

85 | September 1961

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

W. Blendermann

**Platte und Wirbelpaar als
mathematisches Bild der quer
angeströmten unendlich langen,
ebenen Platte**

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

Platte und Wirbelpaar als mathematisches Bild der quer angeströmten unendlich langen, ebenen Platte

W. Blendermann, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1961

© Technische Universität Hamburg-Harburg
Schriftenreihe Schiffbau
Schwarzenbergstraße 95c
D-21073 Hamburg

<http://www.tuhh.de/vss>

VW: -
SW: Platte
Wirbel: Potential

Platte und Wirbelpaar als mathematisches Bild der quer
angeströmten unendlich langen, ebenen Platte.

An den Kanten einer quer zu ihrer Breite bewegten Platte bilden sich Unstetigkeitsflächen aus, die sich zu spiraligen Wirbeln aufspulen. Dieses Problem ist in der älteren und neueren Literatur verschiedentlich aufgegriffen worden. Allerdings begnügen sich alle diese Arbeiten damit, den Aufspulvorgang der Trennfläche zu verfolgen und die Bahn des Winkelkerns zu ermitteln, wobei die Platte ruckartig in Bewegung gesetzt und dann mit konstanter Geschwindigkeit bewegt wird.

Wirbelbahnen für beschleunigte Bewegung und die dabei auftretenden Plattenwiderstände (bzw. der Druckverlauf über die Platte) sind bisher noch nicht untersucht worden.

In diesem Bericht wird ein sehr einfaches Modell für den Strömungsvorgang gewählt: das beobachtete Wirbelgebilde wird durch ein Wirbelpaar, bestehend aus Potentialwirbeln, ersetzt. Es werden die qualitativen und, sofern möglich, auch quantitative Unterschiede zwischen Modell und Wirklichkeit, bzw. Modell und Spiralwirbeln angegeben. Es wird versucht, die Frage nach der Güte des benutzten mathematischen Bildes zu beantworten. Die Ergebnisse der Rechnung werden mit Versuchen verglichen, die im Institut für Schiffbau der Universität Hamburg an beschleunigt bewegten Platten durchgeführt wurden.

1. Die Flüssigkeitsbewegung um eine ebene Platte, ihre mathematische Erfassung.	S. 4
1.1. Flüssigkeitsbewegung um die ebene Platte	4
1.2. Bedingungen und Annahmen für die mathematische Behandlung	4
1.3. Diskussion der Abbildungsfunktion	5
2. Ansatz für die Berechnung der ebenen Strömung um die Platte.	6
2.1. Kantenbedingung	6
2.2. Das komplexe Potential der Strömung um den Kreiszylin- der bzw. die Platte.	7
2.3. Analytische Form der Kantenbedingung	7
3. Quasistationärer Zustand	9
3.1. Geschwindigkeits- und Druckverlauf über die Platte	9
3.2. Stationärer Druckwiderstand durch Integration des Druckverlaufes über die Platte.	10
3.3. Stationärer Druckwiderstand nach der Lagallyschen For- mel	12
3.4. Geschwindigkeit am Ort des Winkels	12
3.5. Vergleich des c_p -Wertes nach 3.2 und 3.3.	16
4. Widerstand der Platte in instationärer Strömung.	17
4.1. Die auf einen bewegten Körper ausgeübte Kraft bei Anwesenheit von Wirbeln	17
4.2. Gesamtimpuls des bewegten Kreiszylinders	19
4.3. Gesamtimpuls der bewegten Platte	22
4.4. Gesamtimpuls des Kreiszylinders bzw. der Platte (2. Rechnung)	23
4.5. Gesamtimpuls der bewegten Platte in bipolaren Koordi- naten der ζ -Ebene	25
4.6. Widerstand der beschleunigt bewegten Platte.	26
5. Bemerkungen zu: L.Föppl 'Wirbelbewegung hinter einem Kreis- zylinder'.	27
5.1. Zum Gesamtimpuls des bewegten Kreiszylinders	27
5.2. Zur Wirbelbewegung hinter dem Kreiszylinder	28
5.3. Zur Erweiterung auf die Strömung um die unendlich lange, ebene Platte	30

	S.
6. Versuchsauswertung	31
6.1. Versuchsbeschreibung	31
6.2. Theoretischer Widerstandsbeiwert aus der experimen- tellen Wirbellage; experimenteller Widerstandsbeiwert; stationärer Druckwiderstand	31
6.3. Untersuchung einzelner Versuchsreihen	33
6.4. Vergleich der Stromlinienbilder aus Versuch und Rech- nung	34
6.5. Unzulänglichkeit der Theorie	35
7. Zusammenfassung	35
8. Literatur	37

1. Die Flüssigkeitsbewegung um eine ebene Platte; ihre mathematische Erfassung.

1.1. Flüssigkeitsbewegung um die ebene Platte

Bei der Umströmung einer quer zu ihrer Breite bewegten Platte löst sich mit Bewegungsbeginn an jeder Kante ein Wirbel ab, der bei wachsender Wirbelstärke von der Platte mit einer Geschwindigkeit abrückt, die im Vergleich zu derjenigen der Platte klein ist. Zu Beginn der Bewegung ist die Lage des Wirbelpaares symmetrisch. Im weiteren Umlauf tritt jedoch eine völlige Änderung ein: das Wirbelpaar gibt seine symmetrische Lage auf, es entstehen abwechselnd an den Kanten neue Wirbel, die in Form zweier unregelmäßiger Wirbelstraßen hinter der Platte weiterwandern.

Dieser Bericht befaßt sich mit dem Strömungsbeginn, solange die Lage des Wirbelpaares symmetrisch ist. Die Platte wird aus der Ruhe heraus beschleunigt bewegt.

1.2. Bedingungen und Annahmen für die mathematische Behandlung.

Die Flüssigkeit wird als unzusammendrückbar und homogen vorausgesetzt, die Reibung, die für die Entstehung der Wirbel und den hier interessierenden Bewegungsablauf nicht berücksichtigt zu werden braucht, werde vernachlässigt. Die Platte sei unendlich lang, so daß sich für alle Schichten das gleiche Strömungsbild ergibt.

Die Ebene in der sich die Platte befindet, sei die komplexe ζ -Ebene. Der Koordinatenursprung liege in der Mitte der Platte, die mit der imaginären Achse zusammenfallen soll.

Zunächst seien Platte und Flüssigkeit in Ruhe, dann werde die Platte in Bewegung gesetzt, oder, gesehen vom Standpunkt des relativen Beobachters, mit zeitlich veränderlicher Geschwindigkeit angeströmt. Unter Voraussetzung wirbelfreier Potentialströmung erhielte man an den Kanten unendlich große Geschwindigkeit, infolgedessen unendlich großen negativen Druck, der jedoch in einer realen Flüssigkeit nicht auftreten kann.

Man muß also die Bedingung der Stetigkeit fallenlassen und stattdessen fordern, daß die Geschwindigkeit an den Kanten der Platte während des ganzen zeitlichen Bewegungsablaufes endlich

bleibt. Diese Bedingung wird dadurch erfüllt, daß man die Ablösung einer Unstetigkeitsfläche von der Kante annimmt, deren Betrag des Geschwindigkeitssprunges die dort von der Potentialtheorie geforderte unendlich große Geschwindigkeit endlich werden läßt. Hier soll allerdings die gesamte Zirkulation dieser Unstetigkeitsfläche, die einer Wirbelschicht entspricht, im Kern eines Potentialwirbels vereinigt gedacht werden. Durch Fernwirkung des Winkels bleibt die Geschwindigkeit an der Plattenkante endlich.

1.3. Diskussion der Abbildungsfunktion

Um die Umströmung der Platte der Rechnung zugänglich zu machen, wird die Platte derartig konform abgebildet, daß die Abbildung keine Kante besitzt (Abb.1).

Diese Bedingung wird durch die analytische Funktion

$$\zeta = z - \frac{1}{z} \quad (1)$$

erfüllt, deren Umkehrung

$$z = \frac{1}{2}(\zeta + \sqrt{\zeta^2 + 4}) \quad (2)$$

lautet.

Sie vermittelt die Abbildung der ζ -Ebene in die z -Ebene, wobei die Strecke von $-2i$ bis $+2i$ in der ζ -Ebene, also die Platte, in den Kreis mit dem Radius $r=1$ in der z -Ebene übergeht. Die Strömung um die Platte geht konform in die Strömung um den Kreis über.

Der Radius des Kreises in der z -Ebene ist die Maßeinheit der Koordinaten der ζ - und z -Ebene.

Die Diskussion der Abbildungsfunktion ergibt, daß das Unendliche der ζ -Ebene unverändert in das Unendliche der z -Ebene übergeht. Die Geschwindigkeit im Unendlichen ist also in beiden Ebenen gleich. Mit

$$z = x + iy = Re^{i\varphi}$$

und

$$\zeta = \xi + i\eta = \rho e^{i\vartheta}$$

lauten die Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned}\xi &= \varrho \cos \theta = \lambda \cos \varphi \\ \eta &= \varrho \sin \theta = K \sin \varphi\end{aligned}\tag{3}$$

λ und K sind abkürzende Symbole für

$$\lambda = R - \frac{1}{R} ; K = R + \frac{1}{R}\tag{4}$$

Sie sind durch die Beziehung

$$K^2 - \lambda^2 = 4\tag{5}$$

miteinander verknüpft. Konzentrische Kreise der z -Ebene gehen in konfokale Ellipsen der ζ -Ebene über

$$\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{K}\right)^2 = 1\tag{6}$$

Die Halbgeraden $\arg z = \varphi$ der z -Ebene ergeben die Schar der konfokalen Hyperbeln

$$-\left(\frac{\xi}{2 \cos \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{2 \sin \varphi}\right)^2 = 1\tag{7}$$

deren Brennpunkte in $\zeta = \pm 2i$ liegen.

2. Ansatz für die Berechnung der ebenen Strömung um die Platte

2.1. Kantenbedingung

Die den Kanten $\zeta = \pm 2i$ entsprechenden Punkte der Abbildung sind $z = \pm i$ (Abb.1). In diesen Punkten ist die Vergrößerung durch die Abbildung unendlich. Jeder endlichen Geschwindigkeit in $z = \pm i$ entspricht damit eine unendlich große Geschwindigkeit an den Kanten der Platte. Die Geschwindigkeit in $\zeta = \pm 2i$ soll jedoch endlich sein, eine Forderung, die dadurch zu erfüllen ist, daß die Geschwindigkeit in den entsprechenden Punkten der Abbildung gleich Null gesetzt wird. Durch diese Bedingung, die während des ganzen zeitlichen Verlaufes erfüllt sein muß, kann die Größe der Zirkulation für jeden Zeitpunkt der Bewegung berechnet werden.

2.2. Das komplexe Potential der Strömung um den Kreiszyylinder bzw. die Platte

Das komplexe Potential, das sich zusammensetzt aus der stetigen, zirkulationsfreien Strömung um den Körper und der durch die Winkel hervorgerufenen Strömung, lautet, in denselben Koordinaten ausgedrückt, für beide Ebenen gleich.

Das komplexe Potential der stetigen, zirkulationsfreien Strömung ist durch die Gleichung

$$W = U \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (8)$$

gegeben.

Die Koordinaten der beiden Wirbelzentren seien $R_0 e^{i\varphi_0}$ und $R_0 e^{-i\varphi_0}$ (Abb.1). Der Index (o) kennzeichnet im folgenden die Koordinaten der Wirbelzentren. Damit die Kreiskontur, folglich auch die Platte, in der Gesamtströmung Stromlinie (Trennungsfläche) bleibt, müssen die am Kreis gespiegelten inneren Wirbel an den Orten $\frac{1}{R_0} e^{i\varphi_0}$ hinzugefügt werden.

Das komplexe Potential dieser Wirbel wird durch

$$w = i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{(z - R_0 e^{i\varphi_0})(z - \frac{1}{R_0} e^{-i\varphi_0})}{(z - \frac{1}{R_0} e^{i\varphi_0})(z - R_0 e^{-i\varphi_0})} \quad (9)$$

dargestellt. Die Summe der Gleichungen (8) und (9) ergibt das komplexe Potential, das Parallelströmung und Wirbelströmung umfaßt,

$$W_{\text{ges}} = U \left(z + \frac{1}{z} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{(z - R_0 e^{i\varphi_0})(z - \frac{1}{R_0} e^{-i\varphi_0})}{(z - \frac{1}{R_0} e^{i\varphi_0})(z - R_0 e^{-i\varphi_0})} \quad (10)$$

2.3. Analytische Form der Kantenbedingung

Das Differential des komplexen Potentials Gl.(10) nach der komplexen Variablen ergibt die gespiegelte Geschwindigkeit an einem beliebigen Ort der z-Ebene.

$$\bar{v}^* = u^* - iv^* = \frac{dW_{ges}}{dz}$$

$$= U \left[\left(1 - \frac{1}{z^2}\right) + 2i\gamma \left(\frac{1}{z - R_0 e^{i\varphi_0}} - \frac{1}{z - \frac{1}{R_0} e^{i\varphi_0}} + \frac{1}{z - \frac{1}{R_0} e^{-i\varphi_0}} - \frac{1}{z - R_0 e^{-i\varphi_0}} \right) \right] \quad (11)$$

Darin wurde

$$\Gamma = 4\pi U \gamma \quad (12)$$

gesetzt. Auf dem Kreis mit dem Radius $r=1$ folgt die gespiegelte Geschwindigkeit der Beziehung

$$\left(\frac{\bar{v}}{U}\right)_k^* = 2\sin\varphi(\sin\varphi + i\cos\varphi) - 2\gamma \frac{4\lambda\sin\varphi\sin\varphi_0}{(K - 2\cos\varphi\cos\varphi_0)^2 - 4\sin^2\varphi\sin^2\varphi_0} (\sin\varphi + i\cos\varphi),$$

oder auch

$$\left(\frac{\bar{v}}{U}\right)_k^* = 2\sin\varphi(\sin\varphi + i\cos\varphi) - 2\gamma \frac{4\lambda\sin\varphi\sin\varphi_0}{[K - 2\cos(\varphi + \varphi_0)][K - 2\cos(\varphi - \varphi_0)]} (\sin\varphi + i\cos\varphi), \quad (13)$$

deren Realteil die x-Komponente der Geschwindigkeit darstellt,

$$\left(\frac{u^*}{U}\right)_k = 2\sin^2\varphi - 2\gamma \frac{4\lambda\sin\varphi\sin\varphi_0}{(K - 2\cos\varphi\cos\varphi_0)^2 - 4\sin^2\varphi\sin^2\varphi_0} \sin\varphi$$

Soll nun die Geschwindigkeit an den Kanten der Platte im betrachteten Augenblick endlich sein, so muß u^* in $z = \frac{1}{2}i$ der Abbildung (Abb.1) Null werden. Das ist die Kantenbedingung, die für einen beliebigen Zeitpunkt des Bewegungsablaufes die Wirbelstärke zu berechnen gestattet.

$$\left(\frac{u^*}{U}\right)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 2 - 2\gamma \frac{4\lambda\sin\varphi_0}{K^2 - 4\sin^2\varphi_0} = 0$$

Aufgelöst nach γ

$$\gamma = \frac{1}{4} \frac{K^2 - 4\sin^2\varphi_0}{\lambda\sin\varphi_0}$$

Da eine Verwechslung ausgeschlossen ist, kann in der Gleichung für γ der Index (o) fortgelassen werden.

Unter Verwendung von Gl.(5) nimmt der Ausdruck für γ die Form an

$$\gamma = \frac{1}{4} \frac{\lambda^2 + 4\cos^2 \varphi}{\lambda \sin \varphi} \quad (14)$$

Bei der konformen Abbildung bleibt die Größe der Zirkulation erhalten.

$$\Gamma_{\text{Abbildung}} = \Gamma_{\text{wirkliches System}}$$

Somit ergibt sich die Größe der Zirkulation nach Definitionsgleichung (12)

$$\Gamma = \pi U \frac{\lambda^2 + 4\cos^2 \varphi}{\lambda \sin \varphi} \quad (15)$$

3. Quasistationärer Zustand

3.1. Geschwindigkeits- und Druckverlauf über die Platte

Die gespiegelte Geschwindigkeit an einem beliebigen Ort der ζ -Ebene ist gegeben durch

$$\bar{v} = u - iv = \frac{dW_{\text{ges}}}{d\zeta} = \frac{dW_{\text{ges}}}{dz} \frac{dz}{d\zeta}$$

entlang der Platte

$$\bar{v}_p = \left(\frac{dW_{\text{ges}}}{d\zeta} \right)_p = \left(\frac{dW_{\text{ges}}}{dz} \right)_K \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_p$$

Darin ist

$$\left(\frac{dW_{\text{ges}}}{dz} \right)_K = \bar{v}_z^*$$

bereits ermittelt worden. Um den zweiten Differentialquotienten zu erhalten, ist Gl. (1) nach z zu differenzieren und davon der Kehrwert zu bilden.

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{z^2}{z^2 + 1} \quad (16)$$

Für die Platte wird

$$\left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_p = \frac{1}{2}(1 + itg\varphi). \quad (17)$$

Das Produkt der Gln. (13) und (17) ergibt \bar{v}_p

$$\left(\frac{\bar{v}}{U}\right)_p = \left[2\sin\varphi(\sin\varphi + i\cos\varphi) - 2\gamma \frac{4\lambda\sin\varphi\sin\varphi_0}{[k-2\cos(\varphi+\varphi_0)][k-2\cos(\varphi-\varphi_0)]} (\sin\varphi + i\cos\varphi) \right] \frac{1+i\operatorname{tg}\varphi}{2}$$

Gesucht ist v_p , der Imaginärteil der gespiegelten Geschwindigkeit.

$$\left(\frac{v}{U}\right)_p = \left(4\gamma \frac{\lambda\sin\varphi_0}{[k-2\cos(\varphi+\varphi_0)][k-2\cos(\varphi-\varphi_0)]} - 1 \right) \operatorname{tg}\varphi \quad (18)$$

Da die Platte Trennlinie ist, muß $u_p = 0$ sein. Aus der Bernoulli'schen Gleichung folgt für den Druckverlauf über die Platte

$$\frac{\Delta p}{\rho U^2} = 1 - \left(\frac{v}{U}\right)_p^2 \quad (19)$$

Geschwindigkeits- und Druckverlauf wurden für eine in den Versuchen beobachtete Wirbellage berechnet und in Abb. 7 und 8 aufgetragen.

3.2. Stationärer Druckwiderstand durch Integration des Druckverlaufes über die Platte.

Die Resultierende der auf die Platte ausgeübten Druckkräfte ist

$$p = \int \Delta p dF$$

Der Beiwert des Druckwiderstandes wird dann

$$c_p = \frac{p}{\rho U^2 F} = \frac{1}{\rho U^2 F} \int \Delta p dF = \frac{1}{4} \int \frac{\Delta p}{\rho U^2} d\eta$$

Die Tiefe der Platte sei '1'. Mit Gl. (19) erhält man für den Beiwert

$$c_p = \frac{1}{4} \int \left[1 - \left(\frac{v}{U}\right)_p^2 \right] d\eta = -\frac{1}{4} \int \left(\frac{v}{U}\right)_p^2 d\eta,$$

da, über Vor- und Rückseite der Platte genommen

$$\int_p d\eta = 0$$

sein muß.

Für die Platte gilt unter Verwendung von Polarkoordinaten der z-Ebene

$$\eta = 2\sin\varphi, \quad (20)$$

also

$$d\eta = 2\cos\varphi d\varphi$$

In Polarkoordinaten der z-Ebene und den entsprechenden Grenzen lautet das Druckintegral

$$c_p = \int_0^\pi \left(\frac{v}{U}\right)_p^2 \cos\varphi d\varphi$$

Für $\left(\frac{v}{U}\right)_p$ ist der Ausdruck Gl. (18) zu setzen. Die Substitution $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = t$ überführt das Integral in

$$c_p = 8 \int_{t=0}^{\infty} \left[\frac{4\gamma\lambda\sin\varphi_0(1+t^2)^2}{[(k+2\cos\varphi_0)t^2+4\sin\varphi_0t+k-2\cos\varphi_0][(k+2\cos\varphi_0)t^2-4\sin\varphi_0t+k-2\cos\varphi_0]} \right] \frac{t^2}{(1-t^2)(1+t^2)^2} dt.$$

Nacheiner Partialbruchzerlegung und Integration der einzelnen Summanden in den angegebenen Grenzen erhält man den Beiwert des stationären Widerstandes in Polarkoordinaten der z-Ebene

$$c_p = \frac{4\pi\cos\varphi}{\lambda^3} \frac{(\lambda^2+1)4\cos^2\varphi-\lambda^2}{\lambda^2+4\sin^2\varphi} \quad (21)$$

mit λ nach Gleichung (4). Der Index (0) für die Koordinaten des Wirbels ist wiederum als selbstverständlich fortgelassen worden.

Um den Widerstandsbeiwert der Platte für einen beliebigen Aufpunkt des Wirbelzentrums direkt berechnen zu können, muß Gl. (21) in Koordinaten der ζ -Ebene ausgedrückt werden. In diesem Fall ist es zweckmäßig, cartesische Koordinaten zu wählen.

$$c_p = \frac{4\pi\xi}{\lambda^3} \frac{4\xi^2 - (\xi^2 + \eta^2 - 4)}{\xi^2 + \eta^2} \quad (22)$$

Darin ist

$$\lambda^2 = \frac{1}{2} \left[(\xi^2 + \eta^2 - 4) + \sqrt{(\xi^2 + \eta^2 - 4)^2 + 16\xi^2} \right] \quad (23)$$

Aus Gl. (6) unter Verwendung von Gl. (5) zu setzen.

3.3. Stationärer Druckwiderstand nach der Lagallyschen Formel

Eine zweite Möglichkeit, den auf die Platte wirkenden stationären Strömungsdruck zu berechnen, bieten die Formeln für die Kraftwirkung auf Körper in strömender Flüssigkeit, die M. Lagally [9; 11] auf komplexe Koordinaten transformiert hat. Für den Fall von Platte und Wirbelpaar lautet der Ausdruck für den gespiegelten stationären Kraftvektor

$$\bar{P} = P_{\xi} - iP_{\eta} = i\varrho \Gamma (\bar{v}_{o1} - \bar{v}_{o2}),$$

worin \bar{v}_o die gespiegelte Geschwindigkeit am Ort des Wirbels ist.

Die Kraftkomponente in ξ -Richtung ist zu ermitteln nach

$$P_{\xi} = 2\varrho \Gamma v_o,$$

da $v_{o1} = -v_{o2}$. Sie ist auf die Tiefe '1' bezogen.

