

15 | 1955

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Dr. K. Wieghardt

Über Reibungsschichten bei Druckanstieg

Eine Übersicht über Berechnungsmethoden

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

SONDERDRUCK

aus Heft 9, 1955

der „Forschungshefte für Schiffstechnik“ · Schiffbau · Schiffsmaschinenbau

Schiffahrts-Verlag »Hansa« C. Schroedter & Co. · Hamburg 11 · Stubbenhuk 10

Über Reibungsschichten bei Druckanstieg

Eine Übersicht über Berechnungsmethoden

Dr. K. Wieghardt

Institut für Schiffbau der Universität Hamburg

Über Reibungsschichten bei Druckanstieg¹⁾

Eine Übersicht über Berechnungsmethoden

Dr. K. Wieghardt, Institut für Schiffbau der Universität Hamburg

Die Berechnung turbulenter Reibungsschichten bei Druckanstieg interessiert nicht nur in Hinblick auf die Anwendung auf die Profilmströmung an Tragflügeln oder Turbinenschaufeln, sondern auch zur Berechnung des Reibungswiderstands am Schiff, wenn man sich dabei auch meistens mit dem Vergleich mit der Plattenströmung bei konstantem Druck begnügt. Denn zur Abschätzung weiterer Einzelheiten, wie z. B. des Reibungsformeffektes und der Ablösung, wird man auch hier genauere Methoden anwenden müssen.

Im folgenden wird nun eine Übersicht über die wesentlichen Annahmen gegeben, auf denen die üblichen Berechnungsverfahren turbulenter Reibungsschichten bis zur Ablösung beruhen. Nach einer Kritik der wichtigsten zugrunde liegenden experimentellen Arbeiten wird auf die Notwendigkeit neuer, zuverlässiger Messungen hingewiesen.

A. Einleitung

Die Berechnung der laminaren Grenzschicht an einem ebenen oder rotationsymmetrischen Körper in inkompressibler Flüssigkeit ist im wesentlichen eine Aufgabe für angewandte Mathematik, da von seiten der Physik *L. Prandtl* mit der Aufstellung der Grenzschichtgleichung im Jahr 1904 bereits alles getan hat.

Ganz anders verhält es sich aber leider mit den in der Technik fast ausschließlich vorkommenden turbulenten Reibungsschichten, bei denen einer mittleren Hauptströmung unregelmäßige Geschwindigkeitsschwankungen überlagert sind. Eine rationelle Berechnung der Mittelwerte solcher Strömungen wird erst dann möglich sein, wenn das allgemeine Problem der Turbulenz gelöst sein wird. Die von *G. I. Taylor* begründete strenge, statistische Turbulenztheorie ist sicher ein bedeutender erster Schritt in dieser Richtung, sie ist aber zur Zeit noch immer mit den allereinfachsten Strömungen beschäftigt, wie z. B. dem Abklingen der Turbulenz in einer gleichförmigen Parallelströmung und kann daher zu dem viel komplizierteren Problem der Reibungsschicht nur wenig beitragen (vgl. [1]). Wegen der praktischen Bedeutung der Reibungsschichten — vor allem für den Widerstand — mußten aber irgendwelche Berechnungsunterlagen geschaffen werden, und es blieb nur der Ausweg, aus Messungen möglichst allgemein gültige Beziehungen herauszudestillieren.

Bei dieser Sachlage werden auch in Zukunft zunächst nur halbempirische Theorien möglich sein, und es ist vielleicht nützlich, zusammenzustellen, welche Beziehungen dabei streng gelten, welche wenigstens plausibel gemacht werden können, und welche noch rein empirisch sind. Es genügt dazu, die funktionellen Zusammenhänge formal zu betrachten, ohne auf Einzelheiten zu sehr einzugehen, und es soll auch nur über Arbeiten berichtet werden, deren Ziel in der Verfeinerung der theoretischen Unterlagen besteht. Arbeiten, die vor allem der praktischen Berechnung des Widerstandes dienen — wie z. B. die von *N. Scholz* [2] — bleiben daher, unbeschadet ihres Wertes, hier unberücksichtigt. Auf die umfassende Behandlung des gesamten Fragenkomplexes in dem Buch von *H. Schlichting* [3] sei deshalb besonders hingewiesen.

B. Impuls- und Energiesatz

Ausgangspunkt ist auch hier die Prandtl'sche Grenzschichtgleichung, wobei aber jetzt nicht wie bei laminarer Strömung ein direkter Zusammenhang zwischen den Zähigkeitskräften und der Geschwindigkeitsverteilung bekannt ist; die Schubspannung τ bleibt zunächst eine unbekannte Funktion. Da die

rotationssymmetrische Strömung die ebene Strömung als Grenzfall mitenthält, soll die Grundgleichung für diesen allgemeineren stationären Fall angegeben werden:

$$(1) \quad r u u_s + r v u_n = - \frac{r}{\rho} \frac{dp}{ds} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial n} r \tau, \text{ mit}$$

$$(2) \quad - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} = U U_s \text{ nach der Bernoulli-Gleichung.}$$

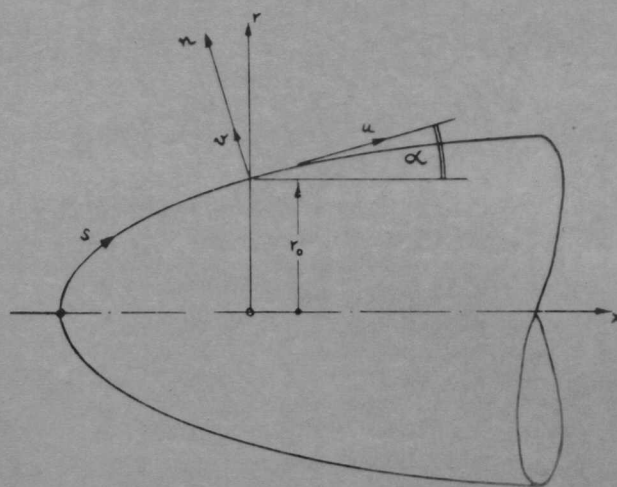


Bild 1 Bezeichnung der Koordinaten an Umdrehungskörpern

Hierbei gelten wie in Bild 1 die folgenden Bezeichnungen:

- x Koordinate längs der Achse des Umdrehungskörpers bzw. längs der Profilschneide bei ebener Strömung
- s Bogenlänge längs der Oberfläche, vom Staupunkt aus gemessen
- n Wandabstand senkrecht zur Oberfläche des Umdrehungskörpers
- y Wandabstand senkrecht zur Oberfläche bei ebener Strömung
- r Radialabstand von der Achse
- $r_0(x)$ der jeweilige Körperradius
- $dr_0/dx = \tan \alpha$, $r = r_0 + n \cos \alpha$
- u, v Komponenten der mittleren Geschwindigkeit in der Reibungsschicht tangential und normal zur Oberfläche
- U Geschwindigkeit am Rand der Schicht = Potentialgeschwindigkeit

$$u_s = \frac{\partial u}{\partial s}, \quad u_n = \frac{\partial u}{\partial n}, \quad U_s = \frac{dU}{ds} \text{ usw.}$$

¹⁾ Erweiterte Fassung eines Vortrags im strömungstechnischen Seminar der Technischen Hochschule Karlsruhe am 8. 2. 1955.

- ρ Dichte der Flüssigkeit (kg/m^3)
- μ Zähigkeit der Flüssigkeit ($\text{kg/m}^2\text{s}$)
- $\nu = \mu/\rho$ kinematische Zähigkeit (m^2/s)
- p statischer Druck
- τ Schubspannung in der Reibungsschicht.

Gl. (1) sagt aus, daß der in ein Volumenlement an einem festgehaltenen Ort eintretende Flüssigkeitsimpuls minus dem austretenden Impuls gleich ist dem am Volumenlement angreifenden Kräften durch den statischen Druck und durch die Schubspannungen; und zwar alles bezogen auf die Komponenten parallel zur Körperoberfläche.

Außerdem gilt natürlich die Kontinuitätsgleichung:

$$(3) \quad \frac{\partial u_r}{\partial s} + \frac{\partial v_r}{\partial n} = 0.$$

Wesentliche Voraussetzung der Gl. (1) ist bekanntlich, daß die Dicke der Reibungsschicht δ , innerhalb derer eine Schubspannung existiert, klein ist gegen die Körperabmessungen, also insbesondere gegen den jeweiligen Körperradius r_0 . Das äußerste Heck eines Umdrehungskörpers, wo $r_0 \rightarrow 0$ strebt, ist demnach auszuschließen.

