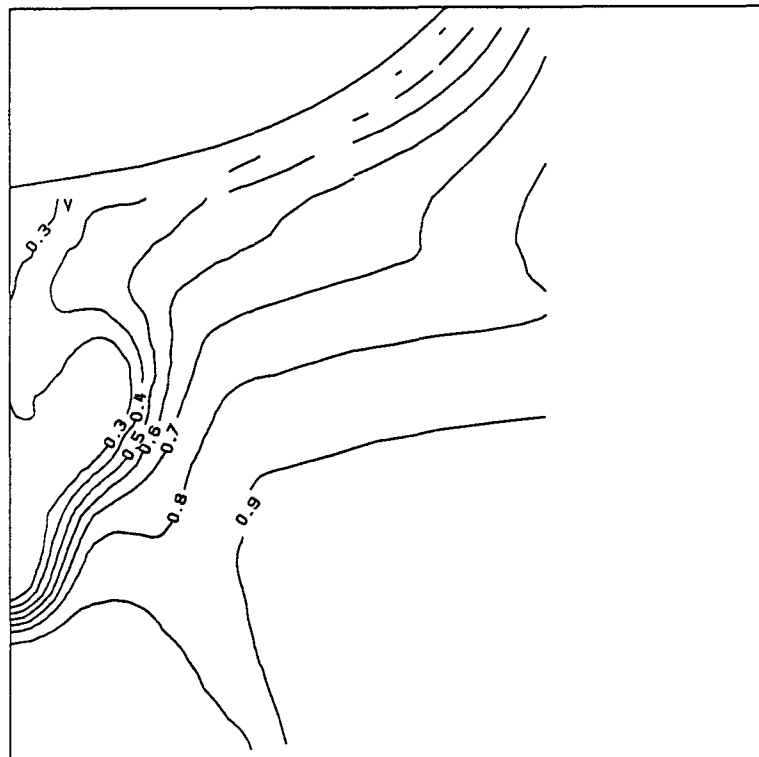
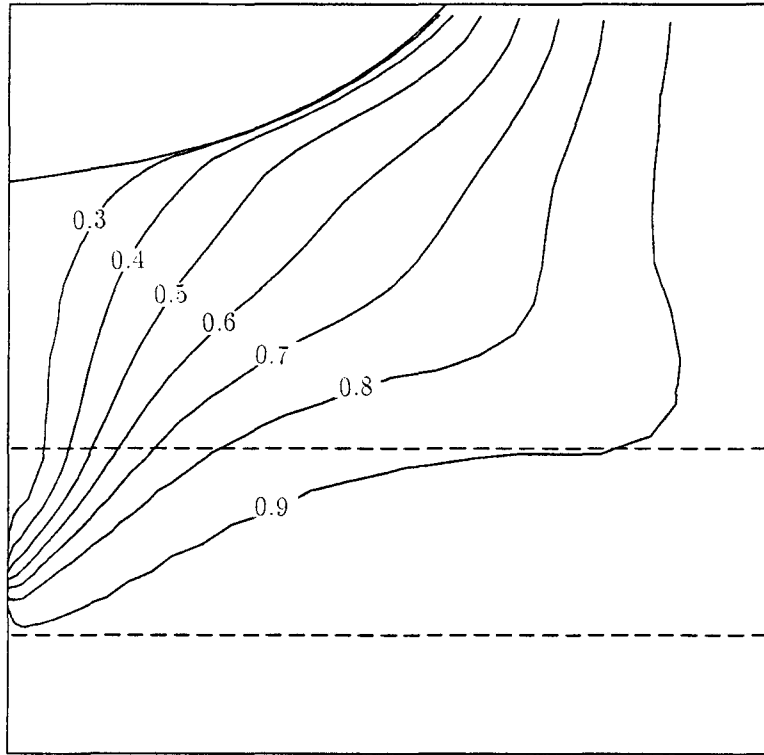


Abbildung 26: Isolinien der Axialgeschwindigkeit  $u/U_0$  für HSVA-Tanker,  $R_n = 5 \cdot 10^6$ , Spant  $x/L = 0.976$ . Oben: numerische Lösung. Unten: Messung von Wieghardt und Kux 1980.

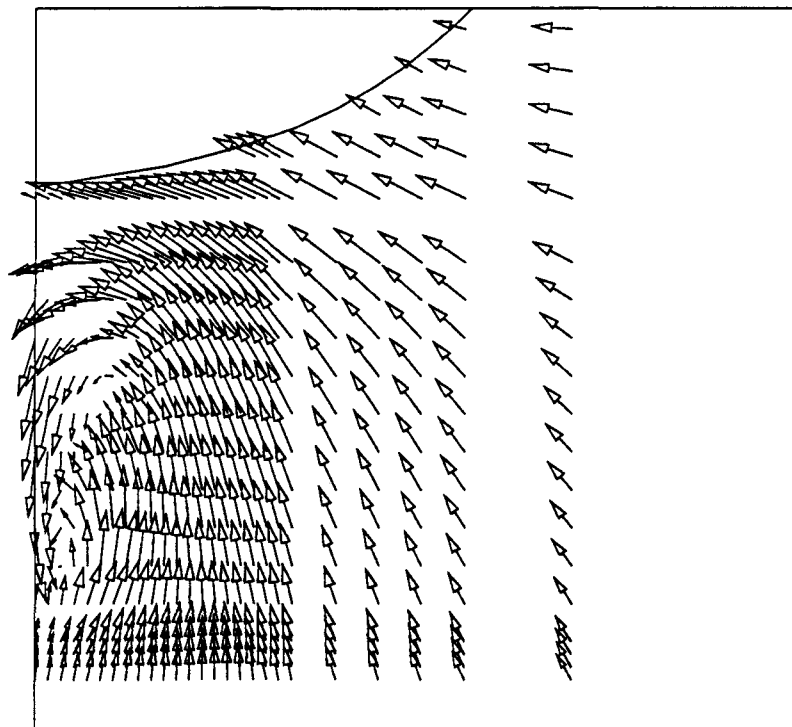
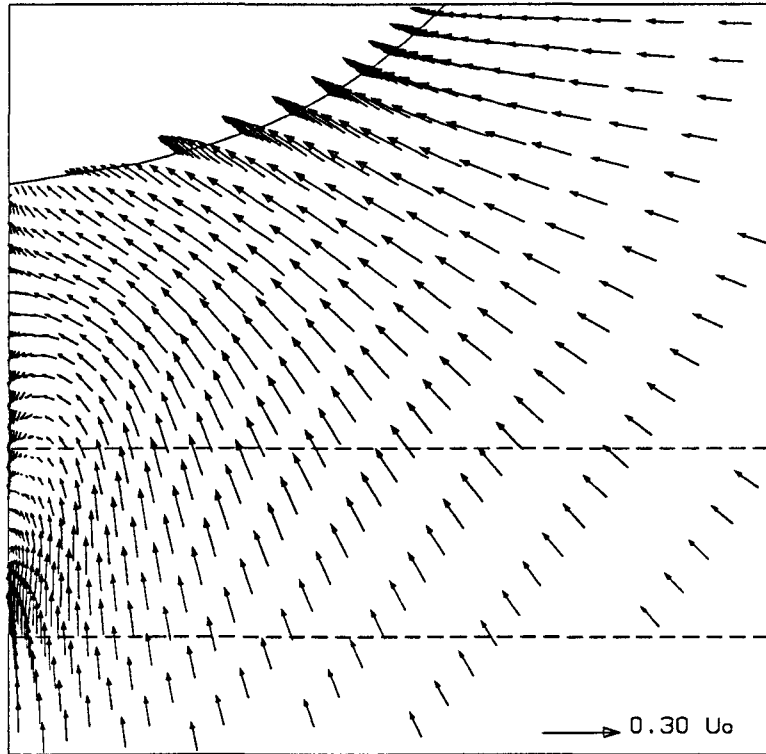


Abbildung 27: Richtungsfeld der Quergeschwindigkeit  $(v, w)$  für HSVA-Tanker,  $R_n = 5 \cdot 10^6$ , Spant  $x/L = 0.976$ . Oben: numerische Lösung. Unten: Messung von Wieghardt und Kux 1980.