Der Widerstand wird dann mit Γ nach Gl. (12)

$$c_p = 4\pi\gamma \frac{v_o}{U} \quad (24)$$

3.4. Geschwindigkeit am Ort des Wirbels

Das Hauptziel des folgenden Abschnittes ist es, Antwort auf die Frage zu erhalten, ob es hinter der bewegten Platte einen geometrischen Ort gibt, an dem sich das Wirbelpaar gegenüber der Platte in Ruhe befinden kann. Dazu muß das Geschwindigkeitsfeld im quasistationären Zustand bekannt sein, das durch die Geschwindigkeit am Ort des Wirbels gebildet wird, wenn das Wirbelzentrum die ζ -Ebene bestreicht. Ob daraus auf das Verhalten des Wirbelpaares, insbesondere die Wirbelbahn geschlossen werden kann, soll späteren Überlegungen überlassen bleiben.

Die gespiegelte Geschwindigkeit an einem beliebigen Ort der

ζ -Ebene ist gegeben durch

$$\bar{v} = u - iv = \frac{dW_{ges}}{d\zeta} = \frac{dW_{ges}}{dz} \frac{dz}{d\zeta}$$

Darin sind $\frac{dW_{ges}}{dz}$ nach Gl. (11) und $\frac{dz}{d\zeta}$ nach Gl. (16) bereits früher angegeben worden. Es lautet also

$$\frac{\bar{v}}{U} = \left(1 - \frac{1}{z^2}\right) + 2i\gamma \left(\frac{1}{z - R_0 e^{i\varphi_0}} - \frac{1}{z - \frac{1}{R_0} e^{i\varphi_0}} + \frac{1}{z - \frac{1}{R_0} e^{-i\varphi_0}} - \frac{1}{z - R_0 e^{-i\varphi_0}} \right) \frac{z^2}{z^2 + 1} \quad (25)$$

Um aus der an einem beliebigen Ort der ζ -Ebene herrschenden Geschwindigkeit diejenige am Ort des Wirbels zu erhalten, muß die beliebige Koordinate durch die Aufpunkte des Wirbelkernes ersetzt werden. Der Wirbel selber wird entfernt, da die im Wirbelkern auftretende unendlich große drehende Geschwindigkeit nichts zur fortschreitenden Geschwindigkeit beiträgt.

Da die gewählte Abbildung Gl. (1) der z -Ebene in eine zwei-blättrige Riemannsche Fläche - eine davon, das Äußere des Kreises, ist die hier benutzte ζ -Ebene - eine Inversion enthält, ist bei der Abbildung eines Wirbels der z -Ebene zu beachten, daß der unendlich ferne Punkt der z -Ebene die Eigenschaften eines Wirbelpunktes hat. Das Zentrum der Inversion ist, wie man Gl. (2) entnimmt, $\zeta = 2i$. Bei der Abbildung eines Wirbelpaares verschwindet die Singularität in $\zeta = 2i$ nur, weil dort zwei feste Wirbel mit entgegengesetzt gleicher Zirkulation auftreten.

Läßt man jedoch in der z -Ebene einen der beiden Wirbel fort, um die durch den anderen Wirbel und die zirkulationsfreie Strömung an seinem Ort herrschende Geschwindigkeit zu ermitteln, so verschwindet auch einer der festen Wirbel. Dadurch tritt die Singularität in $\zeta = 2i$ wieder auf und beeinflusst die Strömung.

Wird also der Wirbel der z -Ebene mit der komplexen Koordinate $z_0 = R_0 e^{i\varphi_0}$ entfernt, so muß, um die Geschwindigkeit am Ort des entsprechenden Wirbels der ζ -Ebene zu erhalten, die an seinem Ort vom festen Wirbel in $\zeta = 2i$ induzierte Geschwindigkeit kom-

pensiert werden. Diese Geschwindigkeit erhält man gerade, wenn man von der abgebildeten Geschwindigkeit des Wirbels der z -Ebene im Punkt ζ die Geschwindigkeit des entsprechenden Wirbels der ζ -Ebene abzieht und dann $\zeta \rightarrow \zeta_0$, bzw. $z \rightarrow z_0$ gehen läßt.

Es ist also der Grenzwert

$$z \lim_{z \rightarrow z_0} \left(2i\gamma \frac{z^2}{z^2+1} \frac{1}{z-z_0} - 2i\gamma \frac{1}{\zeta-\zeta_0} \right)$$

zu bilden, für den man erhält

$$2i\gamma \frac{1}{z_0(z_0^2+1)} \frac{z_0^2}{z_0^2+1} \quad (26)$$

Das ist die Geschwindigkeit, die bei Entfernung des Wirbels in z_0 die Geschwindigkeit des festen Wirbels in der ζ -Ebene kompensiert.

Setzt man in Gl. (25) $z=z_0=R_0 e^{i\varphi_0}$ und berücksichtigt Gl. (26), so erhält man die in z_0 im quasistationären Zustand herrschende gespiegelte Geschwindigkeit

$$\frac{\bar{v}_0}{U} = \frac{u_0}{U} - i \frac{v_0}{U} = \left[\left(1 - \frac{1}{z_0^2} \right) + 2i\gamma \left(\frac{1}{z_0(z_0^2+1)} - \frac{1}{z_0 \frac{1}{R_0} e^{i\varphi_0}} + \frac{1}{z_0 \frac{1}{R_0} e^{-i\varphi_0}} - \frac{1}{z_0 - R_0 e^{-i\varphi_0}} \right) \right] \frac{z_0^2}{z_0^2+1}$$

Die Zerlegung in Real- und Imaginärteil ergibt die ξ -Komponente der am Ort des Wirbels im ersten Quadranten herrschenden Geschwindigkeit

$$\frac{u_0}{U} = \frac{\lambda \sqrt{\lambda^2+4} [4\sin^2\varphi(\lambda^2+3) - (\lambda^2+4)]}{4\sin^2\varphi(\lambda^2+4\cos^2\varphi)(\lambda^2+4\sin^2\varphi)} \quad (27)$$

und die η -Komponente

$$\frac{v_0}{U} = \frac{4\sin\varphi\cos\varphi [4\cos^2\varphi(\lambda^2+1) - \lambda^2]}{\lambda^2(\lambda^2+4\cos^2\varphi)(\lambda^2+4\sin^2\varphi)} \quad (28)$$

Der Index (0) ist als selbstverständlich fortgelassen worden.

Die Bedingung der Ruhelage für das Wirbelpaar ist durch

$$\bar{v}_0 = 0$$

gegeben, wovon Real- und Imaginärteil gleichzeitig zu Null werden müssen.

Aus Gl. (27) erhält man für $u_0 = 0$

$$4\sin^2\varphi(\lambda^2+3) - (\lambda^2+4) = 0$$

Also

$$\sin\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda^2+4}{\lambda^2+3}}$$

Es wird für

$$\lambda = 0 (R=1): \sin\varphi = \frac{1}{3}\sqrt{3}; \varphi = 35,26^\circ$$

$$\lambda \rightarrow \infty (R \rightarrow \infty): \sin\varphi = \frac{1}{2}; \varphi = 30^\circ$$

In cartesischen Koordinaten der ζ -Ebene lautet die Gleichung für $u_0 = 0$

$$\frac{\eta^2}{\frac{4}{3}} - \frac{\xi^2}{4} = 1$$

unter Verwendung von Gl. (3). $u_0 = 0$ stellt eine Hyperbel mit der η -Achse als Hauptachse dar. Sie hat die große Halbachse $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ und die kleine Halbachse 2. Ihre Exzentrizität beträgt $1 + \frac{4}{3}\sqrt{3}$.

Entsprechend erhält man aus Gl. (28) eine Kurve, auf der $v_0 = 0$ wird.

$$4\cos^2\varphi(\lambda^2+1) - \lambda^2 = 0$$

Damit

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda^2+1}}$$

Es wird für

$$\lambda = 0 (R = 1): \cos\varphi = 0; \varphi = 90^\circ$$

$$\lambda \rightarrow \infty (R \rightarrow \infty): \cos\varphi = \frac{1}{2}; \varphi = 60^\circ$$

Die transformation in Koordinaten der ζ -Ebene ergibt

$$\frac{\eta^2}{4} - \frac{\xi^2}{\frac{4}{3}} = 1$$

Ebenfalls $v_0=0$ stellt eine Hyperbel mit der η -Achse als Hauptachse dar. Ihre große Halbachse ist 2, ihre kleine $\frac{2}{3}\sqrt{3}$. Ihre Exzentrizität beträgt daher ebenfalls $\pm \frac{4}{3}\sqrt{3}$.

Die Geschwindigkeit am Ort des Wirbels ist also in der ganzen ζ -Ebene von Null verschieden (Abb.10). Somit gibt es hinter der ebenen Platte keinen geometrischen Ort, an dem das Wirbelpaar sich in Ruhe befinden könnte.

Für einige Punkte der ζ -Ebene ist der Vektor der Geschwindigkeit am Ort des Wirbels berechnet und in Abb.(10) nach Größe und Richtung eingetragen worden. Die Vektoren stellen nicht die Tangente an die beobachtete Wirbelbahn dar. Etwas anderes war auch nicht zu erwarten, da die Zeitabhängigkeit der Zirkulation unberücksichtigt geblieben ist und das beobachtete Wirbelpaar nur näherungsweise durch Potentialwirbel ersetzt werden kann. Ferner dürften sich Reibungs- und Zähigkeitseinflüsse bemerkbar machen, die hier vernachlässigt worden sind.

3.5. Vergleich des c_p -Wertes nach 3.2. und 3.3

Zur Kontrolle der Rechnung mag der für v_0 ermittelte Ausdruck Gl. (28) in die Lagallysche Formel eingesetzt werden. Der Ausdruck, der sich aus Gl. (24) für c_p ergibt muß mit Gl. (21) identisch sein.

$$c_p = 4\pi\gamma \frac{v_0}{U} = \frac{4\pi\cos\varphi [4\cos^2\varphi(\lambda^2+1) - \lambda^2]}{\lambda^3(\lambda^2+4\sin^2\varphi)}$$

mit γ nach der Kantenbedingung Gl. (14).

Beachtenswert ist, daß mit Hilfe der Lagallyschen Formel der stationäre Druckwiderstand der Platte wesentlich schneller berechnet werden konnte als aus der Druckverteilung über die Platte.

4. Widerstand der Platte in instationärer Strömung.

4.1. Die auf einen bewegten Körper ausgeübte Kraft bei Anwesenheit von Wirbeln.

In einem mit reibungsloser, unzusammendrückbarer Flüssigkeit erfüllter Raum befindet sich im Endlichen ein beliebig geformter Körper. Außerdem seien in der endlichen Umgebung des Körpers n Wirbelfäden vorhanden, die entweder geschlossen sein oder am Körper enden können. Die Flüssigkeit wird als drehungsfrei und bis auf die Wirbelfäden stetig vorausgesetzt. Im Unendlichen soll sich die Flüssigkeit in Form einer Parallelströmung bewegen.

Durch eine im Unendlichen liegende geschlossene Fläche F_∞ wurde eine bestimmte, im zeitlichen Bewegungsablauf unveränderliche Flüssigkeitsmenge herausgeschnitten (Abb.2). Die den Körper begrenzende Fläche sei F . Um auf das betrachtete Flüssigkeitsgebiet den Impulssatz anwenden zu können, hat man die Wirbelfäden durch Flächen F_n auszuschließen. Durch Verbindungsflächen F_n' , die beliebig gewählt werden können, wird schließlich der mehrfach zusammenhängende ^{Raum} einfach zusammenhängend gemacht.

Die auf den beliebig bewegten Körper ausgeübte Kraft wird nach H.Wagner [13]

$$\vec{p}_F = -\rho \frac{D}{Dt} \int_{F + \sum F_n'} \phi dF \quad (29)$$

Die über F_∞ und F_n erstreckten Integrale heben sich auf bzw. werden zu Null. Die großen Buchstaben des Differentialquotienten dienen als Kennzeichen der substanziellen Änderung des Impulses.

Wendet man Gl. (29) auf die ebene Strömung an, in der entlang einer geschlossenen Linie, die den Körper und sämtliche Wirbelpunkte umgibt, die Zirkulation Null ist, so erhält man die auf Einheit der Tiefe bezogene Kraft,

Gesucht ist der Widerstand der Platte

$$P_{F\xi} = -\rho \frac{D}{Dt} \int_{F + \sum F_n'} \phi d\eta \quad (30)$$

Die Komponenten in η -Richtung heben sich gegenseitig auf.

Das in der Gleichung für $P_{F\xi}$ stehende Geschwindigkeitspotential ist durch den Realteil des komplexen Potentials Gl. (10) gegeben. Man denkt es sich aus zwei überlagerten Teilströmungen entstanden

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

Φ_1 ist das zirkulationsfreie Potential um die mit $U(t)$ bewegte Platte bei ruhender Flüssigkeit im Unendlichen.

Φ_2 ist das Potential der Strömung, das bei ruhender Flüssigkeit im Unendlichen und stillstehender Platte durch das Wirbelpaar hervorgerufen wird.

$$\Phi_1 = \mathcal{R}W_1 = \mathcal{R}\frac{1}{z} \quad (31)$$

$$\Phi_2 = \mathcal{R}W_2 = \mathcal{R}i\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{(z - R_0 e^{i\varphi_0})(z - \frac{1}{R_0} e^{-i\varphi_0})}{(z - \frac{1}{R_0} e^{i\varphi_0})(z - R_0 e^{-i\varphi_0})} \quad (32)$$

Die auf die Platte ausgeübte Kraft ist dann nach

$$P_{F\xi} = -\rho \frac{D}{Dt} \left[\int_F \Phi_1 d\eta + \int_{F+\Sigma F_n'} \Phi_2 d\eta \right] \quad (33)$$

zu ermitteln.

Da Φ_1 auf beiden Seiten von F_n' denselben Wert hat, ist

$$\int_{\Sigma F_n'} \Phi_1 d\eta = 0.$$

$$B_{F\xi} = \rho \int_F \Phi_1 d\eta + \rho \int_{F+\Sigma F_n'} \Phi_2 d\eta \quad (34)$$

ist die ξ -Komponente des Impulses.

Da die Stromfunktion auf dem Integrationsweg F konstant ist und zu beiden Seiten von F' denselben Wert hat, so daß also

$$i \int_{F+\Sigma F_n'} \psi d\eta = 0,$$

kann für Gl. (30)

$$P_{F\xi} = -q \frac{D}{Dt} \int_{F+\Sigma F_n'} w d\eta$$

geschrieben werden.

Die Transformation hat den Vorteil, daß die Auftretenden Integrale durch Integration im Komplexen gelöst werden können, sofern es gelingt, $d\eta$ durch die komplexe Variable zu substituieren.

Ersetzt man in Gl. (33) ξ und η durch die Koordinaten der z-Ebene x und y , so erhält man die auf die Abbildung der Platte, also den Kreiszyylinder ausgeübte Kraft

$$\begin{aligned} P_{F_x} &= -q \frac{D}{Dt} \left[\int_F \Phi_1 dy + \int_{F+\Sigma F_n'} \Phi_2 d\eta \right] \\ &= -\frac{D}{Dt} B_{F_x}, \end{aligned}$$

worin B_{F_x} die x-Komponente des Impulses ist, mit den beiden Anteilen

$$B_{F_{x1}} = q \int_F \Phi_1 dy \quad (35)$$

$$B_{F_{x2}} = q \int_{F+\Sigma F_n'} \Phi_2 dy. \quad (36)$$

Im Folgenden soll die Bewegungsgröße zunächst für den Kreiszyylinder berechnet werden, um das Ergebnis mit dem von L.Föppl [6] gefundenen Wert vergleichen zu können. Daran anschließend wird der Impuls für die beschleunigt bewegte Platte ermittelt.

4.2. Gesamtimpuls des bewegten Kreiszyinders

Für den Impulsdruck, der durch das zirkulationsfreie Geschwindigkeitspotential auf den Zylinder wirkt (Gl.(35)), erhält man die allgemeine Lösung

$$\pi q b^2 U,$$

für den Kreiszyylinder mit $b = r = 1$ also

$$B_{F x_1} = \pi q U \quad (37)$$

Zur Ermittlung der durch das Wirbelpaar hervorgerufenen Bewegungsgröße wird die Lösung des Integrales

$$\int_K \ln(z-z_0) dz \quad (38)$$

benötigt. Es wird Null, wenn z_0 außerhalb des Kreises liegt, und ergibt einen Wert, wenn der Kreis den Punkt z_0 enthält.

$$\int_K \ln(z-z_0) dz = 0 \quad (z_0 \text{ außerhalb } K) \quad (39)$$

$$\int_K \ln(z-z_0) dz = (r-R_0) e^{i\varphi_0} 2\pi i \quad (z_0 \text{ innerhalb } K) \quad (40)$$

Die durch das Wirbelpaar hervorgerufene Bewegungsgröße ist zu ermitteln nach Gl. (36)

$$\begin{aligned} B_{F x_2} &= q \int_{F+\Sigma F_n'} \phi_2 dy \\ &= q \int_F W_2 dy + q \int_{\Sigma F_n'} W_2 dy. \end{aligned}$$

Die beiden Anteile von $B_{F x_2}$ sollen mit

$$B_{F x_2}^I = q \int_F W_2 dy \quad (41)$$

und

$$B_{F x_2}^{II} = q \int_{\Sigma F_n'} W_2 dy \quad (42)$$

bezeichnet werden.

Mit Gl. (32) wird

$$B_{F x_2}^I = q i \frac{\Gamma}{2\pi} \int_F \ln \frac{(z-R_0 e^{i\varphi_0})(z-\frac{1}{R_0} e^{-i\varphi_0})}{(z-\frac{1}{R_0} e^{i\varphi_0})(z-R_0 e^{-i\varphi_0})} dy.$$

Auf dem Kreis ist

$$y = \sin\varphi; \quad dy = \cos\varphi \, d\varphi.$$

Mit

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$$

wird

$$B'_{F_{x_2}} = q i \frac{r}{4\pi} \int \ln \frac{(z - R_0 e^{i\varphi_0})(z - \frac{1}{R_0} e^{-i\varphi_0})}{(z - \frac{1}{R_0} e^{i\varphi_0})(z - R_0 e^{-i\varphi_0})} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) d\varphi$$

Nach der Substitution mit

$$z = e^{i\varphi}; dz = i e^{i\varphi} d\varphi,$$

die $B'_{F_{x_2}}$ in ein komplexes Integral umwandelt, läßt sich die Lösung unter Verwendung der Gln. (39) und (40) leicht angeben.

$$B'_{F_{x_2}} = 2q r (1 - \frac{1}{R_0}) \sin\varphi_0 \quad (43)$$

Aus Abb.3a ist zu erkennen, daß bei der Ermittlung der x-Komponente des Impulses Gl. (42)

$$B''_{F_{x_2}} = q \int_{\Sigma_{F_n'}} W_2 dy$$

wegen der vorhandenen Symmetrie nur über eine der beiden Flächen F_n' integriert zu werden braucht.

$$B''_{F_{x_2}} = q i \frac{r}{\pi} \int_{r_i'} \ln \frac{z - R_0 e^{i\varphi_0}}{z - \frac{1}{R_0} e^{i\varphi_0}} dy$$

Der Integrationsweg ist gegeben durch

$$y = R \sin\varphi_0; dy = \sin\varphi_0 dR.$$

Mit

$$z = R e^{i\varphi_0}$$

geht das Integral über in

$$B''_{F_{x_2}} = q i \frac{r}{\pi} \sin\varphi_0 \int_{r_i'} \ln \frac{R - R_0}{R - \frac{1}{R_0}} dR$$

Es hat die Lösung

$$B''_{F_{x_2}} = 2q r (R_0 - 1) \sin\varphi_0 \quad (44)$$

Dieser Ausdruck mit Gl. (43) zusammengefaßt ergibt die durch das

Wirbelpaar bedingte Bewegungsgröße

$$B_{F_{x_2}} = 2q\Gamma(R_0 - \frac{1}{R_0})\sin\varphi_0$$

Zusammen mit dem Impuls der zirkulationsfreien Strömung Gl. (37) wird der gesamte, auf den Zylinder wirkende Impulsdruck

$$B_{F_x} = \pi qU + 2q\Gamma(R_0 - \frac{1}{R_0})\sin\varphi_0. \quad (45)$$

4.3. Gesamtimpuls der bewegten Platte.

Die ξ -Komponente des Impulses Gl. (34) wird in die den Teilimpulsen beim Kreiszyylinder entsprechenden Anteile zerlegt.

Der Impuls infolge der zirkulationsfreien Plattenströmung lautet

$$\begin{aligned} B_{F_{\xi_1}} &= q \int_F \Phi_1 d\eta = \pi q b^2 U \\ &= 4\pi q U \end{aligned} \quad (46)$$

mit der halben Plattenbreite $b = 2$.

Da bei der konformen Abbildung der Kreiskontur in die Platte nach Gl. (20) Punkte auf der Platte den doppelten Abstand vom Ursprung haben wie die entsprechenden Ordinaten der Kreiskontur, muß der durch das Wirbelpaar bedingte Impulsanteil $B_{F_{\xi_2}}$ für die Platte den doppelten Wert des entsprechenden Anteiles für den Kreiszyylinder Gl. (43) annehmen.

$$\begin{aligned} B_{F_{\xi_2}} &= q \int_F \Phi_2 d\eta = 2B_{F_{x_2}} \\ &= 4q\Gamma(1 - \frac{1}{R_0}) \sin \varphi_0 \end{aligned} \quad (47)$$

Der Betrag des dritten Impulsanteiles $B_{F_{\xi_2}}$ kann ebenfalls unmittelbar in Analogie zu dem des Kreiszyinders angegeben werden. Er ist das Produkt der $(R_0 - 1)\sin\varphi_0$ in der x-Ebene entsprechenden Strecke a_ξ (Abb.3) mit $2q\Gamma$

$$B_{F\xi_2}'' = q\Gamma(R_0 + \frac{1}{R_0} - 2) \sin\varphi_0 \quad (48)$$

Die Summe der drei Gleichungen (46), (47), (48) ergibt die Bewegungsgröße für die Platte.

$$B_{F\xi} = 4\pi QU + 2q\Gamma(R_0 - \frac{1}{R_0}) \sin\varphi_0 \quad (49)$$

4.4. Gesamtimpuls des Kreiszylinders bzw. der Platte (2.Rechnung).

Wesentlich schneller erhält man den Impuls für den Kreiszylinder und damit auch für die Platte auf folgendem Wege.

