

65 | November 1959

## SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Dr.-Ing. Maria Kirsch

# Die Erzeugung von Rotationskörpern aus vorgegebenen Singularitätenverteilungen

**TUHH**

*Technische Universität Hamburg-Harburg*

# **Die Erzeugung von Rotationskörpern aus vorgegebenen Singularitätenverteilungen**

Von

Dr.-Ing. MARIA KIRSCH

Institut für Schiffbau der Universität Hamburg



Sonderdruck aus der Fachzeitschrift „Schiff und Hafen“

Jahrgang 11 · Heft 11 · November 1959

Druck und Verlag: C. D. C. Heydorns Buchdruckerei, Uetersen bei Hamburg

# Die Erzeugung von Rotationskörpern aus vorgegebenen Singularitätenverteilungen

Von Dr.-Ing. Maria Kirsch  
Institut für Schiffbau der Universität Hamburg

## Verbemerkung

In der vorliegenden Arbeit werden die Konturen und Spantflächenkurven von Rotationskörpern berechnet, die bestimmten Singularitätenverteilungen in einer Parallelströmung entsprechen. Dies geschieht auf Grund der von A m t s b e r g in der Veröffentlichung [1] entwickelten Methode. Somit bildet der hier vorliegende Bericht eine Ergänzung zu den von A m t s b e r g in diesem Zusammenhang behandelten Beispielen und Fragen. Die von A m t s b e r g zur Berechnung der Rotationskörper aufgestellten Integraltabellen werden in einem Umfang erweitert, der es ermöglicht, sehr unterschiedliche Singularitätenverteilungen und L/B-Verhältnisse zu berücksichtigen. Mit Hilfe der so ergänzten Integraltafeln wird eine Reihe von Beispielen berechnet.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit besteht darin, Unterlagen zu schaffen für Untersuchungen des Widerstandes in Abhängigkeit von der Schiffform, bzw. die bereits vorhandenen Unterlagen zu ergänzen und zu erweitern. Hierbei wird Bezug genommen auf die Feststellung von Munk [2] und Weing [3], daß die Spantflächenkurve eines Rotationskörpers der entsprechenden Dipolverteilung angenähert proportional ist. Daher liegt es nahe, dem Beispiel A m t s b e r g s folgend, die Dipolverteilungen durch Polynome auszudrücken in der Art wie sie von Weinblum [4—8] für Spantflächenkurven aufgestellt worden sind. Am Schluß der Arbeit wird für alle Beispiele die Geschwindigkeit am Hauptspant berechnet.

Die Berechnung von Rotationskörpern bildet ein Gegenstück zu der in „Schiff und Hafen“ 1959, H. 5, erschienenen

Veröffentlichung [9] über den ebenen Fall. In der vorliegenden Arbeit handelt es sich um einen Spezialfall des räumlichen Problems, nämlich um die Ermittlung von Rotationskörpern. Aus den Ergebnissen bezüglich der Rotationskörper und ihrer Spantflächenkurven lassen sich Rückschlüsse ziehen auf das Verhalten der Schiffformen in Abhängigkeit von ihrer Spantflächenkurve in der Strömung.

Die Aufstellung der Integraltabelle erfolgte mit Hilfe eines elektronischen Rechenautomaten, der IBM 650, die vom Institut für angewandte Mathematik unter Leitung von Herrn Direktor Prof. Dr. Collatz verwaltet wird. Den Mathematikern Fräulein Helga Meyer, Herrn Dr. Koch und Herrn W. Wetterling danke ich für die Ratschläge und Hilfe, die sie mir bei Aufstellung der Programme für die Integralwerte zur Bestimmung der Zylinder und der Rotationskörper und bei der Ausprüfung und Rechnung mit der IBM 650 zuteil werden ließen. Herr cand. arch. nav. Meyne berechnete die Beispiele; er wurde dabei unterstützt von den Herren cand. arch. nav. Wittkopp und Wittler. Ich danke den genannten Herren hiermit für ihre Mitarbeit. Vor allem aber danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Weinblum, der diese Arbeit veranlaßt hat, für seine Anregungen und seine Förderung. Insbesondere stammt das Material für die Beispiele aus Untersuchungen und Vorschlägen von Herrn Prof. Weinblum.

Wie bereits zu Beginn erwähnt, ist die vorliegende Arbeit eine Ergänzung und Fortführung der Veröffentlichung [9]. Für beide Arbeiten stellte die Deutsche Forschungsgemeinschaft die Mittel zur Verfügung; auch die Benutzung der IBM 650 ist durch sie ermöglicht worden. Für die großzügige Förderung möchte ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft meinen besten Dank aussprechen.

## Einleitung

Wie im Falle des ebenen Problems wird eine Parallelströmung vorgegeben, in der nach einer bestimmten Gesetzmäßigkeit Singularitäten verteilt sind. Die gestellte Aufgabe besteht darin, die Konturen der Rotationskörper zu ermitteln, die diesen Singularitätenverteilungen entsprechen.

Die theoretische Grundlage dieser Untersuchung bildet das Quell-Senkenverfahren von Rankine [10; 11], das von D. W. Taylor [12] auf kontinuierliche Verteilungen ausgedehnt wurde. Amtsberg hat in seiner schon zu Beginn erwähnten Arbeit [1] eine elegante Methode entwickelt zur Ermittlung der Konturen von Rotationskörpern aus vorgegebenen Singularitätenverteilungen. Nach dieser Methode ist in der vorliegenden Arbeit gerechnet worden. Weinblum [4; 5] hat im Zusammenhang mit Untersuchungen des Schiffswiderstandes die Beziehungen zwischen Strömung und Schiffsförmigkeit behandelt und dabei Minimalformen für die Spantflächenkurven, d. h. Formen geringsten Wellenwiderstandes, aufgestellt, auf die späterhin Bezug genommen wird. Landweber [13] befaßt sich mit der Potentialströmung um Rotationskörper. Bedeutende Beiträge, auch für den allgemeinen dreidimensionalen Fall, stammen von T. Inui [14, 15, 16]. Die Bestimmung schiffsähnlicher Umströmungskörper aus Quell-Senkenverteilungen und die Programmierung des Problems für elektronische Rechenmaschinen behandeln K. Eggers und W. Wetterling [19].

## Das Quell-Senken-Verfahren

In einer allseitig unbegrenzten, inkompressiblen, idealen Flüssigkeit, in der eine Parallelströmung mit konstanter Geschwindigkeit besteht, wird ein rechtwinkliges Koordinatensystem angenommen, und zwar so, daß die X-Achse in Richtung der Parallelströmung verläuft. Auf der X-Achse wird eine Verteilung von Quellen und Senken über ein bestimmtes Intervall angenommen. Durch das Zusammenwirken der Quellen und Senken mit der Parallelströmung ergibt sich im dreidimensionalen Fall eine Schar von Stromflächen, von denen eine geschlossen ist und der Oberfläche des gesuchten Körpers entspricht. Da das Thema dieser Arbeit auf Rotationskörper beschränkt ist und diese durch den Mittellängsschnitt vollständig bestimmt sind, genügt es, die Rechnung für die XZ-Ebene durchzuführen. Es wird also  $Y = 0$  gesetzt. Die Addition der Stromfunktion  $\Psi_Q$  der Quell-Senkenverteilung und der Stromfunktion  $\Psi_T$  der Translationsströmung ergibt die zusammengesetzte Strömung  $\Psi$ . Für  $\Psi = \text{const.}$  erhält man jeweils eine bestimmte Stromfläche, bzw. mit  $Y = 0$  die entsprechende Stromlinie in der XZ-Ebene.

$$\Psi = \Psi_T + \Psi_Q \quad (1)$$

Durch  $\Psi = 0$  wird die Kontur des Rotationskörpers in der XZ-Ebene dargestellt:

$$\Psi = \Psi_T + \Psi_Q = 0 \quad (2)$$

Die Aufgabe besteht nun darin, diese Gleichung für eine vorgegebene Quell-Senkenverteilung aufzustellen und daraus die Ordinaten Z der Kontur in Abhängigkeit von X, also  $Z = Z(X)$  zu ermitteln.

## Die Gleichungen $\Psi = 0$ zur Ermittlung der Rotationskörper

Die folgenden Ausführungen basieren auf der von Amtsberg in seiner schon zu Beginn erwähnten Arbeit [1] entwickelten Methode. Dabei sind gewisse Wiederholungen der dort gemachten Aussagen unvermeidbar. Die Gleichung der Stromfunktion  $\Psi_Q$  in der XZ-Ebene für eine Quelle auf der X-Achse im Abstand  $\mathcal{E}$  vom Koordinatenursprung lautet im dreidimensionalen Fall:

$$\Psi_Q = \frac{Q}{2} \left( 1 - \frac{X - \mathcal{E}}{\sqrt{(X - \mathcal{E})^2 + Z^2}} \right) \quad (3)$$

Hierin bedeutet Q die Ergiebigkeit, die mit der Quellstärke S durch folgende Beziehung verbunden ist:

$$Q = 4 \pi S.$$

Zur Erzeugung von Rotationskörpern werden auf der X-Achse im Intervall  $\left(-\frac{L}{2}; +\frac{L}{2}\right)$  linienförmig Quellen und Senken verteilt, d. h. die Größe  $\mathcal{E}$  nimmt die Werte von  $-\frac{L}{2}$  bis  $+\frac{L}{2}$  an. Das bedeutet aber, daß nun die Ergiebigkeit auch eine Funktion von  $\mathcal{E}$  ist,  $dQ = q(\mathcal{E}) d\mathcal{E} = 4 \pi S(\mathcal{E}) d\mathcal{E}$ , und der in (3) gegebene Ausdruck für eine Einzelquelle ist somit von  $-\frac{L}{2}$  bis  $+\frac{L}{2}$  zu integrieren.

Da die Gesamtergiebigkeit Null sein muß, gilt

$$4\pi \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} S(\mathcal{E}) d\mathcal{E} = 0 \quad (4)$$

Damit ergibt sich für die Stromfunktion der Quell-Senkenverteilung in der XZ-Ebene die Gleichung

$$\Psi_Q = -\frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{q(\mathcal{E})(X - \mathcal{E})}{\sqrt{(X - \mathcal{E})^2 + Z^2}} d\mathcal{E} \quad (5)$$

Die Stromfunktion der Parallelströmung in Richtung der negativen X-Achse ist gegeben durch

$$\Psi_T = -u_0 \pi Z^2 \quad (6)$$

Hierin bedeutet  $u_0$  die Translationsgeschwindigkeit. Die Addition der beiden Stromfunktionen  $\Psi_Q$  und  $\Psi_T$  ergibt die Stromfunktion  $\Psi$  der gesamten Strömung. Für  $\Psi = 0$  erhalten wir die Gleichung der Kontur des Rotationskörpers in der XZ-Ebene.

$$\Psi_Q + \Psi_T = -u_0 \pi Z^2 - \frac{1}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{q(\mathcal{E})(X - \mathcal{E})}{\sqrt{(X - \mathcal{E})^2 + Z^2}} d\mathcal{E} = 0 \quad (7)$$

oder auch

$$-\frac{1}{2u_0 \pi Z^2} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{q(\mathcal{E})(X - \mathcal{E})}{\sqrt{(X - \mathcal{E})^2 + Z^2}} d\mathcal{E} = 1 \quad (7a)$$

Die partielle Integration des Integrals ergibt

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{q(\mathcal{E})(X - \mathcal{E})}{\sqrt{(X - \mathcal{E})^2 + Z^2}} d\mathcal{E} &= \left[ \frac{X - \mathcal{E}}{\sqrt{(X - \mathcal{E})^2 + Z^2}} \right]_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} + \frac{L}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} q(\mathcal{E}) d\mathcal{E} \\ &+ \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{q(\mathcal{E})}{\sqrt{(X - \mathcal{E})^2 + Z^2}} d\mathcal{E} \\ &+ \frac{L}{2} (X - \mathcal{E})^2 \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{q(\mathcal{E})}{\sqrt{[(X - \mathcal{E})^2 + Z^2]^3}} d\mathcal{E} \\ &+ \frac{L}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{q(\mathcal{E})}{\sqrt{(X - \mathcal{E})^2 + Z^2}} d\mathcal{E} + \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{Z^2}{\sqrt{[(X - \mathcal{E})^2 + Z^2]^3}} q(\mathcal{E}) d\mathcal{E} \quad (8) \end{aligned}$$

Da die Gesamtgiebigkeit Null sein muß, verschwindet der 1. Term auf der rechten Seite der Gleichung (8). Zwischen der Quell-Senkenverteilung  $q(\mathcal{E})$  und der Dipolverteilung  $M(\mathcal{E})$  besteht die Beziehung

$$M(\mathcal{E}) = - \int_{-\frac{L}{2}}^{\mathcal{E}} q(\mathcal{E}) d\mathcal{E} \quad (9)$$

Setzen wir diesen Ausdruck in (8) ein, so erhalten wir

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{q(\mathcal{E})(X-\mathcal{E})}{\sqrt{(X-\mathcal{E})^2 + Z^2}} d\mathcal{E} = -Z^2 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{M(\mathcal{E})}{\sqrt{[(X-\mathcal{E})^2 + Z^2]^3}} d\mathcal{E} \quad (8a)$$

Hieraus erkennt man, daß an Stelle der Quell-Senkenverteilung die entsprechende Dipolverteilung vorgegeben werden kann. Man gelangt damit zum gleichen Ergebnis. Die Formel (7a) wird deshalb nun unter Zugrundelegung der Dipolverteilung hingeschrieben:

$$\frac{1}{2 u_0 \pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{M(\mathcal{E})}{\sqrt{[(X-\mathcal{E})^2 + Z^2]^3}} d\mathcal{E} = 1 \quad (7b)$$

Von dieser Gleichung soll weiterhin ausgegangen werden. Jedoch wählen wir für die Durchführung der Rechnung die Darstellung in dimensionsloser Form, indem wir folgende Substitutionen machen:

$$x = \frac{X}{L/2} \quad z = \frac{Z}{B/2} \quad \xi = \frac{\mathcal{E}}{L/2} \quad \eta(\xi) = \frac{M(\mathcal{E})}{M_{\max}} \quad (10)$$

Hierin ist  $L$  die Länge der Dipolverteilung, während  $B$  die größte Breite des Rotationskörpers sein soll. In den Formeln (10) ist noch die Größe  $M_{\max}$  zu bestimmen. Nach Munk [2] und Weinig [3] ist die Dipolverteilung den Spantflächen angenähert proportional. Diese Aussage auf die Hauptspantfläche angewandt ergibt

$$M_{\max} = \kappa u_0 \pi \frac{B^2}{4} \quad (11)$$

Der Proportionalitätsfaktor  $\kappa$  heißt die Breitenkorrektur; er bewirkt, daß die Hauptspantbreite gleich  $B$ , bzw. in dimensionsloser Form gleich 1 wird.

Mit Hilfe der Formeln (10) und (11) erhält man die Gleichung für die Kontur des Rotationskörpers in dimensionsloser Form

$$\frac{\kappa}{2} \frac{1}{(L/B)^2} \int_{-1}^{+1} \frac{\eta(\xi)}{\sqrt{\left[ (x-\xi)^2 + \frac{z^2}{(L/B)^2} \right]^{3/2}}} d\xi = 1 \quad (7c)$$

Da die Dipolverteilung im Falle der Rotationskörper der Spantflächenkurve tatsächlich sehr ähnlich ist, wird man, um zu Formen zu gelangen, die für den Schiffbau brauchbar sind, die Dipolverteilung ähnlich den Spantflächenkurven annehmen. Von Weinblum sind im großen Umfang Schiffslinien und Spantflächenkurven durch Polynome mathematisch dargestellt worden [6; 7]. Deshalb ist es angebracht, auch die Dipolverteilung durch Polynome darzustellen. Dies geschieht in der Form

$$\eta(\xi) = 1 - \sum_{n=1}^m a_n \xi^n \quad (12)$$

Es sollen hier nur zum Hauptspant symmetrische Rotationskörper betrachtet werden, folglich muß auch gelten

$$\eta(\xi) = \eta(-\xi) \quad (13)$$

Das bedeutet aber, daß bei Verwendung von ungeraden Potenzen von  $\xi$  stets der absolute Betrag von  $\xi$  zugrunde gelegt werden muß. Es sind somit die Integrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\xi^n d\xi}{\sqrt{R^2}} \quad \text{und} \quad \int_{-1}^{+1} \frac{|\xi|^{2n+1}}{\sqrt{R^2}} d\xi \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots$$

mit  $R = (x-\xi)^2 + \left(\frac{z}{L/B}\right)^2$  für eine ganze Reihe von Wertepaaren  $x, z$  zu berechnen.

Die Integration ergibt für

$$n=0 \int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{\sqrt{R^2}} = \left[ \frac{\xi-x}{\left(\frac{z}{L/B}\right)^2 \sqrt{(x-\xi)^2 + \left(\frac{z}{L/B}\right)^2}} \right]_{-1}^{+1} \quad (14a)$$

$$n=1 \int_{-1}^{+1} \frac{\xi d\xi}{\sqrt{R^2}} = - \left[ \frac{x^2 + \left(\frac{z}{L/B}\right)^2 - \xi x}{\left(\frac{z}{L/B}\right)^2 \sqrt{(x-\xi)^2 + \left(\frac{z}{L/B}\right)^2}} \right]_{-1}^{+1} \quad (14b)$$

$$n=2 \int_{-1}^{+1} \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{R^2}} = - \left[ \frac{\left\{ \left(\frac{z}{L/B}\right)^2 - x^2 \right\} \xi + \left\{ \left(\frac{z}{L/B}\right)^2 + x^2 \right\} x}{\left(\frac{z}{L/B}\right)^2 \sqrt{(x-\xi)^2 + \left(\frac{z}{L/B}\right)^2}} \right]_{-1}^{+1} + \left[ \ln 2 \left( \xi - x + \sqrt{(x-\xi)^2 + \left(\frac{z}{L/B}\right)^2} \right) \right]_{-1}^{+1} \quad (14c)$$

$$n \geq 3 \int_{-1}^{+1} \frac{\xi^n d\xi}{\sqrt{R^2}} = \left[ \frac{\xi^{n-1}}{(n-2) \sqrt{(x-\xi)^2 + \left(\frac{z}{L/B}\right)^2}} \right]_{-1}^{+1} - \frac{n-1}{n-2} \left\{ x^2 + \left(\frac{z}{L/B}\right)^2 \right\} \int_{-1}^{+1} \frac{\xi^{n-2}}{\sqrt{R^2}} d\xi + \frac{2n-3}{n-2} x \int_{-1}^{+1} \frac{\xi^{n-1}}{\sqrt{R^2}} d\xi \quad (14d)$$

Fernerhin gilt:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{|\xi|^{2n+1}}{\sqrt{R^2}} d\xi = \int_0^1 \frac{\xi^{2n+1}}{\sqrt{R^2}} d\xi - \int_{-1}^0 \frac{\xi^{2n+1}}{\sqrt{R^2}} d\xi \quad (15)$$

In den vorstehend angegebenen Gleichungen (14) und (15) gilt stets  $z \geq 0$ ; im allgemeinen bleibt  $z \leq 1$ , nur bei einigen besonderen Dipolverteilungen, die Anschwellungen aufweisen, nimmt  $z$  Werte an, die zum Teil etwas größer als Eins sind. Wegen der vorausgesetzten Symmetrie der Rotationskörper zur Hauptspantfläche kann die Rechnung auf  $x \geq 0$  beschränkt werden. Die Länge der Dipolverteilung ist etwas geringer als die Länge des Körpers; da Erstere in dimensionsloser Form gleich Zwei ist,  $L/2 = 1$ , wird für die Körperlänge entsprechend gelten, daß  $L^*/2$  etwas größer als Eins ist. Folglich muß für  $x$  der Bereich zwischen 0 und  $1 + \varepsilon$  mit  $0 < \varepsilon \ll 1$  berücksichtigt werden.

