

Fluid-Struktur-Wechselwirkung in der Energie-Finite-Elemente-Methode

Vom Promotionsausschuss der
Technischen Universität Hamburg-Harburg
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)

genehmigte Dissertation

von
Marius Karger

aus
Hamburg

2017

1. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Otto von Estorff
2. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Alexander Düster

Tag der mündlichen Prüfung: 31.03.2017

Schriftenreihe des Instituts für
Modellierung und Berechnung der
Technischen Universität Hamburg-Harburg

Band 26

Marius Karger

**Fluid-Struktur-Wechselwirkung
in der Energie-Finite-Elemente-Methode**

Shaker Verlag
Aachen 2017

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Zugl.: Hamburg-Harburg, Techn. Univ., Diss., 2017

Herausgeber:

Prof. Dr.-Ing. Otto von Estorff

Technische Universität Hamburg-Harburg
Institut für Modellierung und Berechnung
Denickestraße 17
21073 Hamburg

Telefon: 040/42878-3032
Fax: 040/42878-4353
E-Mail: estorff@tu-harburg.de
Internet: <http://www.mub.tu-harburg.de>

Copyright Shaker Verlag 2017

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-5235-0
ISSN 1860-8221

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen
Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9
Internet: www.shaker.de • E-Mail: info@shaker.de

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Einführung	1
1.2	Stand der Forschung	3
1.2.1	Statistische Energieanalyse (SEA)	3
1.2.2	Energie-Finite-Elemente-Methode (EFEM)	4
1.3	Aufbau und Zielsetzung der Arbeit	5
2	Grundlagen der Energie-Finite-Elemente-Methode	7
2.1	Leistungsbilanz	9
2.1.1	Herleitung der EFEM-Parameter	10
2.1.2	Zusammenfassung der Parameterbestimmung	20
2.2	Kopplung der Basiselemente	22
2.2.1	Punktkopplung	24
2.2.2	Linienkopplung	24
2.2.3	Flächenkopplung	26
2.3	EFEM-Preprocessing	29
2.4	Numerik der EFEM	31
2.4.1	Finite-Elemente-Ansatz/Schwache Form	31
2.4.2	Kopplung der Basiselemente	35
3	Parameteranalyse für ungekoppelte Modelle	41
3.1	Verifizierung des EFEM-Modells	41
3.2	EFEM Prämissen	45
3.3	Sensitivität der EFEM-Parameter	51
3.3.1	Eingangsleistung	51
3.3.2	Parameter der Energieausbreitung	52

3.4	Validitätskriterien	55
4	Transmissionskoeffizienten	57
4.1	Plattenkopplungen	57
4.1.1	N-Platten-Kopplungen	58
4.1.2	N-Platten-Balken-Kopplungen	66
4.2	Fluid-Struktur-Kopplungen	72
4.2.1	Abstrahlgrad einer quadratischen Platte	73
4.2.2	Abstrahlgrad komplexer Geometrien	80
5	Numerische Analyse	87
5.1	Systemmatrix der EFEM	87
5.2	Konvergenzverhalten	93
5.2.1	Wohldefiniertheit der Problemformulierung	93
5.2.2	Konvergenztheorie der EFEM	95
5.2.3	Konvergenzordnung ausgewählter Beispiele	97
6	Validierung der EFEM anhand schiffstypischer Strukturen	103
6.1	Abstrahlung eines Motorfundamentes	103
6.1.1	Versuchsaufbau und Berechnungsmodelle	103
6.1.2	Numerische Ergebnisse und Validierung	108
6.2	Abstrahlung einer getauchten Stahlsektion	116
6.2.1	Versuchsaufbau und Berechnungsmodell	116
6.2.2	Numerische Ergebnisse und Validierung	118
6.3	Die EFEM als alternatives Berechnungsverfahren	121
7	Fazit und Ausblick	125

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Einführung

In einer fortschrittlichen Gesellschaft, in der die Lebensqualität an Bedeutung gewinnt, steht industrieller Fortschritt zunehmend im Zusammenhang mit akustischen Fragestellungen, beispielsweise die Schallreduktion zur Einhaltung der Arbeitsschutzbestimmungen, Anwohnerschutz vor Verkehrslärm oder Umweltschutz. Auch eine Maximierung der Komfortstandards in zahlreichen Bereichen greift auf akustische Optimierung zurück. Gängige Probleme in der Automobilindustrie sind unerwünschte Schallabstrahlung sicherheitsrelevanter Ausstattung oder Steuerungssysteme sowie Resonanzeffekte bei Freisprecheinrichtungen in Fahrgastzellen.

Zur Analyse akustischer Phänomene stehen heutzutage zwei Bereiche zur Verfügung, die numerische Simulation und die messtechnische Erfassung. Beide Bereiche sind in die Entwicklungsprozesse vieler Unternehmen integriert und finden häufig kombiniert Anwendung.

Die numerische Akustik hat in den letzten Jahren durch die Entwicklung von Hochleistungsrechnern und modernen Randelemente- und Finite-Elemente-Verfahren [3, 4, 49], die bis in den hohen Frequenzbereich eine detaillierte Abbildung der Realität ermöglichen, stark an Bedeutung gewonnen. Bei der Anwendung dieser Verfahren wird das Simulationsgebiet diskretisiert und an einer endlichen Anzahl von Punkten werden die akustischen Größen be-

rechnet. Aus der Anzahl der Unbekannten und den diskreten Punkten ergeben sich die Freiheitsgrade des Systems, die den Speicherbedarf und die Rechenzeiten beeinflussen. Mit zunehmender Berechnungsfrequenz und räumlichen Ausmaßen des Berechnungsgebietes steigt die Anzahl der Freiheitsgrade. Dies begrenzt die Anwendung dieser Verfahren, sobald akzeptable Rechenzeiten und vorhandener Speicherbedarf überschritten sind. Die Simulation von Strukturen im hohen Frequenzbereich mit hinreichend großen räumlichen Ausmaßen, wie bei Fähren, Tankern oder Containerschiffen, stellt die Ingenieure vor große Herausforderungen trotz leistungsfähiger Verfahren. Diese sind beispielsweise Randelemente-Verfahren mit adaptiver Cross Approximation [46], Randelemente-Verfahren basierend auf hierarchischen Matrizen [18] oder effiziente Lösungsverfahren für Finite-Elemente-Verfahren [43].

Um Berechnungen akustischer Phänomene von Strukturen mit großen räumlichen Ausmaßen durchzuführen, die außerhalb des Anwendungsbereiches der oben erwähnten Randelemente- und FE-Verfahren liegen, wurden in den Achtzigerjahren energetische Verfahren entwickelt, bei denen nicht hochfrequente Wellenfunktionen, sondern gemittelte Energieniveaus die Akustik beschreiben. Eine weitverbreitete energetische Methode ist die Statistische Energieanalyse (SEA) [30], bei der durch angemessene Modellierung die Struktur in Subsysteme zerlegt wird und jedes Subsystem ein konstantes Energieniveau repräsentiert. Dieses Verfahren ermöglicht die Berechnung einer relativ groben Energieverteilung in Abhängigkeit der Subsystemzerlegung bei geringem numerischen Aufwand.

In der vorliegenden Arbeit wird eine alternative Methode zur SEA, die Energie-Finite-Elemente-Methode (EFEM), als ein elementbasiertes energetisches Verfahren vorgestellt. Dabei vereint die EFEM die Vorteile der beiden Verfahren und ermöglicht durch eine detaillierte Subsystemzerlegung sowie glatte Lösungsfunktionen eine Approximation mit hoher Informationsdichte, kombiniert mit geringem numerischen Aufwand.

1.2 Stand der Forschung

Die energetischen Verfahren sind in den letzten Jahrzehnten stetig erweitert und verbessert worden, was zur Anwendbarkeit auf eine Vielzahl von Problemstellungen geführt hat. Im Folgenden ist die Historie dieser Verfahrensklasse mit besonderem Fokus auf die Statistische Energieanalyse und die Energie-Finite-Elemente-Methode dargestellt.

1.2.1 Statistische Energieanalyse (SEA)

Die Grundlagen der energetischen Verfahren und die seines populärsten Vertreters, die Statistische Energieanalyse (SEA), wurden von Lyon, Maidanik und Eichler [29, 31, 32] entwickelt. Basierend auf diesen Grundlagen veröffentlichten DeJong und Lyon 1995 ein umfangreiches Werk zu dieser Methodenklasse [30]. Die SEA etablierte sich zunehmend in der Industrie und wird für Simulationen im mittleren und hohen Frequenzbereich bei Personen- und Lastkraftwagen, Bussen, Zügen, Schiffen, Flugzeugen und Satelliten eingesetzt [2].

Bei der Statistischen Energieanalyse wird ein wellenbasierter Ansatz zur Beschreibung der Energieausbreitung durch Transversal- und Longitudinalwellen verwendet. Die sich aus diesem Ansatz ergebene Energieverteilung auf der zugrunde liegenden Geometrie beschreibt ihr Schwingungsverhalten. Zur Berechnung ist die Gesamtstruktur in verschiedene Subsysteme zu zerlegen und für jedes Subsystem ein interner Verlustfaktor zu bestimmen, der die Dissipation von Energie in diesem Subsystem beschreibt. Zusätzlich wird ein Energieaustausch der Subsysteme untereinander durch lineare Kopplungsbeziehungen realisiert, welche die Interaktionen zwischen den unterschiedlichen Wellentypen der Subsysteme beschreiben. Diese Zerlegung der Geometrie in Subsysteme erfordert genaue Kenntnis und Erfahrung in der Anwendung dieser Methode, da für jedes Subsystem der interne Verlustfaktor und die Kopplungsparameter zu den angrenzenden Subsystemen zu spezifizieren sind. Bei komplexen Subsystemen sind diese durch Erfahrung abzuschätzen oder durch Messungen zu bestimmen.

1.2.2 Energie-Finite-Elemente-Methode (EFEM)

Die Energie-Finite-Elemente-Methode bildet den Kern dieser Arbeit und somit ist die Historie dieser Methode von besonderer Bedeutung. Anfang der Siebzigerjahre haben Rybak und Belov die Grundlagen der EFEM [5, 40, 41, 42] geschaffen. Im Jahre 1977 zeigte Belov durch Transformation der zugrundeliegenden Energiebilanz in eine partielle Differentialgleichung die Äquivalenz zwischen der Energieausbreitung und der stationären Wärmeleitung [6]. Die Berechnung dieser partiellen Differentialgleichung wurde erstmals 1987 von Nefske mittels einem Finite-Elemente-Ansatz umgesetzt [38] und als Energie-Finite-Elemente-Methode bezeichnet.

Aufbauend auf den Arbeiten von Nefske sind bedeutende Entwicklungen der EFEM im Folgenden skizziert:

Wohlever und Bernhard beschrieben 1992 die Anwendung der EFEM auf einfache eindimensionale Balkenstrukturen [51]. Bouthier erweiterte 1992 die EFEM von den eindimensionalen Strukturen auf Oberflächengeometrien [51]. Die betrachteten Beispiele beschränkten sich weiterhin auf akademische Modelle. 1993 entwickelte Cho die Theorie der EFEM für bestimmte Anordnungen von Platten. Erste anwendungsorientierte Balken- und Plattenstrukturen wurden simuliert sowie theoretische Grundlagen für Fluid-Struktur-Kopplungen beschrieben [10]. Bitsie setzte 1996 erste akademische Simulationen schallabstrahlender Platten in Luft mit der EFEM um [7]. Mit einem in sehr grobe Subsysteme unterteiltem Fischerboot gelangen Vlahopoulos und Zhao 1999 erste Berechnungen mit der EFEM einer realitätsnahen Struktur [48]. Die Wechselwirkung der sich im Wasser befindenden Struktur mit den umgebenen Fluid wurde allerdings nicht mit in das Modell integriert. Wang setzte in seiner Dissertation 2000 einen Ansatz für orthotrope Platten um [50] und Moens erweiterte 2001 die EFEM um von der SEA abgeleitete Validitätskriterien [35]. Zusätzlich setzte Moens anhand eines akademischen Beispiels Impedanzrandbedingungen für 3-dimensionale Fluidkavitäten um. 2003 wurde die EFEM von Zhang, Wang und Vlahopoulos um theoretische Ansätze für Zusatzmasseneffekte erweitert [55]. Dong und Vlahopoulos unternahmen 2007 erste Versuche der akustischen Abstrahlung von Strukturen mittels einer Kombination aus

EFEM und EBEM [14]. Die EBEM bezeichnet eine energiebasierte Randelemente Methode.

Die aufgelistete Entwicklung der EFEM von 1992 bis 2007 zeigt enorme Fortschritte in der Anwendbarkeit dieser Methode auf praxisnahe Problemstellungen. Mit der EFEM können komplexe Balken- und Oberflächenstrukturen, erweitert um den Einfluss von Zusatzmassen schwerer Fluide auf die Struktur, berechnet werden. Ein 1999 betrachteter Anwendungsfall ist eine halbgetauchte Struktur, beispielsweise ein in Wasser schwimmendes Schiff. Allerdings zeigt die Historie ebenfalls Grenzen der Anwendbarkeit, welche sich auf die Schallabstrahlung in das umgebene Fluid komplexer Strukturen bezieht. Simulationen mit der EFEM für diese in der Praxis relevante Problemstellung sind noch nicht detailliert analysiert und an komplexen Modellen verifiziert und validiert worden. Aufbauend auf den bisherigen Stand der Forschung vertieft diese Arbeit mit Analysen und Validierungsprozessen die Fluid-Struktur-Simulation mit der Energie-Finite-Elemente-Methode.

1.3 Aufbau und Zielsetzung der Arbeit

Im Rahmen dieser Arbeit wird im Zusammenhang mit dem durch das vom Bundesministerium für Wirtschaft und Energie (BMWi) geförderte Forschungsprojekt „Effiziente Prognose vibroakustischer Eigenschaften in der Schiffsentwurfphase“ [27] die Energie-Finite-Elemente-Methode für die Anwendbarkeit praxisnaher Problemstellungen in der Schifffahrtsindustrie weiterentwickelt. Anwendungsfelder von besonderem Interesse sind die Fluid-Struktur-Wechselwirkung und die Schallabstrahlung in das die Struktur umgebende Fluid.

Zunächst werden die grundlegende Theorie der EFEM sowie deren Parameter und die Implementierung beschrieben. Die Methode wird daraufhin an Beispielen verifiziert und die Abhängigkeit der grundlegenden Parameter eines Subsystems untersucht. Ist die EFEM für ein aus einem Subsystem bestehenden Modell verifiziert, werden komplexe Modelle betrachtet. Zusätzlich werden numerische Eigenschaften des Verfahrens untersucht.

Ein besonderer Fokus liegt auf der Analyse und Umsetzung der Fluid-Struktur-Interaktion (FSI). Aufbauend auf der grundlegenden Theorie wird ein sehr wichtiger Parameter der FSI, der Abstrahlgrad, detailliert untersucht. Zusätzlich wird der Einfluss von schweren Fluiden auf die Struktur betrachtet und die EFEM hinsichtlich komplexer Anwendungsfälle in der Schifffahrtsindustrie verifiziert und mithilfe von Messdaten validiert.

Die Anwendbarkeit der Energie-Finite-Elemente-Methode hinsichtlich Problemstellungen mit einer Fluid-Struktur-Interaktion stellt das letzte fehlende Bindeglied einer gesamten Prozesskette dar: Bei gegebenem Anregungssignal besteht jetzt die Möglichkeit die Schallausbreitung innerhalb der Struktur, die Fluid-Struktur-Wechselwirkung und die Schallabstrahlung in angrenzende Fluide zu berechnen. Jedes Glied in dieser Prozesskette bietet Verbesserungs- und Erweiterungspotenzial, doch die Fluid-Struktur-Interaktion ist das letzte fehlende Bindeglied, um diese Prozesskette einheitlich mit der Energie-Finite-Elemente-Methode abzubilden. Somit stellt die Fluid-Struktur-Interaktion einen wichtigen Fortschritt in der praxisnahen Anwendbarkeit der Energie-Finite-Elemente-Methode dar.

Kapitel 2

Grundlagen der Energie-Finite-Elemente-Methode

Angenehme Klänge und Töne, aber auch Lärm und störende Geräusche breiten sich mithilfe von Schallwellen räumlich aus und können von unterschiedlichen Empfängern wahrgenommen werden. Diese Wellen benötigen ein Übertragungsmedium, welches ein Fluid, zum Beispiel Luft oder Wasser, aber auch ein Festkörper, wie Stahl oder Aluminium, sein kann. Durch die Wellengleichung

$$\nabla^2 p(\vec{x}, t) = \frac{1}{c_{Fluid}^2} \frac{\partial^2 p(\vec{x}, t)}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

mit dem orts- und zeitabhängigen Druck $p(\vec{x}, t)$ und der Ausbreitungsgeschwindigkeit c_{Fluid} sind das Schallfeld und die -ausbreitung im Fluid mathematisch beschrieben. Als Quelle solcher Schallfelder dient oft ein schwingender Festkörper Ω , wobei sich dessen Bewegungsgleichung

$$M\ddot{\vec{x}} + B\dot{\vec{x}} + C\vec{x} = F \quad (2.2)$$

aus einem Massenterm M , einem Dämpfungsterm B , einem Federterm C und einem Anregungsterm F zusammengesetzt. Handelt es sich bei dem schwingenden Festkörper um eine Stahlplatte, lassen sich die beschriebenen Terme (2.2) anhand der Bewegungsgleichung für Biegewellen

$$\rho h \frac{\partial u_z}{\partial t^2} + D(1 + i\eta) \nabla^4 u_z = F \quad (2.3)$$

$$\underbrace{\rho h \frac{\partial u_z}{\partial t^2}}_{\text{Massenterm}} + \underbrace{D \nabla^4 u_z}_{\text{Federterm}} + \underbrace{i\eta D \nabla^4 u_z}_{\text{Dämpfungsterm}} = \underbrace{F}_{\text{Anregungsterm}} \quad (2.4)$$

beispielhaft spezifizieren. Hierbei beschreibt u_z die Verschiebungen, wobei die Steifigkeit D , die Plattendicke h , die Dichte ρ , die Dämpfungskonstante η und die imaginären Einheit i gegeben sind. Der schwingende Festkörper ist über die Äquivalenz

$$\frac{\partial \vec{v}_{FK}|_{\partial\Omega}}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial \vec{v}_{Fluid}|_{\partial\Omega}}{\partial \vec{n}} \quad (2.5)$$

der Oberflächenschnelle \vec{v}_{FK} und \vec{v}_{Fluid} in Richtung der äußeren Normalen \vec{n} mit dem Fluid gekoppelt. Umgekehrt wirkt das Fluid durch die Last des akustischen Druckes auf den Festkörper.

Zur numerischen Berechnung vibroakustischer Phänomene hat sich im niedrigen Frequenzbereich u. a. die Finite-Elemente-Methode etabliert. Für hochfrequente Schwingungen ist diese Methode aufgrund der dann erforderlichen sehr feinen Diskretisierung nicht zielführend. Die Historie der EFEM (Kapitel 1.2) bestätigt hingegen, dass für hochfrequente Berechnungen die energetische Betrachtung mit der EFEM im Vergleich zu klassischen Verfahren Vorteile besitzt. Hierbei werden nicht die Verschiebungen betrachtet, sondern zeitlich und räumlich gemittelte Energiedichten. Die Lösungsfunktionen eines verschiebungsbasierten Ansatzes stellen hochfrequente Wellenfunktionen dar, wobei die gemittelten Energiedichten fallenden Exponentialfunktionen entsprechen. Hierdurch sinken die Anforderungen an das Berechnungsgitter und führt zu einer Verringerung des numerischen Aufwandes. In Abbildung 2.1 sind beispielhaft die unterschiedlichen Anforderungen der Diskretisierung der energetischen Betrachtung mit der EFEM und der verschiebungsbasierten Betrachtung mit der FEM skizziert. Hierbei lassen sich über die gemittelte Energiedichte in der EFEM trotz der geringen Anzahl an Stützstellen hinreichend genaue Aussagen über den gemittelten Schallpegel treffen.

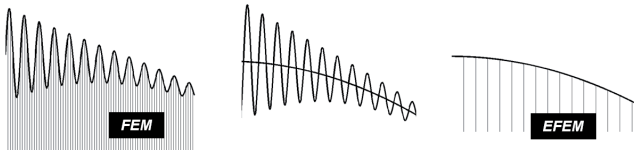


Abbildung 2.1: Anzahl der Stützstellen FEM/EFEM

2.1 Leistungsbilanz

Die Energie-Finite-Elemente-Methode basiert auf einer Leistungsbilanz, deren Terme mittels Energie- und Leistungsdichten beschrieben werden. Aufgrund des Energieerhaltungssatzes gelten für ein beliebiges Kontrollvolumen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ gemäß Abbildung 2.2 die Gleichungen

$$\int_{\Omega} \frac{\partial e}{\partial t} d\Omega = \int_{\Omega} \pi_{in} - \pi_{diss} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \vec{q} \cdot \vec{n} d\partial\Omega \quad (2.6)$$

$$= \int_{\Omega} \pi_{in} - \pi_{diss} d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{q} d\Omega. \quad (2.7)$$

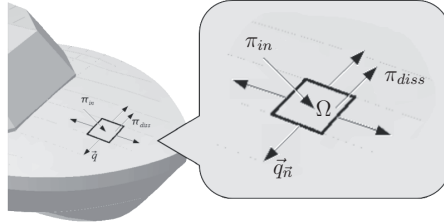


Abbildung 2.2: Kontrollvolumen Ω auf einer schiffsähnlichen Struktur

Die zeitliche Änderung der Energiedichte im Kontrollvolumen $\frac{\partial e}{\partial t}$ setzt sich aus der Differenz der zugeführten Leistungsdichte π_{in} sowie der Summe aus dissipierter Leistungsdichte π_{diss} und dem Leistungsfluss über den Rand \vec{q} in Richtung der äußeren Normalen \vec{n} zusammen. Da die Integralgleichung (2.7) für beliebige Kontrollvolumina erfüllt ist, gilt diese Gleichung ebenfalls in differentieller Form. Für die stationäre Formulierung gilt $\frac{\partial e}{\partial t} = 0$ und somit

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \pi_{in} - \pi_{diss} - \nabla \cdot \vec{q} \quad \Rightarrow \quad \pi_{in} = \pi_{diss} + \nabla \cdot \vec{q}. \quad (2.8)$$

Die Bilanzgleichung (2.8) wird unter der Verwendung einiger Annahmen (Def. A1 - A6) in die Basisgleichung der Energie-Finite-Elemente-Methode umgewandelt [35]. Diese Annahmen werden im Folgenden vorgestellt. Die Energiedichte e setzt sich aus einer Superposition ebener Wellen (A1) zusammen, die

ein diffuses Schallfeld (A2) erzeugen. Aus der Äquivalenz der zeitlich gemittelten kinetischen und potentiellen Energie¹ (A3)

$$e_{kin,t} = e_{pot,t}, \quad (2.9)$$

folgt für die Gesamtenergiedichte $e_t = 2 \cdot e_{pot,t}$ und für die dissipierte Leistungsdichte $\pi_{diss,t}$ die Beziehung

$$\pi_{diss,t} = \omega \eta e_t, \quad (2.10)$$

wobei die Kreisfrequenz durch $\omega = 2\pi f$ und der Dämpfungsfaktor durch η gegeben sind [35]. Der über eine Periode zeitlich gemittelte Energiefluss \vec{q}_t ist antiproportional vom Gradienten der Energiedichte abhängig

$$\vec{q}_t = -a \nabla e_t. \quad (2.11)$$

Hinter dieser Vereinfachung verbirgt sich eine Fernfeldbetrachtung (A4), eine lokale räumliche Mittelung über eine Wellenlänge (A5) und eine geringe Dämpfung (A6). Bei der Bestimmung des Parameters $a \in \mathbb{R}$ aus Gleichung (2.11) wird in Abschnitt 2.1.1 detailliert auf die Annahmen (A1) - (A6) eingegangen. Aus der stationären Leistungsbilanz (2.8) ergibt sich die EFEM-Basisgleichung

$$\pi_{in,t} = -a \Delta e_t + \omega \eta e_t \quad (2.12)$$

und ein in alle Richtungen gleichmäßiger Energiefluss von den Quellen in die Senken.

2.1.1 Herleitung der EFEM-Parameter

Die EFEM ist eine wellenbasierte Methode, bei der komplexe Geometrien in EFEM-Basiselemente (Balken, Platten, Kavitäten) zerlegt werden. Die EFEM-Basisgleichung (2.12) beschreibt die Energieausbreitung innerhalb jedes Basiselementes, wobei der Parameter a eine maßgebliche Größe ist und für jeden Wellentyp des entsprechenden Basiselementes separat zu bestimmen ist. Die Kopplung der verschiedenen Basiselemente und die Assemblierung zum Gesamtmodell sind in Unterkapitel 2.2 und 2.4 detailliert beschrieben.

¹Der Index t bezeichnet die zeitliche Mittelung über eine Periode T mit $e_t(x) = \int_0^T e(x, s) ds$.

In Tabelle 2.1 sind die Einheiten der energetischen Größen der EFEM-Basisgleichung für jedes Basiselement zusammengefasst.

Tabelle 2.1: Einheiten der energetischen Größen

	Energiedichte e	Energiefluss \vec{q}	Leistungsdichte π_{in}
Balken	$\frac{J}{m}$	W	$\frac{W}{m}$
Platten	$\frac{J}{m^2}$	$\frac{W}{m}$	$\frac{W}{m^2}$
Kavitäten	$\frac{J}{m^3}$	$\frac{W}{m^2}$	$\frac{W}{m^3}$

Die folgende Spezifizierung von Basiselementen (Balken, Platten und Kavitäten) dient als eine Begriffsgrundlage für die weiteren Ausführungen, insbesondere für die basiselementspezifische Herleitung des Parameters a .

Balken

Ein Balken ist ein stabförmiges Trageglied, das durch Lasten längs und quer zu seiner Achse belastet werden kann. Er ist durch die Querschnittsfläche A , die axialen Flächenträgheitsmomente I_y und I_z , das polare Flächenträgheitsmoment I_P und dem Torsionsträgheitsmoment J sowie durch die materialspezifischen Parameter, den Elastizitätsmodul (E-Modul) $E_c = E(1 + i\eta)$, den Schubmodul $G_c = G(1 + i\eta)$, die Querkontraktionszahl ν und die Dichte ρ bestimmt. Die Energieausbreitung in einem Balken geschieht über vier Wellentypen. Hierbei handelt es sich um Longitudinal-, Torsions- und zwei Biegewellen [19, 44], wie in Abbildung 2.3 dargestellt.

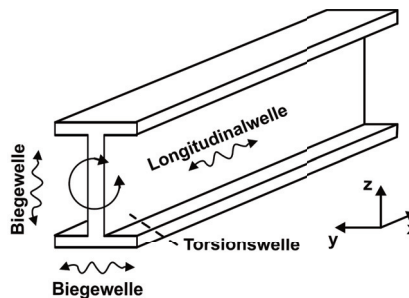


Abbildung 2.3: Wellentypen im Balkenmodell

In den folgenden Absätzen sind die zugrundeliegenden partiellen Differentialgleichungen für jeden Wellentyp beschrieben. Für die Biegewellen sind zudem zwei Theorien, die Euler-Bernoulli- und die Timoshenko-Theorie, erläutert. In den folgenden Ausführungen bezeichnet $k = 1/\lambda$ die Wellenzahl mit der Wellenlänge $\lambda \in \mathbb{R}^{\geq 0}$, $t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ die Zeit und i die imaginäre Einheit.

Longitudinalwellen beschreiben die Verschiebungen u_x des Balkens in axialer Richtung. Die Bewegungsgleichung der Longitudinalwelle in einem Balken ist gemäß

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \frac{E_c}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = \frac{f_x(x, t)}{\rho A} \quad (2.13)$$

eine Kombination aus dem Hookschen und dem Newtonschen Gesetz [19, 35], angeregt durch eine Streckenlast $f_x(x, t)$. Zudem ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Longitudinalwelle durch $c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ gegeben.

Mit einem Lösungsansatz für diese Differentialgleichung, bestehend aus ebenen Wellen

$$u_x(x, t) = [A_L e^{-ik_L x} + B_L e^{ik_L x}] e^{i\omega t} \quad (2.14)$$

und der Vereinfachung des Dämpfungsterms in der Ausbreitungsgeschwindigkeit $c_L = \frac{k}{\omega} (\sqrt{1 + i\eta})^{-1}$ durch die ersten zwei Glieder der Taylorreihe

$$\left(\sqrt{1 + i\eta}\right)^{-1} = 1 - \frac{\eta}{2}i, \quad (2.15)$$

ergibt sich aus der zeitlich gemittelten Energiedichte²

$$e_{L,t} = \frac{EA}{4} \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x^*}{\partial x} + \frac{\rho A}{4} \frac{\partial u_x}{\partial t} \frac{\partial u_x^*}{\partial t} \quad (2.16)$$

und dem Energiefluss

$$q_{L,t} = EA \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x^*}{\partial t} \quad (2.17)$$

die Beziehung

$$q_{L,t} = - \underbrace{\frac{c_L^2}{\eta\omega}}_a \nabla e_{L,t}. \quad (2.18)$$

²Der Operator mit der Notation * beschreibt die komplexe Konjugation.

Torsionswellen beschreiben die Verdrehung Θ_x in axialer Richtung eines Balkens. Die entsprechende Bewegungsgleichung³

$$\frac{\partial^2 \Theta_x}{\partial t^2} - \frac{G_c J}{\rho I_P} \frac{\partial^2 \Theta_x}{\partial x^2} = \frac{m_x(x, t)}{\rho I_x} \quad (2.19)$$

ist ebenfalls eine Kombination aus dem Hookschen und dem Newtonschen Gesetz [19, 35], angeregt durch ein Streckenmoment $m_x(x, t)$. Aus dieser Gleichung ergibt sich eine Ausbreitungsgeschwindigkeit der Torsionswelle von $c_T = \sqrt{\frac{GJ}{\rho I_P}}$.

Durch die Lösung dieser Gleichung mit einem Ansatz bestehend aus ebenen Wellen

$$\Theta_x(x, t) = [A_T e^{-ik_T x} + B_T e^{ik_T x}] e^{i\omega t} \quad (2.20)$$

und der Vereinfachung des Dämpfungsterms (2.15) ergibt sich äquivalent zur Longitudinalwellenausbreitung für die zeitlich gemittelte Energiedichte

$$e_{T,t} = \frac{GJ}{4} \frac{\partial \Theta_x}{\partial x} \frac{\partial \Theta_x^*}{\partial x} + \frac{AI_P}{4} \frac{\partial \Theta_x}{\partial t} \frac{\partial \Theta_x^*}{\partial t} \quad (2.21)$$

und für den Energiefluss

$$q_{T,t} = GJ \frac{\partial \Theta_x}{\partial x} \frac{\partial \Theta_x^*}{\partial t} \quad (2.22)$$

die Beziehung

$$q_{T,t} = - \underbrace{\frac{c_T^2}{\eta \omega}}_a \nabla e_{T,t}. \quad (2.23)$$

Die **Biegewellen** beschreiben Verschiebungen $u_B(x, t)$ quer zur Balkenachse. Für diese ergibt sich aus dem Impuls- und dem Drallsatz sowie den beiden Elastizitätsgesetzen [17, 52] ein System aus partiellen Differentialgleichungen nach der Timoschenko-Theorie mit Verschiebungen $u_{B_T}(x, t)$

$$\rho A \ddot{u}_{B_T} - \frac{\partial}{\partial x} \left(G_c A \left(\frac{\partial u_{B_T}}{\partial x} + \Psi \right) \right) = q \quad (2.24)$$

$$\rho I_y \ddot{\Psi} - \frac{\partial}{\partial x} \left(E_c I_y \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + G_c A \left(\frac{\partial u_{B_T}}{\partial x} + \Psi \right) = 0 \quad (2.25)$$

³Die Parameter der Bewegungsgleichung (2.19) sind in der allgemeinen Einführung des Balkens beschrieben.

und der Streckenlast $q(x, t)$, welches zu einer Gruppengeschwindigkeit der Biegewellen von $c_{BT} = \frac{\partial \omega}{\partial \Re\{k\}}$ führt [52].

Werden bei den Bewegungsgleichungen der Timoshenko-Theorie (2.24) und (2.25) die Schubverformung $\Psi = -\frac{\partial \omega}{\partial x}$ und die Rotationsträgheit $\rho I_y \ddot{\Psi}$ vernachlässigt, ergibt sich die Gleichung der Euler-Bernoulli-Theorie mit den Verschiebungen $u_{BEB}(x, t)$

$$\rho A \ddot{u}_{BEB} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E_c I_y \frac{\partial^2 u_{BEB}}{\partial x^2} \right) = q. \quad (2.26)$$

Aus der Euler-Bernoulli-Theorie ergeben sich in Abhängigkeit der Auslenkungsrichtung der Biegewelle und dem entsprechenden axialen Flächenträgheitsmoment Gruppengeschwindigkeiten von

$$c_{BEB,y} = 2 \cdot \sqrt[4]{\omega^2 \frac{E I_y}{\rho A}} \quad (2.27)$$

$$c_{BEB,z} = 2 \cdot \sqrt[4]{\omega^2 \frac{E I_z}{\rho A}}. \quad (2.28)$$

Aus dem Lösungsansatz mittels ebener Wellen

$$u(x, t) = [A_B e^{-ik_B x} + B_B e^{ik_B x} + C_B e^{-k_B x} + D_T e^{k_B x}] e^{i\omega t}, \quad (2.29)$$

der Vereinfachung des Dämpfungsterms des komplexen Elastizitätsmoduls

$$c_{BEB} = 2 \cdot \sqrt[4]{\omega^2 \frac{E_c I_y}{\rho A}} = 2 \cdot \sqrt[4]{\omega^2 \frac{E I_y}{\rho A}} \sqrt[4]{1 + i\eta} = \left(1 - \frac{\eta^2}{4}\right) \cdot \frac{k}{\omega} \quad (2.30)$$

durch die ersten zwei Glieder der Taylorreihe $\sqrt[4]{1 + i\eta} = 1 - \frac{\eta^2}{4}$, eine Fernfeldbetrachtung $|\exp(-k_B x)| \rightarrow 0$ sowie der lokalen räumlichen Mittelung über eine Wellenlänge

$$\bar{a} = \int_{x - \frac{\lambda}{2}}^{x + \frac{\lambda}{2}} a(x) dx \quad (2.31)$$

ergibt sich für die zeitlich und räumlich gemittelte Energiedichte

$$\bar{e}_{B,t} = \frac{E I_y}{4} \frac{\partial^2 \bar{u}_B}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_B^*}{\partial x^2} + \frac{\rho A}{4} \frac{\partial \bar{u}_B}{\partial t} \frac{\partial \bar{u}_B^*}{\partial t} \quad (2.32)$$

und dem Energiefluss

$$\bar{q}_{B,t} = \frac{1}{2} \Re \left(E I_y \frac{\partial^3 \bar{u}_B}{\partial x^3} \frac{\partial \bar{u}_B^*}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \Re \left(E I_y \frac{\partial^2 \bar{u}_B}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_B^*}{\partial t \partial x} \right) \quad (2.33)$$

die Beziehung

$$\bar{q}_{B,t} = - \underbrace{\frac{c_B^2}{\eta\omega}}_a \nabla \bar{e}_{B,t}. \quad (2.34)$$

Platten

Das Plattenelement ist ein weiteres Basiselement in der Theorie der Energie-Finite-Elemente-Methode. In dieser Arbeit werden ausschließlich isotrope Platten betrachtet, bei denen ein gleichmäßiger Energiefluss in alle Richtungen gewährleistet ist. Sie sind bestimmt durch ihre Fläche A , die Plattendicke h sowie durch die materialspezifischen Parameter, bestehend aus dem komplexen E-Modul $E_c = E(1 + i\eta)$, der Poissons Zahl ν und der Dichte ρ . Die Wellenausbreitung in Platten [9] ist durch drei Wellentypen beschrieben, die in Abbildung 2.4 dargestellt sind. Die In-Plane-Wellen, deren Auslenkungen sich innerhalb der Plattenebene befinden und die sich aus Longitudinal- und Scherwelle zusammensetzen sowie die Out-of-Plane-Wellen, die Biegewellen, welche ausschließlich Auslenkungen in normaler Richtung zur Plattenebene aufweisen.

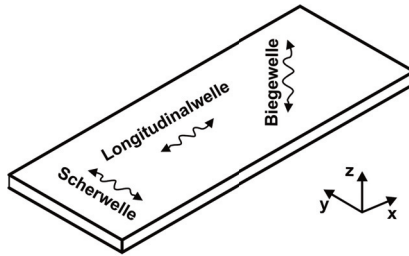


Abbildung 2.4: Wellentypen zur Beschreibung einer schwingenden Platte

Die **In-Plane-Bewegungen** (u_x, u_y) sind durch das Gleichungssystem zweiter Ordnung beschrieben

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{1 + \nu}{2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial x} = \frac{\rho(1 - \nu)}{E_c} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{1 + \nu}{2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial x} = \frac{\rho(1 - \nu)}{E_c} \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}. \quad (2.36)$$

Aus diesen Differentialgleichungen folgt mit einem Lösungsansatz mittels ebe-

nen Wellen für die Verschiebungen

$$u_x(x, y, t) = k_x (A_x e^{-ik_x x} + B_x e^{ik_x x}) (A_y e^{-ik_y y} + B_y e^{ik_y y}) e^{i\omega t} \quad (2.37)$$

$$u_y(x, y, t) = k_y (A_x e^{-ik_x x} + B_x e^{ik_x x}) (A_y e^{-ik_y y} + B_y e^{ik_y y}) e^{i\omega t} \quad (2.38)$$

sowie durch die Dämpfungsabschätzung über die ersten zwei Glieder der Taylorreihe $(1 - \frac{\eta}{2}i)$ für die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Longitudinalwelle $c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$ und für die der Scherwelle $c_S = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$.

