

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr. 216

Vergleich der Ergebnisse der Streifenmethode mit echten
dreidimensionalen Lösungen für den hydrodynamischen Stoß
der von Schmieden untersuchten Schwimmerformen

W. Kay Meyerhoff

Auftrags-Nr.: T 01-326-I-205

Hamburg, November 1968

- 1) Einleitung
- 2) Verzeichnis der benutzten Symbole
- 3) Dreidimensionale Lösung nach Schmieden
- 4) Lösung nach der Streifenmethode
- 5) Vergleich der Ergebnisse
- 6) Literaturverzeichnis

Anhang I: Umformung der Integralgleichung für die Hilfsfunktion u (Ebenes Problem)

Anhang II: Numerische Rechnung für drei ausgewählte Querschnitte

1) Einleitung

In der Theorie des vertikalen Stoßes gekielter starrer Körper auf eine Flüssigkeitsoberfläche ist von den dreidimensionalen Problemen besonders der Stoß von Kugeln bzw. Kegeln ~~behandelt~~ behandelt worden [1] bis [12]. Außerdem wurden im Rahmen der linearisierten Theorie von Schmieden [14] Lösungen für dreidimensionale Körper mit einer elliptischen Druckfläche bestimmt. Die Wasserlinien dieser Körper (Horizontalschnitte) sind nur annähernd elliptisch.

Angenäherte Lösungsmethoden für dreidimensionale Körper basieren entweder auf der Approximation des eingetauchten Teils durch einfache geometrische Körper. Trilling [13] benutzte in etwas anderem Zusammenhang, nämlich für den schiefen Stoß von Kugeln, eine Approximation durch Ellipsoide. Außerdem kann man das Problem des Stoßes dreidimensionaler Körper mit Hilfe der Streifenmethode behandeln. Bei der Anwendung der Streifenmethode wird vorausgesetzt, daß die Strömung in den einzelnen Schnitten durch eine ebene Strömung dargestellt werden kann. Diese Voraussetzung ist für langgestreckte Körper hinreichend gut erfüllt. Bei der Behandlung des Stoßproblems mit Hilfe der Streifenmethode wurden bisher keine Korrekturen für die dreidimensionale Umströmung berücksichtigt.

In der vorliegenden Untersuchung sollen die Lösungen von Schmieden mit den Lösungen verglichen werden, die sich für den gleichen Körper nach der Streifenmethode ergeben. Dazu war es allerdings erforderlich, die Schmiedenschen Rechnungen noch einmal zu wiederholen. Es stellte sich nämlich heraus, daß sich die Näherungsansätze zur Rechenvereinfachung bei Schmieden etwa genau so stark auswirken wie die Fehler der Streifenmethode.

Bei den beiden von Schmieden untersuchten ~~Swimmertypen~~ Schwimbertypen mußten im ersten Falle die Spanten durch Polynome angenähert werden. Im Anhang I ist zusätzlich angegeben, wie die Integralgleichung für die benetzte Breite im ebenen Problem invertiert werden kann. Diese Möglichkeit wurde aber nicht mehr numerisch ausgewertet. Für den zweiten Schwimbertyp haben die Spanten eine besonders einfache Form.

Der Vergleich der Ergebnisse zeigt, daß die Ergebnisse der Streifenmethode etwa genau so gut sind wie die Ergebnisse, die von Schmieden errechnet wurden. Diese Aussage gilt für die hydrodynamische Masse nur dann, wenn man dort die Korrektur für die dreidimensionale Umströmung berücksichtigt. Insgesamt sind dann die Fehler der beiden Rechnungen gegenüber den Näherungen der linearisierten Theorie des hydrodynamischen Stoßes vernachlässigbar.

2) Verzeichnis der benutzten Symbole

- b halbe Breite der benetzten Fläche (Druckfläche)
- c halbe Länge der benetzten Fläche (Druckfläche); halbe benetzte Breite des Spants bei der Streifenmethode
- \dot{c} zeitliche Ableitung dc/dt
- c' halbe größte Breite der Schwimmer-Wasserlinie
- c/y_0 Benetzungskorrektur für die Spanten nach der Streifenmethode
- \tilde{C} Koeffizient der hydrodynamischen Masse (Gl. (56))
- $E(\alpha, \kappa)$ unvollständiges elliptisches Integral 2. Art (Gl. (6))
- $E(\kappa)$ vollständiges elliptisches Integral 2. Art (Gl. (5))
- f_1 Breite der Druckfläche bezogen auf die Breite der Wasser-

- linie
- f_2 Länge der Druckfläche bezogen auf die Länge der Wasserlinie
- F Seitenverhältnis der Druckfläche bezogen auf das Seitenverhältnis der Wasserlinienfläche
- k_1 Größe der Wasserlinienfläche bezogen auf die Größe der Druckfläche
- K Konstante
- $K(\kappa)$ vollständiges elliptisches Integral 1. Art (Gl.(33))
- M'' hydrodynamische Masse der einen Plattenseite
- p Druck
- R Radius (Darstellung in modifizierten Zylinderkoordinaten)
- t Zeit
- $u(c)$ Hilfsfunktion (Gln.(15),(41))
- $u_0, u_1, u_2 \dots$ Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von $u(c)$ (Gl.(16))
- V Eintauchgeschwindigkeit
- \dot{V} Beschleunigung
- x Koordinate in Längsrichtung des Schwimmers
- y Koordinate in Querrichtung des Schwimmers
- y_0 halbe Breite des Spants in Höhe der ursprünglichen Wasseroberfläche
- z Koordinate in vertikaler Richtung
- z_0 Eintauchung des Schwimmers gegenüber der ursprünglichen Wasseroberfläche
- α Hilfsgröße (Gl.(4))
- β Aufkimmung des Schwimmers in Längsrichtung (x-Richtung)
- $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \dots$ Koeffizienten der Potenzreihe der Spantkontur
- $\Delta\eta$ Verbesserungsglied zur Rechnung von Schmieden für den Schwimmertyp $u = u_0$ (kegeliger Schwimmer)
- $\Delta\eta_1$ Verbesserungsglied zur Rechnung von Schmieden für den Schwimmertyp $u = u_1 c$ (parabolischer Schwimmer)
- $\Delta\eta^*$ dimensionsloser Wert zu $\Delta\eta$ (Gl.(29))
- $\Delta\eta_1^*$ dimensionsloser Wert zu $\Delta\eta_1$ (Gl.(37))
- η Ordinate der Schwimmerkontur nach dem verbesserten Ansatz bezogen auf den tiefsten Punkt des Schwimmers ($u = u_0$)
- η_1 Ordinate der Schwimmerkontur nach dem verbesserten Ansatz bezogen auf den tiefsten Punkt des Schwimmers ($u = u_1 c$)
- η^* dimensionsloser Wert zu η (Gl.(29))

η_1^*	dimensionsloser Wert zu η_1 (Gl.(37))
η_s	Ordinate der Schwimmerkontur nach Schmiedens Rechnung für Schwimmertyp $u = u_0$
η_{1s}	Ordinate der Schwimmerkontur nach Schmiedens Rechnung für Schwimmertyp $u = u_{1c}$
η_s^*	dimensionsloser Wert zu η_s (Gl.(29))
η_{1s}^*	dimensionsloser Wert zu η_{1s} (Gl.(37))
η_f	Erhebung der Wasseroberfläche bezogen auf den tiefsten Punkt des Spants
ϑ	Winkel (Darstellung in modifizierten Zylinderkoordinaten)
μ	Exzentrizität der Druckellipse
μ'	Seitenverhältnis der Druckellipse
$\tilde{\mu}'$	Seitenverhältnis der Schwimmer-Wasserlinie
λ	Hilfsgröße (Gl.(2))
ν	dimensionslose Hilfsgröße (Gl.(23))
ξ	dimensionslose Länge der Druckfläche (Gl.(23))
ρ	Dichte der Flüssigkeit
φ	Hilfsgröße
ϕ	Geschwindigkeitspotential der querangeströmten Platte mit elliptischen Umriß

3) Dreidimensionale Lösung nach Schmieden

Die Rechnung von Schmieden [14] basiert auf den linearisierten Ansätzen für den hydrodynamischen Stoß und benutzt die von Wagner [15] eingeführte Korrektur für die Aufwölbung der Wasseroberfläche. Im Rahmen der linearisierten Theorie wird die nichtlineare Randbedingung konstanten Drucks an der freien Oberfläche durch die Bedingung ersetzt, daß das Geschwindigkeitspotential in der Ebene der ursprünglichen Wasseroberfläche verschwindet. Der eingetauchte Teil des Körpers wird durch eine Platte mit gleichem Umriß approximiert, die in der Ebene der ursprünglichen Wasseroberfläche liegt. Gleichzeitig wird auch die Druckgleichung linearisiert, woraus folgt, daß die Kräfte aus der Flüssigkeit durch die hydrodynamische Masse beschrieben werden können. Diese Linearisierung ist bei Schwimmern zulässig, deren Boden einen kleinen aber endlichen Winkel mit der Horizontalen

bildet oder höchstens an einem Punkt oder entlang einer Linie eine horizontale Tangente aufweist. Die Korrektur für die Aufwölbung der Wasseroberfläche berücksichtigt, daß sich durch die Verdrängung des eingetauchten Teils die Wasseroberfläche neben dem Körper aufwölbt und dadurch die Benetzung gegenüber der Wasserlinie in Höhe der ursprünglichen Wasseroberfläche vergrößert.

Schmieden setzt an, daß der benetzte Teil des Schwimmers einen elliptischen Umriß hat und somit durch eine elliptische Platte dargestellt werden kann. Den verschiedenen Eintauchzuständen entspricht eine sich ähnlich vergrößernde Druckfläche.

Das Geschwindigkeitspotential ϕ der querangeströmten Platte mit elliptischem Umriß wird in der Form angegeben:

$$\phi = V_z \left\{ 1 + \frac{1}{E(\kappa)} \left[\frac{c\sqrt{b^2+\lambda}}{\sqrt{\lambda(c^2+\lambda)}} - \int_0^\alpha \sqrt{1-\kappa^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \right] \right\}, \quad (1)$$

wobei b und c die Halbachsen der Druckellipse in Richtung der y - bzw. x -Achse sind. Es gilt außerdem:

$$\frac{x^2}{c^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{\lambda} = 1, \quad (2)$$

$$\kappa' = b/c, \quad \kappa = \sqrt{1-\kappa'^2}, \quad (3)$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{c}{\sqrt{\lambda}}, \quad (4)$$

$$E(\kappa) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\kappa^2 \sin^2 \varphi} d\varphi. \quad (5)$$

Mit:

$$E(\alpha, \kappa) = \int_0^\alpha \sqrt{1-\kappa^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (6)$$

läßt sich die Gl. (1) vereinfachen in:

$$\phi = V_z \left\{ 1 + \frac{1}{E(\kappa)} \cdot \frac{c\sqrt{b^2+\lambda}}{\sqrt{\lambda(c^2+\lambda)}} - \frac{E(\alpha, \kappa)}{E(\kappa)} \right\}. \quad (7)$$

Bestimmung der Druckverteilung und der hydrodynamischen Masse: Nach der linearisierten Theorie wird der Druck in der Form:

$$p = \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (8)$$

bestimmt. Bei der Ableitung ist zu beachten, daß sowohl die Eintauchgeschwindigkeit V als auch die Abmessungen des eingetauchten Teils Funktionen der Zeit sind. An der Platte selbst ($z=0$, $\lambda=0$) gilt für das Geschwindigkeitspotential:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=\lambda=0} = \frac{Vb}{E(\kappa)} \sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (9)$$

und damit:

$$p = \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\rho \kappa' c \dot{V}}{E(\kappa)} \sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2}} + \frac{\rho \kappa' c \dot{V}}{E(\kappa)} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2}}} \quad (10)$$

Die hydrodynamische Masse der einen (benetzten) Seite der elliptischen Platte berechnet man zu:

$$M'' = \frac{2}{3} \pi \rho b^2 c / E(\kappa). \quad (11)$$

Bestimmung der Aufwölbung der Wasseroberfläche: Eine Näherung für die Deformation der freien Oberfläche erhält man nach Wagner [15] dadurch, daß man die Vertikalgeschwindigkeiten in der ursprünglichen Wasserfläche, $z=0$, für die aufeinanderfolgenden Eintauchzustände integriert. Die Benetzung läßt sich bestimmen, wenn die Integration bis zu dem Punkt geführt wird, zu dem die Wasseroberfläche die Körperkontur erreicht.

Für die Vertikalgeschwindigkeit $\partial \phi / \partial z$ in der Plattenebene außerhalb der Platte gilt:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = V \left\{ 1 + \frac{1}{E(\kappa)} \frac{c \sqrt{b^2 + \lambda}}{\sqrt{\lambda (c^2 + \lambda)}} - \frac{E(\alpha, \kappa)}{E(\kappa)} \right\}. \quad (12)$$

Für die Schwimmerkontur muß dann gelten:

$$\eta(R, \vartheta) = \int_0^R u(c) \left\{ \frac{1}{V} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\} dc, \quad (13)$$

wobei (R, ϑ) modifizierte Polarkoordinaten sind. Der Zusammenhang mit den kartesischen Koordinaten (x, y) ist folgendermaßen gegeben:

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cdot \cos \vartheta \\ y &= \kappa' R \cdot \sin \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

η bezeichnet die Erhebung der Wasseroberfläche bzw. die Oberfläche des Schwimmers, die im Augenblick des Kontakts übereinstimmen. η wird auf den tiefsten Punkt des Schwimmers bezogen. $u(c)$ bezeichnet das Verhältnis

$$u = V \cdot \frac{dt}{dc} \quad (15)$$

das für einen starren Schwimmer nur von der Schwimmergeometrie abhängt. Man macht für $u(c)$ einen Potenzreihenansatz:

$$u = u_0 + u_1 c + u_2 c^2 + \dots \quad (16)$$

Zur Bestimmung der Integrale (13) führt Schmieden zur Vereinfachung der Rechnung folgende Näherung ein, die den Grenzwert für die unendlich lange Ellipse ($\kappa \rightarrow 1$, $c/b \rightarrow \infty$) darstellt:

$$\frac{E(\alpha, \kappa)}{E(\kappa)} \cong \sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{c^2 + \lambda}} \quad (17)$$

Mit dieser Näherung gilt für die Geschwindigkeiten:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \cong V \left\{ 1 + \frac{c}{\sqrt{c^2 + \lambda}} \left[\frac{1}{E(\kappa)} \sqrt{\frac{b^2 + \lambda}{\lambda}} - 1 \right] \right\} \quad (18)$$