Zusammen mit den Randbedingungen $u, v = 0$ am Körper und $u \rightarrow U$ für größere Wandabstände $n \rightarrow \infty$, bilden die Gleichungen (1) und (3) ein System von Differentialgleichungen zur Berechnung der Grenzschichtströmung u und v , wenn für den Körper $r_0(x)$ die Potentialströmung $U(s)$ ermittelt worden ist. Im allgemeinen ist man nun gar nicht an der Strömung in jedem Punkt innerhalb der Grenzschicht interessiert, sondern nur an gewissen kennzeichnenden Größen, wie der Grenzschichtdicke, an der Wandschubspannung τ_0 , und an der Lage der Ablösestelle, wo die Reibungsschicht in das Totwasser übergeht. Daher genügt es, die Gleichung (1) nach v . Kármán [4] zu mitteln, indem man sie durch die Schicht hindurch

integriert: $\int_0^\infty (1) dn$. Man erhält dann den sogenannten

Impulssatz für die Reibungsschicht, der nach gewissen Umformungen geschrieben werden kann:

$$(4) \quad \frac{1}{2} c_f' = \frac{\tau_0}{\rho U^2} = \frac{1}{r_0} \frac{d}{ds} (r_0 \delta_2) + (2 + H) \frac{\delta_2}{U} U_s,$$

mit c_f' = örtlicher Beiwert des Reibungswiderstandes = $\frac{\tau_0}{\rho/2 U^2}$

τ_0 = Wandschubspannung

$$\delta_1 = \text{Verdrängungsdicke} = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) \frac{r}{r_0} dn$$

$$\delta_2 = \text{Impulsverlustdicke} = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) \frac{r}{r_0} dn$$

$$\delta_3 = \text{Energieverlustdicke} = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \left[\frac{u}{U}\right]^2\right) \frac{r}{r_0} dn$$

H = Formparameter des Geschwindigkeitsprofils = δ_1/δ_2

H_{32} = Formparameter des Geschwindigkeitsprofils = δ_3/δ_2

re = örtliche Reynoldszahl der Reibungsschicht = $U\delta_2/\nu$.

Eine analoge Gleichung für den Verlust an kinetischer Energie in der Schicht infolge der Arbeit der Schubspannungen erhält man [5], wenn man $\int_0^\infty (1)u dn$ bildet und wieder umformt:

$$(5) \quad e c_f' = \int_0^\infty \frac{\tau}{\rho/2 U^2} \frac{\partial u}{\partial n} \frac{r}{r_0} dn = \frac{1}{r_0} \frac{d}{ds} (U^3 r_0 \delta_3), \text{ mit}$$

$$(6) \quad e = \int_0^\infty \frac{\tau}{\tau_0} \frac{\partial u}{\partial n} \frac{r}{r_0} dn.$$

Natürlich könnte man nun noch weitere solche Gleichungen aufstellen und so die ursprüngliche partielle Differentialgleichung (1) durch ein System von unendlich vielen gewöhnlichen Differentialgleichungen ersetzen. Es scheint jedoch zweckmäßig, sich mit diesen beiden Gleichungen (4) und (5) zu begnügen. Und zwar einerseits deshalb, weil nur noch diese Gleichungen von den physikalisch wichtigsten und direkt anschaulichen Größen handeln, nämlich vom Impuls- und Energieverlust in der Schicht. Andererseits enthält aber auch jede weitere solche Gleichung bei turbulenten Reibungsschichten immer je eine neue unbekannte Größe, wie c_f' in Gl. (4) und e in Gl. (5), über die zunächst keine Aussagen möglich sind, solange ein Ansatz für die Schubspannung fehlt.

Setzt man sich über diese Unkenntnis vorerst hinweg, so kann man Gl. (4) als eine Differentialgleichung für die Impulsdicke auffassen, also für das Anwachsen von $\delta_2(s)$ als Maß für die Dicke der Schicht. Gl. (5) kann dann als Bestimmungsgleichung für H_{32} betrachtet werden, wenn man δ_3 ersetzt durch $\delta_2 \cdot H_{32}$. Dieser Profilparameter hängt nur von der Form des Geschwindigkeitsprofils $u(n)$ ab, und nicht von der Dicke der Reibungsschicht, so daß die Geschwindigkeitsverteilung in der Schicht durch δ_2 bzw. $re = U\delta_2/\nu$ und H_{32} nach Größe und Art bereits gut gekennzeichnet werden kann. Zur Berechnung der Änderung des Parameters mit der Bogenlänge: $H_{32}(s)$ ist es nun zweckmäßig, aus den Gln. (4) und (5) das Glied mit $d\delta_2/ds$ zu eliminieren, wodurch man erhält:

$$(7) \quad \frac{d H_{32}}{ds} = H_{32} (H - 1) \frac{1}{U} \frac{dU}{ds} + (e - 1/2 H_{32}) \frac{c_f'}{\delta_2}$$

In dieser Gleichung tritt übrigens die Körperform $r_0(x)$ nicht mehr explizit auf; sie spielt hier nur noch insofern eine Rolle, als die Druckverteilung, bzw. der Verlauf der Potentialgeschwindigkeit $U(s)$, von ihr abhängt.

Die Gleichungen (4) und (7) bilden das theoretische Fundament der modernen Berechnungsverfahren für turbulente Reibungsschichten. Sie sind für laminare wie für turbulente Reibungsschichten im Sinne der Grenzschichttheorie genau so streng gültig wie die ursprüngliche Gleichung (1); allerdings sagen sie als spezielle Integrale inhaltlich weniger aus als diese partielle Differentialgleichung. Deshalb, und weil ein theoretischer Ansatz für die turbulenten Schubspannungen τ oder auch nur für die daraus abgeleiteten Größen c_f' und e noch fehlt, ist es nötig, diese Gleichungen durch empirische Beziehungen oder plausible Hypothesen zu ergänzen.

C. Hilfsmaßnahmen

Im folgenden werden nun die zusätzlichen Annahmen aufgeführt, die von den verschiedenen Autoren gemacht worden sind, deren Berechnungsverfahren im nächsten Abschnitt dann kurz besprochen werden. Es soll dabei nur auf die funktionalen Zusammenhänge Wert gelegt werden, d. h. von welchen Größen z. B. c_f' überhaupt abhängt. Der zahlenmäßige, eigentliche Verlauf solcher Funktionen, der doch nur aus Versuchen gewonnen werden kann, ist von unserem jetzigen Standpunkt aus solange von untergeordneter Bedeutung, als wirklich begründet ist, welche Größen sich gegenseitig beeinflussen und welche nicht.

I. Annahme über die Geschwindigkeitsprofile.

Abgesehen von der unmittelbaren Wandnähe bilden alle Geschwindigkeitsprofile, die bei irgendwelchem Druckabfall oder -Anstieg gemessen worden sind, in guter Näherung eine einparametrische Kurvenschar, wenn sie geeignet dimensionslos gemacht werden, nämlich:

$$(8) \quad \frac{u}{U} = f\left(\frac{r}{r_0} \frac{n}{\delta_2}, H\right), \text{ bzw. } \frac{u}{U} = f\left(\frac{y}{\delta_2}, H\right)$$

für ebene Strömung.

Von diesem vereinfachenden Sachverhalt, der von E. Gruschwitz [6] gefunden wurde, wird in allen Verfahren Gebrauch gemacht, außer in dem von J. Rotta [7] (s. unter E).

Dabei ist $H = \delta_1/\delta_2$ als kennzeichnender Parameter in Gl. (8) willkürlich ausgezeichnet. Wegen der Einparametrigkeit besteht ein eindeutiger Zusammenhang zwischen allen Profilparametern, insbesondere kann dann auch H_{32} als Funktion von H allein angesehen werden, also

$$(9) \quad H_{32} = H_{32}(H).$$

Damit kann nun Gl. (7) als Differentialgleichung für H allein — statt für H_{32} und H — umgeschrieben werden:

$$(10) \quad \frac{dH}{ds} = -F_1(H) \frac{1}{U} \frac{dU}{ds} - F_2(H, e) \frac{c_f'}{\delta_2}, \text{ mit}$$

$$(11) \quad F_1(H) = -\frac{(H-1)H_{32}(H)}{dH_{32}(H)/dH} \quad \text{und} \quad F_2(H, e) = \frac{\left(e - \frac{1}{2} H_{32}(H)\right)}{dH_{32}(H)/dH}$$

II. Annahme für die Wandschubspannung c_f' .

Die jeweilige Annahme für c_f' wurde mit wachsenden Genauigkeitsansprüchen immer komplizierter.

- a) $c_f' = \text{const.} = 0,004$. Erste Näherung von E. Gruschwitz [6].
- b) $c_f' = c_f'(re)$, also c_f' nur abhängig von der örtlichen Reynoldszahl der Reibungsschicht. E. Gruschwitz (zweite Näherung) [6]. A. Buri [8]. H. B. Squire und A. D. Young [9]. A. Kehl [10]. A. v. Doenhoff und N. Tetervin [11]. H. C. Garner [12].
- c) $c_f' = c_f'(re, H)$. Diese Beziehung wurde von H. Ludwig und W. Tillmann [13] aufgestellt, theoretisch plausibel gemacht und durch Messungen belegt (s. unter E). Sie wurde seither in den folgenden Verfahren benutzt: E. Truckenbrodt [14]. H. Schuh [15]. J. Rotta [7].