Weiterhin ergibt sich für die zeitlich gemittelte Energiedichte der In-Plane-Wellen $e_{In,t}$ die Gleichung

$$\begin{aligned} e_{In,t} &= e_{In,kin,t} + e_{In,pot,t} \\ &= \frac{Eh}{4(1-\nu^2)} \left(\left| \frac{\partial u_x}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_y}{\partial y} \right|^2 + 2\nu \Re \left\{ (1+i\eta) \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_y^*}{\partial y} \right\} + \dots \right. \\ &\quad \left. \frac{1-\nu}{2} \left[\left| \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_y}{\partial x} \right|^2 \right] + (1-\nu) \Re \left\{ (1+i\eta) \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_y^*}{\partial x} \right\} \right) + \dots \quad (2.39) \\ &\quad \frac{\rho h}{4} \left(\left| \frac{\partial u_x}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_y}{\partial t} \right|^2 \right) \end{aligned}$$

und für den Energiefluss $\vec{q}_{In,t} = (q_{In,x,t}, q_{In,y,t})$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} q_{In,x,t} &= \frac{-Eh}{2(1-\nu^2)} \Re \left((1+i\eta) \left(\left[\frac{\partial u_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial u_y}{\partial y} \right] \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\partial u_x^*}{\partial t} + \frac{1-\nu}{2} \left[\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right] \frac{\partial u_y^*}{\partial t} \right) \right) \quad (2.40) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} q_{In,y,t} &= \frac{-Eh}{2(1-\nu^2)} \Re \left((1+i\eta) \left(\left[\frac{\partial u_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_x}{\partial x} \right] \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\partial u_y^*}{\partial t} + \frac{1-\nu}{2} \left[\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right] \frac{\partial u_x^*}{\partial t} \right) \right). \quad (2.41) \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Annahmen und des Lösungsansatzes mittels ebener Wellen (2.37) und (2.38) folgt zwischen dem Energiefluss $\vec{q}_{In,t}$ und der Energiedichte $e_{In,t}$ für die beiden Wellentypen die Relation

$$\vec{q}_{In,t} = (q_{In,x,t}, q_{In,y,t}) = - \underbrace{\frac{c_{L,S}^2}{\omega \eta}}_a \nabla e_{In,t}. \quad (2.42)$$

Zu den **Out-of-Plane-Wellen** gehören nur die BiegeWellen, welche Transversalwellen sind und somit ihre Auslenkungen orthogonal zur Ausbreitungsrichtung haben. Weil die Ausbreitung nur in der Plattenebene erfolgt, sind die Verschiebungen ebenfalls zur Plattenebene orthogonal. Für die Out-of-Plane-Wellen werden zwei theoretische Ansätze vorgestellt, die Kirchhoff-Theorie und die Mindlin-Theorie.

Die Plattentheorien basieren auf einigen Annahmen zur Geometrie und zum Werkstoffverhalten. Diesbezüglich besitzt eine Platte eine ebene Plattenmittelfläche, ist homogen und isotrop mit linear elastischen Materialeigenschaften und konstanter Dicke, die geringer ist als die Länge und Breite der Platte. Zudem müssen Verzerrungen und Verschiebungen hinreichend klein sein.

Der Kirchhoff-Theorie liegt zusätzlich die Annahme zugrunde, dass sich die Plattenquerschnitte stets normal zur Plattenmittelfläche verdrehen und in sich eben bleiben. Diese Querschnitte bleiben auch im verformten Zustand senkrecht zur Plattenmittelfläche. Zusammenfassend ist die Kirchhoff-Theorie eine schubstarre Formulierung einer Platte mit den Biegewinkeln $\phi_x = \frac{\partial u_z}{\partial x}$ und $\phi_y = \frac{\partial u_z}{\partial y}$. Wird diese Formulierung in eine schubweiche überführt, erweitern sich diese Biegewinkel um zusätzliche Verzerrungen $\phi_x = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \gamma_{xz}$ und $\phi_y = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \gamma_{yz}$, welche in der Mindlin-Theorie berücksichtigt sind. Die Out-of-Plane-Verschiebungen sind für die Kirchhoff-Theorie durch das Gleichungssystem vierter Ordnung

$$D_c \nabla^4 u_z + \rho h \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = P_K(x, y, t) \quad (2.43)$$

mit der Steifigkeit $D_c = D(1 + i\eta) = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(1 + i\eta)$ und einer Punktkraft P_K beschrieben.

Mit dem Ansatz mittels linearer Wellen, geringer Dämpfung, Vernachlässigung des Nahfeldes und räumlicher Mittelung in der Plattenebene über eine Wellenlänge

$$\bar{a} = \int_{x-\frac{\lambda}{2}}^{x+\frac{\lambda}{2}} \int_{y-\frac{\lambda}{2}}^{y+\frac{\lambda}{2}} a(x, y) dx dy \quad (2.44)$$

folgt die Relation zwischen Energiedichte

$$\begin{aligned} \bar{e}_{K,t} = \frac{Eh^3}{3(1-\nu^2)} & \left(\left| \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} \right|^2 + 2\nu \Re \left\{ (1+i\eta) \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}_z^*}{\partial y} \right\} \dots \right. \\ & \left. \dots + 2(1-\nu) \left| \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial x \partial y} \right|^2 \right) + \frac{\rho h}{4} \left| \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial t} \right|^2 \end{aligned} \quad (2.45)$$

und Energiefluss $\vec{q}_{K,t} = (\bar{q}_{K,x,t}, \bar{q}_{K,y,t})$

$$\begin{aligned} \bar{q}_{K,x,t} = \frac{1}{2} \Re & \left(D_c \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_z^*}{\partial t} - \left[\frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial y^2} \right] \frac{\partial^2 \bar{u}_z^*}{\partial x \partial t} \right. \right. \\ & \left. \left. \dots - (1-\nu) \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \bar{u}_z^*}{\partial y \partial t} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \bar{q}_{K,y,t} = \frac{1}{2} \Re & \left(D_c \left(\frac{\partial}{\partial y} \Delta \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_z^*}{\partial t} - \left[\frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial x^2} \right] \frac{\partial^2 \bar{u}_z^*}{\partial y \partial t} \right. \right. \\ & \left. \left. \dots - (1-\nu) \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial y \partial x} \frac{\partial^2 \bar{u}_z^*}{\partial x \partial t} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.47)$$

analog zur Betrachtung des Euler-Bernoulli-Balkens

$$\vec{q}_{K,t} = - \underbrace{\frac{c^2}{\omega \eta}}_a \nabla \bar{e}_{K,t} \quad (2.48)$$

mit einer Gruppengeschwindigkeit von $c_K = 2\sqrt{\frac{\omega^2 E h^2}{12(1-\nu^2)\rho}}$.

Die oben erwähnten Vereinfachungen finden auch bei der Mindlin-Theorie Anwendung, wobei an dieser Stelle nur die entsprechende Ausbreitungsgeschwindigkeit durch $c_M = \frac{\partial \omega}{\partial \Re\{k\}}$ zu ersetzen ist. Aus der Wellenzahl k_M in der Mindlin-Theorie

$$k_M^2 = \frac{\rho h^3 \omega^2}{24D_c} + \frac{\rho \omega^2}{2\kappa^2 G_c} \pm \sqrt{\left(\frac{\rho h^3 \omega^2}{24D_c} + \frac{\rho \omega^2}{2\kappa^2 G_c} \right)^2 + \frac{\rho h \omega^2}{D_c}} \quad (2.49)$$

mit $\kappa = \pi^2/12$ ergibt sich die Gruppengeschwindigkeit der Biegewellen [34, 35]

$$c_M = \frac{\partial \omega}{\partial \Re\{k_M\}} \quad (2.50)$$

$$= \frac{2\Re\{k_M\}}{\left(\frac{\rho h^3}{12D} + \frac{\rho}{\kappa^2 G} \right) \omega \pm \frac{2 \left[\frac{\rho h^3}{24D} - \frac{\rho}{2\kappa^2 G} \right]^2 \omega^2 + \frac{\rho h}{D}}{\sqrt{\left[\frac{\rho h^3}{24D} - \frac{\rho}{2\kappa^2 G} \right]^2 \omega^2 + \frac{\rho h}{D}}}} \quad (2.51)$$

Kavitäten

Ein weiteres Basiselement der EFEM ist eine mit Fluid gefüllte Kavität. Diese wird über die räumlichen Ausmaße und die Materialeigenschaften des Fluides, Dichte ρ_{Fluid} , Schallgeschwindigkeit c_{Fluid} und die Dämpfung η in diesem Medium bestimmt. Die Schallgeschwindigkeit lässt sich ebenfalls über das Kompressionsmodul K ausdrücken $c_{Fluid} = \sqrt{K/\rho}$. Da in Fluiden keine Scherkräfte existieren, findet die Energieausbreitung im Gegensatz zu den anderen Basiselementen nur mittels Longitudinalwellen statt. Die entsprechende Wellenausbreitung in einem mit Fluid gefüllten Gebiet, der Kavität, wird mit der Helmholtz-Gleichung beschrieben. Zusätzlich ist die dämpfende Wirkung des Mediums zu beachten, die durch Ergänzung eines Dämpfungsterms in der Helmholtz-Gleichung Berücksichtigung findet

$$\left(1 + \tau_R \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla^2 p - \frac{1}{c_{Fluid}^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\rho_{Fluid} \frac{\partial q(x, y, z, t)}{\partial t}, \quad (2.52)$$

wobei p den Druck, ρ_{Fluid} die Dichte des Fluides und $q(x, y, z, t)$ den Anregungsterm darstellt. Außerdem ist τ_R die Relaxationszeit, die ein Maß für die Trägheit des akustischen Mediums ist und in Beziehung zur Dämpfung $\eta = \omega\tau_R$ steht. Die Relaxationszeit τ_R beschreibt die charakteristische Zeit, in welcher sich ein akustisches Medium durch einen Druckimpuls angeregt wieder dem stationären Zustand annähert. Nach der Dauer einer Relaxationszeit hat sich das akustische Medium merklich auf seinen Gleichgewichtszustand zubewegt und nach dem drei- bis sechsfachen der Relaxationszeit ist von einer weitgehend abgeschlossenen Relaxation auszugehen.

Für den EFE-Ansatz wird die Schallausbreitung nur durch ebene Wellen angenommen, was zur Ansatzfunktion für den Druck

$$p(x, y, z, t) = \exp(i\omega t) \prod_{j=\{x,y,z\}} (A_j e^{-ik_j j} + B_j e^{ik_j j}) \quad (2.53)$$

führt. Weiterhin folgt aus der Annahme einer geringen Dämpfung $\eta \ll 1$ und der Definition der Wellenzahl der akustischen Welle $k_{Fluid} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ die Approximation des Dämpfungsterms von $\sqrt{1 + i\eta} \approx (1 - i\frac{\eta}{2})$. Mittels dieser Voraussetzungen und den Formeln für die zeitlich gemittelten Energiedichte

$$e_{Fluid,t} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\rho c^2} |p|^2 + \rho [|v_x|^2 + |v_y|^2 + |v_z|^2] \right), \quad (2.54)$$

die über den Druck p und die Schnelle $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ beschrieben sind, und den Energiefluss $\vec{q}_{Fluid,t} = (q_{Fluid,x,t}, q_{Fluid,y,t}, q_{Fluid,z,t})$

$$q_{Fluid,x,t} = \frac{1}{2} \Re \{ \rho v_x^* \} \quad (2.55)$$

$$q_{Fluid,y,t} = \frac{1}{2} \Re \{ \rho v_y^* \} \quad (2.56)$$

$$q_{Fluid,z,t} = \frac{1}{2} \Re \{ \rho v_z^* \} \quad (2.57)$$

sowie der räumlichen Mittelung über eine Wellenlänge $\vec{\lambda} = (\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z)$ mit

$$\bar{a} = \int_{x-\frac{\lambda_x}{2}}^{x+\frac{\lambda_x}{2}} \int_{y-\frac{\lambda_y}{2}}^{y+\frac{\lambda_y}{2}} \int_{z-\frac{\lambda_z}{2}}^{z+\frac{\lambda_z}{2}} a(x, y, z) \, dx dy dz, \quad (2.58)$$

erhält man mit der Euler-Gleichung der linearen Akustik

$$\vec{v} = \frac{i}{\rho\omega} \nabla p \quad (2.59)$$

die gewünschte Beziehung zwischen Energiefluss (2.55) - (2.57) und Energiedichte (2.54)

$$\vec{q}_{Fluid,t} = - \underbrace{\frac{c^2}{\eta\omega}}_a \nabla \bar{e}_{Fluid,t}. \quad (2.60)$$

Damit ist die Herleitung des basistypspezifischen Parameters a für die EFEM-Basiselemente (Balken, Platten, Kavitäten) abgeschlossen. Um einen Überblick über die Erkenntnisse der ausführlichen Herleitung dieser Parameter zu erlangen, folgt im Abschnitt 2.1.2 eine Zusammenfassung.

2.1.2 Zusammenfassung der Parameterbestimmung

Für jedes EFEM-Basiselement wird der Parameter a in der Gleichung

$$\bar{\pi}_{in,t} = -a \Delta \bar{e}_t + \eta \omega \bar{e}_t \quad (2.61)$$

durch das Setzen von Prämissen wie die Vernachlässigung des Nahfeldes, räumliche lokale Mittelung und geringe Dämpfung auf $a = \frac{c_{WT}^2}{\omega\eta}$ zur EFEM-Basisgleichung

$$\bar{\pi}_{in,t} = -\frac{c_{WT}^2}{\eta\omega} \Delta \bar{e}_t + \eta \omega \bar{e}_t \quad (2.62)$$

umgeformt, wobei c_{WT} die wellentyp-spezifische Ausbreitungsgeschwindigkeit beschreibt.

Eine ausführliche Herleitung der Parameter für die einzelnen Wellentypen der verschiedenen EFEM-Basiselemente ist detailliert in der Literatur [7, 10, 35] beschrieben. An dieser Stelle fasst die Tabelle 2.2 die Ausbreitungsgeschwindigkeiten c_{WT} und die gesetzten Prämissen für jeden Wellentyp zusammen.

Tabelle 2.2: Wellentyp-spezifische Ausbreitungsgeschwindigkeit

Prämisse:	$\vec{q}_t = -\frac{c_{WT}}{\omega\eta} \nabla \bar{e}_t$	(A1)	(A2)	(A3)	(A4)	(A5)	(A6)
Balken:							
Longitudinalwelle	$c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$	×	×	×			×
Torsionswelle	$c_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$	×	×	×			×
Biegewelle _{Euler-Bernoulli}	$c_{BEB} = 2\sqrt{\frac{\omega^2 E h^2}{12(1-\nu^2)\rho}}$	×	×	×	×	×	×
Biegewelle _{Timoshenko}	$c_{BTS} = \frac{\partial\omega}{\partial\Re\{k\}}$	×	×	×	×	×	×
Platte:							
Longitudinalwelle	$c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$	×	×	×			×
Torsionswelle	$c_T = \sqrt{\frac{GJ}{\rho I_P}}$	×	×	×			×
Biegewelle _{Kirchhoff}	$c_K = 2\sqrt{\frac{\omega^2 E h^2}{12(1-\nu^2)\rho}}$	×	×	×	×	×	×
Biegewelle _{Mindlin}	$c_M = \frac{\partial\omega}{\partial\Re\{k\}}$	×	×	×	×	×	×
Kavität:							
Longitudinalwelle	$c_F = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$	×	×	×		×	×

Die EFEM-Basisgleichung (2.62) beschreibt die Energieausbreitung in allen EFEM-Basiselementen für die jeweiligen Wellentypen. Diesbezüglich sind in Tabelle 2.3 die in den jeweiligen Basiselementen auftretenden Wellentypen zusammengfasst. Die Energieausbreitung kann somit in allen Basiselementen mittels der EFEM-Basisgleichung beschrieben werden, wobei nur die wellentyp-spezifische Ausbreitungsgeschwindigkeit anzupassen ist. Um die Energieverteilung einer aus Basiselementen zusammengesetzten Struktur zu berechnen, sind Kopplungsbeziehungen zwischen den unterschiedlichen Basiselementen und Wellentypen zu ergänzen. Die Herleitung dieser Kopplungsbeziehungen

ist im Unterkapitel 2.2 beschrieben.

Tabelle 2.3: Wellentypen in den EFEM-Basiselementen

Basiselemente	Wellentypen
Balken	Longitudinal-, Torsions- und zwei Biegewellen
Platte	Longitudinal-, Scher- und Biegewellen
Kavität	Longitudinalwellen

Die Energie- und Leistungsdichten der EFEM-Basisgleichung (2.62) werden im Folgenden stets als räumlich und zeitlich gemittelte Größen betrachtet, d.h. $\bar{\pi}_{in,t} \mapsto \pi_{in}$ und $\bar{e}_t \mapsto e$, was zu folgender EFEM-Basisgleichung mit geänderter Notation führt

$$\pi_{in} = -\frac{c_{WT}^2}{\eta\omega} \Delta e + \eta\omega e. \quad (2.63)$$

2.2 Kopplung der Basiselemente

Um die Energieverteilung einer komplexen Struktur berechnen zu können, ist diese zunächst in Basiselemente zu zerlegen. Die EFEM-Basisgleichung (2.63) beschreibt die Energieausbreitung innerhalb der einzelnen Basiselemente. Die Verbindungen dieser Elemente sind durch zusätzliche Kopplungsterme zu berücksichtigen.

Diese Kopplungen lassen sich in drei Kategorien, in Punkt-, Linien- und Flächenkopplungen einteilen, welche sich auf die geometrische Schnittmenge der gekoppelten Basiselemente (BE) beziehen. Über diese Kopplungsstellen findet ein wellentyp-spezifischer Energietransport statt, der mittels Transmissionskoeffizienten

$$\tau_{inc,refl/trans} = \frac{Q_{refl/trans}}{Q_{inc}} = \frac{Q^-}{Q^+} \quad (2.64)$$

modelliert ist, welche ein Verhältnis zwischen dem Netto-Energiefluss Q^+ oder Q_{inc} der einfallenden Welle und dem Netto-Energiefluss Q^- oder $Q_{refl/trans}$ der transmittierten Welle für die interagierenden Wellentypen beschreiben. Dies führt bei einer Kopplung von zwei Basiselementen BE 1 mit n-Wellentypen und BE 2 mit m-Wellentypen zu einem Gleichungssystem der Transmissions-

koeffizienten der Form

$$\begin{pmatrix} Q_1^- \\ Q_2^- \\ \vdots \\ Q_{m+n}^- \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \tau_{1,1} & \tau_{2,1} & \cdots & \tau_{n+m,1} \\ \tau_{1,2} & \tau_{2,2} & \cdots & \tau_{n+m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{1,n+m} & \tau_{2,n+m} & \cdots & \tau_{n+m,n+m} \end{pmatrix}}_{\tau \in [0,1]^{n \times m}} \begin{pmatrix} Q_1^+ \\ Q_2^+ \\ \vdots \\ Q_{m+n}^+ \end{pmatrix}. \quad (2.65)$$

Die Dissipation innerhalb der Kopplungsstellen wird bei diesem Ansatz vernachlässigt und somit gilt, aufgrund des Energieerhaltungssatzes, für jede Spaltensumme $\sum_{k=1}^{n+m} \tau_{j,k} = 1 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n+m$. Damit entspricht die Summe der transmittierten und reflektierten Energie an einer Kopplungsstelle stets der eingeleiteten Energie.

Zudem sind für die Herleitung der Kopplungsterme der verschiedenen Kopplungstypen einige Beziehungen zwischen Energiefluss- und Energiedichte von grundlegender Bedeutung und werden somit vor der detaillierten Beschreibung jedes einzelnen Kopplungstyps aufgeführt.

Für jede wellentyp-spezifische Energiedichte in einem Basiselement an einer Kopplungsstelle gilt das Summationsprinzip (Energy Summation Principle)

$$e = e^+ + e^-, \quad (2.66)$$

wobei sich die gesamte Energiedichte e als Summe der Energiedichte der einfallenden Welle e^+ und der ausfallenden Welle e^- darstellen lässt. Des Weiteren gilt für den Vektor des Energieflusses \vec{q} die Vektoraddition

$$\vec{q} = \vec{q}^+ + \vec{q}^-. \quad (2.67)$$

Der Energiefluss zweier entgegengesetzter Wellen lässt sich ebenfalls als Differenz der Beträge beschreiben

$$q = q^+ - q^- \quad (2.68)$$

$$= c_{WT}e^+ - c_{WT}e^-, \quad (2.69)$$

die wiederum von der Energiedichte und der Gruppengeschwindigkeit der Wellen abhängen. Der Netto-Energiefluss Q lässt sich ebenfalls mittels einer Dif-

ferenz darstellen

$$Q = Q^+ - Q^- \quad (2.70)$$

$$= (I - \tau) Q^+ \quad (2.71)$$

und durch die Matrix der Transmissionkoeffizienten τ und die Einheitsmatrix I auf den Netto-Energiefluss der einfallenden Welle reduzieren.

Die eingeführten Größen dienen als Grundlage für die Beschreibung der Kopplungsbeziehungen für die Punkt-, Linien- und Flächenkopplung.

2.2.1 Punktkopplung

In der Kategorie der Punktkopplungen befinden sich alle Kopplungen, bei denen die geometrische Schnittmenge der beteiligten Basiselemente punktförmig ist. Diese Schnittmenge entsteht bei der Kopplung von zwei Balken [8, 11, 39] sowie eines Balkenendes mit einer Platte oder einer Kavität. Der Fokus dieser Arbeit liegt auf der Fluid-Struktur-Interaktion hinsichtlich abstrahlender Flächen und es werden stets Modelle ohne diesen Kopplungstyp betrachtet. Der Vollständigkeit halber sei diese Kategorie dennoch aufgeführt, allerdings sind nur die Energieflussterte der einzelnen an der Kopplung beteiligten Basiselemente

$$Q_{\text{Balken}} = q_{\text{Balken},\vec{n}} [W] \quad (2.72)$$

$$Q_{\text{Platte}} = q_{\text{Platte},\vec{n}} \partial A_c [W] \quad (2.73)$$

$$Q_{\text{Fluid}} = q_{\text{Fluid},\vec{n}} A_c [W] \quad (2.74)$$

angegeben. Der an der Kopplung beteiligten Balkenquerschnittsfläche ist durch A_c mit dem Rand ∂A_c gegeben. Die Herleitung der Kopplungsterme für die Kategorien der Linien- und Flächenkopplungen wird nachfolgend ausführlich dargestellt.

2.2.2 Linienkopplung

Bildet die Schnittmenge von miteinander gekoppelten Basiselemente eine Linie, wird dies als Linienkopplung bezeichnet. Die Abbildung 2.5 zeigt beispielhaft eine Kopplung von zwei Platten.

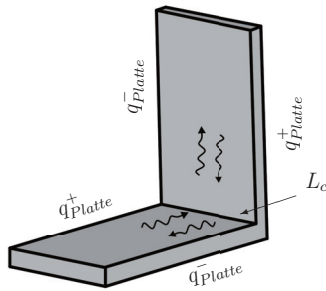


Abbildung 2.5: Platte-Platte-Kopplung

Für die Kopplungsstelle ist der Netto-Energiefluss pro Längeneinheit zwischen den Basiselementen und der Kopplungsstelle in den Gleichungen

$$Q_{Balken} = \frac{q_{Balken,Anfang} + q_{Balken,Ende}}{L_c} \quad [W/m] \quad (2.75)$$

$$Q_{Platte} = q_{Platte,\bar{n}} \quad [W/m] \quad (2.76)$$

$$Q_{Fluid} = q_{Fluid,\bar{n}} h_{KF} \quad [W/m] \quad (2.77)$$

für die verschiedenen Basiselemente dargestellt. Die Energieflüsse an den Rändern in das an der Kopplung beteiligte Balkensegment sind durch $q_{Balken,Anfang}$ und $q_{Balken,Ende}$ beschrieben. Die Höhe der an der Kopplung beteiligten Fläche der Kavität ist mit h_{KF} bezeichnet. Für die an einer Linienkopplung beteiligten Basiselemente sind die Kopplungsbeziehungen beispielhaft für zwei Platten hergeleitet. In diesem Kontext ergeben sich, mit den Gleichungen (2.69) - (2.71) und dem Energiefluss für das Basiselement Platte, bei Linienkopplungen aus (2.76) die Beziehungen zwischen Energiedichte und Energieflussdichte zu

$$c_{WT,Platte} e_{Platte} = q_{Platte}^+ + q_{Platte}^- \quad (2.78)$$

$$= Q_{Platte}^+ + Q_{Platte}^- = (I + \tau) Q_{Platte}^+ \quad (2.79)$$

Aus (2.79) folgt das Gesamtsystem, das den Energietransfer durch die Kopp-

lungslinie beschreibt

$$\begin{pmatrix} Q_{Platte_1} \\ Q_{Platte_2} \end{pmatrix} = (I - \tau)(I + \tau)^{-1} \dots \dots \begin{pmatrix} c_{WT,Platte_1} & 0 \\ 0 & c_{WT,Platte_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{Platte_1} \\ e_{Platte_2} \end{pmatrix}. \quad (2.80)$$

2.2.3 Flächenkopplung

Bei der EFEM werden Flächenkopplungen für die Verbindung zweier Kavitäten oder für Platten-Kavität-Verbindungen verwendet, um über diese Verbindungsflächen den Energieaustausch zu beschreiben. Relevant für den Energieaustausch bei der Flächenkopplung sind in Platten die Biegewellen und in Fluiden die Longitudinalwellen. In Abbildung 2.6 sind die Kopplungsgrößen der Fluid-Struktur-Flächenkopplung dargestellt.

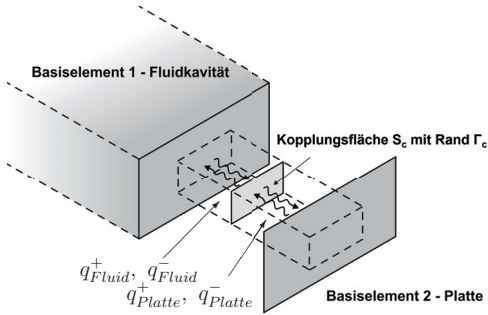


Abbildung 2.6: Fluid-Struktur-Flächenkopplung

Mittels des Satzes von Gauß lässt sich der Netto-Energiefluss pro Fläche Q_{Platte} von einer Plattensektion in das Fluid durch

$$Q_{Platte} = \frac{1}{S_c} \int_{\Gamma_c} q_{Platte,n} d\Gamma_c \quad [W/m^2] \quad (2.81)$$

darstellen. Die reziproke Beziehung für Q_{Fluid} ist direkt über die Energieflussdichte $q_{Fluid,n}$ gegeben

$$Q_{Fluid} = q_{Fluid,n} \quad [W/m^2]. \quad (2.82)$$

Aus den Beziehungen zwischen Energiedichte und Energieflussdichte ergeben sich die Gleichungen

$$\int_{\Gamma_c} c_{WT,Platte} e_{Platte} d\Gamma_c = \int_{\Gamma_c} \underbrace{c_{WT,Platte} e_{Platte}^+}_{q^+} d\Gamma_c + \dots + \int_{\Gamma_c} \underbrace{c_{WT,Platte} e_{Platte}^-}_{q^-} d\Gamma_c \quad (2.83)$$

$$= S_c \cdot (Q_{Platte}^+ + Q_{Platte}^-) \quad (2.84)$$

$$= S_c \cdot (I + \tau) Q_{Platte}^+ \quad (2.85)$$

$$c_{WT,Fluid} e_{Fluid} = q_{Fluid}^+ + q_{Fluid}^- \quad (2.86)$$

$$= Q_{Fluid}^+ + Q_{Fluid}^- = (I + \tau) Q_{Fluid}^+, \quad (2.87)$$

wobei $\tau \in [0, 1]^2$ die Matrix der Transmissionskoeffizienten aus Gleichung (2.65) zwischen der Biegewelle in der Struktur und der Longitudinalwelle im Fluid beschreibt. Die Kopplungsfläche S_c und der Rand dieser Fläche $\partial S_c = \Gamma_c$ sind im Zusammenhang mit weiteren Kopplungsgrößen in Abbildung 2.6 gezeigt.

Weiterführend ergibt sich aus den Formeln (2.83) - (2.86) das Gesamtsystem des Energietransfers durch die Kopplungsfläche

$$\begin{pmatrix} Q_{Platte} \\ Q_{Fluid} \end{pmatrix} = (I - \tau)(I + \tau)^{-1} \dots \dots \cdot \begin{pmatrix} \frac{c_{WT,Platte}}{S_c} & 0 \\ 0 & c_{WT,Fluid} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_{\Gamma_c} e_{Platte} d\Gamma_c \\ e_{Fluid} \end{pmatrix}. \quad (2.88)$$

Analog zu den Herleitungen für die Platten-Kavität-Kopplung gilt für die Kavität-Kavität-Kopplung

$$\begin{pmatrix} Q_{Fluid_1} \\ Q_{Fluid_2} \end{pmatrix} = (I - \tau)(I + \tau)^{-1} \dots \dots \cdot \begin{pmatrix} c_{WT,Fluid_1} & 0 \\ 0 & c_{WT,Fluid_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{Fluid_1} \\ e_{Fluid_2} \end{pmatrix}. \quad (2.89)$$

Zusammenfassung der Kopplungsparameter

Die Kopplungsbeziehungen der verschiedenen Kopplungsarten Punkt-, Linien- und Flächenkopplung der Basiselemente (Balken, Platten, Kavitäten) sind nun

analytisch beschrieben und in einer Matrix

$$J = (I - \tau)(I + \tau)^{-1} P \quad (2.90)$$

zusammengefasst, die den Energiefluss zwischen den beteiligten Basiselementen beschreibt. Dabei besteht die Diagonalmatrix P aus kopplungstyp-spezifischen Einträgen der beteiligten Basiselemente, die in der Tabelle 2.4 zusammengefasst sind. Die Integration dieser analytischen Kopplungsbeziehungen in die numerische Umsetzung und in den Finite-Element-Ansatz zur Berechnung der EFEM-Basisgleichung ist detailliert in Kapitel 2.4 aufgeführt.

Tabelle 2.4: Übersicht der Matrixeinträge von P

	Punkt kopplung	Linien kopplung	Flächen kopplung
Balken	$c_{WT,Balken}$	$c_{WT,Balken}/L_c$	-
Platte	$c_{WT,Platte} \partial A_c$	$c_{WT,Platte}$	$c_{WT,Platte}/S_c$
Kavität	$c_{WT,Fluid} A_c$	$c_{WT,Fluid} h_{KF}$	$c_{WT,Fluid}$

2.3 EFEM-Preprocessing

Die Energieausbreitung in den Basiselementen und deren Kopplung untereinander sind nun analytisch beschrieben. Die Energie-Finite-Elemente-Methode ist ein elementbasiertes Verfahren und somit ist es konsistent die Kopplungen mithilfe von zusätzlichen Kopplungselementen (Jointelemente) zu realisieren. Hierfür ist ein EFEM-Preprocessing erforderlich, das bis auf einige Erweiterungen analog zur Modellerstellung der FE-Methode ist. Es besteht aus drei Phasen, die in Abbildung 2.7 gezeigt sind.

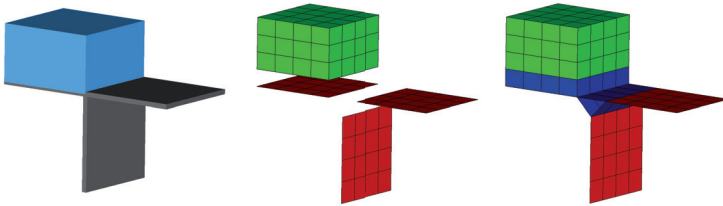


Abbildung 2.7: Drei Phasen des EFEM-Preprocessing

Ausgehend von einem CAD-Modell (Abbildung 2.7, links) wird ein Finite-Elemente-Modell erstellt, bestehend aus einer beliebigen Oberflächenstruktur und akustischen Kavitäten. Weiterhin wird das FE-Modell im nächsten Schritt in EFEM-Basiselemente zerlegt (Abbildung 2.7, mittig) und mittels der EFEM-Basisgleichung (2.63) die Energieausbreitung in jedem Basiselement beschrieben. Hierfür werden die Knoten an den Kopplungsstellen dupliziert, sodass für jedes Basiselement ein separates, von den restlichen Basiselementen getrenntes, Netzteil entsteht. Die Kommunikation dieser Subsysteme ist über Kopplungselemente zwischen diesen separaten Netzteilen zu realisieren, die in der dritten Phase eingefügt werden (Abbildung 2.7, rechts), wobei die Netzteile nur zur Visualisierung der Jointelemente verschoben sind, denn diese Jointelemente besitzen keine geometrische Ausdehnung. Das eingefügte Kopplungselement ist vom jeweiligen Kopplungstyp abhängig. In der Tabelle 2.5 sind einige Beispiele zusammengestellt.

Tabelle 2.5: Beispiele der EFEM-Kopplungselemente

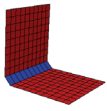
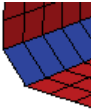
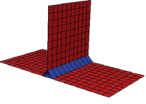
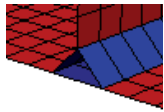
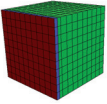
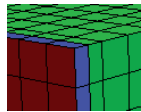
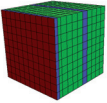
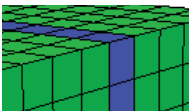
Gesamtmodell	Detailansicht
	
2-Platten-Kopplung	Ein QUAD-Element
	
3-Platten-Kopplung	Drei QUAD-Elemente
	
Platte-Fluid-Kopplung	Ein HEXAEDER-Element
	
Fluid-Fluid-Kopplung	Ein HEXAEDER-Element

Tabelle 2.5 zeigt die durch das EFEM-Preprocessing eingefügten Kopplungselemente für verschiedene Kopplungstypen. Hierbei ist die Anzahl der an der Kopplungsstelle beteiligten EFEM-Basiselemente quantifiziert.

Die Berechnungsgitter der Energie-Finite-Elemente-Methode unterscheiden sich von einem herkömmlichen regulären FE-Gittern durch zusätzliche Jointelemente an den Kopplungsstellen, durch welche die Interaktionen zwischen den einzelnen Basiselementen im Gesamtsystem integriert werden. Sind alle Basiselemente diskretisiert und die Jointelemente eingefügt, folgt das Gesamtsystem durch die Assemblierung der einzelnen Submatrizen der Basiselemente und der Kopplungsterme.

2.4 Numerik der EFEM

Zur numerischen Berechnung der EFEM-Basisgleichung (2.63) wird für jedes Basiselement die Finite-Elemente-Methode verwendet. Im folgenden Abschnitt ist diese Methode anhand von Oberflächengeometrien beschrieben und in Abschnitt 2.4.2 sind das Aufstellen der Kopplungsmatrizen und die Assemblierung zum Gesamtsystem dargestellt.

2.4.1 Finite-Elemente-Ansatz/Schwache Form

Die EFEM-Basisgleichung ist eine elliptische partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\pi_{in} = -\frac{c^2}{\omega\eta} \Delta e + \omega\eta e \quad (2.91)$$

und äquivalent zur stationären Wärmeleitungsgleichung. Durch multiplizieren von (2.91) mit einer Testfunktion $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, dem Raum der beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger, und Integration über das Gesamtgebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ergibt dies die schwache Form

$$\int_{\Omega} \pi_{in} \phi \, d\Omega = \int_{\Omega} -\frac{c^2}{\omega\eta} \Delta e \phi + \omega\eta e \phi \, d\Omega. \quad (2.92)$$

Der rechte Term dieser Gleichung wird mit dem Greenschen Satz umgeformt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \pi_{in} \phi \, d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{c^2}{\omega\eta} \nabla e \cdot \nabla \phi + \omega\eta e \phi \, d\Omega \dots \\ &\dots - \int_{\partial\Omega} \frac{c^2}{\omega\eta} \nabla e \cdot \vec{n} \phi \, d\Omega \\ &= \underbrace{\int_{\Omega} \frac{c^2}{\omega\eta} \nabla e \cdot \nabla \phi + \omega\eta e \phi \, d\Omega}_{\tilde{a}(e, \phi)} + \int_{\partial\Omega} \vec{q}_{\vec{n}} \phi \, d\Omega \end{aligned} \quad (2.93)$$

und zu einer Bilinearform $\tilde{a} : H_0^1(\Omega) \times C_0^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto \tilde{a}(x, y)$ zusammengefasst, wobei $H_0^1(\Omega)$ den Hilbertraum aller einfach schwach differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger beschreibt.

