

369 | August 1978

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

K.Y. Chao

Beiträge zur Berechnung von
Kavitationserscheinungen an
Strömungskörpern

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

Beiträge zur Berechnung von Kavitationserscheinungen an Strömungskörpern

K. Y. Chao, 1. Auflage, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1978

© Technische Universität Hamburg-Harburg

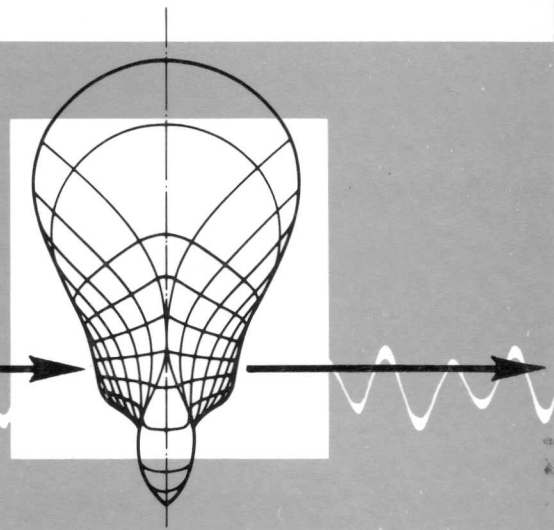
Schriftenreihe Schiffbau

Schwarzenbergstraße 95c

D-21073 Hamburg

<http://www.tuhh.de/vss>

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU
DER UNIVERSITÄT HAMBURG



Beiträge zur Berechnung von Kavitations-
erscheinungen an Strömungskörpern

K.Y. Chao

August 1978

Bericht Nr. 369

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr. 369

Beiträge zur Berechnung von Kavitationserscheinungen
an Strömungskörpern

von K.Y. Chao

Hamburg

1 9 7 8

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
I. Einleitende Betrachtungen	1
I.1. Zugspannungen im Wasser und Kavitationskeime	1
I.2. Grundgleichungen der Blasendynamik	2
II. Kavitationsberechnung mit Hilfe der Blasendynamik	7
II.1. Keimverteilung und Gasvolumverhältnis	7
II.2. Modifikation der Theorie für den Umgebungsdruck der Blasen	9
II.3. Kavitationsbeginn	13
II.4. Bemerkung des Aufweitungsvorgangs	14
II.5. Überlegungen zur Berechnung des Zusammenfalls einer Kavitationsschicht	15
II.6. Rechenvorgang	20
III. Anwendung der Blasendynamik zur Berechnung der Kavitationserscheinung auf Beispiele	21
III.1. HSVA Modellpropeller 1283	21
III.2. NACA 4412 und 66 ₁ -012 Profile	29
III.3. Kugelförmiger Halbkörper	30
IV. Zur Behandlung der Teilkavitation mit Hilfe der Profiltheorie	32
IV.1. Grundlage der Theorie	33
IV.2. Lösungen, wenn die durch Kavitation bedingte Zusatzzirkulation im ganzen Profilbereich definiert ist	36
IV.3. Lösungen, wenn die durch Kavitation bedingte Zusatzzirkulation nur im Bereich der Kavitations- schicht definiert ist	50
Zusammenfassung	59
Literaturverzeichnis	