II. Annahme für die Schubspannungsarbeiten $e c_f'$.

Die experimentellen Aussagen über das Integral e sind noch recht spärlich. In ausgebildeter Rohrströmung gilt $e = 1$ für laminare wie für turbulente Strömung; denn die verlorene kinetische Energie entspricht hier gerade der Arbeit der Schubspannung, da wegen der Unveränderlichkeit der Strömung in jedem Querschnitt ein einfaches Energiegleichgewicht herrschen muß. In turbulenten Reibungsschichten mißt man gewöhnlich Werte von e zwischen 0,8 und 1,1; an der Ablösestelle selbst müßte jedoch $e \rightarrow \infty$, da dort τ_0 und $c_f' \rightarrow 0$, während die Arbeit der Schubspannungen in der Schicht $e c_f'$ (s. Gl. (5)) sich auch dort nur langsam in Strömungsrichtung ändert.

Meistens wird nun angenommen, daß nicht nur die Geschwindigkeitsprofile, sondern auch die Verteilungen der Schubspannung eine einparametrische Kurvenschar bilden, und daß sogar ein fester Zusammenhang zwischen beiden bestünde, woraus $e(H, re)$ folgt.

- a) $e = e(H)$
E. Gruschwitz [6].
H. C. Garner [12].

b) $e = e(H, re)$

E. Truckenbrodt [14].

J. Rotta [7].

Nur H. Schuh [15] macht einen feineren Ansatz, um die Abhängigkeit der Schubspannungen vom Geschwindigkeitsgradienten in Strömungsrichtung wenigstens näherungsweise zu erfassen, nämlich:

c) $e = e(H, \Gamma)$, mit

$$(12) \quad \Gamma = \delta_2 re^m \frac{1}{U} \frac{dU}{ds}$$

und $c_f' = g(H) re^{-m}$, $m = 0,268$.

D. Die verschiedenen Rechenverfahren

In diesem Abschnitt werden die einzelnen Verfahren aufgeführt und ihre Hauptannahmen stichwortartig zusammengestellt, ohne daß auf ihre sonstigen Verdienste eingegangen wird.

1. A. Buri [8].

Es wird nur der Impulssatz benutzt mit $c_f'(re)$. Als Profilparameter wird eingeführt

$$\Gamma = \delta_2 re^{1/4} \frac{1}{U} \frac{dU}{ds}$$

Schnelle und gute Berechnung der Impulsdicke ist möglich (vgl. auch [16]).

2. H. B. Squire und A. D. Young [9].

Auch hier wird nur der Impulssatz benutzt mit $c_f'(re)$. Ferner wird $H = \text{const.} = 1,4$ gesetzt, da im Impulssatz H nur im Glied $(2 + H)$ vorkommt, das gegen Änderungen von H ziemlich unempfindlich ist.

3. E. Gruschwitz [6].

Der Impulssatz mit $c_f' = \text{const.} = 0,004$ und $H = \text{const.} = 1,5$ gibt eine Näherung für die Impulsdicke $\delta_2(s)$. Mit diesen δ_2 -Werten ist eine rein empirisch gefundene Differentialgleichung für die Änderung eines Profilformparameters aufzulösen. Sie kann geschrieben werden:

$$(13) \quad \frac{dH}{ds} = -2\eta \frac{dH}{d\eta} \frac{1}{U} \frac{dU}{ds} - (a\eta - b) \frac{dH}{d\eta} \frac{1}{\delta_2}$$

mit $a = 8,94 \cdot 10^{-3}$ und $b = 4,61 \cdot 10^{-3}$.

Dabei ist η der Gruschwitzsche Profilparameter, nämlich

$$(14) \quad \eta = 1 - [u(y = \delta_2)/U]^2.$$

Betrachtet man jetzt nachträglich diese Gleichung mit $c_f' = 0,004$ als Äquivalent für die Energiegleichung bzw. für die daraus gewonnene Gleichung für einparametrische Geschwindigkeitsprofile, so führt der Vergleich des ersten Gliedes auf eine Differentialgleichung für die Abhängigkeit der beiden Profilparameter H und η von einander mit der Lösung

$$(15) \quad \eta = \text{const.} \cdot H^2 \cdot (H-1)^{2B/(1-B)} \cdot (H-B)^{2/(1-B)},$$

wobei noch eine empirische Beziehung

$$(16) \quad H_{32}(H) = \frac{AH}{H-B}$$

bereits benutzt ist mit $A = 1,269$ und $B = 0,379$. (Für Potenzprofile $u/U = (y/\delta)^2$ wäre $A = 4/3$ und $B = 1/3$.) Gl. (15) wird experimentell gut bestätigt, wenn man die Integrationskonstante $\text{const.} = 0,936$ setzt.

Der Vergleich des zweiten Gliedes auf der rechten Seite der Gln. (13) und (10) führt schließlich zu einer Beziehung $e = e(H, \eta)$, also wegen $\eta = \eta(H)$ zu $e = e(H)$.

Eine zweite Näherung für die Impulsdicke erhält Gruschwitz dann aus der Impulsleichung mit dem so berechneten $H(s)$ aus $\eta(s)$ und mit $c_f'(re)$.

4. A. Kehl [10].

Kehl untersuchte vor allem Reibungsschichten bei seitlicher Konvergenz und Divergenz, verfeinerte aber da-

neben auch das Gruschwitz-Verfahren, indem er nicht nur von vornherein $c_f'(re)$ ansetzte, sondern auch $a(re)$ in Gl. (13) annahm statt $a = \text{const}$. Leider ist dann ein einfacher, direkter Vergleich mit der Energiegleichung nicht mehr möglich.

5. A.v. Doenhoff und N. Tetervin [11].

Hier wird neben dem Impulssatz mit $c_f'(re)$ eine empirische Beziehung benutzt, die in der vorliegenden Schreibweise lautet:

$$(17) \frac{dH}{ds} = - \left[\frac{4}{U} \frac{dU}{ds} \frac{\delta_2}{c_f'} + 2.035(H - 1.286) \frac{1}{\delta_2} \right] \cdot \exp [4.68(H - 2.975)].$$

Auch diese Gleichung entspricht in ihrem Aufbau nicht der damals unbekannteren Energiegleichung, bzw. sie würde danach eine äußerst komplizierte Abhängigkeit des e

von $\frac{\delta_2}{U} \frac{dU}{ds}$, c_f' und H ergeben. Streng ausgeschlossen

kann diese Möglichkeit allerdings auch nicht werden, da für die Größe e keine exakten Aussagen gemacht werden können.

6. H. C. Garner [12].

Garner verbesserte das Verfahren von Doenhoff und Tetervin, wobei er sich in der Hauptsache auf dasselbe Versuchsmaterial stützte. Zusammen mit seiner Annahme für c_f' :

$$(18) \quad c_f' = 0,0131 re^{-1/6}$$

kann seine Gleichung für den Profilparameter geschrieben werden:

$$(19) \quad \frac{dH}{ds} = - \left[\frac{1}{U} \frac{dU}{ds} + 1,033(H - 1,4) \frac{c_f'}{\delta_2} \right] \cdot \exp [5(H - 1,4)].$$

Diese Gleichung ist formal wieder so gebaut wie die Energiegleichung (10), so daß ein Vergleich sehr einfach ist. Das erste Glied gibt gute Übereinstimmung für $F_1(H)$ nach (11), außer für Profile mit sehr großen H -Werten. Das zweite Glied der rechten Seite entspricht wieder der Annahme $e = e(H)$, ähnlich wie bei der Deutung des Gruschwitz-Verfahrens.

7. E. Truckenbrodt [14].

Im Unterschied zu den bisherigen Verfahren, die neben dem Impulssatz keine oder eine rein empirisch gefundene zweite Differentialgleichung benutzten, wenden Truckenbrodt, Schuh und Rotta die inzwischen aufgestellte Energiegleichung und die von Ludwig-Tillmann gefundene Beziehung für die Wandschubspannung $c_f'(re, H)$ an.

Das Verfahren von Truckenbrodt ist sehr handlich in der Anwendung, da zur Berechnung der Reibungsschicht nur noch Quadraturen über Potenzen des Geschwindigkeitsverlaufs $U(s)$ und der Körperkontur $r_0(s)$ auszuführen sind. Um zu solchen einfachen Endformeln zu gelangen, führt er öfters Näherungen für experimentelle Funktionen ein, wodurch schließlich die theoretischen Grundlagen, von denen er ausgeht, etwas verschleiert werden. So lautet das wesentliche Glied in seiner Gleichung zur Berechnung seines Formparameters L , mit $L(H)$ für einparametrische Profile, das der Gl. (7) entspricht, wenn man sie mit $\frac{re^m \delta_2}{H_{32}(H-1)}$ multipliziert:

$$(20) \quad K = \frac{(e - H_{32}/2)}{H_{32}(H-1)} c_f' re^m \approx 0,034 \cdot [L(H) + 0,23 - 0,07 \log re],$$

$$\text{mit (21) } L(H) = L(H_{32}) = \int \frac{dH_{32}}{H_{32}(H-1)}$$

Das würde nach e aufgelöst — wegen $c_f' = c_f'(re, H)$ — ergeben:

$$(22) \quad e = e(re, H).$$

8. J. Rotta [7].

Die theoretischen Grundlagen hat am ausführlichsten J. Rotta untersucht. Einzelne Ergebnisse von ihm hat deshalb Truckenbrodt übernommen. Rotta legt seinem E-Verfahren auch Impuls- und Energiesatz zugrunde — den letzteren allerdings in einer etwas anderen Form (siehe unter F) —, sowie die Beziehung $c_f'(re, H)$ nach [13]. Außerdem zerlegt er jedoch das Geschwindigkeitsprofil in einen wandnahen und einen wandfernen Teil (siehe unter E) und kann dadurch auch raue Oberflächen von vornherein mitberücksichtigen, während bei den anderen Verfahren fast nur an glatte Oberflächen gedacht wird. Bezüglich der Schubspannungen nimmt er einen eindeutigen Zusammenhang zwischen Geschwindigkeits- und r -Profilen an, was auf die Annahme $e = e(re, H)$ hinausläuft. Diese Annahmen werden in den Abschnitten E und F noch ausführlicher besprochen.