Der Fehler der Näherung (17) soll im folgenden etwas genauer betrachtet werden. Dazu ist im Diagramm 1 der Ausdruck für den Fehler:

$$\left[\sin \alpha - \frac{E(\alpha, \kappa)}{E(\kappa)} \right] / \sin \alpha$$

für verschiedene Seitenverhältnisse $\kappa = b/c = 0; 0.070; 0.139; 0.208; 0.276$ dargestellt worden. Der größte Fehler tritt bei $\alpha = 0$ auf und hat dort den Wert:

$$1 - 1/E(\kappa).$$

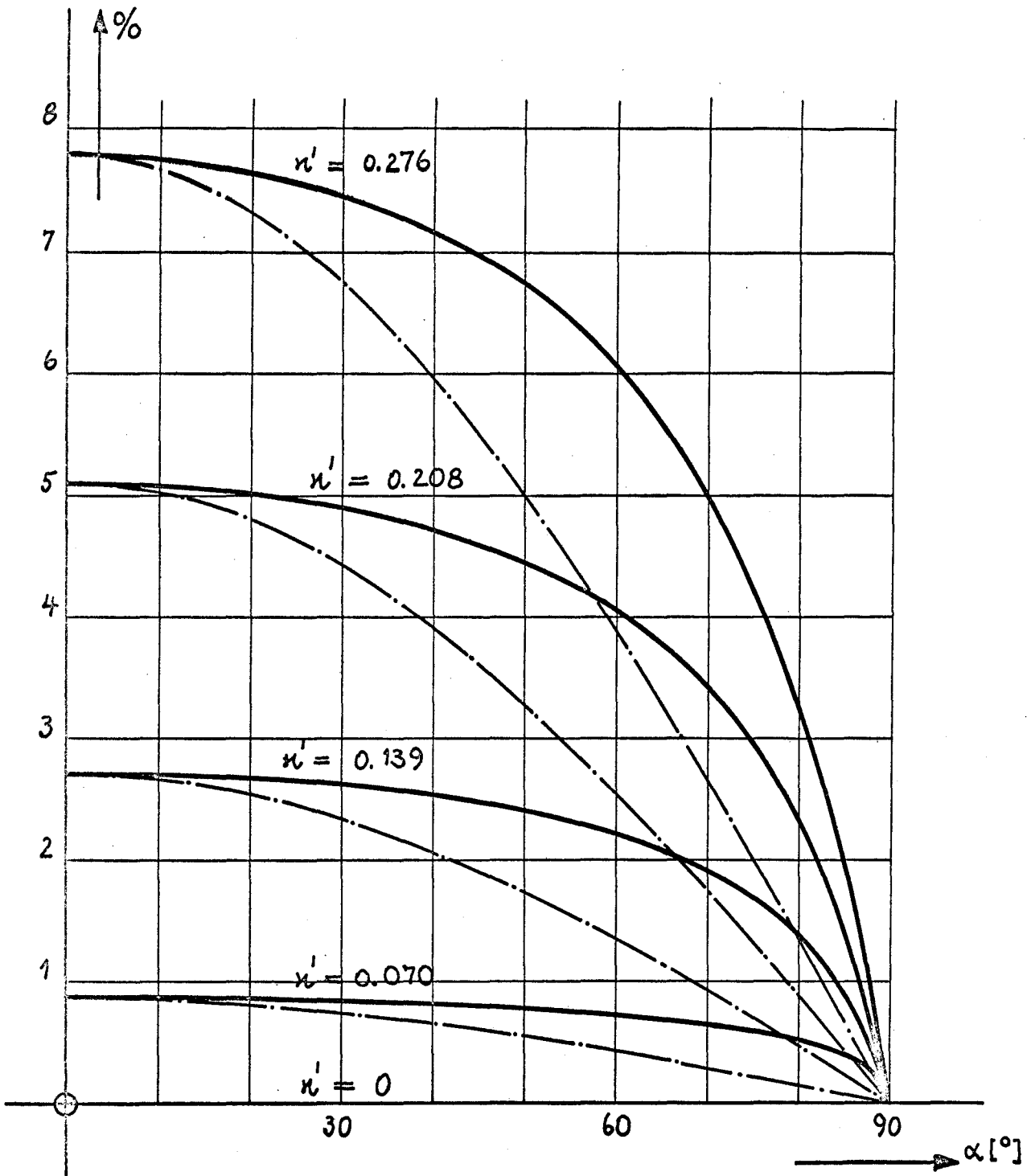


Diagramm 1: Fehler der von Schmieden [14] eingeführten Näherung $E(\alpha, \kappa)/E(\kappa) \cong \sin \alpha$ in [%] und Approximation des Fehlers durch $\cos \alpha \cdot (1 - 1/E(\kappa))$.

Dem Fall $\alpha = 0$ entspricht nach Gl. (4) der Grenzfall $\lambda \rightarrow \infty$. In der Nähe der Druckellipse, $\lambda = 0$ bzw. $\alpha = 90^\circ$, verschwindet der Fehler.

Zur Abschätzung des Fehlers, der durch die Approximation (17) bei der Berechnung der Integrale (13), die die Schwimmerform bestimmen, entsteht, wurde der Ansatz Gl. (17) durch ein Glied:

$$- \cos \alpha \left[1 - \frac{1}{E(\kappa)} \right] \cdot \sin \alpha$$

verbessert. Dieser Ansatz wurde hauptsächlich deswegen gewählt, weil es dabei noch möglich war, die zusätzlichen Integrale für die beiden Sonderfälle $\vartheta = \pi/2$ und $\vartheta = 0$ geschlossen zu lösen. Der ^{Verlauf} dieses Zusatzterms ist ebenfalls in das Diagramm 1 mit eingetragen worden. Man erkennt, daß der Hauptteil des Fehlers - nämlich etwa 80 % der Fehlerfläche im Diagramm - durch diesen Ansatz korrigiert werden kann.

Es gilt damit:

$$\begin{aligned} \frac{E(\alpha, \kappa)}{E(\kappa)} &\cong \sin \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha \left[1 - \frac{1}{E(\kappa)} \right] & (19) \\ &\cong \frac{c}{\sqrt{c^2 + \lambda}} - \frac{c\sqrt{\lambda}}{c^2 + \lambda} \left[1 - \frac{1}{E(\kappa)} \right]. \end{aligned}$$

und weiter:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \cong V \left\{ 1 + \frac{c}{\sqrt{c^2 + \lambda}} \left[\frac{1}{E(\kappa)} \sqrt{\frac{b^2 + \lambda}{\lambda}} - 1 \right] + \frac{c\sqrt{\lambda}}{c^2 + \lambda} \left[1 - \frac{1}{E(\kappa)} \right] \right\}, \quad (20)$$

und:

$$\eta(R, \vartheta) = \int_0^R u(c) \left\{ 1 + \frac{c}{\sqrt{c^2 + \lambda}} \left[\frac{1}{E(\kappa)} \sqrt{\frac{b^2 + \lambda}{\lambda}} - 1 \right] + \frac{c\sqrt{\lambda}}{c^2 + \lambda} \left[1 - \frac{1}{E(\kappa)} \right] \right\} dc.$$

Es sollen folgende Bezeichnungen benutzt werden:

$$\eta_s(R, \vartheta) = \int_0^R u(c) \left\{ 1 + \frac{c}{\sqrt{c^2 + \lambda}} \left[\frac{1}{E(\kappa)} \sqrt{\frac{b^2 + \lambda}{\lambda}} - 1 \right] \right\} dc, \quad (21)$$

$$\Delta \eta(R, \vartheta) = \int_0^R u(c) \cdot \frac{c\sqrt{\lambda}}{c^2 + \lambda} \left[1 - \frac{1}{E(\kappa)} \right] dc, \quad (22)$$

wobei $\eta_s(R, \vartheta)$ der von Schmieden berechnete Wert ist, während $\Delta\eta$ die Abschätzung für den Fehler der Schmiedenschen Rechnung liefert, die mit Hilfe der verbesserten Näherung errechnet wird. Die Integrale (21) und (22) lassen sich mit den folgenden Substitutionen:

$$\left. \begin{aligned} c &= R \cdot \xi \\ \lambda &= R^2 \cdot \nu, \quad \nu = \nu(\vartheta, \xi) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

in die Form umschreiben:

$$\left. \begin{aligned} \eta_s(R, \vartheta) &= R \int_0^1 u \left\{ 1 + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \nu}} \left[\frac{1}{E(\kappa)} \sqrt{\frac{\kappa^2 \xi^2 + \nu}{\nu}} - 1 \right] \right\} d\xi \\ \Delta\eta(R, \vartheta) &= R \left(1 - \frac{1}{E(\kappa)} \right) \int_0^1 u \frac{\xi \sqrt{\nu}}{\xi^2 + \nu} d\xi \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

a. Schwimmerform $u(c) = u_0$: Schmieden hat zwei Schwimmerformen behandelt, die dem ersten und dem zweiten Glied der Reihe (16) entsprechen. Die erste Schwimmerform entspricht einem elliptischen Kegel. Man errechnet für die Längsachse des Schwimmers (x-Achse, $\vartheta = 0$):

$$\nu = 1 - \xi^2;$$

$$\eta_s(R, 0) = u_0 R \int_0^1 \left\{ 1 - \xi + \frac{1}{E(\kappa)} \xi \sqrt{\frac{1 - \kappa^2 \xi^2}{1 - \xi^2}} \right\} d\xi,$$

$$\eta_s(R, 0) = u_0 R \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{E(\kappa)} + \frac{\kappa^2}{2\kappa E(\kappa)} \ln \frac{1 + \kappa}{1 - \kappa} \right\}; \quad (25)$$

$$\Delta\eta(R, 0) = u_0 R \left(1 - \frac{1}{E(\kappa)} \right) \int_0^1 \xi \sqrt{1 - \xi^2} d\xi,$$

$$\Delta\eta(R, 0) = u_0 R \cdot \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{E(\kappa)} \right). \quad (26)$$

Entsprechend errechnet man für die Querachse des Schwimmers (y-Achse, $\vartheta = \pi/2$):

$$\nu = \kappa^2 (1 - \xi^2);$$

$$\eta_s(R, \pi/2) = u_0 R \int_0^1 \left\{ 1 + \frac{\xi}{\sqrt{\kappa'^2 + \kappa^2 \xi^2}} \left[\frac{1}{E(\kappa)} \sqrt{\frac{1}{1-\xi^2}} - 1 \right] \right\} d\xi,$$

$$\eta_s(R, \pi/2) = u_0 R \cdot \left[\frac{\arcsin \kappa}{\kappa \cdot E(\kappa)} + \frac{\kappa' (1-\kappa')}{\kappa^2} \right]; \quad (27)$$

$$\Delta\eta(R, \pi/2) = u_0 R \left(1 - \frac{1}{E(\kappa)} \right) \frac{\kappa'}{\kappa^2} \int_0^1 \frac{\xi \sqrt{1-\xi^2}}{(\kappa'/\kappa)^2 + \xi^2} d\xi,$$

$$\Delta\eta(R, \pi/2) = u_0 R \left(1 - \frac{1}{E(\kappa)} \right) \frac{\kappa'}{\kappa^2} \left\{ \frac{1}{2\kappa} \ln \frac{1+\kappa}{1-\kappa} - 1 \right\}. \quad (28)$$

Für die Zwischenwerte von ψ kann man die Integrale für η_s mit Hilfe von numerischen Methoden berechnen. Schmieden hat dies umgangen, indem er Näherungsentwicklungen für den Verlauf über ψ benutzt, deren Fehler nach seinen Angaben unter 1 % liegen soll. Auf eine numerische Berechnung der Korrekturen $\Delta\eta$ soll hier daher auch verzichtet werden. Bei den anschließenden Betrachtungen wird dies ohnehin nicht benutzt. Vielmehr wird zur Vereinfachung des Vergleichs angenommen, daß auch die Horizontalschnitte (Wasserlinien) Ellipsen sind.

Zur Verdeutlichung der Verhältnisse soll die Schmiedensche Rechnung auch auf den Grenzfall der kreisförmigen Druckfläche ($\kappa = 0$) angewendet werden, obwohl die Gleichungen ursprünglich nur für langgestreckte Schwimmer entwickelt wurden. Der Grenzfall der kreisförmigen Druckfläche ermöglicht eine Aussage über die Qualität der hier eingeführten Korrektur $\Delta\eta$, weil die exakte Lösung für den Stoß eines Kreiskegels bekannt ist. Man erhält folgende Ergebnisse:

$$\eta_s(R, 0) = \eta_s(R, \pi/2) = u_0 R \cdot \left(\frac{2}{\pi} + \frac{1}{2} \right) = 1.1366 u_0 R;$$

$$\Delta\eta(R, 0) = \Delta\eta(R, \pi/2) = u_0 R \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3\pi} \right) = 0.1211 u_0 R;$$

$$\eta(R, 0) = \eta(R, \pi/2) = u_0 R \left(\frac{5}{6} + \frac{4}{3\pi} \right) = 1.2577 u_0 R.$$

Die exakte Lösung ist: $\eta(R, \psi) = 4/\pi \cdot u_0 R = 1.2732 u_0 R$. Der Fehler

der Schmiedenschen Formeln beträgt für diesen Grenzfall des Kreiskegels etwa 12 %. Durch die verbesserte Näherung verringert sich der Fehler auf 1,2 %! Somit ist gezeigt, daß die verbesserte Approximation für die elliptische Funktion gut zur Beurteilung der Fehler geeignet ist und außerdem eine deutliche Verbesserung der Ergebnisse erlaubt.

In der folgenden Tabelle 1 sind die Ergebnisse für die Ordinaten der Wasseroberfläche in dimensionsloser Form für eine Reihe von Seitenverhältnissen $0.1 \leq \kappa' \leq 1$ zusammengestellt. Von Schmieden wurden 4 Beispiele mit $\kappa' = 0.1; 0.1414; 0.1732$ und 0.2 berechnet. Außerdem ist in der Tabelle der prozentuale Fehler angegeben, den man mit Hilfe der verbesserten Näherung für die Schmiedenschen Formeln bestimmt. Der Fehler der verbesserten Ergebnisse η^* ist entsprechend der Betrachtung für den Kreiskegel wahrscheinlich um eine Zehnerpotenz kleiner als der angegebene Fehler.

In der Tabelle bezeichnet:

$$\eta^*(\vartheta) = \eta(R, \vartheta) / u_0 R \quad (29)$$

κ'	$\eta_s^*(0)$	$\Delta\eta^*(0)$	$\eta^*(0)$	%	$\eta_s^*(\pi/2)$	$\Delta\eta^*(\pi/2)$	$\eta^*(\pi/2)$	%
0.1	1.0069	0.0053	1.0132	0.5	1.5457	0.0032	1.5489	0.2
0.2	1.0205	0.0160	1.0365	1.6	1.4972	0.0134	1.5106	0.9
0.3	1.0366	0.0293	1.0659	2.8	1.4412	0.0280	1.4692	1.9
0.4	1.0534	0.0436	1.0970	4.1	1.3850	0.0442	1,4292	3.2
0.5	1.0698	0.0581	1.1279	5.4	1.3318	0.0605	1.3923	4.3
0.6	1.0854	0.0722	1.1576	6.7	1.2832	0.0758	1.3590	5.9
0.7	1.0999	0.0856	1.1855	7.8	1.2395	0.0896	1.3291	7.2
0.8	1.1133	0.0983	1.2116	8.8	1.2007	0.1017	1.3024	8.5
0.9	1.1255	0.1101	1.2356	9.8	1.1666	0.1122	1.2788	9.6
1.0	1.1366	0.1211	1.2577	10.7	1.1366	0.1211	1.2577	10.7

Tabelle 1

Aus den Ergebnissen für die Oberflächenaufwölbung läßt sich die Körperkontur auf folgende Weise errechnen: Die Gleichung des Schwimmers lautet in Parameterform:

$$x = R \cdot \cos \vartheta \quad ; \quad y = \kappa' R \cdot \sin \vartheta \quad ; \quad z = \eta^*(\vartheta) \cdot u_0 R \quad (30)$$

Die Integration von Gleichung (15) liefert:

$$\int_0^{t(R)} V dt = \int_0^R u_0 dc,$$

$$z_0 = u_0 R,$$

wobei z_0 die Eintauchung der Spitze des Schwimmers bezeichnet. Zur Berechnung der η^* -Werte wurde ebenfalls über c von 0 bis R integriert, also bis zu dem Augenblick, an dem die große Halbachse der Druckellipse die Länge R hat (vgl. Diagramm 2).

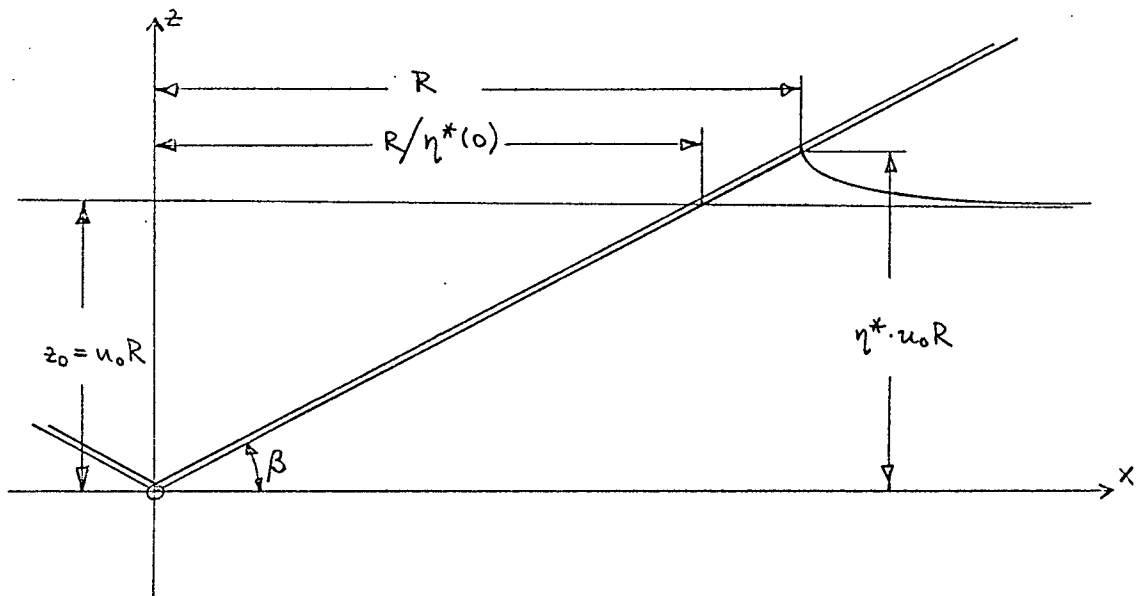


Diagramm 2

aus dem Diagramm 2, das einen Längsschnitt durch den Schwimmer, kann man erkennen, daß für eine Wasserlinie in der Höhe der ungestörten Wasseroberfläche $z = u_0 R$ gelten muß:

$$x = 1/\eta^*(\vartheta) \cdot R \cos \vartheta; \quad y = 1/\eta^*(\vartheta) \cdot x' R \sin \vartheta; \quad z = u_0 R. \quad (31)$$

Man erkennt auch aus diesen Gleichungen (31) bzw. (30), daß der Schwimmer dieses Typs mit $u = u_0$ kegelig sein muß, weil alle Koordinaten proportional dem Maß R sind.