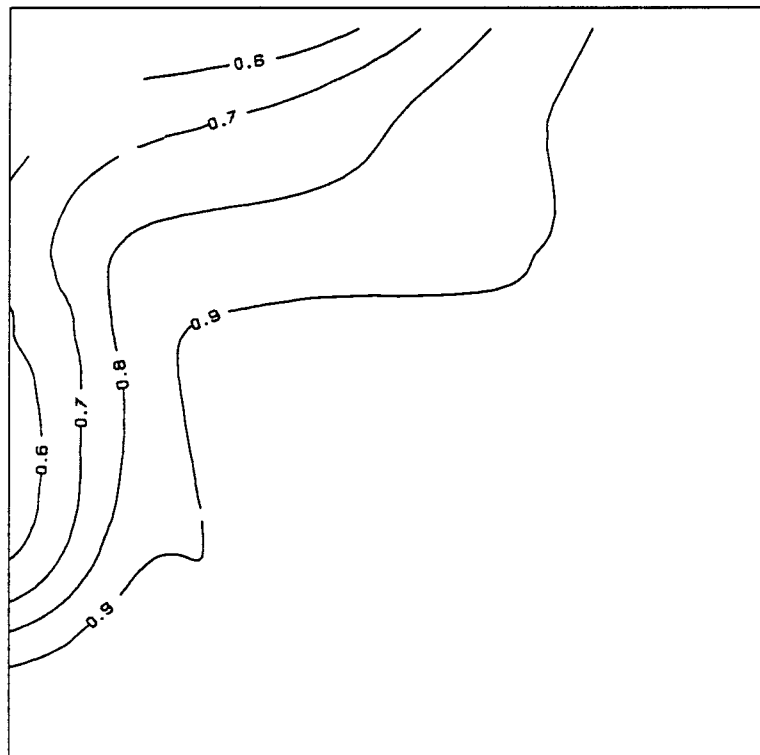
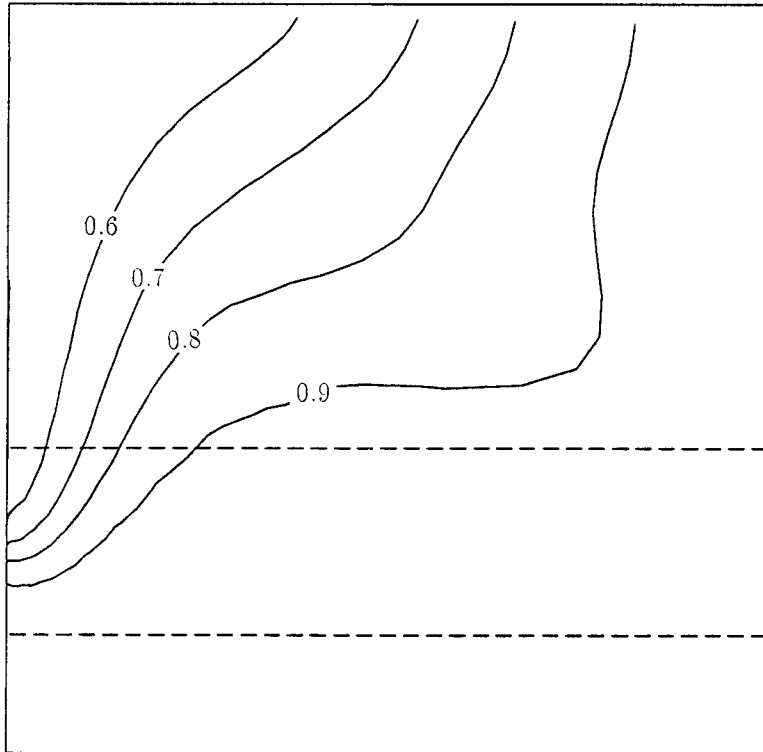


Abbildung 28: Isolinien der Axialgeschwindigkeit  $u/U_0$  für HSVA-Tanker,  $R_n = 5 \cdot 10^6$ , Spant  $x/L = 1.042$ . Oben: numerische Lösung. Unten: Messung von Wieghardt und Kux 1980.

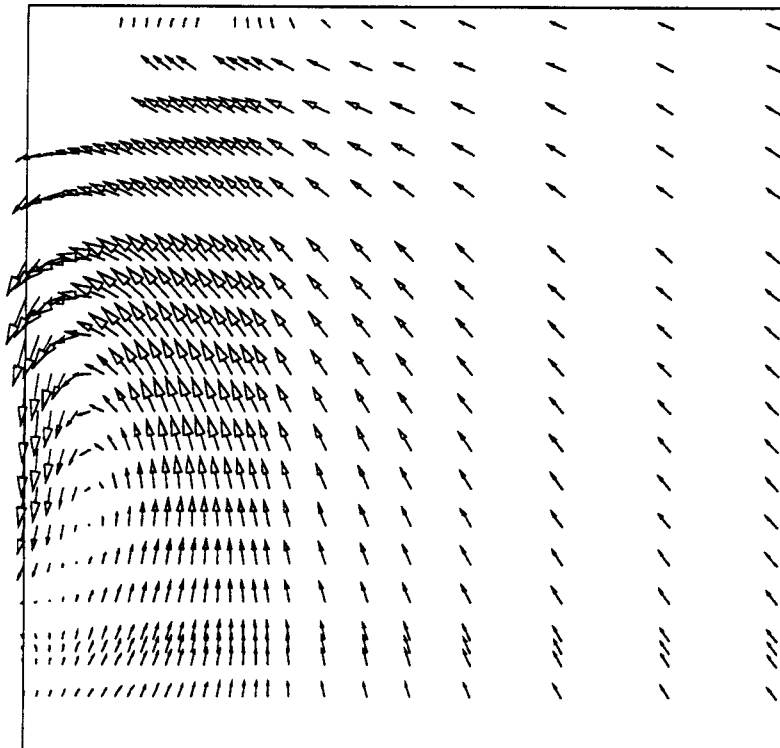
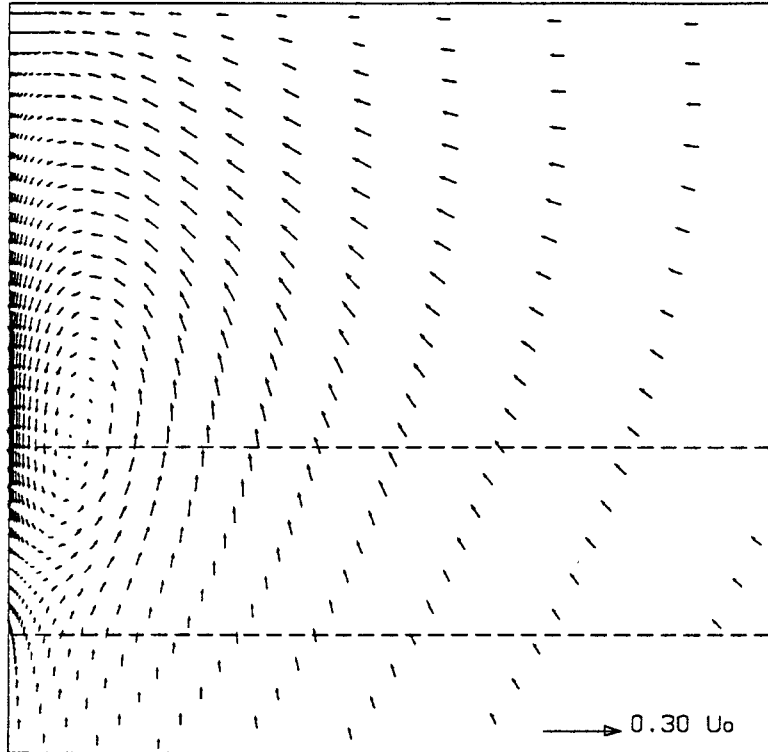


Abbildung 29: Richtungsfeld der Quergeschwindigkeit  $(v, w)$  für HSVA-Tanker,  $R_n = 5 \cdot 10^6$ , Spant  $x/L = 1.042$ . Oben: numerische Lösung. Unten: Messung von Wieghardt und Kux 1980.

Abb.33 zeigt die Verläufe von  $U_\tau/U_0$  in Spantumfangsrichtung für zwei verschiedene Spanten, aufgetragen über der mit dem jeweiligen Spantumfang dimensionslos gemachten Bogenlänge. Auch hier folgen die berechneten Verläufe dem komplizierten Verhalten der Meßwerte (Symbole) recht gut.

Abb.34 zeigt die Verläufe der dimensionslos gemachten Axialgeschwindigkeit  $u/U_0$  in Längsrichtung auf drei verschiedenen Höhen (Kiel, Propellerachse und Wasserlinie) auf der Symmetrie-Ebene im Nachlauf des Modells. Die Meßwerten sind mit Symbolen eingetragen. Für die Wasserlinie sind keine Meßwerte vorhanden. Entlang der Fortsetzung der Kiellinie nimmt die berechnete Geschwindigkeit nach einem sehr steilen Anstieg zunächst wieder ab. Dies wird durch die Meßdaten belegt. Die benutzte Diskretisierung und das Turbulenzmodell erlauben es nicht, diesen Verlauf auch quantitativ richtig wiederzugeben. Die unphysikalische Oszillation bei  $x/L \approx 1.0$  ist auf die Approximation der Konvektionsterme mit LUDS zurückzuführen. Der Verlauf auf der Höhe der Propellerachse stimmt mit den vorhandenen Meßwerten recht gut überein. Unmittelbar hinter dem Heck zeigt dieser Verlauf negative Werte. Diese stehen im Zusammenhang mit einem ausgeprägten Rückstromgebiet im Bereich der Propellernuß, Abb.38 .