Der Impuls ist gegeben durch Gl.(34) für den Kreiszylinder:

$$\begin{aligned} B_{F_x} &= q \int_F \bar{\Phi}_1 dy + q \int_F \bar{\Phi}_2 dy + q \int_{\Sigma F_n'} \bar{\Phi}_2 dy \\ &= B_{F_{x_1}} + B_{F_{x_2}} + B_{F_{x_2}}' \end{aligned}$$

für die Platte:

$$\begin{aligned} B_{F_\xi} &= q \int_F \bar{\Phi}_1 d\eta + q \int_F \bar{\Phi}_2 d\eta + q \int_{\Sigma F_n'} \bar{\Phi}_2 d\eta \\ &= B_{F_{\xi_1}} + B_{F_{\xi_2}} + B_{F_{\xi_2}}' \end{aligned}$$

Das erste Integral, der Impuls der zirkulationsfreien Strömung, ergibt mit

$$B_{F_{x_1}, \xi_1} = \pi qb^2 U$$

für den Kreiszylinder ($b = r = 1$):

$$B_{F_{x_1}} = \pi QU,$$

für die Platte ($b = \text{halbe Plattenbreite} = 2$):

$$B_{F_{\xi_1}} = 4\pi QU$$

Aus Symmetriegründen brauchen die beiden letzten Integrale der Impulsgleichung nur für eine Seite des Zylinders bzw. der Platte ermittelt zu werden. Es ist der doppelte Wert der Integrale zu nehmen.

Zur Berechnung des zweiten Integrales $B_{F_{x_2}}$, $B_{F_{\xi_2}}$ sei der Zylinder mit Flüssigkeit erfüllt gedacht, die sich unter Einwirkung der Wirbel bewegt. Durch die Anordnung der Gegenwirbel bleibt die Kreiskontur Stromlinie. Unter der schon früher gemachten Voraussetzung, daß sich der Körper in Ruhe befindet, muß der Impuls der sich innerhalb der Kreiskontur befindlichen Flüssigkeitsmenge Null werden.

$$B_{F_{\text{innen}}} = 0$$

Der Impuls ist, wie aus Abb. 3 zu ersehen ist, aber auch durch

$$B_{F_{\text{innen}}} = -q \int_F \Phi_2 df - q \int_{\Sigma F_n''} \Phi_2 df$$

gegeben. Folglich ist

$$q \int_F \Phi_2 df = -q \int_{\Sigma F_n''} \Phi_2 df.$$

Gesucht ist die x-Komponente des Impulses

$$B_{F_{x_2}} = -q \int_{\Sigma F_n''} \Phi_2 dy = 2 \sin \varphi_0 q \int_{F_1''} \Phi_3 df.$$

Das Potential

$$\Phi_3 = i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z - R_0 e^{i\varphi_0}}{z - \frac{1}{R_0} e^{i\varphi_0}}$$

ist an der Fläche F_1'' unstetig. Es ist auf der einen Seite um Γ größer als auf der anderen; es steht senkrecht zu F_1'' .

$$\int_{F_1''} \Phi_3 df = \Gamma \left(1 - \frac{1}{R_0}\right)$$

Somit wird der Impulsanteil für den Zylinder

$$B_{F_{x_2}} = 2q\Gamma \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) \sin \varphi_0$$

Wie bereits früher gezeigt wurde, muß der entsprechende Impulsanteil für die Platte den doppelten Wert annehmen.

$$B_{F_{\xi_2}} = 4q\Gamma \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) \sin \varphi_0$$

Analog zum Integral über F_1'' ist für das letzte Integral zu schrei-

ben:

für den Kreiszyylinder:

$$\begin{aligned} B_{F_x 2}'' &= 2Q\Gamma a_z \\ &= 2Q\Gamma(R_0 - 1)\sin\varphi_0, \end{aligned}$$

für die Platte, indem für a_z die entsprechende Strecke

$$a_\zeta = \left(R_0 + \frac{1}{R_0} - 2\right)\sin\varphi_0$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned} B_{F_\xi 2}'' &= 2Q\Gamma a_\zeta \\ &= 2Q\Gamma\left(R_0 + \frac{1}{R_0} - 2\right)\sin\varphi_0. \end{aligned}$$

Die gesamte Bewegungsgröße ist die Summe der drei Teilimpulse.
Kreiszyylinder:

$$B_{F_x} = \pi Q U + 2Q\Gamma\left(R_0 - \frac{1}{R_0}\right)\sin\varphi_0$$

Platte:

$$B_{F_\xi} = 4\pi Q U + 2Q\Gamma\left(R_0 - \frac{1}{R_0}\right)\sin\varphi_0.$$

Zum Vergleich Gl.(45) und (49).

4.5. Gesamtimpuls der bewegten Platte in bipolaren Koordinaten der ζ -Ebene.

Mit der Kantenbedingung Gl.(15) geht die Gleichung des Impulses für die Platte über in

$$B_{F_\xi} = 4\pi Q U + 2\pi Q U(k^2 - 4\sin^2\varphi),$$

worin noch nach Gl.(5) λ^2 durch k^2 ersetzt wurde. Der Index (0) wird als selbstverständlich fortgelassen.

Unter Verwendung bipolarer Koordinaten (Abb.4) läßt sich der Ausdruck weiter umformen. k ist nach Gl.(6) die große Halbachse der Ellipse, die die Endpunkte der Platte als Brennpunkte hat, so daß

$$k = \frac{1}{2}(C + \eta).$$

Ferner ist $2\sin\varphi$ nach Gl. (7) die große Halbachse der Hyperbel mit den selben Brennpunkten, also

$$2\sin\varphi = \frac{1}{2}(\sigma - \tau).$$

Mit

$$k^2 - 4\sin^2\varphi = \tau\sigma$$

lautet der Impuls für die Platte

$$B_{F\xi} = 4\pi qU + 2\pi qU\tau\sigma. \quad (50)$$

Die bipolaren Koordinaten ξ und η sind durch die Beziehungen

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \xi^2 + (\eta + 2)^2 \\ \tau^2 &= \xi^2 + (\eta - 2)^2 \end{aligned} \quad (51)$$

miteinander verknüpft.

4.6. Widerstand der beschleunigt bewegten Platte.

Der Widerstand der Platte ergibt sich als substantielle Änderung des Impulses Gl.(50)

$$\begin{aligned} P_{F\xi} &= \left| \frac{DB_{F\xi}}{Dt} \right| \\ &= 4\pi q \frac{dU}{dt} + 2\pi q \frac{\delta}{\delta t} (U\tau\sigma) \end{aligned} \quad (52)$$

Der Widerstandsbeiwert wird dann

$$c_W = \frac{\pi}{U^2} \left[2 \frac{dU}{dt} + \frac{\delta}{\delta t} (U\tau\sigma) \right]. \quad (53)$$

Es ist zu beachten, daß der Zylinderhalbmesser

$$r = 1 = \frac{1}{4}b; \quad b = \text{Breite der Platte}$$

die Maßeinheit der Koordinaten ist.

Für eine beliebige Maßeinheit gelten die Gleichungen

$$P_{F\xi} = q \frac{\pi b^2}{4} \frac{dU^*}{dt} + 2\pi q \frac{\delta}{\delta t} (U^* \tau^* \sigma^*) \quad (54)$$

$$c_W = \frac{\pi}{2} \frac{b}{U^* z} \frac{dU^*}{dt} + \frac{4\pi}{U^* z b} \frac{\delta}{\delta t} (U^* \tau^* C^*) \quad (55)$$

Zur Auswertung der Differentiation muß die Beobachtung des Wirbelpaares herangezogen werden.

5. Bemerkungen zu: L.Föppl.

'Wirbelbewegung hinter einem Kreiszyylinder'

5.1. Zum Gesamtimpuls des bewegten Kreiszyinders.

Der Vergleich des Impulswertes für den Kreiszyylinder Gl.(45) mit dem von L.Föppl [3] ermittelten Wert ergibt eine Abweichung.

Föppl erhält für den durch das Wirbelpaar bedingten Impulsanteil

$$B_{F_{x_2}} = 3q\Gamma(R_0 - \frac{1}{R_0})\sin\varphi_0,$$

den er auf folgendem Wege bekommt. Es sei gestattet, auf die dabei unterlaufenen Fehler hinzuweisen.

In der Arbeit ist zu lesen

$$\begin{aligned} B_{F_{x_2}} &= q \int \bar{\Phi}_2 dy \\ &= 2q\Gamma a_z + q \int_k \bar{\Phi}_2 dy, \end{aligned}$$

wobei offensichtlich über den in Abb.5 eingezeichneten Weg integriert wird, durch den die Fläche aber nicht einfach zusammenhängend gemacht wird.

Darüber erhält er infolge falscher Lösung der in der Rechnung auftretenden komplexen Integrale der Art Gl.(38) für

$$B_{F_{x_2}} = q \int_k \bar{\Phi}_2 dy = q\Gamma a_z$$

Daher also

$$B_{F_{x_2}} = 3q\Gamma a_z,$$

das mit

$$a_z = (R_0 - \frac{1}{R_0})\sin\varphi_0$$

in die oben angegebene Form übergeht.

In diesem Zusammenhang soll etwas näher auf die zitierte Arbeit eingegangen werden.

5.2. Zur Wirbelbewegung hinter dem Zylinder

Im ersten Abschnitt seiner Arbeit befaßt Föppl sich mit der Gleichgewichtslage des Wirbelpaares und findet, daß es hinter dem Kreis- zylinder in strömender Flüssigkeit einen geometrischen Ort gibt, an dem sich das Wirbelpaar gegenüber dem Zylinder in Ruhe befinden kann. Die Rechnung ergibt eine Kurve, die vom hinteren Stau- punkt unter einem Winkel von 45° ansteigt und im Unendlichen eine Asymptote von 30° hat.

Unter Hinweis auf eine beigelegte Fotografie aus der von L. Ru- bach [12] durchgeführten Versuchsreihe schreibt er:

'Vergleichen wir nun die auf der Tafel wiedergegebene Fotogra- fie, so finden wir durch Ausmessung, daß die Zentren des Wirbel- paares genau auf der oben bestimmten Kurve liegen. Wir kön- nen jetzt folgende Schilderung von dem hydrodynamischen Vorgang, der bei der Bewegung eines sehr langen Kreiszyllinders aus der Ruhe heraus betrachtet wird, entwerfen: Es löst sich an der hinteren Zylinderwand ein Wirbelpaar ab, das unter fortwähren- dem Wachstum seiner Wirbelstärke sich unserer Kurve nähert und, nachdem es die Kurve erreicht hat, langsam längs der Kurve oder deren nächster Umgebung weiterwandert, wobei seine Wirbelstär- ke abermals zunimmt.'

Rubach stellt dagegen fest, daß die wirkliche Erscheinung mit der von Föppl ermittelten Kurve nicht übereinstimmt. Als Begrün- dung für die Abweichung gibt er an, daß in der Föppl'schen Arbeit die Reibung vernachlässigt worden sei und die auftretenden Wir- bel in Wirklichkeit keine Potentialwirbel darstellen. Für gleich- förmige Bewegung hat er aus seinen Versuchen die in Abb. 6 wie- dergegebene Wirbelbahn ermittelt. Rubach bemerkt dazu:

' Die Wirbelzentren führen Schwingungen aus, die an eine Sinus- schwingung erinnern. Die einzelnen Zentren wandern von Auf- nahme zu Aufnahme auf dieser Kurve fort unter ständigem Wachsen der Wirbelstärke!'

Dieser offensichtliche Widerspruch ist in gewissem Grade aufzuklären, wenn man sich die Mühe macht, die Wirbelbahn aus den von Rubach bei beschleunigter Bewegung gemachten Aufnahmen, die der bereits zitierten Arbeit beigelegt sind, zu ermitteln. Föppl spricht ausdrücklich von der Bewegung aus der Ruhe heraus, während Rubach ihn mit dem Beispiel gleichförmiger Bewegung widerlegt. Die in Abb.6 eingezeichnete Wirbelbahn für beschleunigte Bewegung gibt Föppl recht. Daß das Wirbelpaar die Kurve, kurz nachdem es sie erreicht hat wieder verläßt, führt er auf eine labile Störung zurück. Unbeantwortet bleibt die Frage, warum das Wirbelpaar bei gleichförmiger Bewegung nicht der Föpplischen Kurve folgt.

Vom weiteren hydrodynamischen Vorgang, in dessen Verlauf sich das Strömungsbild völlig ändert, geben Föppl und Rubach die gleiche Beschreibung. Die beiden Wirbel geben ihre spiegelbildlich symmetrische Lage auf. Es entstehen abwechselnd an beiden Seiten des Zylinders neue Wirbel, die sich in Form einer Kármánschen Wirbelstraße vom Körper entfernen.

Unter der bei dieser Arbeit benutzten Literatur ist der Bericht von L.Föppl zitiert in [8, 10, 11]. H.Lamb [10] gibt nur die Gleichung der Kurve an, auf der sich das Wirbelpaar in Ruhe befinden kann, und die dazugehörige Wirbelstärke, M.Lagally [8] erwähnt die Föpplische Kurve und gibt dann eine ins einzelne gehende Beschreibung der Bewegung der sich ablösenden Wirbelschichten. Unter anderem berichtet er, daß die Wirbelbildung erst in einiger Entfernung, manchmal ziemlich weit entfernt vom Hindernis beginnt.

W.Müller [11] befaßt sich ausführlich mit dem bewegten Kreiszyylinder. Er ermittelt die Kurve, auf der die Wirbel liegen müssen, damit der Strömungsdruck verschwindet, und die dazugehörige Zirkulation und schreibt:

'Die Beobachtung zeigt nun, daß die Zentren der beiden sich zunächst hinter dem Zylinder ausbildenden Wirbel fast genau der Kurve (Zusatz: Föpplische Kurve) folgen während ihre Stärke zunimmt. Wenn man bedenkt, daß im Gesamtwiderstand noch andere, hier nicht unmittelbar erfaßte Bestandteile enthalten sind, z.B. Reibungswiderstand, so kann man das Verhalten des

Wirbelystems als Folge eines Gesetzes des kleinsten Widerstandes beurteilen.'

Ob sich die Beobachtung auf gleichförmige oder beschleunigte Bewegung bezieht, bleibt offen.

Müller gibt auch den von Föppl berechneten Wert des Impulses an, der sich als falsch erwiesen hat.

5.3. Zur Erweiterung auf die Strömung um die unendlich lange, ebene Platte.

Im letzten Kapitel seines Berichtes geht Föppl auf die Strömung um die unendlich lange, ebene Platte ein. Er kommt zu dem Ergebnis, daß es hinter der Platte einen geometrischen Ort für das Wirbelpaar geben müsse, an dem es sich gegenüber der Platte in Ruhe befinden kann.

Er bildet die Ebene der Kreiskontur (z -Ebene) mit Hilfe der analytischen Funktion Gl.(1) auf die Ebene der Platte (ζ -Ebene) ab und erhält dann

$$\frac{dW}{d\zeta} = \frac{dW}{dz} \frac{dz}{d\zeta} = 0$$

als Bedingung für die Ruhelage des Wirbelpaares hinter der Platte. Da nun

$$\frac{dz}{d\zeta} \neq 0$$

für das hier interessierende Blatt der Riemannschen Fläche, erhält man für die Ebene der Platte die einfache Beziehung

$$\frac{dW}{dz} = 0$$

Das ist jedoch dieselbe Beziehung wie in der Ebene der Kreiskontur. Man erhalte nun , so folgert Föppl, den gesuchten geometrischen Ort der Ruhelage hinter der Platte, wenn man die für die z -Ebene ermittelte Ortslinie (Abb.6) konform auf die ζ -Ebene abbilde.

Es ist aber schon an anderer Stelle darauf hingewiesen worden,

daß die Abbildungsfunktion Gl.(1) abgesehen von Ähnlichkeits-
transformationen eine Inversion enthält, deren Zentrum $\zeta = 2i$
ist, was Föppl in seiner Beweisführung übersehen hat. Bei der Trans-
formation der Föppl'schen Kurve in die ζ -Ebene macht sich der feste
Wirbel in $\zeta = 2i$ bemerkbar. An früherer Stelle des vorliegenden
Berichtes ist festgestellt worden, daß sich das Wirbelpaar gegen-
über der Platte nirgendwo in Ruhe befinden kann.

Ferner schreibt er, daß nur für die Lage des Wirbelpaares im Un-
endlichen die Bedingung endlicher Geschwindigkeit an den Enden
der Platte erfüllt sei. Die Kantenbedingung Gl.(15) gestattet
jedoch, in jedem Augenblick der Bewegung die Wirbelstärken so zu
bestimmen, daß dort endliche Geschwindigkeit herrscht. Dazu
Abb.7 und 8.

6. Versuchsauswertung

6.1. Versuchsbeschreibung

Am Institut für Schiffbau der Universität Hamburg sind mit einer
100 mm breiten und 300 mm langen Platte Versuche durchgeführt
worden, die zur Berechnung des Widerstandes herangezogen werden
sollen. Gemessen wurden Geschwindigkeit, Beschleunigung und der
Widerstand, ferner wurde das durch Aluminiumpulver sichtbar
gemachte Stromlinienbild von einer mitfahrenden Kamera aufgenom-
men. Bei den Versuchsfahrten zur Aufnahme des Stromlinienbildes
war die Versuchsplatte auf einer 500 mm \times 350 mm großen Bodenplat-
te - sie ist in Abb.33 zu erkennen - befestigt, während sie bei
der Widerstandsmessung mit einem Abstand von $\sim 0,1$ mm zwischen
Plattenunterkante und Bodenplatte geschleppt wurde.

6.2. Theoretischer Widerstandsbeiwert aus der experimentellen Wirbelbewegung; experimenteller Widerstandsbeiwert; stationärer Druckwiderstand.

Die aus den Aufnahmen herausgemessenen Aufmaße des Wirbelpaares
und die dazugehörigen Geschwindigkeiten lagen bereits für einige
mittlere Beschleunigungen in Diagrammen zusammengestellt vor,
denen die Blätter für drei mittlere Beschleunigungen entnommen
sind (Abb.11 + 16).

Durch Elimination der Zeit in den Kurven für $T(t)$ und $B(t)$ erhält man die Wirbelbahn (Abb.19). Sie scheint für verschiedene Beschleunigungen gleich zu sein, nur daß sich die Wirbel mit unterschiedlicher Geschwindigkeit auf ihr bewegen. Je größer die Beschleunigung, umso größer ist die Bahngeschwindigkeit des Wirbelpaares. Ein Vergleich des zeitlichen Ablaufes der Wirbelbewegung in Abb. 19 zeigt jedoch für $b_m = 0,067 \text{ m/s}^2$ eine Abweichung, die als Anzeichen starker Störanfälligkeit zu werten ist. Das Wirbelpaar mit der größer^{en} mittleren Beschleunigung läuft zunächst dem geringerer mittlerer Beschleunigung voraus, bleibt ihm gegenüber dann aber zurück.

Die Auswertung der Differentiation wird nach Gl.(53) durchgeführt.

$$c_w = \frac{\pi}{U^2} \left[(2 + \tau \sigma) \frac{dU}{dt} + U \left(\sigma \frac{d\tau}{dt} + \tau \frac{d\sigma}{dt} \right) \right]$$

Dazu ist es erforderlich, die Aufmaße der Wirbelzentren in bipolare Koordinaten umzurechnen. τ und σ sind in Abb.17 aufgetragen. Abb.18 enthält die auf $\frac{1}{4}b$ als Längeneinheit bezogene Anstömgeschwindigkeit. Die für die Rechnung erforderlichen Werte wurden in Tab.1 + 3 zusammengestellt. Der berechnete Beiwert des Gesamtwiderstandes, c_{wR} , und der Beiwert des Druckwiderstandes im quasistationären Zustand nach Gl.(22), c_p , sind jeweils für die entsprechende Wirbellage in Abb.19 eingetragen worden. Darin finden sich auch die experimentellen Widerstandbeiwerte c_{wV} . Das Verhältnis von $c_{wR}/c_{wV} = 2$ ist ganz zufällig.

Für den Endzustand der Strömung um die Platte sind Werte gemessen worden, die bis $c_{wV} = 1,4$ hinabgehen. In der Literatur wird der Widerstandbeiwert der unendlich langen Platte jedoch mit $c_w \approx 2$ angegeben, so von O.Flachsbart [5] mit 1,96. Die gemessenen geringeren Werte sind nur in geringem Maße durch die Umströmung der Plattenunterkante bedingt. Vor allem dürften sie auf die Umströmung der Bodenplatte zurückzuführen sein, die in Abb. 33 und 34 deutlich an den dunklen Stellen zu erkennen ist. Die an der Hinterkante der Platte entstehenden Wirbel steigen während des Bewegungsablaufes empor und brechen die Wasseroberfläche auf, wobei sie das Aluminiumpulver auseinandertreiben.

6.3. Untersuchung einzelner Versuchsreihen

Vergleicht man in Abb. 10 die von E. Wedemeyer [14] berechnete Kurve für gleichförmige Bewegung, die, wie er berichtet, mit der beobachteten Kurve sehr gut übereinstimmt, mit den gemittelten Kurven für beschleunigte Bewegung, so ist erstaunlich, daß die Wirbelbahn von der Beschleunigung unabhängig sein soll. Die Untersuchung einzelner Versuchsreihen ergibt tatsächlich eine Abhängigkeit von der Beschleunigung, wie aus Abb. 20 zu ersehen ist. Man liest ab, daß die Wirbelbahn umso näher zur Symmetrieachse verläuft, je größer die Beschleunigung ist. Demnach wäre durch die in Abb. 11 + 16 gewählte Auftragung bereits zu stark gemittelt worden.

Welche der beiden Aussagen über die Wirbelbewegung - Beschleunigungsabhängigkeit der Wirbelbahn oder - unabhängigkeit - nun zutrifft, ist wegen der starken Labilität des Wirbelpaares den vorliegenden Versuchen mit Sicherheit nicht zu entnehmen. Eine definitive Aussage wäre durch die Berechnung von Spiralwirbeln [1] für beschleunigte Bewegung zu erlangen.

An Hand der Versuchsreihe 1 aus Abb. 20, deren Strömungsbilder (Abb. 29 + 34) beigelegt sind, mag der Bewegungsablauf erläutert werden. (Das erste Negativ der Versuchsreihe war nicht vorhanden) Das Wirbelpaar entfernt sich zunächst in symmetrischer Lage mit wachsender Geschwindigkeit, wobei sich die Wirbel gegeneinander verschieben (Abb. 29). Darauf entfernt sich einer der Wirbel schneller als der andere mit der Strömung (Abb. 30 + 32). Dazu Abb. 21, worin die Entfernung des Wirbels von der Platte als Funktion der Zeit aufgetragen ist. Im Endzustand bildet sich eine Wirbelanordnung heraus, die einer Kármánschen Wirbelstraße ähnelt (Abb. 33 und 34). Bemerkenswert erscheint, daß die labile Störung - Verzögern und Aufgabe der Symmetrie - wie die ausgewählten Versuchsreihen unterschiedlicher Beschleunigung erkennen lassen, in einem bestimmten, gleichen Abstand von der Platte eintritt. Bis zu dieser Stelle, die bei $\tilde{r} \approx 75$ mm entsprechend $\xi \approx 3$ liegt, kann hinsichtlich der Widerstandsrechnung das mathematische Bild von Platte und Wirbelpaar nur Geltung haben. Danach ist ja auch, wie man aus Abb. 19 und 24 er-

nicht, ein starkes Sinken des theoretischen Widerstandsbeiwertes zu bemerken.