Für den Winkel zwischen dem Längsschnitt durch den Schwimmer und der Horizontalen gilt:

$$\beta = \text{arc tg}(u_0 \eta^*(0)) \cong u_0 \eta^*(0) \quad ; \quad \text{für kleine } \beta. \quad (32)$$

κ'	nach Schmieden				verbesserte Rechnung			
	$1/\eta_s^*(0)$	$\kappa'/\eta_s^*(0)$	$\tilde{\kappa}'$	k_1	$1/\eta^*(\pi/2)$	$\kappa'/\eta^*(\pi/2)$	$\tilde{\kappa}'$	k_1
0.1	.9931	.0647	.0651	.6425	.9870	.0646	.0654	.6372
0.2	.9799	.1336	.1363	.6545	.9648	.1324	.1372	.6387
0.3	.9647	.2082	.2158	.6694	.9382	.2042	.2176	.6386
0.4	.9493	.2888	.3042	.6854	.9116	.2799	.3070	.6378
0.5	.9348	.3754	.4016	.7019	.8866	.3591	.4050	.6367
0.6	.9213	.4676	.5075	.7180	.8639	.4415	.5111	.6357
0.7	.9092	.5647	.6212	.7335	.8435	.5267	.6244	.6347
0.8	.8982	.6663	.7418	.7481	.8254	.6143	.7442	.6337
0.9	.8885	.7714	.8683	.7616	.8093	.7038	.8696	.6329
1.0	.8798	.8798	1.0000	.7741	.7951	.7951	1.0000	.6322

Tabelle 2

In der Tabelle 2 sind dimensionslose Werte zusammengestellt, die die Wasserlinien der Schwimmer charakterisieren. Die Spalten mit $1/\eta_s^*(0)$ geben das Verhältnis der großen Achse der Schwimmer-Wasserlinie zur großen Achse der Druckfläche an. In den Spalten mit $\kappa'/\eta^*(\pi/2)$ ist die kleine Achse der Schwimmer-Wasserlinie auf die große Achse der Druckfläche bezogen. $\tilde{\kappa}'$ bezeichnet das Seitenverhältnis der Schwimmer-Wasserlinie. k_1 ist durch die folgende Gleichung definiert:

$$k_1 = 1/(\eta_s^*(0) \cdot \eta^*(\pi/2))$$

Damit beschreibt k_1 die Wasserlinienfläche relativ zur Fläche der Druckellipse, wenn man vereinfachend annimmt, daß die Wasserlinien ebenfalls Ellipsen sind.

Für den Grenzfall des unendlich langen Schwimmers ($\kappa \rightarrow 1$, $\kappa' \rightarrow 0$) muß das Flächenverhältnis den Wert $k_1 = 0.6366$ annehmen. Im anderen Grenzfall des Kreiskegels muß dieses Flächenverhältnis $k_1 = 0.6169$ betragen.

In der Tabelle 2 sind wiederum die Ergebnisse nach den Formeln von Schmieden und die verbesserten Ergebnisse einander gegenübergestellt.

b. Schwimmerform $u(c) = u_1 c$: Für diese Schwimmerform errechnet man folgende Aufwölbungen der Wasseroberfläche:

Auf der x-Achse ($\vartheta = 0$):

$$\eta_{s1}(R, 0) = u_1 R^2 \int_0^1 \left\{ \xi - \xi^2 + \frac{1}{E(\kappa)} \xi^2 \sqrt{\frac{1 - \kappa^2 \xi^2}{1 - \xi^2}} \right\} d\xi,$$

$$\eta_{s1}(R, 0) = \frac{1}{2} u_1 R^2 \left\{ 1 + \frac{2}{3} \frac{\kappa'^2}{\kappa^2} \left(\frac{K(\kappa)}{E(\kappa)} - 1 \right) \right\}, \quad (33)$$

mit

$$K(\kappa) = \int_0^{\pi/2} [1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi]^{-1/2} d\varphi;$$

$$\Delta \eta_1(R, 0) = u_1 R^2 \left(1 - \frac{1}{E(\kappa)} \right) \int_0^1 \xi^2 \sqrt{1 - \xi^2} d\xi,$$

$$\Delta \eta_1(R, 0) = \frac{1}{2} u_1 R^2 \cdot \frac{\pi}{8} \left(1 - \frac{1}{E(\kappa)} \right). \quad (34)$$

Entsprechend errechnet man für die y-Achse ($\vartheta = \pi/2$):

$$\eta_{s1}(R, \pi/2) = u_1 R^2 \int_0^1 \left\{ \xi + \frac{\xi^2}{\sqrt{\kappa'^2 + \kappa^2 \xi^2}} \left[\frac{1}{E(\kappa)} \sqrt{\frac{1}{1 - \xi^2}} - 1 \right] \right\} d\xi,$$

$$\eta_{s1}(R, \pi/2) = \frac{1}{2} u_1 R^2 \left\{ \frac{1 + \kappa^2}{\kappa^2} + \frac{\kappa'^2}{\kappa^2} \left(\frac{1}{2\kappa} \ln \frac{1 + \kappa}{1 - \kappa} - 2 \frac{K(\kappa)}{E(\kappa)} \right) \right\}^* \quad (35)$$

$$\Delta \eta_1(R, \pi/2) = u_1 R^2 \left(1 - \frac{1}{E(\kappa)} \right) \frac{\kappa'}{\kappa^2} \int_0^1 \frac{\xi \sqrt{1 - \xi^2}}{(\kappa'/\kappa)^2 + \xi^2} d\xi,$$

$$\Delta \eta_1(R, \pi/2) = u_1 R^2 \left(1 - \frac{1}{E(\kappa)} \right) \frac{\pi \kappa' (1 - \kappa'^2)}{4 \kappa^4}. \quad (36)$$

Für den Grenzfall der kreisförmigen Druckfläche erhält man:

$$\eta_{s1}(R, 0) = \eta_{s1}(R, \pi/2) = \frac{2}{3} u_1 R^2 = 1.3333 \cdot \frac{1}{2} u_1 R^2;$$

*) In der entsprechenden Gleichung bei Schmiedens (Gl. (25) in [8]) befindet sich offenbar ein Druckfehler. Die Zahlenergebnisse entsprechen nicht der Gleichung in der dort angegebenen Form, sondern der hier gegebenen Form.

$$\Delta\eta_1 (R, 0) = \Delta\eta_1 (R, \pi/2) = \frac{1}{2} u_1 R^2 \cdot \frac{\pi}{8} \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) = 0,1427 \cdot \frac{1}{2} u_1 R^2;$$

$$\eta_1 (R, 0) = \eta_1 (R, \pi/2) = \frac{1}{2} u_1 R^2 \cdot \left(\frac{13}{12} + \frac{\pi}{8}\right) = 1,4760 \cdot \frac{1}{2} u_1 R^2.$$

Als exakte Lösung errechnet man $\eta_1(R, \vartheta) = 1,50 \cdot 1/2 \cdot u_1 R^2$. Der Fehler der Schmiedenschen Formeln für die Oberflächenaufwölbung beträgt in diesem Grenzfall 12,5 %. Durch die verbesserte Approximation wird der Fehler auf 1,6 % verringert. Die Verhältnisse sind also denen beim Schwimmer der Klasse $u = u_0$ sehr ähnlich. Es ist allerdings zu beachten, daß bei der Schwimmerform $u = u_0$ der Fehler der Aufwölbung gleichzeitig der Fehler der Schwimmerabmessungen war, während im vorliegenden Fall der Fehler der Schwimmerabmessungen nur etwa halb so groß ist wie der Fehler der Aufwölbung.

In der Tabelle 3 sind die Ergebnisse der Auswertung der Gleichungen (33), (34), (35) und (36) zusammengestellt. Es sind dabei wieder dimensionslose Werte angegeben, die in folgender Weise gebildet sind:

$$\eta_1^*(\vartheta) = \eta_1(\vartheta) / \left(\frac{1}{2} u_1 R^2\right). \quad (37)$$

Es ist auch wieder, wie in Tabelle 1, der Fehler der Ergebnisse nach Schmieden mit Hilfe des Korrekturgliedes $\Delta\eta_1$ abgeschätzt worden.

u'	$\eta_{s1}^*(0)$	$\Delta\eta_1^*(0)$	$\eta_1^*(0)$	%	$\eta_{s1}^*(\pi/2)$	$\Delta\eta_1^*(\pi/2)$	$\eta_1^*(\pi/2)$	%
0.1	1.0178	0.0062	1.0239	0.6	1.9670	0.0020	1.9691	0.1
0.2	1.0520	0.0189	1.0709	1.8	1.8999	0.0105	1.9104	0.6
0.3	1.0921	0.0346	1.1266	3.2	1.8191	0.0245	1.8437	1.3
0.4	1.1334	0.0514	1.1848	4.5	1.7350	0.0420	1.7770	2.4
0.5	1.1735	0.0684	1.2419	5.8	1.6531	0.0608	1.7140	3.7
0.6	1.2112	0.0850	1.2963	7.0	1.5763	0.0797	1.6560	5.1
0.7	1.2461	0.1009	1.3470	8.1	1.5057	0.0977	1.6034	6.5
0.8	1.2780	0.1158	1.3938	9.1	1.4419	0.1144	1.5563	7.9
0.9	1.3071	0.1297	1.4368	9.8	1.3846	0.1294	1.5139	9.3
1.0	1.3333	0.1427	1.4760	10.7	1.3333	0.1427	1.4760	10.7

Tabelle 3

Die Körperkontur läßt sich aus der Parameterdarstellung für Grenzlinie des benetzten Teils

$$x = R \cdot \cos \vartheta ; \quad y = \kappa' R \cdot \sin \vartheta ; \quad z = \eta_1^*(\vartheta) \cdot \frac{1}{2} u_1 R^2 \quad (38)$$

bestimmen. Man erkennt, daß Schnitte durch den Schwimmer in radialer Richtung ($\vartheta = \text{const.}$) nach oben geöffnete quadratische Parabeln sein müssen.

Durch Integration von Gleichung (15) erhält man:

$$\int_0^{t(R)} V dt = \int_0^R u_1 c \cdot dc$$

$$z_0 = \frac{1}{2} u_1 R^2 ,$$

wobei z_0 die Eintauchung des tiefsten Punkts des Schwimmers gegenüber der ursprünglichen Wasseroberfläche bezeichnet. Für eine Wasserlinie in der Höhe z_0 über der tiefsten Stelle des Schwimmers gilt entsprechend Diagramm 3, das einen Längsschnitt durch den Schwimmer zeigt:

$$x = \frac{1}{\sqrt{\eta_1^*(\vartheta)}} \cdot R \cos \vartheta ; \quad y = \frac{\kappa'}{\sqrt{\eta_1^*(\vartheta)}} \cdot R \sin \vartheta ; \quad z = \frac{1}{2} u_1 R^2 \quad (39)$$

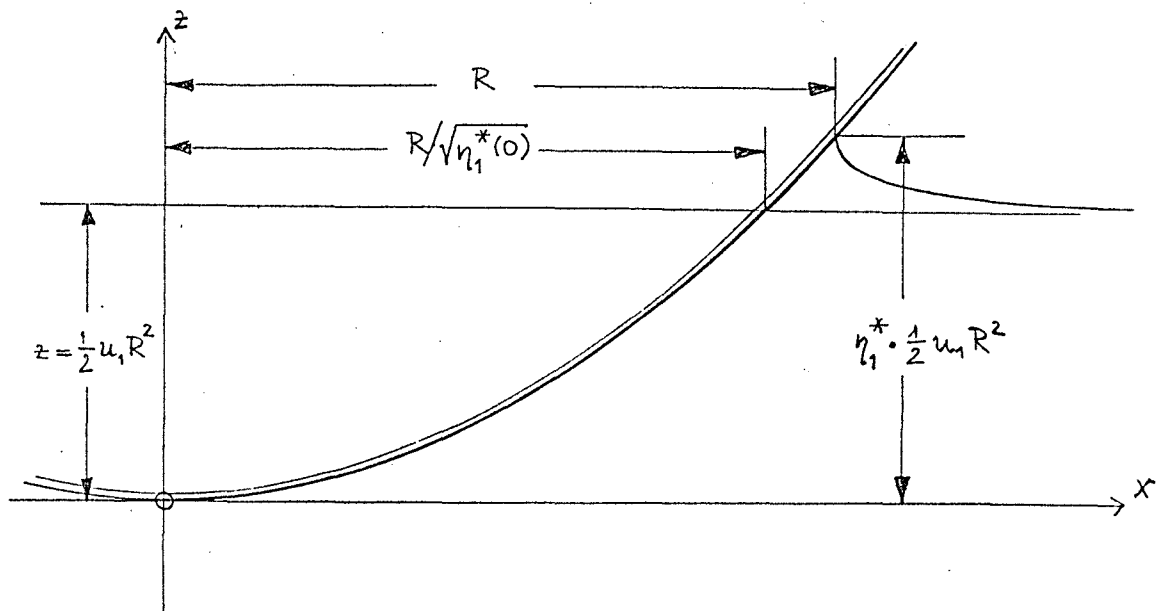


Diagramm 3

Die nach diesen Gleichungen errechneten dimensionslosen

Werte für die Achsen der Schwimmer-Wasserlinien sind in der Tabelle 4 zusammengestellt. Dabei sind die Achsen auf die große Achse der Druckellipse 2R bezogen worden. Außerdem ist das Achsenverhältnis der Wasserlinie angegeben sowie der Wert k_1 , der in diesem Fall folgendermaßen gebildet wird:

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{\eta_1^*(0) \cdot \eta_1^*(\pi/2)}} .$$

κ'	nach Schmieden				verbesserte Rechnung			
	$1/\sqrt{\eta_{s1}^*(0)}$	$\kappa'/\sqrt{\eta_{s1}^*(\pi/2)}$	$\tilde{\kappa}'$	k_1	$1/\sqrt{\eta_1^*(0)}$	$\kappa'/\sqrt{\eta_1^*(\pi/2)}$	$\tilde{\kappa}'$	k_1
0.1	.9912	.0713	.0719	.7068	.9882	.0712	.0721	.7042
0.2	.9750	.1451	.1488	.7073	.9663	.1447	.1497	.6992
0.3	.9569	.2224	.2324	.7095	.9421	.2209	.2345	.6938
0.4	.9393	.3037	.3233	.7131	.9187	.3001	.3266	.6892
0.5	.9231	.3889	.4213	.7180	.8973	.3819	.4256	.6854
0.6	.9086	.4779	.5260	.7234	.8783	.4663	.5308	.6825
0.7	.8958	.5705	.6368	.7300	.8616	.5528	.6416	.6804
0.8	.8846	.6662	.7532	.7367	.8470	.6413	.7571	.6790
0.9	.8747	.7649	.8744	.7433	.8343	.7315	.8768	.6780
1.0	.8660	.8660	1.0000	.7500	.8231	.8231	1.0000	.6775

Tabelle 4

Für den Flächenkoeffizienten k_1 , der genau wie in Tabelle 2 die Wasserlinienfläche relativ zur Druckfläche unter der Annahme beschreibt, daß die Wasserlinie eine Ellipse ist, lassen sich für die beiden Grenzfälle der unendlich langen Ellipse ($\kappa = 1$) und der kreisförmigen Druckfläche ($\kappa = 0$) folgende exakte Werte bestimmen: $k_1 = 0.7071$ bzw. $k_1 = 0.6667$.