Abb.35 und 36 zeigen Seiten- und Bodenansichten von berechneten und gemessenen Isolinen des Druckbeiwertes  $C_p$  auf dem Rumpf. Die numerische Lösung, jeweils oben aufgetragen, gibt eine gute Approximation der Messung wieder.

Die Photographie des Doppelmodells des HSVA-Tankers nach einem Anstrichversuch im Windkanal unseres Instituts, Abb.37, veranschaulicht die Strömungsverhältnisse im hinteren Heckbereich. Auf etwa 2/3 des Tiefganges über dem Kiel suggeriert die verbliebene Farbe (Öl) eine 'Verzweigungslinie' in Längsrichtung, die auf eine Divergenz der wandnächsten Stromlinien hindeutet. Deutlicher wird eine zweite 'Grenzlinie', oberhalb des Kiels erkennbar, die auf eine Konvergenz der wandnächsten Stromlinien hindeutet. Die abgetragene Farbe hinterließ ein sehr komplexes Gebilde im Gebiet vor der Propellernuß, das teilweise auf eine Rückströmung hinweist. Hier wird eine weitere, s-förmige 'Grenzlinie' erkennbar, die etwa den unteren Teil des Hinterstevens begleitet.

Abb.38 zeigt die Projektion des berechneten Richtungsfeldes der Wandschubspannung auf die Koordinatenebene  $x, z$ . Die Ähnlichkeit mit dem beschriebenen Anstrichversuchsbild ist in Anbetracht der recht komplizierten Strömungsverhältnisse erstaunlich gut. Dies ist auf den Verzicht auf Wandfunktionen zurückzuführen. Die erwähnten Merkmale der Strömung sind qualitativ erkennbar. Die Größe und Form des Gebildes vor der Propellernuß können allerdings nur annähernd wiedergegeben werden, und die Verzweigung der Stromlinien findet hier auf etwa halbem Tiefgang statt.

Abb.39 zeigt einen Ausschnitt des berechneten Richtungsfeldes der Geschwindigkeit auf der Wasserlinienebene. Eine halbe Modelllänge hinter dem Heck ist noch eine ausgeprägte Nachstromdelle zu erkennen. Abb.40 zeigt das berechnete Richtungsfeld der Geschwindigkeit auf der vertikalen Symmetrie-Ebene. Der Sprung in der Geschwindigkeit auf der Höhe des Kiels wird im Nachlauf beibehalten. Dies dürfte im Zusammenhang mit der Vernachlässigung des Turbulenztransports durch Diffusion stehen.

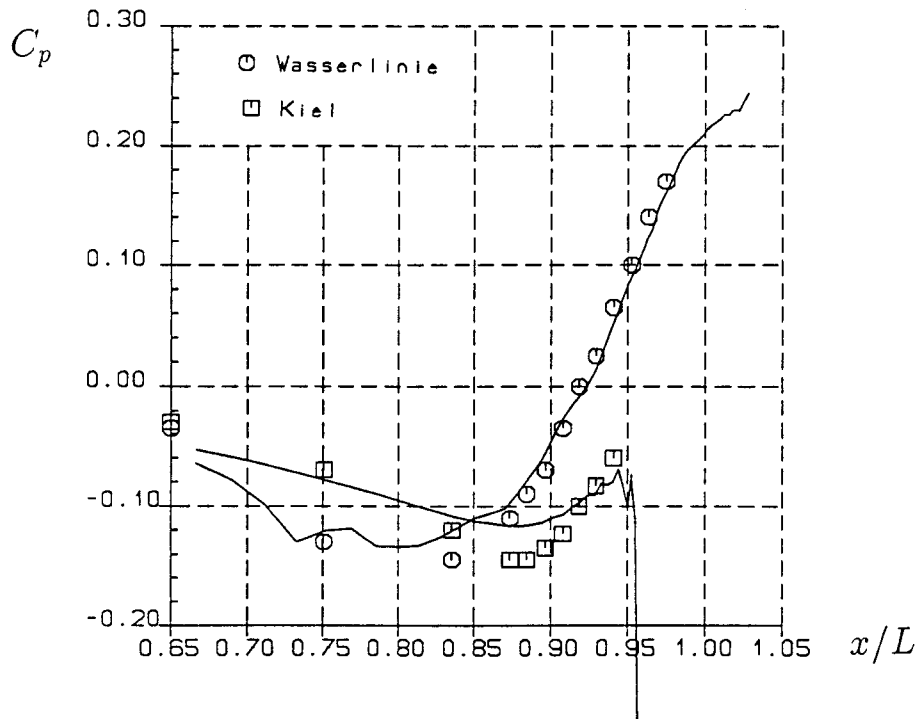


Abbildung 30: Verlauf des Druckbeiwertes  $C_p$  in Längsrichtung entlang der Wasserlinie und des Kiels für HSVA-Tanker,  $R_n = 5 \cdot 10^6$ . Kurven: numerische Lösung. Symbole: Messung von Hoffmann 1976.

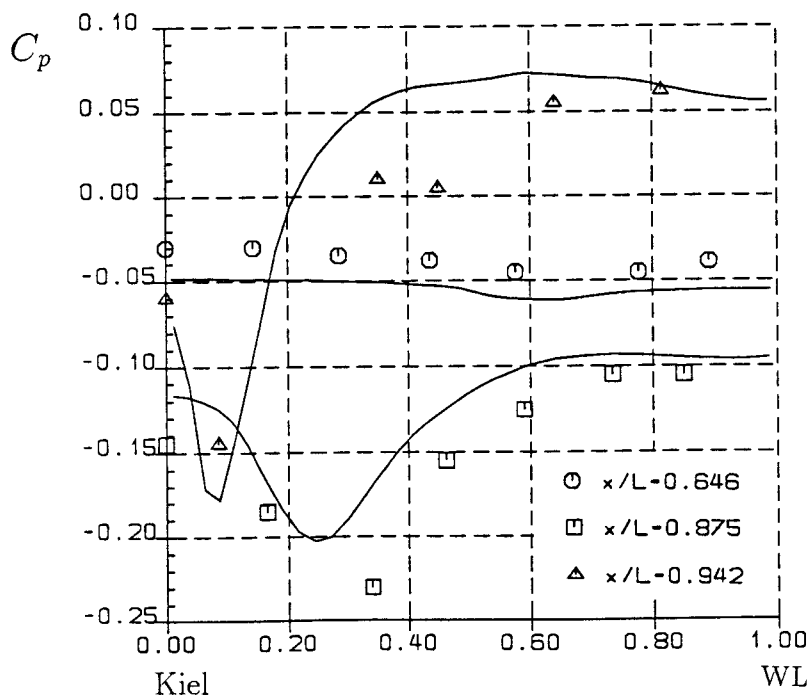


Abbildung 31: Verlauf des Druckbeiwertes  $C_p$  in Spantumfangsrichtung für HSVA-Tanker,  $R_n = 510^6$ , Spanten  $x/L = 0.646, 0.875$  und  $0.942$ . Kurven: numerische Lösung. Symbole: Messung von Hoffmann 1976.

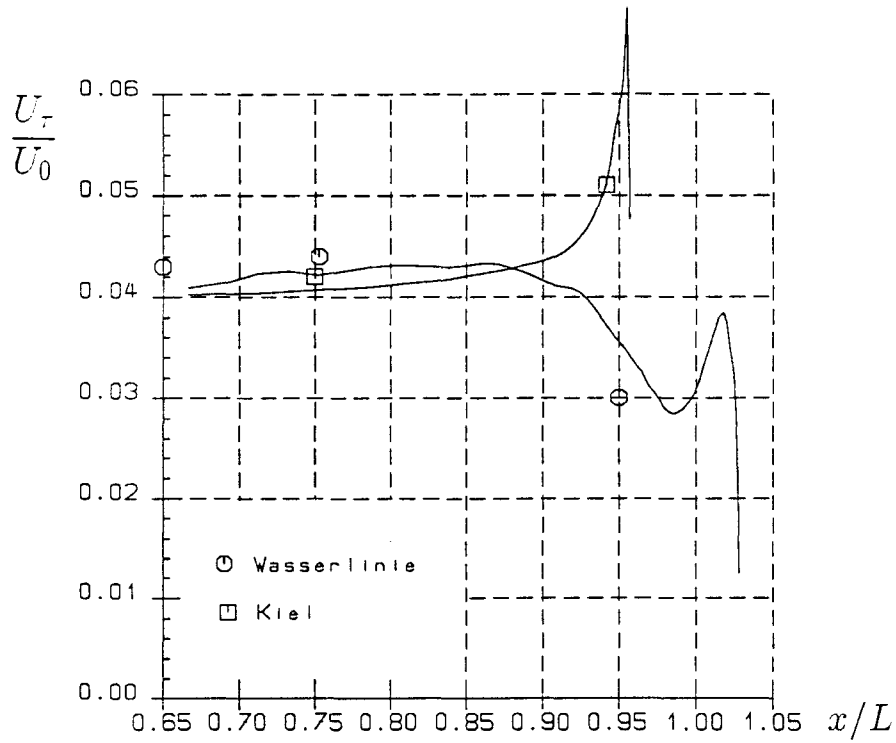


Abbildung 32: Verlauf der Wandschubspannungsgeschwindigkeit  $U_\tau/U_0$  entlang der Wasserlinie und des Kiels für HSVA-Tanker,  $R_n = 5 \cdot 10^6$ . Kurven: numerische Lösung. Symbole: Messung von Hoffmann 1976.