BEZEICHNUNGEN

A	Halbe Profiltiefe
a	Schallgeschwindigkeit in der Flüssigkeit
C_A	Anfangsstelle der Kavitationsschicht
C_E	Endstelle der Kavitationsschicht
C_p	Druckbeiwert
M	Masse
α_L	Gaskonstante
P_d	Dampfdruck
P_L	Luft-Partialdruck in der Blase
P_R	Druck an der Blasenwand
∂P	Stoßstärke
P_{st}	der durch den Stoß bedingte Druck
ξ	Quellen-Senkenverteilung
ξ	die durch Kavitationsschicht bedingte zusätzliche Quellen-Senkenbelegung
R	Blasenradius
t	Zeit
(r, φ, x)	Zylinderkoordinatensystem
X_{st}	Stoßlage
u_0, u_∞	Anströmungsgeschwindigkeit
Σu_i	die Axialkomponente der induzierten Geschwindigkeiten
Σv_i	die Umfangskomponente der induz. Geschwindigkeiten
Σw_i	die Radialkomponente der induz. Geschwindigkeit
y_s	Skelettlinie des Profils
y_s^*	Skelettlinie einschließlich der Kavitationsschicht
y_d	Dickenlinie des Profils
y_d^*	Dickenlinie einschließlich der Kavitationsschicht
α	Gasvolumverhältnis
ρ_w	Dichte des Wassers
σ	Oberflächenspannung
σ_v	Kavitationszahl

- γ Wirbeldichte
- $\tilde{\gamma}$ Korrekturbelegung der Wirbeldichte für Propeller
bzw. die durch Kavitationsschicht bedingte Zusatz-
zirkulation
- δ_0 Skelettlinienwinkel des Propellerflügels bzw.
Anstellwinkel des Profils
- ω Winkelgeschwindigkeit des Propellers
- ξ Anzahl der Kavitationskeime pro Volumeinheit
- 2η Dicke der Kavitationsschicht
- $2\eta_e$ Enddicke der Kavitationsschicht

I. Einleitende Betrachtungen

I.1. Zugspannungen im Wasser und Kavitationskeime

Es ist bekannt, daß die klassische Annahme, Kavitation entstehe, wenn der örtliche Druck auf den thermodynamischen Gleichgewichtsdampfdruck des Wassers fällt, der physikalischen Problematik des Kavitationsvorgangs nicht gerecht wird. Wenn auch Experimente zeigen, daß der Kavitationseinsatz in der Nähe des Dampfdrucks erfolgt, so gibt es doch erhebliche Abweichungen von diesem Wert für Wasser und andere Flüssigkeiten. Bedenkt man, daß der Gleichgewichtsdampfdruck bereits eine existierende freie Oberfläche voraussetzt, so muß zunächst die vorliegende Flüssigkeit aufgerissen werden, um überhaupt kavitieren zu werden, und hierfür sind Zugspannungen, also negative Drücke erforderlich, die jedoch keinen direkten Zusammenhang mit dem Dampfdruck haben. Wäre die vorliegende Flüssigkeit reines Wasser, so ergäbe sich nach einer theoretischen Berechnung die Zugspannung in der Größenordnung von $1,000 \text{ kp/cm}^2$, also ein unrealischer Wert weit über den experimentell beobachteten Ergebnissen, um die Homogenität des Wassers aufheben zu können. Bei Zimmertemperatur beträgt die experimentell ermittelte Zugspannung von höchst reinem Wasser etwa 250 kp/cm^2 , also so groß, daß Kavitation nicht auftreten könnte, wenn dieser Wert auch für das normale, in der technischen Anwendung vorliegende Wasser gelten würde. Damit erhebt sich die zwingende Forderung nach Kavitationskeimen, und zwar den ungelösten, im Wasser enthaltenen kleinen Gasbläschen (Gas bedeutet in vorliegender Arbeit Luft und Dampf), denn die Existenz von diesen Keimen bedingt eine Inhomogenität des Wassers, und dadurch wird die Zerreißfestigkeit des Wassers erheblich herabgesetzt. Dagegen spielt die vollständig gelöste Luft bei Auftritt der Dampfkaavitation keine Rolle, denn in diesem Fall bleibt die vom Wasser ausgehaltene Zugspannung noch relativ hoch. Diese Tatsache wurde von den Versuchen bestätigt. (Knapp et al /1/)