Der Fehler der Achsen der Wasserlinien ist nur etwa halb so groß wie der Fehler, der in Tabelle 3 angegeben ist. Eine Abschätzung für den Fehler des Achsenverhältnisse $\tilde{\kappa}'$ erhält^{man}, wenn man die Fehler der Tabelle 3 halbiert und ihre Differenz bildet. Der Fehler des Koeffizienten der Fläche ist etwa die halbe Summe der beiden in Tabelle 3 angegebenen Fehler. Diese Aussage bezieht sich auf die Ergebnisse nach Schmieden. Die Ergebnisse der ver-

besserten Rechnung sind um etwa eine Zehnerpotenz kleiner.

4) Lösung nach der Streifenmethode

Bei der Behandlung von dreidimensionalen Strömungsproblemen mit Hilfe der Streifenmethode wird vorausgesetzt, daß sich die Strömung in einer Schar von parallelen Ebenen nur wenig von einer ebenen Strömung unterscheidet. Im allgemeinen betrachtet man Querschnittsebenen des umströmten Körpers. Die Voraussetzung ist offenbar umso besser erfüllt, je kleiner der Winkel zwischen der Körperkontur und der Körperachse ist. Örtlich sehr begrenzte Abweichungen von dieser Bedingung, z.B. an den Enden des Körpers, haben im allgemeinen nur einen geringen Einfluß auf das Gesamtergebnis. Daher läßt sich die Streifenmethode auch auf Körper mit stumpfen Enden mit ausreichender Genauigkeit anwenden.

Durch die Ansätze der Streifenmethode werden zusätzliche Zwangsbedingungen für die Strömung eingeführt. Daher muß die Strömungsenergie zu groß sein. Daraus folgt dann auch, daß die Kräfte zu groß berechnet werden. Man kann diesen Fehler durch Korrekturfaktoren ausgleichen, die aus dreidimensionalen Betrachtungen an einfachen geometrischen Vergleichskörpern gewonnen wurden.

Es sollen, um einen direkten Vergleich zu ermöglichen, die von Schmieden [14] und mit der verbesserten Approximation berechneten Schwimmerformen nach der Streifenmethode behandelt werden. Bei der Rechnung nach Schmieden erwies es sich als zweckmäßig, von einer Ellipsenform der benetzten Fläche auszugehen und die zugehörigen Wasserlinien des Schwimmers zu bestimmen. Bei der Streifenmethode dagegen gehen wir von der Spantkontur des Schwimmers aus und bestimmen die benetzten Breiten aus der Aufwölbung der Oberfläche.

Zur Lösung dieser Aufgabe - der Bestimmung der benetzten Breite - kommen nach dem allgemeinen Ansatz von Wagner [15] zwei Lösungsverfahren in Frage. Das erste Verfahren wurde von Wagner selbst angegeben und besteht darin, die Integralglei-

chung für die Hilfsfunktion $u(c)$ mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes zu lösen. Diese Methode soll hier benutzt werden. Sie setzt voraus, daß sich die Spantkontur in eine Potenzreihe entwickeln läßt oder durch ein Polynom approximiert wird.

Ein zweites Verfahren wird im Anhang I angegeben. Dabei wird ähnlich wie bei Schmieden [8], die Integralgleichung in eine Abelsche Integralgleichung umgeformt, deren allgemeine Lösung in Form eines Integrals angegeben werden kann. Diese Art der Lösung hat besonders dann Vorteile, wenn die Entwicklung der Spantkontur in eine Potenzreihe nicht konvergiert. Die Integrale lassen sich mit numerischen Methoden mit beliebiger Genauigkeit bestimmen, ohne daß wie bei der Approximation durch Polynome die Gefahr von Instabilitäten besteht. Eine geschlossene Lösung der Integrale wird nur in Ausnahmefällen möglich sein. Für das vorliegende Problem konnte eine geschlossene Lösung nicht gefunden werden.

Bestimmung der benetzten Breite nach Wagner: Die von Wagner [15] eingeführte Näherung für die Aufwölbung der Wasseroberfläche und die daraus folgende Bestimmung der benetzten Breite geht von der Geschwindigkeitsverteilung neben der ebenen Platte aus, was in Übereinstimmung mit der linearisierten Theorie des hydrodynamischen Stoßes ist. Für die Ordinaten der Wasseroberfläche $\eta_f(y)$, bezogen auf den jeweiligen Spantfuß, gilt:

$$\eta_f(y) = \int_0^t v(y, t) dt = \int_0^{c_0} u(c) \frac{v(y, t)}{V} dc, \quad (40)$$

wobei (vgl. Gl. (15)):

$$u(c) = \frac{dz_0}{dc} ; \quad \frac{dz_0}{dt} = V. \quad (41)$$

Man erhält die Integralgleichung für die Hilfsfunktion $u(c)$ aus der Bedingung, daß im Augenblick des Kontakts die Erhebung der Wasseroberfläche und die Ordinate der Körperkontur gleich sein müssen. Dabei ist zu beachten, daß auch die Ordinaten der Körperkontur auf den jeweiligen Spantfuß bezogen werden. Es soll geschrieben werden:

$$\eta(y) - \eta(0) = \int_0^y u(c) \frac{dc}{\sqrt{1-(c/y)^2}}. \quad (42)$$

Diese Integralgleichung läßt sich mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes lösen. Es werden folgende Reihen eingeführt:

$$u(c) = u_0 + u_1 c + u_2 c^2 + \dots \quad (43)$$

$$\eta(y) - \eta(0) = \beta_1 y + \beta_2 y^2 + \beta_3 y^3 + \dots \quad (44)$$

Die allgemeine Form der Koeffizienten u_i in Abhängigkeit von den Koeffizienten β_i ist bei Szebehely [16] angegeben:

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \frac{2}{\pi} \beta_1 \\ u_1 &= \beta_2 \\ u_{2k} &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2k)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)} \beta_{2k+1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \\ u_{2k+1} &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2k)} \beta_{2k+2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Die benetzte Breite c erhält man dann durch Integration der Gleichung (41). Man erhält:

$$z_0 = \int_0^c u(\xi) d\xi \quad (46)$$

$$z_0(c) = u_0 c + \frac{1}{2} u_1 c^2 + \frac{1}{3} u_2 c^3 + \dots \quad (47)$$

Da die Eintauchung des betrachteten Querschnitts, z_0 , als bekannt anzusehen ist, muß man das gesuchte $c(z_0)$ iterativ aus der Gleichung (47) bestimmen.

a. Rechnung für den Schwimmertyp $u(c) = u_0$: Zur Vereinfachung der numerischen Rechnung für die Streifenmethode wird im folgenden angenommen, daß die Wasserlinien des Schwimmers mit ausreichender Genauigkeit durch Ellipsen dargestellt werden können. Damit haben wir einen elliptischen Kegel zu betrachten. Bei der Anwendung der Streifenmethode werden die Querschnitte des Schwimmers unabhängig voneinander betrachtet. Es gilt also die gleiche Betrachtung für

alle Achsenverhältnisse der Schwimmer-Wasserlinien. Es wird im folgenden die Rechnung für einen Schwimmer mit kreisförmigen Wasserlinien dargestellt. Alle übrigen Schwimmer lassen sich davon durch affine Verzerrung ableiten.

Für den im Diagramm 4 dargestellten Kegel mit dem Spitzenwinkel $(\pi - 2\beta)$ gilt für die Spantquerschnitte ($x = \text{const.}$) bei kleinen Winkeln :

$$\eta(y) = \beta \sqrt{x^2 + y^2} . \quad (48)$$

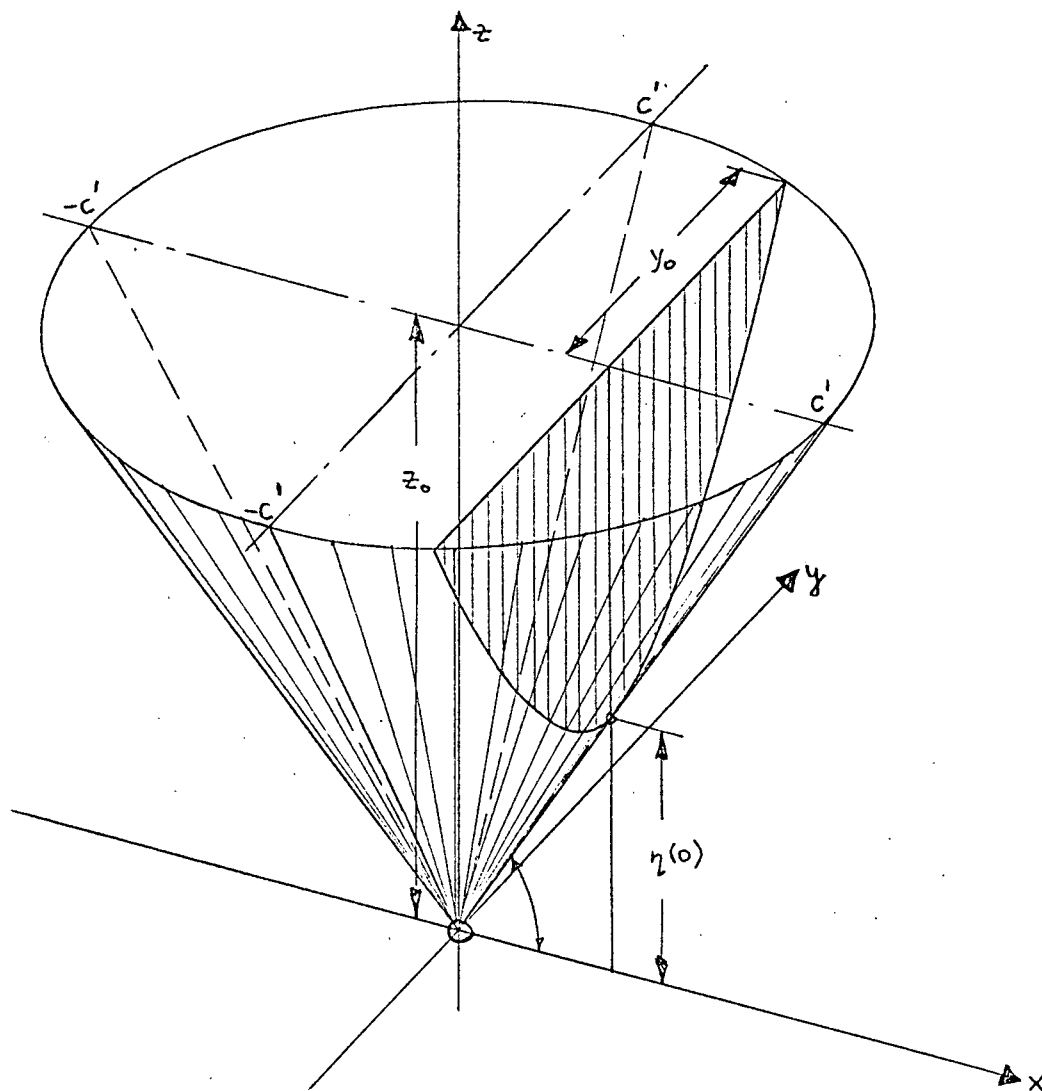


Diagramm 4

Die Reihenentwicklung der Wurzelfunktion in (48) nach Potenzen von y konvergiert nur wenn $|y/x| < 1$. Diese Bedingung ist im allgemeinen nur für die untersten Bereiche der Spanten erfüllt. An den Enden des Kegels - für $|x/c'| \approx 1$ - kann man die benetzte

Breite mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung berechnen. Diese Rechnungen werden zunächst dargestellt.

Rechnung für die Querschnitte an den Enden: Die Reihenentwicklung der rechten Seite von Gl. (48) ist:

$$\eta(y) = \beta x \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} \right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{y}{x} \right)^4 + \dots \right\}. \quad (49)$$

Der Spantfuß ist also immer eine quadratische Parabel. Da an den Enden des Kegels gerade nur der Spantfuß des Endquerschnitts $x = c'$ eingetaucht ist, kann man dort die Benetzungskorrektur für eine quadratische Parabel benutzen. Für das Spant $\eta(y) = K \cdot y^2$ ist entsprechend Gl. (45) $u(c) = K \cdot c$ und weiter $z_0(c) = 1/2 \cdot K \cdot c^2$. Die Erhebung der Wasseroberfläche ist also genau doppelt so groß wie die Eintauchung des Spants. Da die Spantkontur eine Parabel ist, ist die benetzte Breite c genau $\sqrt{2}$ -mal so groß wie die Breite y_0 in Höhe der ursprünglichen Wasseroberfläche. Für die Benetzungskorrektur c/y_0 gilt:

$$c/y_0 = \sqrt{2} = 1,4142.$$

Es kann außerdem leicht gezeigt werden, daß für das Mittelspannt, $x = 0$, die Benetzungskorrektur den Wert $c/y_0 = \pi/2 = 1,5708$ annimmt.

Hiermit läßt sich der Bereich abschätzen, in dem die Reihenentwicklung anwendbar ist. Es muß dabei nämlich berücksichtigt werden, daß die Reihenentwicklung bis zur benetzten Breite konvergieren muß. Die Konvergenzbedingung ist also: $|c/x| < 1$. Nimmt man vereinfachend einen linearen Verlauf für die Benetzungskorrektur c/y_0 über x an, so ergibt sich für die Druckfläche das im Diagramm 5 dargestellte Bild. Man erkennt aus diesem Diagramm, daß die Potenzreihenentwicklung für den gesamten benetzten Bereich des Spants nur konvergiert, wenn $|x/c'| > 0,82$ ist, also nur für die äußersten Enden des Schwimmers. Es wurden die Benetzungskorrekturen für den kegelförmigen Schwimmer nur für fünf Querschnitte bestimmt, und zwar für $x/c' = 0, 0,25, 0,5, 0,75$ und $1,0$. Die Reihenentwicklung wurde daher nur für den Grenzwert bei $x/c' = 1,0$ benutzt.

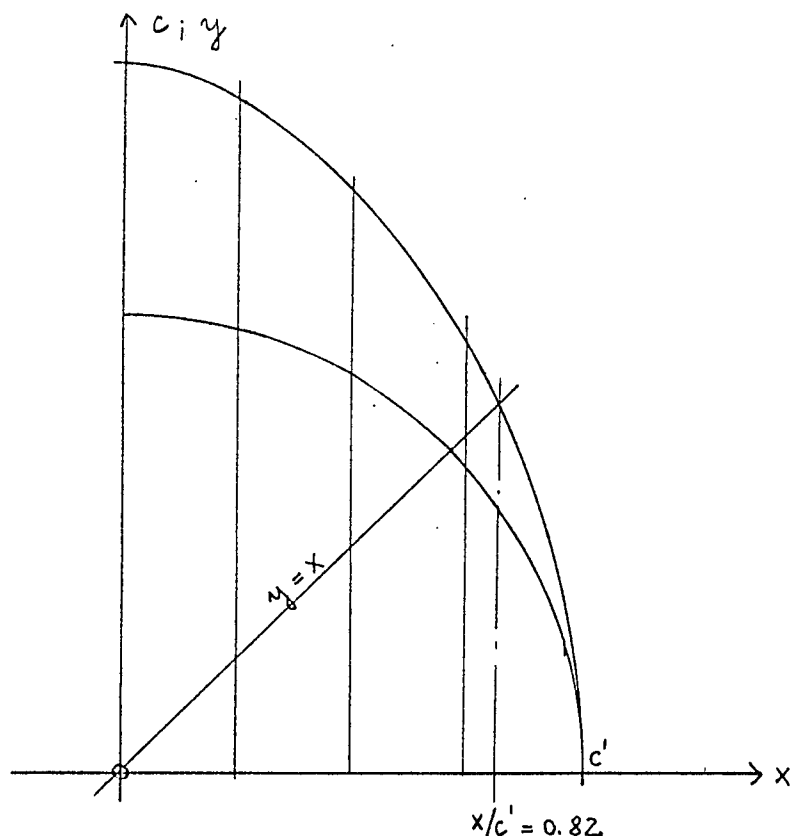


Diagramm 5

Rechnung mit Hilfe von approximierten Spanten: An den Querschnitten $x/c' = 0,25; 0,50$ und $0,75$ wurde die Spantkontur durch Polynome approximiert. Auch hierbei wurde beachtet, daß sich die Darstellung bis zur benetzten Breite c erstreckt. Diese Breite kann mit Hilfe des Diagramms 5 abgeschätzt werden. Bei den beiden Querschnitten $x/c' = 0,25$ und $0,50$ wurden 8 äquidistante Stützpunkte für ein Interpolationspolynom 7. Grades benutzt. Beim Querschnitt $x/c' = 0,75$ wurde durch 7 äquidistante Stützwerte ein Polynom 6. Grades gelegt.