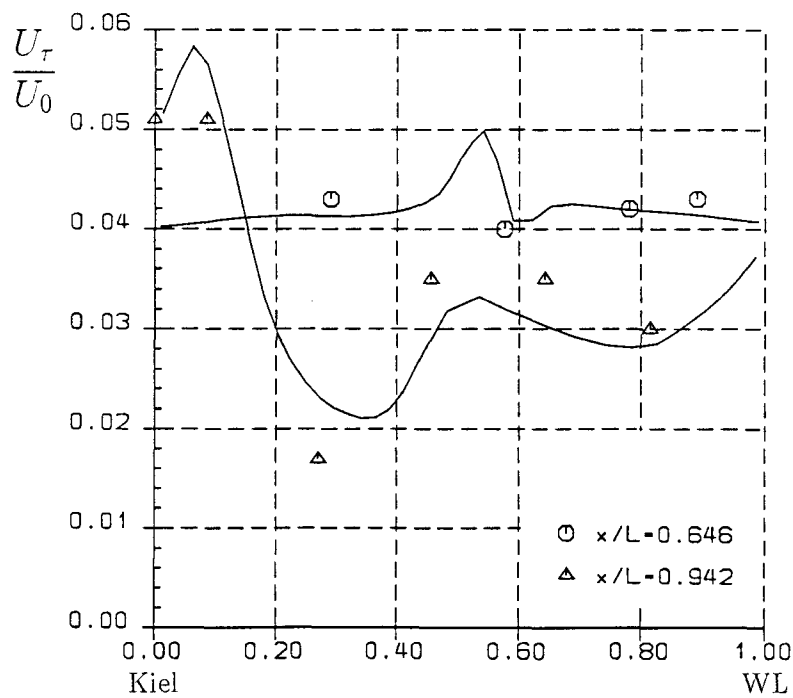


Abbildung 33: Verlauf der Wandschubspannungsgeschwindigkeit  $U_\tau/U_0$  in Spantumfangsrichtung für HSVA-Tanker,  $R_n = 5 \cdot 10^6$ , Spanten  $x/L = 0.646$  und  $0.942$ . Kurven: numerische Lösung. Symbole: Messung von Hoffmann 1976.

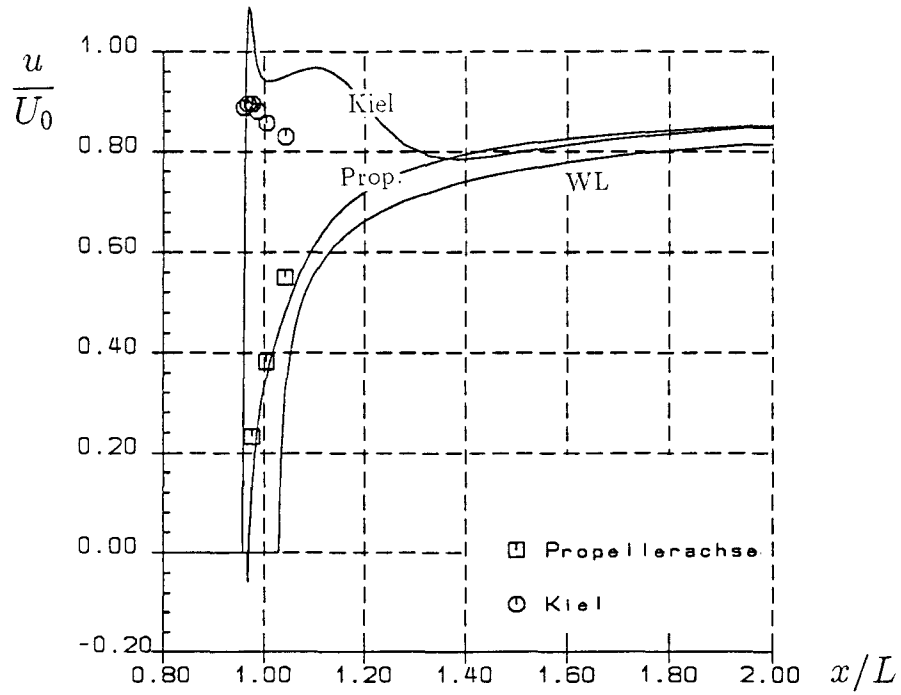


Abbildung 34: Verlauf der Axialgeschwindigkeit  $u/U_0$  in Längsrichtung für drei Höhen (Kiel, Propellerachse, Wasserlinie) auf der Symmetrie-Ebene im Nachlauf des HSVA-Tankers,  $R_n = 5 \cdot 10^6$ . Kurven: numerische Lösung. Symbole: Messung von Wieghardt und Kux 1980.

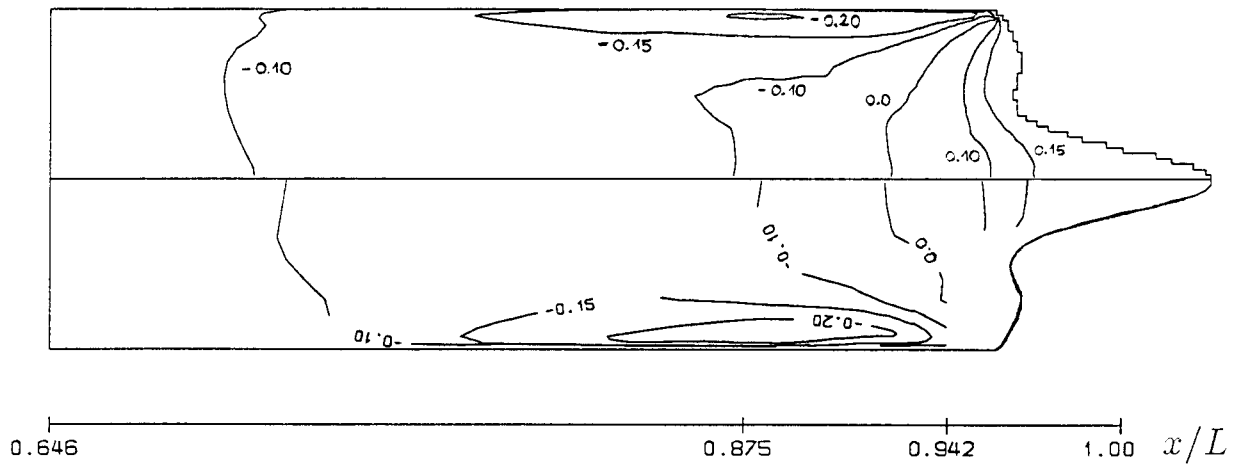


Abbildung 35: Isolinien des Druckbeiwertes  $C_p$  auf dem Rumpf des HSVA-Tankers, Seitenansicht,  $R_n = 5 \cdot 10^6$ . Oben: numerische Lösung. Unten: Messung von Hoffmann 1976.

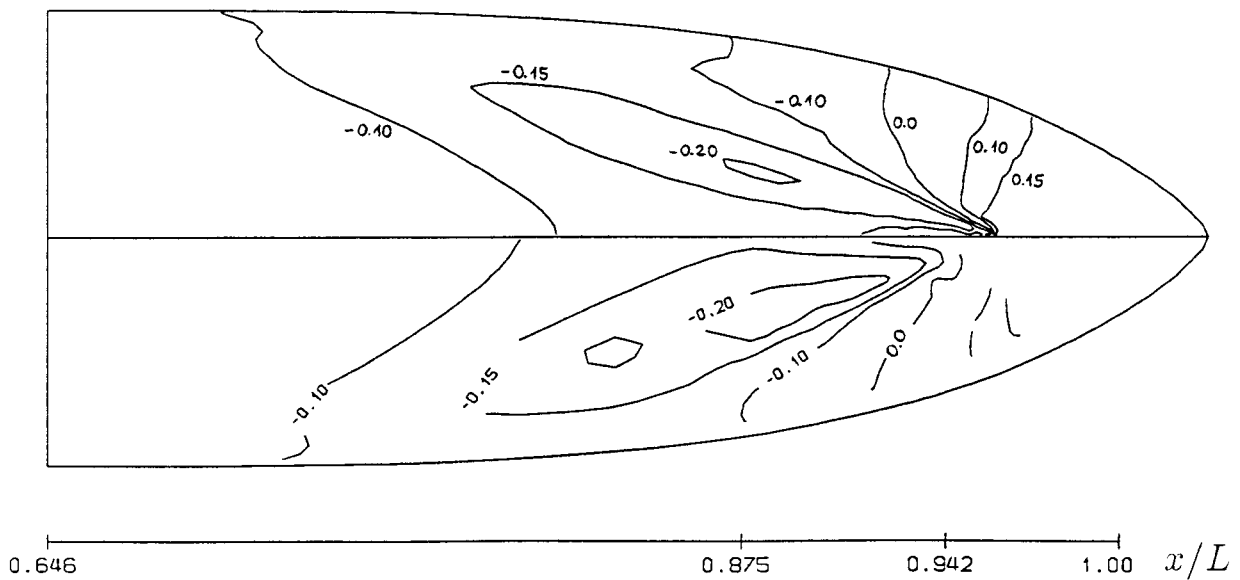


Abbildung 36: Isolinien des Druckbeiwertes  $C_p$  auf dem Rumpf des HSVA-Tankers, Bodenansicht,  $R_n = 5 \cdot 10^6$ . Oben: numerische Lösung. Unten: Messung von Hoffmann 1976.