9. H. Schuh [15].

Im Gegensatz zu den obigen Verfahren kommt H. Schuh zu dem Schluß, daß die Schubspannungsarbeit nicht nur von Größen abhängt, die die Reibungsschicht an einer Stelle kennzeichnen, sondern auch vom örtlichen Druckgefälle bzw. von dU/ds (s. unter F). Er nimmt deshalb an, daß e nicht nur von re und H abhängt, sondern auch noch von

$$(12) \quad \Gamma = \delta_2 re^m \frac{1}{U} \frac{dU}{ds}, \text{ mit}$$

$$(23) \quad c_f' = 0,246 \cdot 10^{-0,678 H} \cdot re^{-m}, \quad m = 0,268 \text{ nach [13].}$$

Da e von re nur wenig abzuhängen scheint, macht Schuh schließlich den Ansatz

$$e = e(H, \Gamma).$$

Wie diese Funktion im einzelnen zu formulieren ist, wird wiederum Messungen an solchen Reibungsschichten entnommen.

E. Wand- und Außengesetz für das Geschwindigkeitsprofil

Die unter C. I. beschriebene Einparametrigkeit der dimensionslosen Geschwindigkeitsprofile ist sehr oft bestätigt worden, auch an rauen Oberflächen [17] und selbst hinter einer Stolperleiste; allerdings gibt F. Clauser [18] kürzlich zweigemessene Profile an, die sich nicht in die übliche Kurvenschar einreihen lassen. Es war nun von vornherein klar, daß es sich dabei nur um eine praktisch ausreichend genaue Näherungsaussage handeln konnte, denn für die direkte Wandnähe — also in der laminaren Unterschicht und am Anfang des turbulenten Bereichs — war schon früher ein anderes Ähnlichkeitsgesetz bekannt, das sogenannte Wandgesetz.

In dieser Wandnähe spielen sich aber gewöhnlich die energetisch wichtigsten Vorgänge ab; so wird z. B. an der Platte [19], ähnlich wie bei der Kanalströmung [20], gerade dort der Hauptanteil der Energie dissipiert. Es ist daher, zumindest vom Standpunkt des Theoretikers aus, sehr zu begrüßen, daß Rotta auch zur Aufstellung eines Näherungsverfahrens die Aufteilung des Geschwindigkeitsprofils vornimmt.

Das Wandgesetz sagt aus, daß zwar die kinematische Zähigkeit ν und die Oberflächenrauigkeit k (äquivalente Sandrauigkeit in mm) in unmittelbarer Wandnähe eine Rolle spielen, aber nicht die Geschwindigkeit U außerhalb der Schicht oder deren Änderung dU/ds . Andererseits ist in dieser Wandnähe die gesamte Schubspannung (laminarer und turbulenter

Anteil) praktisch gleich der Wandschubspannung, da dort — im Gegensatz zu den Geschwindigkeiten — τ sich nur langsam mit dem Wandabstand y verändert. Aus dimensionsanalytischen Gründen wird daher für $y < y_1$:

$$(25) \quad u/u_* = f(yu_*/v, ku_*/v),$$

mit $u_* =$ Schubspannungsgeschwindigkeit $= \sqrt{\tau_0/\rho}$ und

$$(26) \quad \frac{u_*}{U} = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho U^2}} = \sqrt{\frac{c'_f}{2}}.$$

Die Rauigkeit geht dabei in Form eines Parameters ku_*/v ein.

Für den Außenrand der Reibungsschicht läßt sich eine Ähnlichkeitsbetrachtung nicht so zwingend durchführen (vgl. auch [21, 22]). Die Strömung ist hier rein turbulent, d. h. der laminare Anteil der Schubspannung kann gegenüber dem turbulenten vernachlässigt werden, so daß die Zähigkeit keine Rolle spielt. Somit sind die Verhältnisse ähnlich denen bei der turbulenten Ausbreitung eines Freistrahls in einer umgebenden Parallelströmung. Nach I. Tani und Y. Kobashi [23] kann man in diesem Fall alle Geschwindigkeitsverteilungen durch eine einzige Funktion ausdrücken, wenn man die Geschwindigkeitsdifferenz gegen die konstante Geschwindigkeit außerhalb des Strahls $u - U$, — dividiert durch den Wert in Strahlmitte $u_0 - U$, — aufträgt über dem Abstand von der Strahlachse y , — dividiert durch die Halbwertsbreite des Strahls $b(s)$, — die noch vom Abstand s vom Strahlbeginn abhängt:

$$(27) \quad \frac{u - U}{u_0 - U} = G(y/b).$$

Dies wird für verschiedene Geschwindigkeitsverhältnisse zwischen Freistrahls in ruhender Luft und Körpernachlauf bestätigt.

Bei der Übertragung dieser Ähnlichkeit auf Reibungsschichten hat man offenbar die Strahlbreite durch die Grenzschichtdicke δ oder ein ähnliches Maß dafür, wie δ_1 oder δ_2 , zu ersetzen. Schwieriger ist nur das Analogon zum Geschwindigkeitsüberschuß in Strahlmitte $u_0 - U$ anzugeben. Bei einer ganz formalen Übertragung hätte man unter u_0 die Geschwindigkeit an der Wand — also $u_0 = 0$ — zu verstehen. Diese Haftbedingung kann aber sicher nicht von Bedeutung sein für den Außenrand der Schicht, ganz abgesehen davon, daß eine Regel für den wandfernen Teil unterhalb eines gewissen Wandabstandes y_2 gar nicht mehr gelten wird. Und da sich ferner das Geschwindigkeitsprofil in Wandnähe stark ändert, wäre es schwierig, daraus ein Analogon zu $u_0 - U$ im Strahl zu finden, selbst wenn die Gültigkeitsgrenze y_2 bekannt wäre.

Andrerseits kann man aber die Geschwindigkeitsdifferenz zwischen Strahlkern und Außenströmung $u_0 - U$ auch als ein kennzeichnendes Maß für die größte Schubspannung im Strahl auffassen. In einer Reibungsschicht ist dieser größte Wert von τ meistens in Wandnähe anzutreffen, und da sich τ dort nur langsam mit dem Wandabstand ändert, wäre ein gutes Maß für τ_{\max} wieder der Wert an der Wand selbst τ_0 , bzw. die daraus abgeleitete Schubspannungsgeschwindigkeit $u_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$. Diese Überlegung führt also auf folgende Übersetzung der Gl. (27) für Reibungsschichten:

$$(28) \quad \frac{u - U}{u_*} = g(y/\delta).$$

Diese Ähnlichkeitsregel hatte bereits F. Schultz-Grunow [24] für die Reibungsschicht an der Platte bei konstantem Außen- druck aufgestellt, jedoch nicht in Analogie zur Strahl- ausbreitung, sondern zum Mittengesetz der Rohrströmung. Sie erwies sich bis fast an die Platte heran als gültig, und es konnten so alle Geschwindigkeitsprofile bei verschiedenen Reynoldszahlen auf eine einzige Kurve $g(y/\delta)$ reduziert werden, was mit der früheren Auftragung u/U über y/δ_2 nicht möglich war. Diese Plattenströmung ist inzwischen ausführlicher von L. Landweber [21] und D. Coles [22] behandelt worden.

Im Unterschied zur Strahl- oder Plattenströmung mit konstanter Außenströmung $U = \text{const.}$ wird man bei allgemeinen Reibungsschichten mit aufgeprägtem Druckverlauf — also $U = U(s)$ — eine ganze Schar von Profilen in der Auftragung nach Gl. (28) erhalten, die noch durch einen Parameter zu kennzeichnen sind. Da ferner die Grenzschichtdicke δ schlecht genau zu definieren ist, führen Rotta [7] und später auch F. Clauser [18] eine streng definierbare Länge ähnlich der Verdrängungsdicke ein, nämlich

$$(29) \quad \Delta = \int_0^{\infty} \frac{U - u}{u_*} dy = \frac{\delta_1}{u_* U} = \sqrt{\frac{2}{c'_f}} \delta_1.$$

Die Integration von $y = 0$ an — statt von der Grenze y_2 des Gültigkeitsbereiches dieses Außengesetzes — erweist sich wie bei F. Schultz-Grunow als statthaft, weil dieses Gesetz

$$(30) \quad \frac{u - U}{u_*} = g(y/\Delta, I) \quad \text{für } y_2 < y \leq \delta$$

auch bei beliebigem Druckverlauf bis sehr nahe an die Wand heran erfüllt wird.