Die wichtigsten Stationen der numerischen Rechnung für die drei Spantquerschnitte sind im Anhang II zusammengestellt. Die wichtigsten Ergebnisse zeigt die Tabelle 5.

Eine graphische Darstellung der Benetzungskorrektur c/y_0 über der dimensionslosen Koordinate x/c' ist im Diagramm 6 gegeben. Diese Korrektur gilt für alle Achsenverhältnisse der Schwimmer-Wasserlinien. Das Diagramm 6 enthält außerdem folgende Konturen, wobei alle Breiten um den Faktor 2,5 überhöht gezeichnet sind, um die Differenzen deutlicher zeigen zu können:

x/c'	0	0.25	0.5	0.75	1.0
y_0/c'	1.0000	0.9683	0.8660	0.6614	0
c/c'	1.5708	1.4946	1.3004	0.9645	0
c/y_0	1.5708	1.5436	1.5016	1.4582	1.4142
u	0.6366	0.6091	0.5528	0.4366	0

Tabelle 5

Die elliptische Druckfläche, die der Rechnung nach Schmieden zu Grunde gelegt wird. Es handelt sich um das Beispiel mit $\kappa' = 0.2$.

Die zugehörige Wasserlinie, die man mit Hilfe der verbesserten Näherung errechnet, ebenfalls für das Beispiel $\kappa' = 0.2$.

Die Ellipse, die das gleiche Achsenverhältnis hat wie die vorstehend bezeichnete Wasserlinie. Die größte Ordinatendifferenz beträgt etwa 5 %.

Die Druckfläche, die man erhält, wenn man die für den elliptischen Kegel errechneten Werte c/y_0 auf die Wasserlinie anwendet, die man nach der verbesserten Rechnung bestimmt hat.

Man kann aus dem Diagramm 6 erkennen, daß die Rechnung nach Schmieden zusammen mit der hier eingeführten Verbesserung für das Beispiel mit dem Seitenverhältnis der Druckfläche $\kappa' = 0.2$ eine Wasserlinie liefert, deren Völligkeit um etwa 3 % größer ist als die der Ellipse. Für den Schwimmer mit der Druckfläche $\kappa' = 0.1$ erhöht sich diese Differenz in der Völligkeit noch auf etwa 4 %. Dieses überraschende Ergebnis kann praktisch nur auf die vereinfachte Berechnung der Zwischenordinaten zurückgeführt werden, wozu Schmieden Näherungsentwicklungen benutzt hat. Diese Ergebnisse wurden insofern übernommen, als die Wasserlinien aus der Arbeit von Schmieden entsprechend den verbesserten Achsenlängen verzerrt wurden. Man hätte erwarten sollen, daß mit abnehmenden Achsenverhältnis die Wasserlinie einer Ellipse immer ähnlicher wird.

Durch die abnehmende Tendenz der Benetzungskorrektur nach der Streifenmethode wird die etwas zu große Völligkeit der

Alle Breiten sind um den Faktor 2.5
überhöht gezeichnet

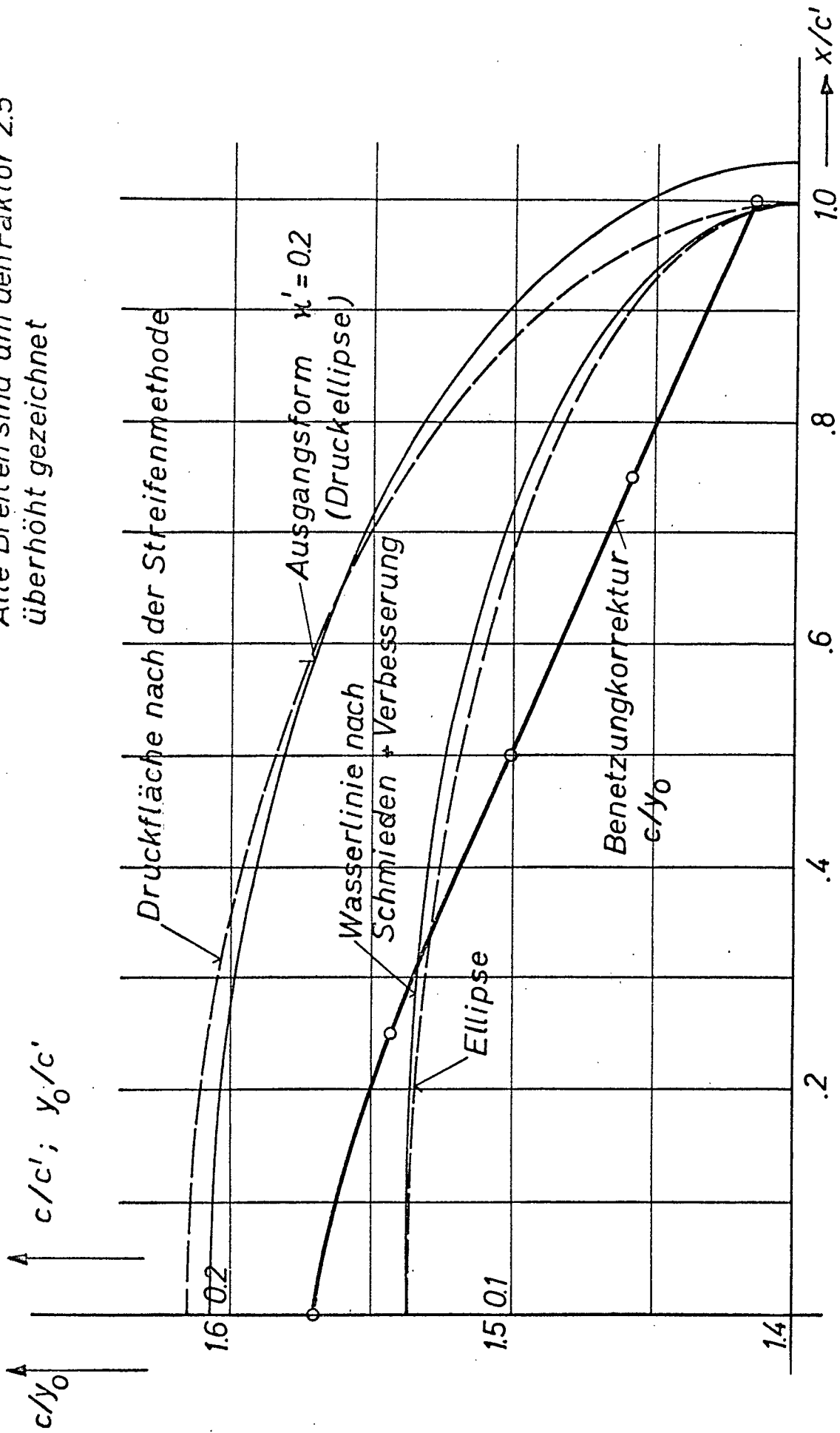


Diagramm 6: $u(c) = u_0$

Wasserlinie gegenüber der Ellipse bei der Berechnung der Druckfläche kompensiert. Die Druckfläche hat dadurch eine um etwa 1 % kleinere Völligkeit als eine Ellipse.

b) Rechnung für den Schwimmertyp $u(c) = u_1 c$: Dieser Schwimmertyp ist durch ein parabolisches Hauptspant ($x = 0$) und eine parabolische Kiellinie ($y = 0$) gekennzeichnet. Nimmt man auch hier zur Vereinfachung der Betrachtungen an, daß die Wasserlinien Ellipsen sind, so läßt sich das Problem auf die Behandlung eines Rotationsparaboloids zurückführen. Alle anderen Achsenverhältnisse lassen sich daraus durch affine Verzerrung gewinnen.

Die Spanten eines Rotationsparaboloids haben die Form:

$$\eta(y) = \beta_2 (x^2 + y^2). \quad (50)$$

Die Berechnung der Hilfsfunktion $u(c)$ für die Spanten ist damit besonders einfach. Es gilt:

$$u(c) = \beta_2 c$$

$$z_0(c) = \frac{1}{2} \beta_2 c^2$$

Daraus folgt für die benetzte Breite $c = \sqrt{2 z_0 / \beta_2}$, wobei bei einer Eintauchung bis zum Radius c' für die Breite y_0 , die entsprechend dem Diagramm 4 definiert ist, gilt: $y_0(x) = \sqrt{c'^2 - x^2}$. Die Eintauchung des Spants, bezogen auf den jeweiligen Spantfuß beträgt: $z_0 = \beta_2 (c'^2 - x^2)$. Damit folgt:

$$\left. \begin{aligned} c &= \sqrt{2(c'^2 - x^2)}, \\ c/y_0 &= \sqrt{2} = 1,4142, \\ u &= \beta_2 \sqrt{2(c'^2 - x^2)}. \end{aligned} \right\} (51)$$

Die benetzte Fläche ist also bei dieser Schwimmerform gegenüber der Wasserlinie nur affin verzerrt. Geht man von einer elliptischen Wasserlinie aus, so ist auch die benetzte Fläche eine Ellipse.

Im Diagramm 7 sind für diesen Schwimmertyp benetzte Flächen und Wasserlinien dargestellt. Es sind folgende Konturen gezeichnet.

net, wobei wie im Diagramm 6 die Breiten um den Faktor 2.5 überhöht sind:

Die elliptische Druckfläche, die der Rechnung von Schmieden für das Beispiel mit $\kappa' = 0.2$ zu Grunde gelegt ist.

Die zugehörige Wasserlinie, die man mit Hilfe der verbesserten Näherung errechnet. - Die Ellipse mit dem gleichen Achsenverhältnis ist im Diagramm nicht zu unterscheiden.

Die Druckfläche, die sich nach der Streifenmethode ergibt. Da die Wasserlinie nach Schmieden praktisch genau eine Ellipse ist, ist auch diese Druckfläche eine Ellipse.

Bestimmung der Druckverteilung und der hydrodynamischen Masse: Für die Druckverteilung gilt in jedem Streifen der Breite $2b(x)$:

$$p(x, y) = \rho V \dot{b}(x) \frac{1}{\sqrt{1-(y/b)^2}} + \rho \dot{V} b(x) \sqrt{1-(y/b)^2}. \quad (52)$$

Nimmt man an, daß die benetzte Fläche eine Ellipse ist, so gilt:

$$b(x) = b \sqrt{1-(x/c)^2}. \quad (53)$$

Damit errechnet man nach einigen Umformungen:

$$p(x, y) = \rho \kappa' c \dot{V} \sqrt{1-(x/c)^2 - (y/b)^2} + \rho \kappa' \dot{c} V \frac{1}{\sqrt{1-(x/c)^2 - (y/b)^2}}. \quad (54)$$

Diese Gleichung enthält das bekannte Ergebnis, daß die Streifenmethode für die Ellipse genau wie für Ellipsoide den richtigen Typ der Druckverteilung liefert. Der Druck ist jedoch gegenüber der exakten Lösung um einen universellen Faktor zu groß. Dieser Faktor ist, wie ein Vergleich mit Gleichung (10) zeigt, $E(\kappa)$.

Für die hydrodynamische Masse errechnet man für die eine Seite der Platte:

$$M'' = \frac{\pi \rho}{2} \int_{-c}^{+c} b^2(x) \cdot dx$$

Alle Breiten sind um den Faktor 2.5
überhöht gezeichnet

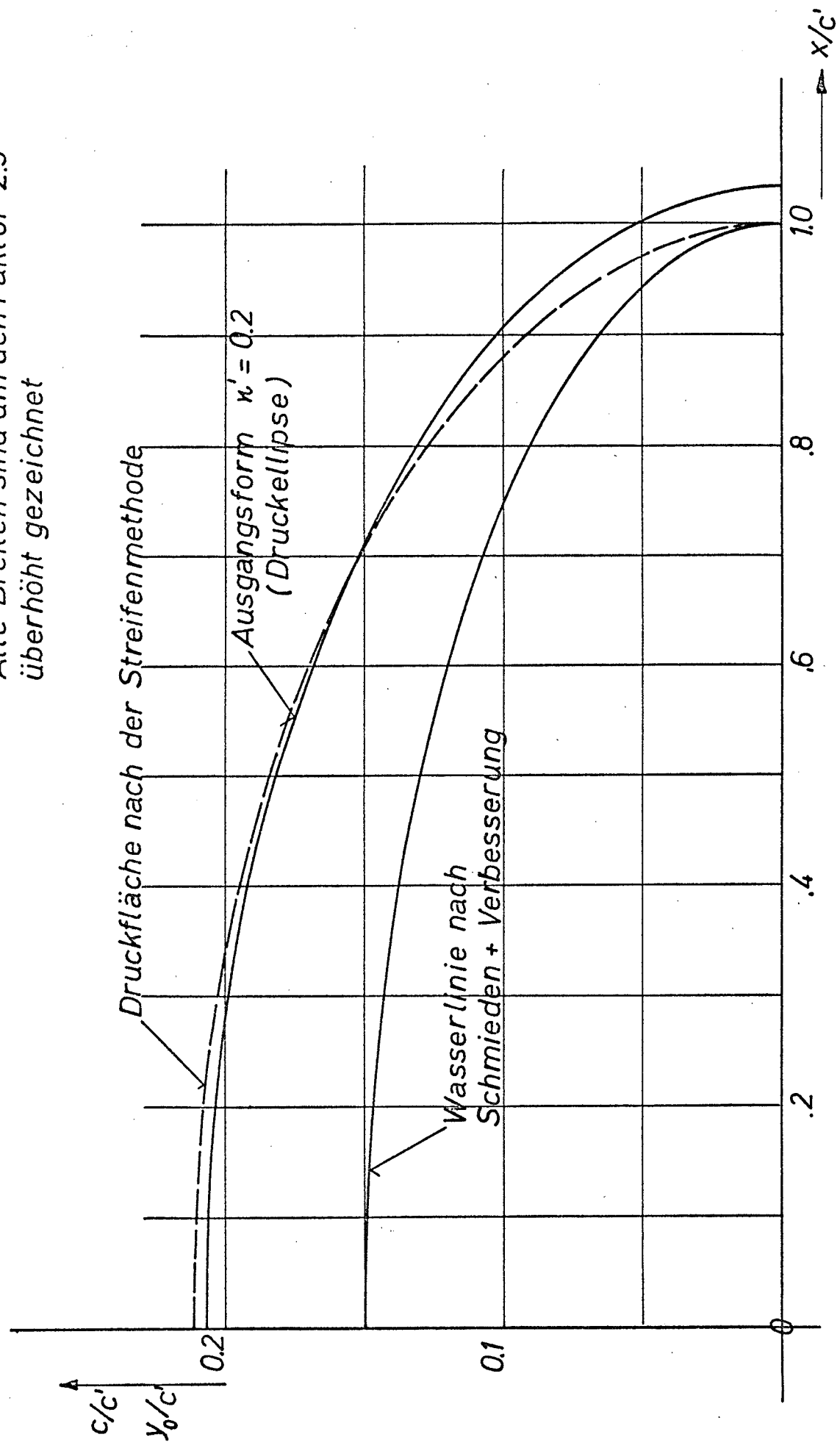


Diagramm 7: Schwimmerform $u(c) = u_1 c$

$$M'' = \frac{2}{3} \pi \rho b^2 \cdot c . \quad (55)$$

Auch hier ist der Fehler gegenüber der exakten Lösung durch den Faktor $E(\nu)$ gegeben.