Die schwache Form der EFEM-Basisgleichung (2.94) wird mithilfe der FE-Methode approximiert. Dabei sind die Testfunktion $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ und die Lösungsfunktion $e \in H_0^1(\Omega)$ auf einen endlich-dimensionalen Teilraum

$$S_n = \text{span} \left\{ \tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2, \dots, \tilde{\phi}_N \right\} \subset C_0^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \quad (2.95)$$

zu projizieren, wobei die Basisfunktionen $\tilde{\phi}_k$ $k = 1, \dots, N$ des Vektorraumes für die in dieser Arbeit betrachteten Anwendungen lineare Finite Elemente sind. Jede beliebige Test- und Lösungsfunktion dieses Raumes ist als Linearkombination der Basisvektoren darstellbar

$$\phi(\Omega) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \tilde{\phi}_j \quad (2.96)$$

$$e(\Omega) = \sum_{j=1}^N e_j \tilde{\phi}_j. \quad (2.97)$$

Durch Einsetzen der auf diesen endlich-dimensionalen Teilraum projizierten Funktion (2.97) in die schwache Form (2.94) ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \pi_{in} \tilde{\phi}_k d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{c^2}{\omega \eta} \left(\nabla \sum_{j=1}^n e_j \tilde{\phi}_j \right) \cdot \nabla \tilde{\phi}_k + \dots \\ &+ \omega \eta e \tilde{\phi}_k d\Omega + \int_{\partial\Omega} \tilde{q}_n \tilde{\phi}_k d\Omega \quad \forall k = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Hierbei wurden als Testfunktionen die Basisvektoren von S_n verwendet. Um die Berechnungen im Folgenden zu vereinfachen ist das Integrationsgebiet Ω in Teilmengen, und zwar disjunkte Vierecke, zerlegt $\{E_m \subseteq \Omega : E_m \cap E_n = \emptyset \quad \forall m \neq n \wedge \bigcup_n E_n = \Omega\}$, um separat über diese Teilmengen zu integrieren. Weiterhin sind die auf den Vierecken definierten bilinearen Ansatzfunktionen $\tilde{\phi}_i \quad \forall i = 1, \dots, N$ auf das Einheitsviereck $[-1, 1]^2$ transformiert, um die Assemblierung zur Gesamtmatrix zu vereinfachen.

Zur Transformation der Gebiete $E_k \subseteq \Omega$ auf das Einheitsviereck ist der Diffeomorphismus

$$\Psi_{E_k} : [-1, 1]^2 \rightarrow E_k \subseteq \Omega; (\xi, \zeta) \mapsto (x, y) = \vec{a}\xi\zeta + \vec{b}\xi + \vec{c}\zeta + \vec{d} \quad (2.99)$$

mit $\vec{x}_i \in E_k$ für $i = 1, \dots, 4$ und

$$\vec{a} = \frac{1}{4}(\vec{x}_1 + \vec{x}_3 - \vec{x}_4 - \vec{x}_2) \quad (2.100)$$

$$\vec{b} = \frac{1}{4}(\vec{x}_3 + \vec{x}_4 - \vec{x}_1 - \vec{x}_2) \quad (2.101)$$

$$\vec{c} = \frac{1}{4}(\vec{x}_2 + \vec{x}_3 - \vec{x}_1 - \vec{x}_4) \quad (2.102)$$

$$\vec{d} = \frac{1}{4}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2 - \vec{x}_3 - \vec{x}_4) \quad (2.103)$$

zu verwenden. Hieraus ergeben sich direkt die Formfunktionen $N_{k,j} : [-1, 1]^2 \rightarrow [0, 1]; (\xi, \zeta) \mapsto N_{k,j}(\xi, \zeta)$ für $k = 1, \dots, N$

$$N_{k,1}(\xi, \zeta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \zeta) \quad (2.104)$$

$$N_{k,2}(\xi, \zeta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \zeta) \quad (2.105)$$

$$N_{k,3}(\xi, \zeta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \zeta) \quad (2.106)$$

$$N_{k,4}(\xi, \zeta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \zeta) \quad (2.107)$$

der bilinearen Finite Elemente, deren Träger das Einheitsquadrat $[-1, 1]^2$ ist. Die Transformation des Integrationsgebietes ist in Abbildung 2.8 gezeigt.

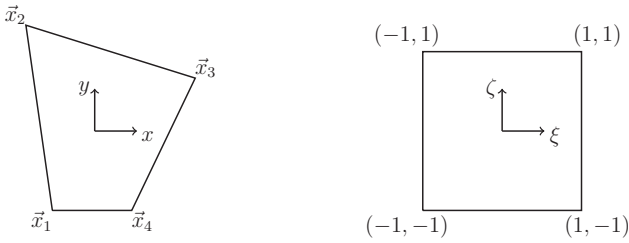


Abbildung 2.8: Koordinatentransformation auf das Einheitsquadrat

Um die schwache Form (2.98) elementweise für jedes auf das Einheitsquadrat reduzierte Viereck durchzuführen, ist der Transformationssatz [15] anzuwenden. Hierfür werden die Inversen und die Determinanten der Jacobimatrizen DT_k des Diffeomorphismus Ψ_{E_k} gemäß Gleichung (2.99) benötigt

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \end{pmatrix}}_{DT_k \in \mathbb{R}^{2 \times 2}} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \Rightarrow DT_k^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (2.108)$$

Zusammenfassend ergibt sich für eine Oberflächengeometrie mit einer Viereckszerlegung $\Omega = \bigcup_k E_k$ und eines finiten Elements als Testfunktion $\tilde{\phi}_i$ mit

$l = 1, \dots, N$ aus

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \pi_{in} \tilde{\phi}_l \, d\Omega &= \sum_k \int_{E_k} \pi_{in} \tilde{\phi}_l \, dE_k \\
 &= \sum_k \int_{E_k} \frac{c^2}{\omega\eta} \left(\nabla_{(x,y)} \sum_{j=1}^n e_j \tilde{\phi}_j \right) \cdot \left(\nabla_{(x,y)} \tilde{\phi}_l \right) \, dE_k \dots \\
 &\quad + \sum_k \int_{E_k} \omega\eta e_j \tilde{\phi}_j \tilde{\phi}_l \, dE_k \dots \\
 &\quad + \int_{\partial E_k} \vec{q}_{\vec{n}} \tilde{\phi}_l \, dE_k \quad \forall l = 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{2.109}$$

die transformierte Gleichung

$$\begin{aligned}
 &\sum_k \int_{[-1,1]^2} \pi_{in} N_l \det(DT_k) \, d[-1,1]^2 = \dots \\
 &\frac{c^2}{\omega\eta} \cdot \sum_k \int_{[-1,1]^2} \left(DT_k^{-1} \nabla_{(\xi,\zeta),k} \sum_{j=1}^n e_j N_j \right) \dots \\
 &\quad \cdot \left(DT_k^{-1} \nabla_{(\xi,\zeta),k} N_l \right) + \omega\eta e_j N_j N_l \det(DT_k) \, d[-1,1]^2 \\
 &\quad + \sum_k \int_{\partial[-1,1]^2} \vec{q}_{\vec{n}}(\xi, \zeta) N_l \det(DT_k) \, d\partial[-1,1]^2 \quad \forall l = 1, \dots, N,
 \end{aligned} \tag{2.110}$$

wobei DT_k und $\nabla_{(\xi,\zeta),k}$ die Transformationsparameter des k -ten Vierecks beschreiben. Diese gelten analog für drei-dimensionale Geometrien mit einer Hexaederzerlegung.

Aus der Gleichung (2.110) folgt direkt das lineare Gleichungssystem der Energie-Finite-Elemente-Methode für ein Viereckselement

$$\begin{aligned}
 &\underbrace{\int_{[-1,1]^2} \pi_{in} N_i \det(DT_k) \, d[-1,1]^2}_{F^{E_k}} = \frac{c^2}{\omega\eta} \dots \\
 &\quad \cdot \underbrace{\int_{[-1,1]^2} \sum_{j=1}^4 \left(DT_k^{-1} \nabla_{(\xi,\zeta),k} e_j N_j \right) \cdot \left(DT_k^{-1} \nabla_{(\xi,\zeta),k} N_i \right) \det(DT_k) \, d[-1,1]^2}_{DNN^{E_k \cdot e}} \\
 &\quad + \omega\eta \underbrace{\int_{[-1,1]^2} \sum_{j=1}^4 e_j N_j N_i \det(DT_k) \, d[-1,1]^2}_{NN^{E_k \cdot e}} \\
 &\quad + \underbrace{\int_{\partial[-1,1]^2} \vec{q}_{\vec{n}}(\xi, \zeta) N_i \det(DT_k) \, d\partial[-1,1]^2}_{Q^{E_k}} \quad \forall i = 1, \dots, 4
 \end{aligned} \tag{2.111}$$

und lässt sich ebenfalls über Elementmatrizen ausdrücken

$$F^{E_k} = \frac{c^2}{\omega\eta} DNN^{E_k}e + \omega\eta NN^{E_k}e + Q^{E_k}. \quad (2.112)$$

Dieser elementweise Ansatz bietet sich für ein sehr effizientes Aufstellen der Gesamtmatrix an und führt durch Assemblierung der Elementmatrizen F^{E_k} , DNN^{E_k} , NN^{E_k} und Q^{E_k} zum Gesamtsystem

$$F = \frac{c^2}{\omega\eta} DNNe + \omega\eta NNe + Q, \quad (2.113)$$

wobei die Kopplungsterme sich als zusätzliche Energieflüsse im Term Q befinden.

Der schematische Aufbau einer Gesamtsystemmatrix für ein Modell, bestehend aus drei Subsystemen, bei dem nur BE 1 mit BE 2 und BE 2 mit BE 3 interagieren, beispielsweise eine U-Struktur aus Stahlplatten, ist in Abbildung 2.9 gezeigt. Jeder Block beschreibt die Energieausbreitung in dem entsprechenden Basiselement und ist für sich abgeschlossen, da noch keine Kopplungsterme in der Systemmatrix $K = \frac{c^2}{\omega\eta} DNN + \omega\eta NN$ integriert sind. Jeder Block basiert auf einem herkömmlichen FE-Ansatz und ist somit dünnbesetzt und symmetrisch. Die Beschreibung dieser Kopplungsterme findet im Abschnitt 2.4.2 statt und wird daraufhin in die Abbildung integriert.

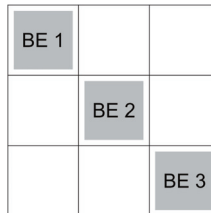


Abbildung 2.9: Aufbau einer Systemmatrix ohne Kopplungsterme

2.4.2 Kopplung der Basiselemente

Die Kopplungsbeziehungen aus Unterkapitel 2.2 werden in diesem Abschnitt in den FE-Ansatz integriert und in das lineare Gleichungssystem zur Beschreibung der Energieverteilung eingeordnet. Da eine Großzahl der anwendungsorientierten Problemstellungen mit wenigen Kopplungstypen abzudecken ist,

werden nur diese Kopplungstypen detailliert beschrieben. Hierzu zählen die Platten-Platten- (P-P), bzw. Platten-Balken-Platten- (P-B-P) und die Platten-Fluid-Kopplung (P-F).

Für die **P-P-Kopplung** einer Platte L mit einer Platte M gilt für den Energieaustausch die Beziehung

$$\begin{pmatrix} Q_L \\ Q_M \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} e_L \\ e_M \end{pmatrix}. \quad (2.114)$$

Diese Beziehung wird auf jedes Jointelement angewendet, wobei jede Platte an jedem Jointelement mit jeweils zwei Knoten beteiligt ist (Abbildung 2.10). Die Kopplungsbeziehung (2.114) gilt für ein noch nicht diskretisiertes Basiselement, in dem sich die Energiedichten e_L und e_M sowie der Energiefluss Q_L und Q_M auf das gesamte Basiselement beziehen [7, 10, 35].

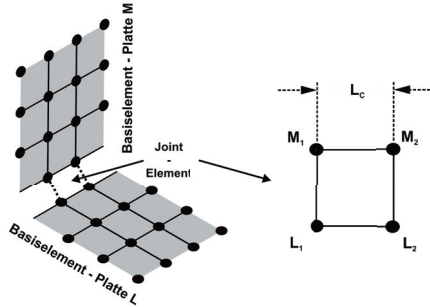


Abbildung 2.10: P-P-Kopplung im diskretisierten EFE-Modell

Der Energiefluss an den an der Kopplung beteiligten Punkten ist über die Formfunktionen und die Länge der gemeinsamen Kante L_c dargestellt

$$Q_{L_1} = \int_{L_c} \tilde{\phi}_{L_1} q_L dL_c \quad (2.115)$$

$$Q_{L_2} = \int_{L_c} \tilde{\phi}_{L_2} q_L dL_c. \quad (2.116)$$

Durch Kombination der Kopplungsbeziehung (2.114) mit der auf die Diskretisierung angepassten Energieflüsse (2.115) und (2.116), ergibt dies unter Be-

rücksichtigung der Transformation auf das Einheitsquadrat die Gleichung

$$\begin{pmatrix} Q_{L_1} \\ Q_{L_2} \\ Q_{M_1} \\ Q_{M_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_{11} \frac{L_c}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & j_{12} \frac{L_c}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ j_{21} \frac{L_c}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & j_{22} \frac{L_c}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{L_1} \\ e_{L_2} \\ e_{M_1} \\ e_{M_2} \end{pmatrix}. \quad (2.117)$$

Für die P-P-Kopplung ist das aus der Diskretisierung entstandene lineare Gleichungssystem (2.117) vollständig beschrieben. Diese Kopplungsbeziehung ist identisch mit der P-B-P-Kopplung, da der Einfluss des Balkens in den Transmissionskoeffizienten und somit in der Matrix J (2.90) enthalten ist. Die Berechnung der Transmissionskoeffizienten ist detailliert in Kapitel 4 beschrieben.

Es folgt der zweite wichtige Kopplungstyp, die **Platten-Fluid-Kopplung** oder Platten-Kavität-Kopplung, für die sich aus (2.81) - (2.82) die Gleichung

$$\begin{pmatrix} q_{Fluid} dS_c \\ q_{Platte} d\Gamma_c \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} e_{Fluid} dS_c \\ e_{Platte} d\Gamma_c \end{pmatrix} \quad (2.118)$$

ergibt. In diesem Fall ist das Jointelement ein Hexaeder, wobei dieses im Fluid ebenfalls mit einem Hexaeder- und strukturseitig mit einem Quadelement verbunden ist (Abbildung 2.11). Dies bedarf einer Berücksichtigung in den Kopplungstermen.

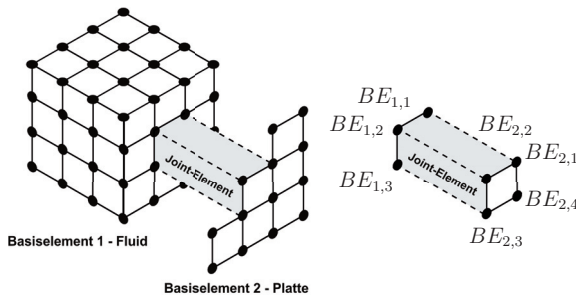


Abbildung 2.11: P-K-Kopplung im EFEM-Gitter

Die Energieflüsse zwischen den Basiselementen werden ebenfalls mittels der

Ansatzfunktionen $\tilde{\phi}_k$ dargestellt

$$Q_{Fluid} = \int_{S_c} \tilde{\phi}_{Fluid} j_{1,1} e_{Fluid} dS + \int_{\Gamma_c} \tilde{\phi}_{Platte} j_{1,2} e_{Platte} d\Gamma \quad (2.119)$$

$$Q_{Platte} = \int_{S_c} \tilde{\phi}_{Fluid} j_{2,1} e_{Fluid} dS + \int_{\Gamma_c} \tilde{\phi}_{Platte} j_{2,2} e_{Platte} d\Gamma, \quad (2.120)$$

um die Flüsse auf die an der Kopplung beteiligten Gitterpunkte zu beziehen, $BE_{1,j}$ und $BE_{2,j}$ für $j = 1, 2, 3, 4$. Durch Projektion der Energievariable $e = \sum_{k=1}^4 \tilde{\phi}_k e_k$ auf den FE-Raum des Kopplungselementes in den Gleichungen (2.119) - (2.120) ergeben sich

$$\begin{aligned} Q_{BE_{1,j}} &= \sum_{k=1}^4 \int_{S_c} \tilde{\phi}_{BE_{1,j}} \tilde{\phi}_{BE_{1,j}} j_{1,1} dS \dots \\ &\quad + \sum_{k=1}^4 \int_{\Gamma_c} \tilde{\phi}_{BE_{2,j}} \tilde{\phi}_{BE_{2,j}} j_{1,2} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.121)$$

$$\begin{aligned} Q_{BE_{2,j}} &= \sum_{k=1}^4 \int_{S_c} \tilde{\phi}_{BE_{1,j}} \tilde{\phi}_{BE_{1,j}} j_{2,1} dS \dots \\ &\quad + \sum_{k=1}^4 \int_{\Gamma_c} \tilde{\phi}_{BE_{2,j}} \tilde{\phi}_{BE_{2,j}} j_{2,2} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.122)$$

und durch Transformation auf die Formfunktionen $\tilde{\phi}_k \mapsto N_k$ zu einer der Diskretisierung angepassten Gleichung

$$\begin{pmatrix} Q_{BE_{1,1}} \\ Q_{BE_{1,2}} \\ Q_{BE_{1,3}} \\ Q_{BE_{1,4}} \\ Q_{BE_{2,1}} \\ Q_{BE_{2,2}} \\ Q_{BE_{2,3}} \\ Q_{BE_{2,4}} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} j_{11} \frac{S_c}{36} K M_{Fluid} & j_{12} \frac{\Gamma_c}{24} K M_{Platte} \\ j_{21} \frac{S_c}{36} K M_{Fluid} & j_{22} \frac{\Gamma_c}{24} K M_{Platte} \end{pmatrix}}_{\tilde{j}} \begin{pmatrix} e_{BE_{1,1}} \\ e_{BE_{1,2}} \\ e_{BE_{1,3}} \\ e_{BE_{1,4}} \\ e_{BE_{2,1}} \\ e_{BE_{2,2}} \\ e_{BE_{2,3}} \\ e_{BE_{2,4}} \end{pmatrix} \quad (2.123)$$

mit der Kopplungsmatrix \tilde{J} und den Teilmatrizen

$$KM_{Fluid} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (2.124)$$

$$KM_{Platte} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}. \quad (2.125)$$

In diesem Zusammenhang sind die Kopplungsbeziehungen für die beiden Kopplungsarten (2.117) und (2.123) in die Systemmatrix einzufügen, welche den Energiefluss zwischen den Basiselementen beschreiben.

Um den schematischen Aufbau der Gesamtsystemmatrix hinsichtlich der Kopplungsterme zu verdeutlichen, wird das Beispiel der aus drei Basiselementen bestehenden Struktur aus dem vorherigen Abschnitt wieder aufgegriffen. Abbildung 2.12 zeigt eine schematische Darstellung des Matrixaufbaus dieses Beispiels, wobei zusätzlich zur Abbildung 2.9, in der nur die Matrixeinträge der Basiselemente dargestellt sind, nun auch die Kopplungseinträge integriert sind.

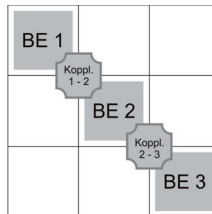


Abbildung 2.12: Aufbau der Systemmatrix mit Kopplungstermen

Für jeden Kopplungstyp und jedes an dieser Kopplung partizipierende Basiselement existiert eine individuelle Matrix, die sich aus der Transformation der Kopplungsgrößen vom Basiselement auf die diskreten Punkte des Jointelementes ergibt. Diese Matrizen wurden in gegenwärtigen Abschnitt hergeleitet und aufgrund der Übersichtlichkeit in Tabelle 2.6 zusammenfassend aufgelistet.

Tabelle 2.6: Teilmatrizen der Kopplung

Kopplungstyp	Teilmatrix
Platten-Platten-Kopplung	$\frac{L_c}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
Plattenteil bei der Platten-Fluid-Kopplung	$\frac{\Gamma_c}{24} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$
Fluidteil bei der Platten-Fluid-Kopplung	$\frac{S_c}{36} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

Kapitel 3

Parameteranalyse für ungekoppelte Modelle

Um den Einfluss der Parameter in der EFEM-Basisgleichung (2.63) zu verstehen und diese hinsichtlich der Anwendbarkeit auf komplexe Modelle zu überprüfen, erfolgt in diesem Kapitel eine Analyse anhand eines Modells bestehend aus einem EFEM-Basiselement. Zusätzlich werden die für die Herleitung der Basisgleichung notwendigen Voraussetzungen untersucht. Abschließend sind einige Validitätskriterien hinsichtlich der EFEM-Modellerstellung und Interpretation der Ergebnisse aufgeführt. Für diese Analysen ist vorerst eine Verifizierung des für die Parameterstudien verwendeten Modells durchgeführt.

3.1 Verifizierung des EFEM-Modells

Für Parameterstudien der Energie-Finite-Elemente-Methode wird eine aus einem Subsystem bestehenden Teststruktur, eine Stahlplatte, verwendet und vorerst verifiziert. Die energetische Betrachtung wird mit der verschiebungsbasierten dynamischen Schwingungsgleichung verglichen. Hierzu dienen eine numerische Lösung mittels FE-Methode und eine analytische Lösung. Zur Verifizierung der EFEM ist ein Abgleich dieser drei Verfahren dargestellt. Für die Analysen in Kapitel 3 wird stets dieses verifizierte Modell verwendet.

Als Testbeispiel für die Berechnung mit der EFEM dient eine allseitig einfachgelagerte quadratische Stahlplatte mit einer Dicke von $h = 5$ mm und ei-

ner Kantenlänge von $L_x = L_y = 1000$ mm. Im Zentrum dieser Platte wirkt eine harmonische Kraft orthogonal zur Plattenfläche von $F = 1$ N mit einer Frequenz von $f = 2000$ Hz. Dies führt auf die Parameter der EFEM-Basisgleichung (2.63) von einer Ausbreitungsgeschwindigkeit nach der Kirchhoff-Theorie $c_K = 619,4$ m/s, einer Ausbreitungsgeschwindigkeit nach der Mindlin-Theorie $c_M = 611,1$ m/s sowie einer Dämpfung von $\eta = 2\%$ und $\omega = 2\pi f$. Die Verifizierung wird nur für den Wellentyp der Biegewellen durchgeführt, da die anregende Kraft orthogonal zur Plattenfläche wirkt.

Die Bewegungsgleichung einer schwingenden rechteckigen Platte (2.43) mit den Kantenlängen L_x und L_y kann mittels der **Reihenentwicklung**

$$u_z(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{m,n}(t) M_{m,n}(x, y) \quad (3.1)$$

gelöst werden, wobei die Moden $M_{m,n}(x, y)$ und die modalen Partizipationsfaktoren $p_{m,n}(t)$ durch

$$M_{m,n}(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (3.2)$$

$$p_{m,n}(t) = \frac{F_{m,n} \exp i\omega t}{\omega_{m,n}^2 - \omega^2 + i\eta\omega_{m,n}^2} \quad (3.3)$$

gegeben sind [10]. Die modale punktuelle harmonische Last an der Stelle (x_0, y_0) ist durch

$$F_{m,n} = \frac{4}{\rho h L_x L_y} F_{in} M_{m,n}(x_0, y_0) \quad (3.4)$$

mit einer anregenden Kraft F_{in} beschrieben. Weiterhin sind die Eigenfrequenzen der rechteckigen Platte durch

$$\omega_{m,n} = \sqrt{\frac{D}{\rho h} \left[\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2 \right]} \quad (3.5)$$

gegeben. Mithilfe der Reihenentwicklung (3.1) sind die Verschiebungen der rechteckigen Platte beschrieben. Sie lassen sich mittels Gleichung (2.45) in Energiedichten umrechnen. Da die Stahlplatte einfach gelagert ist, gilt für die Verschiebungen auf dem Rand der Platte $\partial\Omega = \partial[0, L_x] \times \partial[0, L_y]$

$$u_z|_{\partial\Omega} = 0 \quad (3.6)$$

und somit gilt für den Energiefluss $\vec{q}_{\vec{n}}$ in Richtung der äußeren Normalen \vec{n}

$$\vec{q}_{\vec{n}}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.7)$$

Um die Vergleichbarkeit zwischen analytischer und EFEM-Berechnung zu gewährleisten, ist die Eingangsleistung π_{in} am Anregungspunkt zu bestimmen, die sich bei einer anregenden Kraft von $F = 1$ N einstellt. Die Eingangsleistung für diese punktförmige Anregung ergibt sich über den Phasenbezug von Kraft und Schnelle am Anregungspunkt¹

$$\pi_{in} = \frac{1}{2} \Re \left\{ \vec{F} \cdot \vec{v}^* \right\}. \quad (3.8)$$

Um eine qualitative Vorstellung der Energieverteilung auf der Teststruktur zu erhalten, ist diese auf Basis der EFEM und FEM in Abbildung 3.1 bzw. 3.2 dargestellt. Die Abbildung 3.1 zeigt die zeitlich und räumlich gemittelte Energiedichte als Lösungsfunktion der EFEM-Basisgleichung (2.63). Am Anregungspunkt befindet sich das Maximum der Energiedichte, wobei der Energiefluss $\vec{q} = -a\nabla e$ in alle Raumrichtungen gleichmäßig ist. Die Abbildung 3.2 zeigt die zeitlich gemittelte Energiedichteverteilung (2.45) auf Basis der FEM-Ergebnisse der dynamischen Bewegungsgleichung (2.43). Im Gegensatz zur Abbildung 3.1 ist diese Energiedichte nicht räumlich lokal über eine Wellenlänge gemittelt.

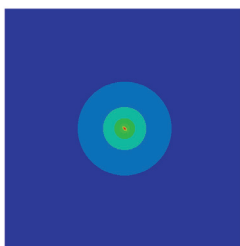
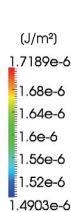


Abbildung 3.1: EFEM

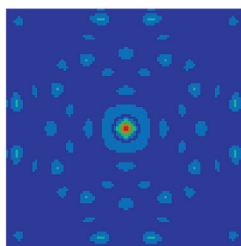
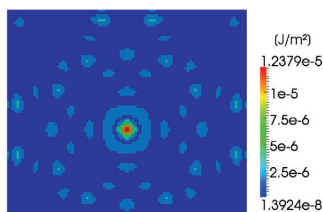


Abbildung 3.2: FEM

Um dieses Testbeispiel für zukünftige Parameterstudien mit der EFEM zu verwenden, ist dieses vorerst zu verifizieren. Hierfür wird das energetische Rand-

¹Das Zeichen .* beschreibt die komplexe Konjugation, siehe Gleichung (3.8).

wertproblem des Testbeispiels

$$\delta \left(\frac{L_x}{2}, \frac{L_y}{2} \right) \cdot \pi_{in} = -\frac{c_K^2}{\omega \eta} \Delta e + \omega \eta e \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{n}} \Big|_{\partial[0, L_x] \times \partial[0, L_y]} = 0 \quad (3.10)$$

der verschiebungs-basierten klassischen Formulierung

$$\delta \left(\frac{L_x}{2}, \frac{L_y}{2} \right) = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (1+i\eta) \nabla^4 u_z + \rho h \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad (3.11)$$

$$u_z \Big|_{\partial[0, L_x] \times \partial[0, L_y]} = 0 \quad (3.12)$$

gegenübergestellt, wobei die Verschiebungen u_z mittels (2.45) in zeitlich gemittelte Energiedichten umgerechnet werden und durch eine räumlich lokale Mittelung (2.44) der energetischen Größe aus der EFEM entsprechen. Für die Anwendbarkeit und die Verifizierung der EFEM auf dieses Testbeispiel wird die Energieverteilung auf der Stahlplatte mit drei Ansätzen berechnet. In Abbildung 3.3 werden ein analytischer Ansatz mittels Reihenentwicklung (3.1) und eine numerische Berechnung mittels Finite-Elemente-Ansatz der klassischen Formulierung (3.11) und (3.12) der energetischen Betrachtung (3.9) und (3.10) mit der EFEM gegenübergestellt. Hierfür sind die berechneten Energiedichten nur auf der Plattendiagonale dargestellt.

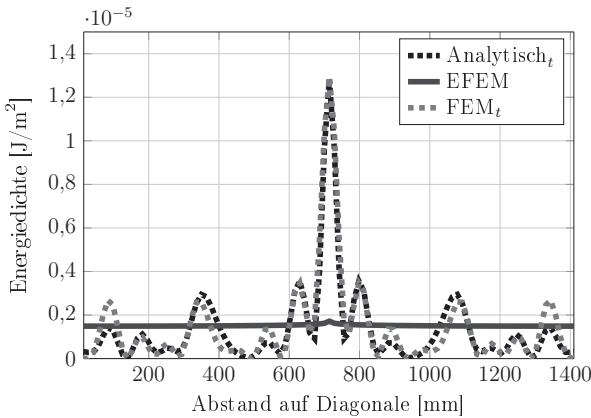


Abbildung 3.3: Energiedichte auf der Plattendiagonalen

Bei der EFEM bleibt das Nahfeld $\exp(-kx) = 0$ unberücksichtigt und somit zeigt die FEM-Berechnung eine Überhöhung um den Anregungspunkt. Da in der EFEM zusätzlich zur zeitlichen Mittelung auch eine räumliche Mittelung über eine Wellenlänge erfolgt, zeigt die Abbildung 3.4 zusätzlich die räumlich gemittelte Energiedichte der klassischen verschiebungsbasierten Bewegungsgleichung auf Basis der FEM-Berechnung FEM_{AV} .

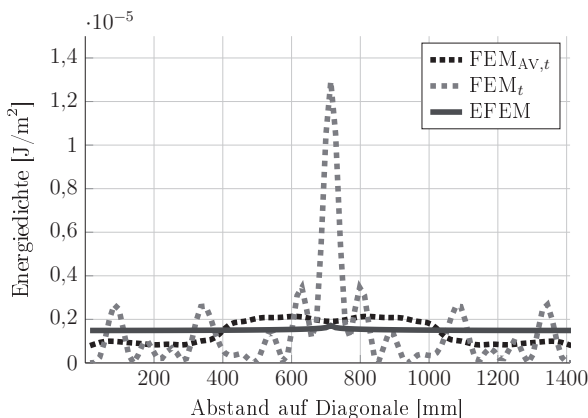


Abbildung 3.4: Energiedichte auf der Plattendiagonalen

Die Energieverteilung FEM_{AV} zeigt weiterhin eine Überhöhung um den Anregungspunkt, beschreibt allerdings hinreichend genau das Energieniveau des Systems. Dieses Modell einer quadratischen Platte ist verifiziert und es folgt eine Analyse der für die Herleitung der EFEM-Basisgleichung (2.63) gesetzten Prämissen.

3.2 EFEM Prämissen

Die Energie-Finite-Elemente-Methode basiert auf der Leistungsbilanz (2.8), die unter Berücksichtigung von Prämissen (A1) - (A6) die EFEM-Basisgleichung (2.63) ergibt und äquivalent zur stationären Wärmeleitungsgleichung ist. Die zur Herleitung gesetzten Prämissen erfahren in diesem Unterkapitel eine detaillierte Untersuchung, wobei ausschließlich die Prämissen

- der Äquivalenz der zeitlich gemittelten potentiellen und kinetischen Energiedichte (A3),
- der Vernachlässigung des Nahfeldes (A4) und
- der geringen Dämpfung (A6)

zu prüfen sind. Für die folgenden Analysen wird das verifizierte Modell einer harmonisch angeregten Stahlplatte verwendet.

Eine gesetzte Prämisse ist eine **geringe Dämpfung**. Zu untersuchen ist, ob diese Prämisse eine Einschränkung darstellt und ob durch die Vereinfachung des Dämpfungsterms ein signifikanter Fehler auftritt. In Metallstrukturen ist eine Dämpfung von ca. $\eta = 2\%$ und in Fluiden wie Luft oder Wasser von ca. $\eta = 5 \cdot 10^{-2}\%$ realistisch. Bei der Herleitung der EFEM-Basisgleichung werden der dämpfungsabhängige Term für Longitudinal-, Scher- und Torsionswellen

$$(1 + i\eta)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \underbrace{\frac{\eta}{2}i - \frac{3\eta^2}{8} + \frac{5\eta^3}{16}i + \frac{35\eta^4}{128} + \dots}_{\approx 0} \cong (1 - i\frac{\eta}{2}) \quad (3.13)$$

und der Term für Biegewellen

$$(1 + i\eta)^{-\frac{1}{4}} = 1 - \underbrace{\frac{\eta}{4}i - \frac{5\eta^2}{32} + \frac{15\eta^3}{128}i + \frac{195\eta^4}{2048} + \dots}_{\approx 0} \cong (1 - i\frac{\eta}{4}) \quad (3.14)$$

mittels der Taylorreihe approximiert und nach dem zweiten Summanden abgebrochen [7, 10, 35]. In der EFEM ist die komplexe Wellenzahl für Biegewellen in der Kirchhoff-Theorie durch

$$k = \frac{\omega}{c} \frac{1}{(1 + i\eta)^{0,25}} = k_1 + ik_2 \quad (3.15)$$

$$= |k| \left(\Re \left(\frac{1}{(1 + i\eta)^{0,25}} \right) + i \underbrace{\Im \left(\frac{1}{(1 + i\eta)^{0,25}} \right)}_{\tilde{\eta}} \right) \quad (3.16)$$

angenähert. Der Imaginärteil, der die Dämpfung repräsentiert, ist für Biegewellen durch $\tilde{\eta}_B = \Im(1 + i\eta)^{-0,25}$ und für Longitudinal-, Scher- und Torsionswellen durch $\tilde{\eta}_{LST} = \Im(1 + i\eta)^{-0,5}$ gegeben.

Der Betrag der Wellenzahl hat auf die Dämpfung in der EFEM folglich keinen Einfluss, anders jedoch der Imaginärteil. Der absolute Fehler des Imaginärteils ist für die Biegewellen sowie für die Longitudinal-, Scher-, und Torsionswellen durch

$$\Delta_B \eta = \left(\frac{\eta}{4} - \tilde{\eta}_B \right) \quad (3.17)$$

$$\Delta_{LST} \eta = \left(\frac{\eta}{2} - \tilde{\eta}_{LST} \right) \quad (3.18)$$

gegeben. Die Abbildung 3.5 zeigt den absoluten und relativen Fehler der Approximation des Imaginärteils in Abhängigkeit der Dämpfungskonstante η .

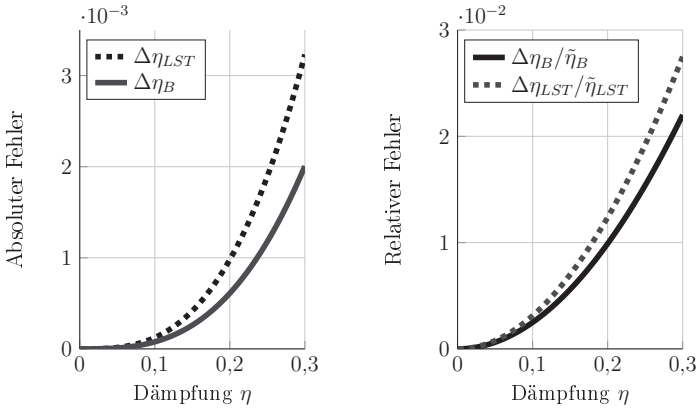


Abbildung 3.5: Absoluter und relativer Fehler des Dämpfungsterms

Der absolute und der relative Fehler steigen mit einer Erhöhung der Dämpfungskonstanten η , d.h. bei einer geringen Dämpfung ergibt sich ebenfalls ein geringer Fehler des Imaginärteils. Bis zur einer Dämpfung von $\eta \leq 0,02$ ist der relative Fehler auf

$$\max \{ \Delta \eta_B / \tilde{\eta}_B, \Delta \eta_{LST} / \tilde{\eta}_{LST} \} \leq 1,5 \cdot 10^{-4} \quad (3.19)$$

und der absolute Fehler auf

$$\max \{ \Delta \eta_B, \Delta \eta_{LST} \} \leq 10^{-6} = \eta_{max} \quad (3.20)$$

beschränkt. Von weiterem Interesse sind Auswirkungen dieses absoluten Fehlers der Dämpfungskonstanten auf die Energiedichteverteilung. Ersetzt man in

der EFEM-Basisgleichung die exakte Dämpfungskonstante η_{exakt} durch eine approximierte Konstante η_{approx}

$$\pi_{in} = -\frac{c^2}{\omega\eta_{\text{exakt}}}\Delta e + \omega\eta_{\text{exakt}}e \quad (3.21)$$

$$\pi_{in} = -\frac{c^2}{\omega\eta_{\text{approx}}}\Delta\tilde{e} + \omega\eta_{\text{approx}}\tilde{e}, \quad (3.22)$$

ergeben sich Auswirkungen auf die Energiedichteverteilung. In Tabelle 3.1 sind für eine Dämpfung von $\eta = 1\%$ und $\eta = 2\%$ der absolute Fehler $\Delta\eta_{B,LST}$, die Differenz der Energiedichte $\|e - \tilde{e}\|_2$ sowie relative Fehler der Energiedichte $\|e - \tilde{e}\|_2 / \|e\|_2$ in der L^2 -Norm $\|e\|_2^2 = \int_{\Omega} e^2 d\Omega$ angegeben.