Deshalb findet man heute in der Literatur durchaus die Übereinstimmung darüber, daß die Kavitationskeime auf irgendeine Weise

stabilisierte Gasbläschen sind. Überlegungen zu dem Mechanismus der Stabilisierung der Keime findet man bei Knapp et al /1/ oder Keller /2/. Man erhält einen stabilen Zustand für die Keime, wenn sich das Gas in Form von sphärischen oder trichterförmigen Poren mit Öffnungswinkel $\varphi < 2\vartheta - \pi$, dabei ist ϑ der Benetzungswinkel (Abb.1), in Strömungsbegrenzungen und Schwebstoffteilchen festsetzt, denn in diesen Fällen wirkt die Oberflächenspannung auf das Wasser hin und solche Poren können stets das drin enthaltene Gas als Kavitationskeim stabilisieren.

Durch das Auftreten von Poren in Strömungsbegrenzungen und Schwebstoffteilchen erkennt man, daß die Quellen der Keime verschiedenartig sein können, einmal die sich in der Körperoberfläche festsetzenden Wandkeime und zur anderen die mit Flüssigkeit anströmenden Strömungskeime. Es ist einleuchtend, daß die mit den Oberflächeneigenschaften zusammenhängenden Wandkeime für die Strömungskörper aus hydrophoben (wasserabweisenden) Materialien, z.B. Teflon, bei dem Kavitationseinsatz eine wichtige Rolle spielen, denn in den Spalten und Rissen an der Oberfläche solcher Körper ist bereits Luft eingeschlossen, aus der ein dampfförmiger Zustand sehr leicht entsteht. Andererseits sind die Strömungskeime für die Kavitation an Körpern aus hydrophilen (von Wasser gut benetzbaren) Stoffen verantwortlich, wie einige eingehenden Studien über den Einfluß der Oberflächeneigenschaften des Modellkörpers auf den Kavitationseinsatz zeigten /3//4/.

Da in der vorliegenden Arbeit nur die sorgfältig gefertigten umströmten Körper als Beispiele in Betracht gezogen werden, welche von Wasser gut benetzbar sind, werden in die weitere Überlegung nur Strömungskeime als Hauptquelle der Kavitation einbezogen.

I.2. Grundgleichungen der Blasendynamik

In vorangehender Ziffer wurde diskutiert, daß Keime als Ausgangspunkt der Kavitation fungieren. Die Blasendynamik, von kugelsymmetrischen Blasen-Keimen ausgehend, untersucht das Verhalten der Blase und ihre Wechselwirkung mit der Umgebung.

Eine ausführliche, sehr allgemeine theoretische Formulierung der Blasendynamik findet man bei Hsieh /5/ oder Isay /6/, die man nicht zu wiederholen braucht. Es scheint jedoch zum Verständnis zweckmäßig, die Grundgleichungen der Blasen kurz zusammenzustellen.

Unter der Annahme, daß die durch die Volumänderung einer Blase erzeugte Flüssigkeitsströmung kugelsymmetrisch radial gerichtet ist, gewinnt man, aus der Eulerschen Gleichung und Kontinuitätsgleichung mit dem Mittelpunkt der kugelförmigen Blase als Nullpunkt des Koordinatensystems und unter der Vernachlässigung der Schwerkraft, für die Blasenwandbewegung

$$(I.2.1) \quad \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + R \frac{d^2R}{dt^2} = \frac{1}{\rho_w} (p_R - p_\infty) .$$

In diesem Ausdruck ist $(p_R - p_\infty)$ die Differenz zwischen dem Druck der Flüssigkeit an der Blasenwand und dem Druck, der in der umgebenden Flüssigkeit in großem Abstand von der Blase herrscht. R ist der Blasenradius, t die Zeit und ρ_w die Dichte des Wassers.