Die Ergebnisse sind in den Tabellen 1 und 2 zusammengestellt. Es sind die Integrale bis zur 10. Potenz von  $\xi$  einschließlich berechnet worden; dabei ist bei den ungeraden Potenzen stets nur  $|\xi|$  berücksichtigt. Tabellen bis zur 12. Potenz von  $\xi$  mit Angabe der Integralwerte getrennt für die Intervalle  $(0; L/2)$  und  $(-L/2; 0)$  sind im Institut für Schiffbau vorhanden.

Tabelle 1 enthält den Wertebereich  $0 \leq x \leq 1$ ; zur Berechnung der tatsächlichen Körperlänge war es wie bereits erwähnt notwendig, auch Werte  $x = 1 + \varepsilon$  für  $z = 0$  zu berücksichtigen. Sie sind in Tabelle 2 enthalten. Zugrunde gelegt wurde für beide Tabellen wie bei Amtsberg das Verhältnis  $L/B = 8$ . Aber es ist durchaus möglich, sie auch für  $L/B \neq 8$  zu benutzen. Diese Feststellung stammt von Amtsberg, der sie in seiner Arbeit [1] auch erläutert hat. Hier folgt eine kurze Wiederholung dieser Erklärung.

Man unterscheidet die z-Werte für die verschiedenen L/B-Verhältnisse durch Indizes, z. B. möge  $z_m$  bedeuten, daß  $L/B = m$  ist; in der Gleichung (7c) hat man dann nur  $z_8/8$  durch  $z_m/m$  zu ersetzen:

$$\frac{z_8}{8} = \frac{z_m}{m} \quad (16)$$

Folglich ist

$$z_m = \frac{m}{8} z_8 \quad (16a)$$

Das bedeutet, daß ein Integralwert, der für ein bestimmtes  $z_8$  aus der Tabelle entnommen wird, bei  $L/B = m$  für den-

**T a b e l l e 1**

Integralwerte zur Berechnung von Rotationskörpern

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^m d\xi}{N}$$

in Abhängigkeit von x und z

$$N = \left[ (x-\xi)^2 + \left(\frac{z}{L/B}\right)^2 \right]^{3/2}$$

a) Integrale für  $m = 0$  bis 4

x	z	$\int \frac{d\xi}{N}$	$\int \frac{ \xi  d\xi}{N}$	$\int \frac{\xi^2 d\xi}{N}$	$\int \frac{ \xi ^3 d\xi}{N}$	$\int \frac{\xi^4 d\xi}{N}$	
0,00	0,30	1421,2233	51,334738	5,9552306	1,8542163	0,98673580	
	0,40	799,00187	38,002495	5,3815031	1,8074922	0,97857170	
	0,50	511,00292	30,003895	4,9373169	1,7616997	0,96912299	
	0,60	354,55975	24,672268	4,5752367	1,7168356	0,95859575	
	0,66...	287,00518	22,006908	4,3664794	1,6874400	0,95106160	
	0,70	260,23020	20,864755	4,2699571	1,6728959	0,94715593	
	0,80	199,00744	18,009926	4,0063715	1,6298759	0,93494162	
	0,90	157,03408	15,790315	3,7747341	1,5877703	0,92207035	
	1,00	127,01157	14,015444	3,5683888	1,5465731	0,90864376	
	1,10	104,79908	12,564097	3,3825862	1,5062778	0,89475081	
	1,20	87,905454	11,355461	3,2138179	1,4668770	0,88047000	
	1,25	80,937946	10,823976	3,1349630	1,4475096	0,87320626	
	1,30	74,759024	10,333587	3,0594177	1,4283629	0,86587111	
	1,33...	71,020363	10,027212	3,0107719	1,4157205	0,86094510	
0,10	1,35	69,254059	9,8797343	2,9869393	1,4094358	0,85847212	
	1,40	64,328520	9,4585105	2,9173116	1,3907272	0,85101646	
	1,45	59,903888	9,0665464	2,8503411	1,3722359	0,84351092	
	1,50	55,914507	8,7009223	2,7858537	1,3539608	0,83596194	
	1,55	52,305137	8,3590948	2,7236925	1,3359006	0,82837561	
	1,60	49,029034	8,0388386	2,6637153	1,3180543	0,82075776	
	1,70	43,323299	7,4554470	2,5498084	1,2829976	0,80544918	
	0,10	0,30	1421,1929	149,85433	20,116856	3,9996022	1,4149546
		0,40	798,97156	87,404838	13,321033	3,2002601	1,3102973
		0,50	510,97271	58,341127	9,9970081	2,7727535	1,2455928
		0,60	354,52968	42,409956	8,0706799	2,5002970	1,1979340
		0,66...	286,97520	35,456138	7,1865172	2,3646154	1,1713004
		0,70	260,20628	32,678388	6,8223205	2,3059750	1,1590235
		0,80	198,97769	26,254504	5,9467546	2,1563670	1,1251917
0,90		157,00454	21,758948	5,2956616	2,0348069	1,0945845	
1,00		126,98224	18,466250	4,7893989	1,9321081	1,0661735	
1,10		104,77000	15,965154	4,3818082	1,8428066	1,0393475	
1,20		87,876626	14,008208	4,0444683	1,7634519	1,0137240	
1,25		80,909255	13,182550	3,8961310	1,7267587	1,0012820	
1,30		74,730475	12,439081	3,7589956	1,6917577	0,98905457	
1,33...		70,991910	11,983356	3,6730995	1,6692746	0,98101291	
0,20	1,35	69,225656	11,766354	3,6316732	1,6582707	0,97702323	
	1,40	64,300268	11,154908	3,5130021	1,6261473	0,96517251	
	1,45	59,875790	10,596867	3,4020033	1,5952593	0,95348955	
	1,50	55,886567	10,085622	3,2978463	1,5654968	0,94196360	
	1,55	52,277361	9,6155964	3,1998215	1,5367651	0,93058564	
	1,60	49,001424	9,1820533	3,1073191	1,5089819	0,91934808	
	1,70	43,296034	8,4087971	2,9368429	1,4559827	0,89726950	
	0,20	0,30	1421,0953	287,23310	62,592209	15,121478	4,3874961
		0,40	798,87426	162,75761	37,130149	9,7984209	3,2467677
		0,50	510,87579	105,11891	25,166674	7,2265886	2,6707924
		0,60	354,43321	73,784461	18,547681	5,7562007	2,3241225
		0,66...	286,87908	60,239600	15,637361	5,0893074	2,1592132
		0,70	260,10434	54,866710	14,470174	4,8165531	2,0897397
		0,80	198,88236	42,565200	11,758772	4,1665453	1,9177419
0,90		156,90989	34,109350	9,8494287	3,6894901	1,7837314	
1,00		126,88835	28,040314	8,4435425	3,3230256	1,6745298	
1,10		104,67693	23,530739	7,3707271	3,0311963	1,5824556	
1,20		87,784447	20,083128	6,5278223	2,7919884	1,5027537	
1,25		80,817546	18,654715	6,1711159	2,6874867	1,4665322	
1,30		74,639250	17,383808	5,8492911	2,5912395	1,4323333	
1,33...		70,901017	16,612578	5,6516994	2,5311515	1,4105402	

a) Integrale für  $m = 0$  bis 4

$x$	$z$	$\int_0^z \frac{d\xi}{N}$	$\int_0^z \frac{ \xi  d\xi}{N}$	$\int_0^z \frac{\xi^2 d\xi}{N}$	$\int_0^z \frac{ \xi ^3 d\xi}{N}$	$\int_0^z \frac{\xi^4 d\xi}{N}$
0,20	1,35	69,134931	16,247551	5,5575196	2,5022166	1,3999223
	1,40	64,210057	15,227103	5,2918033	2,4195046	1,3691024
	1,45	59,786108	14,306820	5,0488070	2,3423715	1,3397073
	1,50	55,797428	13,473625	4,8257300	2,2701900	1,3115959
	1,55	52,188778	12,716521	4,6202049	2,2024261	1,2846474
	1,60	48,913411	12,026205	4,4302191	2,1386229	1,2587577
	1,70	43,209196	10,815437	4,0902246	2,0213770	1,2098063
	0,30	0,30	1420,9083	427,57488	133,34877	43,323741
0,40		798,68795	240,90060	76,776519	26,008385	9,6060919
0,50		510,69031	154,49097	50,414228	17,833898	7,0263872
0,60		354,24873	107,54611	35,974450	13,285584	5,5560581
0,66...		286,69536	87,270768	29,687450	11,274893	4,8908247
0,70		259,92103	79,233495	27,182076	10,465725	4,6191137
0,80		198,70040	60,851225	21,411376	8,5775376	3,9725675
0,90		156,72943	48,242240	17,405429	7,2380945	3,4990160
1,00		126,70954	39,217132	14,500695	6,2443379	3,1358331
1,10		104,49993	32,533825	12,319741	5,4801848	2,8469865
1,20		87,609393	27,445131	10,634837	4,8752083	2,6104641
1,25		80,643515	25,344237	9,9311668	4,6177240	2,5072036
1,30		74,466275	23,479717	9,3018536	4,3845660	2,4121470
1,33...		70,728764	22,350788	8,9183254	4,2409806	2,3528054
1,35		68,963043	21,817204	8,7363359	4,1724200	2,3242401
1,40		64,039287	20,328356	8,2258877	3,9785379	2,2426049
1,45		59,616485	18,989637	7,7632466	3,8006243	2,1665051
1,50		55,628979	17,781368	7,3423276	3,6367486	2,0953189
1,55	52,021531	16,686993	6,9580001	3,4852769	2,0285175	
1,60	48,747391	15,692507	6,6059129	3,3448179	1,9656487	
1,70	43,045706	13,957263	5,9841462	3,0923382	1,8502051	
0,40	0,30	1420,5824	568,55402	232,31590	96,941870	41,545114
	0,40	798,36345	319,66483	132,19004	56,434766	25,061723
	0,50	510,36759	204,46447	85,670211	37,474333	17,258732
	0,60	353,92818	141,88626	60,282311	27,032961	12,902518
	0,66...	286,37646	114,86373	49,268698	22,463141	10,970406
	0,70	259,60301	104,15336	44,890259	20,635960	10,191205
	0,80	198,38526	79,663061	34,837831	16,408739	8,3678210
	0,90	156,41751	62,872417	27,898070	13,452697	7,0683402
	1,00	126,40116	50,862019	22,896514	11,292705	6,0995894
	1,10	104,19538	41,975563	19,165851	9,6580141	5,3510486
	1,20	87,308962	35,216596	16,303945	8,3849395	4,7556060
	1,25	80,345241	32,428820	15,115464	7,8499882	4,5012880
	1,30	74,170221	29,956473	14,056627	7,3696539	4,2704869
	1,33...	70,434223	28,460486	13,413440	7,0759471	4,1280974
	1,35	68,669269	27,753703	13,108847	6,9363039	4,0600364
	1,40	63,747849	25,782701	12,256776	6,5436231	3,8673091
	1,45	59,327438	24,012061	11,487654	6,1863483	3,6901093
	1,50	55,342376	22,415523	10,790795	5,8600631	3,5265884
1,55	51,737420	20,970992	10,157200	5,5610380	3,3751810	
1,60	48,465820	19,659772	9,5792400	5,2861049	3,2345525	
1,70	42,769341	17,375942	8,5651695	4,7980727	2,9812158	
0,50	0,30	1420,0085	709,56271	359,34430	184,27238	95,834676
	0,40	797,79284	398,45711	203,22280	105,64277	56,087285
	0,50	509,80120	254,46414	130,78853	68,987651	37,424640
	0,60	353,36688	176,25041	91,327342	48,902485	27,109054
	0,66...	285,81902	142,47909	74,238822	40,155178	22,578210
	0,70	259,04763	129,09479	67,453313	36,668963	20,762512
	0,80	197,83658	98,493815	51,899554	28,638485	16,549469
	0,90	155,87627	77,518715	41,191881	23,064159	13,589223
	1,00	125,86805	62,520137	33,498901	19,023575	11,415612
	1,10	103,67102	51,427603	27,780559	15,991894	9,7626709
0,60	0,30	1418,9224	850,13887	514,08877	313,40575	192,66856
	0,40	796,71598	476,82219	289,53436	177,99492	110,80639
	0,50	508,73599	304,04332	185,43471	115,01517	72,544788
	0,60	352,31562	210,20207	128,78217	80,604907	51,515651
	0,66...	284,77826	169,68796	104,27577	65,662488	42,331304
	0,70	258,01247	153,63292	94,552004	59,718784	38,664472
	0,80	196,81951	116,93151	72,286363	46,063830	30,199133
	0,90	154,87906	91,783130	56,986533	36,628964	24,302405
	1,00	124,89230	73,808348	46,018044	29,825355	20,013715
	1,10	102,71811	60,522371	37,885115	24,749661	16,785825
0,70	0,30	1418,5580	989,36458	695,59786	491,76256	349,51639
	0,40	794,38467	553,86212	390,19403	277,20102	198,49993
	0,50	506,44615	352,32891	248,70385	177,56675	128,12911
	0,60	350,07480	242,89724	171,77212	123,24432	89,603163
	0,66...	282,57388	195,66778	138,52713	99,708106	72,845386
	0,70	255,82733	176,95644	125,34582	90,360563	66,173327
	0,80	194,69577	134,20048	95,194559	68,932978	50,829220

a) Integrale für m= 0 bis 4

x	z	$\int \frac{dE}{N}$	$\int \frac{ E  dE}{N}$	$\int \frac{E^2 dE}{N}$	$\int \frac{ E ^3 dE}{N}$	$\int \frac{E^4 dE}{N}$
0,70	0,90	152,82147	104,92786	74,517650	54,186479	40,213484
	1,00	122,90461	84,028251	59,730499	43,602122	32,552569
0,80	0,30	1409,8882	1123,9369	900,31175	723,93317	584,13867
	0,40	787,90277	626,41171	501,78699	404,27166	327,38513
	0,50	500,19269	396,32132	317,35565	256,11002	208,09917
	0,60	344,08218	271,52288	217,25366	175,55863	143,07558
	0,66...	276,76800	217,73800	174,08929	140,77340	114,92960
	0,70	250,11956	196,45272	157,00233	126,99141	103,76227
	0,80	189,28875	147,89567	118,01194	95,509800	78,208696
	0,90	147,72370	114,75668	91,394404	73,985232	60,690737
0,90	0,02	319949,88	287945,73	259152,07	233244,98	209934,02
	0,05	51150,008	46025,860	41422,367	37284,964	33565,574
	0,075	22705,744	20426,048	18381,750	16546,976	14899,442
	0,10	12750,440	11466,307	10317,444	9288,1019	8365,0959
	0,15	5640,0313	5067,0334	4557,3855	4102,6942	3696,3673
	0,20	3152,0895	2828,0130	2541,8258	2287,7965	2061,7093
	0,25	2001,2490	1792,4131	1609,5046	1448,0789	1305,0619
	0,30	1376,8067	1230,5964	1103,6965	992,39829	894,27631
	0,40	757,63244	673,75823	602,41009	540,67634	486,82458
	0,50	472,94917	418,00712	372,28110	333,28399	299,64423
	0,60	319,86166	280,70779	248,85962	222,09902	199,27692
	0,66...	254,48556	222,18667	196,32088	174,80317	156,59182
0,70	228,76969	199,19861	175,70244	156,25344	139,85537	
0,80	170,57246	147,27505	129,19576	114,45211	102,16078	
0,95	0,02	319800,24	303791,05	285591,78	274160,01	260456,20
	0,05	51002,182	48433,017	45999,958	43694,431	41509,079
	0,075	22560,548	21413,652	20330,943	19307,525	18339,526
	0,10	12608,781	11959,728	11349,401	10774,235	10231,618
	0,15	5507,6493	5214,3293	4941,1560	4685,5760	4445,9307
	0,20	3030,9520	2862,3054	2707,0194	2562,9414	2428,7848
	0,25	1892,2188	1781,4373	1680,7057	1588,0840	1502,4824
	0,30	1279,8685	1200,6644	1129,5988	1064,8672	1005,5027
	0,40	682,71128	635,22255	593,78238	556,75601	523,32721
	0,50	415,79054	383,29569	355,72872	331,56469	310,08133
0,60	276,25980	252,14092	232,24230	215,12110	200,12257	
0,96	0,02	319688,28	306876,58	294586,62	282795,76	271483,00
	0,05	50892,978	48833,340	46863,532	44978,333	43173,478
	0,075	22455,238	21533,469	20655,213	19817,165	19016,897
	0,10	12508,542	11985,119	11488,710	11016,717	10567,387
	0,15	5419,8419	5181,1931	4957,3828	4746,3684	4546,9226
	0,20	2956,6671	2817,9817	2689,5961	2569,6979	2457,2763
	0,25	1830,8068	1738,6550	1654,5361	1576,7672	1504,4579
	0,30	1229,7630	1163,1150	1103,1592	1048,2996	997,72466
	0,40	649,74793	608,92133	573,27189	541,31985	512,35616
	0,50	393,86769	365,41697	341,29619	320,10611	301,20598
0,97	0,02	319447,19	309831,33	300512,95	291481,52	282727,55
	0,05	50661,770	49110,057	47612,076	46164,721	44765,692
	0,075	22237,510	21539,342	20868,501	20222,723	19600,522
	0,10	12307,563	11908,341	11526,919	11161,354	10810,471
	0,15	5256,3997	5071,2142	4896,6428	4731,0088	4573,3915
	0,20	2829,0252	2719,3202	2617,4442	2521,8424	2431,7088
	0,25	1733,0238	1658,7217	1590,8004	1527,7799	1468,9229
	0,30	1155,2099	1100,5033	1051,2875	1006,1360	964,36022
	0,40	605,66953	571,12220	541,00991	513,98413	489,42442
	0,50	366,65041	341,99879	321,15742	302,83633	286,46420
0,98	0,02	318764,33	312340,20	306053,16	299899,05	293874,44
	0,05	50034,560	48986,910	47967,019	46972,965	46003,550
	0,075	21679,761	21201,658	20739,139	20290,561	19854,993
	0,10	11827,062	11548,886	11281,755	11024,141	10775,226
	0,15	4919,4450	4785,3444	4658,6812	4538,0347	4422,6918
	0,20	2599,3846	2516,9273	2440,3918	2368,4161	2300,3418
	0,25	1575,8635	1518,1586	1465,5277	1416,6494	1370,9029
	0,30	1045,6241	1001,9472	962,78965	926,86232	893,57318
	0,40	548,42879	519,65539	494,69541	472,31140	451,95592
	0,50	333,89514	312,74282	294,95386	279,33341	265,36913
0,99	0,02	318222,67	311974,19	308766,15	305596,85	302465,29
	0,05	47308,630	46751,502	46206,137	45671,172	45145,911
	0,075	19678,164	19409,186	19148,364	18894,387	18646,615
	0,10	10397,922	10232,231	10073,180	9919,4880	9770,5427
	0,15	4182,8803	4094,7502	4011,8576	3932,9577	3857,4735
	0,20	2194,0988	2135,7762	2081,9847	2031,5058	1983,7865
	0,25	1335,9641	1292,8842	1253,8849	1217,7692	1184,0038
	0,30	894,21166	860,26052	830,06534	802,44863	776,89389
	0,40	478,32025	454,68242	434,34541	416,16623	399,65751
	0,50	296,31940	278,31380	263,29096	250,13904	238,39584