Tabelle 3.1: Auswirkungen des Approximationsfehlers

η_{exakt}	$\Delta\eta_{B,LST}$	$\ e - \tilde{e}\ _2$	$\ e - \tilde{e}\ _2 / \ e\ _2$
1%	$\leq 10^{-6}$	$1.13 \cdot 10^{-5}$	$\leq 10^{-3}$
2%	$\leq 10^{-6}$	$4.63 \cdot 10^{-5}$	$\leq 5 \cdot 10^{-4}$

Durch die Approximation des Dämpfungsterms in der EFEM ist der relative Fehler der Energiedichte für $\eta = 1\%$ und $\eta = 2\%$ auf 10^{-3} beschränkt. Hieraus ergibt sich eine Abweichung des Energiedichtepegels von $\Delta e \leq 10^{-2}$ dB. Somit zeigt sich, dass sich für diesen Anwendungsfall der Approximationsfehler des Dämpfungsterms nicht nennenswert auf die Energiedichte fortpflanzt.

Um die charakteristische Abhängigkeit der Dämpfung auf die Energiedichteverteilung zu verdeutlichen ist ebenfalls die Energiedichte für ausgewählte Dämpfungen in Abbildung 3.6 dargestellt.

Für geringe Dämpfungen ist die mit der EFEM ermittelte Energiedichte einer rechteckigen Stahlplatte annähernd gleichverteilt. Am Anregungspunkt befindet sich ein Maximum, wobei die Energiedichte mit zunehmender Entfernung abnimmt. Je höher die Dämpfung ist, desto stärker nimmt die Energiedichte ab und desto geringer ist die Gesamtenergie in der Stahlplatte, da die dissipierte Leistung $\int \pi_{\text{diss}} d\Omega = \int \eta\omega e d\Omega$ steigt.

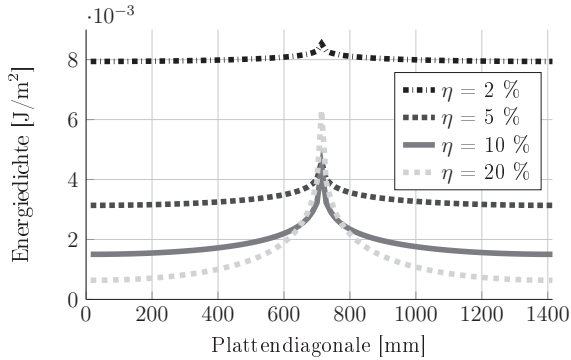


Abbildung 3.6: Energiedichte auf der Plattendiagonalen

Eine weitere EFEM-Prämisse ist die **Vernachlässigung des Nahfeldes** für Biegewellen. Bei der Approximation der Verschiebungen nach Gleichungen (2.45) - (2.47) bleibt der Term $\exp(-kx)$ unberücksichtigt. Um dieses Nahfeld um den Anregungspunkt zu quantifizieren ist die Wellenzahl der Biegewellen heranzuziehen. Für das Beispiel einer quadratischen Stahlplatte ergibt dies mit der Kirchhoff-Theorie eine Wellenzahl von $k_K = 20.29 \text{ m}^{-1}$. Die fallende Exponentialfunktion $\exp(-k_K x)$ skaliert mit dem Maximum der Energiedichte ist in Abbildung 3.7 der analytischen Berechnung gegenübergestellt.

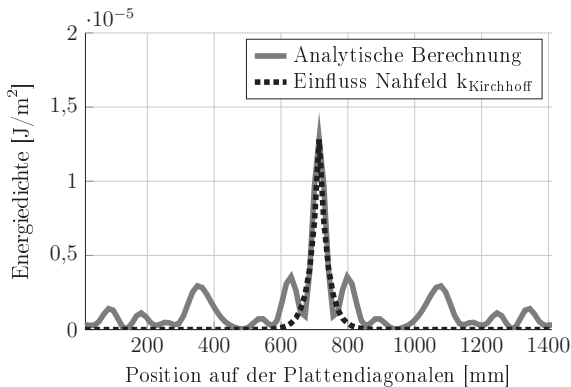


Abbildung 3.7: Einfluss Nahfeld

Die Abnahme der fallenden Exponentialfunktion ist konsistent zu dem Abfall der analytischen Lösung der Energieverteilung auf der Plattendiagonalen. Die im Verifizierungsprozess in Abbildung 3.3 gezeigte Unterschätzung des Nahfeldes mit der EFEM führt somit zu keinem signifikanten Einfluss auf das Fernfeld und stellt für das Beispiel einer harmonisch angeregten Stahlplatte keine Einschränkung dar.

In der Theorie der EFEM ist die zeitlich gemittelte Gesamtenergiedichte durch das Zweifache der zeitlich gemittelten potentiellen Energiedichte $e_{ges,t} = 2 \cdot e_{pot,t}$ approximiert. Dies basiert auf einer **Äquivalenz der zeitlich gemittelten kinetischen und potentiellen Energiedichte**. Abbildung 3.8 zeigt die kinetische und potentielle Energiedichten und bestätigt eine hinreichend genaue Äquivalenz $e_{kin,t} = e_{pot,t}$ im Fernfeld. Aus der Literatur [10, 35] ist diese Äquivalenz für den hohen Frequenzbereich mit einer geringen Dämpfung für das Fernfeld bekannt. Für das Testbeispiel der Stahlplatte bestätigt sich diese Äquivalenz, wobei im Nahfeld um den Anregungspunkt eine höhere Abweichung zu erkennen ist.

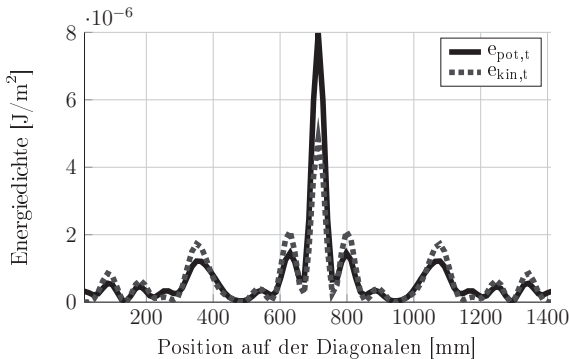


Abbildung 3.8: Äquivalenz der zeitlich gemittelten Energiedichten

3.3 Sensitivität der EFEM-Parameter

Bevor mit der EFEM die Energieverteilung komplexer gekoppelter Systeme berechnet wird, ist die Parametersensitivität für das Testbeispiel einer Stahlplatte durchzuführen. Dies betrifft für die EFEM-Basisgleichung die Parameter Eingangsleistung π_{in} , Ausbreitungsgeschwindigkeit c_{WT} , Dämpfung η und Frequenz f mit $\omega = 2\pi f$.

3.3.1 Eingangsleistung

Die Eingangsleistung ist eine maßgebliche Größe für eine EFEM-Berechnung und beschreibt die Anregung des Systems. Sie hat linearen Einfluss auf die Energiedichteverteilung. Allerdings ist die Eingangsleistung gemäß Gleichung (3.8) nicht nur von der eingeleiteten Kraft abhängig, sondern auch vom Strukturverhalten am Kräfteinleitungspunkt. Somit sind die Resonanzfrequenzen der Struktur ebenfalls in der Eingangsleistung zu erkennen. In Abbildung 3.9 ist die Eingangsleistung einer quadratischen Stahlplatte durch eine im Zentrum anliegende Kraft von $F = 1$ N über der Anregungsfrequenz dargestellt.

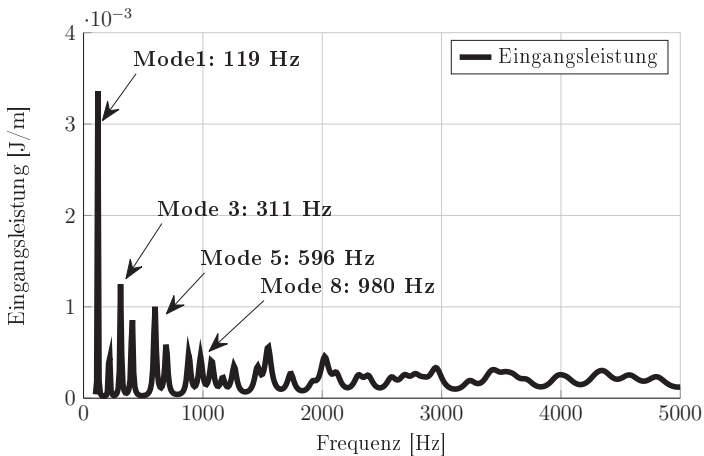


Abbildung 3.9: Quadratische Stahlplatte - Eingangsleistung

An einigen lokalen Maxima der Eingangsleistung ist der direkte Zusammenhang zu den entsprechenden Moden bzw. Eigenfrequenzen der Stahlplatte zu erkennen, welche beispielhaft in Abbildung 3.9 gekennzeichnet sind. Die Eingangsleistung für punktuelle Anregungen gemäß Gleichung (3.8) ist ohne Kenntnis des Strukturverhaltens nicht exakt berechenbar. Somit ist eine Messung oder Schätzung der Eingangsleistung allein durch die Stärke und Lokalisation der Quelle nicht möglich. Es muss zusätzlich zur Oberflächenschnelle am Anregungspunkt der Phasenbezug zur anregenden Kraft bekannt sein.

3.3.2 Parameter der Energieausbreitung

Ausbreitungsgeschwindigkeit

Zu untersuchen ist der Einfluss der Ausbreitungsgeschwindigkeit c_{WT} auf die Energieverteilung. Mittels Variation dieses Parameters in dem Bereich von 100 m/s bis 4000 m/s ist die Energiedichteverteilung auf der Plattendiagonalen berechnet und in Abbildung 3.10 dargestellt.

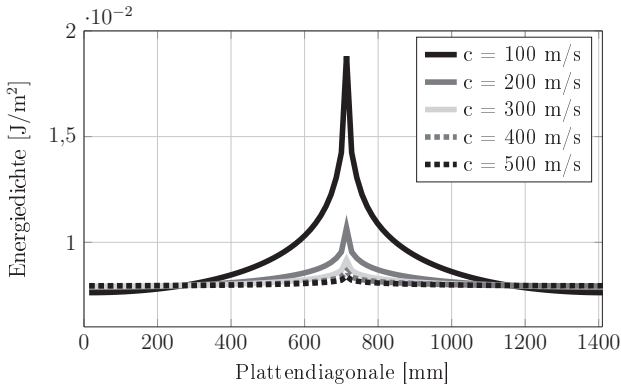


Abbildung 3.10: Energiedichteverteilung längs der Plattendiagonale

Bei niedrigen Geschwindigkeiten bis 300 m/s ist eine starke Auswirkung und für höhere Werte ein geringer Einfluss auf die Energieverteilung zu erkennen. Zusätzlich zeigt Abbildung 3.11 ein hyperbolisches Verhalten des inversen Dif-

ferentialoperators $(\frac{c_{WT}^2}{\omega\eta}\Delta + \omega\eta I)^{-1}$ [15]. Hierfür ist die Norm der Energiedichte in Abhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit dargestellt.

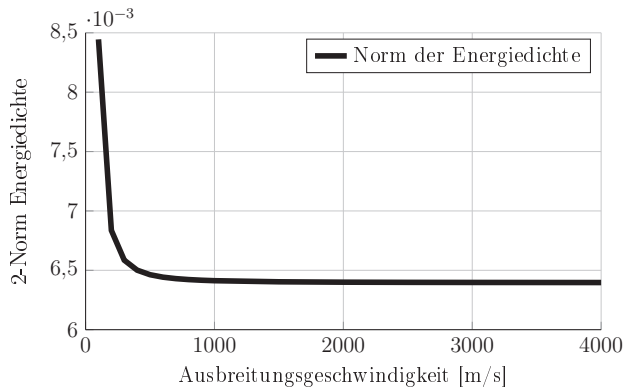


Abbildung 3.11: Einfluss von c_{WT}

Der Parameter der Ausbreitungsgeschwindigkeit kann bei Biegewellen in Abhängigkeit der zugrundegelegten Theorie, Kirchhoff- oder Mindlin-Theorie, vor allem im hohen Frequenzbereich bei zunehmender Plattendicke starke Unterschiede aufweisen. Beispiele hierfür sind der Abbildung 3.12 zu entnehmen.

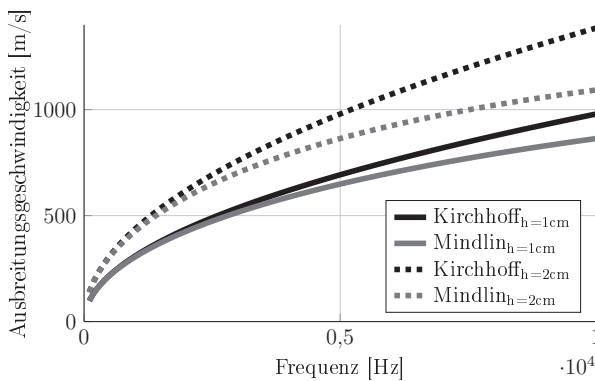


Abbildung 3.12: Kirchhoff- und Mindlin-Theorie c_{WT}

Die Unterschiede basieren auf den Annahmen der beiden Theorien. Der Einfluss der bei der Kirchhoff-Theorie vernachlässigten Schubverformungen steigt mit zunehmender Frequenz und Plattendicke, die in vielen praxisnahen Anwendungsfällen der EFEM zu hohen Ausbreitungsgeschwindigkeiten führen. Allerdings findet aufgrund des hyperbolischen Verhaltens des inversen Differentialoperators bei hohen Ausbreitungsgeschwindigkeiten eine Abschwächung dieser Ungenauigkeit auf die Energiedichte statt.

Anregungsfrequenz

Die Anregungsfrequenz oder Berechnungsfrequenz $\omega = 2\pi f$ und die Dämpfung η können in der EFEM-Basisgleichung in einem Parameter $\tilde{b} = \omega\eta$ zusammengefasst werden

$$\pi_{in} = \frac{c_{WT}^2}{\omega\eta} \Delta e + \omega\eta e \quad (3.23)$$

$$\pi_{in} = \frac{c_{WT}^2}{\tilde{b}} \Delta e + \tilde{b}e. \quad (3.24)$$

Aus einer linearen Skalierung der Frequenz $\omega \mapsto \lambda\omega$ resultieren also die selben Auswirkungen wie aus einer linearen Skalierung der Dämpfung $\eta \mapsto \lambda\eta$. Hierbei ist zu beachten, dass im Gegensatz zu Longitudinal- und Schwerwellen diese Relationen für BiegeWellen nicht erfüllt sind, da bei diesem Wellentyp eine Änderung der Frequenz ebenfalls die Ausbreitungsgeschwindigkeit verändert. In Abbildung 3.13 sind die Energiedichten auf der Plattendiagonalen mit einer konstanten Ausbreitungsgeschwindigkeit für verschiedene Frequenzen in relevanter Größenordnung dargestellt. Unter Berücksichtigung der Beziehung zwischen Frequenz und Dämpfung erklärt sich ein sinkendes Energieniveau mit zunehmender Frequenz.

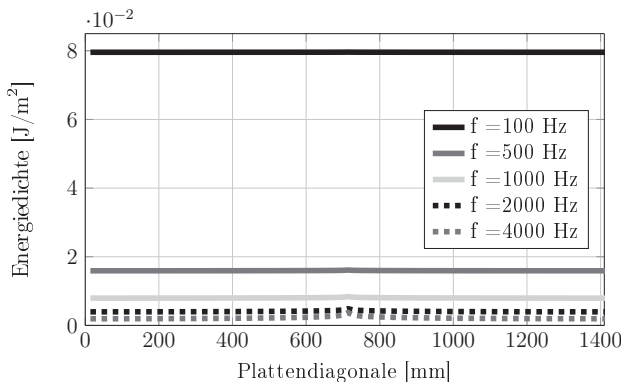


Abbildung 3.13: Einfluss der Frequenz

3.4 Validitätskriterien

Bei der Erstellung eines EFEM-Modells dürfen die EFEM-Basiselemente bestimmte räumliche Ausmaße nicht unterschreiten und Detailkonstruktionen müssen gekonnt vereinfacht werden. Zur Quantifizierung dieses Modellierungsprozesses wurden einige Validitätskriterien aus der SEA-Theorie übernommen und an die EFEM angepasst [10, 16, 28, 35].

Es existieren zwei Typen von Kriterien in der SEA-Theorie. Das eine Kriterium verwendet den Modal-Overlap-Faktor $MOF = \eta n(\omega)\omega$, mit der Dämpfung η , der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ und der gemittelten Modendichte $n(\omega)$ in [Moden/Hz] bis zur Frequenz f . Das andere Kriterium basiert auf der Anzahl der Moden N im entsprechenden Frequenzband. Für diese beiden Größen ergeben sich aus der Literatur bestimmte Schranken, die angepasst auf die Strukturen der EFEM-Basiselemente (Balken, Platten) zu Prüfkriterien gemäß Tabelle 3.2 führen. Hierfür wird eine dimensionslose Größe l festgelegt, welche die räumlichen Ausmaße und die Wellenzahl für jedes Basiselement in Beziehung setzt

$$l = \frac{L}{\lambda} = \frac{\text{minimale charakteristische Länge}}{\text{maximale Wellenlänge}}. \quad (3.25)$$

Tabelle 3.2: Validitätskriterien für die EFEM-Modellerstellung

	MOF > 1	Anzahl-Moden
Balken - (Long- & Torsionswellen)	$l > \frac{1}{2\eta}$	$l > \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} \cong 3.85$
Balken - (Biegewellen)	$l > \frac{1}{\eta}$	$l > \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} \cong 8.16$
Platten - (Long- & Scherwellen)	$l > \sqrt{\frac{1}{2\pi\eta}}$	$l > \sqrt{\frac{5}{\pi(\sqrt[3]{4}-1)}} \cong 1.65$
Platten - (Biegewellen)	$l > \sqrt{\frac{1}{\pi\eta}}$	$l > \sqrt{\frac{5}{\pi(\sqrt[3]{2}-1)}} \cong 2.47$

Diese Kriterien dienen als Hilfsmittel für das EFEM-Preprocessing. Zusätzlich dient die Äquivalenz der eingeleiteten und dissipierten Leistung

$$\pi_{in} = \eta\omega e \quad (3.26)$$

als eine Plausibilitätsüberprüfung der Berechnungsergebnisse. Die aus der SEA abgeleiteten Kriterien sind als zusätzliche Aussagen zu interpretieren, deren Validität nicht für alle Anwendungsfälle gesichert ist. Sie bieten jedoch hilfreiche Richtwerte und sind somit aus Gründen der Vollständigkeit angegeben.

Kapitel 4

Transmissionskoeffizienten

Bei der Energie-Finite-Elemente-Methode wird die zu berechnende Geometrie in Subsysteme bzw. EFEM-Basiselemente (Balken, Platten und Kavitäten) zerlegt. Die Interaktionen zwischen diesen Subsystemen sind über Jointelemente realisiert. Mittels der Jointelemente und speziellen Transmissionskoeffizienten ist der Energiefluss gemäß den Ausführungen in Kapitel 2 modelliert. Die Transmissionskoeffizienten sind abhängig von den zu koppelnden EFEM-Basiselementen sowie von deren geometrischen Eigenschaften. Die folgenden Unterkapitel beschreiben die theoretischen Grundlagen und eine Analyse der Transmissionskoeffizienten für die verschiedenen Kopplungstypen, wobei sich diese Arbeit auf zwei Varianten beschränkt: die Plattenkopplungen und die Platten-Kavität- bzw. Fluid-Struktur-Kopplung.

4.1 Plattenkopplungen

Die Kopplungstheorie für Platten beinhaltet zwei für die EFEM bedeutende Kopplungstypen: Eine reine Platten-Platten-Kopplung (P-P) und eine weitere Plattenkopplung ergänzt durch einen an der Kopplungslinie versteifenden Balken, welche als Platten-Balken-Platten-Kopplung (P-B-P) bezeichnet wird. Jeweils ein Beispiel für die beiden Kopplungskategorien sind in Abbildung 4.1 dargestellt.

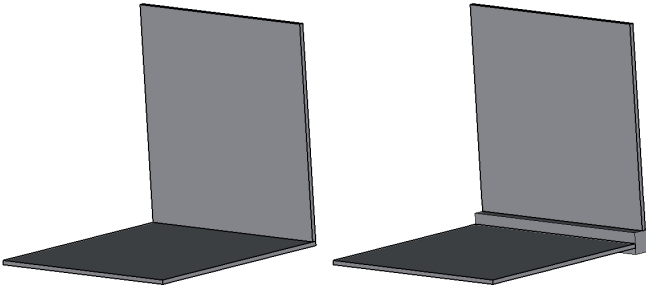


Abbildung 4.1: Plattenkopplungen: links P-P, rechts P-B-P

4.1.1 N-Platten-Kopplungen

Eine N-Platten-Kopplung besteht aus einer beliebigen Anzahl $N \in \mathbb{N}^{\geq 2}$ halbenendlicher Platten, die an einer gemeinsamen Linie, der Kopplungslinie, miteinander verbunden sind. In jeder Plattenstruktur findet der Energietransport mittels drei Wellentypen statt, der Longitudinal-, der Scher- und der Biegewellen. Durch Anregung eines Wellentyps in einer Platte breitet sich die Welle aus, trifft auf die Kopplungslinie und es entstehen Reflexionen und Transmissionen in unterschiedlichen Wellentypen. Mittels eines Kräfte- und Momentengleichgewichtes an der Kopplungslinie werden die Amplituden der reflektierten und transmittierten Wellen der verschiedenen Wellentypen bestimmt und ergeben die Leistung jeder einzelnen Welle. Durch das Verhältnis der Leistungen der reflektierenden bzw. transmittierenden Welle $P_{refl/trans}$ zur einfallenden Welle P_{inc} sind die Transmissionskoeffizienten definiert [25, 35]

$$\tilde{\tau}_{inc,refl/trans} = \frac{P_{refl/trans}}{P_{inc}}. \quad (4.1)$$

Für die Herleitung des Kräfte-Momenten-Gleichgewichtes kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit die X-Achse des globalen Koordinatensystems als Kopplungslinie definiert werden, was eine identische Wellenzahl in X-Richtung für alle angrenzenden Platten zur Folge hat. Eine Koordinatentransformation zwischen globalen und lokalen Koordinatensystemen LKS_j jeder einzelnen Platte kann durch eine Rotation um die X-Achse realisiert werden. Abbildung 4.2 zeigt beispielhaft die Plattenparameter einer 3-Platten-Kopplung.

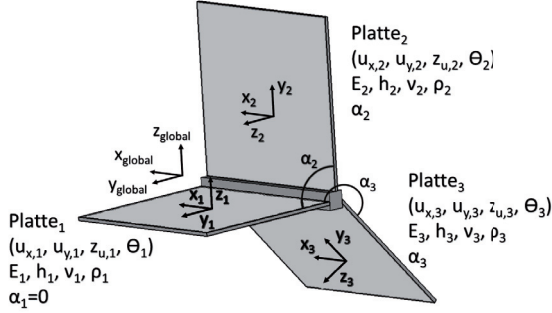


Abbildung 4.2: Plattenparameter einer 3-Platten-Kopplung

Für das gezeigte Modell gilt für die globalen Verschiebungen $\vec{a} = (u_x, u_y, u_z, \theta_j)$, lokalen Verschiebungen $\vec{b}_j = (u_{x,j}, u_{y,j}, u_{z,j})$ sowie die Kräfte und Momente $\vec{F}_j^{Lokal} = (T_j, N_j, S_j, M_j)$ der j -ten Platte die Gleichungen mit den plattenspezifischen Parametern E-Modul E_j , Plattendicke h_j , Poissonzahl ν_j und Dichte ρ_j [26]:

$$D_j \Delta^2 u_{z,j} + \rho_j \ddot{u}_{z,j} = 0 \quad \text{mit} \quad D_j = \frac{E_j \cdot h_j^3}{12(1 - \nu_j^2)}, \quad (4.2)$$

$$M_j = D_j \left(\frac{\partial^2 u_{z,j}}{\partial y_j^2} + \nu_j \frac{\partial^2 u_{z,j}}{\partial x_j^2} \right), \quad (4.3)$$

$$\frac{E_j h_j}{1 - \nu_j^2} \frac{\partial^2 u_{x,j}}{\partial x_j^2} - \frac{E_j h_j}{2(1 + \nu_j)} \frac{\partial^2 u_{x,j}}{\partial y_j^2} + \frac{E_j h_j}{2(1 - \nu_j)} \frac{\partial^2 u_{y,j}}{\partial y_j \partial x_j} - \rho_j \ddot{u}_{x,j}, \quad (4.4)$$

$$\frac{E_j h_j}{1 - \nu_j^2} \frac{\partial^2 u_{y,j}}{\partial y_j^2} - \frac{E_j h_j}{2(1 + \nu_j)} \frac{\partial^2 u_{y,j}}{\partial x_j^2} + \frac{E_j h_j}{2(1 - \nu_j)} \frac{\partial^2 u_{x,j}}{\partial y_j \partial x_j} - \rho_j \ddot{u}_{y,j}, \quad (4.5)$$

$$N_j = \frac{E_j h_j}{1 - \nu_j^2} \left(\frac{\partial u_{y,j}}{\partial y_j} + \nu_j \frac{\partial u_{x,j}}{\partial x_j} \right), \quad (4.6)$$

$$T_j = \frac{E_j h_j}{2(1 - \nu_j)} \left(\frac{\partial u_{y,j}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{x,j}}{\partial y_j} \right). \quad (4.7)$$

$$S_j = -D_j \left[\frac{\partial^3 u_{z,j}}{\partial y_j^3} + (2 - \nu_j) \frac{\partial^2 u_{z,j}}{\partial y_j \partial y_j^2} \right]. \quad (4.8)$$

Die Koordinatentransformation zwischen lokalem und globalem Koordinatensystem der Platte j wird mittels der Rotationsmatrix

$$R_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_j) & -\sin(\alpha_j) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_j) & \cos(\alpha_j) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \quad (4.9)$$

durchgeführt. Über den lokalen Kräfte-Momenten-Vektor $\vec{F}_j^{Lokal} = (T_j, N_j, \dots, S_j, M_j)^T$ und den lokalen Verschiebungsvektor $\vec{b}_j = (u_j, v_j, w_j, \theta_j)^T$ ergibt sich mittels R_j die Transformation in das globale Koordinatensystem

$$\vec{F}_j^{Global} = R_j \cdot \vec{F}_j^{Lokal} \quad (4.10)$$

$$\vec{b}_j^{Lokal} = R_j^T \cdot \vec{a}^{Global}. \quad (4.11)$$

Aus der Summe der Kräfte-Momenten-Vektoren \vec{F}_j an der Kopplungslinie der N -Platten und durch eine zusätzliche Anregung der m -ten Platte eines beliebigen Wellentyps entsteht das Gesamtsystem

$$\sum_{j=1}^N R_j \cdot \vec{F}_j^{Lokal} = \underbrace{R_m \vec{f}_m}_{\text{Eingeleitete Kraft}} \quad (4.12)$$

Angenommen $\exists K_j \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ mit $K_j \vec{b}_j = \vec{F}_j^{Lokal}$, dann gilt

$$\sum_{j=1}^N R_j K_j R_j^T \vec{a} = R_m \vec{f}_m. \quad (4.13)$$

Mit dieser Gleichung können die Verschiebungen an der Kopplungslinie berechnet werden und damit ebenfalls die Amplituden jedes Wellentyps in den beteiligten Platten.

Berechnung der Matrix \mathbf{K}

Zur Berechnung der Transmissionskoeffizienten werden äquivalent zum EFE-Ansatz ebene Wellen betrachtet. Eine auf die Kopplungslinie einfallende Welle hat die Form $\exp(-ikx + i\mu y + i\omega t)$. Aufgrund der Konstruktion der Kopplungslinie auf der Koordinatenachse gilt durch die identische Wellenzahl k in X -Richtung für alle einfallenden und ausfallenden Wellen jeder Platte die Abhängigkeit $\exp(-ikx + i\omega t)$. Weiterhin gilt es die Y -Abhängigkeit $\exp(i\mu y)$ für

die einzelnen Wellentypen zu spezifizieren. Für die Biegewelle folgt aus der Wellenzahl $k_{B,j}$

$$\mu_{B,j}^2 = k^2 \pm k_{B,j}^2 \quad \text{mit} \quad k_{B,j} = \left(\frac{\rho_j \omega^2}{h_j D_j} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (4.14)$$

die mathematische Beschreibung der Wellenfunktion

$$u_{z,j} = \sum_{n=1}^2 \alpha_{B_{n,j}} e^{-ikx_j + \mu_{B_{n,j}} y_j}. \quad (4.15)$$

Aus Gleichung (4.15) folgt direkt das lineare Gleichungssystem für die Verschiebung $u_{z,j}^{ed}$ und die Rotation θ_j^{ed} auf der Kopplungslinie mit $y_j = 0$

$$\begin{pmatrix} u_{z,j}^{ed} \\ \theta_j^{ed} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mu_{B_{1,j}} & \mu_{B_{2,j}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{B_{1,j}} \\ \alpha_{B_{2,j}} \end{pmatrix} e^{-ikx + i\omega t}. \quad (4.16)$$

Das lineare Gleichungssystem der Kräfte und Momente auf der Kopplungslinie ist eine Kombination der Gleichungen (4.6) - (4.8) und (4.16)

$$\begin{pmatrix} S_j \\ M_j \end{pmatrix} = -D_j \tilde{K} \cdot \begin{pmatrix} u_{z,j}^{ed} \\ \theta_j^{ed} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad (4.17)$$

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} \frac{\mu_{B_{1,j}}^3 \mu_{B_{2,j}} - \mu_{B_{2,j}}^3 \mu_{B_{1,j}}}{\mu_{B_{2,j}} - \mu_{B_{1,j}}} & (\nu_j - 2) k^2 + \frac{(\mu_{B_{2,j}}^2 + \mu_{B_{1,j}}^2)(1 + \mu_{B_{2,j}} \mu_{B_{1,j}})}{-\mu_{B_{2,j}}^2 - \mu_{B_{1,j}}^2} \\ \mu_{B_{2,j}} \mu_{B_{1,j}} + k^2 \nu_j & -(\mu_{B_{1,j}} + \mu_{B_{2,j}}) \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Die Berechnung der In-Plane-Verschiebungen an der Kopplungslinie ist analog zur Berechnung der Biegewelle. Für die Wellenzahl in Y-Richtung gelten für die Scher- und Longitudinalwelle die Wellenzahlen

$$\mu_{L,j}^2 = k^2 - k_{L,j}^2 \quad \text{mit} \quad k_{L,j} = \frac{\rho_j \omega^2 (1 - \nu_j)}{E_j h_j} \quad (4.19)$$

$$\mu_{S,j}^2 = k^2 - k_{S,j}^2 \quad \text{mit} \quad k_{S,j} = \frac{2\rho_j \omega^2 (1 + \nu_j)}{E_j h_j}. \quad (4.20)$$

Die lokalen Verschiebungen auf der jeweiligen Platte sind durch

$$\begin{pmatrix} u_{x,j} \\ u_{y,j} \end{pmatrix} = \left\{ \alpha_{L,j} \begin{pmatrix} k \\ i\mu_{L,j} \end{pmatrix} e^{\mu_{L,j} y} + \alpha_{S,j} \begin{pmatrix} i\mu_{S,j} \\ -k \end{pmatrix} e^{\mu_{S,j} y} \right\} e^{-ikx + i\omega t} \quad (4.21)$$

gegeben und aus (4.6) - (4.8) sowie (4.21) folgen mit $y_j = 0$ die lokalen Verschiebungen auf der Kopplungslinie

$$\begin{pmatrix} u_{x,j}^{ed} \\ u_{y,j}^{ed} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & i\mu_{S,j} \\ i\mu_{L,j} & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{L,j} \\ \alpha_{S,j} \end{pmatrix} e^{(-ikx + i\omega t)} \quad (4.22)$$

und die lokalen Kräfte

$$\begin{pmatrix} T_j \\ N_j \end{pmatrix} = \frac{E_j h_j}{k^2 - \mu_{S,j} \mu_{L,j}} \cdot M \begin{pmatrix} u_{x,j}^{ed} \\ u_{y,j}^{ed} \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

mit der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{(\mu_{S,j}^2 - k^2) \mu_{L,j}}{2(1+\nu_j)} & -\frac{ik(k^2 + \mu_{S,j}^2)}{2(1+\nu_j)} + \frac{i\mu_{S,j} \mu_{L,j} k}{1+\nu_j} \\ -\frac{ik(\mu_{L,j}^2 - \nu_j^2 k^2)}{(1-\nu_j^2)} - \frac{i\mu_{S,j} \mu_{L,j} k}{1+\nu_j} & \frac{\mu_{S,j}(-\mu_{L,j}^2 + \nu_j k^2)}{(1-\nu_j^2)} + \frac{k^2 \mu_{S,j}}{1+\nu_j} \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

Zur Lösung des Gleichungssystems (4.12) ist die anregende Kraft \vec{f}_m auf der Platte m für jeden Wellentyp zu bestimmen. Für diese Platte ergibt sich eine Kraft $\vec{F}_m \mapsto \vec{F}_m - \vec{F}_m^{Load}$ und eine Verschiebung $\vec{b}_m \mapsto \vec{b}_m - \vec{b}_m^{Load}$, welche für die Longitudinal-, Scher- und Biegewelle mittels

$$\vec{F}_m = K_m \vec{b}_m - \vec{f}_m \quad \text{und} \quad \vec{f}_m = K_m \vec{b}_m^{Load} - F_m^{Load} \quad (4.25)$$

definiert sind [25]. Die Größen \vec{F}_m^{Load} und \vec{b}_m^{Load} der einfallenden ebenen Welle mit Amplitude α und Einfallswinkel ϕ sind wellentyp-spezifisch. Dies führt bei Biegewellen mit $\mu = ik_B \sin(\phi)$ und $k = k_B \cos(\phi)$ zu

$$\vec{b}_m^{Load} = \begin{pmatrix} u_{z,m}^{Load,ed} \\ \theta_m^{Load,ed} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha i k_B \sin(\phi) \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

$$\vec{F}_m^{Load} = \begin{pmatrix} S_m^{Load,ed} \\ M_m^{Load,ed} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha D_m [\mu^3 - (2 - \nu_m) k^2 \mu] \\ \alpha D_m (\mu^2 - \nu_m k^2) \end{pmatrix}, \quad (4.27)$$

bei Longitudinalwellen mit $\mu = ik_L \sin(\phi)$ und $k = k_L \cos(\phi)$ zu

$$\vec{b}_m^{Load} = \begin{pmatrix} u_{x,m}^{Load,ed} \\ u_{y,m}^{Load,ed} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha k \\ \alpha i \mu \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

$$\vec{F}_m^{Load} = \begin{pmatrix} T_m^{Load,ed} \\ N_m^{Load,ed} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha E_m h_m k \mu}{1+\nu_m} \\ \frac{\alpha i E_m h_m (\mu^2 - \nu_m k^2)}{1-\nu_m} \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

und bei Scherwellen mit $\mu = ik_S \sin(\phi)$ und $k = k_S \cos(\phi)$ zu

$$\vec{b}_m^{Load} = \begin{pmatrix} u_{x,m}^{Load,ed} \\ u_{y,m}^{Load,ed} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha i \mu \\ -\alpha k \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

$$\vec{F}_m^{Load} = \begin{pmatrix} T_m^{Load,ed} \\ N_m^{Load,ed} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha i E_m h_m (\mu^2 + k^2)}{2(1+\nu_m)} \\ -\frac{\alpha E_m h_m k \mu}{1+\nu_m} \end{pmatrix}. \quad (4.31)$$

Berechnung der wellentyp-spezifischen Leistung

Ausgehend von den Amplituden α einfallender, reflektierter und transmittierter Wellen sowie dem Einfallswinkel ϕ der anregenden Welle sind die wellentyp-spezifischen Leistungen in der j -ten Platte mittels

$$P_{B_j} = \frac{\rho_j \omega^3 \alpha_{B_j}^2 h_j}{k_{B_j}} \sin(\phi) \quad (4.32)$$

$$P_{L_j} = \frac{1}{2} \rho_j \omega^3 \alpha_{L_j}^2 h_j k \sin(\phi) \quad (4.33)$$

$$P_{S_j} = \frac{1}{2} \rho_j \omega^3 \alpha_{S_j}^2 h_j k_{S_j} \sin(\phi) \quad (4.34)$$

zu berechnen. Die Transmissionkoeffizienten $\tilde{\tau}_{inc,refl/trans}(\phi) = \frac{P_{refl/trans}(\phi)}{P_{inc}(\phi)}$ sind winkelabhängige Parameter. Da für die praktische Anwendung ein Diffusfeld angenommen wird, ist zusätzlich über alle Einfallswinkel $\phi \in [0^\circ, 180^\circ]$ arithmetisch zu mitteln

$$\tau_{inc,refl/trans} = \int_{0^\circ}^{180^\circ} \tilde{\tau}_{inc,refl/trans}(\phi) d\phi = \int_{0^\circ}^{180^\circ} \frac{P_{refl/trans}(\phi)}{P_{inc}(\phi)} d\phi. \quad (4.35)$$

Mittels dieser diffusen Transmissionkoeffizienten sind die Interaktionen der Subsysteme in der EFEM festgelegt. Die lassen sich zu einer Transmissionsmatrix τ zusammenfassen, welche für jedes Subsystempaar (i, j) die individuellen Kopplungsbeziehungen beschreibt. Die Spezifizierung des Wellentyps der jeweiligen Platte ist mittels B für Biege-, S für Scher- und L für Longitudinalwellen angegeben

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{B_j, B_j} & \tau_{B_j, L_j} & \tau_{B_j, S_j} & \tau_{B_j, B_i} & \tau_{B_j, L_i} & \tau_{B_j, S_i} \\ \tau_{L_j, B_j} & \tau_{L_j, L_j} & \tau_{L_j, S_j} & \tau_{L_j, B_i} & \tau_{L_j, L_i} & \tau_{L_j, S_i} \\ \tau_{S_j, B_j} & \tau_{S_j, L_j} & \tau_{S_j, S_j} & \tau_{S_j, B_i} & \tau_{S_j, L_i} & \tau_{S_j, S_i} \\ \tau_{B_i, B_j} & \tau_{B_i, L_j} & \tau_{B_i, S_j} & \tau_{B_i, B_i} & \tau_{B_i, L_i} & \tau_{B_i, S_i} \\ \tau_{L_i, B_j} & \tau_{L_i, L_j} & \tau_{L_i, S_j} & \tau_{L_i, B_i} & \tau_{L_i, L_i} & \tau_{L_i, S_i} \\ \tau_{S_i, B_j} & \tau_{S_i, L_j} & \tau_{S_i, S_j} & \tau_{S_i, B_i} & \tau_{S_i, L_i} & \tau_{S_i, S_i} \end{pmatrix} \in [0, 1]^{6 \times 6}. \quad (4.36)$$

EFEM-Berechnung einer T-Struktur

In dem vorherigen Abschnitt ist die Theorie der Transmissionkoeffizienten für eine Linienkopplung mit unterschiedlichen Platten beschrieben, welche in diesem Unterabschnitt in der EFEM auf ein Testbeispiel Anwendung findet. Anwendungsbeispiele der Theorie der Transmissionkoeffizienten unabhängig

von der EFEM sind zusätzlich in [23, 47, 12] zu finden.