Als Parameter I wird sinngemäß wie $H = \delta_1/\delta_2$, definiert:

$$(31) \quad I = \frac{1}{\Delta} \int_0^{\infty} \left(\frac{U - u}{u_*} \right)^2 dy,$$

so daß I und H wie folgt zusammenhängen:

$$(32) \quad H = 1/(1 - I\sqrt{c'_f}/2).$$

Dieses Außengesetz (velocity defect law) wird nun nicht nur an der Platte experimentell gut bestätigt, sondern auch bei Druckanstieg und -abfall.

Besonders interessant ist es, daß die Gültigkeitsbereiche des Wandgesetzes nach Gl. (25) und des Außengesetzes nach Gl. (30) nicht nur aneinanderstoßen, sondern sich sogar überlappen, so daß es einen Bereich von Wandabständen $y_2 < y < y_1$ gibt, innerhalb dessen beide Gesetze gleichzeitig gelten:

$$(33) \quad u/u_* = f(yu_*/v, ku_*/v) = U/u_* + g(y/\Delta, I) = \sqrt{2/c'_f} + g(y/\Delta, I) \quad \text{für } y_2 < y < y_1.$$

Daraus kann man, ähnlich wie es C. B. Millikan [25] für die Plattenströmung getan hat, schließen, daß zumindest in diesem Gebiet sowohl die Funktion f wie auch g proportional $\log y$ sein müssen (logarithmisches Geschwindigkeitsprofil, s. auch [21, 22]). Noch wichtiger ist für uns jetzt eine zweite Folgerung aus Gl. (33). Wie auch immer f und g vom Wandabstand abhängen, kann man sich in diesem Abstandsbereich y aus dieser Gleichung eliminiert denken, und es bleibt dann eine Beziehung zwischen den übrigen Größen über. Insbesondere ergibt sich nach c'_f aufgelöst:

$$(34) \quad c'_f = c'_f(ku_*/v, \Delta u_*/v, I).$$

Für hydraulisch glatte Oberflächen mit $k = 0$ fällt der erste Parameter fort. Außerdem kann man die beiden anderen mit Hilfe von Gl. (29) und (31) umformen:

$$(35) \quad \Delta u_*/v = \text{re. } H, \quad \text{und}$$

$$(36) \quad I = \sqrt{2}/c'_f (1 - 1/H),$$

so daß auch gilt:

$$(23) \quad c'_f = c'_f(\text{re. } H).$$

Diese Beziehung haben bekanntlich Ludwig und Tillmann [13] auf ganz ähnliche Weise abgeleitet und auch den zahlenmäßigen Zusammenhang durch Versuche ermittelt. Selbst wenn dieser vielleicht durch spätere Versuche noch korrigiert werden sollte, scheint das Bestehen von Wand- und Außengesetz sowie einer Beziehung (34) oder (23) so gesichert, daß man sie zum theoretischen Fundament für turbulente Reibungsschichten zählen kann. Demnach genügt es, aus einem gemessenen Geschwindigkeitsprofil das absolute Ausmaß der

Reibungsschicht dort (re) und die Form des Profils (H) zu bestimmen, um die lokale Wandschubspannung (c_f') nach Gl.(23) zu ermitteln, ohne daß die Entstehungsgeschichte der Reibungsschicht bekannt sein müßte.

F. Energiesätze und Annahmen über die Schubspannungsarbeit

Wie bereits erwähnt, benutzt J. Rotta [7] einen etwas anderen Energiesatz als Gl.(5), dessen Ableitung hier wieder gegeben werden soll. Ganz allgemein kann man ja aus der Navier-Stokes'schen Gleichung nach der Zerlegung der Geschwindigkeit in den mittleren Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} und den Schwankungsvektor \mathbf{v}' nach O. Reynolds zwei Energiegleichungen gewinnen, je nachdem, ob man die Navier-Stokes'sche Gleichung mit \mathbf{v} oder mit \mathbf{v}' multipliziert und dann das zeitliche Mittel bildet. Dabei gilt $\overline{\mathbf{v}'^2} = 0$ oder z. B. auch für die turbulenten Druckschwankungen $\overline{p'} = 0$, wobei der Querstrich die zeitliche Mittelbildung bezeichnet. Dagegen brauchen nichtlineare Schwankungsausdrücke nicht zu verschwinden, z. B. $\overline{\mathbf{v}'^2} \neq 0$ oder auch $\overline{\mathbf{v}'^3} \neq 0$ und $\overline{\mathbf{v}'p'} \neq 0$.

Vektoriell geschrieben, lautet die Navier-Stokes'sche Gleichung für im Mittel stationäre Strömungen:

$$(37) \quad \text{grad } \frac{\rho}{2} (\mathbf{v} + \mathbf{v}')^2 - \rho (\mathbf{v} + \mathbf{v}') \times \text{rot} (\mathbf{v} + \mathbf{v}') = -\text{grad} (p + p') - \mu \text{rot rot} (\mathbf{v} + \mathbf{v}'),$$

und die Kontinuitätsgleichung:

$$(38) \quad \text{div } \mathbf{v} = \text{div } \mathbf{v}' = 0.$$

Multiplikation von Gl.(37) mit \mathbf{v} bzw. mit \mathbf{v}' und zeitliche Mittelbildung gibt:

$$(39) \quad \text{div } \mathbf{v} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) + \mathbf{v} \mathbf{v} \text{ rot rot } \mathbf{v} = -\mathbf{v} (\overline{\mathbf{v}' \text{ grad}}) \mathbf{v}', \text{ und}$$

$$(40) \quad \text{div} \left[\mathbf{v}' \left(\frac{p'}{\rho} + \frac{\mathbf{v}'^2}{2} \right) + \mathbf{v} \frac{\mathbf{v}'^2}{2} \right] + \mathbf{v} \overline{\mathbf{v}' \text{ rot rot } \mathbf{v}'} = \\ = -\overline{\mathbf{v}' (\mathbf{v}' \text{ grad})} \mathbf{v} \\ = \overline{\mathbf{v} (\mathbf{v}' \text{ grad})} \mathbf{v}' - \overline{\mathbf{v}' \text{ grad } \mathbf{v} \mathbf{v}' }.$$

Die zweite Gleichung (40), die nur turbulente Größen enthält, war auch schon O. Reynolds bekannt, worauf St. Corrsin hinweist [26].

Wendet man diese beiden Energiegleichungen (39) und (40) auf Reibungsschichten an mit den Prandtl'schen Grenzschichtvernachlässigungen und integriert noch über den Wandabstand, so erhält man für ebene Strömung mit den hier gebräuchlichen Bezeichnungen ($x = s =$ Bogenlänge längs der Oberfläche, $y =$ Wandabstand, $z =$ Querkoordinate) aus Gl.(39):

$$(5) \quad \frac{d}{dx} \int_0^\infty u \frac{U^2 - u^2}{2} dy = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (U^3 \delta_3) = \int_0^\infty \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} dy,$$

also die obige Gl.(5).

Andererseits wird aus Gl.(40), wenn man wieder an Stelle von $-\overline{\mathbf{u}'\mathbf{v}'}$ die gesamte Schubspannung τ (laminar und turbulent) einführt:

$$(41) \quad -\overline{\mathbf{u}'\mathbf{v}'} = \tau / \rho - \nu \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$(42) \quad \int_0^\infty \tau \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{d}{dx} \int_0^\infty u E dy + D.$$

Dabei bedeuten E die Turbulenzenergie und D die gesamte Dissipation in der Schicht:

$$(43) \quad E = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}),$$

$$(44) \quad D = \nu \int_0^\infty \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v'}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w'}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2 \right\} dy.$$

Die physikalische Aussage der Gl.(5) ist die, daß die Arbeit der Schubspannungen in der Schicht zwischen x und $x + dx$ gleich ist dem Verlust an kinetischer Energie verglichen mit der Potentialströmung. Die andere Gleichung (42) sagt aus, daß diese Arbeit der Schubspannungen — also die der mittleren Grundströmung entzogene Energie — außerdem gleich ist der Änderung der kinetischen Turbulenzenergie plus der an dieser Stelle in Wärme dissipierten Energie. Rotta weist auf den charakteristischen Unterschied zur laminaren Strömung hin, den die Gleichung aufzeigt. Ohne turbulente Schwankungen ($E = 0$) wird die Arbeit der laminaren Schubspannung $\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ sofort in Wärme umgewandelt und mecha-

nisch verloren. Bei Turbulenz dagegen wird nur ein Teil dieser Arbeit am gleichen Ort dissipiert (D) und der Rest als Fluß mechanischer Energie (uE) wegtransportiert.