Wir schließen den Einfluß der Oberflächenspannung und des Gasgehaltes in der Blase ein, indem wir für den Druck an der Blasenwand

$$(I.2.2) \quad p_R = p_L + p_d - \frac{2\sigma}{R}$$

schreiben, dabei ist p_L der partielle Luftdruck, p_d der partielle Dampfdruck in der Blase und σ die Oberflächenspannung des Wassers. Somit nimmt die Gleichung der Blasenwandbewegung die Form an:

$$(I.2.3) \quad R \frac{d^2R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{1}{\rho_w} \left(p_L + p_d - \frac{2\sigma}{R} - p_\infty \right) ,$$

die als Rayleigh-Plesset-Gleichung bekannt ist. Hinsichtlich der verminderten Zugfestigkeit des gashaltigen Wassers mit dicht angeordneten Kavitationsblasen wird diese Gleichung mit später eingeführter Modifikation für p_∞ in vorliegender Arbeit zur

Berechnung des Aufweitungsvorgangs der Blasen benutzt.

Im allgemeinen spielt die Oberflächenspannung nur in den Anfangsstadien des Wachstums und am Ende des Zusammenfalls eine Rolle, wo der Blasenradius sehr klein ist, und zwar hat sie auf das Wachstum der Blase eine verzögernde, auf Zusammenfall aber beschleunigende Wirkung.

Wie Epstein und Plesset /7/ sowie Shima und Tsujino /8/ zeigten, erfolgt die Massenveränderung der Luft in der Blase durch die Diffusion nur sehr langsam im Verhältnis zu den für die Kavitation an den hier zu betrachtenden Strömungskörpern verantwortlichen Druckänderungen. Die Luftmasse kann daher als konstant betrachtet werden. Dann gilt bei der nach Untersuchungen von Plesset /9/ in sehr guter Näherung erfüllten isothermen Zustandsänderung

$$(I.2.4) \quad p_L = \frac{M_L R_L T}{\frac{4}{3} \pi R^3} = p_{L_0} \frac{R_0^3}{R^3},$$

dabei beschreibt der Index "0" einen Anfangszustand, R_L ist Gas-konstante.

Insbesondere spielt die Luftmasse in der Blasen bei dem Zusammenfall eine wichtige Rolle. Wie eingehende Untersuchungen von Hickling und Plesset /10/ zeigten, sinkt der Minimalradius einer Blase mit abnehmendem p_{L_0} , und die erheblichen Druckmaxima, die beim Wiederaufweitungsvorgang im Strömungsfeld außerhalb der Blase in einem gewissen Abstand von der Blasenwand auftreten, nehmen mit größeren p_{L_0} -Werten ab.

Der Einfluß der Zähigkeit auf die Blasendynamik ist bei Wasser vernachlässigbar klein und wird nicht berücksichtigt.

Die Kompressibilität des Wassers ist so lange vernachlässigbar, wie die Geschwindigkeit der Blasenwandbewegung klein gegenüber der Schallgeschwindigkeit des Wassers ist. Für eine einzelne Blase beim Aufweitungsvorgang kann die Kompressibilität vernachlässigt werden, da die Wachstumsgeschwindigkeiten nur wenige Meter per Sekunde betragen. Aber bedenkt man, daß die Einzelblase nur einen in Wirklichkeit nicht auftretenden Idealfall darstellt, sich also vielmehr in der Umgebung der betrachteten Blase weitere

Nachbarblasen befinden, und dadurch die Kompressibilität des umgebenden Wassers wesentlich erhöht wird, so muß man die Kompressibilität des gashaltigen Wassers auch bei Aufweitungsvorgang berücksichtigen.

Wie bereits gesagt, wird in der vorliegenden Arbeit die Rayleigh-Plesset-Gleichung (I.2.3) zur Berechnung der Blasen aufweitung benutzt, aber mit einer mit dem Gasgehalt verbundenen Korrektur für p_{∞} . Darauf kommen wir später zurück.