a) Integrale für  $m = 0$  bis 4

x	z	$\int_0^z \frac{dE}{N}$	$\int_0^z \frac{ E  dE}{N}$	$\int_0^z \frac{E^2 dE}{N}$	$\int_0^z \frac{ E ^3 dE}{N}$	$\int_0^z \frac{E^4 dE}{N}$
1,00	0,01	639999,88	639200,83	638407,98	637620,68	636838,31
	0,02	159999,88	159600,63	159207,25	158818,60	158434,16
	0,05	25599,875	25440,625	25286,336	25135,863	24988,693
	0,075	11377,653	11271,736	11170,375	11072,431	10977,396
	0,10	6399,8750	6320,6250	6245,6433	6173,7960	6104,5834
	0,15	2844,3195	2791,7360	2743,0157	2697,0365	2653,3101
	0,20	1599,8750	1560,6249	1524,9502	1491,7414	1460,5208
	0,25	1023,8750	992,62479	964,72711	939,08432	915,22924
	0,30	710,98614	685,06915	662,32261	641,66079	622,62665
	0,40	399,87506	380,62447	364,25724	349,71120	336,54860
	0,50	255,87509	240,62418	228,03422	217,06621	207,30060

b) Integrale für  $m = 5$  bis 9

x	z	$\int_0^z \frac{ E ^5 dE}{N}$	$\int_0^z \frac{E^6 dE}{N}$	$\int_0^z \frac{ E ^7 dE}{N}$	$\int_0^z \frac{E^8 dE}{N}$	$\int_0^z \frac{ E ^9 dE}{N}$
0,00	0,30	0,66272175	0,49791431	0,39860070	0,33228231	0,28487300
	0,40	0,65980992	0,49631813	0,39752151	0,33146985	0,28422204
	0,50	0,65619287	0,49429424	0,39614513	0,33043155	0,28338937
	0,60	0,65192327	0,49185953	0,39447924	0,32917194	0,28237815
	0,66...	0,64873939	0,49001714	0,39321214	0,32821187	0,28160663
	0,70	0,64705167	0,48903228	0,39253270	0,32769639	0,28119212
	0,80	0,64162645	0,48583182	0,39031536	0,32601103	0,27983559
	0,90	0,63569392	0,48227822	0,38783793	0,32412263	0,27831343
	1,00	0,62929831	0,47839199	0,38511181	0,32203860	0,27663097
	1,10	0,62248181	0,47419394	0,38214898	0,31976685	0,27479395
	1,20	0,61528459	0,46970496	0,37896186	0,31731570	0,27280851
	1,25	0,61155524	0,46735788	0,37728816	0,31602556	0,27176214
	1,30	0,60774488	0,46494586	0,37556318	0,31469386	0,27068111
	1,33...	0,60516186	0,46330303	0,37438551	0,31378352	0,26994158
	1,35	0,60385800	0,46247147	0,37378855	0,31332173	0,26956626
	1,40	0,59989895	0,45993726	0,37196590	0,31191031	0,26841847
	1,45	0,59587198	0,45734576	0,37009687	0,31046078	0,26723860
1,50	0,59178121	0,45469948	0,36818310	0,30897428	0,26602755	
1,55	0,58763066	0,45200090	0,36622624	0,30745200	0,26478621	
1,60	0,58342422	0,44925245	0,36422791	0,30589511	0,26351549	
1,70	0,57485875	0,44361560	0,36011338	0,30268226	0,26088953	
0,10	0,30	0,79705275	0,56364486	0,44088715	0,36351053	0,30968635
	0,40	0,78022673	0,55952980	0,43912458	0,36239854	0,30885194
	0,50	0,76718210	0,55537584	0,43702946	0,36100268	0,30779007
	0,60	0,7552807	0,55095626	0,43459186	0,35932949	0,30650613
	0,66...	0,74808365	0,54782756	0,43278007	0,35806448	0,30552992
	0,70	0,74440849	0,54620604	0,43181958	0,35738826	0,30500652
	0,80	0,73346054	0,54111260	0,42872661	0,35518965	0,30329846
	0,90	0,72251696	0,53568405	0,42532953	0,35274521	0,30138982
	1,00	0,71149962	0,52993769	0,42164617	0,35006710	0,29928906
	1,10	0,70037504	0,52389507	0,41769494	0,34716795	0,29700506
	1,20	0,68913367	0,51757965	0,41349451	0,34406068	0,29454712
	1,25	0,68347004	0,51432720	0,41130667	0,34243310	0,29325590
	1,30	0,67777933	0,51101564	0,40906351	0,34075842	0,29192479
	1,33...	0,67397126	0,50877658	0,40753847	0,33961662	0,29101584
	1,35	0,67206315	0,50764797	0,40676733	0,33903830	0,29055504
	1,40	0,66632339	0,50422722	0,40442042	0,33727438	0,28914787
	1,45	0,66056211	0,50075632	0,40202505	0,33546633	0,28770453
1,50	0,65478151	0,49723822	0,39958345	0,33362180	0,28622627	
1,55	0,64898390	0,49367578	0,39709785	0,33173641	0,28471434	
1,60	0,64317162	0,49007184	0,39457042	0,32981381	0,28316999	
1,70	0,63151267	0,48275048	0,38939871	0,32586343	0,27998903	
0,20	0,30	1,7083781	0,91757789	0,62486460	0,48370941	0,39973490
	0,40	1,4526176	0,85836402	0,60937431	0,47867354	0,39746376
	0,50	1,3160036	0,82269560	0,59831276	0,47418529	0,39500786
	0,60	1,2270930	0,79660071	0,58884523	0,46968323	0,39226502
	0,66...	1,1817344	0,78194190	0,58290065	0,46657744	0,39026400
	0,70	1,1618047	0,77514150	0,57998107	0,46498369	0,38921141
	0,80	1,1097845	0,75619643	0,57130876	0,46002276	0,38584866
	0,90	1,0659343	0,73872992	0,56264134	0,45478334	0,38218867
	1,00	1,0274857	0,72219067	0,55389226	0,44926923	0,37824809
	1,10	0,99282045	0,70626730	0,54502445	0,44349444	0,37404591
	1,20	0,96093676	0,69077710	0,53602701	0,43747817	0,36960228
	1,25	0,94582570	0,68315831	0,53148040	0,43438622	0,36729636
	1,30	0,93118547	0,67561067	0,52690345	0,43124217	0,36493784

b) Integrale für m= 5 bis 9

x	z	$\int_0^z \frac{ \xi ^5 d\xi}{N}$	$\int_0^z \frac{\xi^6 d\xi}{N}$	$\int_0^z \frac{ \xi ^7 d\xi}{N}$	$\int_0^z \frac{\xi^8 d\xi}{N}$	$\int_0^z \frac{ \xi ^9 d\xi}{N}$
0,20	1,33	0,92166239	0,67061488	0,52383609	0,42911862	0,36333754
	1,35	0,91696718	0,66812713	0,52229780	0,42804892	0,36252929
	1,40	0,90313004	0,66070226	0,51766541	0,42480936	0,36007329
	1,45	0,88963983	0,65333196	0,51300840	0,42152640	0,35757240
	1,50	0,87646764	0,64601313	0,50832906	0,41820293	0,35502914
	1,55	0,86358892	0,63874352	0,50362975	0,41484181	0,35244600
	1,60	0,85098268	0,63152153	0,49891292	0,41144587	0,34982546
	1,70	0,82651810	0,61721668	0,48943658	0,40456058	0,34448180
0,30	0,30	5,7052379	2,5306943	1,3588861	0,87728687	0,64941800
	0,40	4,0281081	1,9972520	1,1852904	0,81861307	0,62819435
	0,50	3,1967533	1,7217300	1,0900793	0,78341095	0,61367827
	0,60	2,7061863	1,5509052	1,0267271	0,75756533	0,60160301
	0,66	2,4767617	1,4672285	0,99367067	0,74294756	0,59413483
	0,70	2,3810682	1,4313090	0,97893618	0,73613238	0,59049018
	0,80	2,1470283	1,3401506	0,93974609	0,71701423	0,57973031
	0,90	1,9679239	1,2663055	0,90576292	0,69920467	0,56904857
	1,00	1,8243591	1,2037830	0,87516877	0,68218125	0,55831857
	1,10	1,7051058	1,1491077	0,84692025	0,66565936	0,54748665
	1,20	1,6032624	1,1001420	0,82038667	0,64948067	0,54653721
	1,25	1,5574127	1,0773493	0,80763283	0,64149084	0,53101952
	1,30	1,5143752	1,0555075	0,79517142	0,63355773	0,52547543
	1,33	1,4870778	1,0414227	0,78701201	0,62829815	0,52176586
	1,35	1,4738145	1,0345132	0,78297402	0,62567671	0,51990732
	1,40	1,4354509	1,0142802	0,77101744	0,61784461	0,51431793
1,45	1,3990485	0,99473632	0,75928269	0,61005948	0,50871026	
1,50	1,3644079	0,97582029	0,74775413	0,60232024	0,50308752	
1,55	1,3313588	0,95748015	0,73641887	0,59462656	0,49745299	
1,60	1,2997550	0,93967140	0,72526619	0,58697865	0,49181006	
1,70	1,2403959	0,90550006	0,70347444	0,57182299	0,48051253	
0,40	0,30	18,483511	8,6843767	4,4092433	2,4764871	1,5592045
	0,40	11,733571	5,9003372	3,2508696	1,9889507	1,3506367
	0,50	8,4878308	4,5332009	2,6658772	1,7332735	1,2354655
	0,60	6,6410117	3,7351099	2,3124892	1,5716033	1,1580892
	0,66	5,8066374	3,3655178	2,1434158	1,4909080	1,1173447
	0,70	5,4661291	3,2122908	2,0718697	1,4558626	1,0990839
	0,80	4,6567235	2,8404381	1,8935587	1,3655907	1,0501903
	0,90	4,0648501	2,5593024	1,7530192	1,2908296	1,0074074
	1,00	3,6116681	2,3366432	1,6370848	1,2262416	0,96861209
	1,10	3,2518631	2,1538517	1,5381397	1,1687497	0,93260079
	1,20	2,9577828	1,9995233	1,4515098	1,1164769	0,89865758
	1,25	2,8295900	1,9306315	1,4118281	1,0919053	0,88231636
	1,30	2,7117093	1,8663188	1,3741848	1,0682251	0,86634110
	1,33	2,6381889	1,8257116	1,3501083	1,0528891	0,85587885
	1,35	2,6028192	1,8060343	1,3383537	1,0453477	0,85070116
	1,40	2,5018200	1,7493188	1,3041464	1,0231998	0,83537188
1,45	2,4077896	1,6957861	1,2714045	1,0017202	0,82033333	
1,50	2,3199493	1,6451093	1,2399939	0,98085742	0,80556934	
1,55	2,2376373	1,5970098	1,2098003	0,96056785	0,79106676	
1,60	2,1602875	1,5512486	1,1807255	0,94081445	0,77681481	
1,70	2,0185928	1,4659435	1,1256048	0,90279333	0,74902905	
0,50	0,30	50,709225	27,436350	15,286973	8,8521648	5,3829384
	0,40	30,539249	17,158412	10,025411	6,1441863	3,9801986
	0,50	20,975759	12,222872	7,4576670	4,7955060	3,2634591
	0,60	15,626561	9,4192887	5,9701295	3,9946011	2,8244036
	0,66	13,249828	8,1548447	5,2864129	3,6176835	2,6116749
	0,70	12,290271	7,6394319	5,0043354	3,4598496	2,5209748
	0,80	10,041778	6,4163164	4,3242777	3,0719046	2,2928359
	0,90	8,4360213	5,5246002	3,8157172	2,7728371	2,1106510
	1,00	7,2367192	4,8442475	3,4175992	2,5316058	1,9586859
	1,10	6,3086099	4,3062909	3,0947227	2,3302691	1,8278454
0,60	0,30	119,54662	74,973348	47,619307	30,710633	20,174646
	0,40	69,928445	44,817193	29,238579	19,472217	13,279451
	0,50	46,583391	30,508596	20,425680	14,015036	9,8798430
	0,60	33,649968	22,500531	15,431038	10,874713	7,8874488
	0,66	27,957722	18,941399	13,184333	9,4414778	6,9623047
	0,70	25,673852	17,504439	12,270286	8,8530166	6,5783365
	0,80	20,366871	14,137943	10,107379	7,4438830	5,6460139
	0,90	16,630356	11,735744	8,5389074	6,4024667	4,9418051
1,00	13,882247	9,9444378	7,3499554	5,5979329	4,3860407	
1,10	11,790088	8,5615604	6,4169900	4,9548246	3,9326299	
0,70	0,30	249,77524	179,53109	129,85103	94,566381	69,397648
	0,40	143,28686	104,29872	76,596125	56,791392	42,544993
	0,50	93,433335	68,870151	51,337027	38,721376	29,571249
	0,60	65,989125	49,231034	37,216725	28,518562	22,160182
	0,66	53,988966	40,587180	30,952457	23,949783	18,805492
	0,70	49,195288	37,119932	28,427197	22,097258	17,436117

b) Integrale für m= 5 bis 9

x	z	$\int \frac{ \xi ^5 d\xi}{N}$	$\int \frac{\xi^6 d\xi}{N}$	$\int \frac{ \xi ^7 d\xi}{N}$	$\int \frac{\xi^8 d\xi}{N}$	$\int \frac{ \xi ^9 d\xi}{N}$
0,70	0,80	38,123594	29,068951	22,525924	17,735713	14,184507
	0,90	30,410194	23,411554	18,336548	14,602674	11,817424
	1,00	24,804078	19,263798	15,233502	12,254810	10,020327
0,80	0,30	472,92071	384,14971	313,08597	256,03982	210,12457
	0,40	266,41394	217,82824	178,94351	147,69726	122,49295
	0,50	170,16576	139,99776	115,86646	96,461455	80,779349
	0,60	117,51269	97,228621	81,016699	67,974381	57,418002
	0,66...	94,648176	78,581149	65,748375	55,423144	47,058868
	0,70	85,558724	71,150011	59,646047	50,389739	42,888579
	0,80	64,709921	54,053424	45,555862	38,719088	33,173525
	0,90	50,364458	42,235012	35,761647	30,554912	26,328692
	0,90	0,02	188958,26	170083,15	153097,78	137812,53
0,05		30221,335	27213,919	24509,002	22075,825	19886,804
0,075		13419,480	12089,617	10894,284	9819,5856	8853,1068
0,10		7536,9300	6793,4732	6125,7536	5525,8034	4986,5330
0,15		3332,8209	3007,2258	2715,3661	2453,5410	2218,4893
0,20		1860,1027	1680,0446	1519,0150	1374,8297	1245,5846
0,25		1178,0070	1064,8847	963,97874	873,82078	793,14499
0,30		807,45661	730,41639	661,88803	600,80112	546,24296
0,40		439,58658	397,97039	361,17469	328,53936	299,51333
0,50		270,40331	244,83660	222,37435	202,55774	185,01114
0,60		179,62196	162,56829	147,68171	134,61964	123,10653
0,66...		141,00413	127,54832	115,85261	105,62731	96,641970
0,70		125,86264	113,81424	103,36406	94,244050	86,242063
0,80	91,767092	82,884412	75,228180	68,581699	62,775955	
0,95	0,02	247443,08	235085,40	223349,76	212204,55	201619,76
	0,05	39437,173	37472,466	35609,117	33841,649	32164,915
	0,075	17423,524	16556,409	15735,313	14957,580	14220,736
	0,10	9719,3210	9235,3601	8777,9379	8345,4089	7936,2571
	0,15	4220,8897	4009,3174	3810,2162	3622,6956	3445,9523
	0,20	2303,5678	2186,4813	2076,8338	1974,0218	1877,5114
	0,25	1423,1010	1349,2997	1280,5441	1216,3768	1156,4002
	0,30	950,81804	900,27679	853,43983	809,93791	769,45472
	0,40	492,94454	465,19402	439,74798	416,33868	394,74252
0,50	290,80935	273,40739	257,61241	243,21445	230,04182	
0,60	186,83486	174,96620	164,29680	154,65470	145,90178	
0,96	0,02	260628,47	250213,20	240219,07	230628,77	221425,93
	0,05	41445,112	39789,667	38203,797	36684,353	35228,356
	0,075	18252,316	17521,537	16822,829	16154,590	15515,321
	0,10	10139,271	9731,1014	9341,7362	8970,1353	8615,3408
	0,15	4358,0973	4179,0998	4009,2424	3847,9158	3694,5729
	0,20	2351,5869	2252,0292	2158,0968	2069,3519	1985,4093
	0,25	1436,9755	1373,8237	1314,5938	1258,9392	1206,5603
	0,30	950,87416	907,31872	866,71137	828,76284	793,22688
	0,40	485,91303	461,64467	439,28027	418,60020	399,42201
0,50	284,18767	268,75808	254,69335	241,81591	229,98122	
0,97	0,02	274242,05	266016,43	258042,45	250312,13	242817,82
	0,05	43412,982	42104,759	40839,320	39615,064	38430,474
	0,075	19000,677	18422,119	17863,878	17325,065	16804,853
	0,10	10473,347	10149,199	9837,3367	9537,1369	9248,0312
	0,15	4423,1136	4279,6258	4142,4616	4011,2140	3885,5210
	0,20	2346,4743	2265,6924	2188,9940	2116,0644	2046,6298
	0,25	1413,7248	1361,7990	1312,8329	1266,5647	1222,7706
	0,30	925,49991	889,20971	855,21494	823,28927	793,24175
	0,40	466,93164	446,21576	427,05248	409,26154	392,69434
0,50	271,68456	258,24499	245,95464	234,66325	224,24923	
0,98	0,02	287976,21	282201,38	276547,12	271010,70	265589,45
	0,05	45057,806	44134,889	43234,036	42354,541	41495,746
	0,075	19431,733	19020,192	18619,858	18230,271	17851,010
	0,10	10534,415	10301,225	10075,245	9856,1149	9643,5111
	0,15	4312,1572	4206,0444	4104,0351	4005,8576	3911,2749
	0,20	2235,7251	2174,2289	2115,5813	2059,5549	2005,9551
	0,25	1327,8788	1287,2723	1248,8420	1212,3888	1177,7449
	0,30	862,53930	833,48002	806,17608	780,44938	756,15135
	0,40	433,28570	416,05581	400,07941	385,20801	371,32020
0,50	252,74799	241,25159	230,71662	221,01559	212,04604	
0,99	0,02	299370,66	296312,25	293289,42	290301,57	287348,14
	0,05	44629,864	44122,638	43623,899	43133,357	42650,752
	0,075	18404,608	18168,023	17936,579	17710,033	17488,173
	0,10	9625,9316	9485,3396	9348,5102	9215,2266	9085,3008
	0,15	3785,0256	3715,3309	3648,1635	3583,3361	3520,6894
	0,20	1938,4701	1895,2946	1854,0544	1814,5812	1776,7337
	0,25	1152,2499	1122,2620	1093,8500	1066,8600	1041,1643
	0,30	753,07755	730,76806	709,78793	689,99517	671,27291
	0,40	384,52123	370,54868	357,58291	345,50067	334,20217
0,50	227,78473	218,11564	209,24804	201,07328	193,50469	