Diese Gl.(42) über die Einzelheiten der turbulenten Energieumwandlung verknüpft Rotta mit Gl.(5), um auch wieder einen Zusammenhang zwischen dem Geschwindigkeitsprofil und den Turbulenzgrößen zu gewinnen:

$$(45) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (U^3 \delta_3) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty u E dy + D.$$

Aussagen über die beiden Glieder der rechten Seite, insbesondere über die Abhängigkeit des Turbulenzenergiestroms und der Dissipation vom Profilparameter I gewinnt Rotta durch eine Analyse von verschiedenen experimentellen Arbeiten. Die Hauptannahme, die er dabei zugrunde legt, ist die, daß der Zusammenhang zwischen den Geschwindigkeitsprofilen und denen der statistischen Schwankungsgrößen als eindeutig angesehen werden kann. Als notwendige Bedingung hierfür leitet er ab:

$$(46) \quad \frac{d\delta}{dx} \ll \frac{V_{v'^2}}{U},$$

wo δ die Grenzschichtdicke und v' die turbulente Geschwindigkeitsschwankung senkrecht zur Wand bedeuten. Rotta nimmt an, daß diese Bedingung ausreichend genau erfüllt wird. H. Schuh [15] weist jedoch darauf hin, daß nach den bisher einzigen Messungen, die auch v' enthalten — denen von Schaubauer und Klebanoff [27] — bei konstantem Druck $d\delta/dx$ etwa $1/3$ von $V_{v'^2}/U$ ist, und daß bei Druckanstieg beide Ausdrücke sogar von derselben Größenordnung sind. Auch bei den inzwischen erschienenen Messungen an einer Platte [19] bei $Re = UX/\nu = 4,2 \cdot 10^6$ ($X =$ Rücklage von der Vorderkante) ist wegen $\delta \approx 0,37 X / Re^{0,2}$ $d\delta/dx = 0,014$, während die Querschwankungen ein flaches Maximum in Wandnähe von $V_{v'^2}/U = 0,039$ haben.

Daß sich experimentell kein eindeutiger Zusammenhang zwischen Geschwindigkeits- und Schubspannungsprofilen bei Druckanstieg ergibt, hatte Verf. schon früher betont [5]. Nach Gl.(1) ist das auch kaum zu erwarten, denn τ hängt danach — abgesehen vom Druckgefälle — nicht nur von u und $\partial u / \partial y$ bzw. $\partial u / \partial y$ ab, sondern auch von $\partial u / \partial z$ oder $\partial u / \partial x$, also vom Geschwindigkeitsgradienten in Strömungsrichtung oder vom vorhergehenden Profil und nicht nur vom jeweiligen Profil an der betrachteten Stelle wie bei laminarer Strömung.

Der obigen Annahme von Rotta würde bei glatter Oberfläche neben $c_f' (\Lambda u_x / \nu, I)$ auch entsprechen $e = e(\Lambda u_x / \nu, I)$ oder, wegen Gl.(35) und (36), auch wieder

$$(22) \quad e = e(re, H).$$

Um nur zu dieser Aussage über das Integral e zu kommen, wäre allerdings ein direkter Zusammenhang zwischen den ganzen u - und τ -Profilen nicht unbedingt erforderlich, worauf auch Rotta hinweist. Denn es wäre denkbar, daß der Turbulenzmechanismus gerade so verläuft, daß doch auch e , genau so wie c_f' , nur von re und H abhängt, obwohl ein bestimmtes Geschwindigkeitsprofil je nach der Entstehungsgeschichte bei verschiedenen Schubspannungsprofilen erzeugt werden kann. Immerhin erscheint die vorsichtigere Annahme nach Gl. (24) von H. Schuh [15] berechtigter, wenigstens solange, als nicht einwandfreie Messungen eine eindeutige Entscheidung über die verschiedenen Annahmen über e ermöglichen.

G. Bemerkungen zu dem bisherigen Versuchsmaterial

Aus dem Überblick über die verschiedenen Berechnungsverfahren geht hervor, daß über die Ähnlichkeitsregeln für die Geschwindigkeitsprofile — einparametrische Schar, bei höheren Ansprüchen Aufteilung in zwei Bereiche — sowie über die Abhängigkeit der Wandschubspannung allmählich auch in theoretischer Hinsicht Klarheit erreicht worden ist. Dagegen weichen die Ansichten der verschiedenen Autoren über Regeln für die Schubspannungsprofile und im Speziellen über die Schubspannungsarbeit in der Schicht (charakterisiert durch die Größe e) noch stark voneinander ab. Daß man auch aus den vorhandenen Messungen noch keine eindeutigen Schlüsse ziehen kann, liegt daran, daß nur wenige, ausführliche und analysierbare Messungen bei Druckanstieg bekannt sind, und daß diese — darunter auch solche des Verf. — gerade im interessierenden Gebiet vor der Ablösung offenbar unzuverlässig sind.

Derartige Messungen wurden längs der Mittellinie von Platten oder Tragflügeln durchgeführt, die seitlich durch die Wände der geschlossenen Kanäle begrenzt waren. Es wurde dann kontrolliert, ob die Strömung über ein hinreichend breites Stück des Flügelmittelteils gleichförmig war. Denn man sah darin einen ausreichenden Beweis dafür, daß die Strömung eben oder zweidimensional war wie an einem unendlich breiten Flügel.

Berechnet man nun aus so gemessenen Geschwindigkeitsprofilen die Wandschubspannung nach der Impulsgleichung für ebene Strömung:

$$(4) \quad \frac{1}{2} c_f' = \frac{d\delta_2}{dx} + (2 + H) \frac{\delta_2}{U} \frac{dU}{dx},$$

so ergibt sich regelmäßig ein starker Anstieg des c_f' vor der Ablösung auf ein Mehrfaches des normalen Wertes. Bereits E. Gruschwitz [6] erwähnt diesen „Effekt“ kurz und vermutet, daß die Messungen mit dem Pitotrohr nahe vor der Ablösung durch die erhöhten turbulenten Schwankungen gefälscht worden wären. Die Auswertung der Messungen von H. M. Lyon [28] an einem Rotationskörper zeigt jedoch in Bild 2, daß dort dieser c_f' -Anstieg nicht auftritt. Denn hier stimmen die aus dem Impulssatz berechneten Werte c_f' (Imp.) gut mit denen nach Gl. (23) aus dem jeweiligen Profil ermittelten Werten c_f' (re, H) überein. Wenn der Effekt auf verstärkten Schwankungen beruhte, hätte er auch hier kurz vor der Ablösung auftreten müssen.

Die Erklärung dafür, warum dieser Anstieg nur an ebenen Meßkörpern vorkommt, gab W. Tillmann [16]. Er betrachtet dazu nicht nur die Reibungsschicht am Versuchskörper, sondern auch die an den Seitenwänden des Kanals. Wenn im Kanal der Druck in Strömungsrichtung konstant ist oder sich nur wenig ändert, werden die seitlichen Schichten wie an einer freiumströmten Platte nur langsam dicker und verringern den wirksamen Kanalquerschnitt nur wenig und überall fast gleichmäßig. Bei einem Flügel mit größerem Anstellwinkel als Meßobjekt wird aber der örtlich starke Druckanstieg auch die Ver-

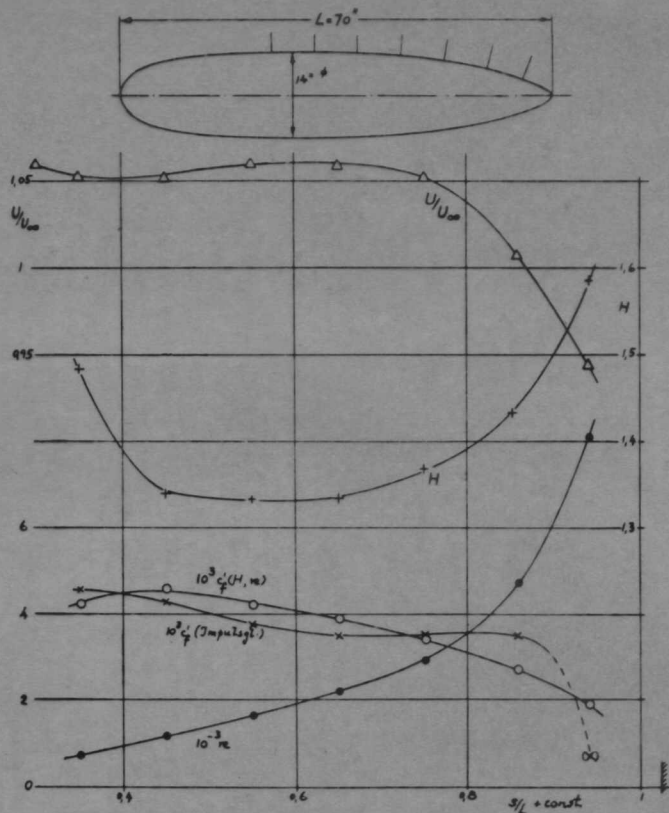


Bild 2
Kennwerte der Reibungsschicht an einem Umdrehungskörper (Modell B) nach Messungen von H. M. Lyon [28] ($U_\infty L/\nu = 2,1 \cdot 10^6$)

drängungsdicke der Schichten an den Seitenwänden in Flügelnähe stark anwachsen lassen, wodurch die Strömung in der Reibungsschicht des Flügels seitlich zusammengedrängt und konvergent wird. Vor allem wird die Strömung nicht im Flügelmitttelteil zuerst abreißen, sondern in den Ecken zwischen Flügel und Kanalwänden, wo das Grenzschichtmaterial in zwei zueinander senkrechten Ebenen abgebremst wird. Der Totwasserkeil in diesen Ecken bewirkt dann erst recht eine seitliche Konvergenz der Strömung längs des Flügels.