5) Vergleich der Ergebnisse

a. Schwimmerform $u(c) = u_0$: Die Rechnungen haben gezeigt, daß dem Vergleich zwischen den Lösungen von Schmied en und den Ergebnissen der Streifenmethode eine Reihe von Schwierigkeiten entgegensteht:

1. Die Rechnungen von Schmied en enthalten zwei Näherungen. Die Auswirkungen der Näherung für die Funktion $E(\alpha, \nu)/E(\nu)$ wurden mit Hilfe einer verbesserten Näherung abgeschätzt, und zwar für die Ergebnisse für die Schwimmerachsen. Die Fehler betragen bei dem Beispiel mit der Druckellipse mit dem Seitenverhältnis $\nu' = 0.1$: 0.5 % bzw. 0.2 %; bei dem Beispiel mit der Druckellipse mit dem Seitenverhältnis $\nu' = 0.2$: 1.6 % bzw. 0.9 % für die große bzw. die kleine Hauptachse. Dieser Fehler wurde bei den Rechnungen im Kapitel 3) korrigiert. Dieser Fehler wirkt sich auch bei der Berechnung der Zwischenordinaten der Schwimmerwasserlinien aus, wurde dort aber nicht betrachtet. Hier führte Schmied en eine angenäherte Berechnung mit Hilfe einer Näherungsentwicklung ein. Es wurde angegeben, daß die Fehler infolge dieser Näherung weniger als 1 % der Ordinaten betragen. Eine Korrektur ist kaum möglich, wenn nicht eine aufwendige numerische Berechnung der Integrale erfolgt.

2. Ein weiteres Problem besteht darin, daß man bei der Rechnung nach Schmied en von der Druckfläche ausgehen muß und daß sich die Form des Schwimmers aus der Rechnung ergibt. Bei der Streifenmethode muß dagegen die Form des Schwimmers bekannt sein. Ein Vergleich der beiden Verfahren ist daher nur in der Weise möglich, daß man der Streifenmethode die nach Schmied en errechnete Schwimmerform zu Grunde legt. Zur Vereinfachung der Rechnung nach der Streifenmethode wurde ~~angenommen~~ angenommen,

daß die Schwimmerwasserlinien Ellipsen sind. Die Ordinaten der Ellipse weichen aber um mehrere Prozent von der von Schmied en berechneten Wasserlinie ab. Dies kann in grober Weise dadurch ausgeglichen werden, daß die errechnete Benetzungskorrektur c/y_0 auf die tatsächliche Wasserlinie angewendet wird.

Durch die hier nicht korrigierten Fehler werden nur die Zwischenordinaten und auch nur für den kegeligen Schwimmer beeinträchtigt. Im Beispiel mit $\kappa' = 0.2$ betrug der Fehler für die Wasserlinienfläche etwa 3 %, wenn man sie durch eine Ellipse annäherte. Für die Druckfläche nach der Streifenmethode ist dieser Fehler etwas kleiner. Er beträgt im Beispiel mit $\kappa' = 0.2$ etwa 0.8 %.

In den folgenden Vergleichen werden alle Flächen als Ellipsen betrachtet. Damit spielen für die Vergleiche nur die Achsenabmessungen eine Rolle.

Damit man die Diagramme leicht anwenden kann, werden alle Angaben auf Abmessungen der Schwimmerwasserlinie in Höhe der ursprünglichen Wasseroberfläche bezogen und über dem Achsenverhältnis dieser Wasserlinie aufgetragen.

Im Diagramm 8 sind folgende Koeffizienten aufgetragen, und zwar jeweils für die Auswertung der Formeln von Schmied en, für die verbesserte Rechnung und für die Rechnung nach der Streifenmethode:

$f_1 = b/\tilde{b}$: Faktor zur Berechnung der Breite der Druckfläche aus der Breite der Wasserlinie.

$f_2 = c/\tilde{c}$: Faktor zur Berechnung der Länge der Druckfläche aus der Länge der Wasserlinie.

$F = b\tilde{c}/\tilde{b}c$: Faktor zur Berechnung des Achsenverhältnisses der Druckfläche aus dem Achsenverhältnis der Wasserlinie.

Im Diagramm 9 ist das Verhältnis der Größe der Druckfläche zur Größe der Wasserlinienfläche, $1/k_1$, aufgetragen.

Man erkennt aus diesen beiden Diagrammen, daß die Rechnung von Schmied en nur für langgestreckte Schwimmer gute Ergebnisse

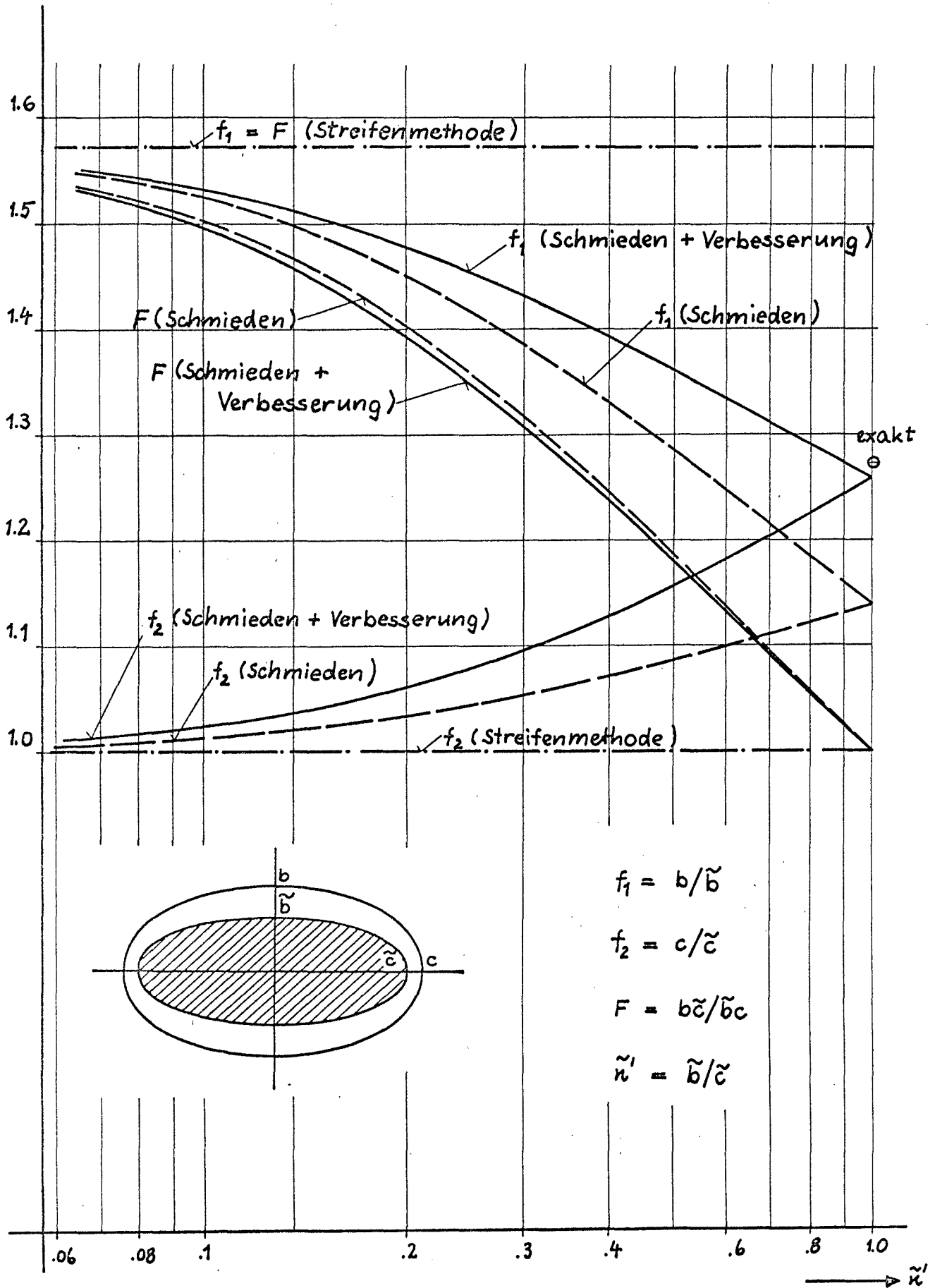


Diagramm 8
Schwimmerform $u(c) = u_0$

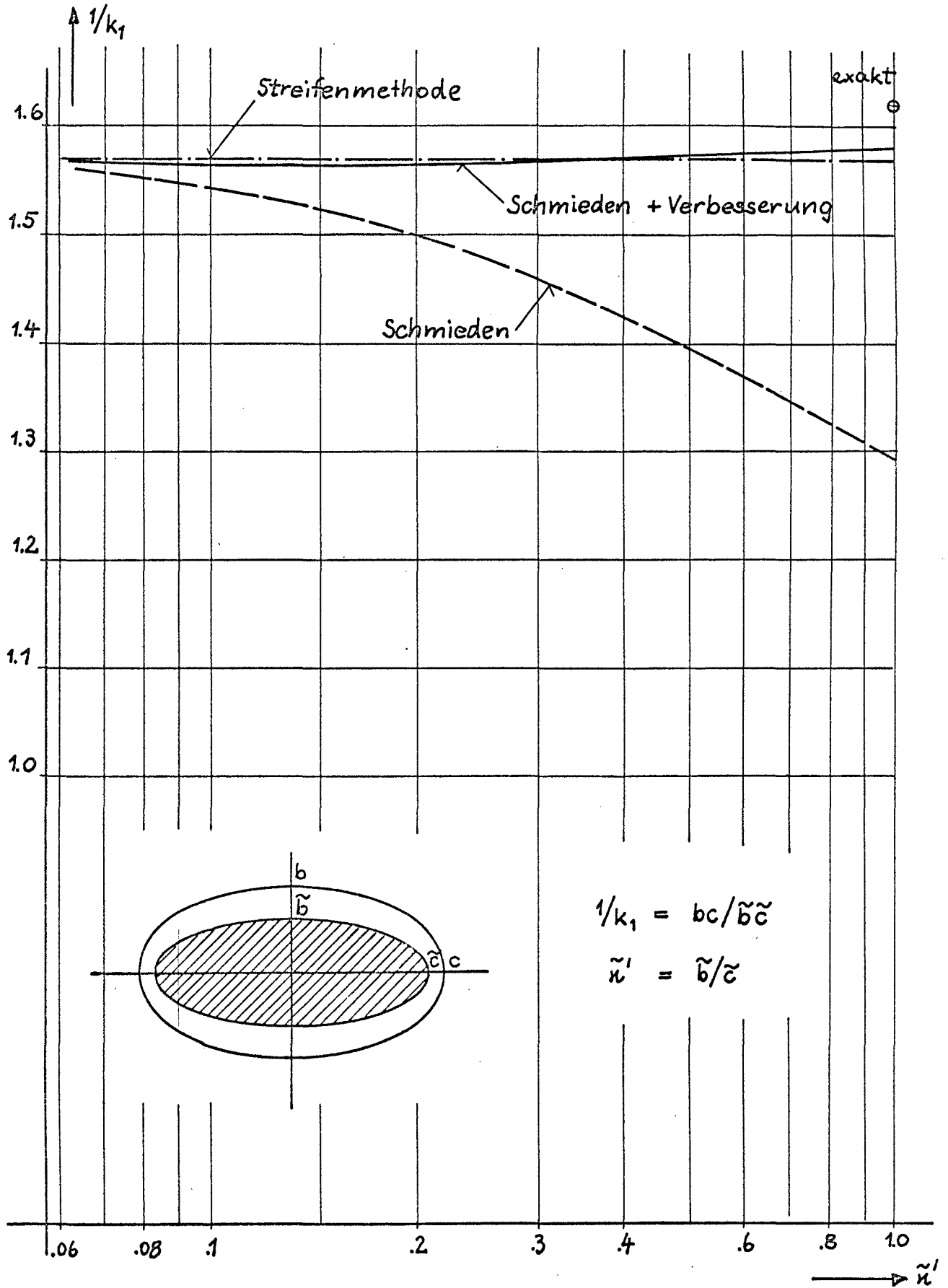


Diagramm 9
Schwimmerform $u(c) = u_0$

liefert, wenn man ohne die verbesserte Näherung rechnet. In diesem Falle ergibt aber auch die Streifenmethode gute Näherungen. Die Fehler der Streifenmethode sind bei den Abmessungen der Druckfläche etwa doppelt so groß wie die Fehler der Schmiedenschen Formeln. Bei großen Seitenverhältnissen beträgt der Fehler der Schmiedenschen Rechnung höchstens 12 %, die Fehler der Streifenmethode höchstens 23 bzw. 27 %.

Man erkennt weiter, daß die Größe der Druckfläche nach der Streifenmethode gut bestimmt wird.

Für eine Schwimmerwasserlinie mit dem Achsenverhältnis 1 : 10 kann man folgende Fehler gegenüber der verbesserten Rechnung feststellen:

$u = u_0$	nach Schmieden	Streifenmethode
f_1	0.5 %	2.5 %
f_2	1.1 %	2.5 %
F	0.5 %	5.1 %
$1/k_1$	1.3 %	0.3 %

Tabelle 6

Besondere Bedeutung hat der Wert für die hydrodynamische Masse, weil er direkt in die Gleichungen für den Bewegungsablauf und für die Stoßkraft eingeht. Im Diagramm 10 ist ein Koeffizient \tilde{C} für die hydrodynamische Masse aufgetragen, der in der folgenden Weise mit Hilfe der Achsen der Wasserlinie gebildet ist:

$$\tilde{C} = \frac{M''}{\frac{2}{3} \cdot \pi \rho b^2 \tilde{c}} \quad (56)$$

Es wurden die Koeffizienten für folgende Rechnungen gezeichnet:

Rechnung nach Schmieden

Rechnung nach Schmieden zusammen mit der in 3) eingeführten verbesserten Näherung.

Berechnung der hydrodynamischen Masse nach der Streifenmethode

Rechnung nach der Streifenmethode, wobei aber die dreidimensionale Umströmung des Schwimmers durch den Faktor $1/E(\kappa)$ berücksichtig-

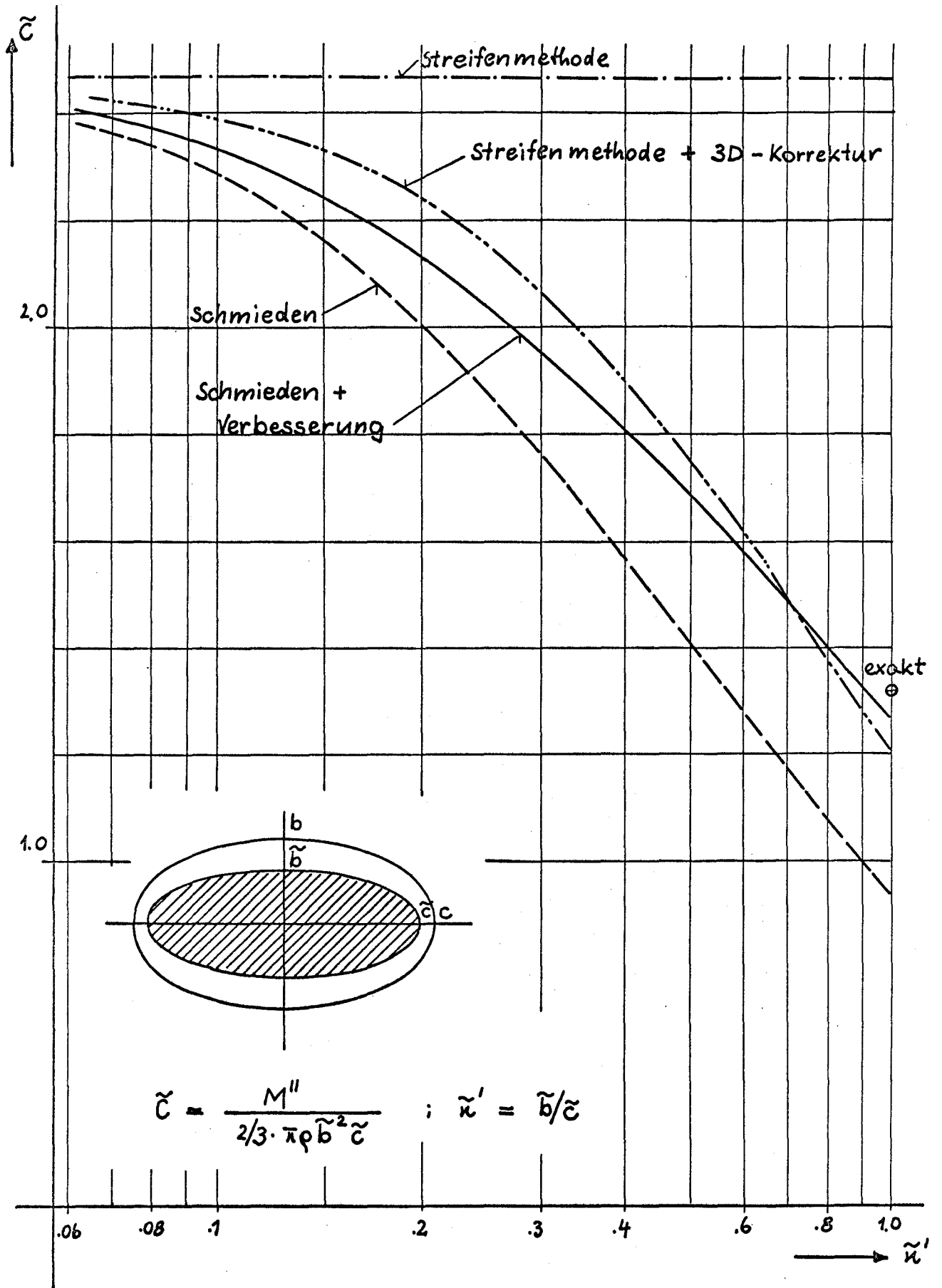


Diagramm 10
Schwimmerform $u(c) = u_0$

sichtigt ist.