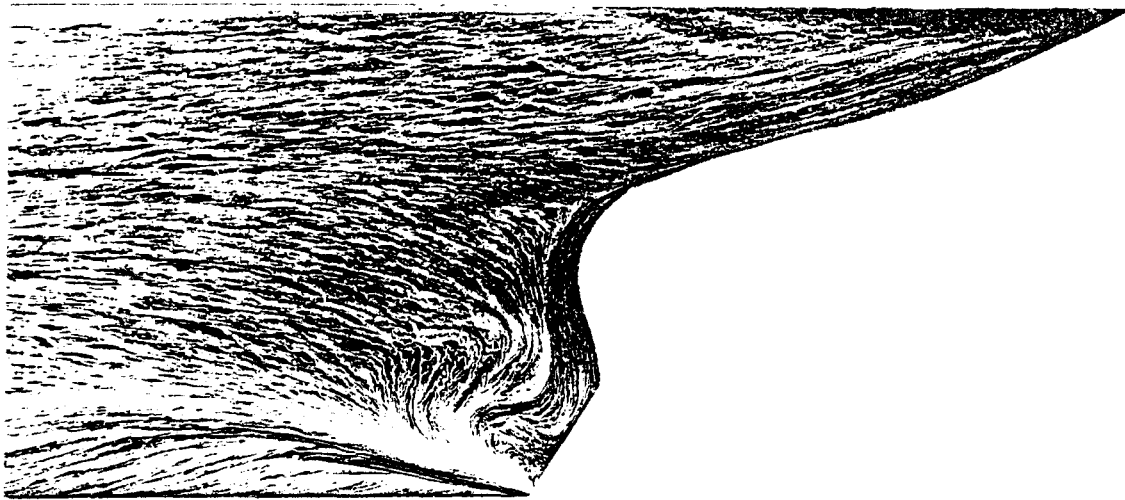


Abbildung 37: Foto eines Anstrichversuches am Doppelmodell des HSVA-Tankers im Windkanal des Instituts für Schiffbau der Universität Hamburg.

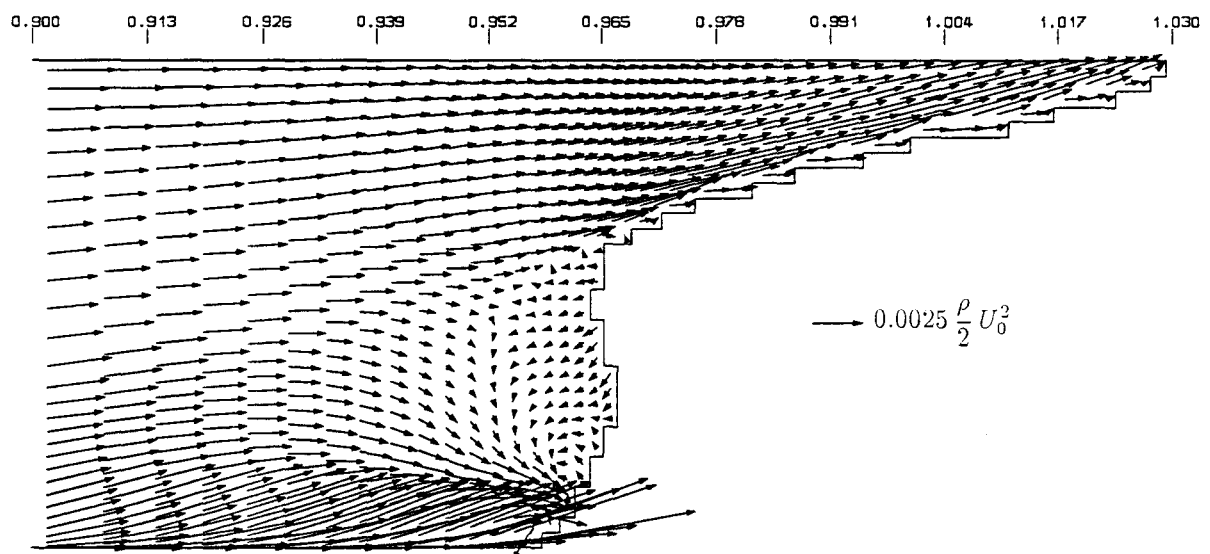


Abbildung 38: Richtungsfeld der Wandschubspannung für HSVA-Tanker,  $R_n = 5 \cdot 10^6$ . Projektion der gerechneten Wandschubspannung auf die  $x, z$  - Ebene.

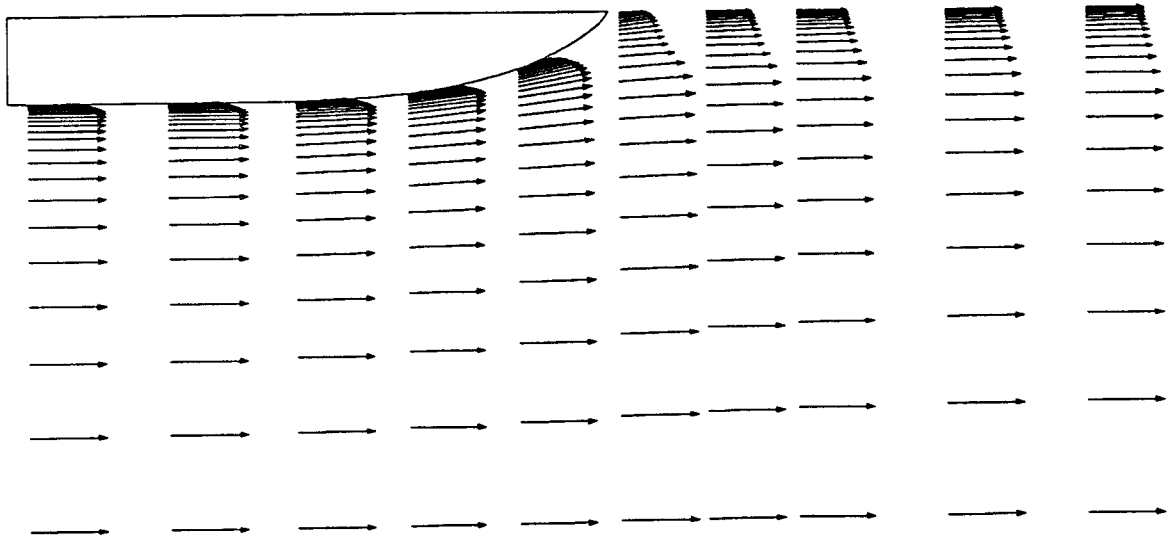


Abbildung 39: Richtungsfeld der Geschwindigkeit auf der Wasserlinienebene für HSVA-Tanker,  $R_n = 5 \cdot 10^6$ .

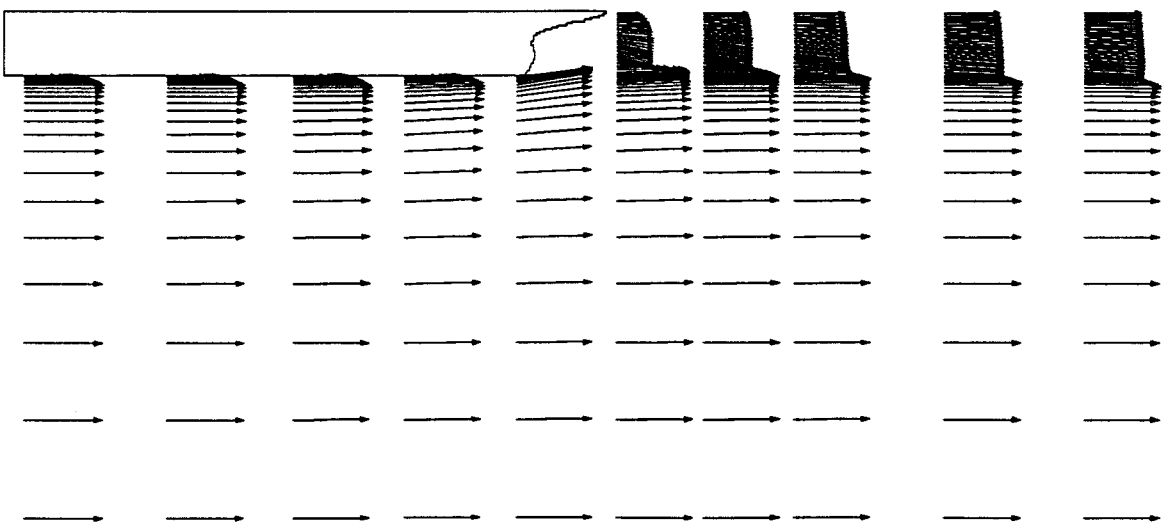


Abbildung 40: Richtungsfeld der Geschwindigkeit auf der Symmetrie-Ebene für HSVA-Tanker,  $R_n = 5 \cdot 10^6$ .