Die starken Wirkungen einer schwachen derartigen Sekundärströmung kann man nach einer Arbeit von A. Kehl [10] abschätzen, der Reibungsschichten bei absichtlich erzeugter Konvergenz und Divergenz untersucht hat. Er berechnet den Impulssatz für Strömungen, die nur wenig von der ebenen Strömung abweichen, wie folgt:

$$(47) \quad \frac{1}{2} c_f' = \frac{d\delta_2}{dx} + (2 + H) \frac{\delta_2}{U} \frac{dU}{dx} - \frac{\delta_2}{x_p}$$

Dabei ist x_p der Abstand von der betrachteten Stelle x bis zum fiktiven Strömungspol stromabwärts, zu dem die Strömung wie in eine Senke hinzufließen scheint (s. Bild 3). Dieser Ab-

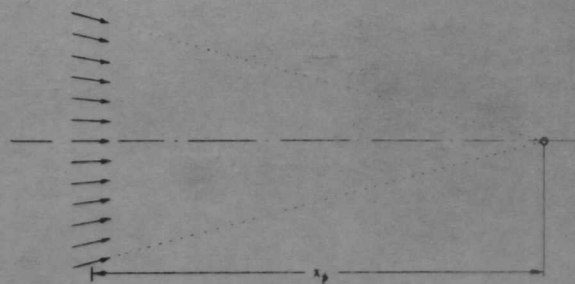


Bild 3 Skizze einer seitlich konvergenten Strömung

stand x_p kann noch von x abhängen je nach dem örtlichen Grad der seitlichen Kon- oder Divergenz. Für divergente Strömung liegt der Pol stromaufwärts vom Aufpunkt, und x_p ist dann negativ zu berechnen. Da c_f' gewöhnlich von der Größenordnung 10^{-3} ist, wird die Korrektur δ_2/x_p schon von derselben Größenordnung, wenn x_p etwa 1000 δ_2 beträgt oder gar noch kleiner ist. Selbst eine schwache Konvergenz, die in Nähe der Flügelmitte meßtechnisch kaum festzustellen ist, muß also im Impulssatz schon berücksichtigt werden.

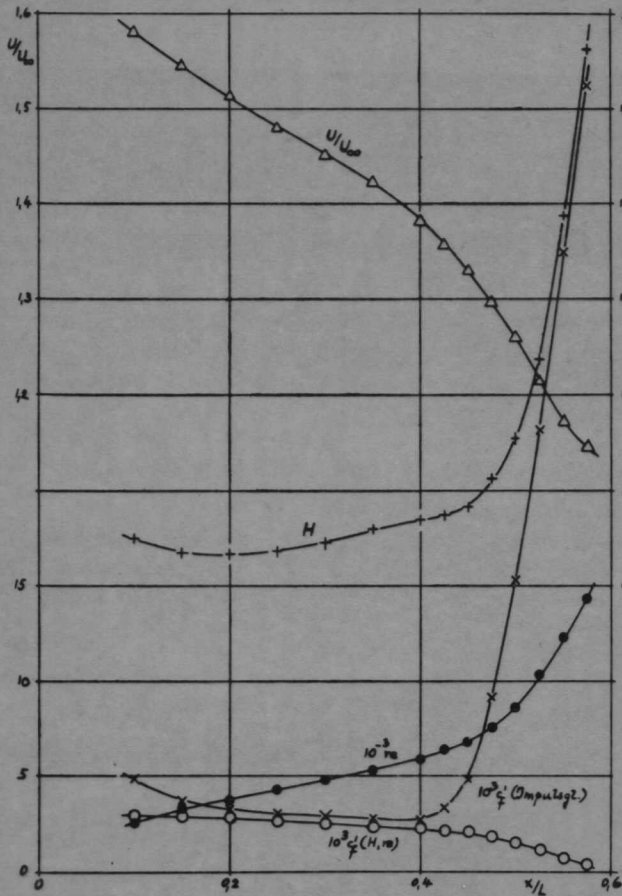


Bild 4 Kennwerte der Reibungsschicht am Profil NACA 65 (216) — 222 (appr.), Anstellwinkel $10,1^\circ$ nach A. v. Doenhoff und N. Tetervin [11] ($U_\infty L/\nu = 2,64 \cdot 10^6$)

Als typisches Beispiel hierfür zeigt Bild 4 die Meßreihe von v. Doenhoff-Tetervin [11], die bei den meisten Verfahren entweder zur Aufstellung empirischer Funktionen oder zur Kontrolle herangezogen wird. Darin ist über der Flügeltiefe aufgetragen: der Geschwindigkeitsverlauf außerhalb der Schicht U/U_∞ , die örtliche Re-Zahl der Reibungsschicht $re = U\delta_2/\nu$, der Profilparameter H und der Beiwert der Wandschubspannung c_f' ; und zwar einerseits der c_f' -Wert, der aus dem Impulssatz für ebene Strömung berechnet wurde: c_f' (Imp.), andererseits derjenige nach Gl. (23): c_f' (re, H). Zunächst, d. h. solange auch die seitlichen Reibungsschichten noch dünn sind, fallen die beiden c_f' -Werte praktisch zusammen. Später, im Gebiet der starken U-Abfalls bzw. des starken Druckanstiegs, steigt c_f' (Imp.) immer mehr an, während c_f' (re, H) erwartungsgemäß zur Ablösungsstelle hin abfällt. Berechnet man nun umgedreht aus Gl. (47), welche Reibungsschicht an den Seitenwänden diese Diskrepanz der beiden c_f' -Werte hervorgerufen haben könnte, so erhält man Bild 5. Die Ausbildung des Ablösegebietes (punktierte Fläche) und der Reibungsschicht an den Seitenwänden erscheint durchaus plausibel, so daß die Tillmann'sche Deutung den scheinbaren c_f' -Anstieg auch hier zumindest der Größenordnung nach richtig erklärt.

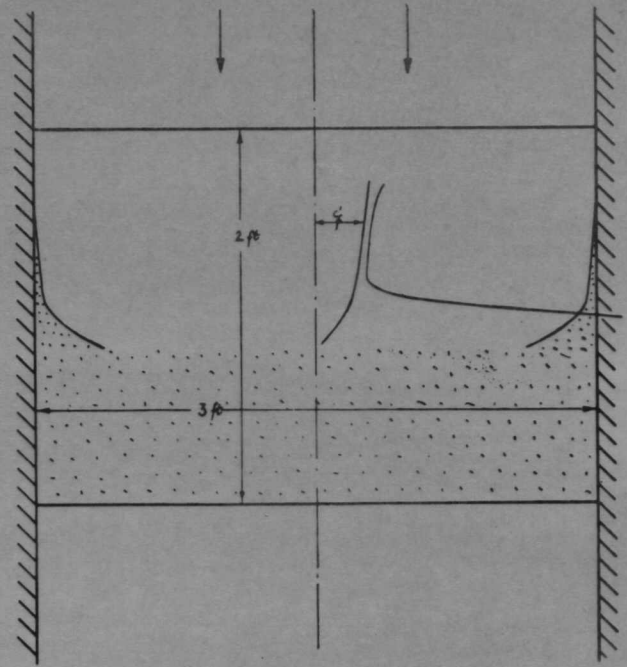


Bild 5 Vermuteter Verlauf der seitlichen Reibungsschichten und des Ablösegebietes am Flügel des Bildes 4

Dies vorausgesetzt, könnte man nun die Meßreihe zur Berechnung der noch unbekanntten Größe e benutzen, indem man auch den Energiesatz um ein Korrekturglied erweitert:

$$(48) \quad e \cdot c_f' = \int_0^{\frac{\delta_2}{2}} \frac{\tau}{U^3} \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{1}{U^3} \frac{d}{dx} (U^3 \delta_3) - \frac{\delta_3}{x_p}, \text{ mit}$$

$$(49) \quad \delta_3/x_p = 1/2 H_{32} [c_f'(\text{Imp.}) - c_f'(\text{re, H})].$$

Man könnte aber auch Gl. (7) — zusammen mit c_f' (re, H) nach Gl. (23) — direkt zur Ermittlung von e benutzen. Denn diese Gleichung, die im wesentlichen durch Subtraktion der Energie- von der Impulsgleichung entsteht, ist dieselbe für rotations-symmetrische und ebene Strömung und, wie man zeigen kann, auch für schwach konvergente oder divergente Strömungen.

Trotzdem erscheint es bedenklich, derartige Messungen zu analysieren, um Grundlagen für Berechnungsverfahren aufzustellen. Zunächst wäre zu untersuchen, ob eine Konvergenz nach Bild 5 noch als so schwach zu betrachten ist, daß das mit einer Linearisierung berechnete Korrekturglied für Impuls- und Energiesatz noch ausreicht. Vor allem aber ist anzunehmen, daß das Anwachsen der seitlichen Reibungsschichten und deren Ablösen von den Seitenwänden nicht symmetrisch vor sich geht, wie in Bild 5 angenommen, denn nach sonstigen Erfahrungen verlaufen solche Abreißvorgänge meist sehr unregelmäßig. Dann wäre aber gerade im wichtigen Bereich die Flügelmittellinie gar nicht mehr Symmetrielinie für die wirkliche Strömung, was auch noch bei der obigen Korrektur nach Kehl vorausgesetzt worden war.