Für eine Berechnung mit der EFEM wird eine T-Struktur (Abbildung 4.3) bestehend aus drei quadratischen Stahlplatten mit einer Kantenlänge von jeweils $L = 666$ mm und einer Dicke von $h = 1$ mm verwendet, wobei die translatorischen Freiheitsgrade der Plattenränder fixiert sind. Am Anregungspunkt wirkt eine harmonische Kraft von $F = 1$ N mit einer Frequenz von $f = 2000$ Hz. Bei diesem Modell existiert nur eine Kopplungslinie, an der drei Platten miteinander verbunden sind. Alle Platten interagieren miteinander und somit sind für die Matrix der diffusen Transmissionskoeffizienten $\tau \in [0, 1]^{9 \times 9}$ 81 Einträge zu berechnen.

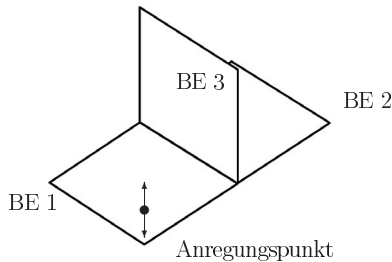


Abbildung 4.3: Aufbau der T-Struktur

Die Transmissionskoeffizienten der T-Struktur sind von $[0^\circ, 90^\circ]$ in Abbildung 4.4 aufsummiert dargestellt, wobei diese symmetrisch zur 90° -Achse sind. Die Nomenklatur der Legende ist als ein Tupel aus einfallendem Wellentyp und Plattennummer sowie aus transmittiertem Wellentyp in die entsprechende Platte zu verstehen. Da innerhalb der Kopplung keine Dissipation berücksichtigt ist, summieren sich die Transmissionskoeffizienten in der Abbildung zu 1 auf.

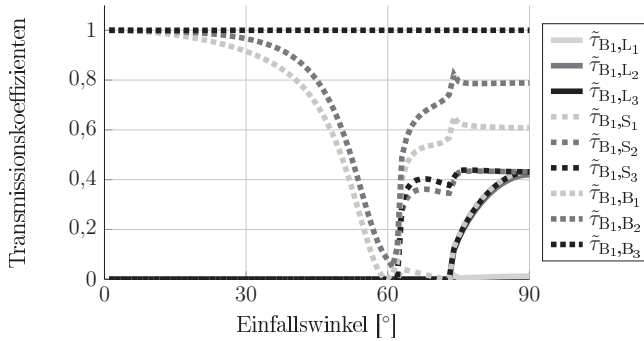


Abbildung 4.4: Transmissionskoeffizienten in Abhängigkeit vom Einfallswinkel

Aus der verschiebungsbasierten klassischen Problembeschreibung folgt mittels der FEM die detaillierte Energieverteilung. Hierbei wird die zeitlich gemittelte Energiedichte mittels der Beziehung $e_{ges,t} = 2 e_{kin,t}$ beschrieben und in Abbildung 4.5 dargestellt.

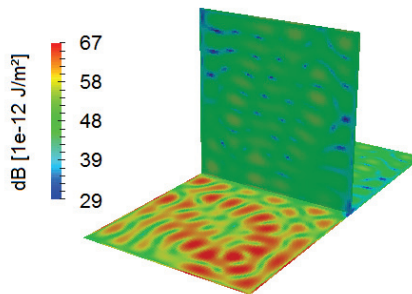


Abbildung 4.5: Energieverteilung auf einer T-Struktur

Das Schwingungsverhalten zeigt sich in der Platte BE 1, wobei in den anderen beiden Basiselementen aufgrund des Energiesprunges an der Kopplungsstelle geringere Energiedichten auftreten, die sich durch die Transmissionskoeffizienten ergeben. Ein Vergleich der Berechnungsergebnisse der EFEM und der FEM sind in Abbildung 4.6 gegenübergestellt, wobei nur die Energiedichtepegel analog zum gekennzeichneten Querschnitt der T-Struktur abgebildet sind. Zusätz-

lich zur zeitlich gemittelten Energiedichte ist die räumlich gemittelte Energiedichte $FEM_t, \Delta x$ und die über die einzelnen Basiselemente räumlich gemittelte Energiedichte $FEM_t, \Delta x_{BE}$ der FEM-Berechnung dargestellt.

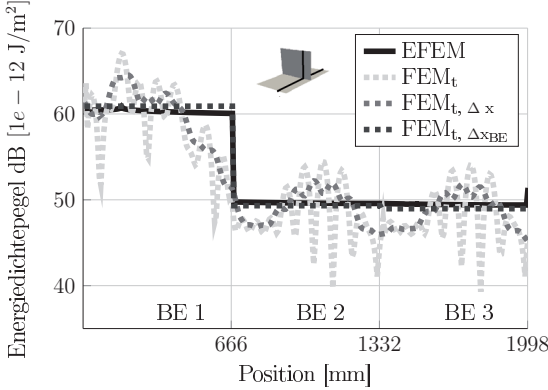


Abbildung 4.6: Vergleich FEM/EFEM

Die mit den beiden Verfahren berechneten Energieverteilungen unterscheiden sich maximal um einige dB, bis auf die Umgebung am Anregungspunkt und der Kopplungsstelle. Diese weisen auf der angeregten Platte teilweise hohe Unterschiede auf, die mit der Vernachlässigung des Nahfeldes im EFE-Ansatz zusammenhängen können. Die EFEM dient zur Berechnung und Abschätzung der Energieverteilung, wobei aufgrund der getroffenen Annahmen und Vereinfachungen Toleranzen von einigen dB zulässig sind. Das über jedes Basiselement gemittelte Energieniveau $FEM_t, \Delta x_{BE}$ zeigt eine maximale Differenz von 2,5 dB zur EFEM-Berechnung. Die Energieniveaus der beteiligten Subsysteme sind durch die EFEM in diesem Testbeispiel hinreichend approximiert. Die theoretischen Betrachtungen der Transmissionskoeffizienten sind für N-Platten-Kopplungen abgeschlossen und beispielhaft für die Anwendung in der EFEM anhand einer T-Struktur verifiziert.

4.1.2 N-Platten-Balken-Kopplungen

Das Modell der N-Platten-Kopplung aus Abschnitt 4.1.1 wird in diesem Abschnitt um einen versteifenden Balken an der Kopplungslinie erweitert [26].

Um diese Erweiterung in das Gleichungssystem (4.12) zu integrieren, wird das Kräfte-Momenten-Gleichgewicht an der Kopplungslinie um die Kräfte und Momente des Balkens ergänzt. Dies führt zu

$$\sum_{j=1}^N R_j K_j R^T \vec{a} = R_m \vec{f}_m \Rightarrow \vec{B} - \sum_{j=1}^N \tilde{R}_j K_j \tilde{R}_j^T \vec{a} = \tilde{R}_m \vec{f}_m, \quad (4.37)$$

wobei der Vektor $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z, m_x, m_y, m_z)$ die Kräfte und Momente des Balkens (Euler-Bernoulli-Balken) enthält. Der Verschiebungsvektor wird um die Verdrehungen in Y- und Z-Richtung erweitert $\vec{a}_{global} \rightarrow \vec{\tilde{a}}_{global} = (u, v, w, \dots, \phi_x, \phi_y, \phi_z)$ und die Rotationsmatrix durch $\tilde{R}_j \in \mathbb{R}^{6 \times 4}$

$$\tilde{R}_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_j) & -\sin(\theta_j) & 0 \\ 0 & \sin(\theta_j) & \cos(\theta_j) & 0 \\ 0 & y_j \sin(\theta_j) - z_j \cos(\theta_j) & y_j \cos(\theta_j) + z_j \sin(\theta_j) & 1 \\ z_j - z_0 & 0 & 0 & 0 \\ y_0 - y_j & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.38)$$

wobei $y_j, z_j \in \mathbb{R}$ die Differenz des Kopplungspunktes vom geometrischen Schwerpunkt des Balkenquerschnittes bezeichnet. Die Berechnung dieser Transmissionskoeffizienten erfolgt bis auf die Berücksichtigung der zusätzlichen Terme durch den Balken analog zu Abschnitt 4.1.1.

EFEM-Berechnung einer L-Struktur mit versteifendem Balken

Eine L-Struktur bestehend aus zwei quadratischen Stahlplatten mit einer Kantenlänge von jeweils $L = 1$ m und einer Dicke von $h = 4$ mm mit einem versteifenden Balken auf der Kopplungslinie dient als Testmodell. Auf den Plattenrändern sind die translatorischen Freiheitsgrade fixiert. Abbildung 4.7 zeigt schematisch die L-Struktur mit und ohne versteifendem Balken an der Verbindungslinie der beiden Platten sowie den Anregungspunkt.

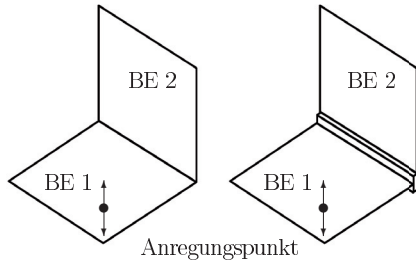


Abbildung 4.7: Aufbau der L-Struktur

Eine Darstellung der Transmissionskoeffizienten einer L-Struktur ohne versteifenden Balken (Abbildung 4.7, links) befindet sich in Abbildung 4.8 sowie mit versteifendem Balken (Abbildung 4.7, rechts) in Abbildung 4.9. Hierbei sind die Transmissionskoeffizienten $\tilde{\tau}_{\cdot,\cdot}$ aufsummiert dargestellt.

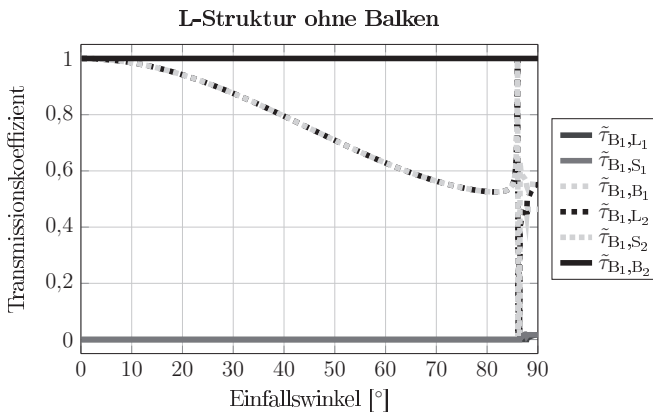


Abbildung 4.8: Transmissionskoeffizienten der P-P-Kopplung

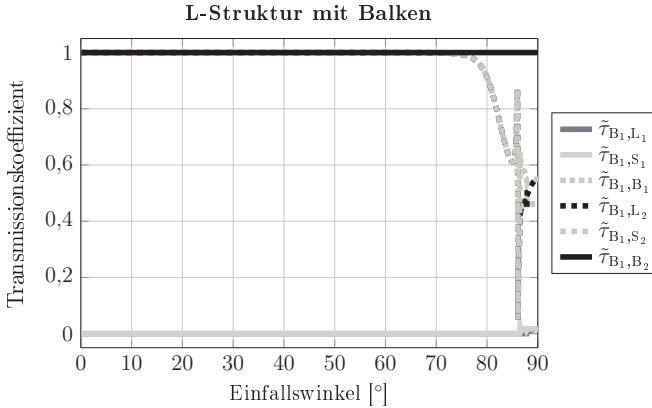


Abbildung 4.9: Transmissionskoeffizienten der P-B-P-Kopplung

Die Transmissionskoeffizienten sind für die Einfallswinkel $[0^\circ, 90^\circ]$ dargestellt. Hierbei zeigt sich eine ansteigende Energietransmission bei zunehmendem Einfallswinkel bis Nahe 90° . Es treten hohe Reflektionen $\tilde{\tau}_{B_1,B_1}$ auf, die zunehmend in Transmissionen $\tilde{\tau}_{B_1,B_2}$ übergehen. Die Flanken sind bei einer L-Struktur ohne versteifendem Balken (Abbildung 4.8) schwächer ausgeprägt als bei einer L-Struktur mit versteifendem Balken (Abbildung 4.9). Dies bedeutet, dass durch einen zusätzlichen Balken weniger Energie transmittiert wird, was ebenfalls durch die diffusen Transmissionskoeffizienten in Tabelle 4.1 zu erkennen ist. Deutlich ist, dass durch die Biegewellen der Hauptteil der Energie transmittiert oder reflektiert wird. Von 85° bis 90° erhöhen sich die Transmissionen in die In-Plane-Wellen $\tilde{\tau}_{B_1,L_2}$ und $\tilde{\tau}_{B_1,S_2}$, da sich die Biegewellen bei einem nahezu senkrechten Einfallswinkel besser in Longitudinal- und Scherwellen umwandeln.

Der direkte Einfluss der beiden Matrizen aus Transmissionskoeffizienten τ_{PP} und τ_{PBP} auf die EFEM-Berechnung ist nur mittels einer Einheitsanregung erkennbar. Die Eingangsleistung π_{in} enthält das Schwingungsverhalten der Struktur und somit wäre der Einfluss der Transmissionskoeffizienten durch unterschiedliche Eingangsleistungen verfälscht.

Unter Verwendung der diffusen Transmissionskoeffizienten ergibt sich eine Energieverteilung auf der gesamten L-Struktur. Als Vergleichsmethode für die Ve-

Tabelle 4.1: Diffuse Transmissionskoeffizienten

	τ_{PP}	τ_{PBP}
τ_{B_1,L_1}	$3 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$
τ_{B_1,S_1}	$3 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$
τ_{B_1,B_1}	$75 \cdot 10^{-2}$	$96 \cdot 10^{-2}$
τ_{B_1,L_2}	$16 \cdot 10^{-4}$	$16 \cdot 10^{-4}$
τ_{B_1,S_2}	$26 \cdot 10^{-4}$	$25 \cdot 10^{-4}$
τ_{B_1,B_2}	$24 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-2}$

rifizierung der N-Platten-Balken-Kopplung dient wiederum die FEM mit dem klassischen verschiebungsbasierten Ansatz, bei dem über die Beziehung $e_{ges} = 2 e_{kin}$ die zeitlich gemittelte Energiedichte bestimmt wird. In Abbildung 4.10 ist die mit der EFEM berechnete Energieverteilung auf der L-Struktur dargestellt.

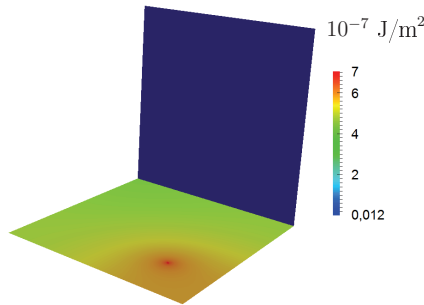


Abbildung 4.10: Energieverteilung EFEM

Um den Anregungspunkt zeigt sich eine in der Plattenebene gleichmäßige Abnahme bis zur Kopplungslinie. Hier findet ein Energiesprung statt, der durch die miteinander verbundenen Platten und zusätzlich durch den versteifenden Balken auftritt. Diese Unstetigkeit ist durch die Transmissionskoeffizienten beschrieben.

In Abbildung 4.11 ist die zeitlich und über jedes Basiselement räumlich gemittelte Energiedichte $FEM_{t,\Delta x_{BE}}$ der PBP-Kopplung mit der FEM auf dem exemplarischen Querschnitt gezeigt. Die Energieverteilung ist ebenfalls mit der

EFEM für die PP- und die PBP-Kopplung berechnet und in der Abbildung dargestellt.

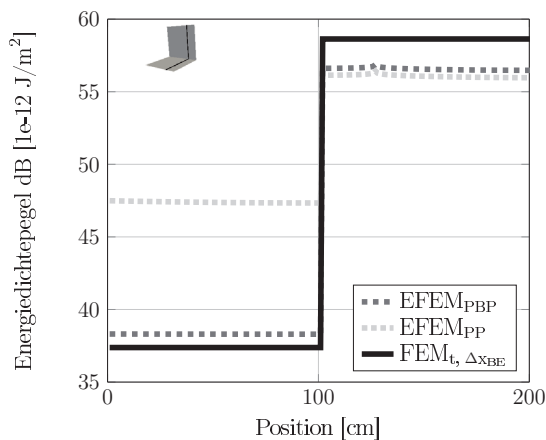


Abbildung 4.11: Vergleich EFEM/FEM P-B-P-Kopplung

Der Vergleich der räumlich und zeitlich gemittelten Energiedichte $FEM_{t, \Delta x_{BE}}$ und $EFEM_{PBP}$ zeigen eine maximale Differenz von ca. 2 dB im Nahfeld und ca. 1,5 dB im Fernfeld, was eine hinreichend genaue Übereinstimmung bezogen auf dieses Testbeispiels ist. Die Energieverteilungen der PP- und PBP-Kopplung zeigen, dass durch den zusätzlichen Balken weniger Energie in die zweite Platte transmittiert wird und dass sich der Energiesprung zwischen den Basiselementen von ca. 9 dB auf ca. 18 dB erhöht.

4.2 Fluid-Struktur-Kopplungen

In vielen vibroakustischen Anwendungsfällen ist nicht nur die Energieverteilung auf der Struktur von Bedeutung, sondern ebenfalls der Schalldruckpegel in einer bestimmten Entfernung von der Struktur. Für die Umsetzung dieser Abstrahlungskomponente in einem EFEM-Modell müssen zusätzlich zur Struktur die Fluidkavitäten modelliert und mit der Struktur gekoppelt werden. Für die in den Abschnitten 2.2.3 und 2.4.2 hergeleiteten Fluid-Struktur-Kopplungsbeziehungen folgen nun Berechnungs- und Schätzverfahren für die Transmissionskoeffizienten dieses Kopplungstyps.

Aus der Literatur [54, 35] sind analytische Kopplungsbeziehungen zwischen Fluid und Struktur bekannt, die zu einer Kopplungsmatrix

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 - \tau_{Platte,Fluid} & \tau_{Fluid,Platte} \\ \tau_{Platte,Fluid} & 1 - \tau_{Fluid,Platte} \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

führen, wobei die Transmissionskoeffizienten über die Dichten ρ_{Platte} , ρ_{Fluid} , die Ausbreitungsgeschwindigkeiten c_{Platte} , c_{Fluid} , die Berechnungsfrequenz f und den Abstrahlgrad σ die Koeffizienten

$$\tau_{Platte,Fluid} = \frac{2\beta\sigma}{2 + \beta\sigma} \quad (4.40)$$

$$\tau_{Fluid,Platte} = \beta \frac{c_{Fluid}^2 \sigma}{c_{Platte}^2 f h} \quad (4.41)$$

$$\beta = \frac{\rho_{Fluid} c_{Fluid}}{\rho_{Platte} c_{Platte}} \quad (4.42)$$

definiert sind. In den Gleichungen (4.40) - (4.42) zur Berechnung der Transmissionskoeffizienten ist ausschließlich der Abstrahlungsgrad σ ein unbekannter Parameter. Der Abstrahlgrad σ für beliebige Geometrien ist definiert als

$$\sigma = \frac{P_{Rad}}{\rho_{Fluid} c_{Fluid} S \langle \bar{v}^2 \rangle} = \frac{\text{abgestrahlte Leistung}}{v^2\text{-Leistung}}. \quad (4.43)$$

Die v^2 -Leistung stellt hier einen Bezugswert zur tatsächlich abgestrahlten Leistung P_{Rad} dar. Dieser Bezugswert beschreibt die abgestrahlte Leistung eines Kolbenstrahlers mit der gleichen Abstrahlfläche S und räumlich sowie zeitlich gemittelten quadratischen Schnelle $\langle \bar{v}^2 \rangle$. Mit zunehmender Frequenz nähern sich die abgestrahlte Leistung und die v^2 -Leistung an, sodass $\sigma \xrightarrow{f \rightarrow \infty} 1$ gilt. Die Berechnung oder Schätzung des Abstrahlgrades kann bei komplexen Modellen beliebig kompliziert sein.

4.2.1 Abstrahlgrad einer quadratischen Platte

Um EFEM-Berechnungen mit einer Fluid-Struktur-Kopplung durchführen zu können, ist die Ermittlung des Abstrahlgrades notwendig. Hierfür wird der Abstrahlgrad einer rechteckigen Platte betrachtet, der in dieser Arbeit vorerst mittels zwei analytischen Ansätzen ermittelt wird: Ein modaler Ansatz und ein Abschätzungsansatz.

Der **analytische modale Ansatz** [14, 36, 37] beschreibt die Berechnung des Abstrahlgrades einer rechteckigen allseitig einfach-gelagerten Platte mit einer im Zentrum punktförmigen anregenden harmonischen Kraft. Der modale analytische Ansatz berechnet auf Grundlage der Eigenmoden

$$\phi_{m,n}(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (4.44)$$

der rechteckigen Platte mit den Kantenlängen L_x , L_y und mit den Modennummern $m, n = 1, 2, 3, \dots$ die Abstrahlgrade für jede einzelne Mode

$$\sigma_{m,n} = \frac{64k^2 L_x L_y}{\pi^6 m^2 n^2} \dots \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{M_{UG}(\text{mod}_2(n), \text{mod}_2(m))}{\left[\left(\frac{\alpha}{m\pi}\right)^2 - 1\right] \left[\left(\frac{\beta}{n\pi}\right)^2 - 1\right]} \right]^2 \sin(\theta) d\theta d\phi, \quad (4.45)$$

wobei mod_2 die Modulo-Funktion zur Basis 2 beschreibt und die Funktion M_{UG} gemäß

$$M_{UG} = \begin{cases} (0, 0) & \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ (1, 0) & \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ (0, 1) & \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ (1, 1) & \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \end{cases} \quad (4.46)$$

mit $\alpha = kL_x \sin(\theta) \cos(\theta)$, $\beta = kL_y \sin(\phi) \sin(\phi)$ und $k = 2\pi f/c_{\text{Fluid}}$ definiert ist. Durch die gewichtete Summe der modalen Abstrahlgrade $\sigma_{n,m}$ (4.45) ergibt sich der gesamte Abstrahlgrad zu

$$\sigma = \frac{\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sigma_{m,n} [(\omega_{m,n}^2 - \omega^2)^2 + \eta^2 \omega_{m,n}^4]^{-1}}{\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N [(\omega_{m,n}^2 - \omega^2)^2 + \eta^2 \omega_{m,n}^4]}, \quad (4.47)$$

wobei die Eigenfrequenzen der rechteckigen Platte durch

$$\omega_{m,n} = \sqrt{\frac{D}{\rho_{\text{Platte}} h} \left[\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2 \right]} \quad (4.48)$$

gegeben sind. Für eine hinreichend genaue Berechnung des Abstrahlgrades bis zur Frequenz f werden die Moden bis zu einer Eigenfrequenz von f_{Mod} berücksichtigt. Hierfür gilt im Allgemeinen die Abschätzung $f_{Mod} = 2f$. Für quadratische Platten mit $N_{Mod} = M_{Mod}$ und $w_{N_{Mod}, N_{Mod}} = 2\pi f_{Mod}$ gilt

$$N(f_{Mod}) = N_{Mod} = \frac{L_x}{\pi} \sqrt{\pi f_{Mod} \sqrt{\frac{\rho_{Platte} h}{D}}}. \quad (4.49)$$

Für den **theoretischen Abschätzungsansatz (tAa)** wird der Abstrahlgrad einer rechteckigen allseitig einfach-gelagerten Platte geschätzt, welche in einer schallharten Ebene eingespannt und ebenfalls durch eine Punktkraft im Zentrum angeregt wird. Bei diesem Ansatz ist das Abstrahlverhalten in vier Phasen unterteilt: den Kolbenstrahler-, den Kurzschluss-, den Koinzidenzbereich und den Bereich der vollen Abstrahlung. Diese Bereiche weisen jeweils ein bestimmtes charakteristisches Verhalten auf. Eine detaillierte Beschreibung dieses Ansatzes befindet sich in der Literatur [53, 36, 37].

- Kolbenstrahlerbereich

Im Frequenzbereich bis zur ersten Eigenmode der rechteckigen Platte $n = m = 1$ in Formel (4.44) strahlt die Platte wie ein Kolbenstrahler mit der Eckkreisfrequenz $f_{EKF} = c_{Fluid}/(2\sqrt{S})$. Der Abstrahlgrad für diesen Frequenzbereich wird berechnet durch

$$\sigma_{Kolbenstrahler} = \left(\frac{f}{f_{EKF}} \right)^2 = \frac{4S}{c_{Fluid}^2} f^2 \quad \forall f \in [0, f_{EKF}]. \quad (4.50)$$

- Kurzschlussbereich

Falls die Koinzidenzfrequenz f_c größer als die Kolbenstrahlereckfrequenz ist, folgt auf den Kolbenstrahlbereich der Kurzschlussbereich. Die Koinzidenzfrequenz ist die Frequenz bei der die Biegewellenlänge in der Struktur identisch mit der Wellenlänge im akustischen Medium ist. In diesem Zustand erreicht die Energieübertragung in das akustische Medium ein Maximum. Für diesen Bereich ist der Abstrahlgrad mittels

$$\sigma = \frac{\lambda_c^2}{S} g_1(\alpha) + \frac{\lambda_c}{S} g_2(\alpha) \quad (4.51)$$

abschätzbar. Die Parameter sind gegeben durch $\alpha = \sqrt{f/f_c}$, die Wellenlänge $\lambda_c = \frac{2\pi}{c_{Fluid}} \sqrt{\frac{D}{\rho_{Platte} h}}$ zur Koinzidenzfrequenz $f_c = \frac{c_{Fluid}^2}{2\pi} \sqrt{\frac{h\rho_{Platte}}{D}}$

sowie

$$g_1(\alpha) = \begin{cases} \frac{8(1-2\alpha^2)}{\pi^4\alpha\sqrt{1-\alpha^2}} & \text{für } f \leq f_c/2 \\ 0 & \text{für } f > f_c/2 \end{cases} \quad (4.52)$$

und

$$g_2(\alpha) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{(1-\alpha^2) \ln\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) + 2\alpha}{(1-\alpha^2)^{3/2}}. \quad (4.53)$$

- Koinzidenzbereich

In der Nähe der Koinzidenzfrequenz ($f \approx f_c$) gilt für den Abstrahlgrad die Näherung

$$\sigma = \sqrt{\frac{L_x}{\lambda_c}} + \sqrt{\frac{L_y}{\lambda_c}}. \quad (4.54)$$

- Bereich der vollen Abstrahlung

In dem Bereich der vollen Abstrahlung wird der Abstrahlgrad einer unendlich ausgedehnten Platte angenommen, die allerdings nicht das Maximum an der Koinzidenzfrequenz übersteigen darf

$$\sigma = \min \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-f_c/f}}, \sqrt{\frac{L_x}{\lambda_c}} + \sqrt{\frac{L_y}{\lambda_c}} \right\} \quad (4.55)$$

und sich zusätzlich mit steigender Frequenz asymptotisch gegen 1 annähert, da für $f \rightarrow \infty$ gilt $\sqrt{1-f_c/f}^{-1} \rightarrow 1$.

Die vorgestellten Methoden zur Berechnung des Abstrahlgrades sind mit BEM- und FEM-Berechnungen des klassischen verschiebungsbasierten Ansatzes einer äquivalenten Problemstellung zu vergleichen, um die Güte dieser Ansätze zu prüfen. Unter einer Einheitsanregung ergeben sich die abgestrahlte Leistung und die quadratische Schnelle, die zum Abstrahlgrad führen. Für jede Methode sind in Abhängigkeit des numerischen Aufwandes die Anzahl der berechneten Frequenzen angepasst und diese liegen im niedrigen Frequenzbereich bei $\Delta f = 100$ Hz bis zu $\Delta f = 1000$ Hz im hohen Frequenzbereich. Als Modell dient eine einseitig abstrahlende quadratische Stahlplatte mit den Kantenlängen $L_x = L_y = 20$ cm und einer Dicke von $h = 1$ mm. Die Berechnungsergebnisse werden in Abbildung 4.12 mit den beiden analytischen Ansätzen verglichen.

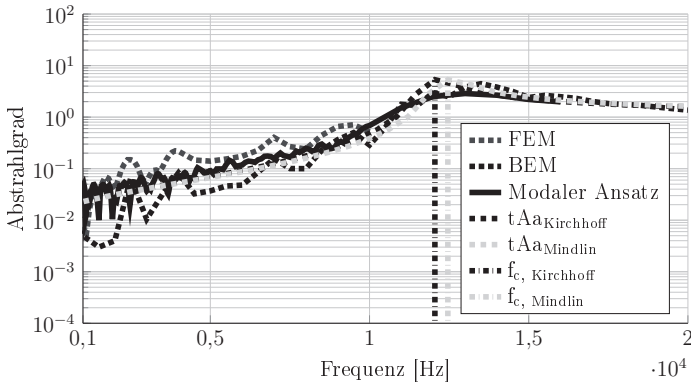


Abbildung 4.12: Abstrahlgrad - Vergleich der Berechnungsmethoden

Der modale und der Abschätzungsansatz zeigen über den gesamten Frequenzbereich eine gute Übereinstimmung. Im unteren Frequenzbereich existieren Abweichungen zwischen den Abschätzungsansätzen und den elementbasierten Ansätzen der FEM und BEM. Hierbei überschätzt die FE-Berechnung den modalen analytischen Ansatz im Gegensatz zur BEM, die diesen unterschätzt. Mit zunehmender Frequenz nähern sich allerdings alle Berechnungsverfahren einander an. Im Frequenzbereich um die Koinzidenzfrequenz unterscheidet sich der Betrag des Maximums sowie die Koinzidenzfrequenz. Der modale Ansatz zeigt im Vergleich zum Abschätzungsansatz eine Frequenzverschiebung. Da sich die Koinzidenzfrequenzen bei $f_{c, Kirchhoff} = 12053$ Hz und $f_{c, Mindlin} = 12460$ Hz befinden, ist das Verhältnis der Schwingungsamplituden zur Plattendicke gering. Somit sind die Auswirkungen hinsichtlich des Abstrahlgrades zwischen diesen beiden Ansätzen ebenfalls gering. Der theoretische Abschätzungsansatz ist in dem Bereich um die Koinzidenzfrequenz stark parameterabhängig und bietet somit eine ungenaue Schätzung. Für diesen Bereich sollte dieser Ansatz vermieden werden. Die FEM-Berechnungen wurden aufgrund des numerischen Aufwandes nur bis 10 kHz durchgeführt. Oberhalb der Koinzidenzfrequenz nähert sich der mit der BEM berechnete Abstrahlgrad asymptotisch gegen 1.

Um die Fluid-Struktur-Interaktion der EFEM anhand einer abstrahlenden Platte zu verifizieren, wird ein EFEM-Modell passend zu den vorherigen Berechnungen des Abstrahlgrades verwendet. Hierbei handelt es sich ebenfalls um eine quadratische Stahlplatte mit einer Kantenlänge von $L_x = L_y = \dots = 20$ cm und einer Dicke von $h = 1$ mm. Eine Seite dieser Stahlplatte ist mit einer quaderförmigen Fluidkavität mit den Maßen $20 \times 20 \times 200$ cm gekoppelt. Der Modellaufbau ist in Abbildung 4.13 gezeigt, wobei (1) die Stahlplatte, (3) die Fluidkavität und (2) die Kopplungselemente darstellt. Die Stahlplatte ist allseitig translatorisch fixiert und die Kavität besitzt schallharte Randbedingungen.

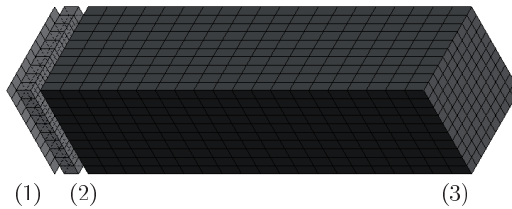


Abbildung 4.13: EFEM-Modell einer abstrahlenden Platte

Der Energiefluss zwischen Struktur und Fluid ist über Transmissionskoeffizienten in der EFEM umgesetzt. Hierbei kommt der modale Ansatz zur Berechnung des Abstrahlgrades zum Einsatz. Als eine Validitätsprüfung der Berechnungsergebnisse ist die Äquivalenz der zeitlich gemittelten kinetischen und potentiellen Energie auf der Mittellinie der Fluidkavität, die sich orthogonal zur Platte befindet, in Abbildung 4.14 gezeigt. Die potentielle und kinetische Energiedichte sind um 90° phasenverschoben und besitzen ein Amplitudenverhältnis von 0,8. Die Gesamtenergiedichte wird durch Approximation $e_{Ges} = e_{kin} + e_{pot} \approx 2 \cdot e_{pot}$ und mittels des Amplitudenverhältnisses $e_{kin} = 0,8 \cdot e_{pot}$ in dieser Berechnungsvariante um 11 % überschätzt. Diese Überschätzung entspricht einer Erhöhung des Energiedichtepegels um ca. 0,45 dB.

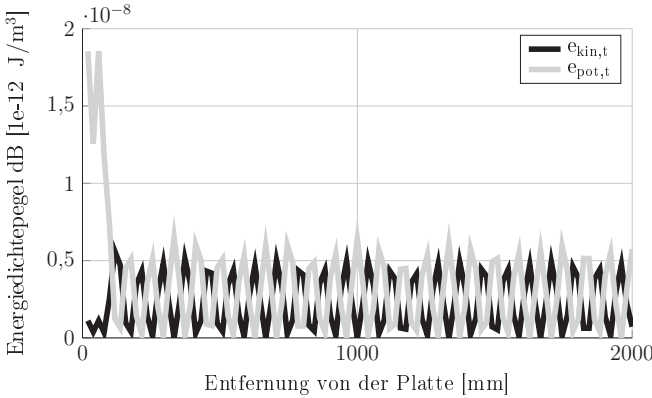


Abbildung 4.14: Zeitlich gemittelte kinetische und potentielle Energie

Das Energieniveau in der fluidgefüllten Kavität ist aufgrund der geringen Dämpfung des Fluides annähernd konstant. Abbildung 4.15 zeigt ebenfalls auf der Mittellinie der Fluidkavität die zeitlich gemittelte Energiedichte der FEM-Berechnung FEM_t sowie das zeitlich und räumlich über die gesamte Kavität gemittelte Energieniveau der FEM- und EFEM-Berechnungen, $FEM_t, \Delta x_{BE}$ und $EFEM$. Diese beiden Energieniveaus weisen Unterschiede von ± 1 dB auf.