Abb.41 zeigt am Beispiel des Verlaufes von  $U_\tau/U_0$  entlang der Wasserlinie das Ergebnis einer Gitterabhängigkeitsuntersuchung der numerischen Lösung. Es wurde auf drei Gittern mit  $24 \cdot 8 \cdot 9$  (Kurve 1),  $48 \cdot 16 \cdot 18$  (Kurve 2) und  $96 \cdot 32 \cdot 36$  (Kurve 3) Zellen gerechnet. Die zwei größeren Gitter wurden aus dem bisherigen Gitter durch (wiederholtes) Fortlassen jeder zweiten Gitterlinie in den drei krummlinigen Richtungen gewonnen. Der Abstand zwischen den Lösungen auf zwei aufeinanderfolgenden Gittern wird bei Gitterverfeinerung kleiner, wie man es von einem konvergenten Verfahren erwartet. Im Bereich  $x/L < 0.95$  kann man das Verhalten eines Verfahrens 2. Ordnung deutlich erkennen. Der bereits erwähnte Anstieg der Wandschubspannung im hinteren, oberen Heckbereich wird durch die Gitterverfeinerung bestätigt. Eine weitere Verfeinerung des Gitters auf  $192 \cdot 64 \cdot 72$  Zellen wäre vor allem im Bereich  $x/L > 0.95$  wünschenswert.

Abb.42 zeigt am Beispiel des Verlaufes von  $C_p$  entlang der Wasserlinie das Ergebnis einer Gebietsabhängigkeitsuntersuchung der numerischen Lösung. Es wurde auf drei in Radialrichtung unterschiedlich großen Gebieten gerechnet. Die Lage des Außenrandes ist  $r/L = 0.5$  (Kurve 1),  $r/L = 1.0$  (Kurve 2) und  $r/L = 1.5$  (Kurve 3). Alle drei Gitter sind im Bereich  $r/L \leq 0.5$  identisch. Aus dieser Untersuchung ergab sich die Notwendigkeit, das ursprüngliche Rechengebiet von einer halben auf eine Modelllänge in Radialrichtung zu vergrößern. Wie man aus Abb.42 erkennen kann, bringt eine weitere Vergrößerung des Rechengebiets auf  $r/L = 1.5$  keine nennenswerten Änderungen mehr. Die globale Übereinstimmung des  $C_p$ -Verlaufes mit den Meßdaten ist durch die Gebietserweiterung besser geworden. Eine Erweiterung des Gebiets stromabwärts von einer auf eineinhalb Modelllängen hinter dem Heck brachte keine nennenswerten Änderungen im interessierenden Bereich der Strömung.

Zur Erläuterung der Konvergenzgeschichte der Lösung werden in Abb.43 die im Laufe der Iteration (Residuen-Normen werden auf  $10^{-7}$  ihrer Anfangswerte reduziert) berechneten Widerstandsbeiwerte für das *Hinterschiff* des HSVA-Tanker-Modells gezeigt. Alle Beiwerte werden mit  $\frac{\rho}{2} U_0^2 S_0$  bestimmt.  $S_0$  ist die gesamte benetzte Fläche unterhalb der Wasserlinie. In der ersten Spalte ist der Iterationsschritt aufgetragen. In den Spalten 2, 3 und 4 sind der Gesamt- ( $C_T$ ), Reibungs- ( $C_F$ ) und zähigkeitsbedingte Druckwiderstandsbeiwert ( $C_{PV}$ ) aus einer Integration der Spannungen auf dem Rumpf. Die letzte Spalte zeigt den aus der globalen Impulserhaltung im gewählten Rechengebiet ermittelten Gesamtwiderstandsbeiwert.  $C_F$  konvergiert am schnellsten, gefolgt von  $C_{PV}$ . Dies kann man z.B. auch anhand der (hier nicht gezeigten) Entwicklung der Verläufe des Wanddruckes und der Wandschubspannung entlang der Wasserlinie erkennen. Für  $iter > 200$  fallen alle Verläufe praktisch aufeinander. Dagegen konvergiert der Beiwert  $C_T$  aus der globalen Impulserhaltung (letzte Spalte) viel langsamer und erreicht den Wert aus der Integration (zweite Spalte) erst allmählich. Die Ungleichheit dieser beiden Werte im Laufe der Iteration ist auf die Behandlung der Konvektionsflüsse zurückzuführen (s.4.2.2). Die konvergierte Lösung ist aber im Rahmen der erzielten Genauigkeit voll konservativ. Die langsame Konvergenz des  $C_T$ -Beiwertes aus der Impulsbetrachtung läßt sich anhand der Entwicklung des Verlaufes der Axialgeschwindigkeit in Längsrichtung auf der Symmetrieebene im Nachlauf des Schiffes auf der Höhe der Wasserlinie veranschaulichen, Abb.44. Erst nach 400 Iterationsschritten sind keine Änderungen mehr festzustellen.

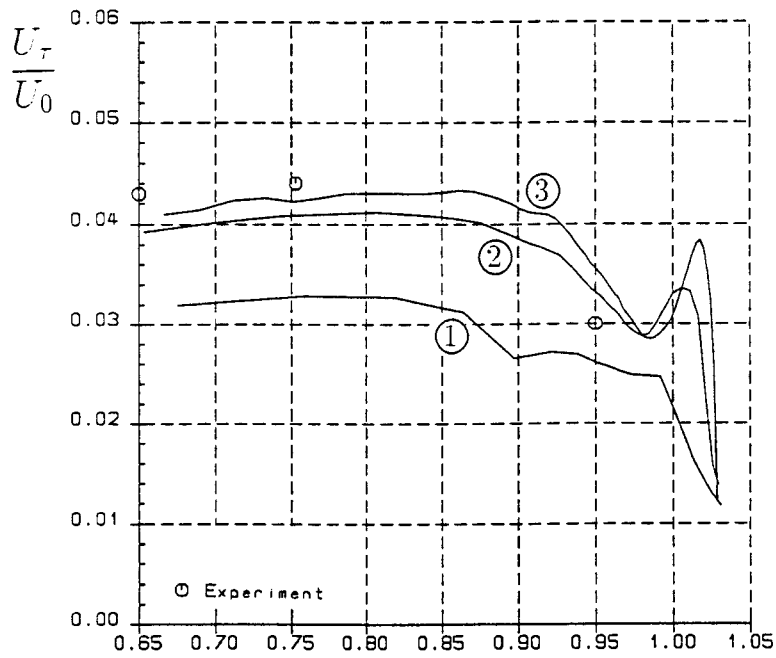


Abbildung 41: Verlauf der Wandschubspannungsgeschwindigkeit  $U_\tau/U_0$  entlang der Wasserlinie des HSVA-Tankers bei Gitterverfeinerung. Gitter 1:  $24 \cdot 8 \cdot 9$  Zellen. Gitter 2:  $48 \cdot 16 \cdot 18$  Zellen. Gitter 3:  $96 \cdot 32 \cdot 36$  Zellen.