Die zweite Gleichung, die in vorliegender Arbeit zur Berechnung des Zusammenfallvorgangs gebraucht wird, ist die Gilmore-Gleichung /11/. Mit der Kirkwood-Bethschen Hypothese, nach der sich endliche Störung der Größe $\lambda \left(\frac{W^2}{2} + \int_{p_{\infty}}^p \frac{dp}{\rho(p)} \right)$ mit der Geschwindigkeit $a + W$ auf einer Charakteristik in der (λ, τ) -Ebene ausbreitet, dabei ist W die örtliche radiale Geschwindigkeit der Flüssigkeit, leitete Gilmore die Bewegungsgleichung für die Blasenwand in folgender Form ab: /1/ /6/

$$(I.2.5) \quad R \ddot{R} \left(1 - \frac{\dot{R}}{a}\right) + \frac{3}{2} \dot{R}^2 \left(1 - \frac{\dot{R}}{3a}\right) = \left(1 + \frac{\dot{R}}{a}\right) \int_{p_{\infty}}^p \frac{dp}{\rho(p)} + \frac{R}{a} \left(1 - \frac{\dot{R}}{a}\right) \frac{d}{d\tau} \int_{p_{\infty}}^p \frac{dp}{\rho(p)},$$

wobei R der Blasenradius ist,

und a Schallgeschwindigkeit in der Flüssigkeit an der Blasenwand,

$\int_{p_{\infty}}^p \frac{dp}{\rho(p)}$ die Enthalpiedifferenz zwischen der Flüssigkeit bei Druck p an der Blasenwand und bei Druck p_{∞} in unendlichem Abstand von der Blase

bedeuten.

Mit der aus Experiment bekannten eindeutigen Beziehung zwischen Dichte und Druck in einem barotropen Medium

$$(I.2.6) \quad \frac{\rho}{\rho_{\infty}} = \left(\frac{B + p}{B + p_{\infty}} \right)^{1/n}, \quad (n=7; B=3,000 \text{ kp/cm}^2 \text{ für Wasser})$$

findet man

$$(I.2.7) \quad a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = a_{\infty} \left(\frac{p+B}{p_{\infty}+B} \right)^{\frac{n-1}{2n}}$$

und

$$(I.2.8) \quad H = \int_{p_{\infty}}^p \frac{dp}{\rho(p)} = \frac{n(p_{\infty}+B)}{(n-1)\rho_{\infty}} \left[\left(\frac{p+B}{p_{\infty}+B} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right].$$

Mit der Gl.(I.2.5) für den Zusammenfallvorgang der Kavitations-
schicht sind einige zusätzliche Überlegungen notwendig, die wir
später in Ziffer II.5. besprechen wollen.

II. Kavitationsberechnung mit Hilfe der Blasendynamik

II.1. Keimverteilung und Gasvolumenverhältnis

Streng genommen ist die Kavitation in einem gashaltigen Wasser zu behandeln, also in einer Strömung von Zwei-Phasen und Zwei-Komponenten, und zwar sind die beiden Phasen die flüssige und die gasförmige, die beiden Komponenten Wasser und Luft oder anderes echtes Gas. Genauer gesagt haben wir Wasser und gelöste Luft in der flüssigen Phase sowie Wasserdampf und Luft in der gasförmigen Phase. Da die allgemeinen Gleichungen für eine Zwei-Phasen und Zwei-Komponenten-Strömung außerordentlich kompliziert sind, beschränkt man sich, mit dem Vorhandensein der Keime als Voraussetzung, das Kavitationsproblem mit Hilfe der Blasendynamik zu behandeln.

Aus einer Arbeit von Holl und Kornhauser /12/ erhält man eine wichtige Information für die vorliegende Arbeit. Aus der von /12/ entnommenen Abb.2 erkennt man, daß für Strömungskeime der Effekt einer Relativbewegung zwischen Wasser und Blase sowie der Grenzschicht nur sehr geringen Einfluß auf den maximalen Blasenradius hat (Kurven 1,2,3 und 4). Daher kann man bei der Anwendung der Blasendynamik (nur mit Strömungskeimen allerdings) zur Berechnung der Kavitationserscheinung die durch die Relativbewegung und Grenzschicht bedingten Effekte vernachlässigen und die Geschwindigkeit der Keime gleich der Strömungsgeschwindigkeit des Wassers annehmen.