b) Integrale für m= 5 bis 9

x	z	$\int \frac{ \xi ^5 d\xi}{N}$	$\int \frac{\xi^6 d\xi}{N}$	$\int \frac{ \xi ^7 d\xi}{N}$	$\int \frac{\xi^8 d\xi}{N}$	$\int \frac{ \xi ^9 d\xi}{N}$
1,00	0,01	636060,50	635286,99	634517,59	633752,13	632990,48
	0,02	158053,59	157676,64	157303,12	156932,86	156565,73
	0,05	24844,500	24703,042	24564,131	24427,609	24293,346
	0,075	10884,950	10794,858	10706,934	10621,029	10537,015
	0,10	6037,6890	5972,8828	5909,9856	5848,8514	5789,3580
	0,15	2611,5304	2571,4772	2532,9806	2495,9035	2460,1319
	0,20	1430,9920	1402,9442	1376,2160	1350,6781	1326,2241
	0,25	892,87497	871,81908	851,90798	833,01984	815,05495
	0,30	604,94219	588,41299	572,89279	558,26638	544,44024
	0,40	324,50811	313,41000	303,12111	293,53809	284,57810
	0,50	198,49133	190,47182	183,12037	176,34384	170,06837

c) Integrale für m= 10

x	z	$\int \frac{\xi^{10} d\xi}{N}$	x	z	$\int \frac{\xi^{10} d\xi}{N}$	x	z	$\int \frac{\xi^{10} d\xi}{N}$
0,00	0,30	0,24929872	0,20	1,35	0,31443601	0,50	0,90	1,6731175
	0,40	0,24875583		1,40	0,31246709		1,00	1,5732381
	0,50	0,24806105		1,45	0,31045641		1,10	1,4844358
	0,60	0,24721679		1,50	0,30840604	0,60	0,30	13,549780
	0,66...	0,24657228		1,55	0,30631804		0,40	9,3027762
	0,70	0,24622589		1,60	0,30419445		0,50	7,1703286
	0,80	0,24509167		1,70	0,29984848		0,60	5,8930857
	0,90	0,24381788	0,30	0,30	0,52359349		0,66	5,2878740
	1,00	0,24240863		0,40	0,51495084		0,70	5,0335250
	1,10	0,24086842		0,50	0,50794128		0,80	4,4059955
	1,20	0,23920203		0,60	0,50129077		0,90	3,9202408
	1,25	0,23832311		0,66	0,49683291		1,00	3,5277892
	1,30	0,23741456		0,70	0,49457364		1,10	3,2005328
	1,33...	0,23679275		0,80	0,48763048	0,70	0,30	51,363943
	1,35	0,23647708		0,90	0,48040499		0,40	32,231546
	1,40	0,23551133		1,00	0,47288670		0,50	22,880715
	1,45	0,23451803		1,10	0,46508739		0,60	17,467117
	1,50	0,23349787		1,20	0,45703013		0,66	14,986197
	1,55	0,23245158		1,25	0,45291366		0,70	13,965789
	1,60	0,23137989		1,30	0,44874377		0,80	11,519480
	1,70	0,22916322		1,33	0,44593614		0,90	9,7120753
				1,35	0,44452446		1,00	8,3202220
0,10	0,30	0,26990470		1,40	0,44025978	0,80	0,30	173,07258
	0,40	0,26922877		1,45	0,43595381		0,40	102,08720
	0,50	0,26836554		1,50	0,43161058		0,50	68,045607
	0,60	0,26731886		1,55	0,42723410		0,60	48,824462
	0,66...	0,26652139		1,60	0,42282832		0,66	40,239734
	0,70	0,26609331		1,70	0,41394429		0,70	36,768959
	0,80	0,26469406	0,40	0,30	1,0948661		0,80	28,641147
	0,90	0,26312687		0,40	1,0034037		0,90	22,869463
	1,00	0,26139800		0,50	0,94917432	0,90	0,02	111677,31
	1,10	0,25951412		0,60	0,90977283		0,05	17917,195
	1,20	0,25748227		0,66	0,88765484		0,075	7983,7433
	1,25	0,25641316		0,70	0,87738398		0,10	4501,6253
	1,30	0,25530982		0,80	0,84870953		0,15	2007,3300
	1,33...	0,25455573		0,90	0,82217887		0,20	1129,6134
	1,35	0,25417323		1,00	0,79698409		0,25	720,85396
	1,40	0,25300435		1,10	0,77269029		0,30	497,42984
	1,45	0,25180416		1,20	0,74905912		0,40	273,63208
	1,50	0,25057364		1,25	0,73744883		0,50	169,42325
	1,55	0,24931378		1,30	0,72596141		0,60	112,91758
	1,60	0,24802558		1,33	0,71836803		0,66	88,710337
	1,70	0,24536817		1,35	0,71459024		0,70	79,187435
0,20	0,30	0,34260004		1,40	0,70333088		0,80	57,676741
	0,40	0,34120162		1,45	0,69218064	0,95	0,02	191566,96
	0,50	0,33952120		1,50	0,68113810		0,05	30574,066
	0,60	0,33754648		1,55	0,67020285		0,075	13522,471
	0,66...	0,33606854		1,60	0,65937524		0,10	7549,0799
	0,70	0,33528220		1,70	0,63804690		0,15	3279,2564
	0,80	0,33273916	0,50	0,30	3,4705080		0,20	1786,8256
	0,90	0,32993101		0,40	2,7379461		0,25	1100,2644
	1,00	0,32687287		0,50	2,3513035		0,30	731,71571
	1,10	0,32358077		0,60	2,1050950		0,40	374,76987
	1,20	0,32007124		0,66	1,9815144		0,50	217,95166
	1,25	0,31824019		0,70	1,9276882		0,60	137,92495
	1,30	0,31636107		0,80	1,7886285	0,96	0,02	212594,07
	1,33...	0,31508267						

c) Integrale für  $m = 10$

x	z	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi^{10} d\xi}{N}$	x	z	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi^{10} d\xi}{N}$	x	z	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi^{10} d\xi}{N}$		
0,96	0,05	33832,984	0,97	0,40	377,22596	0,99	0,20	1740,3908		
	0,075	14903,623		0,50	214,61210		0,25	1016,6544		
	0,10	8276,4653		0,98	0,02		280280,83	0,30	653,52288	
	0,15	3548,7178			0,05		40657,033	0,40	323,60480	
	0,20	1905,9264			0,075		17481,690	0,50	186,47148	
	0,25	1157,1948			0,10		9437,1405	1,00	0,01	632232,51
	0,30	759,89067			0,15		3820,0769		0,02	156201,61
	0,40	381,59158			0,20		1954,6121		0,05	24161,228
	0,50	219,06934			0,25		1144,7660		0,075	10454,783
	0,97	0,02			235552,11		0,30		733,15569	0,10
0,05		37284,114	0,40		358,31470	0,15	2425,5690			
0,075		16302,470	0,50		203,72378	0,20	1302,7643			
0,10		8969,4958	0,99	0,02	284428,59	0,25	797,92992			
0,15		3765,0574		0,05	42175,845	0,30	531,33662			
0,20		1980,4486		0,075	17270,809	0,40	276,17322			
0,25		1181,2558		0,10	8958,5670	0,50	164,23426			
0,30		764,90852		0,15	3460,0848					

Tabelle 2

Integralwerte zur Berechnung der Länge von Rotationskörpern ( $z = 0$ )

in Abhängigkeit von  $x$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi^m d\xi}{(x-\xi)^2}$$

x	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{N}$	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ \xi  d\xi}{N}$	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi^2 d\xi}{N}$	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ \xi ^3 d\xi}{N}$	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi^4 d\xi}{N}$
1,001	499999,88	499500,82	499006,98	498517,79	498032,56
1,0015	222222,10	221889,51	221562,13	221238,81	220919,05
1,002	124999,88	124750,62	124506,28	124265,73	124028,47
1,004	31249,875	31125,622	31005,593	30888,688	30774,428
1,006	13888,765	13806,176	13727,412	13651,392	13577,655
1,008	7812,3760	7750,6191	7692,4034	7636,6698	7582,9693
1,010	4999,8762	4950,6176	4904,6820	4861,0286	4819,2206
1,015	2222,0991	2189,5028	2159,8365	2132,1000	2105,8838
1,020	1249,8775	1225,6103	1203,9975	1184,0754	1165,4568
1,030	555,43422	589,49212	525,82287	513,52541	502,24991
1,040	312,37985	300,59629	290,82148	282,20779	274,43544
1,050	199,88102	190,58950	183,10679	176,63206	170,87069
1,060	138,77106	131,13841	125,15508	120,06194	115,58594
x	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ \xi ^5 d\xi}{N}$	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi^6 d\xi}{N}$	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ \xi ^7 d\xi}{N}$	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi^8 d\xi}{N}$	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ \xi ^9 d\xi}{N}$
1,001	497550,96	497072,75	496597,74	496125,78	495656,73
1,0015	220602,54	220289,04	219978,36	219670,36	219364,90
1,002	123794,18	123562,64	123333,66	123107,09	122882,82
1,004	30662,513	30552,727	30444,901	30338,899	30234,606
1,006	13505,912	13435,959	13367,637	13300,819	13235,399
1,008	7531,0254	7480,6422	7431,6700	7383,9890	7337,5002
1,010	4778,9917	4740,1543	4702,5659	4666,1132	4630,7031
1,015	2080,9423	2057,1053	2034,2454	2012,2624	1991,0751
1,020	1147,9135	1131,2894	1115,4689	1100,3620	1085,8966
1,030	491,79556	482,02802	472,84969	464,18600	455,97783
1,040	267,32498	260,75854	254,65186	248,94143	243,57756
1,050	165,66058	160,89691	156,50580	152,43220	148,63355
1,060	111,57942	107,94826	104,62692	101,56709	98,731750
x	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi^{10} d\xi}{N}$	x	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi^{10} d\xi}{N}$	x	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi^{10} d\xi}{N}$
1,001	495190,48	1,008	7292,1200	1,040	238,52031
1,0015	219061,87	1,010	4596,2574	1,050	145,07594
1,002	122660,72	1,015	1970,6156	1,060	96,091672
1,004	30131,925	1,020	1072,0128		
1,006	13171,286	1,030	448,17714		

jenigen Wert  $z_m$  gilt, der aus  $z_0$  durch Multiplikation mit  $\frac{m}{8}$  entsteht. Beispiel: Es sei  $L/B = 4$ ; dann gilt

$$z_4 = \frac{4}{8} z_0 = 0,5 z_0$$

Das bedeutet, daß in diesem Falle die in der Tabelle 1 angegebenen  $z$ -Werte halbiert werden und dann gleich den Werten  $z_4$  für  $L/B = 4$  sind. So gelten die Integralwerte für  $z_0 = 1$  nun für  $z_4 = 0,5$ . Da aber die Breite in der Mitte, bei  $x = 0$  immer gleich Eins sein muß, ist hieraus ersichtlich, daß man im Falle  $L/B = 4$  die Integralwerte bis  $z_0 = 2$

benötigen würde. Somit wird klar, daß man den Umfang der Tabelle von vornherein so festlegen muß, daß man damit alle gewünschten L/B-Verhältnisse berücksichtigen kann. Die Tabelle 1 ist in der Art zusammengestellt, daß man annehmen kann  $5 \leq L/B \leq 20$ . Für  $L/B = 4$  reicht also auch diese Tabelle nicht aus, obgleich sie gegenüber der ursprünglichen Tabelle von Amtsberg [1] erheblich erweitert ist. Selbstverständlich ist auch in dem Faktor vor dem Integral in (7c) das für den betreffenden Fall gültige L/B-Verhältnis einzusetzen.

Die Breitenkorrektur  $\kappa$ , bei der auch durch Index angezeigt werden soll, für welches L/B sie gilt, wird aus der Gleichung (7c) berechnet, indem  $x = 0$  und  $z = 1$  gesetzt wird. Es müßten also für  $L/B = 8$  aus Tabelle 1 die der vorgegebenen Dipolverteilung entsprechenden Integralwerte für  $x = 0$  und  $z_8 = 1$  entnommen werden.

$$\kappa_8 = \frac{2(L/B)^2}{\int_{-1}^{+1} \frac{\eta(\xi)}{\left[ (x-\xi)^2 + \left( \frac{z_8}{8} \right) \right]^{3/2}} d\xi} \quad \text{mit } x = 0 \text{ und } z_8 = 1 \quad (17)$$

Ist  $L/B = m$ , so muß  $\kappa_m$  berechnet werden mit Hilfe der Integralwerte für  $x = 0$  und  $z_m = 1$ . Die entsprechenden Werte  $z_8$  können aus (16) bestimmt werden. Aus

$$z_8 = \frac{8}{m} z_m \quad (16a)$$

wird mit  $z_m = 1$

$$z_8 = \frac{8}{m} \quad (16b)$$

Für  $L/B = 4$  wäre also der zur Berechnung der Breitenkorrektur benötigte Wert  $z_8 = 2$ .

Die Werte  $z_8$ , die  $z_m = 1$  entsprechen, sind für  $L/B = 5, 6, 10, 12, 16$  und  $20$  in der Tabelle 1 enthalten. Sofern für andere L/B-Verhältnisse die erforderlichen  $z_8$ -Werte nicht in der Tabelle zu finden sind, ist zu interpolieren.

Der genaue Rechnungsgang wird an Hand der Beispiele eingehend erläutert.

### Die Berechnung von Rotationskörpern

Als Beispiele werden 10 verschiedene Dipolverteilungen vorgegeben, die zur Formel (18) zusammengefaßt sind:

- a)  $\eta = 1 - 1,5 \xi^2 + 0,5 \xi^4$
- b)  $\eta = 1 - 2,447 \xi^2 + 3,461 \xi^4 - 2,014 \xi^6$
- c)  $\eta = 1 - 3,197 \xi^2 + 6,667 \xi^4 - 4,470 \xi^6$
- d)  $\eta = 1 + 4,348576 \xi^2 - 16,497001 |\xi|^3 + 13,336623 \xi^4 - 2,183198 \xi^6$
- e)  $\eta = 1 + 7,122190 \xi^2 - 22,834333 |\xi|^3 + 17,373743 \xi^4 - 2,661600 \xi^6$
- f)  $\eta = 1 - 2,201597 \xi^4 - 2,956804 \xi^6 + 8,151835 \xi^8 - 3,993434 \xi^{10}$
- g)  $\eta = 1 + 3,334713 \xi^4 - 20,092792 \xi^6 + 26,279743 \xi^8 - 10,521664 \xi^{10}$
- h)  $\eta = 1 + 6,102868 \xi^4 - 28,660786 \xi^6 + 35,343697 \xi^8 - 13,785779 \xi^{10}$
- i)  $\eta = 1 - 2,7 \xi^2 + 2,4 |\xi|^3 - 0,7 \xi^4$
- k)  $\eta = 1 - 2,025 \xi^2 + 1,55 \xi^4 - 0,525 \xi^6$

Derartige Polynome werden in Polynomfamilien eingeteilt, d. h. sämtliche Polynome mit den gleichen Potenzen von  $\xi$  gehören zu einer Polynomfamilie; in unserem Falle gehören beispielsweise die Polynome f), g), und h) zur gleichen Familie 4, 6, 8, 10. Innerhalb einer Familie erscheinen als wichtige Parameter der Schärfegrad  $\varphi$  und die Eintrittstangente  $t$  für den Schärfegrad gilt

$$\varphi = \frac{1}{0} \int \eta d\xi \quad (19)$$

und für die Eintrittstangente

$$t = - \frac{d\eta(1)}{d\xi} \quad (20)$$

Für f) ergibt sich  $\varphi(\eta) = 0,680$ ,  $t(\eta) = 1,267$ , für g)  $\varphi(\eta) = 0,760$ ;  $t(\eta) = 2,197$  und für h)  $\varphi(\eta) = 0,800$ ;  $t(\eta) = 2,661$ . Ein Polynom mit drei Potenzen ist durch die Angabe dieser Potenzen, des Schärfegrades  $\varphi$  und der Eintrittstangente  $t$  eindeutig bestimmt, während bei Vorhanden-

sein von 4 Potenzen hierdurch eine Kurvenschar charakterisiert ist. Zur eindeutigen Bestimmung eines solchen Polynoms ist ein weiterer Parameter notwendig, der sich aus der Optimalbedingung ergibt, da es sich in diesen Fällen um Optimalformen handelt.

In Gl. (18) sind die analytischen Ausdrücke dieser Polynome gegeben und durch die Buchstaben a), b), c), ... unterschieden und eindeutig bestimmt; deshalb ist hier und in der Folge bei Darstellung der Beispiele durch Potenzen und Parameter der letztgenannte Parameter, der in den Fällen d) bis h) bekannt sein muß, fortgelassen und einfach geschrieben:

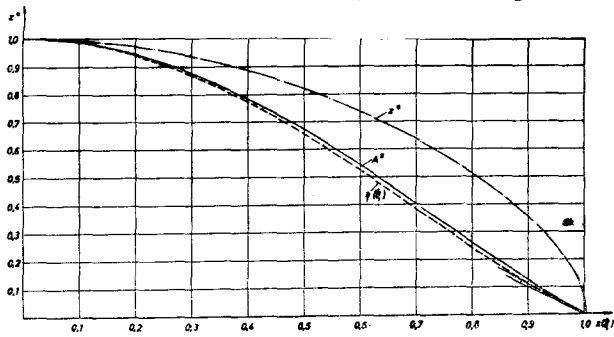
$$\begin{aligned} \text{f)} &< 4,6,8,10; 0,680; 1,267 > \\ \text{g)} &< 4,6,8,10; 0,760; 2,197 > \\ \text{h)} &< 4,6,8,10; 0,800; 2,661 > \end{aligned} \quad (18a)$$

Die hier gewählten Verteilungen stammen aus Arbeiten von Weinblum: a), b) und c) sind dem Beitrag [5] entnommen, i) und k) der Veröffentlichung [8] und die übrigen Beispiele aus der Untersuchung [4]. Es ist noch zu erwähnen, daß einige dieser Polynome von Weinblum aufgestellte Optimal- bzw. Minimalformen darstellen. Das bedeutet, daß diese Formen für eine bestimmte Froudesche Zahl den geringsten Wellenwiderstand ergeben. Zu diesen Minimalformen gehören die Beispiele b) bis h); b) ist Minimalform für die Froudesche Zahl  $F = 0,316$ , c) für  $F = 0,354$ , d) bis h) für  $F = 0,183$ .