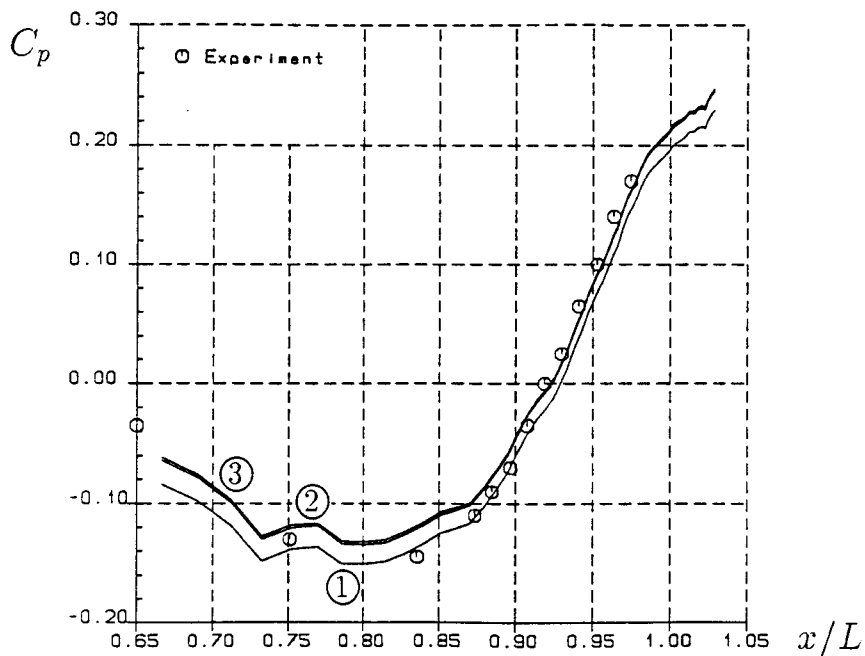


Abbildung 42: Verlauf des Druckbeiwertes  $C_p$  entlang der Wasserlinie des HSVA-Tankers bei Gebietserweiterung in Radialrichtung. Gebiet 1: bis  $r/L = 0.5$ . Gebiet 2: bis  $r/L = 1.0$ . Gebiet 3: bis  $r/L = 1.5$ .

| <i>iter</i> | $C_T \cdot 10^3$ | $C_F \cdot 10^3$ | $C_{PV} \cdot 10^3$ | $C_T \cdot 10^3$ |
|-------------|------------------|------------------|---------------------|------------------|
| 100         | 2.288            | 1.590            | 0.698               | 0.049            |
| 200         | 2.214            | 1.585            | 0.629               | 1.308            |
| 400         | 2.203            | 1.585            | 0.618               | 2.124            |
| 600         | 2.203            | 1.585            | 0.618               | 2.200            |
| 800         | 2.203            | 1.585            | 0.618               | 2.204            |

Abbildung 43: Konvergenzgeschichte der Widerstandsbeiwerte für HSVA-Tanker, Hinterschiff,  $R_n = 5 \cdot 10^6$ . Spalten 2 - 4: aus Integration. Letzte Spalte: aus Impulsbetrachtung.

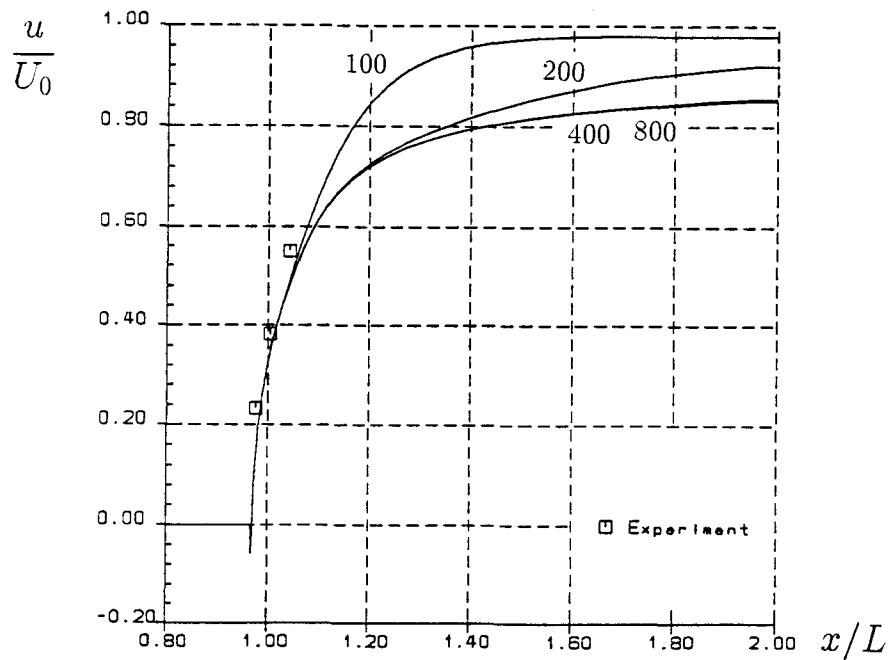


Abbildung 44: Verlauf der Axialgeschwindigkeit  $u/U_0$  in Längsrichtung auf Höhe der Wasserlinie auf der Symmetrie-Ebene im Nachlauf des HSVA-Tankers nach 100, 200, 400 und 800 Iterationsschritten.

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

Es wird ein Verfahren zur Berechnung turbulenter Schiffsumströmungen beschrieben und seine Möglichkeiten durch den Vergleich mit experimentellen Daten untersucht. Die Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen und die Kontinuitätsgleichung in den kartesischen Geschwindigkeitskomponenten werden nach einem Finite-Volumen-Verfahren auf einem randangepaßten Gitter diskretisiert. Ein strukturiertes 3D-Gitter für das gesamte Rechengebiet wird numerisch erzeugt. Es wird ein algebraisches Turbulenzmodell angewendet und auf die Benutzung von Wandfunktionen verzichtet. Die Konvektionsterme werden durch ein Stromauf-Differenzenschema 2. Ordnung (LUDS) und die Diffusionsterme durch zentrale Differenzen (CDS) approximiert. Zur Vermeidung von numerisch bedingten Druckoszillationen aufgrund der gewählten nichtversetzten Anordnung der Strömungsvariablen im Gitter wird eine spezielle Interpolationstechnik der Massenflüsse nach Rhie und Chow eingesetzt. Das resultierende nichtlineare algebraische Gleichungssystem wird nach der SIMPLE-Methode iterativ gelöst. Die wegen des teilweise stark nichtorthogonalen Gitters mit extremen Zellseitenverhältnissen nicht zu vernachlässigenden Quergradiententerme der Druckkorrekturgleichungen werden in einer zweiten Druckkorrektur berücksichtigt. Das Verfahren wird auf den Fall eines bei konstanter Geschwindigkeit geradeaus fahrenden Schiffmodells, ohne Berücksichtigung der freien Oberfläche, angewendet. Es werden nur Hinterschiffsumströmungen berechnet. Die Ergebnisse für das Wigley-Schiff und den HSVA-Tanker zeigen in vieler Hinsicht gute Übereinstimmung mit Experimenten. Der Modellwiderstand und der Propellerzustrom können noch nicht mit ausreichender Genauigkeit vorhergesagt werden.

Um die Qualität der Ergebnisse weiter zu verbessern, erscheinen Bemühungen in folgenden Richtungen sinnvoll:

- Einsatz eines Turbulenzmodells, welches (weiterhin ohne Wandfunktionen) die physikalischen Eigenschaften einer Hinterschiffsumströmung besser wiedergibt.
- Implementierung der Blockstrukturierung, um bei gleicher Zellanzahl eine bessere Auflösung des Strömungsgebiets und bessere Gitter zu ermöglichen.
- Berechnung der Umströmung des ganzen Schiffes statt der Hinterschiffsumströmung, um die Abhängigkeit von den Einströmwerten zu vermeiden und damit eine Widerstandsprognose zu ermöglichen. Dabei entstehen wegen des laminar-turbulenten Umschlages neue Fragen bezüglich der Turbulenzmodellierung im Bugbereich.
- Implementierung der Mehrgittertechnik, um den Rechenaufwand zu reduzieren und das Verfahren robuster zu machen. Dabei könnte eine veränderte SIMPLE-Prozedur Druck und Geschwindigkeiten blockweise implizit lösen, um bessere Glättungseigenschaften zu erreichen.

## Literatur

- [1] Anderson D.A., Tannehill J.C., Pletcher R.H.,  
*Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, McGraw-Hill 1984
- [2] Aris R.,  
*Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*, Prentice-Hall 1962
- [3] Baldwin B.S., Lomax H.,  
*Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows*, AIAA Paper 78-257, 1978
- [4] Brandt A.,  
*Multi-Level Adaptive Solutions to Boundary-Value Problems*, Mathematics of Computation Vol.31 No.138, April 1977
- [5] Cebeci T., Smith A.M.O.,  
*Analysis of Turbulent Boundary Layers*, Academic Press 1974
- [6] Chen H.C., Patel V.C.,  
*Calculation of Stern Flows by a Time-Marching Solution of the Partially-Parabolic Equations*, 15th ONR Symp. on Naval Hydrodyn., August 1984 Hamburg
- [7] Chen H.C., Patel V.C.,  
*Laminar Flow at the Trailing Edge of a Flat Plate*, AIAA Journal Vol.25, Juli 1987
- [8] Chao K.Y., Lammers G., Laudan J.,  
*Entwicklung und Verifikation numerischer Verfahren zur Antriebsleistungsprognose*, HSVA Bericht 1574, Mai 1991
- [9] Coles D.E., Hirst E.A. (eds.),  
*Computation of Turbulent Boundary Layers*, 1968 AFOSR-IFP-Stanford Conference, 1968 Stanford
- [10] Collatz G., Meyerhoff K.,  
*Systematische Widerstands- und Propulsionsversuche mit Modellen großer Völligkeit*, FDS Bericht 23, 1971
- [11] Cura Hochbaum A.J.,  
*Three-Dimensional Elliptic Grid Generation with a Multigrid Method*, Third Pan-American Congress in Applied Mechanics PACAM, Januar 1993 Sao Paulo
- [12] Eatock-Taylor R.,  
*From Froude to the Supercomputer: Modelling Marine Vehicles in Waves*, The Royal Academy of Engineering, August 1992 London
- [13] Hackbusch W., Trottenberg U. (eds.),  
*Multigrid Methods*, Lecture Notes in Mathematics Vol.960, Springer-Verlag 1982