Für die wiedergegebenen Versuchsreihen wurden die Widerstandsbeiwerte in Tabelle 4 + 6 berechnet und in Abb.24 aufgetragen.

6.4. Vergleich der Stromlinienbilder aus Versuch und Rechnung.

Die Stromfunktion wird durch den Imaginärteil des komplexen Potentials Gl.(10) dargestellt.

$$\Psi = U\left(r - \frac{1}{r}\right) \sin\varphi + \frac{\Gamma}{4\pi} \ln \frac{[r^2 + R_0^2 - 2rR_0 \cos(\varphi - \varphi_0)][r^2 + \frac{1}{R_0^2} - 2\frac{r}{R_0} \cos(\varphi + \varphi_0)]}{[r^2 + R_0^2 - 2rR_0 \cos(\varphi + \varphi_0)][r^2 + \frac{1}{R_0^2} - 2\frac{r}{R_0} \cos(\varphi - \varphi_0)]}$$

Mit Gl.(12) wird daraus

$$\frac{\gamma}{U} = \left(r - \frac{1}{r}\right) \sin\varphi + \gamma \ln \frac{[r^2 + R_0^2 - 2rR_0 \cos(\varphi - \varphi_0)][r^2 + \frac{1}{R_0^2} - 2\frac{r}{R_0} \cos(\varphi + \varphi_0)]}{[r^2 + R_0^2 - 2rR_0 \cos(\varphi + \varphi_0)][r^2 + \frac{1}{R_0^2} - 2\frac{r}{R_0} \cos(\varphi - \varphi_0)]},$$

wobei, um einen dimensionslosen Ausdruck zu erhalten, durch die Anströmungsgeschwindigkeit U und

$$\frac{1}{4}b = 1; \quad b = \text{Plattenbreite}$$

dividiert wurde,

Das Stromlinienbild ist für die aus Abb.28 herausgemessene experimentelle Wirbellage $\xi_0 = 2,34$; $\eta_0 = 1,50$, entsprechend $R_0 = 2,97$; $\varphi_0 = 27^\circ$ berechnet worden. Nach der Kantenbedingung ist dabei für die Zirkulation $\gamma = 2,11$ zu setzen.

Mit Hilfe der Abb.25 und 26, worin die Stromfunktion in Abhängigkeit von Polarkoordinaten der Abbildungsebene aufgetragen wurde, kann das Stromlinienbild nach einer Koordinatentransformation gezeichnet werden (Abb.27). Abb.28, in die Ergebnisse der Rechnung eingezeichnet wurden, gestattet den Vergleich von Versuch und Rechnung. Das Verhältnis der Staupunktabstände von der Platte beträgt 1,2. Denselben Wert erhält man für die größte ungestörte Breite (B^* , Skizze Abb.11). Das in der Rech-

nung für das Wirbelpaar ermittelte verwirbelte Gebiet ist also wesentlich größer als dasjenige der Strömungsaufnahme. Nicht ganz ohne Einfluß dürften dabei die zugeschärften Kanten der Versuchsplatte sein.

6.5. Unzulänglichkeit der Theorie

Als Ergebnis der Arbeit ist festzustellen, daß das einfache mathematische Bild von Platte und Wirbelpaar nicht ausreicht, um die Umströmung der Platte zu erfassen. Im Gegensatz zum Spiralwirbel stimmt es in einigen Wesentlichen Merkmalen nicht mit der Wirklichkeit überein.

1) Der Geschwindigkeitsverlauf an der Plattenkante ist stetig; es müßte dort ein Sprung herrschen.

Dieser Geschwindigkeitssprung, der durch die Ausbildung einer Trennungsfläche zustande kommt, ist gerade so groß, daß die Geschwindigkeit an den Plattenkanten endlich bleibt.

2) Am Ort des Wirbels herrscht eine Geschwindigkeit; sie müßte jedoch verschwinden, d.h., die Wirbel müssen sich im Gleichgewicht befinden

In Abb.10 fällt auf, daß sich der Wirbel in einem Gebiet ausgesprochen kleiner Geschwindigkeit bewegt. Das ist jedoch lediglich ein Beweis der trivialen Tatsache, daß die Theorie nicht ganz falsch ist.

3) Die Flüssigkeit ist außerhalb des Wirbelkernes drehungsfrei; in Wirklichkeit ist jedoch Drehung vorhanden.

Diese Erscheinung läßt sich mit einem Stäbchen, das man hinter der Platte innerhalb des verwirbelten Gebietes auf die Wasseroberfläche legt, leicht nachprüfen.

7. Zusammenfassung

Der Bericht befaßt sich mit der Bewegung eines Wirbelpaares hinter einer quer angeströmten, unendlich langen Platte und vergleicht die theoretischen Ergebnisse mit Versuchsergebnissen. Es wird versucht, die Frage zu beantworten, ob die beobachteten Wirbel durch ein einzelnes Wirbelpaar, bestehend aus Potentialwirbeln, ersetzt werden können.

Es wird der Geschwindigkeits- und Druckverlauf über die Platte berechnet und daraus der stationäre Widerstand ermittelt. Ferner wird untersucht, ob es hinter der Platte einen geometrischen Ort gibt, an dem sich ein Wirbelpaar in Ruhe befinden kann. Die Rechnung ergibt, daß hinter der Platte die Geschwindigkeit am Ort des Wirbels überall von Null verschieden ist, der Wirbel sich also nirgendwo in Ruhe befinden kann.

Weiterhin wird der Widerstand der Platte in instationärer Strömung als substantielle Änderung des Impulses ermittelt. Zur Auswertung der Differentiation wird die in Versuchen beobachtete Wirbelbewegung herangezogen. Wegen der starken Störungsfälligkeit stößt die Versuchsauswertung auf Schwierigkeiten. Die Frage der Beschleunigungsabhängigkeit der Wirbelbahn muß aus diesem Grunde offen bleiben.

Die in den Versuch gemessenen Widerstandswerte stellen sich als zu klein heraus, da sich mit der verwendeten Versuchseinrichtung eine zweidimensionale Strömung nicht verwirklichen ließ. Die theoretischen Widerstandswerte sind dagegen zu groß, wobei sich zufällig ein Verhältnis von 2 zwischen den Werten aus Versuch und Rechnung ergibt.

Obwohl man geneigt ist, das hinter der Platte beobachtete Wirbelgebilde als Wirbelpaar anzusprechen, ergibt die Rechnung zwar eine gute qualitative, jedoch eine unzureichende quantitative Übereinstimmung.

Nebenbei wird die Gelegenheit genutzt, einige Fehler in einer Arbeit von L. Föppl [6] über die Wirbelbewegung hinter einem Kreiszylinder zu berichtigen.

Der Bericht kommt zu dem Ergebnis, daß das einfache Modell von Platte und Wirbelpaar nicht ausreicht, um die Umströmung einer quer zu ihrer Breite bewegten, unendlich langen Platte zu erfassen. Weitere Untersuchungen - z.B. über schwingende Platten oder die Wirbelbahn als Funktion der Beschleunigung - werden als mathematisches Bild Spiralwirbel verwenden müssen.

8. Literatur

- [1] Anton, Leo: Ausbildung eines Wirbels an der Kante einer Platte
(Dissertation)
Ingenieur-Archiv, Bd.10 Heft 6 1936, S.411 + 427
- [2] Betz, Albert: Konforme Abbildungen
- [3] Bierbach, L.: Einführung in die Funktionentheorie
- [4] Durand, William F.: Aerodynamic Theory, Bd.1
- [5] Flachsbart, O.: Messungen an ebenen und gewölbten Platten.
Ergebnisse der A.V.A. zu Göttingen
IV Lieferung 1932, S. 96 + 100
- [6] Föppl, Ludwig: Wirbelbewegung hinter einem Kreiszyylinder
Sitzungsberichte der Bayrischen Akademie der Wissen-
schaften, math.-nat. 1913, S. 1 + 17
- [7] Lagally, Max: Über die Bewegung einzelner Wirbel in einer
strömenden Flüssigkeit
Sitzungsberichte der Bayrischen Akademie der Wissen-
schaften, math.-nat. 1914, S. 377 + 432
- [8] Lagally, Max: Zur Theorie der Wirbelschichten
Sitzungsberichte der Bayrischen Akademie der Wissen-
schaften, math.-nat. 1915, S. 79 + 107
- [9] Lagally, Max: Über den Druck einer strömenden Flüssigkeit
auf eine geschlossene Fläche
Sitzungsberichte der Bayrischen Akademie der Wissen-
schaften, math.-nat. 1921, S. 209 + 226
- [10] Lamb, Horace: Lehrbuch der Hydrodynamik,
übersetzt von Friedel
- [11] Müller, Wilhelm: Mathematische Strömungslehre
- [12] Rubach, L.: Über die Entstehung und Fortbewegung des
Wirbelpaares hinter zylindrischen Körpern
Forschungsarbeit auf dem Gebiete des Ingenieurs-
wesens, Heft 185, Berlin 1916
- [13] Wagner, Herbert: Über die Entstehung des dynamischen
Auftriebes von Tragflügeln

Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik
Bd. 5 1925, S. 17 + 35

- [14] Wedemeyer, Erich: Ausbildung eines Wirbelpaares an den
Kanten einer Platte**
**Diplomarbeit der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen
Fakultät der Georg-August-Universität zu Göttingen**

Tabelle 3

$b_m = 0,067 \text{ m/s}^2$

t	ξ	η	U	τ	G	$\frac{dU}{dt}$	$\frac{d\tau}{dt}$	$\frac{dG}{dt}$	c_w
s			s ⁻¹			s ⁻²	s ⁻¹	s ⁻¹	
1	1,52	1,56	4,82	1,59	3,87	3,45	1,50	0,34	7,94
2	2,67	1,51	8,00	2,72	4,41	2,80	0,78	0,58	3,90
3	3,29	1,70	10,60	3,32	4,96	2,55	0,48	0,55	2,56
4	3,72	2,06	13,00	3,73	5,51	2,22	0,35	0,55	1,90
5									

Tabelle 4

Versuchsreihe 1

t	ξ	η	U	τ	G	$\frac{dU}{dt}$	$\frac{d\tau}{dt}$	$\frac{dG}{dt}$	c_w
s			s ⁻¹			s ⁻²	s ⁻¹	s ⁻¹	
1	0,52	1,90	2,00	0,51	3,93	1,52	0,65	0,00	8,80
2	1,32	1,78	3,25	1,34	4,01	0,98	1,00	0,20	6,30
3	2,32	1,65	4,08	2,35	4,33	0,75	0,83	0,34	5,11
4	2,88	1,62	4,75	2,91	4,63	0,62	0,34	0,24	2,83
5	3,08	1,66	5,30	3,10	4,78	0,46	0,11	0,08	1,68