Nun ist zu bedenken, daß nach Messungen (Keller /2/) mit dem Laser-Streulichtverfahren die Zuströmung zu umströmtem Körper in der Regel Blasen und Keime der verschiedenen Größen enthält, und nicht nur eine einzelne. Bei Anwendung der Blasendynamik (die ja das Verhalten von Einzelblasen in kugelsymmetrischen Druckfeldern beschreibt und die Reaktion der Blasen auf das Strömungsfeld behandelt) zur Untersuchung der Kavitationserscheinung ist zu beachten, daß man unter "Reaktion der Blasen" nicht das genaue Verhalten der einzelnen, natürlich mit ihren Nachbarblasen in Wechselwirkung stehenden und hinsichtlich ihrer Geometrie allgemeiner geformten Blasen verstehen soll (Isay /6/). Die

Theorie wird vielmehr zur Beschreibung der Dynamik gewisser "mittlerer" Blasen verwendet werden, die das örtliche Verhältnis α von Gasvolum zu Wasservolum charakterisieren und damit die Kompressibilität des Mediums sowie die Kavitationserscheinung bestimmen.

Für die Beurteilung des Kavitationsverhaltens hat der mit einem Van-Slyke-Apparat messbare, sowohl gelöste als auch ungelöste Luftmenge enthaltende totale Gasgehalt nur einen bedingten Wert, da nur der ungelöste Anteil die Homogenität der Flüssigkeit stört. Vielmehr ist die Größenverteilung und Anzahl der ungelösten Gaskeime, also das Keimspektrum, von Bedeutung. Abb. 3 zeigt die von Keller und Weitendorf /13/ gemessenen Keimspektren bei Versuchen eines Modellpropellers. (vgl. Ziffer III.1.)

Der relative freie Gasgehalt wird definiert durch das Verhältnis des örtlichen Gasvolumens zum Wasservolum. Da die einzelnen Keime als kugelförmig angenommen werden können, lässt sich das Gasvolumenverhältnis α_0 der Zuströmung aus der Relation (Isay /6/)

$$(II.1.1) \quad \frac{\alpha_0}{1+\alpha_0} = \frac{4\pi}{3} \sum_{j=1}^J \mathcal{J}_{0j} (R_{0j})^3 = \sum_{j=1}^J \alpha_{0j}$$

berechnen, dabei bedeutet \mathcal{J}_{0j} die Anzahl der Keime pro Volumeinheit in Radiengrößenklassen R_{0j} .

Aus der Blasendynamik ist bekannt, daß die Reaktion der Blasen auf Druckgradienten wesentlich von der Absolutgröße der Blasen in der Zuströmung abhängt. Es ist aber nicht nötig, alle gemessenen Radiengrößenklassen in die Rechnung einzuziehen. Man erhält eine äquivalente Keimverteilung durch eine Aufteilung der gemessenen Keimverteilung der Zuströmung in verschiedenen (in vorliegender Arbeit 7) Radiengrößenklassen für die Berechnung der Kavitationserscheinung. Darauf kommen wir später zurück.

Für einen Punkt X stromabwärts von Anfangsposition X_0 gilt eine zu (II.1.1) analoge Beziehung

$$(II.1.2) \quad \frac{\alpha_x}{1+\alpha_x} = \frac{4\pi}{3} \sum_{j=1}^J \mathcal{J}_{xj} (R_{xj})^3$$

Mit Hilfe der strömungsmechanischen Gleichungen und unter Verwendung eines Erhaltungssatzes für die Gesamtanzahl der Blasenkeime erhält man dann das Gasvolumenverhältnis in den Feldpunkt (x,y) /6/

$$(II.1.3) \quad \alpha(x,y) = \frac{4\pi}{3} \sum_{j=1}^J \zeta_{0j} (R_j(x,y))^3$$

Es ist selbstverständlich, daß das Gasvolumenverhältnis α , der Zuströmung und auch der örtliche α -Wert sehr stark von der Art der Flüssigkeit (Seewasser, Leitungswasser) und bei Modellversuchen auch von der Vorbehandlung (Begasung, Entgasung, mit/ohne Filter) abhängen. Das Gasvolumenverhältnis α ist in der vorliegenden Arbeit eine wichtige Kenngröße, da als Kavitationsgebiet ein Bereich definiert wird, in dem α einen bestimmten Wert α_k überschreitet. Darauf kommen wir später zurück.