Da die Darstellung akustischer Berechnungsergebnisse aus Gründen der Übersichtlichkeit oft in Dezibel visualisiert ist, folgt eine Definition der unterschiedlichen Pegel und deren gegenseitigen Beziehungen. Für akustische Fluide sind der Schnelle-, Druck- und Energiedichtepegel mit den Bezugswerten $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ Pa und $v_0 = 5 \cdot 10^{-8}$ m/s für Luft sowie $e_0 = 10^{-12}$ N/m² für die Energiedichte im Fluid definiert.

$$\text{Druckpegel} \quad L_P = 10 \log_{10} \left(\frac{p_t^2}{p_0^2} \right) \quad (4.56)$$

$$\text{Schnellepegel} \quad L_V = 10 \log_{10} \left(\frac{v_t^2}{v_0^2} \right) \quad (4.57)$$

$$\text{EFEM-Pegel} \quad L_{EFEM} = 10 \log_{10} \left(\frac{e_t}{e_0} \right) \quad (4.58)$$

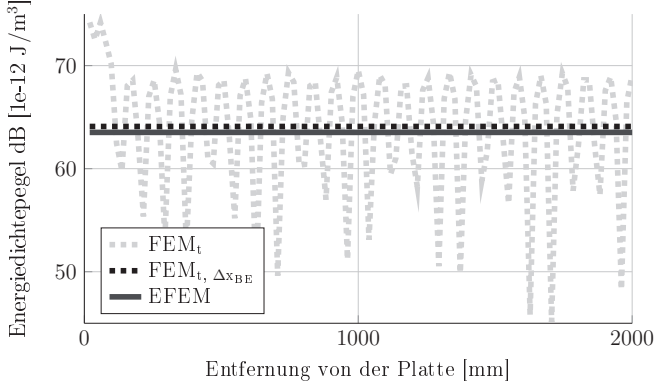


Abbildung 4.15: Energiedichte EFEM/FEM

Unter Berücksichtigung der Kennimpedanz $Z_0 = \rho_{Fluid} c_{Fluid}$ und der Äquivalenz potentieller und kinetischer Energiedichte gilt für die zeitlich gemittelte Energiedichte im Fluid $e_{Fluid} = \frac{\rho_{Fluid}}{2} |v|^2$. Dieses führt zu den Gleichungen für die Pegelumrechnungen

$$L_{EFEM} = 10 \log_{10} \left(\frac{e_t}{e_0} \right) \quad (4.59)$$

$$= 10 \log_{10} \left(\frac{v_0^2 \rho_{Fluid} |v_t|^2}{e_0 v_0^2} \right) \quad (4.60)$$

$$= 10 \log_{10} \left(\frac{v_0^2 \rho_{Fluid}}{e_0} \right) + L_V \quad (4.61)$$

$$= 10 \log_{10} \left(\frac{p_0^2}{Z_0 e_0 c_{Fluid}} \right) + L_P. \quad (4.62)$$

Lineare Abhängigkeit für leichte Fluide

Da die Bestimmung des Abstrahlgrades für eine Vielzahl von Oberflächen nicht trivial ist und für komplexe Geometrien gegebenenfalls durch Approximation zu bestimmen ist, muss dieser Parameter als mögliche Fehlerquelle angesehen werden. Diesbezüglich ist der Einfluss dieses Parameters auf die gesamte Energieverteilung, besonders allerdings für die mit der Struktur gekoppelten Kavität, zu analysieren [20, 21, 22].

Für eine lineare Skalierung des Abstrahlgrades $\sigma \rightarrow \lambda\sigma$ folgt aus (4.40) - (4.39)

$$\tau_{p,ac} \rightarrow \lambda\tau_{p,ac}, \quad \text{da } \beta\sigma \ll 2 \quad \text{und} \quad (4.63)$$

$$\tau_{ac,p} \rightarrow \lambda\tau_{ac,p}. \quad (4.64)$$

Da β als Quotient der Dichten und Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Medien definiert ist, zeigt sich die Voraussetzung für den Fall $\beta\sigma \ll 2$ mit

$$\beta = \frac{c_{Fluid}\rho_{Fluid}}{c_{Platte}\rho_{Platte}}. \quad (4.65)$$

Handelt es sich um ein leichtes Fluid, das mit einer verhältnismäßig schweren Platte interagiert, ist dieser Quotient hinreichend klein. Für die Interaktion zwischen Luft und Stahl liegt β bei praxisnahen Problemstellungen der EFEM bei $\beta \leq 5 \cdot 10^{-4}$. Da bei Biegewellen die Ausbreitungsgeschwindigkeit von der Plattendicke und der Frequenz abhängt, ist eine obere Schranke angegeben.

Der sich aus der theoretischen Betrachtung ergebene lineare Zusammenhang zwischen Abstrahlgrad und Energiedichte, bestätigt sich ebenfalls durch EFEM-Berechnungen. Eine im Zentrum punktförmig angeregte quadratische Stahlplatte, die mit einer Luft gefüllten Kavität interagiert, ist mit der EFEM berechnet worden. Hierbei fand eine Variation des Abstrahlgrades im Bereich von $[0, \frac{5}{2}]$ ohne eine Veränderung der restlichen Parameter statt. In der Tabelle 4.2 sind die gemittelten Energiedichtenniveaus der Kavität und der dazugehörige Abstrahlgrad angegeben. Der lineare Zusammenhang zwischen Abstrahlgrad und Energiedichte im Fluid bestätigt sich in diesen Berechnungsergebnissen.

Tabelle 4.2: Linearer Einfluss des Abstrahlgrades

Abstrahlgrad σ	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
Energiedichte $10^{-7} \frac{J}{m^3}$	0,000	0,043	0,084	0,123	0,161	0,198

4.2.2 Abstrahlgrad komplexer Geometrien

Der vorangegangene Abschnitt widmete sich der Fluid-Struktur-Interaktion mit der EFEM und der Analyse eines bedeutenden Parameters, dem Abstrahlgrad. Für eine simple Geometrie einer quadratischen Platte sind gute Abschät-

zungen für den Abstrahlgrad möglich. Ist diese Platte in eine komplexe Geometrie integriert, kann nicht sichergestellt werden, dass der Abstrahlgrad dieser Teilfläche mithilfe der vorgestellten Ansätze berechnet werden kann. Um allerdings anwendungsorientierte Berechnungen durchzuführen, müssen für alle Teilflächen einer komplexen Struktur probate Berechnungs- oder Schätzverfahren für den Abstrahlgrad existieren.

Eine quadratische Stahlplatte, deren Abstrahlgrad bereits hinreichend genau approximierbar ist, wird in komplexe Strukturen integriert. In dieser Analyse wird ausschließlich der Abstrahlgrad einer in die Struktur integrierten Stahlplatte betrachtet. Abbildungen 4.16 - 4.19 zeigen vier Konfigurationen verschiedener Strukturen, wobei die für die Abstrahlung relevante Fläche schraffiert ist. Der Rest der jeweiligen Geometrie beeinflusst nur das Strukturverhalten und strahlt nicht direkt in das Fluid ab. Die Geometrie und die Materialeigenschaften der quadratischen Platten sind in allen vier Modellen identisch. Durch einen zusätzlichen Punkt ist der Anregungsort gekennzeichnet, der sich im Zentrum der jeweiligen Platte befindet.

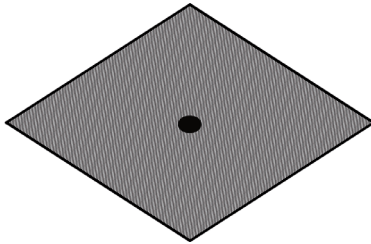


Abbildung 4.16: Platte

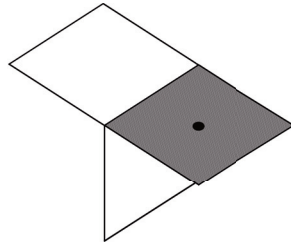


Abbildung 4.17: T-Struktur

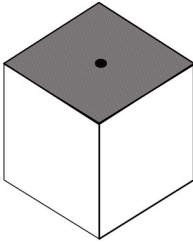


Abbildung 4.18: Box 1

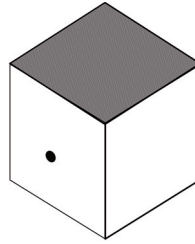


Abbildung 4.19: Box 2

Abbildung 4.16 zeigt eine quadratische allseitig einfach gelagerte Stahlplatte, Abbildung 4.17 eine T-Struktur bestehend aus drei identischen, quadratischen Stahlplatten, wobei die Maße und Parameter dieser Teilsegmente äquivalent zu der in Abbildung 4.16 gezeigten Platte sind. Die Abbildungen 4.18 und 4.19 zeigen jeweils eine Box bestehend aus den baugleichen Stahlplatten. Der Abstrahlgrad ist jeweils nur für die schraffierte Platte der vier Strukturen berechnet. Bei der T-Struktur ist die rechte Platte und bei den beiden Boxen ist nur die obere Stahlplatte für die Abstrahlung relevant. Die Analyse der Abstrahlgrade dieser Strukturen zeigt eine Sensitivität dieser Größe hinsichtlich der Randbedingungen und der Anregung einer Struktur auf das Abstrahlverhalten der schraffiert dargestellten Teilsegmente.

Die Abstrahlgrade der beschriebenen Stahlplatten in den Strukturen in den Abbildungen 4.16 - 4.19 sind mit der FEM berechnet und in Abbildung 4.20 dargestellt. Diese Berechnungen basieren auf der klassischen verschiebungs-basierten Formulierung für das Strukturverhalten und auf der Helmholtz-Gleichung im Fluid. Die Kopplung ist über eine Schnelleäquivalenz an der abstrahlenden Fläche umgesetzt.

Die tatsächlichen Abstrahlgrade der identischen Platten in den verschiedenen Strukturen unterscheiden sich maximal um den Faktor 7. Der Abstrahlgrad einer Teilstruktur kann somit nicht separat ermittelt werden, da dieser von der Lokalisation der Quelle und den Randbedingungen abhängt. Aufgrund eines linearen Zusammenhanges könnte sich eine Fehlschätzung des Abstrahlgrades auf den Energiedichtepegel im Fluid um ca. $10 \log_{10}(7) = 8,5$ dB auswirken. Da der Anwendungsbereich der EFEM allerdings im hohen Frequenzbereich

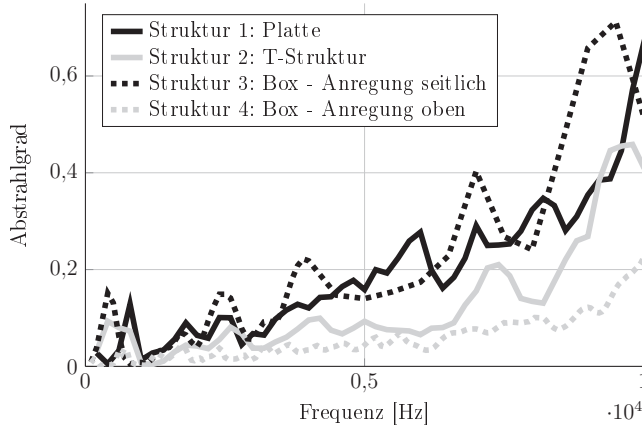


Abbildung 4.20: Abstrahlgrade verschiedener Strukturen

liegt, muss der Abstrahlgrad nicht zwangsweise berechnet, sondern kann in einigen Fällen mit $\sigma = 1$ angenähert werden, sobald die Berechnungsfrequenz hinreichend groß ist. Für diese Abschätzung kann die analytische Approximationsformel aus Abschnitt 4.2.1 oder die Standardabschätzung von $f_{calc} \geq 1.5f_c$ unterstützend verwendet werden.

Abstrahlung einer zylinderförmigen Stahltonne

Um die EFEM auch für komplexe Fluid-Struktur-Interaktionen zu verifizieren, wird in diesem Unterabschnitt ein Beispiel behandelt. In einer luftgefüllten zylindrischen Kavität mit einem Durchmesser von 2700 mm und einer Höhe von 1500 mm befindet sich eine geschlossene Stahltonne Ω_S mit dem Durchmesser von $D_S = 800$ mm und einer Höhe von $H_S = 1000$ mm. Die Stahltonne wird an der oberen Fläche mit einer Kraft von 1 N und einer Frequenz von 2000 Hz angeregt. Die Mantelfläche und die Bodenplatte der Stahltonne sind mit dem Fluid gekoppelt. Die äußeren Ränder der Kavität $\Omega_F \setminus \Omega_S$ sind schallhart modelliert, d.h. $\forall \vec{x} \in \partial\Omega_F$ ist die Oberflächenschnelle \vec{v} in Richtung der äußeren Normalen \vec{n} null, $\partial\vec{v}/\partial\vec{n} = 0$. Der Aufbau der Kavität ist in Abbildung 4.21 dargestellt.

Für die Verifizierung der EFEM-Berechnung wurde ein FE-Modell verwendet,

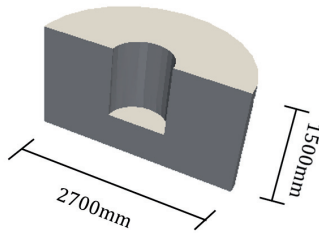


Abbildung 4.21: Maße der luftgefüllten Kavität

das im Vergleich zum EFE-Modell aufgrund der Frequenzabhängigkeit eine feinere Diskretisierung besitzt. Die Berechnungsgitter der beiden Modelle sind in Abbildung 4.24 gezeigt und die Modellgrößen in Tabelle 4.3 aufgelistet.

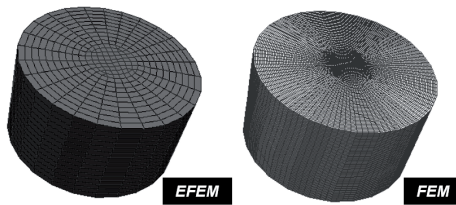


Abbildung 4.22: Berechnungsgitter FEM/EFEM

Tabelle 4.3: Größe der numerischen Modelle

Knoten	FEM	EFEM
Strukturknoten	7170	472
Fluidknoten	290617	5068

Eine über jedes Teilsegment der Stahltonne gemittelte Energiedichte der EFEM und FEM ist in Abbildung 4.23 gezeigt. Da bei dem EFE-Ansatz ausschließlich das Fernfeld berücksichtigt wird, treten im Nahfeld um den Anregungspunkt, in der Deckelfläche, höhere Abweichungen auf. In den Segmenten, die nicht

direkt angeregt sind, liegen die maximalen Abweichungen bei 1,5 dB. Die berechneten Energiedichten der EFEM auf der Struktur stimmen hinreichend genau mit denen des FE-Modells überein.

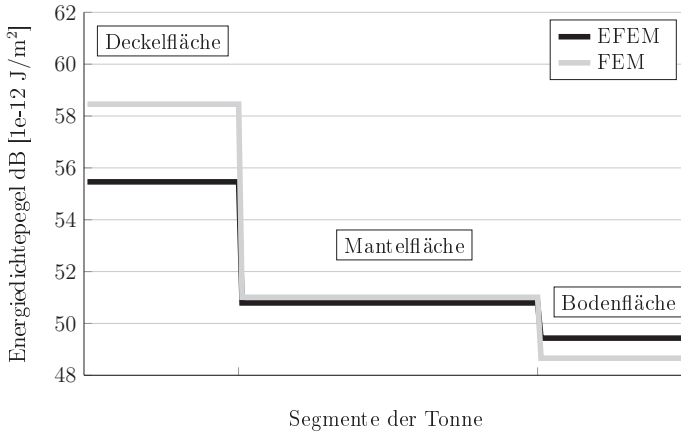


Abbildung 4.23: FEM/EFEM auf den Sektionen der Tonne

Die Energiedichteverteilung entlang einer Geraden innerhalb der Kavität sowie eine Skizze dieser Linie sind in Abbildung 4.24 gezeigt. Es werden verschiedene Auswertungen der FE-Berechnungen dargestellt und mit den EFEM-Ergebnissen verglichen. Hierbei handelt es sich um die zeitlich gemittelte Energiedichte FEM_t , die zeitlich und räumlich über eine Wellenlänge λ gemittelte Energiedichte $FEM_{t,\Delta x}$ sowie die in der gesamten Kavität gemittelte Energiedichte $FEM_{t,\Delta x,BE}$.

Es liegt eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den EFEM-Berechnungen und der über die gesamte Kavität gemittelte Energiedichte vor. Die maximale Abweichung liegt unterhalb von 0,7 dB. Dieser Wert ist geringer als die maximale Abweichung der Energiedichte auf der Struktur von 1,5 dB. Hierbei ist zu berücksichtigen, dass die Mantelfläche der Tonne den Hauptteil der akustischen Energie abstrahlt. Auf diesem Tonnensegment liegt die maximale Energiedichtedifferenz allerdings bei 0,5 dB.

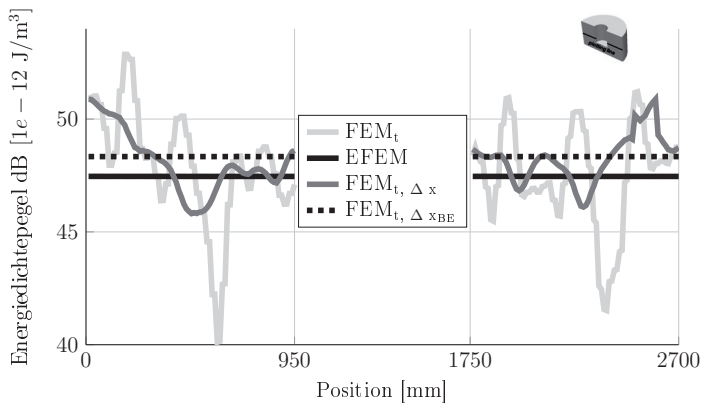


Abbildung 4.24: Energiedichte im Fluid FEM/EFEM

Kapitel 5

Numerische Analyse

Als ein numerisches Verfahren besitzt die Energie-Finite-Elemente-Methode einige Eigenschaften, die sich in der Systemmatrix widerspiegeln. Die Struktur dieser Matrix, die Anordnung der Freiheitsgrade und weitere numerische Eigenschaften sind hilfreiche Informationen zur Wahl des Lösungsalgorithmus und zur Analyse des Speicherbedarfes. Außerdem ist die Wohldefiniertheit des Problems und das Konvergenzverhalten zu untersuchen.

5.1 Systemmatrix der EFEM

Aus der Anwendung des Finite-Elemente-Ansatzes auf die EFEM-Basisgleichung (2.63) entstehen der Vektor der Eingangsleistung F sowie die Teilmatrizen $\frac{c^2}{\omega\eta}DNN$ und $\omega\eta NN$. Durch Ergänzung der Kopplungsterme Q folgt die EFEM-Systemmatrix K

$$F = \underbrace{\left(\frac{c^2}{\omega\eta}DNN + \omega\eta NN - Q \right)}_K \cdot e \quad (5.1)$$

$$F = K \cdot e. \quad (5.2)$$

Zur Auswahl der numerischen Lösungsverfahren ist der **Aufbau der EFEM-Systemmatrix** heranzuziehen. Hierfür sind die entsprechenden Wellentypen der EFEM-Basiselemente zu betrachten, da diese den Freiheitsgraden entsprechen. In EFEM-Plattenelementen ist die Energieausbreitung mittels drei Wellentypen beschrieben: Longitudinal-, Scher- und Biegewellen. Somit besitzen Plattenelemente für jeden Diskretisierungspunkt drei Freiheitsgrade. Für ein

EFEM-Modell, welches beliebig viele Plattenelemente und zwei Fluidkavitäten beinhaltet, besteht die Systemmatrix K einerseits aus drei Diagonalblöcken (Long, Scher, Biege), welche jeweils die Energieausbreitung eines Wellentyps innerhalb der EFEM-Plattenelemente beschreiben (Abbildung 5.1). Diese drei Diagonalblöcke besitzen eine identische Belegung. Zwei weitere Blöcke geben die Energieausbreitung in den Fluidkavitäten $Fluid_1$ und $Fluid_2$ wieder, die nur durch Longitudinalwellen geschieht (Abbildung 5.1). Außerhalb der Diagonalblöcke befinden sich die Kopplungseinträge, welche die Interaktionen zwischen den unterschiedlichen Wellentypen und den gekoppelten Basiselementen beschreiben. Die Kopplungseinträge innerhalb der Diagonalblöcke der Matrix K stellen die Reflexionen des selben Wellentyps an den Kopplungsstellen dar (Abbildung 5.2). Die Fluidkavitäten sind mittels der Nicht-Diagonalblöcke $Fluid_j - Biege$ und $Biege - Fluid_j$ für $j = 1, 2$ mit der restlichen Struktur gekoppelt. Diese Kopplung findet nur zwischen den Biegewellen in der Struktur und den Longitudinalwellen im Fluid statt. Somit befinden sich auch nur in diesen vier Nicht-Diagonalblöcken Kopplungseinträge.

Long				
	Scher			
		Biege		
			Fluid ₁	
				Fluid ₂

Abbildung 5.1: Blockmatrixaufbau des ungekoppelten Systems

Long - Long	Scher - Long	Biege - Long		
Long - Scher	Scher - Scher	Biege - Scher		
Long - Biege	Scher - Biege	Biege - Biege	Fluid ₁ - Biege	Fluid ₂ - Biege
		Biege - Fluid ₁	Fluid ₁ - Fluid ₁	
		Biege - Fluid ₂		Fluid ₂ - Fluid ₂

Abbildung 5.2: Blockmatrixaufbau der Kopplungsterme

Die Dimension der Systemmatrix setzt sich aus der Anzahl der Knoten der jeweiligen EFEM-Platten $N_{Platten}$ und der EFEM-Kavitäten N_{Fluid} multipliziert mit den entsprechenden Freiheitsgraden $3 \cdot N_{Platten} + 1 \cdot N_{Fluid}$ zusammen. Äquivalent zu herkömmlichen FE-Systemmatrizen ist die Matrix K schwach besetzt.

Zur Auswahl des Lösungsalgorithmus und zur Analyse des Speicherbedarfes ist die Systemmatrix auf **Symmetrie** zu untersuchen. Für Modelle ohne Interaktionen zwischen den EFEM-Basiselementen ist die Matrix aufgrund des FE-Ansatzes symmetrisch. Das Einfügen der Kopplungsterme zerstört die Symmetrie, da die Energieübertragung zwischen den EFEM-Basiselementen im Allgemeinen nicht symmetrisch ist. Anhand eines EFEM-Modells mit Fluid-Struktur-Interaktion ist beispielhaft die Matrixbelegung dargestellt. Der Matrixblock des Strukturmodells ist in Abbildung 5.3 (links), des gesamten Modells in Abbildung 5.3 (mittig) und die nicht-symmetrischen Einträge $K - K^T$ in Abbildung 5.3 (rechts) gezeigt. Die Linien verdeutlichen lediglich die Blockgestalt, analog zu Abbildung 5.1 und 5.2.

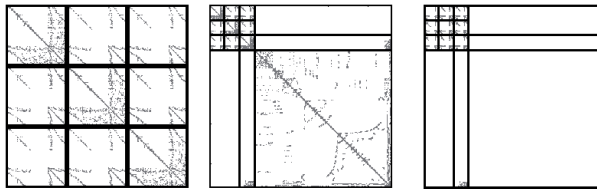


Abbildung 5.3: Matrixbelegung

Die EFEM-Systemmatrix ist aufgrund ihrer Eigenschaften mit verschiedenen iterativen und direkten Verfahren lösbar. Ein Überblick über die in dieser Arbeit betrachteten Berechnungsverfahren ist im Folgenden dargestellt [24, 33, 43].

Iterative Verfahren:

Verallgemeinertes Residuenminimierungs-Verfahren (GMRES)

Das GMRES-Verfahren (Generalized Minimal Residual Method) ist ein iteratives Verfahren für große dünnbesetzte Gleichungssysteme aus der Klasse der Krylov-Unterraum-Verfahren, welches auch für nicht-symmetrische Matrizen geeignet ist. Hierbei wird bei jeder Iteration das minimale normierte Residuum bzgl. des entsprechenden Krylov-Unterraumes $U_k = \text{span} \langle \vec{b} - A\vec{x}_0, \dots,$

$A^{k-1}(\vec{b} - A\vec{x}_0)$ des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ berechnet. Die Komplexität des Verfahrens ist $O(n)$ und der Speicherbedarf steigt linear mit der Anzahl der Iterationen, da bei jedem Iterationsschritt ein zusätzlicher Basisvektor des Krylov-Unterraumes zu speichern ist. Dieser Speicherbedarf kann durch einen Neustart des Verfahrens verringert werden.

Bikonjugiertes Gradientenverfahren (BiCG-Verfahren)

Dieses Verfahren basiert auf der Dreitermrekursion des Lanczos-Verfahrens. Allerdings können bei diesem Verfahren Stabilitätsprobleme auftreten. Dieses Verfahren besitzt äquivalent zu den folgenden iterativen Verfahren eine Komplexität $O(n)$ und einen linearen Speicherbedarf.

Quadriertes CG-Verfahren (CGS-Verfahren)

Das CGS-Verfahren ist eine Abwandlung des BiCG-Verfahrens, bei dem die Residuen modifiziert werden. Dieses Verfahren ist ebenfalls sehr instabil.

Bikonjugiertes stabilisiertes Gradientenverfahren (BiCGSTAB-Verfahren)

Ein Versuch das CGS-Verfahren zu stabilisieren ist das BiCGSTAB-Verfahren. Zusätzlich zur verbesserten Stabilität ist eine schnellere Konvergenz gegeben.

Quasi-Residuenminimierung (QMR-Verfahren)

Bei dem QMR-Verfahren reduziert die Methode der kleinsten Quadrate die Residuen des BiCG-Verfahrens und verbessert die Stabilität, wobei allerdings eine unregelmäßige Konvergenz auftritt.

Direkte Verfahren:

LU-Verfahren mit Spaltenpivotisierung

Das LU-Verfahren ist ein direktes Verfahren zur Lösung eindeutig bestimmter linearer Gleichungssysteme, welches sowohl auf vollbesetzte als auch auf dünnbesetzte Matrizen anwendbar ist. Hierbei wird die Matrix in eine linke untere Dreiecksmatrix L und in eine rechte obere Dreiecksmatrix R zerlegt. Zusätzlich findet eine Spaltenpivotisierung statt, die in einer Permutationsmatrix P zu-

sammengefasst ist. Es folgt für das lineare Gleichungssystem, dargestellt durch eine Matrix A , die Beziehung $P \cdot A = L \cdot R$. Mithilfe der Matrizen L und R kann das lineare Gleichungssystem durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen für beliebige rechte Seiten gelöst werden. Die Komplexität dieses Verfahrens entspricht $O(n^2)$.

Der numerische Aufwand der EFEM ist hinsichtlich des Aufwandes der einzelnen Berechnungsmodule zu untersuchen, wobei das Lösen des linearen Gleichungssystems lediglich ein Berechnungsmodul darstellt. Für diese Analyse dienen zwei Strukturen, ein Motorfundament und eine Stahlsektion. Hierbei wird nur eine Berechnungsfrequenz betrachtet, da der Aufwand aufgrund der im Frequenzbereich gleichbleibenden Modellgröße sich linear mit der Anzahl der Berechnungsfrequenzen skaliert.

Modell 1: Motorfundament

Das Motorfundament besteht aus einer verrippten Aluminiumstruktur (Abbildung 5.4), dessen äußere Randflächen mit einer Luftkavität gekoppelt sind. An den äußeren Rändern der Fluidkavität ist eine Freifeldbedingung integriert, um Reflexionen zu vermeiden.

Modell 2: Stahlsektion

Die Stahlsektion ist ein geschlossener verrippter Hohlkörper (Abbildung 5.5), der von Wasser umgeben ist. Bei diesem Modell existiert ebenfalls eine Freifeldbedingung, die durch eine absorbierende Schicht an den äußeren Rändern der Kavität realisiert ist. In Tabelle 5.1 ist die Anzahl der Knoten und Elemente der beiden Modelle zusammengefasst.

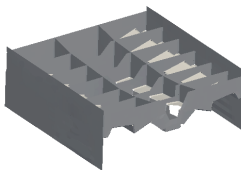


Abbildung 5.4: Modell 1

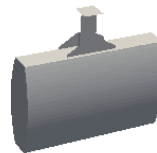


Abbildung 5.5: Modell 2

Tabelle 5.1: Anzahl der Knoten und Elemente

	Motorfundament	Stahlsektion
Knoten _{Struktur}	5807	3791
Knoten _{Fluid}	11760	34659
Elemente _{Struktur}	630	4201
Elemente _{Fluid}	10306	32232
Elemente _{Randbedingung}	2922	6170

Die vorab vorgestellten Lösungsverfahren sind in Tabelle 5.2 hinsichtlich der Rechenzeit zur Lösung der Systemmatrizen der beiden Modelle dargestellt, wobei eine relative Toleranz von $TOL = 10^{-6}$ gewählt wurde.

Tabelle 5.2: Rechenzeiten der Lösungsverfahren

Algorithmus	Motorfundament	Stahlsektion
	Zeit [s]	Zeit [s]
LU	1,020	13,592
GMRES	0,094	0,171
BiCG	0,236	0,418
QMR	0,252	0,445
CGS	0,286	0,526
BiCGSTAB	0,385	0,708

Für die einzelnen Module der EFEM, die zum Aufbau der Systemmatrix führen, sind die Rechenzeiten in Tabelle 5.3 dargestellt.

Tabelle 5.3: Rechenzeiten der EFEM-Module

EFEM-Module	Motorfundament	Stahlsektion
	Zeit [s]	Zeit [s]
Einlesen des Inputdecks und		
Datenstrukturerstellung	72	257
Berechnung Transmissionskoeffizienten	908	537
Aufbau des Matrixteils-Struktur	103	86
Aufbau des Matrixteils-Fluid	456	3840
Fluid-Struktur-Kopplung	18	46

Die Rechenzeiten zur Lösung der Systemmatrix sind verschwindend gering im Vergleich zum Aufwand der Module aus Tabelle 5.3. Die Auswahl des Lösungsverfahrens ist von untergeordneter Bedeutung für die Berechnungsdauer der gesamten Prozesskette, insbesondere aufgrund der geringen Anzahl von Freiheitsgraden.

5.2 Konvergenzverhalten

In Kapitel 2 ist die Umformung der Bewegungsgleichungen (2.35), (2.36), (2.43) und (2.52) zur EFEM-Basisgleichung (2.63) unter bestimmten Voraussetzungen gezeigt, welche die exakte Energiedichteverteilung hinreichend gut approximiert. Der Fokus in diesem Unterkapitel liegt auf der Formulierung der Problemstellung und der Konvergenzeigenschaften der EFEM.

5.2.1 Wohldefiniertheit der Problemformulierung

Um die erfolgreiche Durchführung einer numerischen Simulation eines abstrakten Problems sicherzustellen, muss dieses wohldefiniert sein. Ein numerisches Problem ist wohldefiniert [15], wenn

- eine Lösung existiert,
- diese eindeutig ist und
- diese ebenfalls stetig von den Parametern abhängt.

Durch die genannten Kriterien ist sichergestellt, dass ein eindeutiges Ergebnis existiert und trotz leichter Parameterunsicherheiten nicht beliebig von der exakten Lösung abweichen kann.

Die algebraische Formulierung eines EFEM-Gesamtsystems aus N Subsystemen $S = \bigcup_{i=1}^N S_i$ mit beliebigen Interaktionen der Subsysteme ist durch

$$\underbrace{\pi_{in}}_{\text{Eingangsleistung}} = \underbrace{\frac{-c^2}{\omega\eta}\Delta e + \eta\omega e}_{\text{Ausbreitung in den Subsystemen}} + \underbrace{\sum_{i,j=1}^N \vec{q}_{\vec{n}}|_{\partial S_i \cap \partial S_j}}_{\text{Energiefluss zwischen den Subsystemen}} \quad (5.3)$$

gegeben. Unter der physikalischen Annahme, dass der Energiefluss zwischen den Subsystemen beschränkt ist, kann dieses System in N unabhängige Problemstellungen zerlegt werden, bei denen die Neumann-Randbedingungen unbekannt, aber beschränkt sind

$$\pi_{in}(\vec{x}) = \frac{-c^2}{\omega\eta}\Delta e(\vec{x}) + \eta\omega e(\vec{x}) + \vec{q}_{\vec{n}}(\vec{x})|_{\partial S_i} \quad \forall \vec{x} \in S_i \quad (5.4)$$

$$\nabla \vec{q}_{\vec{n}} : \partial S_i \rightarrow \mathbb{R}; \vec{x} \mapsto \vec{q}_{\vec{n}}(\vec{x}) < \infty. \quad (5.5)$$

Ein separates Lösen dieser Teilprobleme ist allerdings nicht möglich. Jedoch ist jedes dieser Teilprobleme eine elliptische partielle Differentialgleichung (PDGL) zweiter Ordnung, für die mit dem Lemma von Lax-Milgram [15] die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung $e(S_i)$ gezeigt ist. Dieses Lemma beinhaltet, dass für ein gleichmäßig elliptisches bilineares Funktional $BLF : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Hilbertraum H mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ für jedes beschränkte lineare Funktional $LF : H \rightarrow \mathbb{R}$ auf H ein eindeutiges Element $u \in H$ existiert, für das $BLF(u, v) = LF(v) \forall v \in H$ gilt.

Das Lemma von Lax-Milgram wird im Folgenden auf die EFEM-Problemstellung bezogen. Die allgemeine Form einer elliptischen PDGL zweiter Ordnung

$$Lu = - \sum_{i,k=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{i,k} \frac{\partial}{\partial x_k} u \right) + a_0 u \quad (5.6)$$

kann zu einem der EFEM-Basisgleichung äquivalenten Operator

$$L u = - \sum_{i=1}^d b_1 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u + b_0 u \quad (5.7)$$

$$= -b_1 \Delta u + b_0 u \quad (5.8)$$

umgeformt werden. Durch Anwendung des Greenschen Satzes und der schwachen Formulierung mit der Testfunktion $v \in S_{\Delta xy}(\Omega)$, den Raum der linearen finiten Elemente, entsteht die Bilinearform

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left(b_1 \sum_{i,k=1}^d \nabla u \cdot \nabla v + b_0 uv \right) d\Omega. \quad (5.9)$$

Ist diese Bilinearform gleichmäßig elliptisch auf $S_{\Delta xy}$, folgt die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung für die Problemstellung der EFEM-Basisgleichung durch den Satz von Lax-Milgram. Das lineare Funktional ist mit dem L^2 -Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega)}$ gegeben durch

$$LF(v) = \int_{\Omega} \pi_{in} v \, d\Omega = \langle \pi_{in}, v \rangle_{L^2(\Omega)}. \quad (5.10)$$

Eine Bilinearform heißt gleichmäßig elliptisch [13] auf einem Hilbertraum H , wenn die sich aus der Bilinearform ergebende Systemmatrix positiv definit ist und folgende Bedingungen mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^+$ erfüllt sind:

$$|a(u, v)| \leq C_1 \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in H \quad (5.11)$$

$$a(v, v) \geq C_2 \|v\|^2 \quad \forall v \in H. \quad (5.12)$$

Dies ist gezeigt durch die Einführung der Energienorm $\|v\|_E = \sqrt{a(v, v)}$ sowie durch die Äquivalenz der Normen [15, 45] auf $S_{\Delta xy}(\Omega) = \text{span} \{ \tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_1, \dots, \tilde{\phi}_N \}$ mit den finiten Elementen $\tilde{\phi}_i$ und dem Sobolevraum $H_0^1(\Omega)$, dem Raum aller einfach schwach differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger.

5.2.2 Konvergenztheorie der EFEM

Die EFEM ist hinsichtlich Konvergenz und Konvergenzordnung zu untersuchen. Diese Untersuchungen erfolgen vorab anhand eines ungekoppelten EFEM-Basiselementes und daraufhin anhand einer gekoppelten Struktur.

Aus der schwachen Form entsteht die Projektion

$$a(e, \phi) = \langle \pi_{in}, \phi \rangle_{L^2(S_{\Delta xy})} \quad \forall \phi \in S_{\Delta xy} \quad (5.13)$$

$$a(e_{\Delta xy}, \phi) = \langle \pi_{in}, \phi \rangle_{L^2(S_{\Delta xy})} \quad \forall \phi \in S_{\Delta xy} \quad (5.14)$$

$$a(e - e_{\Delta xy}, \phi) = 0 \quad \forall \phi \in S_{\Delta xy} \quad (5.15)$$

auf den Unterraum der finiten Elemente $S_{\Delta xy}$. Diese Projektion ist über die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ und das L^2 -Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(S_{\Delta xy})}$ dargestellt. Zusätzlich induziert dieses Skalarprodukt die Norm $\|\cdot\|_{L^2(S_{\Delta xy})} = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(S_{\Delta xy})}}$ des Hilbertraumes $S_{\Delta xy}(\Omega)$.

Mithilfe der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ wird ebenfalls die Energienorm $\|\cdot\|_E$ (5.16) definiert

$$\|\phi\|_E = \sqrt{a(\phi, \phi)} \quad \forall \phi \in S_{\Delta xy}. \quad (5.16)$$

Gleichung (5.15) zeigt, dass $e_{\Delta xy}$ die Minimalapproximation bezüglich der Energienorm ist. Die Konvergenz des Finite-Elemente-Verfahrens angewandt auf die elliptische Differentialgleichung ist durch das Lemma von Cea [45] gesichert.