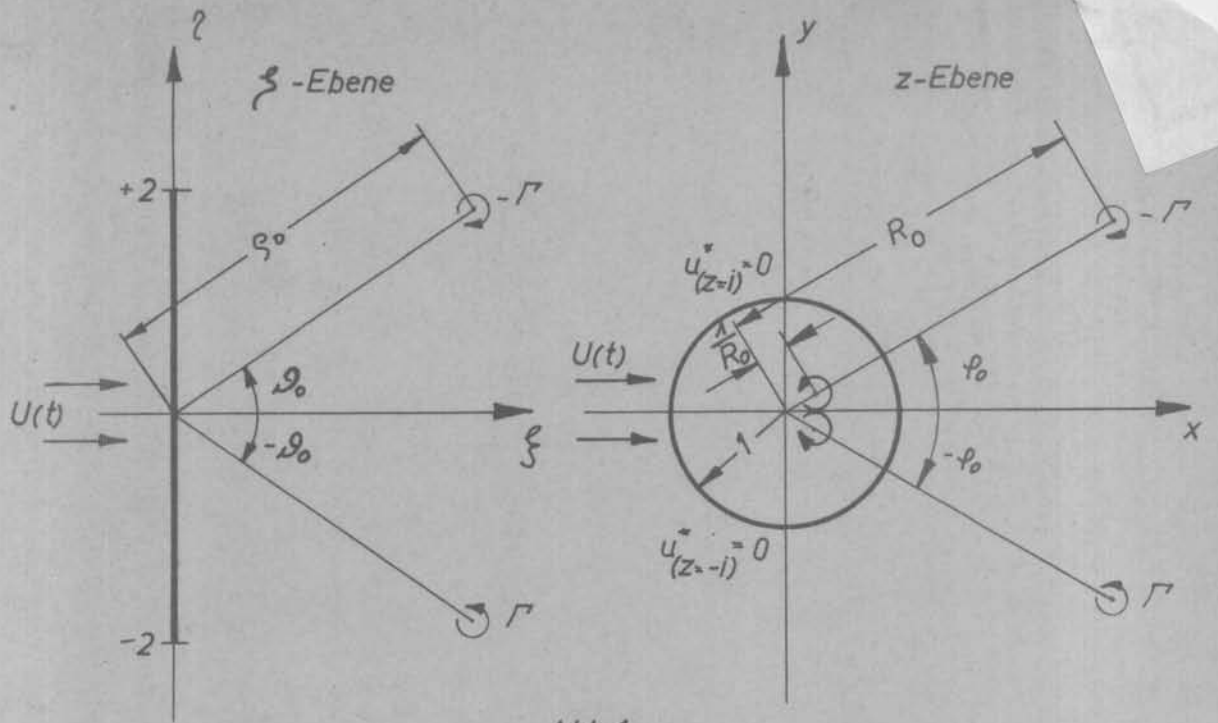


Abb. 1

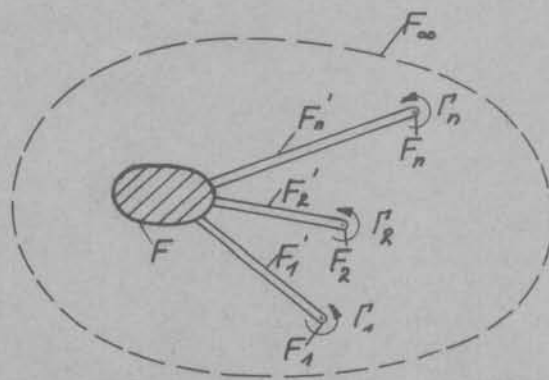


Abb. 2

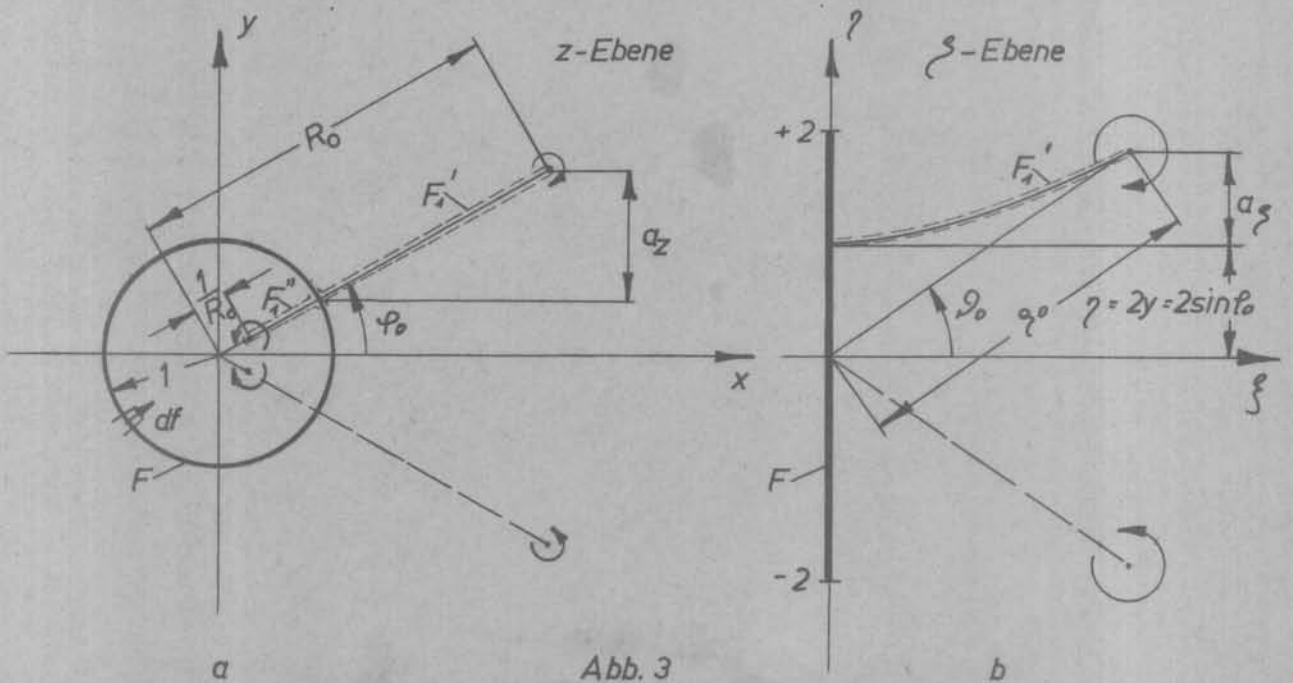


Abb. 3

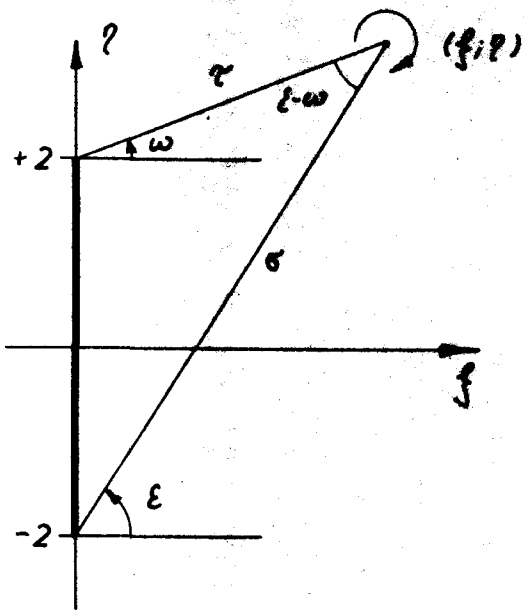


Abb. 4

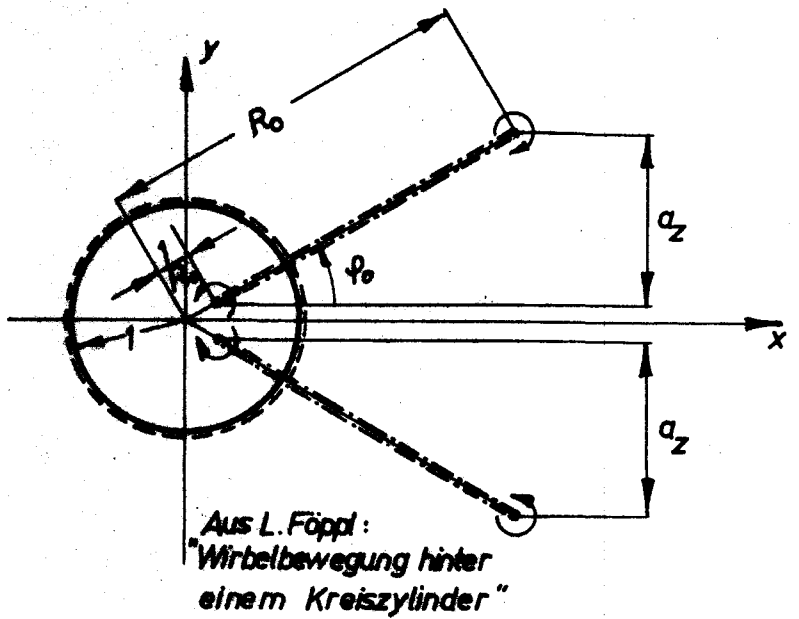


Abb. 5

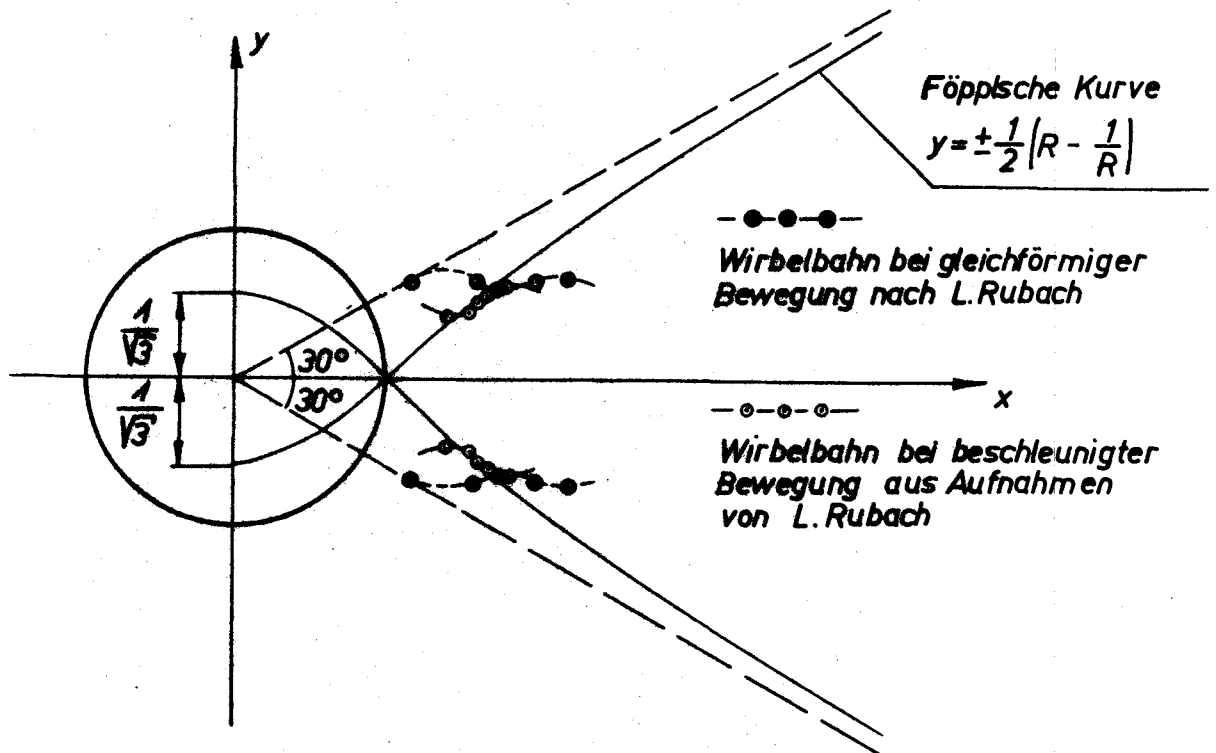


Abb. 6

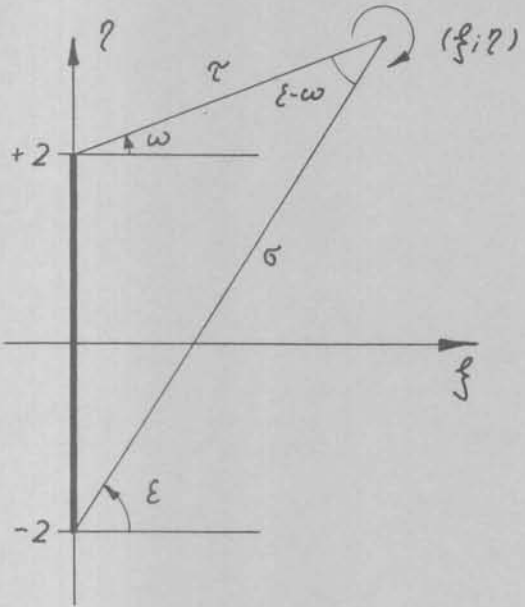


Abb.4

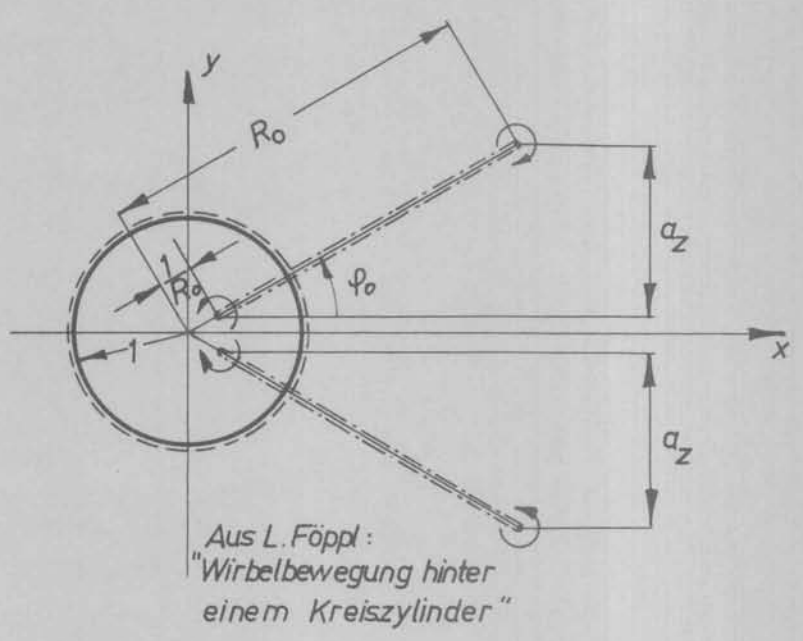


Abb.5

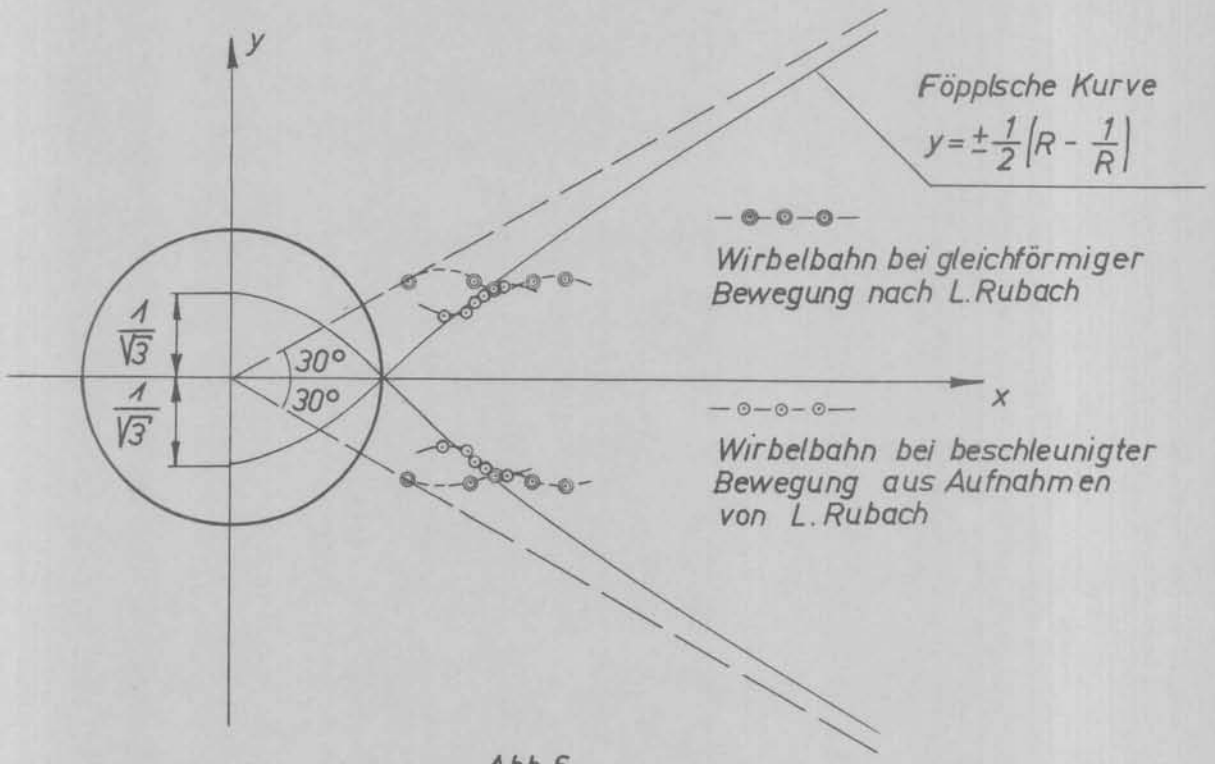


Abb.6

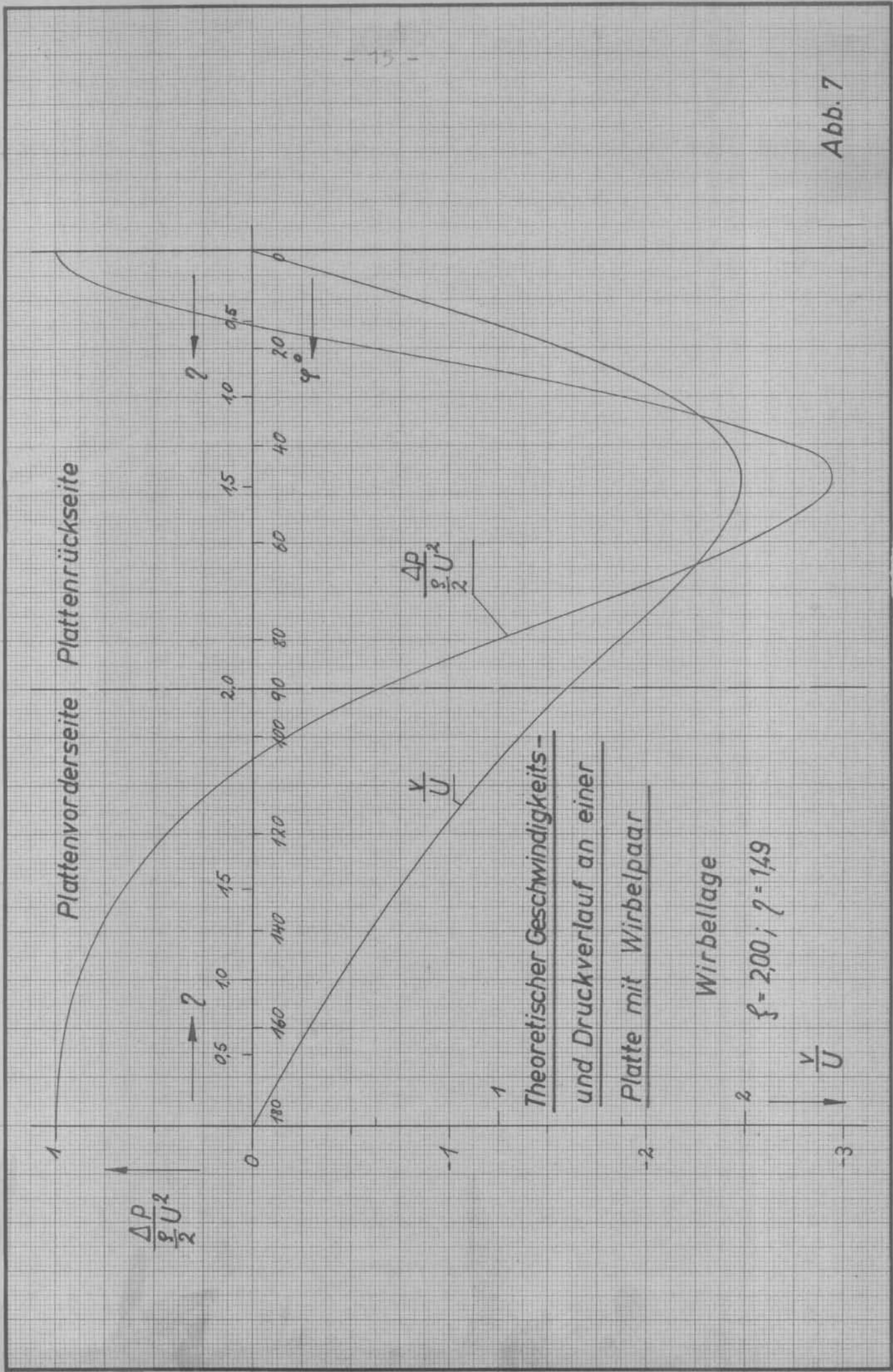


Abb. 7

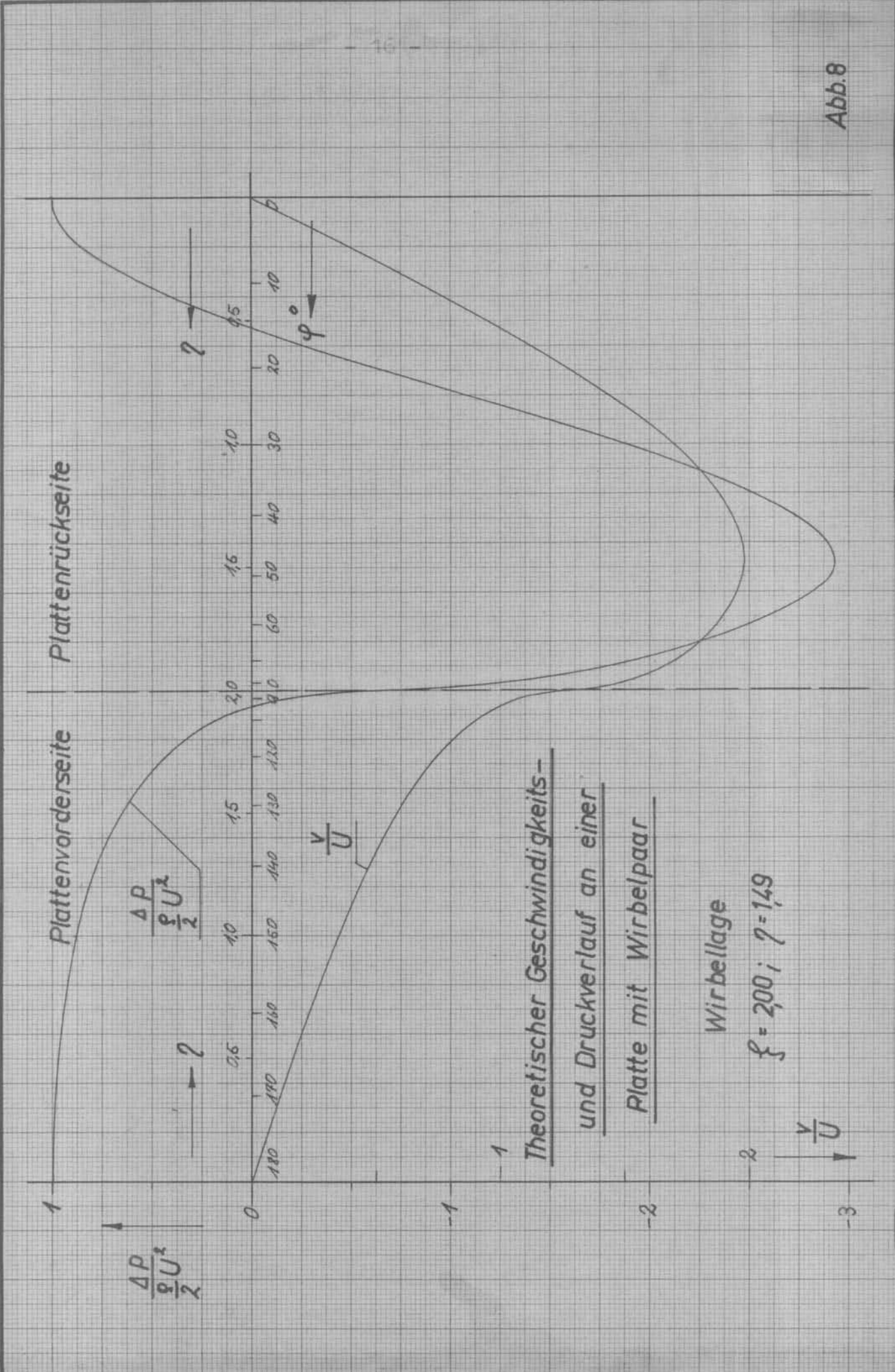
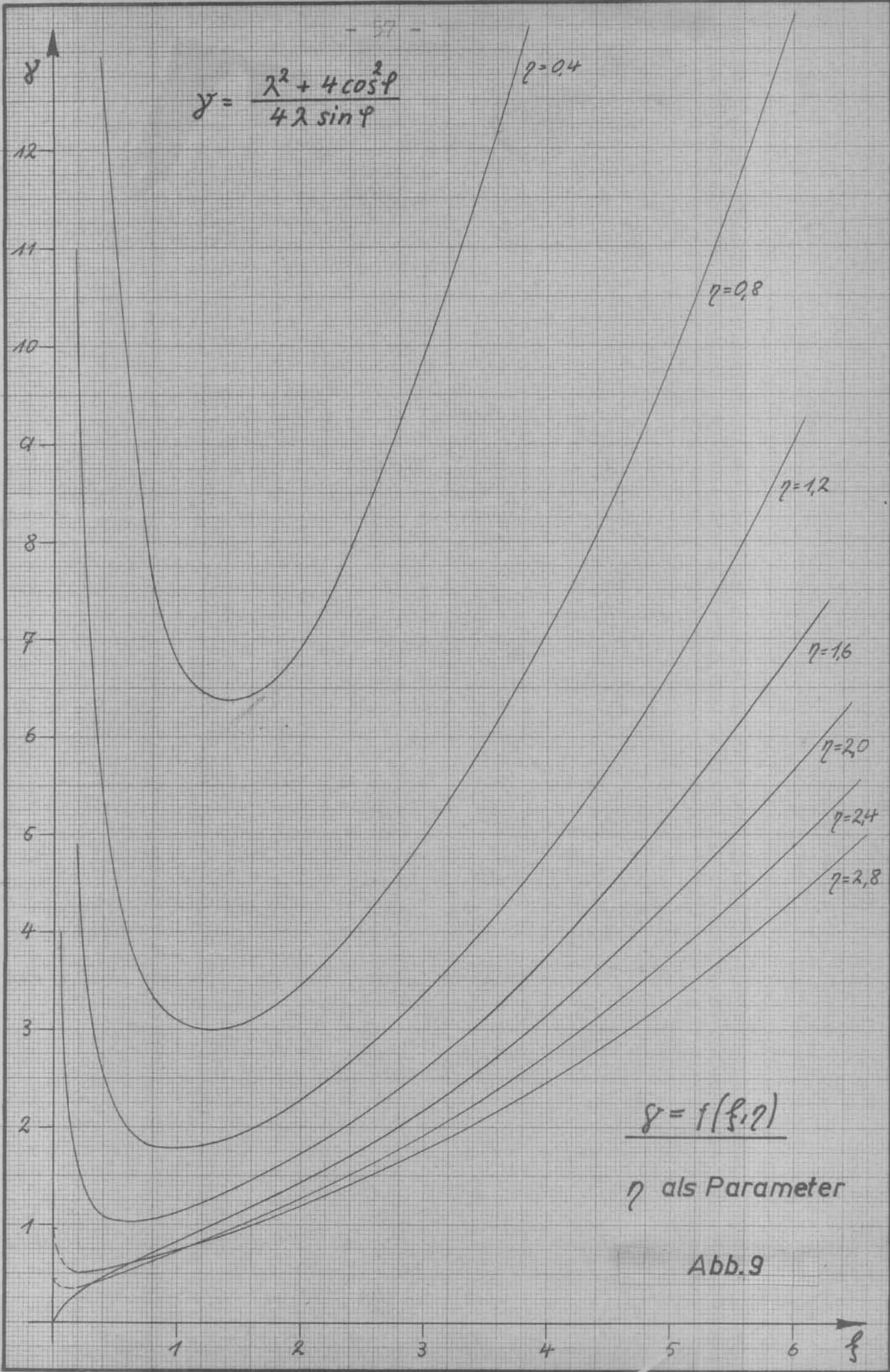


Abb. 8

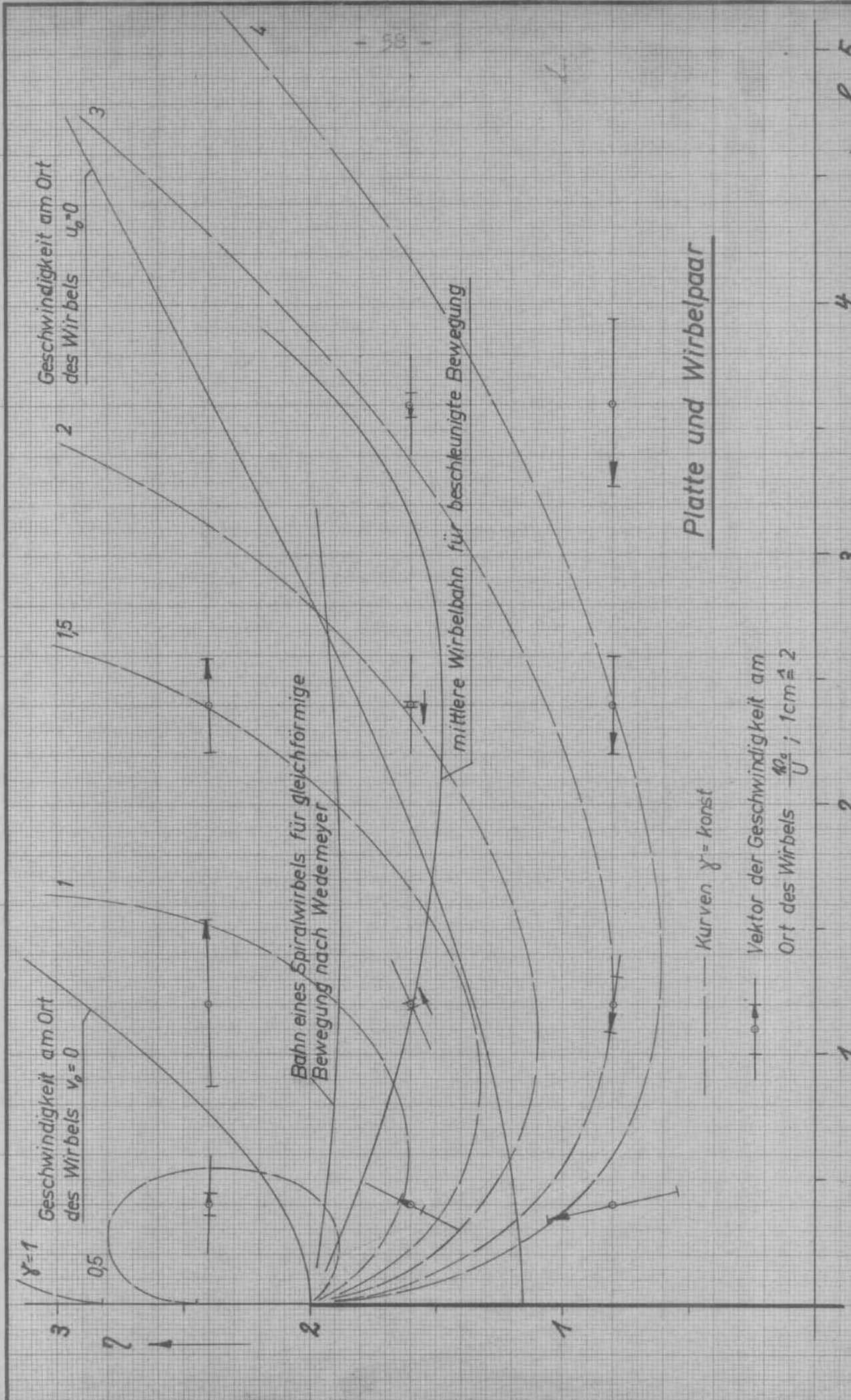
$$y = \frac{\lambda^2 + 4 \cos^2 \varphi}{4 \lambda \sin \varphi}$$