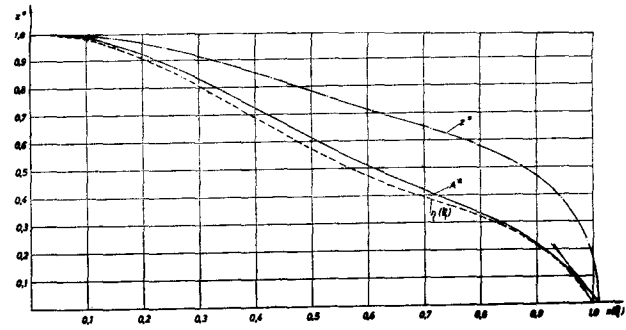
Für die Auswahl der Polynome waren die gleichen Gesichtspunkte maßgebend wie im Falle der Berechnung von Zylindern [9], nämlich einmal möglichst verschiedenartige Verteilungen zu wählen, um einen umfassenden Überblick zu geben, andererseits aber auch an Hand von Verteilungen, die der gleichen Polynomfamilie angehören, den Einfluß von  $\varphi$  und  $t$  aufzuzeigen. Deshalb sind in der vorliegenden Arbeit auch die gleichen Verteilungen gewählt worden wie dort in [9] mit Ausnahme der parabolischen Verteilung  $\eta = 1 - \xi^2$ ; da diese im Falle der Rotationskörper analytisch exakt Ellipsoide ergibt, ist sie hier nicht berücksichtigt. Es wurde ebenfalls die Verteilung  $\eta = (1 - \xi^2)^2$  fortgelassen, da hierfür Berechnungen von Amtsberg vorliegen [1]. Somit werden insgesamt 10 Beispiele behandelt. An den Ergebnissen soll dann gezeigt werden, wie weit die Übereinstimmung zwischen Spantflächenkurve und Dipolverteilung geht, welchen Einfluß der Schärfegrad  $\varphi$  und die Eintrittstangente  $t$ , ein Schwanenhals und Anschwellungen der Verteilung ausüben. Ein Schwanenhals ist durch größere  $t$ -Werte und einen Wendepunkt im vorderen Teil charakterisiert; Anschwellungen bedeuten, daß  $\eta$  nahe der Mitte Werte  $> 1$  annimmt. Die Beispiele b) und c) sind Schwanenhalsformen; d), e), g) und h) zeigen Anschwellungen. Auf die Spantflächen übertragen bedeutet ein Schwanenhals das Vorhandensein eines Wulstes und eine Anschwellung, daß der Hauptspant nicht in der Mitte, sondern an der Stelle der (18) größten Anschwellung liegt.

Die Verteilungen und die sich daraus ergebenden Konturen der Rotationskörper sowie deren Spantflächenkurven sind in Abb. 1 zusammengestellt, die Aufmaße für die Konturen und Spantflächen in Tab. 3. Da die Spantflächenkurven und die entsprechenden Verteilungen einander angenähert affin sind, wurden zwecks besserer Vergleichsmöglichkeit die Werte der Spantflächen normiert, d. h. durch  $\pi$  dividiert, so daß die Hauptspantfläche den Wert Eins hat, denn es gilt ja ebenfalls  $\eta(0) = 1$ . Die Rechnungen sind für das Verhältnis  $L/B = 8$  durchgeführt worden. Um aber die Benutzung der Integraltabellen für  $L/B \neq 8$  genau zu erläutern und den Einfluß von  $L/B$  auf die Konturen und Spantflächenkurven aufzuzeigen, sind im Falle e) auch die Verhältnisse  $L/B = 6, 10, 12, 20$  berücksichtigt worden. Es soll nun an Hand eines Beispiels der Rechnungsgang erklärt werden. Gewählt wird hierfür die Verteilung e), da es möglich ist, dabei auch den Fall  $L/B \neq 8$  zu behandeln, jedoch wird vorerst  $L/B = 8$  vorausgesetzt. Für die Verteilung gilt e)  $\eta = 1 + 7,122190 \xi^2 - 22,834333 |\xi|^3 + 17,373743 \xi^4 - 2,661600 \xi^6$ .

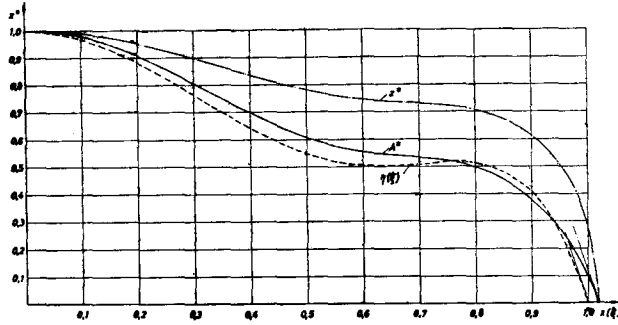
Abb. 1: Die Dipolverteilungen  $\eta(\xi)$  und die entsprechenden Konturen  $z^*(x)$  und Spantflächenkurven  $A^*(x)$  der Rotationskörper mit Angabe der Schärfegrade  $\varphi(\eta)$  der Verteilung, der Schärfegrade  $\varphi_{A^*}$  der Spantflächenkurven, der Eintrittstangenten  $t(\eta)$  der Verteilung und der Eintrittstangenten  $t_{A^*}$  der Spantflächenkurven



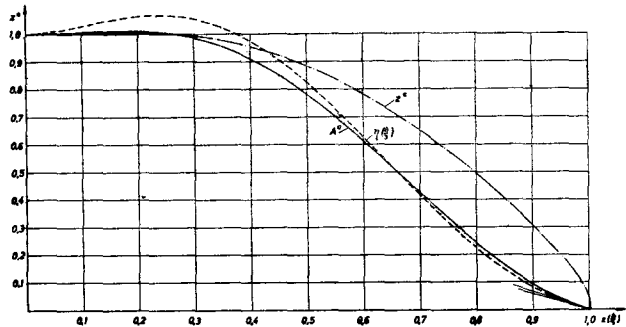
a) Dipolverteilung:  $\eta(\xi) = 1 - 1,5\xi^2 + 0,5\xi^4$   
 $\varphi(\eta) = 0,6; t(\eta) = 1,0$   
 Rotationskörper:  $\varphi_{A^*} = 0,609; t_{A^*} \approx 1,06$   
 $L/B = 8$



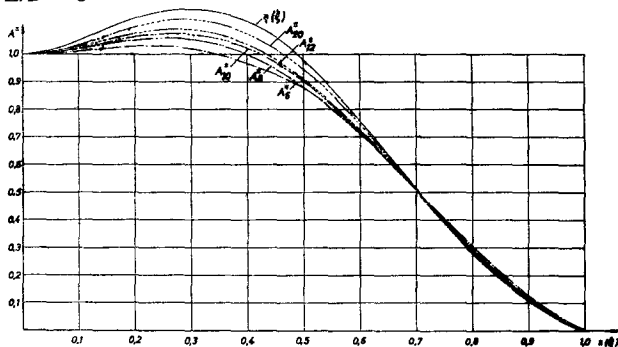
b) Dipolverteilung:  $\eta(\xi) = 1 - 2,447\xi^2 + 3,461\xi^4 - 2,014\xi^6$   
 $\varphi(\eta) = 0,588; t(\eta) = 3,13$   
 Rotationskörper:  $\varphi_{A^*} = 0,603; t_{A^*} \approx 2,50$   
 $L/B = 8$



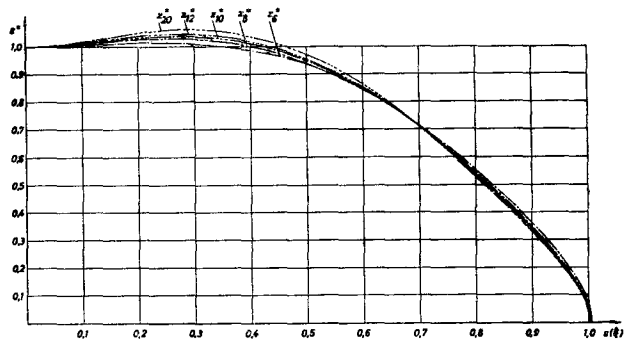
c) Dipolverteilung:  $\eta(\xi) = 1 - 3,197\xi^2 + 6,667\xi^4 - 4,470\xi^6$   
 $\varphi(\eta) = 0,629; t(\eta) = 6,546$   
 Rotationskörper:  $\varphi_{A^*} = 0,654; t_{A^*} \approx 6,11$   
 $L/B = 8$



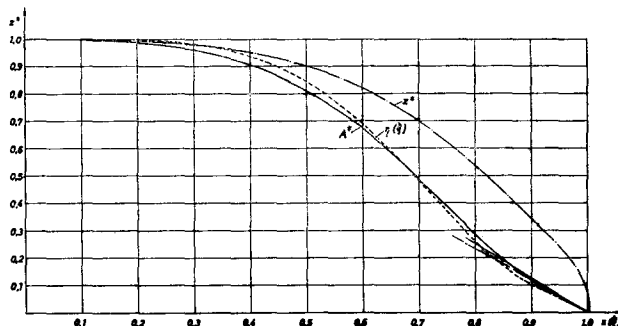
d) Dipolverteilung:  $\eta(\xi) = 1 + 4,348576\xi^2 - 16,497001|\xi|^3 + 13,336623\xi^4 - 2,188198\xi^6$   
 $\varphi(\eta) = 0,68; t(\eta) = 0,577$   
 Rotationskörper:  $\varphi_{A^*} = 0,657; t_{A^*} \approx 0,65$   
 $L/B = 8$



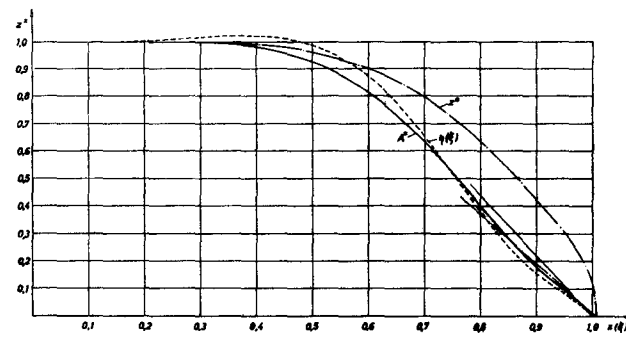
e) 1. Teil: Dipolverteilung:  $\eta(\xi) = 1 + 7,122190\xi^2 - 22,834333|\xi|^3 + 17,373743\xi^4 - 2,661600\xi^6$   
 $\varphi(\eta) = 0,76; t(\eta) = 0,733$   
 Spantflächen  $A^*(x)$  der Rotationskörper  
 für  $L/B = 6; L/B = 8; L/B = 10; L/B = 12; L/B = 20$ :  
 $\varphi_{A^* 6} = 0,703; t_{A^* 6} \approx 0,90; \varphi_{A^* 8} = 0,712; t_{A^* 8} \approx 0,89$ ;  
 $\varphi_{A^* 10} = 0,720; t_{A^* 10} \approx 0,65; \varphi_{A^* 12} = 0,727; t_{A^* 12} \approx 0,65$ ;  
 $\varphi_{A^* 20} = 0,742; t_{A^* 20} \approx 0,65$



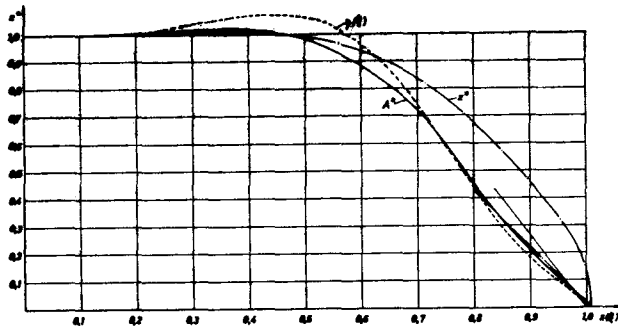
e) 2. Teil: Konturen der Rotationskörper entsprechend der Dipolverteilung  $\eta = 1 + 7,122190\xi^2 - 22,834333|\xi|^3 + 17,373743\xi^4 - 2,661600\xi^6$   
 für  $L/B = 6; L/B = 8; L/B = 10; L/B = 12; L/B = 20$



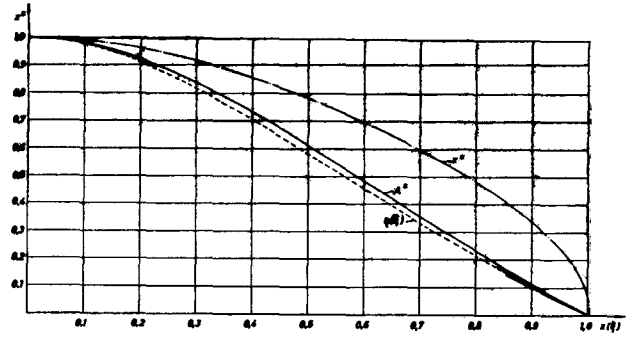
f) Dipolverteilung:  $\eta(\xi) = 1 - 2,201597\xi^4 - 2,956804\xi^6 + 8,151835\xi^8 - 3,993434\xi^{10}$   
 $\varphi(\eta) = 0,68; t(\eta) = 1,267$   
 Rotationskörper:  $\varphi_{A^*} = 0,670; t_{A^*} \approx 1,13$   
 $L/B = 8$



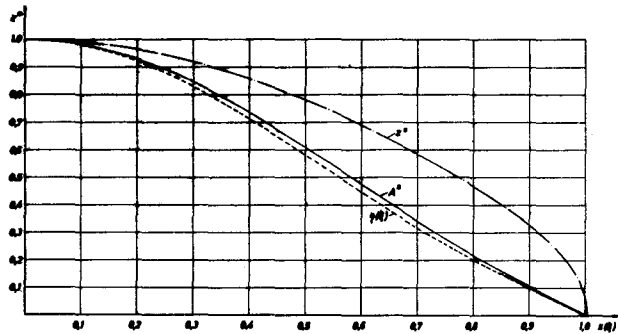
g) Dipolverteilung:  $\eta(\xi) = 1 + 3,334713\xi^4 - 20,092792\xi^6 + 26,279743\xi^8 - 10,521664\xi^{10}$   
 $\varphi(\eta) = 0,76; t(\eta) = 2,197$   
 Rotationskörper:  $\varphi_{A^*} = 0,739; t_{A^*} \approx 1,76$   
 $L/B = 8$



h) Dipolverteilung:  $\eta(\xi) = 1 + 6,102868\xi^4 - 28,660786\xi^5 + 35,343697\xi^6 - 13,785779\xi^{10}$   
 $\varphi(\eta) = 0,80; \kappa(\eta) = 2,661$   
 Rotationskörper:  $\varphi_{A^*} = 0,774; t_{A^*} \approx 2,05$   
 $L/B = 8$



i) Dipolverteilung:  $\eta(\xi) = 1 - 2,7\xi^2 + 2,4|\xi|^3 - 0,7\xi^4$   
 $\varphi(\eta) = 0,56; \kappa(\eta) = 1,0$   
 Rotationskörper:  $\varphi_{A^*} = 0,578; t_{A^*} \approx 1,08$   
 $L/B = 8$



Links:  
 k) Dipolverteilung:  $\eta(\xi) = 1 - 2,025\xi^2 + 1,550\xi^4 - 0,525\xi^5$   
 $\varphi(\eta) = 0,56; \kappa(\eta) = 1,0$   
 Rotationskörper:  $\varphi_{A^*} = 0,573; t_{A^*} \approx 1,0$   
 $L/B = 8$

Tabelle 3.

Die Aufmaße der Konturen der Rotationskörper  $z^*$  und der zugehörigen normierten Spantflächenkurven  $A^* = z^{*2}$

Beispiel	L/B	L/2	x	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	0,95	0,97	0,98	0,99	1,00	
a	8	1,0042	$z^*$	0,9991	0,9972	0,9958	0,9946	0,9931	0,9917	0,9904	0,9892	0,9881	0,9871	0,9862	0,9854	0,9847	0,9841	0,9836
			$A^*$	0,9982	0,9945	0,9916	0,9885	0,9851	0,9814	0,9774	0,9731	0,9686	0,9639	0,9590	0,9540	0,9488	0,9434	0,9378
b	8	1,0108	$z^*$	0,9992	0,9959	0,9912	0,9851	0,783	0,774	0,649	0,578	0,470	0,370	0,274	0,187	0,108	0,036	0,000
			$A^*$	0,9984	0,9920	0,9822	0,774	0,615	0,510	0,421	0,334	0,221	0,137	0,097	0,075	0,053	0,028	0,000
c	8	1,0499	$z^*$	0,9990	0,9952	0,9897	0,9835	0,781	0,745	0,731	0,707	0,646	0,509	0,427	0,327	0,230	0,137	0,044
			$A^*$	0,9980	0,9906	0,9805	0,9697	0,610	0,535	0,534	0,500	0,379	0,259	0,182	0,122	0,075	0,044	0,028
d	8	1,0024	$z^*$	1,0004	1,0006	0,9993	0,9954	0,9885	0,785	0,653	0,496	0,307	0,202	0,153	0,122	0,090	0,040	0,000
			$A^*$	1,0008	1,0012	0,9986	0,9910	0,782	0,616	0,426	0,246	0,094	0,041	0,023	0,015	0,008	0,002	0,000
e	8	1,0058	$z^*$	1,0005	1,0014	1,0010	0,9983	0,9936	0,845	0,713	0,553	0,359	0,240	0,186	0,156	0,119	0,070	0,000
			$A^*$	1,0010	1,0028	1,0020	0,9968	0,876	0,744	0,509	0,308	0,129	0,058	0,025	0,020	0,014	0,005	0,000
e	8	1,0090	$z^*$	1,0010	1,0025	1,0026	1,000	0,9938	0,845	0,712	0,545	0,345	0,228	0,174	0,142	0,105	0,049	0,000
			$A^*$	1,0020	1,0051	1,0053	1,000	0,880	0,744	0,507	0,297	0,119	0,052	0,030	0,020	0,011	0,002	0,000
e	20	1,0049	$z^*$	1,0010	1,0031	1,0035	1,001	0,9949	0,848	0,711	0,544	0,340	0,227	0,169	0,135	0,097	0,047	0,000
			$A^*$	1,0020	1,0063	1,0074	1,002	0,901	0,749	0,508	0,292	0,116	0,049	0,029	0,018	0,009	0,001	0,000
e	12	1,0073	$z^*$	1,0014	1,0037	1,0044	1,0018	0,994	0,853	0,713	0,536	0,344	0,218	0,164	0,133	0,095	0,031	0,000
			$A^*$	1,0028	1,0075	1,0080	1,0036	0,910	0,736	0,508	0,287	0,112	0,048	0,027	0,018	0,009	0,001	0,000
e	20	1,0004	$z^*$	1,0017	1,0040	1,0047	1,0025	0,9940	0,843	0,711	0,530	0,327	0,212	0,159	0,127	0,084	0,000	0,000
			$A^*$	1,0034	1,0080	1,0086	1,0041	0,941	0,745	0,506	0,281	0,107	0,045	0,025	0,016	0,009	0,000	0,000
f	8	1,0047	$z^*$	0,9999	0,9988	0,9980	0,9963	0,9908	0,820	0,699	0,535	0,342	0,247	0,193	0,144	0,104	0,074	0,044
			$A^*$	0,9998	0,9976	0,9960	0,9928	0,810	0,672	0,489	0,286	0,117	0,058	0,037	0,027	0,016	0,005	0,000
g	8	1,0074	$z^*$	1,0001	0,9999	0,9988	0,9960	0,9863	0,901	0,796	0,654	0,423	0,305	0,249	0,205	0,174	0,145	0,115
			$A^*$	1,0002	0,9998	0,9986	0,9940	0,827	0,672	0,484	0,281	0,119	0,058	0,037	0,027	0,016	0,005	0,000
h	8	1,0087	$z^*$	1,0001	1,0004	1,0007	1,0008	0,9991	0,9940	0,839	0,676	0,458	0,339	0,274	0,230	0,195	0,155	0,115
			$A^*$	1,0002	1,0008	1,0014	1,0016	0,9982	0,884	0,702	0,467	0,210	0,111	0,075	0,057	0,038	0,018	0,000
i	8	1,0063	$z^*$	0,9990	0,9961	0,9945	0,9926	0,9891	0,646	0,538	0,482	0,339	0,249	0,193	0,161	0,122	0,066	0,000
			$A^*$	0,9980	0,9924	0,9897	0,9853	0,610	0,464	0,368	0,292	0,145	0,059	0,037	0,026	0,015	0,004	0,000
k	8	1,0041	$z^*$	0,9997	0,9965	0,9920	0,9858	0,787	0,690	0,586	0,448	0,329	0,236	0,187	0,158	0,122	0,065	0,000
			$A^*$	0,9994	0,9931	0,9846	0,736	0,610	0,476	0,343	0,219	0,108	0,056	0,035	0,025	0,015	0,004	0,000

Zunächst ist die Breitenkorrektur  $\kappa$  zu berechnen. Dies geschieht nach Amtsberg [1] mit Hilfe der Gleichung (17):

$$\kappa_8 = \frac{2 \cdot 64}{\int_{-1}^{+1} \frac{\eta(\xi) d\xi}{\left[ (x-\xi)^2 + \left( \frac{z_8}{8} \right)^2 \right]^{3/2}}}$$

mit  $x = 0, z_8 = 1$  (17a)

Für  $\eta(\xi)$  wird die Funktion des Beispiels e) eingesetzt und damit das Integral im Nenner von (17a) in eine Reihe von Integralen

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\xi^n d\xi}{\left[ (x-\xi)^2 + \left( \frac{z_8}{8} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

zerlegt, deren Werte für  $x = 0$

und  $z_8 = 1$  aus der Tab. 1 entnommen und mit den entsprechenden Koeffizienten der Verteilung multipliziert werden. Es ergibt sich

$$\kappa_8 = \frac{128}{131,82461} = 0,972463$$

Das Ergebnis zeigt, daß hier der Korrekturfaktor kleiner als Eins wird; das ist aber ein Ausnahmefall, der nur eintritt bei Verteilungen, die große Anschwellungen aufweisen; im allgemeinen wird  $\kappa > 1$  sein.