II.2. Modifikation der Theorie für den Umgebungsdruck der Blasen

Die Rayleigh-Plesset-Gleichung (I.2.3), die ja zu analytischer Beschreibung des Verhaltens der Blasen dient, geht davon aus, daß sich ein kugelförmiger Hohlraum in einer unendlich ausgedehnten homogenen, inkompressiblen Flüssigkeit befindet. Plesset /14/ integrierte diese Gleichung numerisch für eine Druckverteilung entsprechend den Versuchen eines 1,5-Kaliber-Ogivals von Knapp und Hollander /15/. Die Ergebnisse der Analyse für eine Blase unter der Vernachlässigung des Luftgehaltes zeigt Abb.4. Die Rechnung wurde durchgeführt, als ob die Blase sich in einem freien Feld befände, in welchem sich der Umgebungsdruck $p_\infty(t)$ entsprechend der Druckverteilung an der Oberfläche des Modells in kavitationsfreiem Zustand ändert. Abgesehen von den Unstimmigkeiten für die Anfangsphase der Aufweitung und gegen Ende des Kollapszustandes, wo Kompressibilitäts- und Zähigkeitseinflüsse wirksam sind und die Gilmore-Gleichung (I.2.5) zu verwenden ist, liefert die Rayleigh-Plesset-Gleichung befriedigende Beschreibung für den größten Teil des Lebenslaufs einer Blase.

Die Annahme in der Rechnung von Plesset, daß der Umgebungsdruck einer Blase durch die entsprechende Druckverteilung an der Oberfläche des Modells in kavitationsfreiem Zustand ersetzt werden kann, soll nur als geeignet angesehen werden, wenn die Wechselwirkung zwischen den Blasen sehr klein ist. Bei dicht angeordneten Kavitationsblasen, und insbesondere bei beginnender Verdampfung des Wassers, taucht die Frage auf, wie tief in einem Strömungsfeld mit Druckgradienten der lokale Druck in Abhängigkeit von dem örtlichen freien Gasgehalt unter dem thermodynamischen Dampfdruck sinken kann. Sicher sind bei einem Strömungsproblem die durch inkompressible Rechnung ermittelte Druckverteilung als die untere Grenze anzusehen, die wirklichen Drücke werden in der Regel bedingt durch die verminderte Zugfestigkeit des gashaltigen Wassers höher liegen. Es handelt sich dabei um ein Problem der Molekularphysik des Wassers und eine genaue Klärung dieser Frage steht zur Zeit noch aus.

Wenigstens sollte man jedoch mit einem vernünftigen Ansatz diesen wirklichen Druck, der ja den Umgebungsdruck der Blasen in der Blasengleichung bedeutet, mit dem Gasgehalt in der Strömung näherungsweise verknüpfen, wenn auch wegen Ermangelung experimenteller kombinierter Gasgehalts- und Druckmessungen keine genauen quantitativen Erkenntnisse vorliegen, und sollte nicht einfach den sich bei inkompressibler Strömung ergebenden Druck als Umgebungsdruck der Blasen nehmen.

Bevor wir zu dem Ansatz kommen, betrachten wir zunächst ein Gitter von Blasen mit der Aufpunktblase in Nullpunkt des Koordinatensystems (Abb.5). Es sei D der Abstand zweier Blasen, gleich groß in allen drei Koordinatenrichtungen. Als repräsentativ betrachten wir einen Feldpunkt in der Mitte $(D/2, D/2, D/2)$ des Gitters. Alle Blasen haben von diesem Mittelpunkt einen gleichen Abstand von $\frac{\sqrt{3}}{2} D$.