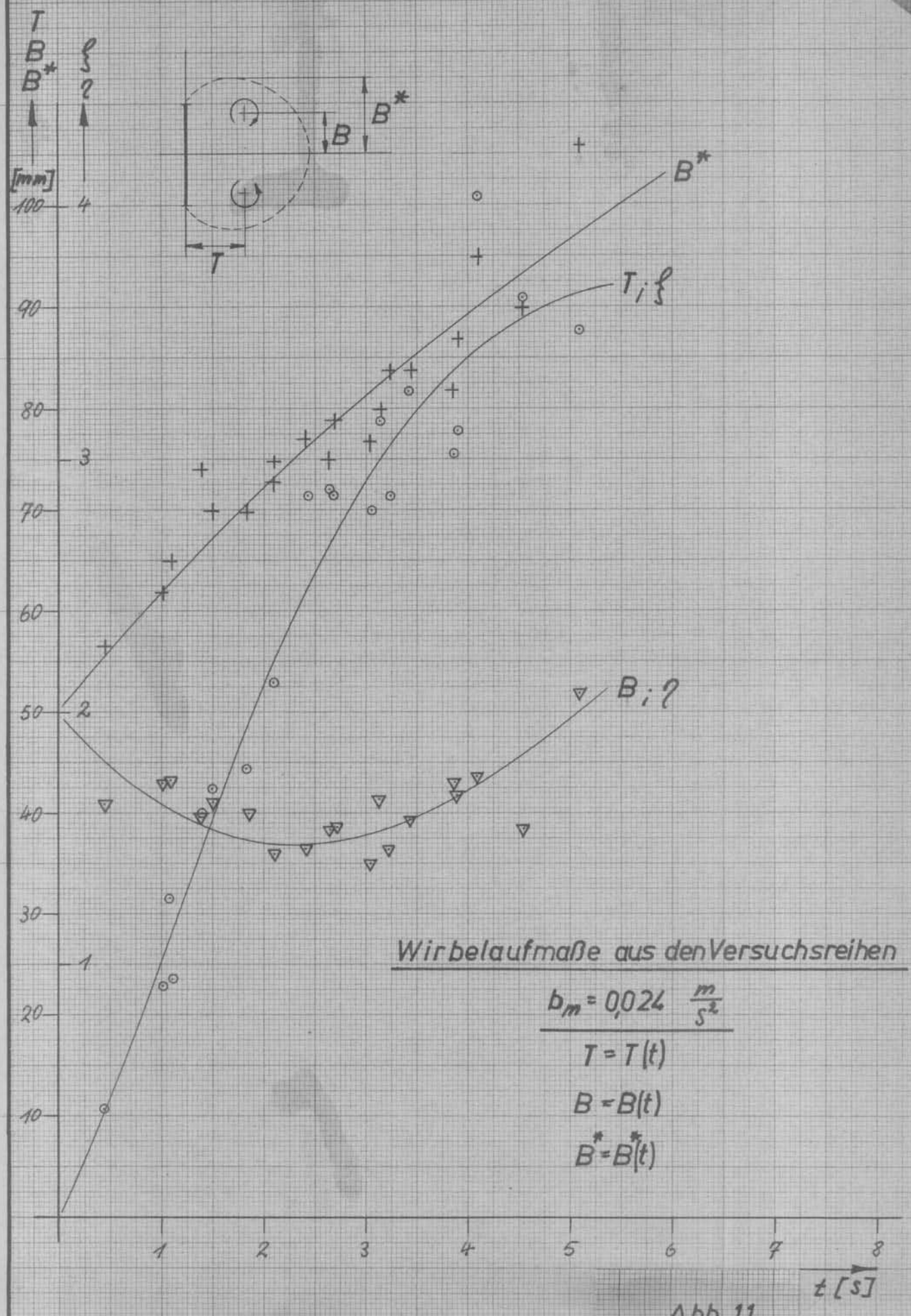


$y = f(\lambda, \varphi)$

φ als Parameter

Abb. 9





Wirbelaufmaße aus den Versuchsreihen

Abb. 11

$U^* \left[\frac{m}{s} \right]$



Fahrtgeschwindigkeit $U^* \left[\frac{m}{s} \right]$
(Geschwindigkeit der Parallelströmung)

$b_m = 0,024 \frac{m}{s^2}$

0,5

0,4

0,3

0,2

0,1

1

2

3

4

5

6

7

8

$t \left[s \right]$

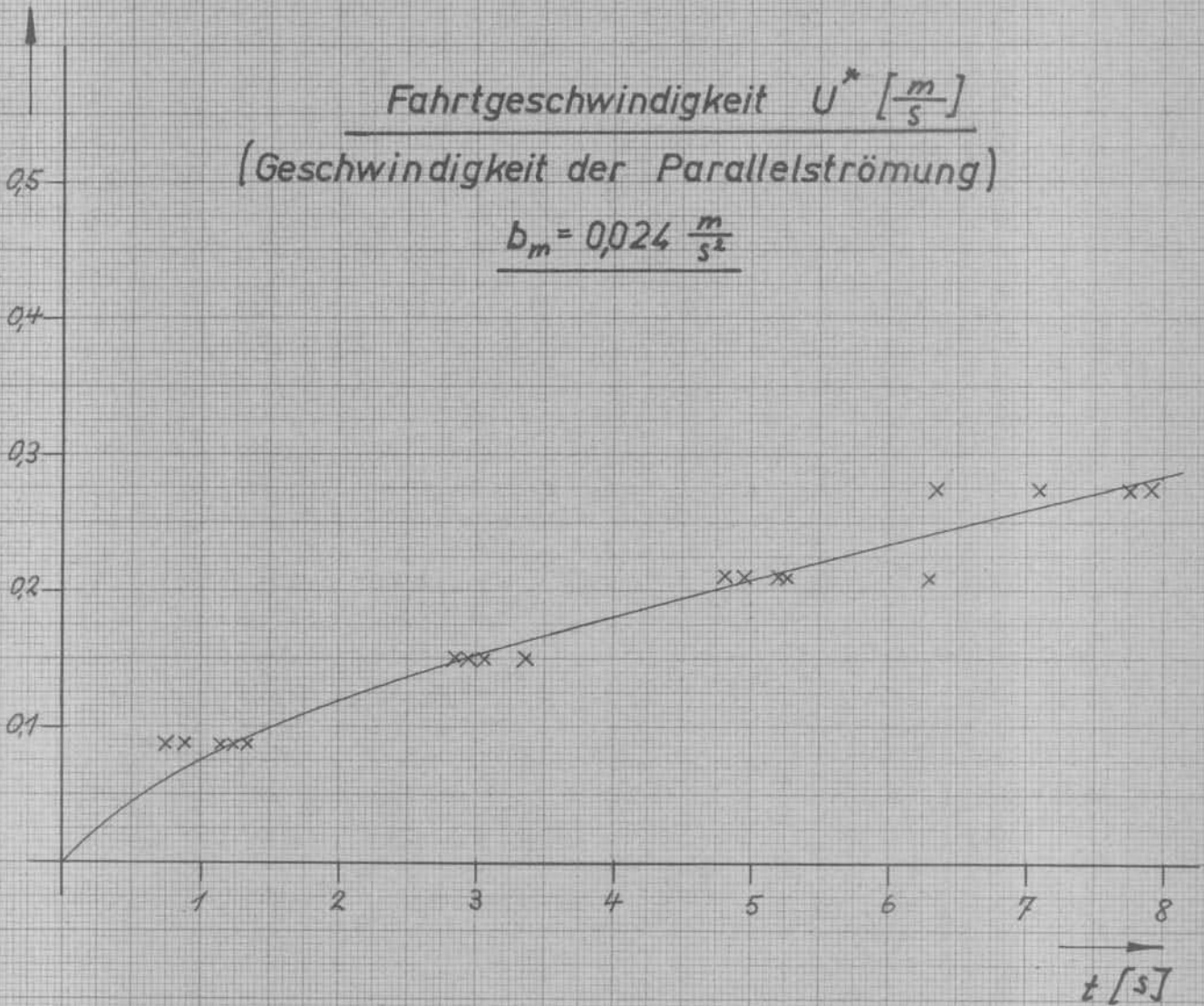
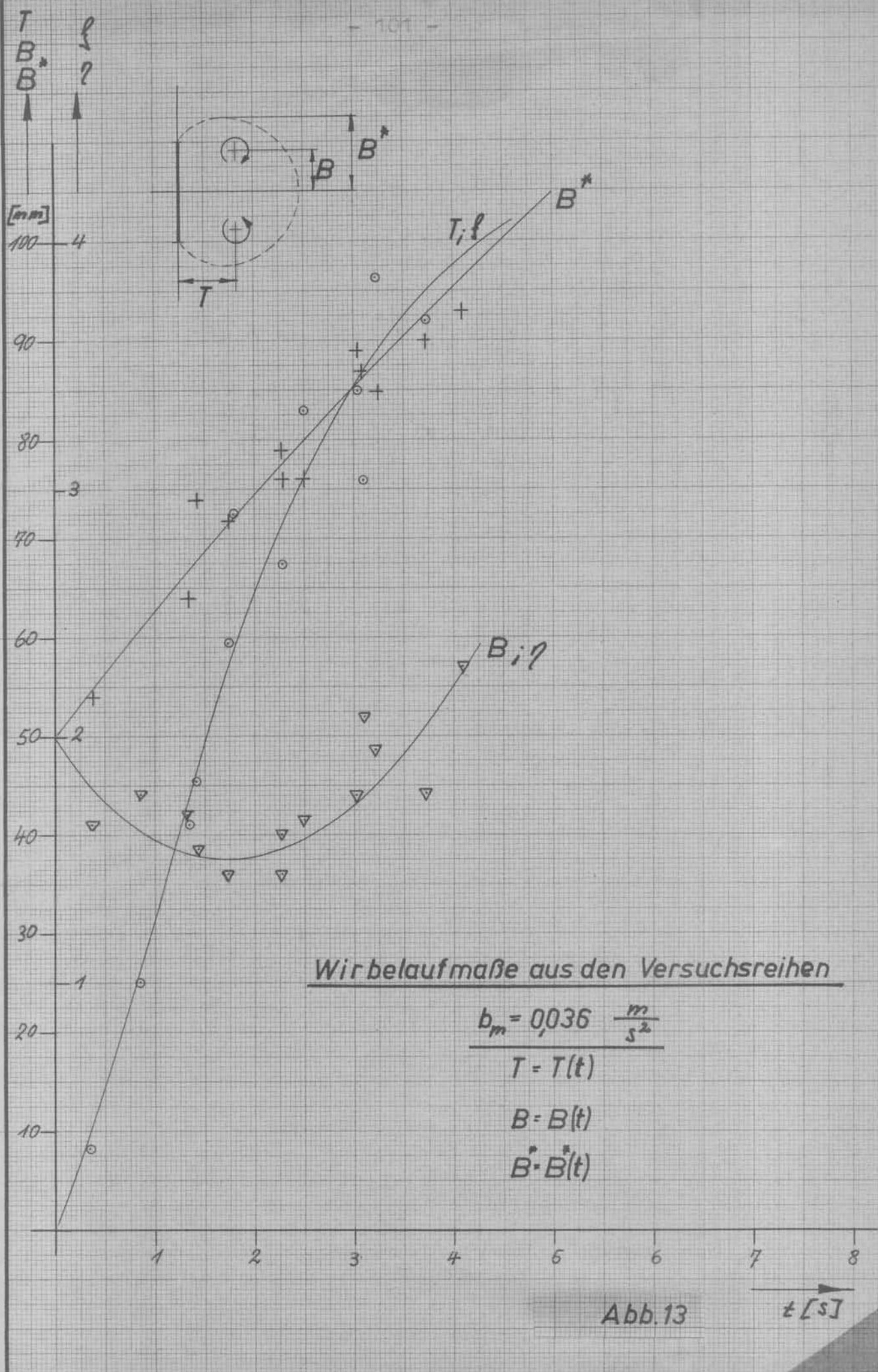


Abb. 12



Wir belaufmaße aus den Versuchsreihen

$$b_m = 0,036 \frac{m}{s^2}$$

$$T = T(t)$$

$$B = B(t)$$

$$B^* = B^*(t)$$

Abb.13

t [s]

$U^* \left[\frac{m}{s} \right]$



0,5

0,4

0,3

0,2

0,1

Fahrtgeschwindigkeit $U^* \left[\frac{m}{s} \right]$
(Geschwindigkeit der Parallelströmung)

$b_m = 0,036 \frac{m}{s^2}$

1

2

3

4

5

6

7

8

$t [s]$

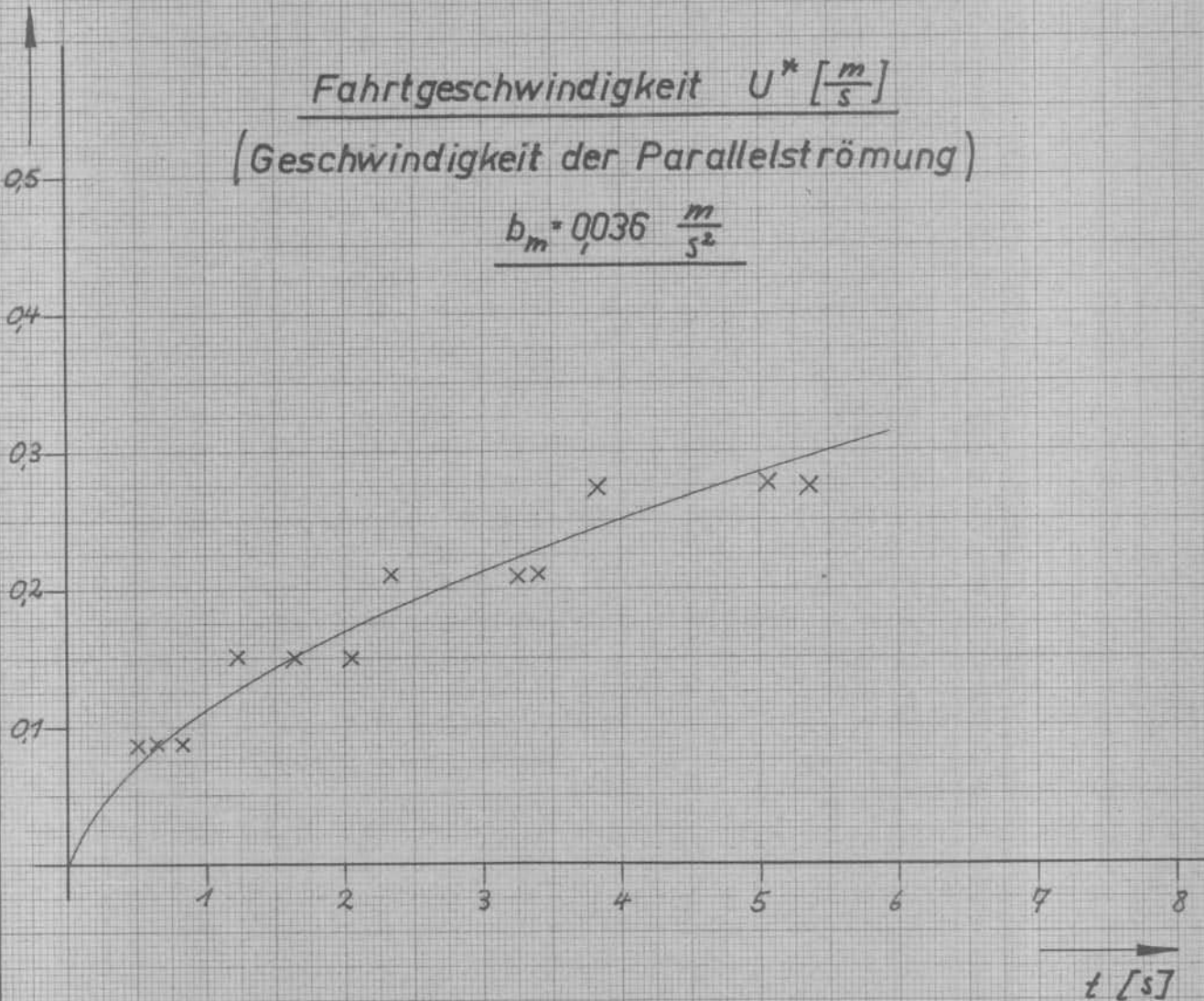
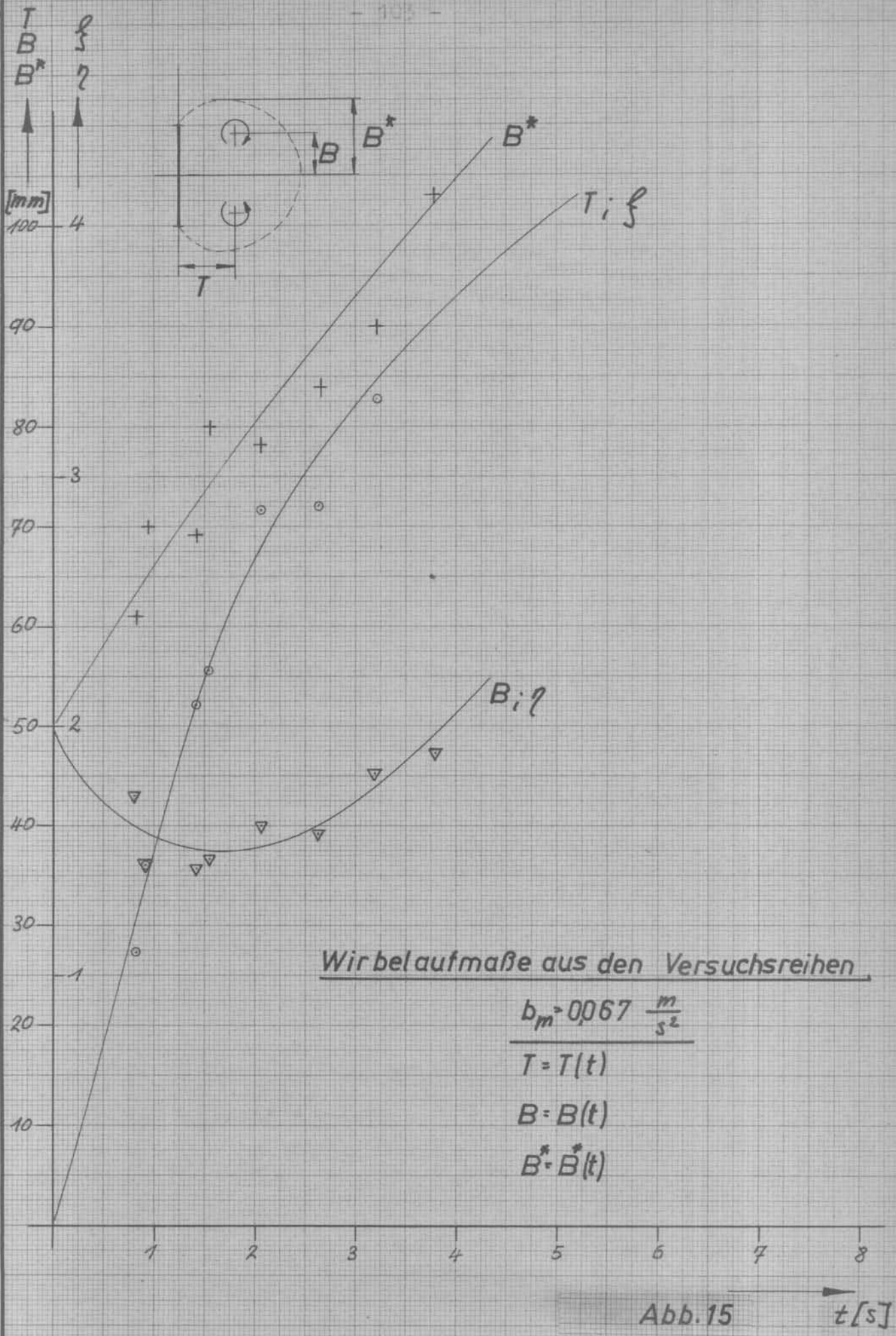