Nachdem die Breitenkorrektur ermittelt ist, können die Ordinaten der Kontur bestimmt werden. Es sind die Wurzeln der Gleichung (7c) für verschiedene  $x$ -Werte im Intervall  $0 \leq x \leq 1$  zu bestimmen, d. h. es sind diejenigen Werte  $z_8$  zu suchen, die für die einzelnen  $x$ -Werte die Gleichung (7c) befriedigen. Eine direkte Auflösung der Gleichung nach  $z_8$  ist nicht möglich, deshalb muß die Berechnung entweder numerisch durch schrittweise Näherung erfolgen oder durch das von Amtsberg [1] hierfür eingeführte Verfahren der graphischen Interpolation. Hier wird der letztere Weg gewählt. Zur Anwendung dieser Methode sind die Tab. 1 und 2 aufgestellt. Es werden also für verschiedene Wertepaare  $x, z_8$  die Integralwerte

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\eta(\xi) d\xi}{\left[ (x-\xi)^2 + \left(\frac{z_8}{8}\right)^2 \right]^{3/2}}$$

bestimmt, indem die Verteilung

$\eta(\xi)$  in die verschiedenen Potenzen von  $\xi$  zerlegt wird, für die dann die entsprechenden Werte aus der Tabelle 1 entnommen und mit den zugehörigen Koeffizienten multipliziert werden. Die so erhaltenen Integralwerte werden mit dem

Vorfaktor, in diesem Falle  $\frac{\kappa_8}{128}$  multipliziert und die Ergebnisse über  $z_8$  mit  $x$  als Parameter aufgetragen. Die

Schnittpunkte der Kurven mit der Geraden

$$\frac{\kappa_8}{128} \int_{-1}^{+1} \frac{\eta(\xi) d\xi}{\left[ (x-\xi)^2 + \left(\frac{z_8}{8}\right)^2 \right]^{3/2}} = 1$$

geben die zu den betreffenden Parametern  $x$  zugehörigen Ordinaten  $z_8$  der Kontur an; sie sollen mit  $z_8^*$  bezeichnet werden. Zur Durchführung der Rechnung wird ein Rechenschema angelegt (Tab. 4). Die erste Spalte enthält die Werte  $z_8$  und die folgenden Spalten die Werte

$$\frac{\kappa_8}{128} \int_{-1}^{+1} \frac{\eta(\xi) d\xi}{\left[ (x-\xi)^2 + \left(\frac{z_8}{8}\right)^2 \right]^{3/2}}$$

in Abhängigkeit vom Parameter  $x$ ,

**Tabelle 4**

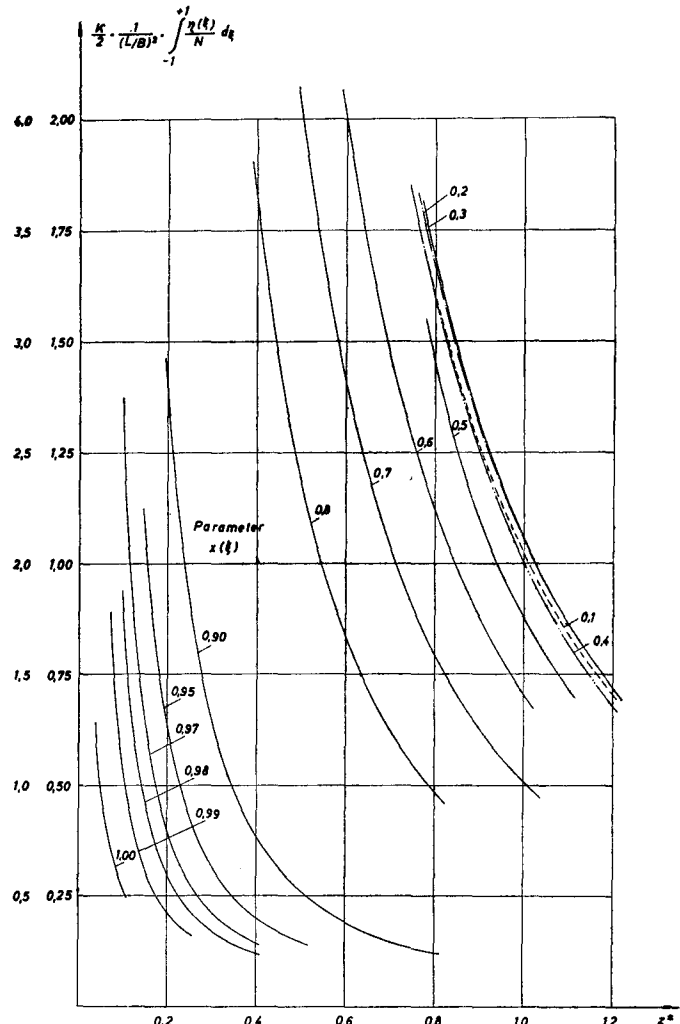
Ausschnitt aus dem Rechenschema zur Bestimmung der Kontur eines Rotationskörpers (Beispiel e,  $L/B = 8$ ).

$x$	0,1	0,2	...	0,98
$z_8$	$\frac{\kappa_8}{128} \int_{-1}^{+1} \frac{\eta(\xi) d\xi}{\left[ (x-\xi)^2 + \left(\frac{z_8}{8}\right)^2 \right]^{3/2}}$			
0,10				1,80067
0,15				0,91424
0,20				0,59082
0,25				0,43220
.				
.				
.				
.				
0,80	1,59697	1,66227		
0,90	1,26002	1,30550		
1,00	1,01871	1,05084		
1,10	0,83998	0,86284		
1,20	0,70389	0,72018		

der darüber angegeben ist. Die Zahlen einer Spalte geben also jeweils die Werte einer Kurve

$$f(z_8) = \frac{\kappa}{2(L/B)^2} \int_{-1}^{+1} \frac{\eta(\xi) d\xi}{\left[ (x-\xi)^2 + \left(\frac{z_8}{8}\right)^2 \right]^{3/2}}$$

für einen bestimmten Parameter  $x$ . Die Rechnung beginnt mit  $x = 0,1$  und wird bis  $x = 0,99$  oder  $x = 0,98$  durchgeführt. Für  $x = 0$  gilt stets  $z^* = 1$  wegen Einführung des Korrekturfaktors  $\kappa$ . Auf die Berechnung der tatsächlichen Körperlänge wird später eingegangen.



**Abb. 2**

Graphische Ermittlung der Konturpunkte des Rotationskörpers für den Fall e)  $\eta(\xi) = 1 + 7,122190\xi^2 - 22,834333|\xi|^3 + 17,373743\xi^4 - 2,661600\xi^6$ ;  $L/B = 8$

Die Werte der Tabelle 4 sind spaltenweise als Kurven aufgetragen in Abhängigkeit von  $z_8$  mit  $x = 0,1; 0,2; \dots$  als Parameter (Abb. 2). In der gleichen Zeichnung ist auch die Gerade

$$\frac{\kappa_8}{2(L/B)^2} \int_{-1}^{+1} \frac{\eta(\xi) d\xi}{\left[ (x-\xi)^2 + \left(\frac{z_8}{8}\right)^2 \right]^{3/2}} = 1$$

aufgetragen. Um

schleifende Schnitte zu vermeiden, sind die Kurven für  $x \leq 0,8$  in einem anderen Maßstab gezeichnet als für  $x > 0,8$ . An den Schnittpunkten mit der erwähnten Geraden werden die Werte  $z_8^*$  der Kontur abgelesen; sie sind in Tabelle 3 zusammengestellt. Zur vollständigen Berechnung der Kontur

gehört auch die Bestimmung der tatsächlichen Körperlänge. Dazu dient die Tabelle 2, in welcher eine Reihe von Integralwerten für  $x = 1 + \varepsilon$  und  $z_0 = 0$  zusammengestellt sind. Somit erhalten die Integrale die einfachere Form

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\xi^{2n} d\xi}{(x-\xi)^2}$$

Es werden nun in der gleichen Art wie vorher bei der Berechnung der Kontur im allgemeinen die Ausdrücke

$$\frac{\kappa_8}{128} \int_{-1}^{+1} \frac{\eta(\xi) d\xi}{\left[ (x-\xi)^2 + \left( \frac{z_0}{8} \right)^2 \right]^{3/2}} = \frac{\kappa_8}{128} \int_{-1}^{+1} \frac{\eta(\xi) d\xi}{(x-\xi)^2} \text{ für } z_0 = 0$$

gebildet und über  $x$  aufgetragen, wobei diesmal der Parameter  $z_0 = 0$  ist. Der Schnittpunkt mit der Geraden

$$\frac{\kappa_8}{128} \int_{-1}^{+1} \frac{\eta(\xi) d\xi}{(x-\xi)^2} = 1$$

ergibt die halbe Körperlänge  $\frac{L^*}{2}$ . Die Länge des Rotationskörpers soll zum Unterschied von der Länge der Dipolverteilung  $L$  mit  $L^*$  bezeichnet werden. Die Werte  $L^*/2$  sind ebenfalls in der Tab. 3 angegeben.

**Tabelle 5**

Ermittlung der Länge eines Rotationskörpers  
Beispiel e),  $L/B = 8$ .

$z_0 = 0$	$x$	1,0015	1,002	1,004	1,006	1,008
$\frac{\kappa_8}{2(L/B)^2} \int_{-1}^{+1} \frac{\eta(\xi) d\xi}{(x-\xi)^2}$		1,968	1,495	0,783	0,540	0,418

Aus der auf Grund der vorstehenden Tabelle gezeichneten Kurve (Abb. 3) erhält man für die Kontur  $L^*/2 = 1,003$ . Dies ist nur eine verhältnismäßig geringe Verlängerung gegenüber der Verteilungslänge; in den meisten Fällen tritt eine etwas größere Verlängerung auf, die beim Beispiel c) den Wert 1,019 erreicht.

Nachdem die Kontur vollständig ermittelt ist, wird die Spantflächenkurve aufgestellt. Die Querschnittsflächen eines Rotationskörpers sind gegeben durch  $F = \pi z^2$ . Wie bereits vorher erwähnt, teilen wir zwecks besseren Vergleichs mit der Dipolverteilung diese Werte durch  $\pi$  und erhalten dann die Spantflächenkurve  $A^*(x) = z^2(x)$ . Die Ordinaten der Spantflächenkurven sind für sämtliche Beispiele ebenso wie die Aufmaße der Kontur in Tab. 3 zu finden. Im Falle e), der für mehrere  $L/B$ -Verhältnisse berechnet ist, werden die Spantflächen durch Index voneinander unterschieden; beispielsweise stellt  $A_8^*(x)$  die Spantflächenkurve für  $L/B = 8$  dar.

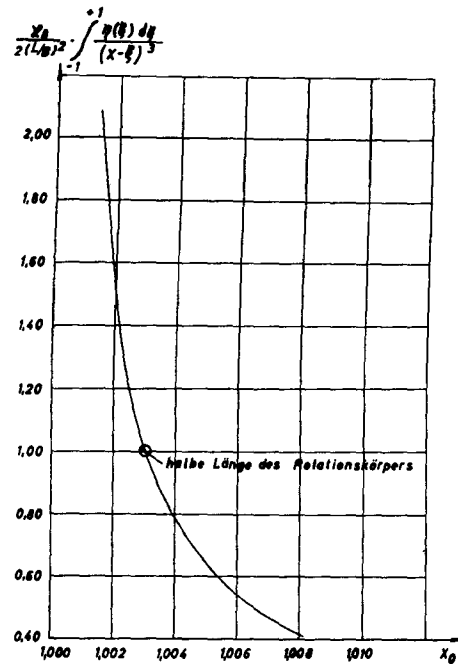
Am gleichen Beispiel e) soll nun kurz gezeigt werden, wie die Integraltabellen 1 und 2 für andere  $L/B$ -Verhältnisse benutzt werden können. Wir wählen  $L/B = 6$ .

Zuerst ist die Breitenkorrektur  $\kappa_6$  zu berechnen. Aus Gl. (16b) erhält man

$$z_0 = \frac{8}{6} = 1,33 \dots$$

Für diesen Wert  $z_0$  und  $x = 0$  ist mit Hilfe der Tab. 1 der Wert  $\kappa_6$  nach Gl. (17) zu berechnen.

$$\kappa_6 = \frac{2 \cdot 36}{\int_{-1}^{+1} \frac{\eta(\xi) d\xi}{(x-\xi)^2 + \left( \frac{z_0}{8} \right)^2}} \text{ mit } x = 0 \text{ und } z_0 = 1,33 \dots$$



**Abb. 3**

Abb. 3: Graphische Ermittlung der Länge der Rotationskörper (Beispiel e),  $L/B = 8$ )

Für Fall e) ergibt sich

$$\kappa_6 = 0,97479966$$

Damit wird der Vorfaktor der Gleichung (7c) bestimmt:

$$\frac{\kappa_6}{2} \frac{1}{(L/B)^2} = \frac{\kappa_6}{2} \cdot \frac{1}{36} \quad (21)$$

Nun kann an die Berechnung der Ordinaten der Kontur gegangen werden.

Wie bei  $L/B = 8$  werden für verschiedene Wertepaare  $x, z_0$  die Integrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\eta(\xi) d\xi}{\left[ (x-\xi)^2 + \left( \frac{z_0}{8} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

bestimmt, nun aber mit dem Vorfaktor (21) multipliziert und über  $z_0$  als Kurven mit dem Parameter  $x$  aufgetragen. An den Schnittpunkten mit der Geraden

$$\frac{\kappa_6}{2} \cdot \frac{1}{36} \int_{-1}^{+1} \frac{\eta(\xi) d\xi}{\left[ (x-\xi)^2 + \left( \frac{z_0}{8} \right)^2 \right]^{3/2}} = 1$$

sind die Ordinaten der Körperkontur  $z_0^*$  abzulesen. Aus Gl. (16a) ergeben sich die den gewählten  $z_0$ -Werten entsprechenden Größen  $z_0^*$ .

$$z_0^* = \frac{6}{8} z_0 = 0,75 z_0$$

Das Rechenschema ist das Gleiche wie in Tab. 4, nur um eine Spalte erweitert, in welcher der Wert  $z_0^*$  zu finden ist. Es soll hier kurz in Tab. 4a skizziert werden.

Die Spantflächenkurve ist gegeben durch  $A_8^*(x) = z_0^*(x)^2$ . Wenn für die gleiche Dipolverteilung Körper mit unterschiedlichen  $L/B$ -Verhältnissen berechnet werden sollen und es liegt bereits ein Rechenschema für  $L/B = 8$  vor, so kann der dort berechnete Wert für  $L/B = m \neq 8$  benutzt werden, indem man, nach Umrechnung der  $z_0$ -Werte in die entsprechenden  $z_m$ -Werte, die Größe

$$\frac{\kappa_6}{128} \int_{-1}^{+1} \frac{\eta(\xi) d\xi}{\left[ (x-\xi)^2 + \left( \frac{z_m}{8} \right)^2 \right]^{3/2}} \text{ mit } \frac{\kappa_m}{m^2} \cdot \frac{64}{\kappa_8}$$

**Tabelle 4a**

Ausschnitt aus dem Rechenschema zur Bestimmung der Kontur eines Rotationskörpers für  $L/B \neq 8$  (Beispiel e),  $L/B = 6$

x		0,1	0,2	...
$z_0$	$z_0$	$\frac{x_0}{72}$	$\int_{-1}^{+1} \frac{\eta(\xi) d\xi}{[(x-\xi)^2 + (\frac{z}{8})^2]^{3/2}}$	
0,10	0,075			
0,20	0,15			
0,30	0,225			

multipliziert. Dadurch erspart man einen Teil der Rechenzeit, wenn es sich auch nicht vermeiden lassen wird, noch zusätzliche Integrale für andere Wertepaare  $x, z_0$  zu berechnen, da bei Vorgabe eines  $L/B \neq 8$  der für die graphische Ermittlung der Kontur notwendige Bereich entweder weiter nach unten zu kleineren  $z_0$ -Werten oder aber nach oben ausgedehnt werden muß.