- [14] Harlow F.H., Welch J.E.,  
*Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface*, The Physics of Fluids Vol.8 No.12, 1965
- [15] Hess J.L., Smith A.M.O.,  
*Calculation of Non-Lifting Potential Flow about Arbitrary Three-Dimensional Bodies*, Journal of Ship Research Vol.8 No.2, 1964
- [16] Hino T.,  
*Computation of Free Surface Flow around an Advancing Ship by the Navier-Stokes Equations*, 5th Int. Conf. on Num. Ship Hydrodyn., September 1989 Hiroshima
- [17] Hinze J.O.,  
*Turbulence*, McGraw-Hill 1959
- [18] Hoekstra M., Raven H.C.,  
*Ship Boundary Layer and Wake Calculation with a Parabolised Navier-Stokes Solution System*, 4th Int. Conf. on Num. Ship Hydrodyn., September 1985 Washington
- [19] Hoffmann H.P.,  
*Untersuchung der 3-dimensionalen, turbulenten Grenzschicht an einem Schiffsdoppelmodell im Windkanal*, Institut für Schiffbau der Universität Hamburg, Bericht 343, 1976
- [20] Issa R.I.,  
*Solution of the Implicitly Discretised Fluid Flow Equations by Operator-Splitting*, Journal of Comp. Physics Vol.62, 1985
- [21] Ju S., Patel V.C.,  
*A Numerical Approach for Predicting the Total Resistance and Nominal Wakes of Full-Scale Tankers*, 19th ONR Symp. on Naval Hydrodyn., August 1992 Seoul
- [22] Khosla P.K., Rubin S.G.,  
*A Diagonally Dominant Second-Order Accurate Implicit Scheme*, Computers and Fluids Vol.2, 1974
- [23] Kordulla W., Vinokur M.,  
*Efficient Computation of Volume in Flow Predictions*, AIAA Journal Vol.21 No.6, Juni 1983
- [24] Kux J., Söding H.,  
*Möglichkeiten und Grenzen der Berechnung turbulenter Schiffsumströmungen*, Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft, 84. Band, Springer-Verlag 1990
- [25] Larsson L. (ed.)  
Int. Symp. on Ship Viscous Resistance, 1978 Göteborg
- [26] Larsson L. (ed.)  
*Ship Boundary Layers*, 1980 SSPA-ITTC Workshop, 1981 Göteborg

- [27] Larsson L., Patel V.C., Dyne G. (eds.)  
*Ship Viscous Flow*, 1990 SSPA-CTH-IIHR Workshop, 1991 Göteborg
- [28] Launder B.E., Spalding D.B.,  
*The Numerical Computation of Turbulent Flows*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering Vol.3, 1974
- [29] Leonard B.P.,  
*A Stable and Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering Vol.19, Juni 1979
- [30] Majumdar S.,  
*Role of Underrelaxation in Momentum Interpolation for Calculation of Flow with Nonstaggered Grids*, Numerical Heat Transfer Vol.13, 1988
- [31] Majumdar S., Rodi W., Schönung B.,  
*Calculation Procedure for Incompressible Three-Dimensional Flows with Complex Boundaries*, Notes on Numerical Fluid Mechanics Vol.25, 1989
- [32] Miller T.F., Schmidt F.W.,  
*Use of a Pressure-Weighted Interpolation Method for the Solution of the Incompressible Navier-Stokes Equations on a Nonstaggered Grid System*, Numerical Heat Transfer Vol.14, 1988
- [33] Miyata H., Zhu M., Watanabe O.,  
*Numerical Study on a Viscous Flow with Free-Surface Waves about a Ship in Steady Straight Course by a Finite-Volume Method*, Journal of Ship Research Vol.36 No.4, 1992
- [34] NUMET'91, *Numerische Methoden zur Berechnung von Strömungs- und Wärmeübergangsproblemen*, Kurzlehrgang an der Universität Erlangen-Nürnberg, Oktober 1991 Erlangen
- [35] Patankar S.V., Spalding D.B.,  
*A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows*, Int. Journal Heat and Mass Transfer Vol.15, 1972
- [36] Patankar S.V.,  
*Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw-Hill 1980
- [37] Patel V.C., Chen H.C.,  
*Turbulent Wake of a Flat Plate*, AIAA Journal Vol.25 No.8, August 1987
- [38] Patel V.C., Chen H.C., Ju S.,  
*Solutions of the Fully-Elliptic Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equations and Comparisons with Experiments*, IIHR Report 323, University of Iowa, April 1988

- [39] Patel V.C.,  
*Ship Stern and Wake Flows: Status of Experiment and Theory*, 17th ONR Symp. on Naval Hydrodyn., September 1988 Den Haag
- [40] Patel V.C., Ju S., Lew J.M.,  
*Viscous Flow Past a Ship in a Cross Current*, 18th ONR Symp. on Naval Hydrodyn., August 1990 Ann Arbor
- [41] Patel V.C. (ed.),  
6th Int. Conf. on Num. Ship Hydrodyn., August 1993 Iowa City
- [42] Perić M.,  
*A Finite Volume Method for the Prediction of Three-Dimensional Fluid Flow in Complex Ducts*, Ph.D. Thesis, University of London, 1985
- [43] Raithby G.D.,  
*A Critical Evaluation of Upstream Differencing Applied to Problems Involving Fluid Flow*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering Vol.9, 1976
- [44] Raithby G.D.,  
*Skew Upstream Differencing Schemes for Problems Involving Fluid Flow*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering Vol.9, 1976
- [45] Rhie C.M., Chow W.L.,  
*Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation*, AIAA Journal Vol.21 No.11, November 1983
- [46] Sarda O.P.,  
*Turbulent Flow Past Ship Hulls - An Experimental and Computational Study*, Ph.D. Thesis, University of Iowa, 1986
- [47] Schlichting H.,  
*Grenzschichttheorie*, Verlag G. Braun 1965
- [48] Schönung B.,  
*Numerische Strömungsmechanik*, Springer-Verlag 1990
- [49] Shaw G.J., Sivaloganathan S.,  
*On the Smoothing Properties of the SIMPLE Pressure-Correction Algorithm*, Int. Journal for Num. Methods in Fluids Vol.8, 1988
- [50] Söding H., Gerlach E.,  
*Benutzerhandbuch für das Programm EUMEDES*, Institut für Schiffbau der Universität Hamburg, Schrift 2362, 1987
- [51] Stüben K., Linden J.,  
*Multigrid Methods: An Overview with Emphasis on Grid Generation Processes*, Arbeitspapiere der Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung 207, Mai 1986

- [52] Thole C., Trottenberg U.,  
*Basic Smoothing Procedures for the Multigrid Treatment of Elliptic 3D-Operators*,  
Arbeitspapiere der Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung 141, März  
1985
- [53] Thompson J.F.,  
*Grid Generation Techniques in Computational Fluid Dynamics*, AIAA Journal Vol.22  
No.11, November 1984
- [54] Thompson J.F., Warsi Z.U.A., Wayne Mastin C.,  
*Numerical Grid Generation - Foundations and Applications*, North-Holland 1985
- [55] Tzabiras G.D., Loukakis T.A.,  
*A method for Predicting the Flow around the Stern of Double Ship Hulls*, Int. Ship-  
building Progress No.345, 1983
- [56] Tzabiras G.D.,  
*Resistance and Self-Propulsion Numerical Experiments on Two Tankers at Model  
and Full Scale*, Ship Technology Research Vol.40, 1993
- [57] Van Doormaal J.P., Raithby G.D.,  
*Enhancements of the SIMPLE Method for Predicting Incompressible Fluid Flows*,  
Numerical Heat Transfer Vol.7, 1984
- [58] Vinokur M.,  
*An Analysis of Finite-Difference and Finite-Volume Formulations of Conservation  
Laws*, NASA Contractor Report 177416, Juni 1986
- [59] Webster W.C.,  
*The Flow about Arbitrary Three-Dimensional Smooth Bodies*, Journal of Ship Rese-  
arch Vol.19 No.4, 1975
- [60] Wieghardt K., Kux J.,  
*Nomineller Nachstrom auf Grund von Windkanalversuchen*, Jahrbuch der Schiffbau-  
technischen Gesellschaft, 74. Band, Springer-Verlag 1980
- [61] Zhu J., Rodi W.,  
*A Low Dispersion and Bounded Convection Scheme*, Computer Methods in Applied  
Mechanics and Engineering 92, 1991