Abb. 14



Wirbelaufmaße aus den Versuchsreihen

$$b_m = 0,067 \frac{m}{s^2}$$

$$T = T(t)$$

$$B = B(t)$$

$$B^* = B^*(t)$$

Abb.15 $t[s]$

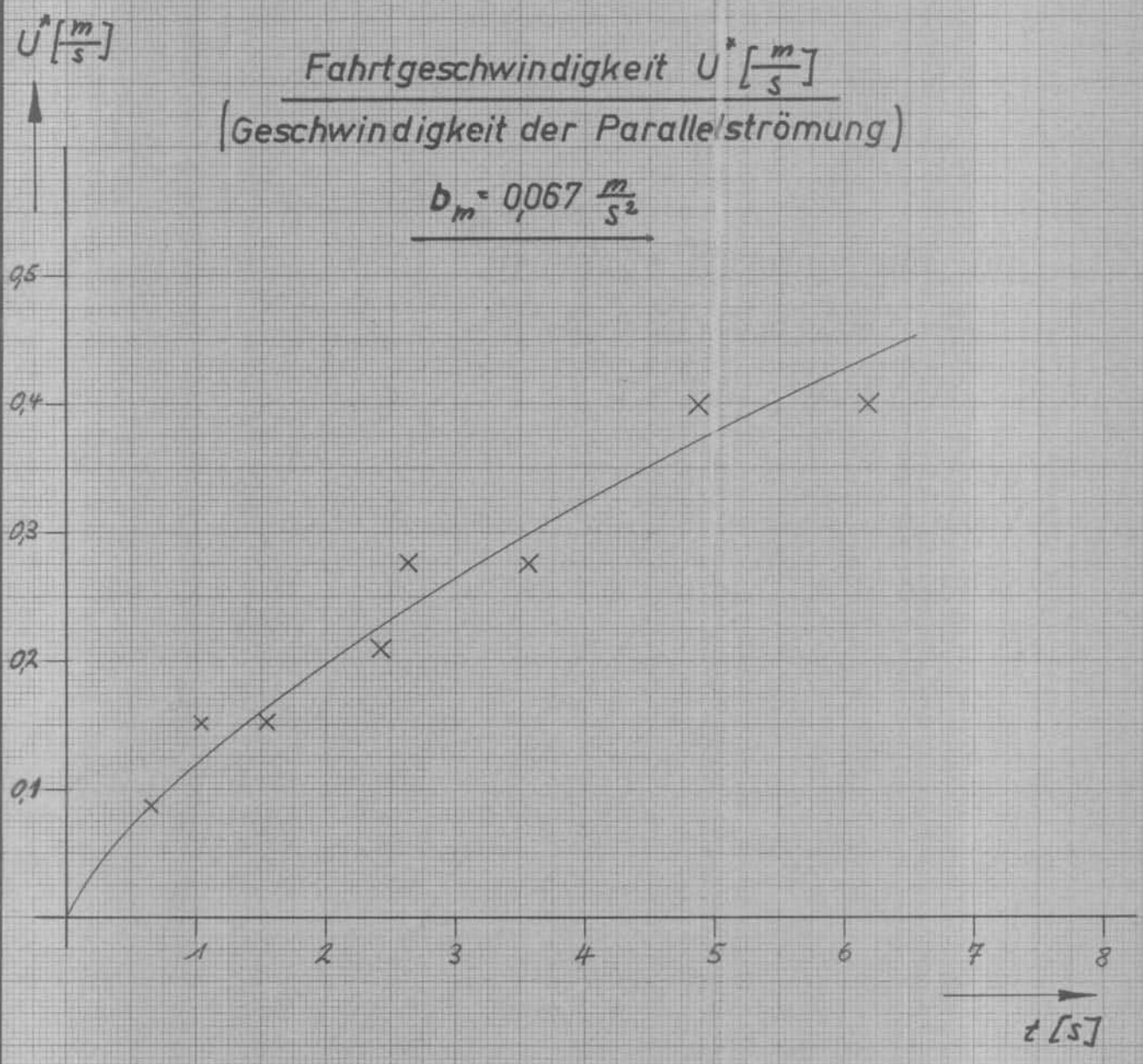


Abb. 16

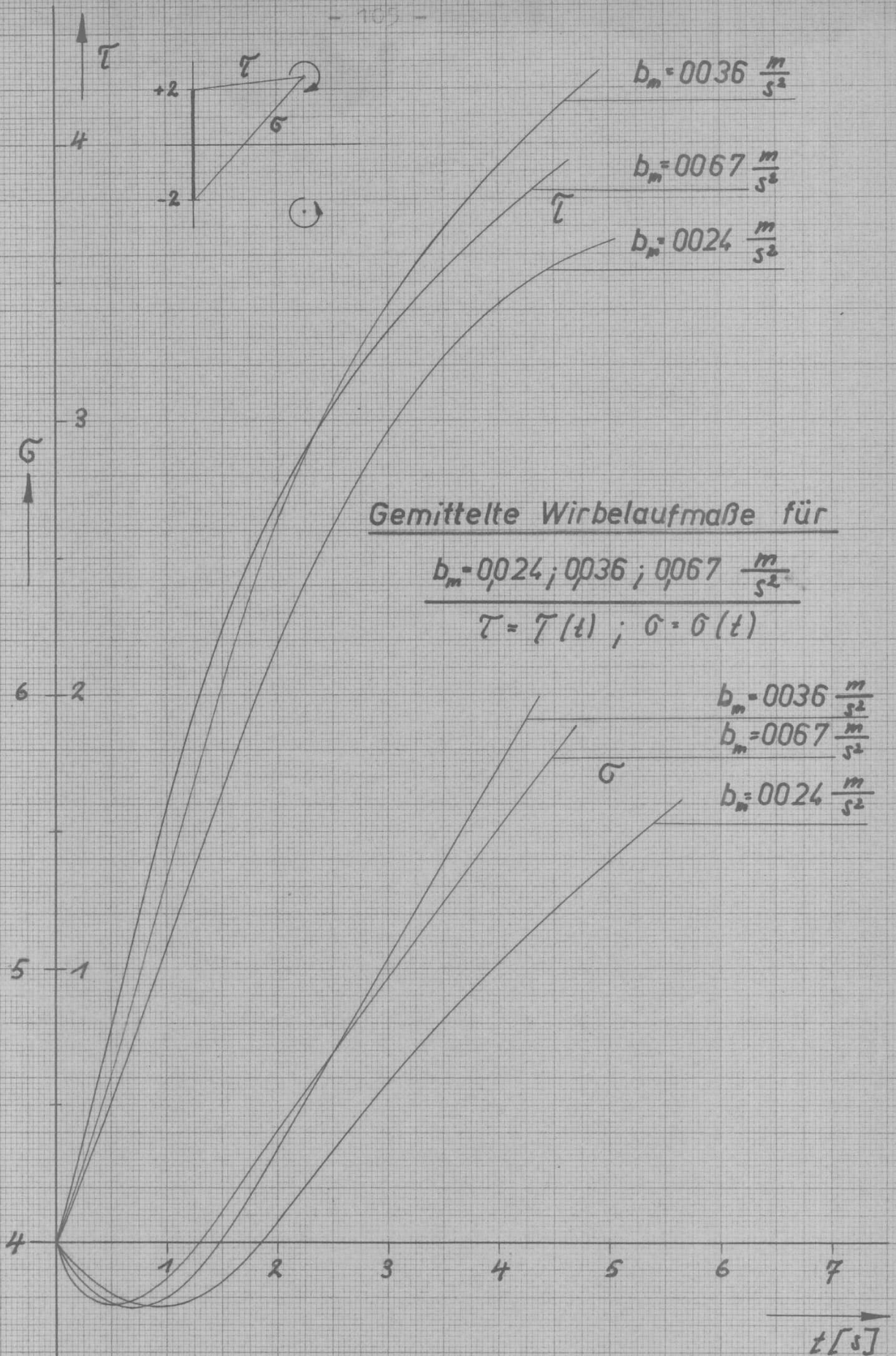


Abb. 17

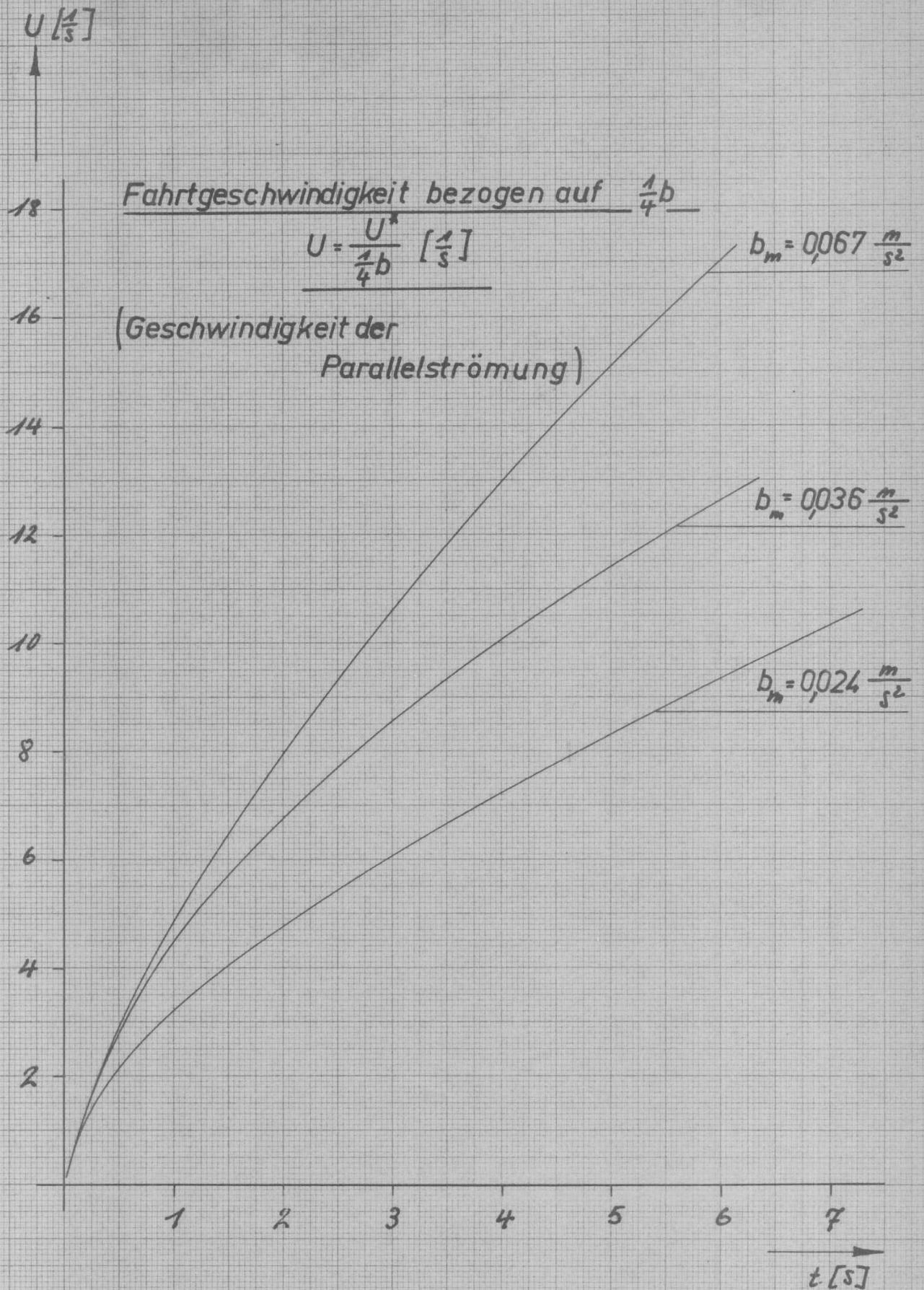


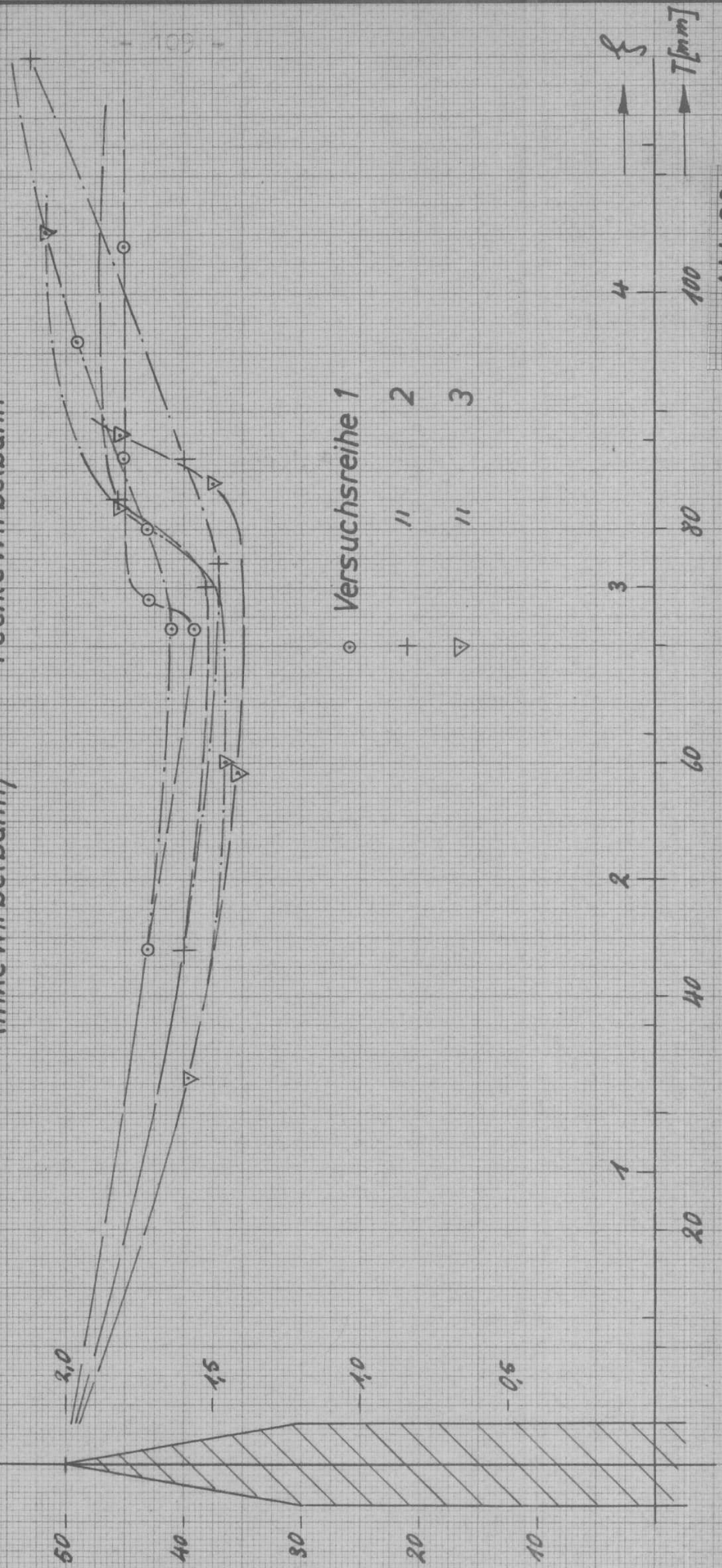
Abb. 18

B [mm]

?

Wirbelbewegung hinter einer Platte

— linke Wirbelbahn; — rechte Wirbelbahn



○ Versuchsreihe 1

+

▽

''

''

+

▽

1 2 3 4
20 40 60 80 100
T [mm]

Abb 20

T [mm] ℓ

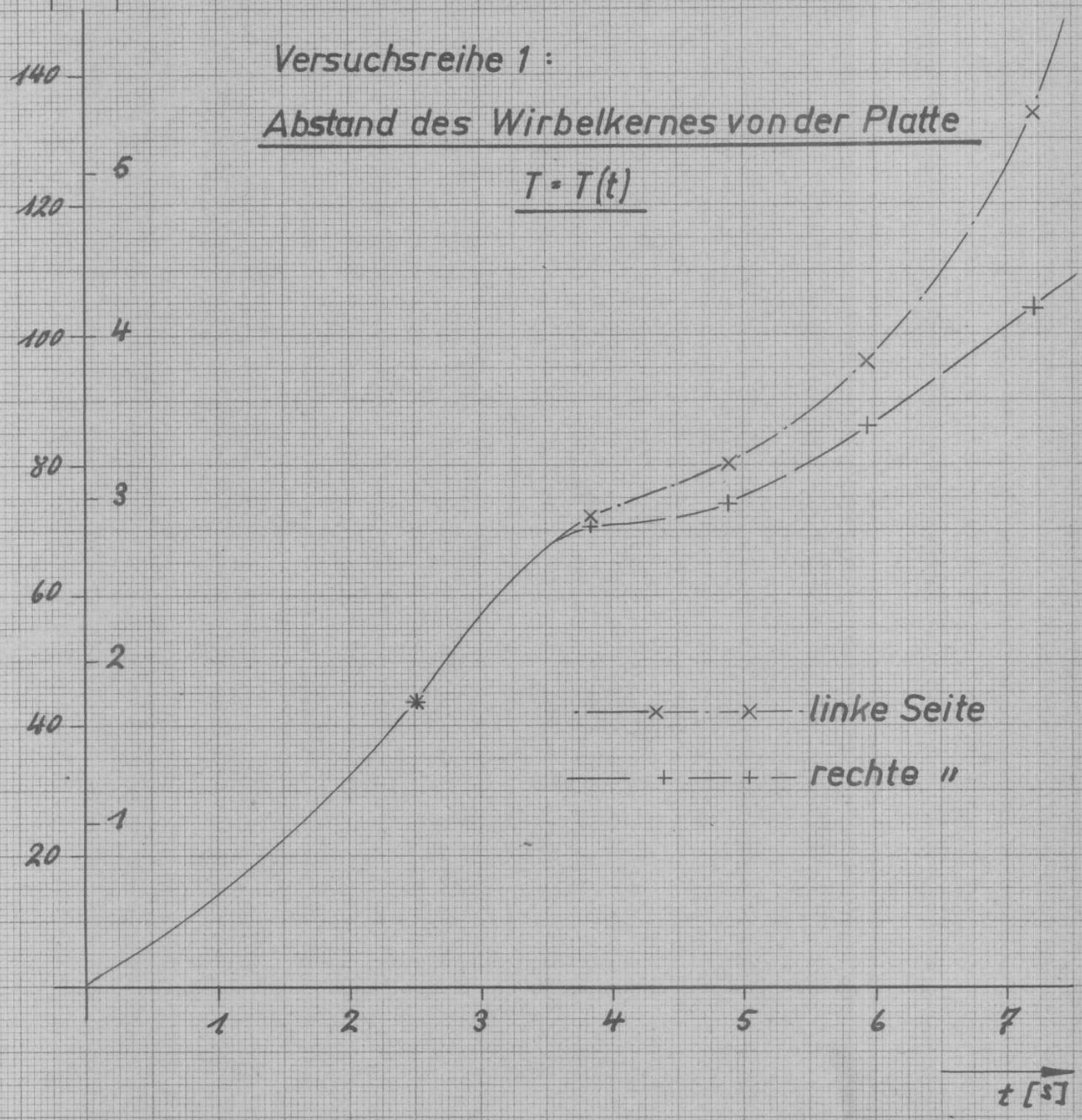


Abb. 21

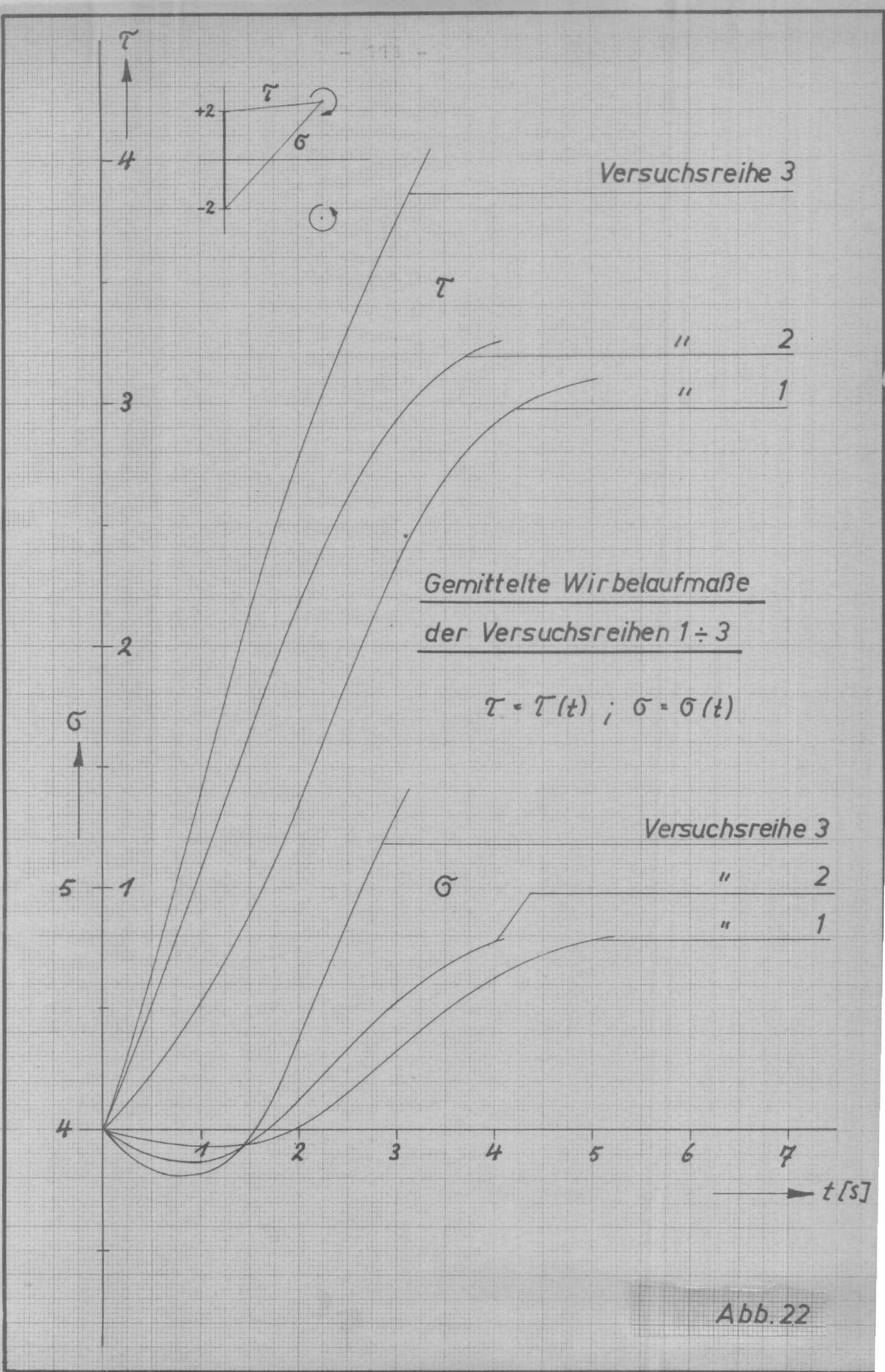


Abb.22

$U \left[\frac{1}{s} \right]$ Fahrtgeschwindigkeit bezogen auf $\frac{1}{4}b$
 $U = \frac{U^*}{\frac{1}{4}b} \left[\frac{1}{s} \right]$

(Geschwindigkeit der Parallelströmung)

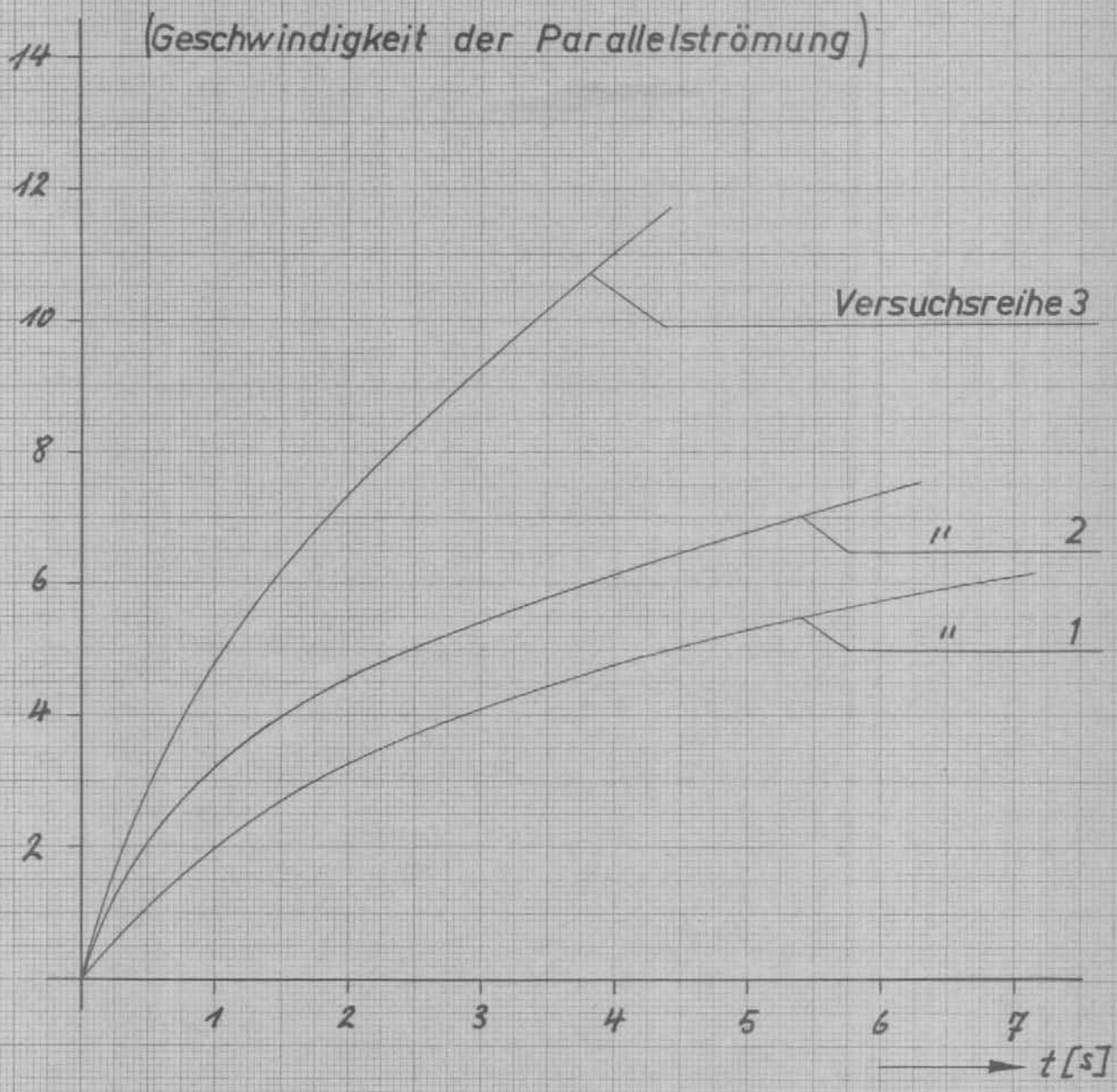


Abb. 23

B [mm]