Lemma von Cea

Gegeben sei eine gleichmäßig elliptische Bilinearform a auf $H^1(\Omega)$, dem Raum aller einfach schwach differenzierbaren Funktionen auf Ω , mit $S_{\Delta xy} \subseteq H^1(\Omega)$. Ferner seien e und $e_{\Delta xy}$ Lösungen der schwachen Form in $H^1(\Omega)$ bzw. in $S_{\Delta xy}$. Dann gilt mit $C_3 \in \mathbb{R}^+$

$$\|e - e_{\Delta xy}\|_{H^1(\Omega)} \leq C_3 \inf_{\phi_{\Delta xy} \in S_{\Delta xy}} \|e - \phi_{\Delta xy}\|_{H^1(\Omega)}. \quad (5.17)$$

Bestimmt man eine passende Abschätzung für $\|e - \phi_{\Delta xy}\|_{H^1(\Omega)}$, impliziert das Lemma von Cea die Konvergenz. Ersetzt man $e_{\Delta xy}$ durch einen linearen Interpolanten $e_I = \sum_{i=1}^n e(Z_i)\phi_i(\vec{x})$ mit den Knotenpunkten Z_1, \dots, Z_n , kann eine Abschätzung für die H^1 -Norm mit $C_4 \in \mathbb{R}^+$

$$\|e - e_I\|_{H^1(\Omega)} \leq C_4 (\Delta xy)^k \|e\|_{H^{k+1}(\Omega)} \quad (5.18)$$

hergeleitet werden [15, 45]. Δxy ist ein Maß für die Feinheit der Diskretisierung. Bei einer äquidistanten Viereckszerlegung entspricht Δxy der Kantenlänge des Viereckselementes. Mit dem bilinearen Ansatz dieser äquidistanten Zerlegung gilt mit $C_5 \in \mathbb{R}^+$ für die L^2 -Norm

$$\|e - e_I\|_{L^2(\Omega)} \leq C_5 \Delta xy. \quad (5.19)$$

Durch diese Abschätzung ist die Konvergenz für ungekoppelte Systeme gesichert. Für den linearen Ansatz im Dreieck und Viereck ist $k = 1$ und somit

folgt aus Gleichung (5.19) die Konvergenzordnung für die L^2 -Norm.

Konvergenzordnung

Ein numerisches Verfahren hat die Konvergenzordnung k bzgl. der Norm $\|\cdot\|$, falls für die Lösung $e_{\Delta xy}$ in Abhängigkeit der Diskretisierung folgende Beziehung mit $C_{KO} \in \mathbb{R}^{>0}$ gilt:

$$\|e - e_{\Delta xy}\| \leq C_{KO} (\Delta xy)^k. \quad (5.20)$$

Für ungekoppelte Systeme wurde der Konvergenzbeweis sowie die Konvergenzordnung durch (5.19) und (5.18) berechnet und gezeigt. Bei gekoppelten Modellen zerstören die Kopplungsterme die Symmetrie der Bilinearform, die für einen analogen Konvergenzbeweis notwendig ist. Im folgenden Abschnitt werden die Konvergenzordnung sowie das Konvergenzverhalten anhand von numerischen Rechnungen bezüglich gekoppelter und ungekoppelter Systeme betrachtet, um ebenfalls Aussagen über gekoppelte Systeme treffen zu können.

5.2.3 Konvergenzordnung ausgewählter Beispiele

Zur Analyse des Konvergenzverhaltens und der Konvergenzordnung wird die analytische Lösung der EFEM-Basisgleichung im \mathbb{R}^2 hergeleitet. Diese lässt Rückschlüsse auf Charakteristika des Lösungsverhaltens zu.

Die EFEM-Basisgleichung (2.63) ist eine elliptische partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. Diese kann im \mathbb{R}^2 mittels Fouriertransformation und Besselfunktionen gelöst werden. Ausgehend von der Gleichung

$$\frac{-c^2}{\eta\omega} \Delta e + \eta\omega e = \delta_0(\vec{x}) \quad \text{mit } e: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ : \vec{x} \mapsto e(\vec{x}) \quad (5.21)$$

und einer Einheitsanregung im Nullpunkt $\delta_0(\vec{x})$ folgt mit der Fouriertransformation $\hat{\cdot}$ die Gleichung

$$\left(\frac{-c^2}{\eta\omega} |\vec{y}|^2 + \eta\omega \right) \hat{e}(\vec{y}) = \hat{\delta}_0(\vec{y}). \quad (5.22)$$

Die inverse Fouriertransformation $\check{\cdot}$ ergibt die Lösung $e(\vec{x})$ im \mathbb{R}^2

$$e(\vec{x}) = \frac{\delta_0(\vec{x}) \check{B}}{2\pi} \quad (5.23)$$

$$\check{B} = \left(-\frac{c^2}{\eta\omega} |\vec{y}(\vec{x})|^2 + \eta\omega \right)^{-1}. \quad (5.24)$$

Für weitere Umformungen [15] dient die Besselfunktion

$$B(\vec{x}) = 2\pi^{-1} \int_0^\infty e^{-t\eta\omega} \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{i(\vec{x},\vec{y})-t\left(\frac{c}{\eta\omega}\right)^2|\vec{y}|^2} dy \right) dt \quad (5.25)$$

und die Beziehung

$$\left(\frac{-c^2}{\eta\omega} |\vec{y}|^2 + \eta\omega \right)^{-1} = \int_0^\infty e^{-t\left(\frac{c^2}{\eta\omega} |\vec{y}|^2 + \eta\omega\right)} dt. \quad (5.26)$$

Mithilfe dieser Beziehungen folgt die analytische Formulierung von $e(\vec{x})$ im \mathbb{R}^2

$$e(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi \left(\frac{c}{\eta\omega}\right)^2} \int_0^\infty e^{-t\eta\omega - \frac{|\vec{x}|^2}{4t\left(\frac{c}{\eta}\right)^2}} \frac{dt}{t}. \quad (5.27)$$

Bei einer Einheitsanregung im Nullpunkt ist die analytische Lösung der Differentialgleichung im \mathbb{R}^2 radialsymmetrisch. Der Verlauf der Energiedichte für $\vec{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $y = 0$ ist in Abbildung 5.6 dargestellt. Am Anregungspunkt zeigt sich ein Maximum mit einem in alle Richtungen gleichmäßigen Energieabfall, der ebenfalls durch die Beziehung $\vec{q} = -\frac{cWx}{\omega\eta} \nabla e$ bestätigt wird. Diese Lösung gilt allerdings nur im Gebiet $\Omega = \mathbb{R}^2$ und ist somit nicht für die Konvergenzanalysen heranzuziehen.

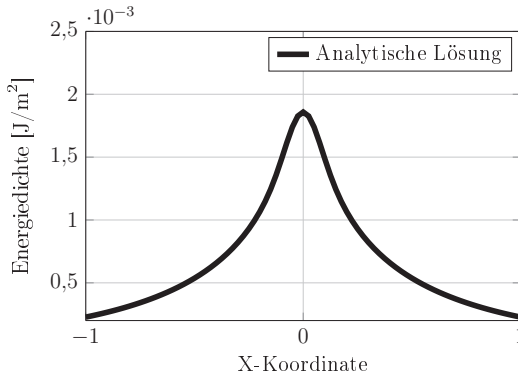


Abbildung 5.6: Analytische Lösung der EFEM-Basisgleichung

Als Anwendungsbeispiel für die Konvergenztheorie wird eine quadratische Stahlplatte mit der Kantenlänge $L = 1$ m und einer Dicke von $h = 4$ mm untersucht. Diese Platte ist durch eine Einheitslast im Mittelpunkt mit einer

Frequenz von $f = 1000$ Hz angeregt und an den Plattenrändern abgeschlossen, d.h. es existiert kein Energiefluss nach außen $\vec{q}_n(\vec{x}) = 0$ für $\vec{x} \in \partial\Omega$ mit $\Omega = [-L/2, L/2] \times [-L/2, L/2]$. Für die Konvergenzbetrachtungen wurde eine hinreichend genaue Referenzlösung mit der Gitterweite von $\Delta xy = 5$ mm berechnet. Hierbei handelt es sich um eine äquidistante Viereckszerlegung. In Tabelle 5.4 sind die für das Konvergenzverhalten herangezogenen Gitterweiten der quadratischen Stahlplatte aufgelistet.

Die Konvergenztheorie zeigt für ein ungekoppeltes Systems mit linearen finiten Elementen im Dreieck und Viereck eine lineare Konvergenz $O(1)$ (5.19). Diese gilt es anhand numerischer Berechnungen zu überprüfen. In Abbildung 5.7 ist der relative Fehler bezüglich der Referenzlösung dargestellt. Zusätzlich sind eine lineare und eine quadratische Funktion eingefügt, um die Konvergenzordnung zu visualisieren.

Tabelle 5.4: Gitterweiten quadratische Platte

Gitterweite [m]	Anzahl der Knoten	Anzahl der Elemente
1/20	$21^2 = 441$	$20^2 = 400$
1/40	$41^2 = 1681$	$40^2 = 1600$
1/80	$81^2 = 6561$	$80^2 = 6400$
1/100	$101^2 = 10201$	$100^2 = 10000$
1/120	$121^2 = 14641$	$120^2 = 14400$
1/160	$161^2 = 25921$	$160^2 = 25600$
1/200	$200^2 = 40401$	$200^2 = 40000$

Die Abbildung 5.7 zeigt, dass sich der Trend des relativen Fehlers an der linearen Funktion orientiert und hier somit eine lineare Konvergenz vorliegt. Für ungekoppelte Modelle bestätigt sich somit die Konvergenzordnung $O(1)$.

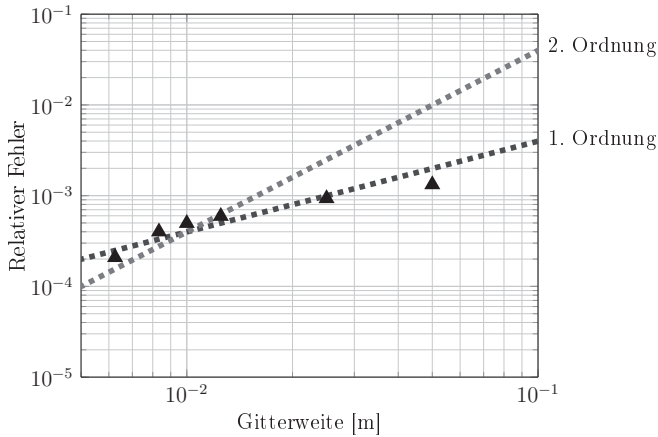


Abbildung 5.7: Konvergenzordnung ungekoppelter Systeme

Ein einfaches gekoppeltes Modell ist das Modell einer T-Struktur analog zur Abbildung 4.3. Es besteht aus drei Subsystemen, die alle an der gleichen Koppellinie miteinander verbunden sind. Für die Konvergenzbetrachtungen wurde eine Platte mittig mit einer Einheitskraft angeregt und die Residuen für unterschiedliche Gitterweiten gemäß Tabelle 5.5 in Bezug zur Referenzlösung $e_{\Delta xy_{ref}}$ mit der feinsten Gitterweite von $\Delta xy_{ref} = 1/100$ m bestimmt.

Tabelle 5.5: Gitterweiten T-Struktur

Gitterweite [m]	Anzahl der Knoten	Anzahl der Elemente
1/10	$3 \cdot 11^2 = 363$	$3 \cdot 10^2 = 300$
1/20	$3 \cdot 21^2 = 1323$	$3 \cdot 20^2 = 1200$
1/40	$3 \cdot 41^2 = 4963$	$3 \cdot 40^2 = 4800$
1/80	$3 \cdot 81^2 = 19683$	$3 \cdot 80^2 = 19200$
1/100	$3 \cdot 101^2 = 30603$	$3 \cdot 100^2 = 30000$

Abbildung 5.8 zeigt ebenfalls eine lineare Konvergenz des Verfahrens. Die Residuen $\|e_{\Delta xy} - e_{\Delta xy_{ref}}\| \propto \Delta xy$ sind annähernd proportional zur Gitterweite Δxy . Die lineare Konvergenzordnung hat sich somit ebenfalls für diese gekoppelte Struktur bestätigt.

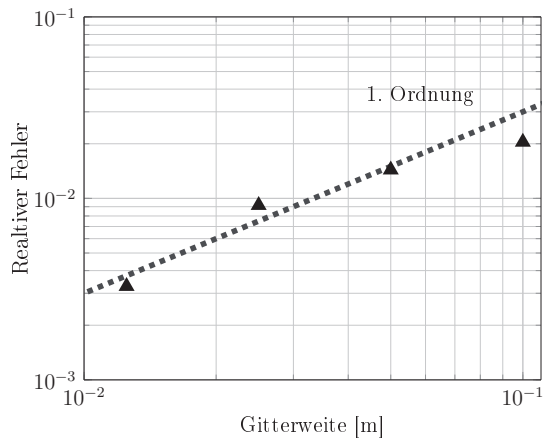


Abbildung 5.8: Konvergenzordnung gekoppelter Systeme

Kapitel 6

Validierung der EFEM anhand schiffstypischer Strukturen

Anhand von Referenzmodellen ist die Energie-Finite-Elemente-Methode einer umfangreichen Analyse und einer Verifizierung durch die FE-Methode unterzogen worden. Die Anwendung der EFEM auf komplexe Geometrien, Subsysteme aus der Schifffahrt, ist ebenfalls Gegenstand dieser Arbeit. Die Validierung dieser Methode [27] wird an einem in Luft abstrahlenden Motorfundament und einer in Wasser getauchten Stahlsektion durchgeführt.

6.1 Abstrahlung eines Motorfundamentes

Bei einer Fluid-Struktur-Interaktion mit einem leichten Fluid ist die Rückkopplung auf die Struktur gering. Vorerst wird die Fluid-Struktur-Kopplung in der EFEM mit einem leichten Fluid validiert. Hierbei liegt der Fokus auf der Energietransmission von der Struktur in das Fluid, bevor diese Kopplung hinsichtlich schwerer Fluide betrachtet wird.

6.1.1 Versuchsaufbau und Berechnungsmodelle

Versuchsaufbau und Messtechnische Erfassung

Die im Folgenden beschriebenen Messungen wurden im Rahmen des Forschungsprojektes EPES [27] in Zusammenarbeit mit dem Fachgebiet für Systemzuverlässigkeit und Maschinenakustik SzM der Technischen Universität Darmstadt

geplant und durchgeführt. Die Teststruktur zur Validierung der EFEM ist ein Motorfundament aus zusammengeschweißten Aluminiumplatten (Abbildung 6.1). Die Maße des Fundamentes sind $2 \times 1,7 \times 0,8$ m und die Dicke der Aluminiumplatten variieren zwischen 5 mm und 20 mm. Das Fundament mit einer Gesamtmasse von ca. 231 kg ist auf sechs Gummipuffern gelagert und wird mittels eines Shakers durch ein Rauschsignal angeregt.



Abbildung 6.1: Motorfundament

Zur messtechnischen Erfassung der Eingangsleistung wurden Kraft und Schnelle gemessen (Abbildung 6.2). Zusätzlich sind an sechs weiteren Punkten auf der Struktur Beschleunigungssensoren befestigt. Vor jedem dieser sechs Messpunkte wurden in 10 cm und 30 cm Abstand Schalldruck und -schnelle mit einer Microflow-Sonde erfasst (Abbildung 6.3), welche eine gleichzeitige Messung des Schalldruckes und der -schnelle an einem identischen Messpunkt ermöglicht. Für die Datenerfassung an den sechs Messpunkten wurden separate Messungen durchgeführt, wobei für jeden Durchgang eine individuelle Eingangsleistung erfasst wurde.

Für die Messung des Körperschalls wurde ein SAMURAI-Messsystem mit einer Abtastrate von 52 kHz verwendet, welche eine Auswertung im Frequenzbereich



Abbildung 6.2: Shakeranbindung



Abbildung 6.3: Microflow-Sonde

von $[0, 25]$ kHz ermöglicht. Für die Messungen mit der Microflow-Sonde in 10 cm und 30 cm Wandentfernung ergeben sich durch das Kriterium $r_{Abstand} > \frac{\lambda}{4}$ untere Grenzfrequenzen von 850 Hz und 280 Hz. Unter Berücksichtigung der Abtastrate von 51,2 kHz für diese Messungen ergibt sich ein Frequenzbereich von $[850, 25.000]$ Hz.

Die Zeitdaten im Intervall $[0, 10]$ s wurden mittels hanning-gefensterter FFT mit einer Fensterbreite von 2^{14} und einem Overlap von 50% in den Frequenzraum transformiert. Nach einer zusätzlichen Glättung mit einem Moving-Average-Filter werden die Daten für die Validierung herangezogen.

Die Lage der Beschleunigungssensoren (1) - (6) ist der Abbildung 6.4 zu entnehmen. Eine Umrechnung von den Beschleunigungen an den einzelnen Sensorpositionen auf die zeitlich und räumlich gemittelten Energiedichten ist nur schwer möglich, da die gemessene Energiedichte sehr stark von der Position der Messaufnehmer abhängt. Eine Validierung der Energieverteilung auf der Struktur wird daher nicht durchgeführt. Es werden allerdings die sechs Eingangsleistungen separat validiert.

Finite-Elemente-Modell

Zum Abgleich zwischen Messungen und Simulation im unteren Frequenzbereich wird ein FE-Modell verwendet. Mit diesem Modell wird die Eingangsleistung am Anregungspunkt (A1) in Abbildung 6.4 abgeglichen und die Strukturdämpfung angepasst. Das Motorfundament ist auf sechs Gummipuffern gelagert und somit existieren in dem FE-Modell keine äußeren Randbedingungen. Das FE-Netz ist ein Oberflächennetz bestehend aus 123.307 QUAD- und

TRIA-Elementen und 122.688 Knoten. Die Elementgrößen liegen abhängig von der Plattendicke zwischen 5 mm und 20 mm.

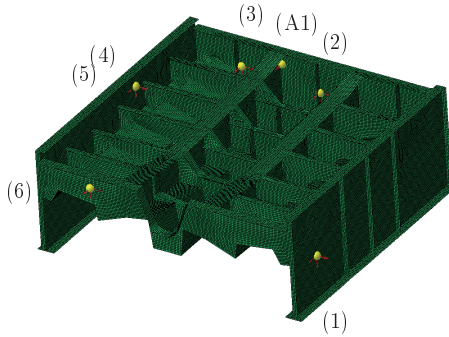


Abbildung 6.4: FE-Netz des Motorfundamentes und Position der Messpunkte

In Tabelle 6.1 sind die maximalen Elementgrößen in Abhängigkeit der Plattendicke angegeben $dx_{max} = \frac{c}{6 \cdot f}$. Diese liegen oberhalb der verwendeten Elementgrößen. Die Diskretisierung ist somit hinreichend fein bis zu einer Berechnungsfrequenz von 2500 Hz.

Tabelle 6.1: Maximale Elementgröße

Plattendicke [mm]	2,5	5	12	20
Maximale Elementgröße [mm]	9	13	20	27

Die Strukturantwort, angeregt durch die aus der Messung bekannte Kraft am Anregungspunkt (A1), wurde mittels modaler Superposition berechnet. Hierfür wurden 1404 Moden im Frequenzbereich $[0, 2500]$ Hz verwendet. Einige Moden sind in Abbildungen 6.5 - 6.8 dargestellt.

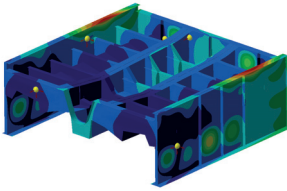


Abbildung 6.5: Mode 34 - 254 Hz

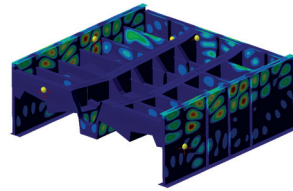


Abbildung 6.6: Mode 351 - 1013 Hz

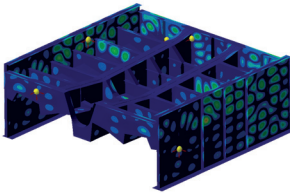


Abbildung 6.7: Mode 655 - 1502 Hz

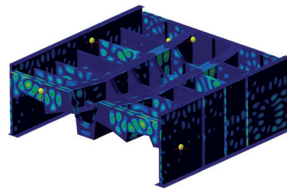


Abbildung 6.8: Mode 1402 - 2497 Hz

Energie-Finite-Elemente-Modell

Ausgehend von dem obigen FE-Modell wird ein EFEM-Modell abgeleitet. Hierbei müssen Vereinfachungen getroffen werden, um das Modell geeignet zu reduzieren. Für die Energieverteilung und -ausbreitung können bestimmte Teile des FE-Modells vernachlässigt werden und zusätzlich können versteifende Verstreben in bestimmte Kopplungslinien integriert werden. Das EFEM-Modell besteht aus 17567 Knoten (5807 Struktur, 11760 Fluid), 4154 Oberflächen- und 8830 Fluidelementen. Mit drei Freiheitsgraden für die Strukturknoten und einem Freiheitsgrad für die Fluidknoten ergibt sich die Dimension der Systemmatrix K mit $\text{Rang}(K) = 29181$. Das EFEM-Modell inklusive der Unterteilung in EFEM-Basiselemente ist in Abbildung 6.9 ohne Fluid und in Abbildung 6.10 mit Fluid dargestellt. Die Bodenfläche ist schallhart modelliert und die anderen Randflächen des Fluides sind mit der Freifeldimpedanz (Absorptionskoeffizient $\alpha = 1$) belegt. Aufgrund der energetischen Betrachtung mit einem in alle Richtungen gleichmäßigen Energiefluss und der Absorptionsbedingung auf den Rändern des Fluides ist die Form der Kavität von untergeordneter Bedeutung. Ecken oder Absätze haben keinen negativen Einfluss auf die Güte des Modells.

Zusätzlich wird die Dämpfung des akustischen Mediums auf einen für die Luft typischen Wert von $\eta_{Fluid} = 5 \cdot 10^{-4}$ gesetzt.

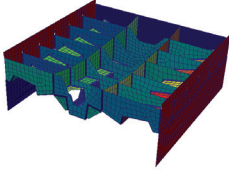


Abbildung 6.9: Strukturmodell

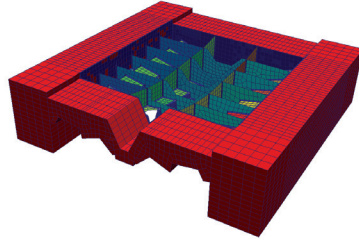


Abbildung 6.10: Gesamtmodell

Ein bedeutender Parameter zur Berechnung der Fluid-Struktur-Interaktion ist der Abstrahlgrad, der wie in Unterkapitel 4.2 beschrieben, sehr schwer zu bestimmen ist. Die Koinzidenzfrequenzen der verwendeten Plattendicken sind in Tabelle 6.2 angegeben. Der Abstrahlgrad hat bei der Koinzidenzfrequenz ein Maximum und konvergiert daraufhin gegen 1. Da die Koinzidenzfrequenzen der für die Abstrahlung relevanten Teile der Struktur im Bereich bis ca. 2 kHz liegen, ist anzunehmen, dass der Abstrahlgrad für den Frequenzbereich [3, 25] kHz annähernd eins ist. Für die EFEM-Berechnungen wurde ein konstanter Abstrahlgrad von $\omega = 1$ verwendet.

Tabelle 6.2: Koinzidenzfrequenzen der Motorfundament-Segmente

Plattendicke [mm]	6	7	12	20
Koinzidenzfrequenz [Hz]	2060	1762	1028	617

6.1.2 Numerische Ergebnisse und Validierung

Bevor die numerischen Ergebnisse der EFEM betrachtet werden, findet ein Abgleich der gemessenen Eingangsleistung mit den FEM-Berechnungen für jeden der sechs Messdurchläufe statt. Hierbei gilt es einen Wert für die Dämpfung der Aluminiumplatten zu ermitteln, der realistischerweise im Intervall $[\frac{1}{2}, 4] \%$ liegen sollte.

Analyse der Eingangsleistung

Während des Verlaufes der Messungen wurden sechs Datensätze erhoben, von denen mittels FFT und einem Moving-Average-Filter sechs Eingangsleistungen $\pi_{in,j} = \frac{1}{2} \Re \{ \vec{F}_j \cdot \vec{v}_j^* \}$ für $j = 1, 2, \dots, 6$ berechnet wurden. Für jeden Messpunkt existiert somit ein separater Datensatz aus Kraft und Schnelle. Der Vergleich der FEM-Ergebnisse und der Messung bzgl. der Eingangsleistung im Anregungspunkt (A1) sind in Abbildungen 6.11 - 6.16 gezeigt. Die gestrichelten Linien stellen die Ergebnisse der FE-Berechnung und die durchgezogenen Linien die Messdaten dar. Basierend auf diesem Abgleich wurde für die Strukturdämpfung des Motorfundamentes ein Wert von 1% ermittelt. Dieser Dämpfungswert wird für die EFEM-Berechnungen verwendet.

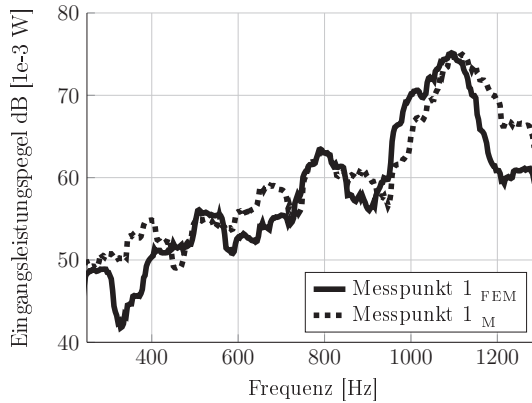


Abbildung 6.11: Datensatz 1

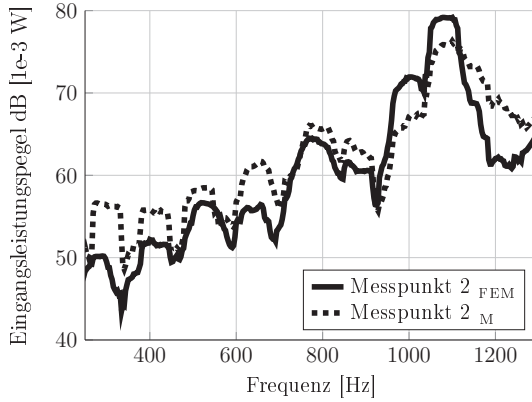


Abbildung 6.12: Datensatz 2

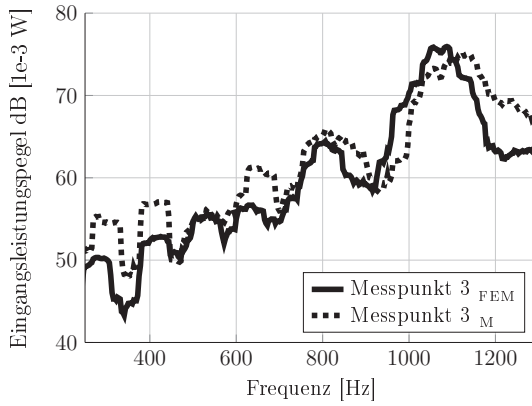


Abbildung 6.13: Datensatz 3

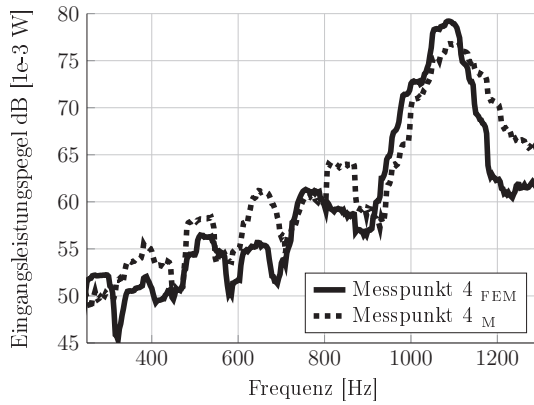


Abbildung 6.14: Datensatz 4

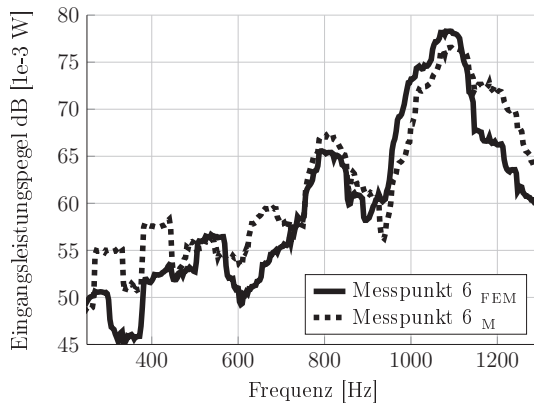


Abbildung 6.15: Datensatz 5

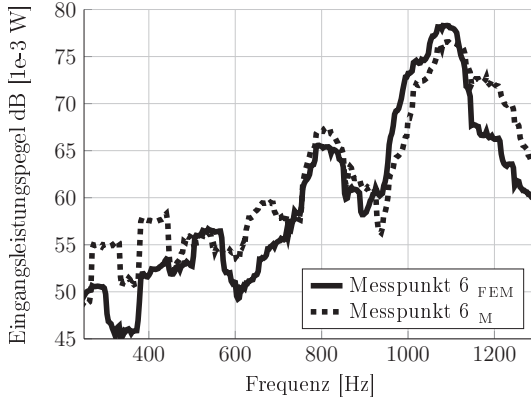


Abbildung 6.16: Datensatz 6

Hinsichtlich der Tatsache, dass geringe Abweichungen der Berechnungsergebnisse, z. B. durch die Abstraktion in ein numerisches Modell, auf die Eingangsleistung enorme Auswirkungen haben können, zeigen diese Ergebnisse sehr gute Übereinstimmungen. Ein Vorteil des Abgleichs zur Energiedichte an den anderen Messpunkten ist, dass am Anregungspunkt die Krafteinleitung stattfindet. Die dortige Punktimpedanz ist von der gesamten Struktur abhängig und ein Vergleich zur Erfassung der zeitlich und räumlich gemittelten Energiedichten an den sechs Messpunkten ist von den dortigen lokalen Effekten beeinflusst. Aufbauend auf diesen Analysen findet die Auswertung der Simulationsergebnisse mit der Messung bzgl. der Schallabstrahlung statt.

Validierung der EFEM

Ein Abgleich der Energiedichteverteilung auf der Struktur des Motorfundamentes ist mit den gewonnenen Messdaten nicht möglich. Die zeitlich gemittelte Energiedichte kann für jeden Messpunkt unter der Annahme der Äquivalenz zwischen potentieller und kinetischer Energiedichte $e_{pot} = e_{kin}$ mit $e_{ges,t} = 2e_{kin} = 2\frac{\rho}{4}|v|^2$ bestimmt werden. Diese Größe müsste räumlich über eine Wellenlänge gemittelt werden, um einen entsprechenden Vergleichswert zu erhalten. Da die quadratische Schnelle $|v|^2$ sehr stark von der räumlichen Position abhängt, ist die Energiedichte $e_{ges,t}$ über ein Messverfahren mit Be-

schleunigungssensoren nur schwer zu ermitteln. Eine gute Alternative wäre eine Messung mit einem Laservibrometer, welche allerdings den messtechnischen Aufwand enorm erhöhen und sich zusätzlich nur auf kleine lokale Bereiche beschränken würden. Der Fokus dieser Arbeit liegt allerdings auf der Fluid-Struktur-Interaktion und somit wird die EFEM hinsichtlich des abgestrahlten Schallpegels validiert.

Durch die Messtechnik der Microflownsonde, die an einem Punkt simultan den Druck und die Schnelle misst, ist die Datenlage zur Bestimmung der Energiedichte sehr gut. Diese Energiedichte kann mittels der Gleichungen (2.54), (4.56) - (4.58) und (4.62) in Energiedichtepegel oder Druckpegel angegeben werden. In Abbildung 6.17 ist die Energiedichteverteilung in dem das Motorfundament umgebene Fluid für die Frequenz von 2000 Hz dargestellt. Die Energiedichte im Fluid ist aufgrund der geringen Dämpfung von $\eta_{Fluid} = 5 \cdot 10^{-4}$ annähernd konstant. Lokale Unterschiede im Energiedichtepegel sind durch den EFE-Ansatz und die damit verbundene räumliche Mittelung nicht zu erkennen. Die Energiedichtepegel der einzelnen Messpositionen, detektiert mit der

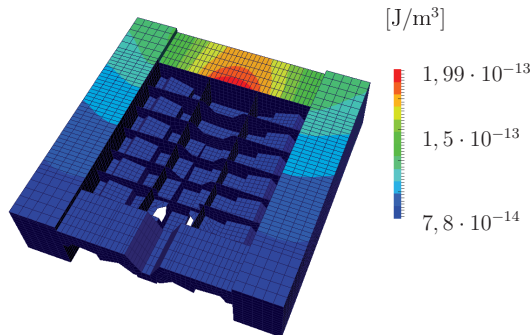


Abbildung 6.17: Energiedichte im Fluid

Microflown-Sonde, zeigt Abbildung 6.18. Zusätzlich stellt die schwarze Kurve die gemittelte Energiedichte dar, welche als Vergleichskurve für die EFEM-Berechnungen dient.

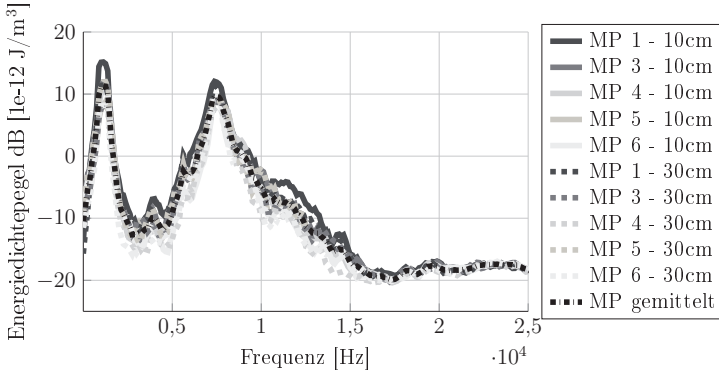


Abbildung 6.18: Energiedichtepegel Messung

Die Abbildung 6.19 zeigt den Vergleich der gemittelten Energiedichte der Messungen und der Berechnungsergebnisse mit der EFEM. Die Messdaten des Messpunktes MP2 wurden als nicht realistisch deklariert, da diese vermutlich Störgeräusche beinhalten. Für diesen Vergleich wurden die Daten dieses Messpunktes nicht berücksichtigt.

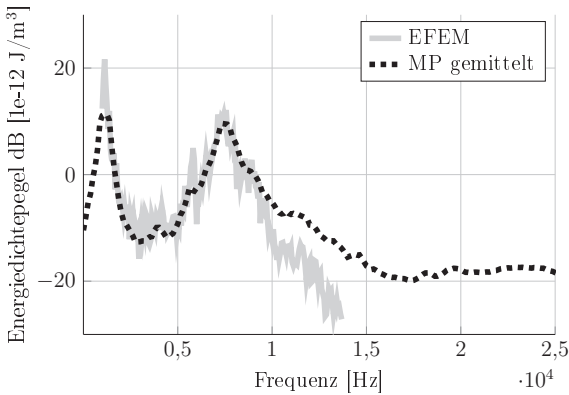


Abbildung 6.19: Vergleich Messung/EFEM

Im Frequenzbereich von 1 kHz bis 10 kHz ist bis auf einige Ausreißer bei ca. 6 kHz eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Messung und Simulation zu

verzeichnen. Aufgrund der Abschätzung des Abstrahlgrades von $\sigma = 1$, die ab 3000 Hz als valide eingeschätzt wurde, würde man Abweichungen im Intervall $[1, 3]$ kHz erwarten. Diese treten nicht ein und lassen daher annehmen, dass der Abstrahlgrad auch in diesem Intervall hinreichend genau abgeschätzt wurde. Dies knüpft an die Untersuchungen in Kapitel 4.2.2 an, die belegen, dass sich der Abstrahlgrad einer komplexen Struktur nicht über die Abstrahlgrade separater Teilstrukturen assemblieren lässt. Ab 10 kHz fällt die EFEM-Kurve stark ab und verläuft ca. 8 - 10 dB unterhalb der Messungen. Da sich dieses Intervall weit oberhalb der Koinzidenzfrequenz befindet, scheidet der Abstrahlgrad als mögliche Fehlerquelle aus. Die Eingangsleistung kann die Abweichungen enthalten, die sich auf den Energiedichtepegel auswirken. Ab 15 kHz pendelt sich der gemessene Pegel auf einem konstanten Niveau ein, welcher wahrscheinlich das Hintergrundrauschen repräsentiert, und somit ist ab 15 kHz kein Vergleich mehr möglich.

Die Validierung der Fluid-Struktur-Interaktion des EFE-Ansatzes auf detaillierte Teilstrukturen aus der Schifffahrt für die Abstrahlung in Luft ist für das Motorfundament abgeschlossen.

6.2 Abstrahlung einer getauchten Stahlsektion

Befindet sich eine Struktur in einem schweren Fluid, wirkt sich das Fluid auf das Schwingungsverhalten der Struktur aus. Ob dieser gegenseitige Einfluss ebenfalls mit der EFEM hinreichend genau abgebildet ist, wird in diesem Unterkapitel untersucht. Die Validierung einer starken Fluid-Strukturkopplung wird anhand einer getauchten Stahlsektion durchgeführt.