Man erkennt aus der Auftragung im Diagramm 10, daß die verbesserte Rechnung merklich von den Originalergebnissen von Schmieden abweicht. Man erkennt weiter, daß die Streifenmethode ohne 3D - Korrektur nur für sehr kleine Seitenverhältnisse anwendbar ist. Der Fehler erreicht bei einem Achsenverhältnis des Schwimmers von $\tilde{\nu} = 0.16$ schon 10 %. Dagegen ist das Ergebnis der Streifenmethode mit der Korrektur für die dreidimensionale Umströmung bei kleinen Seitenverhältnissen nur geringfügig schlechter als die Originalergebnisse von Schmieden. Bei einem Seitenverhältnis des Schwimmers von $\tilde{\nu}' = 0.1$ beträgt der Fehler des Koeffizienten C gegenüber der verbesserten Rechnung nach Schmieden:

für die Rechnung nach Schmieden:	2.0 %
für die einfache Streifenmethode:	5.9 %
für die Streifenmethode zusammen mit der 3D - Korrektur:	2.4 %.

Für große Achsenverhältnisse in der Nähe von $\tilde{\nu}' = 1$ liegen die Ergebnisse der Streifenmethode mit der Korrektur für die dreidimensionale Umströmung überraschenderweise sehr nahe an den Ergebnissen der verbesserten Rechnung nach Schmieden.

b. Schwimmerform $u(c) = u_{1,c}$: Bei dem parabolischen Schwimmer wirken sich praktisch nur die unter 1. im vorstehenden Abschnitt für den kegeligen Schwimmer genannten Näherungen aus. Die Wasserlinien sind ziemlich genau Ellipsen und die Benetzungskorrektur nach der Streifenmethode ist für alle Querschnitte die gleiche, so daß auch die Druckfläche nach der Streifenmethode ziemlich genau eine Ellipse ist.

Im Diagramm 11 sind über dem Achsenverhältnis der Schwimmer-Wasserlinie $\tilde{\nu}'$ die Kurven für die Werte f_1 , f_2 und F aufgetragen. Im Diagramm 12 ist der Verlauf von $1/k_1$ dargestellt.

Aus den Auftragungen in den Diagrammen 11 und 12 ersieht man, daß die Verhältnisse genau so liegen wie bei den kegeligen Schwimmern. Das bedeutet, daß auch hier die Originalergebnisse

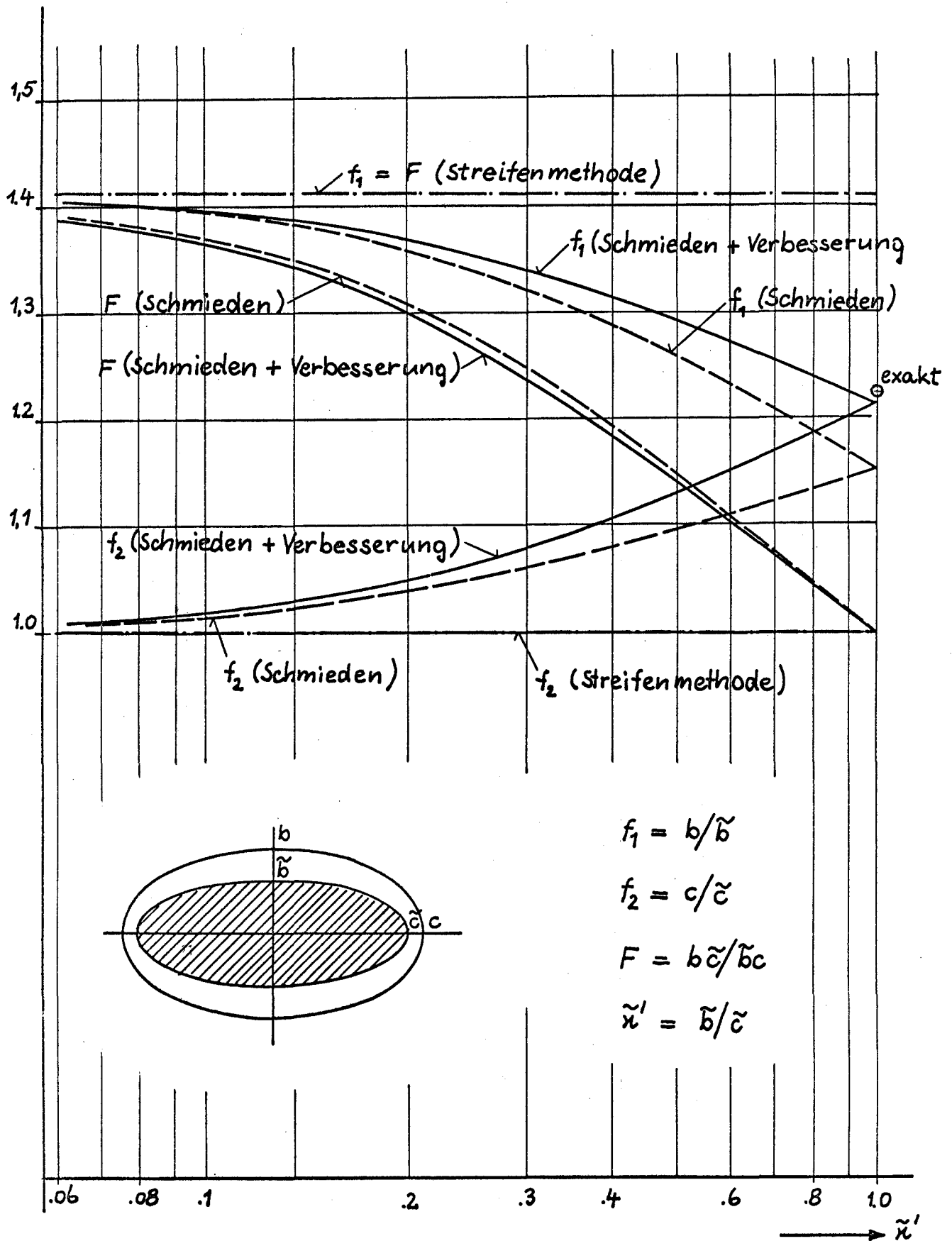


Diagramm 11

Schwimmerform $u(c) = u_1c$

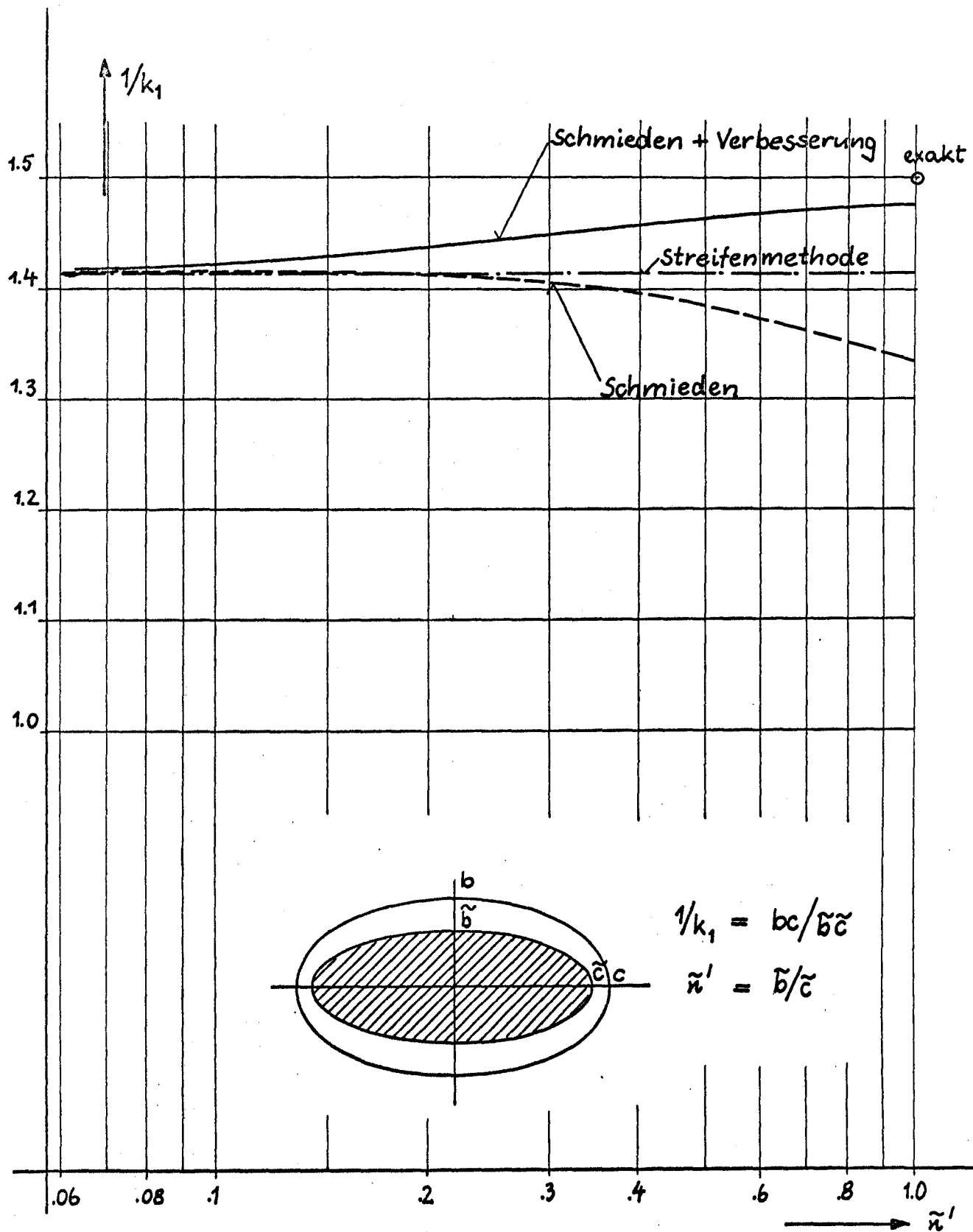


Diagramm 12
Schwimmerform $u(c) = u_1 c$

von Schmieden nur für langgestreckte Schwimmer genau sind. Für solche Schwimmer liefert auch die Streifenmethode gute Näherungen. Bei großen Seitenverhältnissen - wofür die Schmiedenschen Ansätze nicht gedacht waren - beträgt der Fehler für die Achsenabmessungen nach der Rechnung von Schmieden ohne Verbesserungen gegenüber der verbesserten Rechnung höchstens 5.2 %; die Fehler der Streifenmethode betragen hier höchstens 16 % bzw. 21 %.

Die Größe der Druckfläche wird nach der Streifenmethode für alle Seitenverhältnisse gut erfaßt. Für größere Seitenverhältnisse ist ihr Fehler etwa nur halb so groß wie der Fehler der Rechnung nach Schmieden.

Für einen Schwimmer, dessen Wasserlinie ein Achsenverhältnis von $\tilde{\kappa}' = 0.1$ hat, liest man aus den Diagrammen 11 und 12 folgende Fehler ab, die auf die verbesserte Rechnung bezogen sind:

$u = u_1 c$	nach Schmieden	Streifenmethode
f_1	0.2 %	1.3 %
f_2	0.5 %	1.9 %
F	0.4 %	3.6 %
$1/k_1$	0.6 %	0.6 %

Tabelle 7

Die Koeffizienten der hydrodynamischen Masse \tilde{C} sind im Diagramm 13 dargestellt. Auch hier erhält man die gleichen Tendenzen wie im Diagramm 10. Die Fehler sind wieder insgesamt kleiner:

Die Ergebnisse der verbesserten Rechnung weichen merklich von den Originalergebnissen nach Schmieden ab, deren Fehler höchstens 16 % gegenüber der verbesserten Rechnung beträgt. Die unkorrigierten Ergebnisse der Streifenmethode sind nur für sehr kleine Seitenverhältnisse ausreichend genau. Korrigiert man die hydrodynamische Masse nach der Streifenmethode für die dreidimensionale Umströmung, so erhält man sehr gute Näherungen. Für einen Schwimmer mit einem Wasserlinien-Achsenverhältnis von $\tilde{\kappa}' = 0.1$ betragen die Fehler für \tilde{C} :

für die Rechnung nach Schmieden: 0.4 %

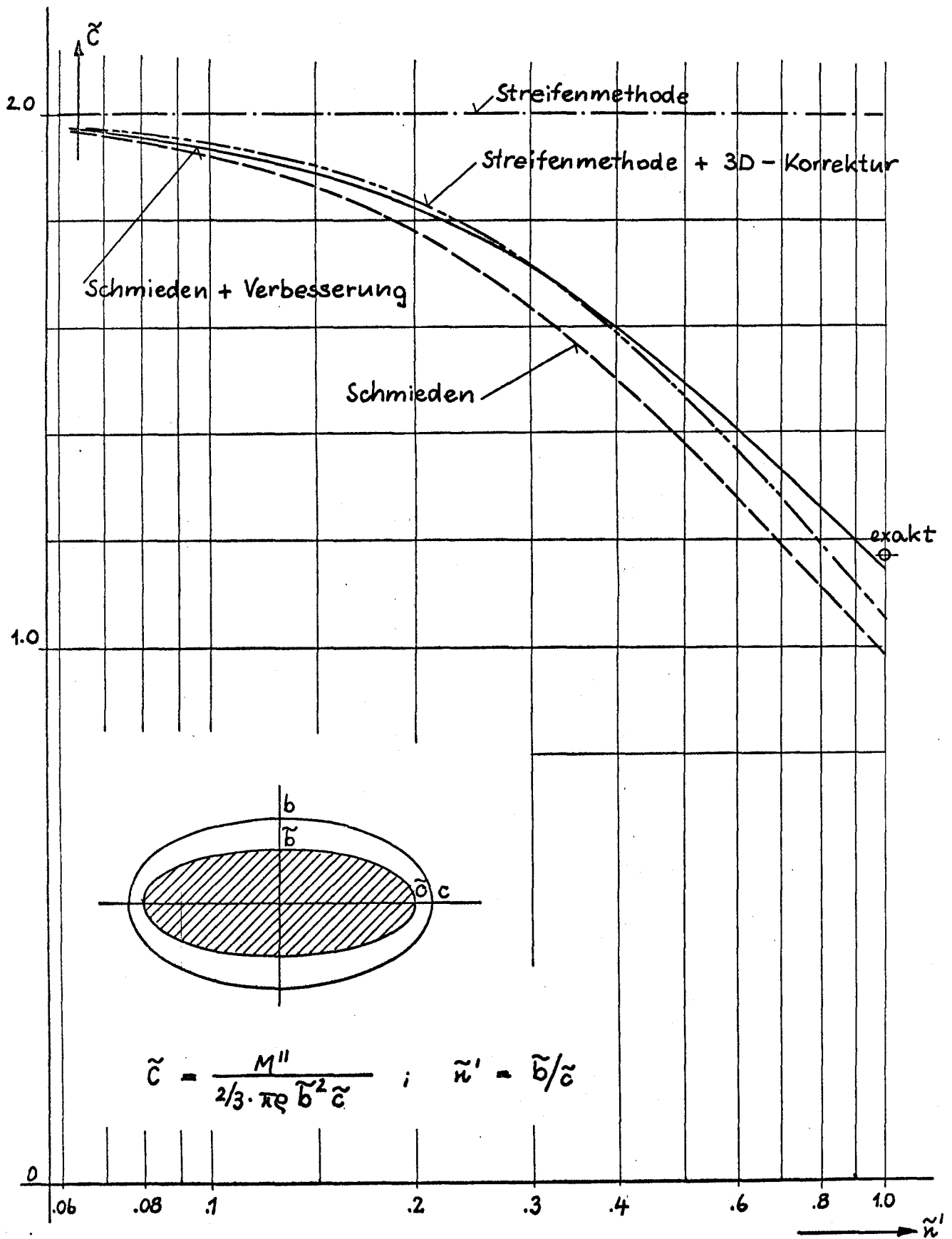


Diagramm 13
 Schwimmerform $u(c) = u_1 c$

für die einfache Streifenmethode:	3.4 %
für die Streifenmethode zusammen mit der 3D-Korrektur:	0.5 %.