Wirbelbewegung hinter einer Platte

Mittlere Wirbelbahn und theoretischer Widerstandsbeiwert

einzelner Versuchsreihen

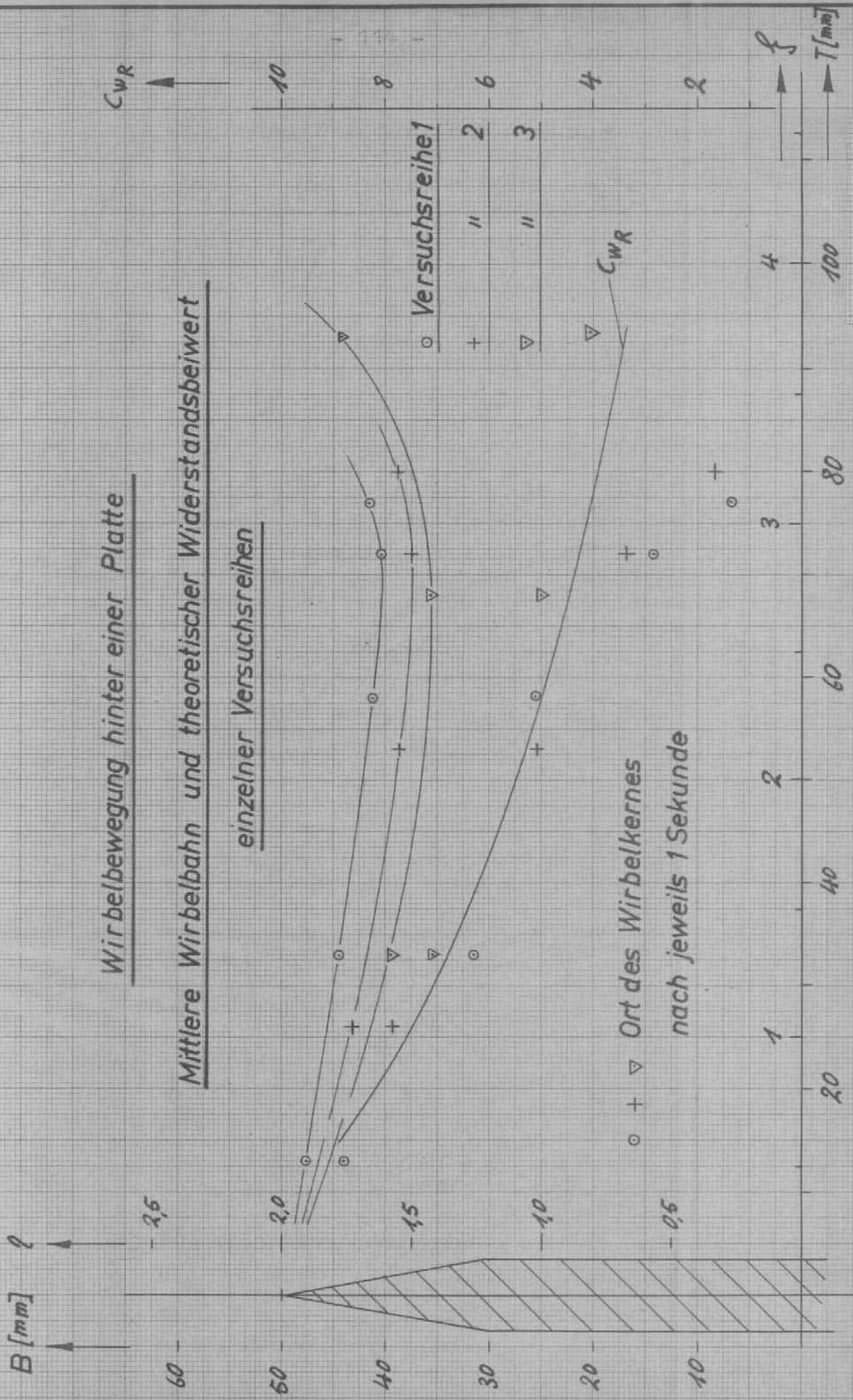
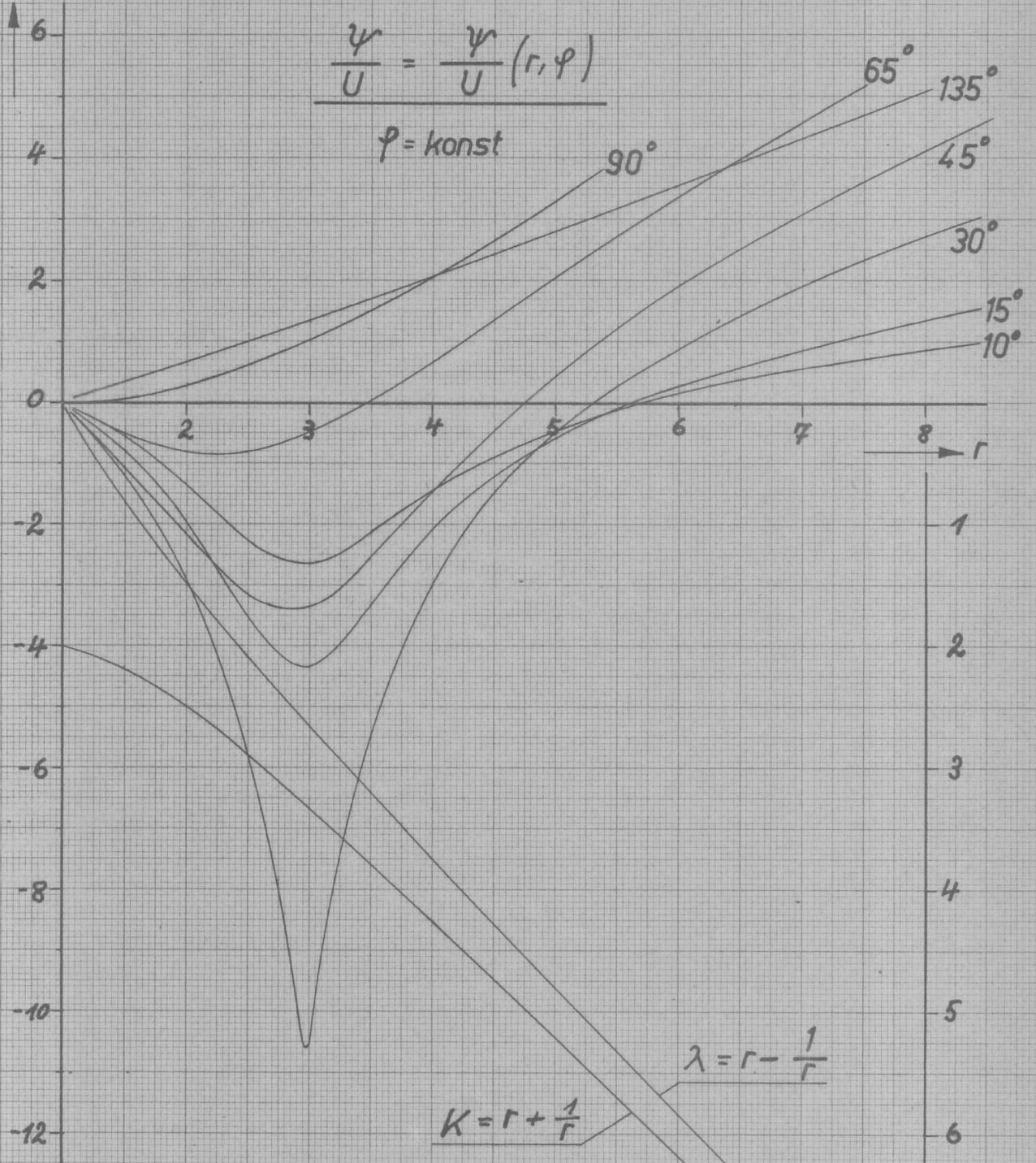


Abb. 24

Stromfunktion für die Wirbellage

$\xi_0 = 2,34; \eta_0 = 1,50$ entsprechend $R_0 = 2,97; \varphi_0 = 27^\circ$

$\frac{\psi}{U}$



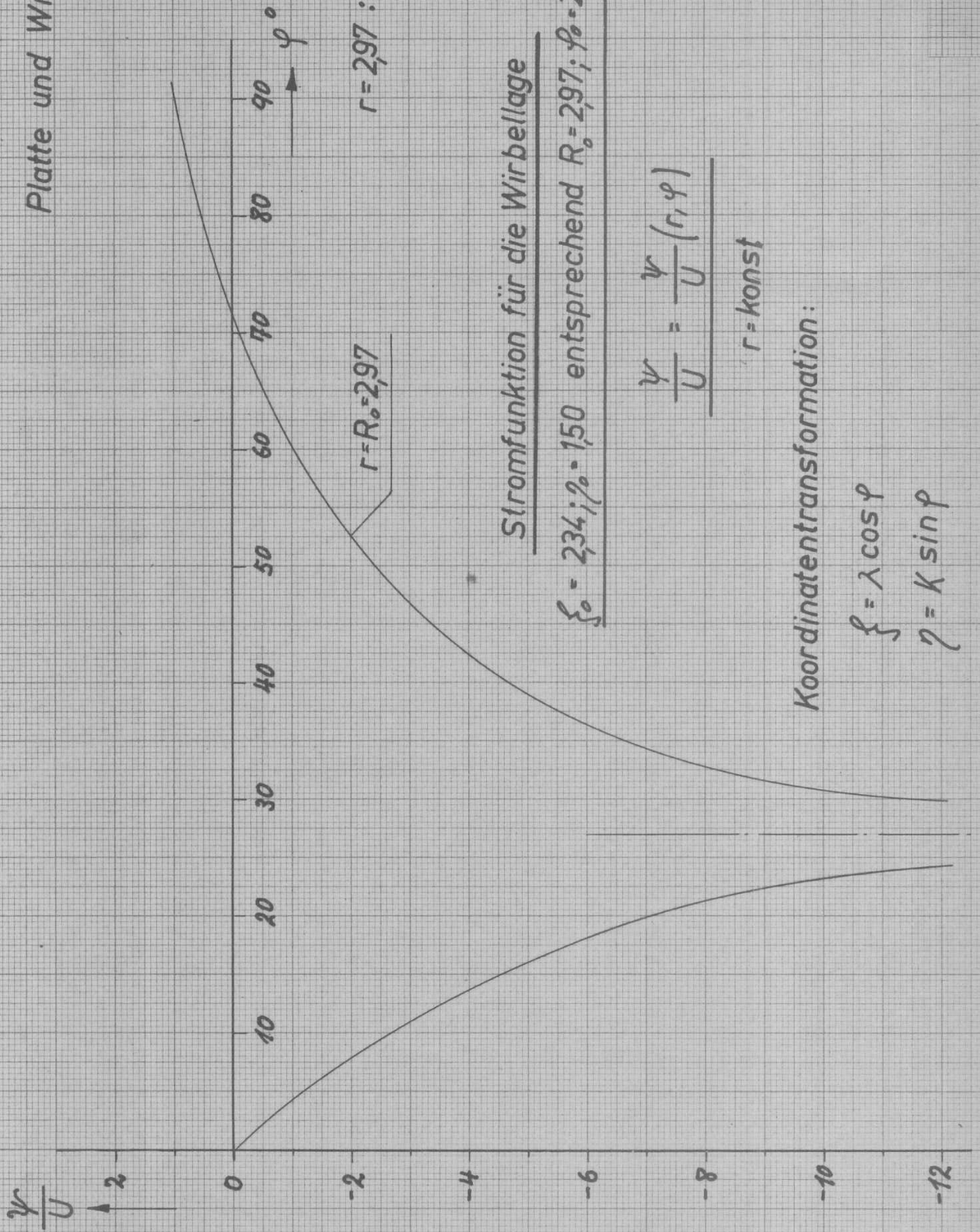
Koordinatentransformation:

$$\xi = \lambda \cos \varphi$$

$$\eta = K \sin \varphi$$

Abb. 25

Platte und Wirbelpaar



$r = 2,97; \lambda = 2,63$
 $K = 3,30$

Stromfunktion für die Wirbellage

$\psi_0 = 234; \gamma_0 = 150$ entsprechend $R_0 = 2,97; \varphi_0 = 27^\circ$

$$\frac{\psi}{U} = -\frac{\psi}{U}(r, \varphi)$$

 $r = \text{konst}$

Koordinatentransformation:

$\xi = \lambda \cos \varphi$
 $\eta = K \sin \varphi$

Abb. 26

Platte und Wirbelpaar

Stromlinienbild

$$\Delta \psi = 1$$

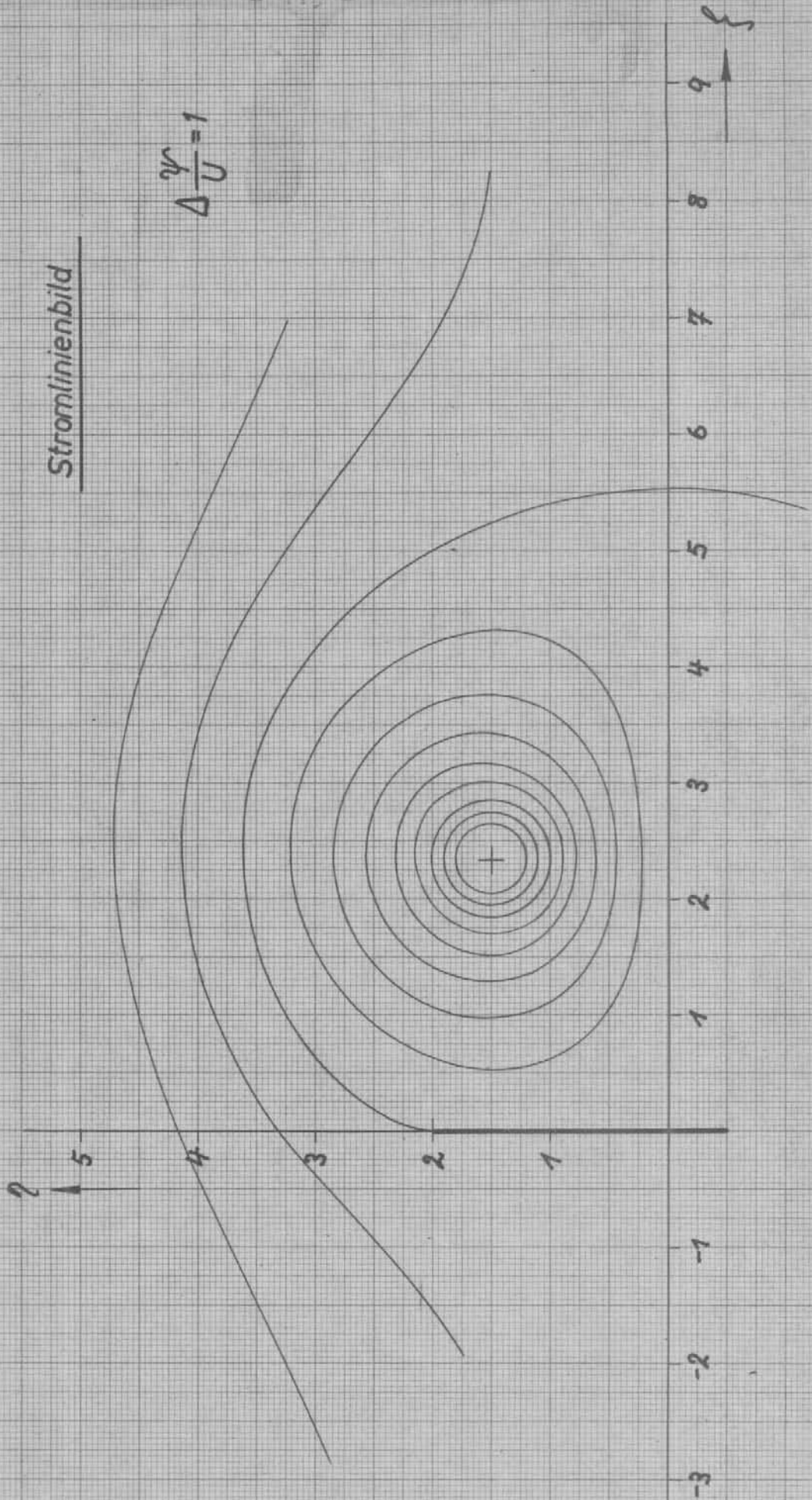


Abb. 27



Abb. 28

Stromlinienbild - Vergleich von Versuch und
Rechnung

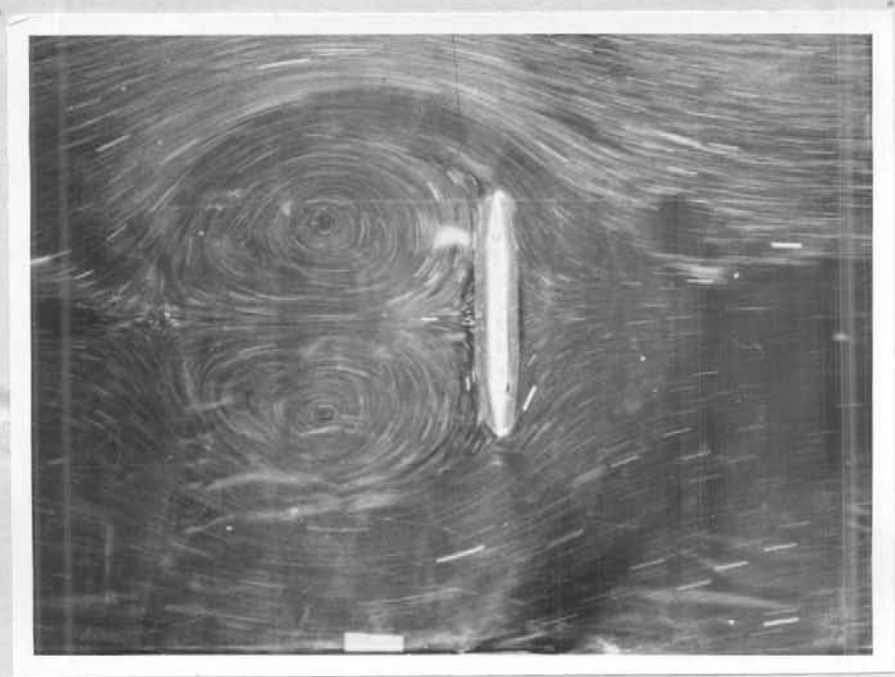


Abb. 29

nach 3,8 Sekunden



Abb. 30

nach 4,9 Sekunden

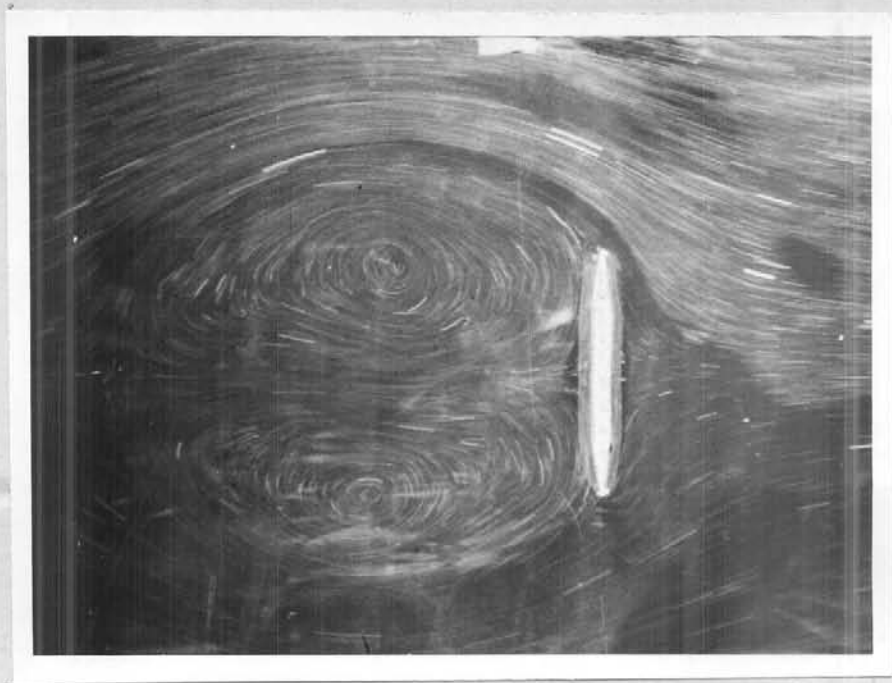


Abb. 31

nach 5,9 Sekunden



Abb. 32

nach 7,2 Sekunden



Abb. 33

nach 11,7 Sekunden

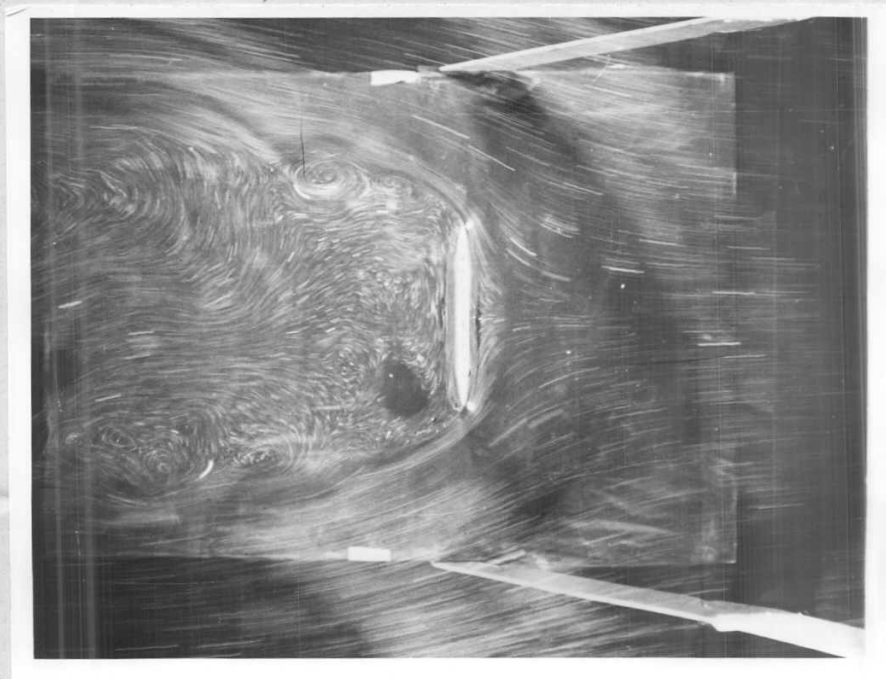


Abb. 34

nach 17,6 Sekunden