Da man jetzt Messungen in Reibungsschichten bei Druckanstieg, vor allem in Hinblick auf die Schubspannungen, ausgewertet, sind direkte τ -Messungen mit Hitzdrähten besonders wertvoll. Eine solche Untersuchung stammt von G. B. Schubauer und P. S. Klebanoff [27], die mehrere Schwankungsgrößen, darunter auch die turbulente Schubspannung $u'v'$ direkt gemessen haben. Diese Arbeit ist daher die zweite Hauptquelle zur Gewinnung von Unterlagen für Berechnungsverfahren. Leider ergeben sich aber auch hier wegen meßtechnischer Schwierigkeiten zum Teil erhebliche Diskrepanzen. Bild 6 zeigt hierfür, wieder längs der Flügeltiefe aufgetragen, den Verlauf der Außengeschwindigkeit, den örtlichen Reibungsbeiwert c_f'

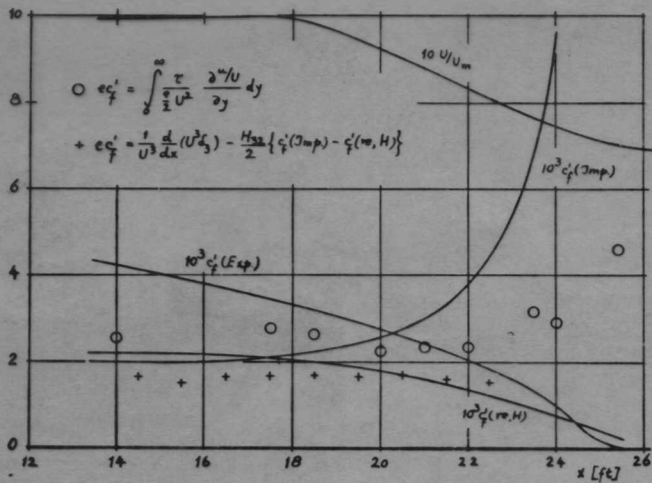


Bild 6 Kennwerte einer Reibungsschicht berechnet aus direkten Hitzdrahtmessungen der Schubspannung von G. B. Schubauer und P. S. Klebanoff [27]

und den der Schubspannungsarbeit $e \cdot c_f'$. Zunächst stimmen $c_f'(Imp.)$ und $c_f'(re,H)$ gut überein, solange der Druck fast konstant ist; sowie er jedoch ansteigt, laufen diese beiden Kurven genau so auseinander wie in Bild 4. Das dürfte wieder durch seitliche Konvergenz der wirklichen Strömung zu erklären sein. Ferner wurde hier τ_0 auch aus dem mit Hitzdraht gemessenen Schubspannungsprofil durch Extrapolation an die Wand ermittelt; diesen Werten entspricht die Kurve $c_f'(Exp.)$. Sie verläuft ähnlich wie die für $c_f'(re,H)$, liegt aber fast überall erheblich höher.

Ähnliches ergibt sich auch beim Vergleich der beiden Glieder der Energiegleichung. Die Kreuze stellen den Energieverlust dar, der sich aus einer Auswertung der Geschwindigkeitsprofile ergibt, wobei die seitliche Konvergenz bereits durch ein Korrekturglied wie in den Gl. (48) und (49) erfaßt worden ist. Die Kreise entsprechen der Schubspannungsarbeit $e \cdot c_f'$ nach Gl. (48) nach einer Auswertung von G. Schubauer unter Benutzung der gemessenen τ -Werte (briefliche Mitteilung, 1952). Wieder liegen die Werte, die die direkt gemessenen Schubspannungsdaten enthalten, höher als die, bei denen nur die Geschwindigkeitsmessungen eingehen, so daß man annehmen muß, daß die Hitzdrahtmessungen von τ zu hohe Werte ergeben haben.

Es ist daher nicht verwunderlich, daß fast alle Autoren am Ende ihrer Ausführungen den Wunsch nach weiteren, genaueren Messungen in Ablösungsnähe äußern. Besonders erwünscht sind natürlich — trotz aller meßtechnischen Schwierigkeiten — auch Hitzdrahtmessungen der Schwankungsgrößen, vor allem von $u'v'$. Da meistens Messungen in ebener Strömung angestrebt werden, ist vorgeschlagen worden, die störenden Reibungsschichten an den Seitenwänden abzusaugen. Da man aber dabei zunächst nicht weiß, wo und wieviel Luft abzusaugen ist — zu starkes Absaugen könnte ja eine seitlich divergierende Strömung verursachen —, so sind Erfolge dieser Methode noch abzuwarten. Einfacher erscheinen Messungen an Umdrehungskörpern, wenn man auch dafür zu sorgen hat, daß die Modelle und die Strömung wirklich rotationssymmetrisch sind. Allerdings tritt hier die Ablösung meist erst dann ein, wenn die Grenzschichtvernachlässigungen bereits ihre Berechtigung verloren haben. Denn oft wird dort die Reibungsschichtdicke schon vergleichbar mit dem Heckdurchmesser, und der statische

Druck und selbst die Geschwindigkeitsrichtung ändern sich senkrecht zur Oberfläche innerhalb der Schicht. Man kann dann bereits vor der Ablösung nicht mehr von einer Grenzschicht sprechen, da Reibungseinflüsse in einem so großen Gebiet noch vorhanden sind, daß schon die Potentialströmung in ihm nicht mehr als einfache Parallelströmung aufgefaßt werden kann.

H. Zusammenfassung

Es werden die Grundlagen mehrerer Verfahren zur Berechnung turbulenter Reibungsschichten bei Druckanstieg skizziert und besprochen. Praktischen Zwecken dürfte zur Zeit das einfach anzuwendende Verfahren von E. Truckenbrodt am besten dienen. Von seiten der Theorie erschien eine Methode am geeignetsten, die die Aufteilung des Geschwindigkeitsprofils in wandnahen und äußeren Teil wie bei J. Rotta und die Annahme von H. Schuh enthielte, daß die dimensionslose Schubspannungsarbeit auch vom Druckverlauf abhängt. Da jedoch noch keine genauen und völlig einwandfreien Messungen bis zur Ablösung vorzuliegen scheinen, sind zunächst neue experimentelle Untersuchungen hierüber wohl dringlicher als weitere theoretische Spekulationen.

Schrifttum

- [1] Townsend, A. A.: 7. Int. Konf. für Schiffshydrodynamik, Oslo, 1954.
- [2] Scholz, N.: STG-Jahrbuch 1951, S. 244.
- [3] Schlichting, H.: Grenzschichttheorie, Braun, Karlsruhe, 1951.
- [4] v. Kármán, Th.: ZAMM 1, 1921, S. 235.
- [5] Wieghardt, K.: Göttinger Monographie 1946, Teil B 5. Wieghardt, K.: Ing.-Arch. XVI, 1948, S. 231.
- [6] Gruschwitz, E.: Ing.-Arch. II, 1931, S. 321.
- [7] Rotta, J.: Mitteil. M.P.I. für Strömungsforschung, Göttingen, Nr. 1, 1950, und Nr. 8; auch Ing.-Arch. XIX, 1951, S. 31, und XX, 1952, S. 195.
- [8] Buri, A.: Diss. Zürich 1931.
- [9] Squire, H. B., und Young, A. D.: ARC Report 1838, 1938.
- [10] Kehl, A.: Ing.-Arch. XIII, 1943, S. 293.
- [11] v. Doenhoff, A. E., und Tetervin, N.: NACA Report 772, 1943.
- [12] Garner, H. C.: ARC Report 2133, 1944.
- [13] Ludwig, H., und Tillmann, W.: Ing.-Arch. XVII, 1949, S. 288.
- [14] Truckenbrodt, E.: Ing.-Arch. XX, 1952, S. 211.
- [15] Schuh, H.: GAMM-Vortrag 1952, KTH AERO TN 41, Stockholm, 1954.
- [16] Tillmann, W.: Dipl.-Arbeit Göttingen, 1947.
- [17] Tillmann, W.: UM 6627, 1945.
- [18] Clauser, F. H.: J. Aer. Scs. 21, 1954, S. 91.
- [19] Klebanoff, P. S.: NACA TN 3178, 1954.
- [20] Reichardt, H.: ZAMM 33, 1953, S. 336.
- [21] Landweber, L.: STG-Jahrbuch 1952, S. 137.
- [22] Coles, D.: ZAMP V, 1954, S. 181.
- [23] Tani, I., und Kobashi, Y.: Proc. I. Japan Nat. Cong. Appl. Mech. 1951, S. 465.
- [24] Schultz-Grunow, F.: Lufo 17, 1940, S. 236.
- [25] Millikan, C. B.: Proc. V. Int. Cong. Appl. Mech., 1938.
- [26] Corrsin, St.: J. Aer. Sc. 20, 1953, S. 853.
- [27] Schubauer, C. B., und Klebanoff, P. S.: NACA TN 2133, 1950.
- [28] Lyon, H. M.: ARC Report 1622, 1934.