Zusammenfassung: Die Untersuchungen haben das zunächst überraschende Ergebnis, daß die echten dreidimensionalen Lösungen für die beiden Schwimmerformen durch die von Schmied en eingeführten Näherungen mit Fehlern behaftet sind, die fast die gleiche Größe haben wie die Fehler der Streifenmethode. Dies gilt insbesondere auch für Größe der hydrodynamischen Masse, wenn man bei der Streifenmethode die Korrektur für die dreidimensionale Umströmung berücksichtigt, nachdem die Abmessungen der Druckfläche aus der Streifenbetrachtung errechnet wurden. Dabei läßt sich der gesamte Stoßablauf mit Hilfe der hydrodynamischen Masse bestimmen.

Wie die Auswertungen zeigten, sind die Fehler der beiden Ansätze insgesamt so gering, daß sie relativ zu den Vereinfachungen und Ungenauigkeiten der linearisierten Theorie des hydrodynamischen Stoßes ohne Bedeutung sind. Die Streifenmethode ist also ausreichend genau. Vereinfachungen, die bei der dreidimensionalen allgemeineren Körperformen noch weniger zu umgehen sind, sind in ihren Auswirkungen kaum zu beurteilen. Sie können - wie die Beispiele zeigten - leicht Fehler in der Größenordnung der Fehler der Streifenmethode mit sich bringen.

Man kann erwarten, daß von all den Schwimmerformen, die sich mit Hilfe von elliptischen Druckflächen darstellen lassen die aber durch mehrere Reihenglieder der Entwicklung von $u(c)$ beschrieben werden, der Schwimmer des Typs $\ddot{u}(c) = u_0$ die größten Fehler aufweist.

Zur Behandlung des Stoßes von Schwimmern der beiden behandelten Typen können alle Daten aus den Diagrammen 8, 9 und 10 bzw. 11, 12 und 13 abgelesen werden. Wenn man sich dieser Mühe unterzieht, so sollte man die Ergebnisse Rechnung nach Schmied en mit der Verbesserung zu Grunde legen, die die genauesten im Rahmen der linearisierten Ansätze sind.

Für die Anwendung der Streifenmethode ergibt sich die Folgerung, daß nur bei kleinen Seitenverhältnissen die Korrektur für die dreidimensionale Umströmung zu vernachlässigen ist. Bei gedrunghenen Schwimmerformen sollte eine solche Korrektur immer angestrebt werden. Dabei ist aber zu beachten, daß bei Druckflächen, deren Umriß keine Ellipse ist, der Korrekturfaktor für alle Querschnitte verschieden ist.

6) Literaturverzeichnis

- [1] Pabst, W., 'Vergleich zwischen theoretischer und experimenteller Ermittlung des Stoßes eines auf die Wasseroberfläche auftreffenden Kegels', Zeitschr. f. Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 21 (1930), p. 418
- [2] Pfeiffer, F., 'Über den Einschlag eines Kegels ins Wasser', Flugtechn. Institut, Stuttgart, Bericht 131 (1940)
- [3] Shiffman, M. und D.C. Spencer, 'The force of impact on a sphere striking a water surface. Approximation by the flow about a lens', New York Univ. AMP Report 42.1 R (1945)
- [4] Shiffman, M. und D.C. Spencer, 'The force of impact on a sphere striking the water surface. Second Approximation' New York Univ. AMP Report 42.2 R (1945)
- [5] Hillman, A., 'Vertical impact on a water surface by a 60° cone', New York Univ. Math.Tables Project (1946)
- [6] Chou, P.Y., 'Water entry and underwater ballistics of projectiles. Chapter 8: On the impact of spheres upon water', Office of Scientific Res. and Dev. Report 2551 (1946)
- [7] Shiffman, M. und D.C. Spencer, 'The force of impact on a cone striking a water surface (vertical entry)', Comm. on Pure and Appl. Math. 4 (1951), p. 379 - 417
- [8] Schmieden, C., 'Der Aufschlag von Rotationskörpern auf eine Wasseroberfläche', Zeitschr. f. Angew. Mathematik u. Mechanik 33 (1953), p. 147 - 151

- [9] Sagomonyan, A.Ya. und A.J. Bagdojew, 'Das Eindringen eines Kegels in eine Flüssigkeit mit einer freien Oberfläche (russisch)', Vestnik Mosk. Un-ta 8 (1955), p. 47
- [10] Coombs, A., 'The oblique water entry of a cone', Ministry of Supply, ARDE Report (1956)
- [11] Borissowa, E.P., P.P. Korjawow und N.N. Moissejew, 'Ebene und rotationssymmetrische automodellierte Probleme des Eintauchens und des Stoßes eines Strahls (russisch)', Prikl. Mate. i Mekh. 23 (1959), p. 347 - 360
- [12] Meyerhoff, K., 'Messung und Berechnung hydrodynamischer stöße an Kegelmodellen', IfS Bericht (1964)
- [13] Trilling, L., 'The impact of a body on a water surface at an arbitrary angle', Journ. of Appl. Physics 21 (1950)
- [14] Schmieden, C., 'Über den Landestoß von Flugzeugschwimmern', Ing.-Archiv 10 (1939), p. 1 - 13
- [15] Wagner, H., 'Über Stoß- und Gleitvorgänge an der Oberfläche von Flüssigkeiten', Zeitschr. f. Angew. Mathematik u. Mechanik 12 (1932), p. 193 - 215
- [16] Szebehely, V.G., 'Hydrodynamics of slamming of ships', DTMB Report 823 (1952)
- [17] Magnus, W. und F. Oberhettinger, 'Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik', Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg (1948), 2. Auflage
- [18] Gröbner, W. und N. Hofreiter, 'Integraltafel, I. Teil, Unbestimmte Integrale', 2. Auflage, Springer-Verlag, Wien und Innsbruck (1957)

ANHANG I

Umformung der Integralgleichung für die Hilfsfunktion u (Ebenes Problem)

Für das rotationssymmetrische Problem hat Schmieden [8] gezeigt, daß ~~man~~ die Integralgleichung, die der Gleichung (42) entspricht, durch Substitution in eine Abelsche Integralgleichung umgeformt werden kann, deren Inversion bekannt ist. Eine solche Umformung gelingt auch für das ebene Problem.

Wir gehen von der Form der Gleichung (42) aus:

$$\eta(y) - \eta(0) = y \int_0^y u(c) \frac{dc}{\sqrt{y^2 - c^2}} \quad (\text{A.1})$$

Es wird substituiert:

$$\left. \begin{aligned} Y &= y^2, \\ H(Y) &\equiv \eta(y) - \eta(0), \quad H(0) = 0, \\ C &= c^2, \\ U(C) &\equiv u(c). \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2})$$

Damit geht die Integralgleichung in die folgende Form über:

$$\frac{2H(Y)}{\sqrt{Y}} = \int_0^Y \left\{ \frac{U(C)}{\sqrt{C}} \right\} \frac{dC}{\sqrt{Y-C}} \quad (\text{A.3})$$

Gl. (A.3) ist eine Abelsche Integralgleichung. Die linke Seite der Gleichung muß eine im Bereich $0 \leq X \leq C$ stetig differenzierbare Funktion sein, was bei den meisten Spantformen erfüllt ist. Dann läßt sich entsprechend [17] die Lösung in der Form angeben:

$$\frac{U(C)}{\sqrt{C}} = \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^C \frac{d}{dY} \left\{ \frac{H(Y)}{\sqrt{Y}} \right\} \frac{dY}{\sqrt{C-Y}} + \frac{1}{\sqrt{C}} \frac{d}{dY} \left\{ H(Y) \right\} \Big|_{Y=0} \right\}, \quad (\text{A.4})$$

weil für den Grenzwert nach de l'Hospital gilt:

$$\lim_{Y \rightarrow 0} \frac{H(Y)}{Y} = \frac{dH(Y)}{dY}$$

Es gilt dann weiter:

$$u(c) = \frac{2}{\pi} \left\{ \eta'(0) + c \int_0^c \frac{d}{dy} \left[\frac{\eta(y) - \eta(0)}{y} \right] \frac{dy}{\sqrt{c^2 - y^2}} \right\}. \quad (\text{A.5})$$

Damit ist die Bestimmung der Funktion $u(c)$ auf Integrationen zurückgeführt. Bei formelmäßig gegebener Spantform kann man nicht unbedingt erwarten, daß die Integrationen in geschlossener Form möglich sind. Sie lassen sich aber in jedem Falle mit Hilfe von numerischen Verfahren durchführen, wenn man folgende Substitution vornimmt:

$$y = c \cdot \sin \varphi \quad (\text{A.6})$$

$$u(c) = \frac{2}{\pi} \left\{ \eta'(0) + \int_0^{\pi/2} F(c, \varphi) d\varphi \right\},$$

wobei $F(c, \varphi) \equiv \frac{d}{dy} \left[\frac{\eta(y) - \eta(0)}{y} \right].$ (A.7)

Zur Bestimmung der benetzten Breite muß man noch einmal über alle Zwischenwerte $u(c)$ integrieren

$$z_0(c) = \int_0^c u(\varrho) d\varrho, \quad (\text{A.8})$$

und dann die inverse Funktion $c(z_0)$ bestimmen.

Betrachtung der Beispiele $\eta(y) = \beta_1 y^i$:

Die Integrale in Gl. (A.5) lassen sich in geschlossener Form bestimmen, wenn der Integrand eine Potenz ist. Die Ergebnisse sind bereits aus dem Abschnitt 4) bekannt, sollen hier jedoch noch einmal kurz abgeleitet werden.

$i = 0$: In diesem Falle des horizontalen Bodens ist $\eta(y) = \eta(0) = 0$ und ebenso $\eta'(0) = 0$. Somit ist auch

$$u(c) = 0$$

$i = 1$: In diesem Falle verschwindet der Integrand in (A.5). Es gilt also:

$$u(c) = \frac{2}{\pi} \beta_1$$

$i = 2k, k = 1, 2, 3, \dots$: Es gilt $\eta(0) = \eta'(0) = 0$. Somit

$$u(c) = \frac{2c}{\pi} (2k-1) \beta_{2k} \cdot \int_0^c \frac{y^{2k-2}}{\sqrt{c^2 - y^2}} dy.$$

Für dieses Integral erhält man nach Gröbner und Hofreiter [18]:

$$u(c) = (2k-1) \cdot \frac{(1; 2; k-1)}{(2; 2; k-1)} \cdot \beta_{2k} \cdot c^{2k-1}$$

wobei entsprechend der Definition bei Gröbner und Hofreiter für reelle Zahlen m und d und für natürliche Zahlen v :

$$(m; d; v) = m(m+d)(m+2d) \dots (m+(v-1)d).$$

$i = 2k+1, k = 1, 2, 3, \dots$: Es gilt auch hier $(0) = '(0) = 0$.

$$u(c) = \frac{2c}{\pi} \cdot 2k \cdot \beta_{2k+1} \cdot \int_0^c \frac{y^{2k-1}}{\sqrt{c^2-y^2}} dy$$

$$u(c) = \frac{2}{\pi} \cdot 2k \cdot \frac{(2k-2; -2; k-1)}{(2k-1; -2; k)} \cdot \beta_{2k+1} \cdot c^{2k}$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot 2k \cdot \frac{(2; 2; k-1)}{(1; 2; k)} \cdot \beta_{2k+1} \cdot c^{2k}$$

Die beiden Zahlenfaktoren entsprechen genau den Koeffizienten, die für u_i in Gleichung (45) angegeben sind.

ANHANG II

Numerische Rechnung für drei ausgewählte Querschnitte

Das Interpolationspolynom für die punktweise approximierten Spanten soll mit $g(y)$ bezeichnet werden. Im folgenden werden zur Vereinfachung der Schreibweise folgende normierten Koordinaten benutzt:

$$X = \frac{x}{c'} \quad ; \quad Y = \frac{y}{c'} \quad ; \quad C = \frac{c}{c'}$$

$$z = \frac{z_0}{\beta c'} \quad ; \quad G = \frac{g}{\beta \cdot c'} \quad ; \quad u = \frac{u}{\beta}$$

Für die Spanten $X = 0.25$ und 0.50 werden zur Darstellung 8 Punkte benutzt, und zwar $Y = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2$ und 1.4 . Durch diese 8 Punkte werden Polynome 7. Grades gelegt. Das Spant $X = 0.75$ wird durch 7 Punkte dargestellt - und zwar durch die gleichen Y -Werte wie vorher mit Ausnahme von $Y = 1.4$ - und durch

ein Polynom 6. Grades interpoliert.

a) $X = 0.25, Y_0 = 0.96825$

$$G = 0.25000 - 0.04024 Y + 2.67709 Y^2 - 4.43977 Y^3 + 4.72983 Y^4 - 3.11404 Y^5 + 1.14910 Y^6 - 0.18121 Y^7$$

$$U = -0.02562 + 2.67709 C - 5.65289 C^2 + 7.09475 C^3 - 5.28656 C^4 + 2.15456 C^5 - 0.36916 C^6$$

$$Z_0 = -0.02562 C + 1.33855 C^2 - 1.88430 C^3 + 1.77369 C^4 - 1.05731 C^5 + 0.35909 C^6 - 0.05274 C^7$$

$$C(Z_0 = 0.75) = 1.49458$$

$$C/Y_0 = 1.5436$$

$$U(C = 1.49458) = 0.60905$$

b) $X = 0.50, Y_0 = 0.86603$

$$G = 0.50000 - 0.00732 Y + 1.08611 Y^2 - 0.34015 Y^3 - 0.61406 Y^4 + 0.83281 Y^5 - 0.41797 Y^6 + 0.07859 Y^7$$

$$U = -0.00466 + 1.08611 C - 0.43309 C^2 - 0.92109 C^3 + 1.41382 C^4 - 0.78369 C^5 + 0.16010 C^6$$

$$Z_0 = -0.00466 C + 0.54306 C^2 - 0.14436 C^3 - 0.23027 C^4 + 0.28276 C^5 - 0.13062 C^6 + 0.02287 C^7$$

$$C(Z_0 = 0.50) = 1.30040$$

$$C/Y_0 = 1.5016$$

$$U(C = 1.30040) = 0.55276$$

c) $X = 0.75, Y_0 = 0.66144$

$$G = 0.75000 - 0.00551 Y + 0.72784 Y^2 - 0.23382 Y^3 + 0.06402 Y^4 - 0.11524 Y^5 + 0.06272 Y^6$$

$$U = -0.00351 + 0.72784 c - 0.29771 c^2 + 0.09603 c^3 - 0.19564 c^4 + 0.11760 c^5$$

$$Z_0 = -0.00351 c + 0.36392 c^2 - 0.09924 c^3 + 0.02401 c^4 - 0.03913 c^5 + 0.01960 c^6$$

$$c(Z_0 = 0.25) = 0.96448$$

$$c/Y_0 = 1.4582$$

$$U(c = 0.96448) = 0.43656.$$