**Die Länge der Rotationskörper und die Eintrittstangente der Dipolverteilung**

Aus den Figuren der Abb. 1 ergibt sich, daß stets die Körperlänge größer ist als die Verteilungslänge,  $L^* > L$ . Es ist untersucht worden, ob sich ein Zusammenhang finden läßt zwischen der Körperlänge und der Eintrittstangente  $t$  der Dipolverteilung. Zugrunde gelegt wurde hierfür die Familie 2, 4, 6 mit den Schärfegraden  $\varphi = 0,56; 0,60; 0,64; 0,68; 0,72$ . Für die Formen, die sich nach Wahl verschiedener  $t$ -Werte ergeben, sind dann die halben Körperlängen  $L^*/2$  berechnet worden. Es folgt nun als Formel (22) zuerst eine Übersicht über die vorgegebenen Dipolverteilungen:

- 1a)  $< 2,4,6; 0,56; 1 >$  oder  $\eta = 1 - 2,025 \xi^2 + 1,550 \xi^4 - 0,525 \xi^6$
- 1b)  $< 2,4,6; 0,60; 1 >$  oder  $\eta = 1 - 1,5 \xi^2 + 0,5 \xi^4$
- 1c)  $< 2,4,6; 0,64; 1 >$  oder  $\eta = 1 - 0,975 \xi^2 - 0,550 \xi^4 + 0,525 \xi^6$
- 1d)  $< 2,4,6; 0,68; 1 >$  oder  $\eta = 1 - 0,450 \xi^2 - 1,60 \xi^4 + 1,050 \xi^6$
- 1e)  $< 2,4,6; 0,72; 1 >$  oder  $\eta = 1 + 0,075 \xi^2 - 2,650 \xi^4 + 1,575 \xi^6$
- 2a)  $< 2,4,6; 0,56; 2 >$  oder  $\eta = 1 - 2,40 \xi^2 + 2,80 \xi^4 - 1,40 \xi^6$
- 2b)  $< 2,4,6; 0,60; 2 >$  oder  $\eta = 1 - 1,875 \xi^2 + 1,75 \xi^4 - 0,875 \xi^6$
- 2c)  $< 2,4,6; 0,64; 2 >$  oder  $\eta = 1 - 1,35 \xi^2 + 0,70 \xi^4 - 0,35 \xi^6$
- 2d)  $< 2,4,6; 0,68; 2 >$  oder  $\eta = 1 - 0,825 \xi^2 - 0,350 \xi^4 + 0,175 \xi^6$
- 2e)  $< 2,4,6; 0,72; 2 >$  oder  $\eta = 1 - 0,30 \xi^2 - 1,40 \xi^4 + 0,70 \xi^6$
- 3b)  $< 2,4,6; 0,60; 3 >$  oder  $\eta = 1 - 2,375 \xi^2 + 3,25 \xi^4 - 1,875 \xi^6$
- 3c)  $< 2,4,6; 0,64; 3 >$  oder  $\eta = 1 - 1,85 \xi^2 + 2,20 \xi^4 - 1,35 \xi^6$
- 3d)  $< 2,4,6; 0,68; 3 >$  oder  $\eta = 1 - 1,325 \xi^2 + 1,15 \xi^4 - 0,825 \xi^6$
- 3e)  $< 2,4,6; 0,72; 3 >$  oder  $\eta = 1 - 0,8 \xi^2 + 0,10 \xi^4 - 0,30 \xi^6$
- 4a)  $< 2,4,6; 0,56; 4 >$  oder  $\eta = 1 - 3,15 \xi^2 + 5,30 \xi^4 - 3,15 \xi^6$
- 4c)  $< 2,4,6; 0,64; 4 >$  oder  $\eta = 1 - 2,10 \xi^2 + 3,20 \xi^4 - 2,10 \xi^6$
- 4e)  $< 2,4,6; 0,72; 4 >$  oder  $\eta = 1 - 1,05 \xi^2 + 1,10 \xi^4 - 1,05 \xi^6$
- 5a)  $< 2,4,6; 0,56; 6 >$  oder  $\eta = 1 - 3,90 \xi^2 + 7,80 \xi^4 - 4,90 \xi^6$
- 5c)  $< 2,4,6; 0,64; 6 >$  oder  $\eta = 1 - 2,85 \xi^2 + 5,70 \xi^4 - 3,85 \xi^6$
- 5e)  $< 2,4,6; 0,72; 6 >$  oder  $\eta = 1 - 1,80 \xi^2 + 3,60 \xi^4 - 2,80 \xi^6$  (22)

**Tabelle 6**

Zusammenstellung der Werte  $x_0^*$  für die halbe Länge der Rotationskörper der Familie  $< 2,4,6; \varphi; t >$ ;  $L/B = 8$

t	$x_0^*$ ( $\varphi = 0,56$ )	$x_0^*$ ( $\varphi = 0,60$ )	$x_0^*$ ( $\varphi = 0,64$ )	$x_0^*$ ( $\varphi = 0,68$ )	$x_0^*$ ( $\varphi = 0,72$ )
1	1,00405	1,00420	1,00435	1,00450	1,00465
2	1,00740	1,00750	1,00765	1,00785	1,00795
3	—	1,0104	1,0106	1,0108	1,0110
4	1,01315	—	1,0135	—	1,0137
6	1,01775	—	1,01815	—	1,01835

Die Aufstellung zeigt, daß von a) bis e) die verschiedenen Schärfegrade eingesetzt werden, während  $t$  jeweils konstant gehalten wird; so ist z. B. für 1a) bis 1e)  $t = 1$ , für 2a) bis 2e)  $t = 2$ , usw. Bei 3) ist der Schärfegrad  $\varphi = 0,56$  nicht berücksichtigt; und bei 4) und 5) sind nur die Verteilungen für  $\varphi = 0,56; 0,64$  und  $0,72$  gewählt worden.

Die Längen der Rotationskörper  $L^*/2$  sind auf die gleiche Art ermittelt wie in den vorhergehenden Beispielen, d. h. zuerst wurde stets die Breitenkorrektur  $\kappa$  bestimmt und danach für verschiedene Werte  $x$  und  $z = 0$  die Größe

$$\frac{\kappa}{2} \frac{1}{(L/B)^2} \int_{-1}^{+1} \frac{\eta(\xi) d\xi}{(x-\xi)^2}$$

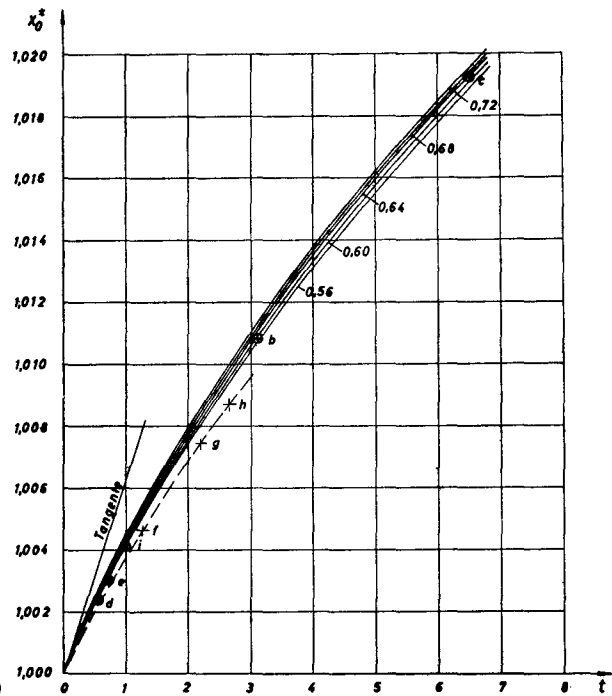
aufgetragen und daraus graphisch der Wert  $x_0^* = \frac{L^*}{2}$  er-

$$\text{mittelt, für welchen gilt: } \frac{\kappa}{2} \frac{1}{(L/B)^2} \int_{-1}^{+1} \frac{\eta(\xi) d\xi}{(x-\xi)^2} = 1$$

Bei dieser Rechnung ist stets  $L/B = 8$  gesetzt.

Die Ergebnisse sind in Tab. 6 und Abb. 4 zusammengestellt.

Aus der Tab. 6 geht hervor, daß die gegenüber der Dipolverteilung auftretende Verlängerung der Rotationskörper in starkem Maße von der Eintrittstangente  $t$  abhängt, während eine Variation des Schärfegrades nur eine geringe Änderung ergibt.



**Abb. 4:**  
Die halbe Länge der Rotationskörper als Funktion der Eintrittstangente  $t$  der Dipolverteilung

Für  $\varphi = 0,72$  ist deshalb  $\frac{L^*}{2} = x_0^*$  als Funktion von  $t$  aufgestellt worden:

$$x_0^* = 0,006215 t - 0,002240277 \dots t^2 + 0,0008090277 \dots t^3 - 0,000143055 \dots t^4 + 0,000093055 \dots t^5 \quad (23)$$

Der Tangentenwert an der Stelle  $t = 0$  ergibt sich hieraus zu

$$\frac{dx_0^*}{dt}(0) = 0,006215$$

Er ist in Abb. 4 eingezeichnet.

Selbstverständlich gilt die Gl. (23) nur für  $L/B = 8$ . Es ist nun untersucht worden, wie sich die Werte  $x_0^*$  unserer Beispiele a) bis k) in dieses Schema einfügen.

a)  $\langle 2,4;0,60;1 \rangle$  ist gleich dem bereits untersuchten Fall 1b) in (22).

b)  $\langle 2,4,6; 0,588;3,134 \rangle$ ;  $\frac{L^*}{2} = 1,0108$

c)  $\langle 2,4,6; 0,629;6,546 \rangle$ ;  $\frac{L^*}{2} = 1,01925$

Die halben Körperlängen  $L^*/2$  der Fälle b) und c), die ja ebenfalls zu der auf ihre Abhängigkeit von  $t$  untersuchten Familie 2,4,6 gehören, fügen sich sehr gut in das Kurvenbild der Abb. 3 ein.

d)  $\langle 2,3,4,6; 0,68; 0,5765 \rangle$ ;  $\frac{L^*}{2} = 1,00240$

e)  $\langle 2,3,4,6; 0,76; 0,7332 \rangle$ ;  $L/B = 8$ ;  $\frac{L^*}{2} = 1,00302$

In beiden Fällen liegen die Werte etwas tiefer als bei der Familie 2,4,6.

f)  $\langle 4,6,8,10; 0,68; 1,267 \rangle$ ;  $\frac{L^*}{2} = 1,00465$

g)  $\langle 4,6,8,10; 0,76; 2,197 \rangle$ ;  $\frac{L^*}{2} = 1,00744$

h)  $\langle 4,6,8,10; 0,80; 2,661 \rangle$ ;  $\frac{L^*}{2} = 1,0087$

Die Werte  $\frac{L^*}{2}$  der Beispiele f), g), h) sind in die Abb. 3

eingezeichnet und ohne Rücksicht auf die unterschiedlichen  $\varphi$ -Werte zu einer Kurve verbunden worden. Man erkennt daraus, daß diese Kurve für die Familie 4,6,8,10 tiefer liegt als die Kurvenschar für 2,4,6.

Die beiden letzten Beispiele

i)  $\langle 2,3,4; 0,56; 1 \rangle$  (Mod. 1337);  $\frac{L^*}{2} = 1,00419$

k)  $\langle 2,4,6; 0,56; 1 \rangle$  (Mod. 1370);  $\frac{L^*}{2} = 1,00410$

fügen sich wieder in das für die Familie 2,4,6 aufgestellte Schema ein.

Hieraus ist ersichtlich, daß sich bei der Familie 2,4,6 für den gleichen  $t$ -Wert größere Verlängerungen ergeben als bei den anderen Potenzfamilien.

Zusammenfassend sei gesagt: Es ist untersucht worden, in wie weit die Länge der Rotationskörper von der Eintrittstangente  $t$  der entsprechenden Dipolverteilung abhängt. Hierfür wurden das Verhältnis  $L/B = 8$  und die Potenzfamilie 2,4,6 zugrunde gelegt. Die Resultate sind in Tab. 6 numerisch und in Abb. 3 graphisch festgehalten. Es ergab sich eine Kurvenschar für die halben Körperlängen  $x_0^*$  als Funktion von  $t$  mit  $\varphi$  als Parameter;  $x_0^* = f(t; \varphi)$ . Wesentlich ist hierbei vor allem die Abhängigkeit von  $t$ ; der Einfluß des Schärfegrades ist nur gering. Die Kurve für  $\varphi = 0,72$  und  $L/B = 8$  kann analytisch durch den Ausdruck (23) angenähert werden.

### Die angenäherte Affinität zwischen der Verteilung und der Spantflächenkurve und die Schärfegrade

Wie bereits zu Beginn erwähnt, setzt man nach Munk [2] und Weinig [3] in 1. Näherung die Spantflächenkurve gleich der Dipolverteilung. Aus Abb. 1 ist ersichtlich, daß die Übereinstimmung im allgemeinen recht gut ist, die Näherung also im Falle der Rotationskörper durchaus gebraucht werden kann. An Hand der Beispiele d), e), g) und h) ist zu erkennen, daß sich die Dipolverteilung und die Spantflächenkurve stärker voneinander unterscheiden, wenn die Dipolverteilung Anschwellungen aufweist. Diese Anschwellungen treten in der Spantflächenkurve in abgeschwächter Form auf. Am Beispiel e) ist zu sehen, daß mit wachsendem  $L/B$  die Spantflächenkurve sich immer mehr der Kurve der Dipolverteilung nähert. Der Grad der Übereinstimmung zwischen der Spantflächenkurve und der Dipolverteilung drückt sich auch in den Schärfegraden aus. In Tab. 7 sind die Schärfegrade der Spantflächen mit denen der Verteilung verglichen. Die Spantflächenkurve liegt oberhalb der Verteilungskurve, wenn der Schärfegrad der Spantflächenkurve größer ist als der der Verteilung und zum größten Teil unterhalb der Verteilungskurve, wenn  $\varphi_A^* < \varphi(\eta)$  ist. Im letztgenannten Fall wird aber stets wegen der gegenüber der Verteilungslänge größeren Körperlänge eine Überschneidung der beiden Kurven  $\eta(\xi)$  und  $A^*(x)$  auftreten, jedoch wird der Flächeninhalt zwischen den beiden Kurven in dem Gebiet, in dem  $\eta(\xi) < A^*$  ist, bedeutend geringer sein als der Flächeninhalt zwischen den beiden Kurven im Bereich  $\eta(\xi) > A^*$  wegen  $\varphi(\eta) > \varphi_A^*$ . Die vorstehenden Ausführungen werden durch Vergleich mit den Kurven in Abb. 1 bestätigt.

Tabelle 7

Die Schärfegrade der Verteilung und der entsprechenden Spantflächen der Rotationskörper ( $L/B = 8$ )

Beispiel	k	i	b	a	c	d	f	e	g	h
$\varphi(\eta)$	0,56	0,56	0,588	0,60	0,629	0,680	0,680	0,760	0,760	0,800
$\varphi_A^*$	0,573	0,578	0,603	0,609	0,654	0,656	0,670	0,712	0,739	0,774

Nach einem Satz von Weinig [17] gilt für eine Klasse von Drehkörpern

$$\varphi_A^* < \varphi(\eta) \text{ für } \varphi(\eta) > 2/3$$

$$\varphi_A^* > \varphi(\eta) \text{ für } \varphi(\eta) < 2/3$$

Den Grenzfall bildet die parabolische Verteilung  $\eta = 1 - \xi^2$ , der das Rotationsellipsoid entspricht, dessen Spantflächenkurve eine Parabel ist; somit gilt  $\varphi_A^* = \varphi(\eta)$  für  $\varphi(\eta) = 2/3$ . Der Vergleich der Schärfegrade in Tab. 7 zeigt eine Bestätigung der Aussage von Weinig.

Die Gegenüberstellung der Werte  $\varphi_A^*$ , die sich bei der gleichen Dipolverteilung für unterschiedliche  $L/B$ -Verhältnisse ergeben (Beispiel e) läßt erkennen, daß sich der Satz von Weinig nicht auf  $L/B = 8$  beschränkt, sondern allgemein gültig ist und daß bei wachsendem  $L/B$  die Werte  $\varphi_A^*$  und  $\varphi(\eta)$  sich immer weniger voneinander unterscheiden; das bedeutet, daß die Spantflächenkurve eines Rotationskörpers um so besser durch die Dipolverteilung angenähert werden kann, je größer  $L/B$  ist. Die für das Beispiel e) errechneten Schärfegrade sind in Tab. 8 in Abhängigkeit von  $L/B$  zusammengestellt und in Abb. 5 über  $L/B$  aufgetragen.

Tabelle 8

Die Schärfegrade der Spantflächen in Abhängigkeit von dem Verhältnis  $L/B$ . Beispiel e),  $\varphi(\eta) = 0,760$

$L/B$	6	8	10	12	20
$\varphi_A^*$	0,703	0,712	0,720	0,727	0,742

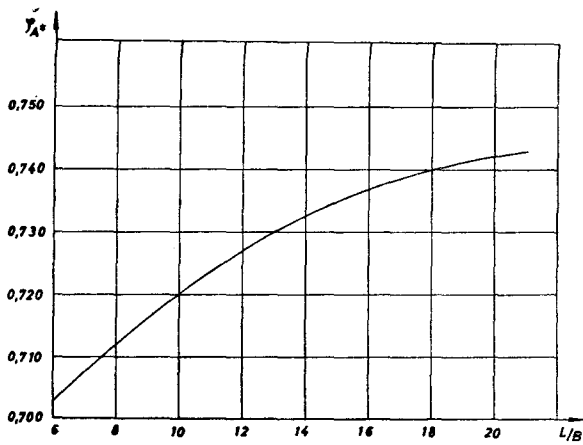


Abb. 5: Einfluß des L/B-Verhältnisses auf den Schärfegrad gezeigt am Beispiel e

**Die Geschwindigkeit am Hauptspant**

Die Geschwindigkeitsverteilung um einen Rotationskörper ergibt sich aus der Stromfunktion durch Differentiation. Es gilt für die Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung:

$$u_x = - \frac{1}{2 \pi Z} \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \quad (24)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (5) und (6) ergibt die Differentiation nach Einführung der Substitutionen (10) folgenden dimensionslosen Ausdruck:

$$\frac{u_x}{u_0} = 1 - \frac{\kappa}{4} \frac{1}{(L/B)^2} \int_{-1}^{+1} \frac{(x-\xi) \sigma(\xi) d\xi}{\left[ (x-\xi)^2 + \left( \frac{z}{L/B} \right)^2 \right]^{3/2}} \quad (25)$$

Mit  $\sigma(\xi)$  ist die Quellstärke in dimensionsloser Form bezeichnet. Zwischen ihr und  $\eta(\xi)$  besteht die Beziehung

$$\sigma(\xi) = - \frac{d\eta}{d\xi}$$

In (25) ist das Verhältnis der Geschwindigkeitskomponente  $u_x$  in x-Richtung zu der Geschwindigkeit  $u_0$  der parallel zur x-Achse ursprünglich vorhandenen Transportströmung gegeben. Mit Hilfe dieser Gleichung kann die Geschwindigkeit in jedem beliebigen Punkt der Flüssigkeit bestimmt werden. Zur Ermittlung der Geschwindigkeit am Körper werden in die Gleichung die Koordinaten  $x, z^*$  der Kontur eingesetzt

und damit  $\frac{u_x}{u_0}$  berechnet.

Es ist ersichtlich, daß es sich bei der Berechnung des Integrals in (25) wegen  $\sigma(\xi) = - \frac{d\eta}{d\xi}$  um die gleiche Art von Integralen handelt wie bei der Bestimmung der Kontur der Rotationskörper, nämlich um die Integrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\xi^n d\xi}{\left[ (x-\xi)^2 + \left( \frac{z}{L/B} \right)^2 \right]^{3/2}} \text{ bzw. } \int_{-1}^{+1} \frac{|\xi|^n d\xi}{\left[ (x-\xi)^2 + \left( \frac{z}{L/B} \right)^2 \right]^{3/2}} \text{ für ungerade Potenzen } n.$$

Folglich können für die Berechnung der Geschwindigkeit auch die Tabellen 1 und 2 dieser Integralwerte benutzt werden.