6.2.1 Versuchsaufbau und Berechnungsmodell

Versuchsaufbau Messungen

Im Rahmen des Forschungsprojektes EPES [27] wurden in Zusammenarbeit mit der Howaldtwerke - Deutsche Werft GmbH (HDW) die nachfolgend beschriebenen Messungen geplant und durchgeführt. Zur Validierung der Energie-Finite-Elemente-Methode anhand einer abstrahlenden Struktur in einem schweren Fluid wird eine Stahlsektion mit gekrümmten Seitenwänden verwendet. Die Ausmaße betragen ca. $2 \times 3 \times 0,5$ m. Die Stahlsektion wird in eine Tiefe von 6 m abgetaucht und im inneren von drei Inertialshakern durch ein Rauschen angeregt (Abbildung 6.20 - 6.21). Zusätzlich müssen an den Anregungspunkten die Kraft und die Oberflächenschnelle gemessen werden, aus denen sich die Eingangsleistung für die EFEM-Berechnung ergeben $\pi_m = \frac{1}{2} \Re \{ \vec{F} \cdot \vec{v}^* \}$.



Abbildung 6.20: Messanlage



Abbildung 6.21: Tauchvorgang

In 6 m Entfernung der angeregten Seitenwand sind 10 Hydrofone positioniert (Abbildung 6.22), deren Drucksignale für die Umrechnung in Energiedichten arithmetisch gemittelt, in den Frequenzraum transformiert und mittels

Moving-Average-Filter geglättet sind.

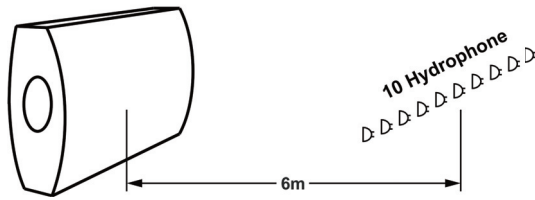


Abbildung 6.22: Hydrophonepositionen

EFEM-Modell

Das Strukturmodell der EFEM und die räumlichen Ausmaße sind in Abbildung 6.23 dargestellt. Die Außenfläche ist in einzelne Platten bzw. Subsysteme unterteilt, wobei diese Zerlegung auf den Versteifungen im inneren der Sektion basiert. Die Strukturdämpfung wurde äquivalent zu den Betrachtungen des Motorfundamentes auf $\eta = 1\%$ gesetzt. Das Fluid wurde nur an den äußeren Seitenwänden und unterhalb der Minisektion modelliert und an den Rändern mit einer Freifeldrandbedingung, Absorptionsgrad $\alpha = 1$, versehen. Die Dämpfung im Fluid wurde auf $\eta_{Fluid} = 5 \cdot 10^{-4}$ gesetzt. Das gesamte EFEM-Modell besteht aus 38.450 Knoten und 36.431 Elementen.

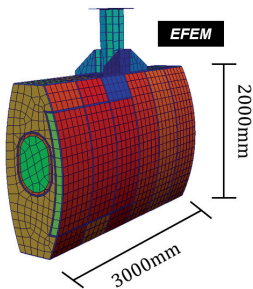


Abbildung 6.23: Strukturmodell

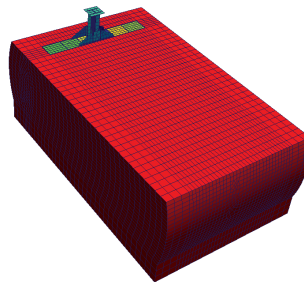


Abbildung 6.24: Gesamtmodell

Die Schätzung des Abstrahlgrades für dieses Modell ist komplex, da die Ko-
 zidenzfrequenz der Sektion in Bezug auf das angrenzende Fluid weit ober-

halb des Berechnungsintervalls liegt. Es ist anzunehmen, dass sich der Abstrahlgrad über das gesamte Berechnungsintervall im Kolbenstrahlerbereich (Abschätzungsansatz, Abschnitt 4.2.1) befindet und somit annäherungsweise durch eine lineare Funktion abgebildet werden kann. Der Abstrahlgrad dieser Struktur wurde bis 1 kHz mit der Siemens PLM Berechnungssoftware [1] ermittelt und der weitere Verlauf durch eine Gerade approximiert. Die Abbildung 6.25 stellt den Abstrahlgrad bis 2 kHz dar, wobei der Frequenzbereich der Berechnung von 1 - 16 kHz verläuft.

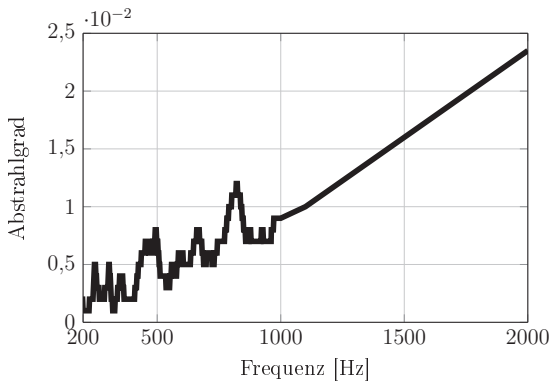


Abbildung 6.25: Lineare Fortsetzung des Abstrahlgrades

6.2.2 Numerische Ergebnisse und Validierung

Die numerische Analyse ist in zwei Teile gegliedert. Zuerst werden die Berechnungsgrößen auf der Struktur betrachtet und daraufhin der Energiedichtepegel im Fluid. Der Schalldruckpegel im Fluid ist messtechnisch präzise erfassbar und wird als Bezugsgröße für die Validierung herangezogen.

Struktur

Um den Einfluss der Fluid-Struktur-Interaktion in die EFEM zu visualisieren, wurde das System mit und ohne Fluid berechnet. Abbildung 6.26 zeigt die Energiedichte mit und ohne Rückkopplung durch das Fluid. Es ist deutlich zu erkennen, dass das Energieniveau durch das schwere Fluid verringert wird.

Im Vergleich zur Realität, bei der Zusatzmassen auf der Struktur zu einer Verschiebung der Resonanzen und somit auch zur Verschiebung charakteristischer Peaks führen, ist dies bei der Energie-Finite-Elemente-Methode nicht zu erkennen. Da beiden EFEM-Modellen das identische Anregungssignal zugrunde liegt und die Resonanzen im Anregungssignal integriert sind, treten keine Resonanzverschiebungen auf. Dies ist der Fall, da bei der Berechnung der Eingangsleistung $\pi_{in} = \frac{1}{2} \Re \{ \vec{F} \cdot \vec{v}^* \}$ das Strukturverhalten in Form der Schnelle am Anregungspunkt enthalten ist.

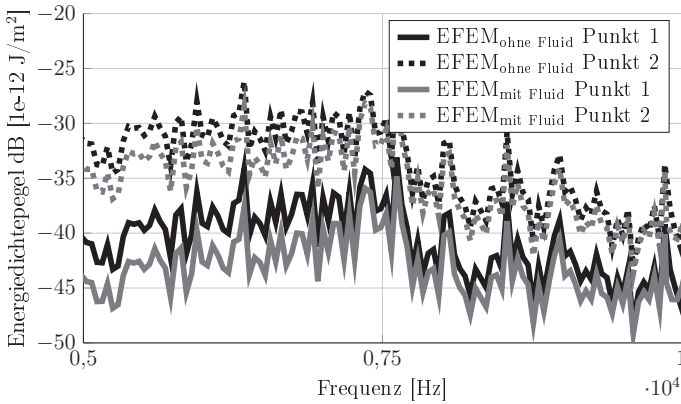


Abbildung 6.26: Zusatzmasseneffekt in der EFEM

Auswertung der Energiedichte im Fluid

Die Energieverteilung in der Fluidkavität ist aufgrund der niedrigen Dämpfung von $\eta = 5 \cdot 10^{-4}$ annähernd konstant. In der Nähe der Anregungspunkte ist die Energieverteilung auf der Struktur am höchsten und somit hat ebenfalls die Energiedichte am angrenzenden Fluid ihr Maximum. In Abbildung 6.27 ist die Energieverteilung des Fluides bei 4000 Hz dargestellt.

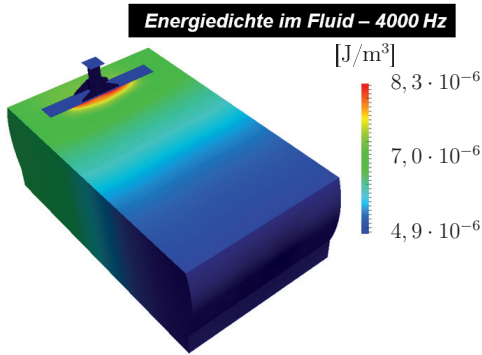


Abbildung 6.27: Energieverteilung EFEM

Die Messsignale der 10 Hydrophone sind durch eine hanning-gefensterte FFT mit einer Fensterbreite von 2^{14} und einem Overlap von 50% in den Frequenzraum transformiert. Die Frequenzauflösung beträgt $\Delta f = 1,47$ Hz. Daraufhin sind die Drucksignale in Energiedichtepegel umgerechnet und in Abbildung 6.28 gezeigt.

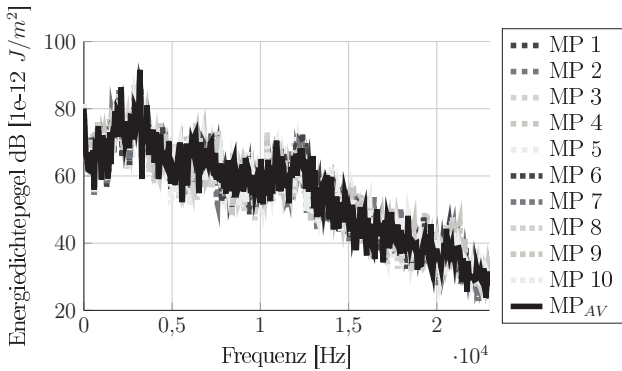


Abbildung 6.28: Messungen der Energiedichtepegel im Fluid

Die 10 Messreihen des Energiedichtepegels an den 10 Hydrophonpositionen zeigen konsistente Daten. Sie verlaufen annähernd äquivalent, was sich zu den geringen Abständen der Hydrophone kohärent verhält. Für eine Validierung

mit der EFEM wurden diese Messungen arithmetisch gemittelt und mit einem Moving-Average-Filter geglättet. Der Vergleich zwischen den Messungen und den EFEM-Berechnungsergebnissen ist in Abbildung 6.29 dargestellt. Von 1 - 14 kHz bestätigen die Berechnungsergebnisse der EFEM die Messergebnisse. Ab 14 kHz verläuft die Energiedichte der EFEM oberhalb der Messkurve. Dies kann zum Einen am Hintergrundrauschen oder an der fehlerhaften Schätzung des Abstrahlgrades im höheren Frequenzbereich liegen. Zusammenfassend eignet sich die EFEM-Methode für dieses mit einem schweren Fluid interagierenden Detailmodell und liefert zuverlässige Ergebnisse.

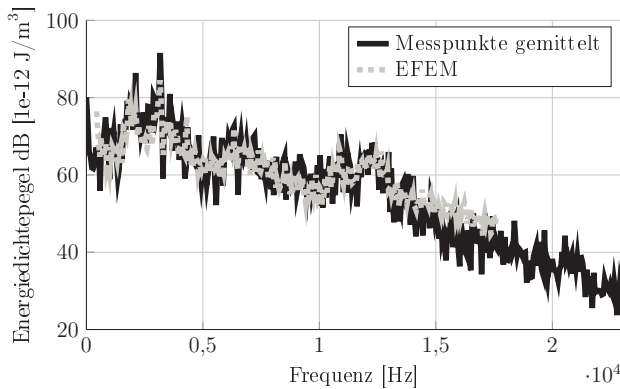


Abbildung 6.29: Vergleich Messung/EFEM

Ein wichtiges Kriterium für einen schmalbandigen Abgleich zwischen Messung und EFEM-Berechnung ist die exakte Bestimmung der Eingangsleistung, da diese sehr viele Informationen des Systemverhaltens beinhaltet, welche exakt und präzise am Einleitungspunkt über die komplexe Schnelle und Kraft berechnet werden.

6.3 Die EFEM als alternatives Berechnungsverfahren

Die Energie-Finite-Elemente-Methode ist, wie die SEA, eine statistische und energetische Methode, wobei die EFEM zusätzlich einen auf Finite Elemente

basierten Ansatz beinhaltet. Die EFEM kombiniert unterschiedliche Eigenschaften dieser beiden Ansätze. Vorerst sind die Vor- und Nachteile der SEA, EFEM und FEM tabellarisch aufgelistet (Tabelle 6.3). Daraufhin findet ein Vergleich der EFEM und FEM statt, um die Anwendbarkeit der EFEM als alternatives Berechnungsverfahren für spezifische Problemstellungen zu untersuchen.

Tabelle 6.3: Vor- und Nachteile der Berechnungsverfahren

<u>SEA</u>	<u>EFEM</u>	<u>FEM</u>
- Einschränkung der Anwendbarkeit auf Strukturen mit hinreichend großen räumlichen Ausmaßen	- Einschränkung der Anwendbarkeit auf Strukturen mit hinreichend großen räumlichen Ausmaßen	+ Vielseitig einsetzbar, geringe Anforderungen an die Strukturen
- Aufwendige Modellierung	+ Verwendung der FEM-Preprocessing Software	+ Ausgereifte CAD-, Preprocessing- und Analyse-Software
- Hoher Informationsgehalt der Inputgrößen (Leistungsdichten)	- Hoher Informationsgehalt der Inputgrößen (Leistungsdichten)	+ Geringer Informationsgehalt der Inputgrößen (z.B. Kräfte)
+ Geringer numerischer Aufwand, frequenzunabhängige Modelle	Mittlerer numerischer Aufwand, frequenzunabhängige Modelle	- Hoher numerischer Aufwand, frequenzabhängige Modelle
- Geringer Informationsgehalt der Ergebnisse	Mittlerer Informationsgehalt der Ergebnisse	+ Hoher Informationsgehalt der Ergebnisse
- Individuelles Postprocessing	+ FEM-Postprocessing Programme verwendbar	+ Ausgereifte Postprocessing Programme

Um die entsprechenden Vorteile hinsichtlich des numerischen Aufwandes im Vergleich zwischen der EFEM und der FEM zu quantifizieren, wird ein Vergleich der Modellgrößen herangezogen. Hierfür wird eine in Wasser getauchte Stahltonne äquivalent zu Abschnitt 4.2.2 betrachtet, wobei die Fluidkavität schallharte Randflächen besitzt. Abbildung 6.30 zeigt die Berechnungsgitter für die beiden Verfahren und die räumlichen Ausmaße. In Tabelle 6.4 sind die Anzahl der Knoten und der Freiheitsgrade aufgeführt.

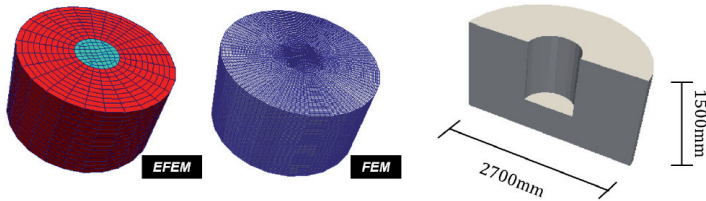


Abbildung 6.30: Berechnungsgitter EFEM/FEM

Tabelle 6.4: Aufwand der Verfahren

	Knoten	Freiheitsgrade
EFEM	5.540	6.484
FEM	297.787	1.829.742

Bei diesem Vergleich der beiden Methoden sind die Eingangsgrößen zu beachten. Im FE-Modell ist eine Punktkraft und im EFE-Modell ist die Eingangsleistung vorgegeben, welche sich aus Kraft und Schnelle am Einleitungspunkt ergibt. Bei diesem Vergleich ist zu berücksichtigen, dass sich der Informationsgehalt der Eingangsgrößen stark unterscheidet.

In diesem Vergleich der Methoden ist nicht nur der numerische Aufwand, sondern ebenfalls der Informationsgehalt der Ergebnisse zu berücksichtigen. Die FEM Ergebnisse zeigen ein detailliertes Schallfeld inklusiver aller lokaler Effekte (Abbildung 6.31, rechts), hingegen gibt die EFEM eine gemittelte Energiedichte wieder (Abbildung 6.31, links). Richtungscharakteristika sind mit der

EFEM nur sehr eingeschränkt zu erfassen, da die zeitliche und räumliche Mittelung der Energiegröße viele Effekte glättet und der Energiefluss innerhalb eines Basiselementes gleichmäßig in alle Raumrichtungen verläuft. Doch für eine Pegelabschätzung von Empfangsräumen oder Struktur-Subsystemen ist diese Methode, besonders durch die Aufwandsreduktion sehr effizient einsetzbar.

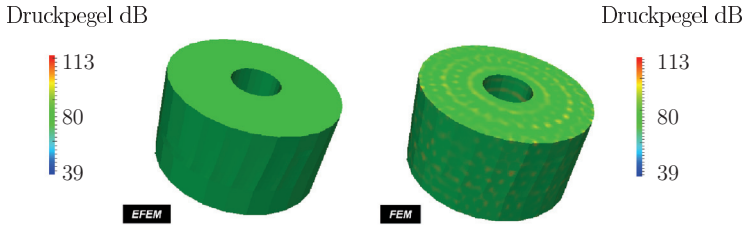


Abbildung 6.31: Druckpegel EFEM/FEM

Kapitel 7

Fazit und Ausblick

In der Schifffahrtsindustrie wurde die Energie-Finite-Elemente-Methode für die Simulation der Schallausbreitung innerhalb unterschiedlicher Strukturen eingesetzt. Mit den Erkenntnissen dieser Arbeit lässt sich der Anwendungsbereich der EFEM auf praxisnahe Problemstellungen mit Fluid-Struktur-Interaktion erweitern. Dies hat zur Folge, dass nicht nur die Energieverteilung auf der Struktur berechnet werden kann, sondern ebenfalls die Energiepegel in den Empfangsräumen. Die Fluid-Struktur-Wechselwirkung wurde in dieser Arbeit für leichte und schwere Fluide anhand von komplexen Modellen validiert, um Schalldruckpegel in Luft und Wasser berechnen zu können.

Ein maßgeblicher Parameter der Fluid-Struktur-Wechselwirkung ist der Abstrahlgrad, welcher aufwendig zu bestimmen ist. In vorliegender Arbeit wurde gezeigt, dass für rechteckige Platten valide Abschätzungsverfahren dieses Parameters existieren. Befinden sich solche Platten in komplexen Strukturen hat dies nicht abschätzbare Auswirkungen auf den Abstrahlgrad. Befindet sich die Berechnungsfrequenz oberhalb der Koinzidenzfrequenz kann der Abstrahlgrad gegebenenfalls durch 1 abgeschätzt werden. Bei einer niedrigen Berechnungsfrequenz kann unter Berücksichtigung der vier Bereiche des theoretischen Abschätzungsansatzes (Kapitel 4.2.1) die Bestimmung des Abstrahlgrades erfolgen. Bei Validierungsprozessen in dieser Arbeit konnte der Abstrahlgrad erfolgreich durch eine lineare Funktion approximiert werden. Dieser Parameter stellt aber eine Fehlerquelle bei der Fluid-Struktur-Interaktion dar. Für leichte Fluide wurde zusätzlich ein linearer Zusammenhang zwischen dem Abstrahl-

grad und der Energiedichte des angrenzenden Fluides nachgewiesen. Somit wurde für diesen Fall die Fortpflanzung einer fehlerhaften Abschätzung des Abstrahlgrades auf die Energiedichte des entsprechenden Empfangsraumes gezeigt. Bei der Abstrahlung in ein schweres Fluid treten Zusatzmasseneffekte auf. Diese zeigen sich durch ein verringertes Energieniveau in der Struktur und nicht durch Frequenzverschiebungen der charakteristischen Peaks, da diese im Anregungssignal enthalten sind.

Ein weiterer wichtiger Parameter für die EFEM-Berechnung ist die Eingangsleistung. Es wurde gezeigt, dass diese lineare Auswirkungen auf die Energieverteilung des gesamten Modells besitzt und umfangreiche Systeminformationen beinhaltet. Dies ist der Fall, da in der Eingangsleistung die anregende Kraft und Strukturantwort in Form der Schnelle am Anregungspunkt enthalten ist. In der Strukturantwort zeigt sich das Schwingungsverhalten der Gesamtstruktur. Für eine valide EFEM-Berechnung muss diese Eingangsleistung hinreichend genau bekannt sein. In dieser Arbeit konnten die für die Validierung notwendigen punktuellen Eingangsleistungen durch die entsprechenden Sensoren am Verbindungspunkt zwischen Shaker und Struktur hinreichend exakt gemessen werden.

In numerischen Untersuchungen wurde die Wohldefiniertheit der grundlegenden Problemformulierung nachgewiesen sowie eine lineare Konvergenz des Verfahrens für ungekoppelte Systeme. Beispielhaft wurde für gekoppelte Systeme ebenfalls eine lineare Konvergenz gezeigt.

Durch die Analyse der Fluid-Struktur-Wechselwirkung in dieser Arbeit ist nun die gesamte Prozesskette mit der EFEM abbildbar und liefert valide Ergebnisse. Mit gegebenem Anregungssignal kann die Energieausbreitung in der Struktur und die Fluid-Struktur-Wechselwirkung mit Energietransmission in die entsprechenden Kavitäten berechnet werden. Dieses Verfahren dient somit zur Analyse umfangreicher praxisnaher Problemstellungen, die in der Industrie Anwendung finden. Die Energie-Finite-Elemente-Methode bietet beispielsweise durch weitere Kopplungstypen, verbesserte Berechnung der Transmissionskoeffizienten oder durch die Berücksichtigung von Dämmschichten zwischen

Strukturen und Fluiden Erweiterungspotential. Eine Kopplung unterschiedlicher Methoden kann ebenfalls zu interessanten Vorteilen führen, wie beispielsweise zwischen EFEM und SEA, sodass in einem durch relativ große Subsysteme bestimmten Gesamtsystem einige Teilstrukturen detailliert mit der EFEM berechnet werden können.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Anzahl der Stützstellen FEM/EFEM	8
2.2	Kontrollvolumen Ω auf einer schiffsähnlichen Struktur	9
2.3	Wellentypen im Balkenmodell	11
2.4	Wellentypen zur Beschreibung einer schwingenden Platte	15
2.5	Platte-Platte-Kopplung	25
2.6	Fluid-Struktur-Flächenkopplung	26
2.7	Drei Phasen des EFEM-Preprocessing	29
2.8	Koordinatentransformation auf das Einheitsquadrat	33
2.9	Aufbau einer Systemmatrix ohne Kopplungsterme	35
2.10	P-P-Kopplung im diskretisierten EFE-Modell	36
2.11	P-K-Kopplung im EFEM-Gitter	37
2.12	Aufbau der Systemmatrix mit Kopplungstermen	39
3.1	EFEM	43
3.2	FEM	43
3.3	Energiedichte auf der Plattendiagonalen	44
3.4	Energiedichte auf der Plattendiagonalen	45
3.5	Absoluter und relativer Fehler des Dämpfungsterms	47
3.6	Energiedichte auf der Plattendiagonalen	49
3.7	Einfluss Nahfeld	49
3.8	Äquivalenz der zeitlich gemittelten Energiedichten	50
3.9	Quadratische Stahlplatte - Eingangsleistung	51
3.10	Energiedichteverteilung längs der Plattendiagonale	52
3.11	Einfluss von c_{WT}	53
3.12	Kirchhoff- und Mindlin-Theorie c_{WT}	53
3.13	Einfluss der Frequenz	55

4.1	Plattenkopplungen: links P-P, rechts P-B-P	58
4.2	Plattenparameter einer 3-Platten-Kopplung	59
4.3	Aufbau der T-Struktur	64
4.4	Transmissionskoeffizienten in Abhängigkeit vom Einfallswinkel	65
4.5	Energieverteilung auf einer T-Struktur	65
4.6	Vergleich FEM/EFEM	66
4.7	Aufbau der L-Struktur	68
4.8	Transmissionskoeffizienten der P-P-Kopplung	68
4.9	Transmissionskoeffizienten der P-B-P-Kopplung	69
4.10	Energieverteilung EFEM	70
4.11	Vergleich EFEM/FEM P-B-P-Kopplung	71
4.12	Abstrahlgrad - Vergleich der Berechnungsmethoden	76
4.13	EFEM-Modell einer abstrahlenden Platte	77
4.14	Zeitlich gemittelte kinetische und potentielle Energie	78
4.15	Energiedichte EFEM/FEM	79
4.16	Platte	81
4.17	T-Struktur	81
4.18	Box 1	82
4.19	Box 2	82
4.20	Abstrahlgrade verschiedener Strukturen	83
4.21	Maße der luftgefüllten Kavität	84
4.22	Berechnungsgitter FEM/EFEM	84
4.23	FEM/EFEM auf den Sektionen der Tonne	85
4.24	Energiedichte im Fluid FEM/EFEM	86
5.1	Blockmatrixaufbau des ungekoppelten Systems	88
5.2	Blockmatrixaufbau der Kopplungsterme	88
5.3	Matrixbelegung	89
5.4	Modell 1	91
5.5	Modell 2	91
5.6	Analytische Lösung der EFEM-Basisgleichung	98
5.7	Konvergenzordnung ungekoppelter Systeme	100
5.8	Konvergenzordnung gekoppelter Systeme	101
6.1	Motorfundament	104

6.2	Shakeranbindung	105
6.3	Microflow-Sonde	105
6.4	FE-Netz des Motorfundamentes und Position der Messpunkte	106
6.5	Mode 34 - 254 Hz	107
6.6	Mode 351 - 1013 Hz	107
6.7	Mode 655 - 1502 Hz	107
6.8	Mode 1402 - 2497 Hz	107
6.9	Strukturmodell	108
6.10	Gesamtmodell	108
6.11	Datensatz 1	109
6.12	Datensatz 2	110
6.13	Datensatz 3	110
6.14	Datensatz 4	111
6.15	Datensatz 5	111
6.16	Datensatz 6	112
6.17	Energiedichte im Fluid	113
6.18	Energiedichtepegel Messung	114
6.19	Vergleich Messung/EFEM	114
6.20	Messanlage	116
6.21	Tauchvorgang	116
6.22	Hydrophonepositionen	117
6.23	Strukturmodell	117
6.24	Gesamtmodell	117
6.25	Lineare Fortsetzung des Abstrahlgrades	118
6.26	Zusatzmasseneffekt in der EFEM	119
6.27	Energieverteilung EFEM	120
6.28	Messungen der Energiedichtepegel im Fluid	120
6.29	Vergleich Messung/EFEM	121
6.30	Berechnungsgitter EFEM/FEM	123
6.31	Druckpegel EFEM/FEM	124

Tabellenverzeichnis

2.1	Einheiten der energetischen Größen	11
2.2	Wellentyp-spezifische Ausbreitungsgeschwindigkeit	21
2.3	Wellentypen in den EFEM-Basiselementen	22
2.4	Übersicht der Matrixeinträge von P	28
2.5	Beispiele der EFEM-Kopplungselemente	30
2.6	Teilmatrizen der Kopplung	40
3.1	Auswirkungen des Approximationsfehlers	48
3.2	Validitätskriterien für die EFEM-Modellerstellung	56
4.1	Diffuse Transmissionskoeffizienten	70
4.2	Linearer Einfluss des Abstrahlgrades	80
4.3	Größe der numerischen Modelle	84
5.1	Anzahl der Knoten und Elemente	92
5.2	Rechenzeiten der Lösungsverfahren	92
5.3	Rechenzeiten der EFEM-Module	93
5.4	Gitterweiten quadratische Platte	99
5.5	Gitterweiten T-Struktur	100
6.1	Maximale Elementgröße	106
6.2	Koinzidenzfrequenzen der Motorfundament-Segmente	108
6.3	Vor- und Nachteile der Berechnungsverfahren	122
6.4	Aufwand der Verfahren	123

Literaturverzeichnis

- [1] *Siemens PLM Software Manual, LMS Virtual Lab. v11. : Siemens PLM Software Manual, LMS Virtual Lab. v11*
- [2] *Siemens PLM Software Manual, SEA+, SEA-Foam, SEAVirt. : Siemens PLM Software Manual, SEA+, SEA-Foam, SEAVirt*
- [3] ALI, A. ; RAJAKUMAR, C.: *The Boundary Element Method, Application in Sound and Vibration*. A. A. Bulkema Publishers, 2004
- [4] BATHE, K. J.: *Finite-Elemente-Methoden*. Springer-Verlag, 2002
- [5] BELOV ; RYBAK: Applicability of the Transport Equation in the one-dimensional Wave-Propagation Problem. In: *Soviet Physics-Acoustics* 21(2) (1975), S. 110–114
- [6] BELOV ; RYBAK: Propagation of Vibrational Energy in Absorbing Structures. In: *Soviet Physics-Acoustics* 23(2) (1975), S. 115–119
- [7] BITSIE, F.: *The Structural-Acoustic Energy Finite Element Method and Energy Boundary Element Method*, Purdue University, Diss., 1996
- [8] BOUTHIER ; BERNHARD: Simple Models of Energy Flow in Vibrating Membranes. In: *Journal of Sound and Vibration* 182(1) (1995), S. 129–147
- [9] CHAKRAVERTY: *Vibration of Plates*. CRC Press, 2008
- [10] CHO, P.: *Energy flow analysis of coupled structures*, Purdue University, Diss., 1993
- [11] CHO, P. ; BERNARD, R.: Energy Flow Analysis of Coupled Beams. In: *Journal of Sound and Vibration* 211(4) (1998), S. 482–594

- [12] CRAIK ; CABOS ; HERON ; SARRADJ ; BOSMANS: Structural Transmission at Line Junctions: a Benchmarking Exercise. In: *Journal of Sound and Vibration* 272 (2004), S. 1086–1096
- [13] DAHMEN, W. ; REUSKEN, A.: *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008
- [14] DONG ; CHO ; VLAHOPOULOS ; WANG ; ZHANG: Sensitivity Analysis and Optimization Using Energy Finite Element and Boundary Element Methods. In: *AIAA Journal* 45(6) (2007), S. 1187–1198
- [15] EVANS, L. C.: *Partial Differential Equation*. American Mathematical Society, 2010
- [16] FAHY, F. J. ; MOHAMMED, A. D.: A Study of Uncertainty in Applications of SEA to Coupled Beam and Plate Systems. In: *Journal of Sound and Vibration* 158 (1992), S. 45–67
- [17] GASCH, R. ; KNOTHE, K.: *Strukturodynamik - Diskrete Systeme und Kontinua*. Springer Verlag Berlin-Heidelberg, 2012
- [18] HACKBUSCH, W.: *Multi-Grid Methods and Applications*. Springer, 2003
- [19] HAGEDORN, P.: *Technische Schwingungslehre Band 2: Lineare Schwingungen kontinuierlicher mechanischer Systeme*. Springer Berlin Heidelberg, 1989
- [20] KARGER, M. ; VON ESTORFF, O.: Simulation Sound Radiation using the Energy-Finite-Element Method. In: *Proceedings of International Congress of Acoustics* 133 (2013), Nr. 5, S. 3599
- [21] KARGER, M. ; VON ESTORFF, O.: Simulation Sound Radiation using the Energy-Finite-Element Method. In: *Journal of the Acoustical Society of America* 133 (2013), Nr. 5, S. 3599
- [22] KARGER, M. ; VON ESTORFF, O.: Schallabstrahlung mit der Energie-Finite- Elemente Methode. In: *Proceedings of DAGA, 40. Jahrestagung für Akustik der Deutschen Gesellschaft für Akustik e.V. (DEGA)* (2014)

- [23] KESSISOGLOU, N. J.: Power Transmission in L-shaped Plates Including Flexural and In-Plane Vibration. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 115(3) (2004), S. 1159–1167
- [24] KUETTLER: *Effiziente Lösungsverfahren für Fluid-Struktur-Interaktions-Probleme*, Technische Universität München, Diss., 2009
- [25] LANGLEY, R. S.: On the Vibrational Conductivity Approach to High Frequency Dynamics for Two-Dimensional Structural Components. In: *Journal of Sound and Vibration* 182(4) (1995), S. 637–657
- [26] LANGLEY, R. S. ; HERON, K. H.: Elastic Wave Transmission Through Plate/Beam Junctions. In: *Journal of Sound and Vibration* 143(2) (1990), S. 241–253
- [27] LIPPERT ; STRITZELBERGER ; ESTORFF von ; SEILER ; MATHIOWETZ ; BARROS ; HOLBACH ; GROSS ; BÖS ; KARGER ; ZALESKI ; TAMM ; KRÜGER ; EBELING ; BECH ; HÖVELMANN ; SICHERMANN ; REICHSTEIN ; URBAN: *Effiziente Prognose vibroakustischer Eigenschaften in der Schiffsentwurfphase / Bundesministerium für Wirtschaft und Energie (BMWi)*. 2015 (Förderkennzeichen 03SX305). – Forschungsbericht
- [28] LYON: *Statistical Energy Analysis of Dynamical Systems*. M.I.T. Press, 1975
- [29] LYON: *Theory and Applications of Statistical Energy Analysis*. 2014
- [30] LYON ; DEJONG: *Theory and Application of Statistical Energy Analysis (2nd Edition)*. Butterworth-Heinemann, 1995
- [31] LYON ; EICHLER: Random Vibrating of Connected Structures. In: *Journal of the Acoustical Society of America* 36(7) (1964), S. 1344–1354
- [32] LYON ; MAIDANIK: Power Flow between Linearly Coupled Oscillators. In: *Journal of the Acoustical Society of America* 34(5) (1962), S. 623–639
- [33] MEISTER, A.: *Numerik linearer Gleichungssysteme*. Vieweg, 2005

- [34] MINDLIN, R.: Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates. In: *Journal of Applied Mechanics (Transactions of ASME)* 18 (1951), S. 31–38
- [35] MOENS, I.: *On the Use and the Validity of the Energy Finite Element Method for High Frequency Vibrations*, Department of Mechanical Engineering, division PMA, K.U.Leuven, Belgium, Diss., 2001
- [36] MOESER, M.: *Technische Akustik*. Springer Berlin Heidelberg New York, 2007
- [37] MOESER, M. ; KROPP, W.: *Koerperschall Physikalische Grundlagen und technische Anwendungen*. Springer, 2009
- [38] NEFSKE ; SUNG: Power Flow Finite Element Analysis of Dynamic Systems: Basic Theory and Applications to Beams. In: *Statistical Energy Analysis: Presented at the Winter Annual Meeting of ASME*, 1987, S. 47–54
- [39] PAVIC, G.: Vibration Damping, Energy and Energy Flow in Rods and Beams, Governing Formulae and Semi-Infinite Systems. In: *Journal of Sound and Vibration* 291 (2006), S. 932–962
- [40] RYBAK, S.: Randomly Coupled Flexural and Longitudinal Vibrations of Plates. In: *Soviet Physics-Acoustics* 18(1) (1972), S. 76–79
- [41] RYBAK, S.: Sound Scattering by a Randomly Inhomogeneous Plate. In: *Soviet Physics-Acoustics* 21(1) (1972), S. 96–97
- [42] RYBAK, S.: Wave in a Plate containing Random Inhomogeneities. In: *Soviet Physics-Acoustics* 17(3) (1972), S. 345–349
- [43] SAAD, Y.: *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. SIAM Society for Industrial & Applied Mathematics, 2003
- [44] SAYIR, M. ; KAUFMANN, S.: *Ingenieurmechanik 3: Dynamik*. Teubner, 2005
- [45] SIMEON, B.: *Numerik partieller DifferentiDifferential I*. 2013

- [46] SKERGET (Hrsg.) ; BREBBIA (Hrsg.): *Boundary Elements and Other Mesh Reduction Methods XXX*. WIT Press, 2008
- [47] SMITH, M. J. ; CHERNUKA, M. W.: Extension of Power Flow Finite Element Analysis to Ship Structures / Defence Research Establishment Atlantic. 1996. – Forschungsbericht
- [48] VLAHOPOULOS ; GARZA-RIOS ; MOLLO: Numerical Implementation Validation and Marine Applications of an Energy Finite Element Formulation. In: *Journal of Ship Research* 43(3) (1999), S. 143–156
- [49] VON ESTORFF, O.: *Boundary Elements in Acoustics: Advances and Applications*. WIT Press, 2000
- [50] WANG, S.: *High Frequency Energy Flow Analysis, Methods Numerical Implementation, Application and Verification*, University Purdue, Diss., 2000
- [51] WOHLEVER ; BERNHARD: Mechanical Energyflow Models of Rods and Beams. In: *Journal of Sound and Vibration* 153(1) (1992), S. 1–19
- [52] WOLFGANG, S.: *Schwingungen elastischer Kontinua*. Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, 1995
- [53] XIE ; THOMPSON ; JONES: The Radiation Efficiency of Baffled Plates and Stripes. In: *Journal of Sound and Vibration* 280 (2005), S. 181–209
- [54] XIE ; THOMPSON ; JONES: The Radiation of Baffled Plates and Stripes. In: *The Journal of Sound and Vibration* 280 (2005), S. 181–209
- [55] ZHANG ; WANG ; VLAHOPOULOS ; WU: High-Frequency Vibration Analysis of Thin Elastic Plates under Heavy Fluid Loading by an Energy Finite Element Formulation. In: *Journal of Sound and Vibration* 263 (2003), S. 21–46

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name	Marius Karger
Geburtstag	23.07.1983
Geburtsort	Hamburg

Ausbildung

2003	Abitur, Gymnasium Sachsenwald
2004 – 2010	Technische Universität München
	Hauptfach: Mathematik
	Abschluss: Diplom

Berufliche Erfahrung

2011 – 2015	Novicos GmbH
-------------	--------------