Hier soll vorerst nur die Geschwindigkeit am Hauptspant  $u_{0S}$  berechnet werden, also die Geschwindigkeit im Punkt  $x = 0; z^* = 1$ .

Wegen  $x = 0$  gilt dann für (25) die vereinfachte Form

$$\frac{u_{0S}}{u_0} = 1 + \frac{\kappa}{4} \frac{1}{(L/B)^2} \int_{-1}^{+1} \frac{\xi \sigma(\xi) d\xi}{\left[ (x-\xi)^2 + \left( \frac{z}{L/B} \right)^2 \right]^{3/2}} \quad (x=0, z^*=1) \quad (25a)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung, der Tabellen 1 und 2 und der bei der Berechnung der Konturen bereits ermittelten  $\kappa$ -Werte

ist  $\frac{u_{0S}}{u_0}$  für die verschiedenen Beispiele berechnet worden.

Das Rechenschema und die Ergebnisse sind in Tab. 9 zu-

sammengestellt. Dabei gilt  $\sigma(\xi) = \sum_{n=1}^m a_n \xi^{n-1}$

An Hand der Tab. 9 kann man ganz allgemein feststellen,

daß die Werte  $\frac{u_{0S}}{u_0}$  den Breitenkorrekturen ähnlich sind. Dazu

ist noch zu bemerken, daß für die scharfen Formen (kleinere  $\varphi_{A^*}$ -Werte) gilt:

$$\frac{u_{0S}}{u_0} < \kappa$$

und für völligere Formen

$$\kappa < \frac{u_{0S}}{u_0}$$

Jedoch läßt sich nach den bisherigen Feststellungen noch

keine feste Grenze für  $\varphi_{A^*}$  angeben, für welche gilt  $\frac{u_{0S}}{u_0}$

=  $\kappa$ . Vermutlich wird diese Grenze wie bei dem Satz von Weing über  $\varphi_{A^*}$  und  $\varphi(\eta)$  in der Regel ebenfalls bei

**Tabelle 9.**  
**Die Berechnung der Geschwindigkeit am Hauptspant  $U_{0S}$  (Rotationskörper)**

Beispiel	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k					
L/B	8	8	8	8	6	8	10	12	20	8	8	8	8	8	
$n \cdot a_n \int_{-1}^{+1} \frac{f^n df}{\sqrt{\left[ (x-f)^2 + \left( \frac{z}{L/B} \right)^2 \right]^{3/2}}}$	n														
	2	10,705166	17,162675	22,816278	-31,8948199	-42,885785	-58,229482	-52,068778	-62,197793	-76,656776				19,2692996	
	3				76,594659	96,981107	105,944826	111,651385	115,594903	123,818464					-11,1353265
	4	-1,817288	-12,579264	-24,231772	-48,472952	-67,938888	-82,966729	-61,978745	-64,093997	-63,065130	0,00186954	-12,1202447	-22,1813318	2,5442025	-5,6335913
	5														
	6		5,710889	12,8304732	6,2808904	3,9876411	7,6397287	7,7585399	7,8253777	7,9260821	8,0470681	57,6733845	82,2665427		150,69348
	7														
	8														
	9														
	10														
$\Sigma = \int_{-1}^{+1} \frac{(x-f) \sigma(f) df}{\sqrt{\left[ (x-f)^2 + \left( \frac{z}{L/B} \right)^2 \right]^{3/2}}}$	8,887879	10,665320	11,4150292	3,374576	1,66493108	-0,3910934	-2,6320444	-4,877777	-12,9773495	5,1677218	3,3538076	2,4468505	10,6781756	10,3253181	
$\frac{\Sigma}{4} \frac{1}{(L/B)^2}$	1,082203	1,0625808	1,0709214	0,999324	0,9747997	0,972463	0,974304	0,976961	0,986540	1,021925	1,013123	1,008779	1,00265833	1,05835128	
$\frac{\Sigma}{4} \frac{1}{(L/B)^2} \int_{-1}^{+1} \frac{(x-f) \sigma(f) df}{\sqrt{\left[ (x-f)^2 + \left( \frac{z}{L/B} \right)^2 \right]^{3/2}}}$	0,0040455	0,004168707	0,00418329	0,00390361	0,00376944	0,00379869	0,00423576	0,00460611	0,00664598	0,00399190	0,003995751	0,00394085	0,00415401	0,004413419	
$\frac{u_x}{u_0}$	1,03634385	1,04426862	1,04775242	1,01293881	1,01426034	0,99851459	0,99335886	0,99173704	0,9920434	1,02062903	1,01327273	1,00964494	1,04432521	1,04268683	

Tabelle 10.

Berechnung der hydrodynamischen Masse  $k_x$  der Rotationskörper und Vergleich der Größen  $\kappa, 1+k_x, u_x/u_0$ .

Beispiel	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k				
L/B	8	8	8	8	6	8	10	12	20	8	8	8	8	8
$\alpha$	1,048203	1,062581	1,070921	0,999324	0,974800	0,972463	0,974304	0,976961	0,985540	1,021925	1,013123	1,008779	1,062658	1,058351
L/2	4,0042	4,0108	4,0193	4,0024	4,0058	4,0030	4,0019	4,0013	4,0004	4,0047	4,0074	4,0087	4,0042	4,0041
$\varphi(\eta)$	0,600	0,588	0,629	0,680	0,760	0,760	0,760	0,760	0,760	0,660	0,760	0,800	0,560	0,560
$\gamma_{\pi^*}$	0,609	0,603	0,654	0,657	0,703	0,712	0,720	0,727	0,742	0,670	0,739	0,774	0,578	0,573
$1+k_x$	1,0284	1,0251	1,0105	1,0318	1,0478	1,0349	1,0265	1,0200	1,0090	1,0323	1,0343	1,0337	1,0253	1,0301
$k_x$	0,0284	0,0251	0,0251	0,0318	0,0478	0,0349	0,0265	0,0200	0,0090	0,0323	0,0343	0,0337	0,0253	0,0301
$u_x/u_0$	1,0364	1,0443	1,0478	1,0129	1,0113	0,9985	0,9936	0,9917	0,9920	1,0206	1,0133	1,0096	1,0443	1,0427

$\varphi_A^* \approx 2/3$  liegen; jedoch wäre es verfrüht, darüber schon jetzt ein Urteil abgeben zu wollen.

Am Beispiel e) sieht man, daß  $\frac{u_x}{u_0}$  mit wachsendem L/B die gleiche Tendenz zeigt, wie  $\kappa$ , d. h. zunächst ist

$$\frac{u_x}{u_0} (L/B = 6) > \frac{u_x}{u_0} (L/B = 8)$$

und sinkt bis L/B = 12 weiterhin ab, um dann endgültig mit wachsendem L/B anzusteigen.

Das Beispiel e) ist ein ganz spezieller Fall; aus der in e) gegebenen Dipolverteilung mit der starken Anschwellung erklärt sich die genannte Tendenz. Im allgemeinen werden sich mit wachsendem L/B die Breitenkorrekturen  $\kappa$

und das Geschwindigkeitsverhältnis  $\frac{u_x}{u_0}$  dem Wert Eins

nähern, d. h. also, wenn  $\kappa$  oder  $\frac{u_x}{u_0}$  kleiner als Eins sein sollten, werden die Werte mit wachsendem L/B zunehmen,

in den Fällen aber, in denen gilt  $\kappa > 1$  und  $\frac{u_x}{u_0} > 1$  abnehmen. Die Abweichung von dieser Tendenz beim Beispiel e) kann durch die Form der Dipolverteilung

$$\eta = 1 + 7,122190 \xi^2 - 22,834333 |\xi|^3 + 17,373743 \xi^4 - 2,662,661600 \xi^5$$

erklärt werden. Diese Verteilung weist eine starke Anschwellung auf. Dementsprechend weisen auch die Spantflächenkurven der Rotationskörper für die verschiedenen L/B-Verhältnisse Anschwellungen auf (Abb. 1e), die aber in Abhängigkeit von L/B verschieden stark ausfallen, d. h. mit wachsendem L/B nimmt auch die Stärke der Anschwellung zu. Für L/B = 6 ist die Anschwellung sehr gering, aber doch immerhin bemerkbar. Durch den Korrekturfaktor  $\kappa_0 = 0,9748$  wird die  $> 1$  ausfallende Breite auf den Wert Eins gebracht. Für L/B = 4 oder 5 würde die Anschwellung noch geringer oder evtl. gar nicht mehr vorhanden sein und damit dann  $\kappa > 1$  werden. Dazwischen würde dann ein L/B-Verhältnis liegen, für das  $\kappa = 1$  wäre. Es wurde aber bereits festgestellt, daß mit wachsendem L/B die Korrektur  $\kappa \rightarrow 1$  geht; deshalb ist es klar, daß im Fall e) die Tendenz folgende sein muß: Für kleine L/B-Verhältnisse ist  $\kappa > 1$ , und nimmt zunächst mit wachsendem L/B ab und sinkt unter 1; von einem bestimmten L/B an, nehmen die  $\kappa$ -Werte wieder zu, bleiben jedoch  $< 1$  mit der Tendenz  $\kappa \rightarrow 1$  für L/B  $\rightarrow \infty$ . In dem betrachteten Beispiel e) verringert sich der  $\kappa$ -Wert beim Übergang von L/B = 6 zu L/B = 8, um danach ständig anzusteigen. Die entsprechende Tendenz zeigt sich bei der Geschwindigkeit am Hauptspant, nur daß hierbei noch für

L/B = 6 das Geschwindigkeitsverhältnis  $\frac{u_x}{u_0} > 1$  ist und

eine Abnahme der Werte bis L/B = 12 beobachtet werden kann, erst bei L/B = 20 ist eine Zunahme zu bemerken.

Die hydrodynamische Masse in x-Richtung

Auf Grund der mit Hilfe der Quell-Senkenmethode erhaltenen Ergebnisse ist es möglich, die hydrodynamische Masse der Rotationskörper in x-Richtung zu bestimmen. Nach einem Satz von Taylor [18] gilt für das Dipolmoment

$$M = (1+k_x) V u_0 \quad (26)$$

Mit V ist das Volumen des Rotationskörpers bezeichnet,  $k_x$  ist die hydrodynamische Masse in x-Richtung und  $u_0$  die Geschwindigkeit der Parallelströmung.

$$V = \delta_R L^* B T = \varphi_A^* \beta_A^* L B T = \varphi_A^* F_{\Sigma} L$$

$\delta_R$  ist der Völligkeitsgrad der Verdrängung,  $\varphi_A^*$  der Völligkeitsgrad der Spantflächenkurve des Rotationskörpers und  $\beta_A^*$  der Völligkeitsgrad des Hauptspants,  $L^*$  die Länge des Rotationskörpers,

$$F_{\Sigma} = \pi \frac{B^2}{4}; \text{ folglich:}$$

$$V = \pi \frac{B^2}{4} L^* \varphi_A^*$$

Damit wird

$$M = (1+k_x) \pi \frac{B^2}{4} \cdot L^* \varphi_A^* u_0 \quad (26a)$$

Andererseits gilt aber für das Dipolmoment im Falle der Rotationskörper bei der Dipolverteilung  $\eta$

$$M = \pi \kappa \frac{B^2}{4} L u_0 \varphi(\eta) \quad (27)$$

$\kappa$  bedeutet wie schon vorher die Breitenkorrektur, L die Länge der Dipolverteilung.

Das Gleichsetzen der Ausdrücke (26a) und (27) gibt die gewünschte Gleichung für die hydrodynamische Masse  $k_x$ .

$$1+k_x = \kappa \frac{L}{L^*} \frac{\varphi(\eta)}{\varphi_A^*}$$

Die Beziehung ist bereits von Weinblum in seiner Veröffentlichung [5] abgeleitet worden; jedoch benutzt er sie zur Bestimmung des Korrekturfaktors und setzt die hydrodynamische Masse  $k_x$  als bekannt voraus. Da man aber zur Ermittlung der Rotationskörper nach der von Amtsberg entwickelten Methode den Wert  $\kappa$  ohnehin berechnen muß, stellt die Formel (28) eine einfache Gleichung zur Bestimmung der hydrodynamischen Masse  $k_x$  dar, die hierdurch als Funktion der Breitenkorrektur und der Verhältnisse der Längen und Schärfegrade der Verteilung und des Körpers zueinander dargestellt ist. Man erkennt sofort, daß  $1+k_x$  dem Wert des Korrekturfaktors um so näher kommt je weniger sich L und  $L^*$  und  $\varphi(\eta)$  und  $\varphi_A^*$  voneinander unterscheiden. In Tab. 10 ist die Berechnung der hydrodynamischen Masse in x-Richtung durchgeführt. Der Vergleich von  $1+k_x$  mit den Größen  $\kappa$  und  $u_x/u_0$  zeigt, daß der Unterschied zwischen  $1+k_x$  einerseits und  $\kappa$  und  $u_x/u_0$  andererseits etwas größer ist als der Unterschied zwischen  $\kappa$  und  $u_x/u_0$ . Allgemein kann man an Hand der Beispiele wohl sagen, daß in der Regel

$$1+k_x < u_x/u_0 < \kappa \text{ für } \varphi(\eta) < 2/3$$

$$\kappa < u_x/u_0 < 1+k_x \text{ für } \varphi(\eta) > 2/3 \quad (28)$$

Die Ergebnisse des Beispiels e) zeigen, daß diese Ungleichungen unabhängig von dem gewählten L/B-Verhältnis gelten. Jedoch läßt sich endgültig darüber noch keine Aussage machen, da in der vorliegenden Arbeit nur für Beispiel e) Verhältnisse L/B  $\neq$  8 den Rechnungen zugrunde gelegt wurden.

Eine Ausnahme bezüglich der erwähnten Ungleichungen bildet das Beispiel f), für welches gilt

$$u_x/u_0 < \kappa < 1+k_x$$

Die Werte für  $u_E/u_0$  und  $\alpha$  liegen jedoch sehr eng zusammen, so daß man nicht sagen kann, daß die Ergebnisse in diesem Fall völlig aus dem Rahmen fallen.

In ähnlicher Art sind von K. Eggers und W. Wetterling die hydrodynamischen Massen für drei Beispiele in der Veröffentlichung [19] berechnet worden.

#### Zusammenfassung und Schluß

Aus vorgegebenen Dipolverteilungen sind die diesen Verteilungen entsprechenden Rotationskörper berechnet worden. Dies geschah auf Grund einer von Amtsberg entwickelten Methode [1]. In der gleichen Veröffentlichung hat Amtsberg bereits eine Integraltafel zur Berechnung der Körperkonturen aufgestellt und einige Beispiele durchgerechnet. In der vorliegenden Arbeit ist der Umfang dieser Integraltafel erheblich erweitert worden und zusätzlich zu den von Amtsberg bereits bestimmten Rotationskörpern noch eine Reihe von Beispielen berechnet. Fernerhin wurden der Einfluß des  $t$ -Wertes und des Schärfegrades der Verteilung auf die Länge der Rotationskörper für das Verhältnis  $L/B = 8$  untersucht. Nach der Ermittlung der Geschwindigkeit am Hauptspant und der hydrodynamischen Masse in  $x$ -Richtung folgte zum Schluß ein Vergleich dieser Größen mit der Breitenkorrektur  $\alpha$ .

Zum Schluß möchte ich nochmals der Deutschen Forschungsgemeinschaft danken, durch deren Förderung die vorliegende Arbeit über Rotationskörper und die vorhergehende Untersuchung über Zylinder [9] ermöglicht wurden.

Eine weitere Veröffentlichung, in welcher der unsymmetrische Fall behandelt wird, ist in Arbeit.

#### Literatur

- [ 1 ] Amtsberg, H.: Untersuchungen über die Formabhängigkeit des Reibungswiderstandes. (Jb. STG. 1937, S. 177 bis 234).
- [ 2 ] Munk, M. M.: Fluid Mechanics Part. II (Aerodynamic Theory. Hrag. von W. F. Durand, Berlin: Springer 1935, Vol. I Abt. C).
- [ 3 ] Weinig, F.: Über schnell konvergierende graphische Lösungen von Strömungsproblemen durch Integralgleichungen. (Zeitschrift für technische Physik. Vol. 9, Nr. 1, 1928).
- [ 4 ] Weinblum, G.: Schiffe geringsten Widerstandes. (Jb. STG. 1957, S. 175—214).
- [ 5 ] Weinblum, G.: Wellenwiderstand von Rotationskörpern. (Schiffstechnik 5 (1958), S. 43—54). Engl. Ausg. u. d. T.: The Wave Resistance of Bodies of Revolution. (TMB Report, 758, 1951, 88 S.).
- [ 6 ] Weinblum, G.: Die analytische Ausbildung von Schiffsförmern. (ZAMM 15 (1953), S. 205—219).
- [ 7 ] Weinblum, G.: Systematische Entwicklung von Schiffsförmern. (Jb. STG. 47 (1953), S. 186—215).
- [ 8 ] Weinblum, G.: Rechnerische Entwicklung von Schiffsförmern. (Mitt. Preuß. Versuchsanst. für Wasser-, Erd- und Schiffbau, Berlin) (Schiffbau 39 (1938). S. 129 bis 133, S. 151—155, S. 170—173).
- [ 9 ] Kirsch, M.: Die Erzeugung von Zylindern aus vorgegebenen Singularitätenverteilungen. („Schiff und Hafen“ 11 (1959), S. 365—384).
- [10] Rankine, W. I. M.: On the Mathematical Theory of Stream-Lines, with four foci and upwards. (Phil. Trans. Royal Soc. London. 1871, S. 297—306).
- [11] Rankine, W. I. M.: On Plane Water Lines in two Dimensions. (Phil. Trans. Royal Soc. London. 1864, S. 369—391).
- [12] Taylor, D. W.: On Ship-shaped Stream Forms. (TINA 1904, S. 385—406).
- [13] Landweber, L.: The Axially Symmetric Potential Flow about Elongated Bodies of Revolution. (TMB Report 781, 1951, 82 S.).
- [14] Inui, T.: Japanese Developments of the Theory of Wave-Making and Wave Resistance. 7th Int. Conf. on Ship Hydrodynamics, Oslo, 1954, 70 S.
- [15] Inui, T.: Study on Wave-Making Resistance of Ships. (Soc. of Naval Architects of Japan. 60th Anniversary series. Vol. 2 (1957), S. 173—366).
- [16] Inui, T.: A new Theory of Wave Resistance, based on the exact conditions on the surface of ships. Part. 1 (Zosen Kyōka. Bd. 85, 1952, S. 29).
- [17] Weinig, F.: Diskussionsbeitrag zu [1]. (Jb. STG. 1937, S. 230—233).
- [18] Taylor, G. I.: The Energy of a Body Moving in an Infinite Fluid with an Application to Airships. (Proc. Royal Soc. Ser. A. 20 (1928), S. 13—21).
- [19] Eggers, K., und W. Wetterling: Über die Ermittlung der schiffsähnlichen Umströmungskörper vorgegebener Quell-Senken-Verteilungen mit Hilfe elektronischer Rechenmaschinen. (Schiffstechnik 4 (1957), S. 284—288).

#### Benutzte Abkürzungen:

- Jb. STG = Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft  
 ZAMM = Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik  
 Phil. Trans. Royal Soc. London = Philosophical Transactions of the Royal Society, London  
 TINA = Transactions of the Institution of Naval Architects, London  
 Proc. Royal Soc. = Proceedings of the Royal Society, London.