In einer Strömung mit dichter angeordneten Kavitationsblasen ist die hydrodynamische Wechselwirkung zwischen Blasen mit der Theorie von Zwei-Phasen-Strömung zu behandeln, in die wir wegen der Kompliziertheit jedoch nicht eingehen wollen. Ganz primitiv wollen wir gemäß der Blasendynamik das Druckfeld unseres Modells auf

folgende Weise abschätzen:

Für inkompressibles Wasser lässt sich das Druckfeld in der näheren Umgebung $r > R$ einer Blase mit dem Geschwindigkeitspotential

$$\phi = -\frac{1}{2} R^2(t) \dot{R}(t)$$

einfach berechnen. Man erhält aus der Bernoullischen Gleichung unter Vernachlässigung des Terms $\frac{R^4}{2 r^4} \cdot \dot{R}^2$

$$(II.2.1) \quad p(r, t) = p_{\infty}(t) + \rho_w [2 \dot{R}^2 + R \ddot{R}] \frac{R}{r} = p_{\infty}(t) + \beta(t) \frac{R}{r}$$

mit $\beta(t) = \rho_w (2 \dot{R}^2 + R \ddot{R})$.

Nun setzen wir das von den 7 Umgebungsblasen im betrachteten Feldpunkt $(D/2, D/2, D/2)$ induzierte Feld in der Form an: (Der Einfluß der Aufpunktblase ist wegen der gegenseitigen Wirkung außer Betracht)

$$(II.2.2) \quad p_* = p_{\infty} + 7 \cdot \beta \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{R}{D}$$

Es sei ζ die Anzahl der Blasen pro Volumeinheit, und der Einfachheit halber betrachten wir nur eine einheitliche Radienklasse. Dann ist $\zeta = 1/D^3$, denn die Anzahl der Blasen in einem Würfel vom Volum $(\pi D)^3$ beträgt π^3 . Weiter gilt das Volumverhältnis (II.1.3)

$$(II.2.3) \quad \alpha = \frac{4\pi}{3} \zeta R^3$$

Aus Gl.(II.2.2) und (II.2.3) folgt mit $\frac{1}{D} = \zeta^{1/3}$

$$(II.2.4) \quad p_* = p_{\infty} + \frac{14}{\sqrt{3}} \left(\frac{3\alpha}{4\pi} \right)^{1/3} \beta$$

Mit Hilfe der Blasengleichung (I.2.3) ersetzen wir

$$\beta = p_L + p_d - \frac{2\sigma}{R} = p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho_w \dot{R}^2$$

und erhalten

$$(II.2.5) \quad p_* = p_\infty \left(1 - \frac{14}{\sqrt{3}} \left(\frac{3\alpha}{4\pi}\right)^{1/3}\right) + \frac{14}{\sqrt{3}} \left(\frac{3\alpha}{4\pi}\right)^{1/3} \left(p_L + p_d - \frac{2\sigma}{R} + \frac{\rho_w \dot{R}^2}{2}\right).$$

p_∞ hat in dem betrachteten Blasenauflweitungsvorgang in der Regel negative Werte, die mit zunehmendem α unrealistisch werden. Nun liefert die Gl.(II.2.5) aber

$$p_* = p_L + p_d - \frac{2\sigma}{R} + \frac{\rho_w \dot{R}^2}{2} \approx p_d$$

schon für

$$(II.2.6) \quad \left(\frac{3\alpha}{4\pi}\right)^{1/3} = \frac{\sqrt{3}}{14}$$

oder

$$\alpha \approx 0,008$$

Das bedeutet, daß eine Abschwächung der Zugspannung bei der Kavitationsbildung durch die ganz primitiv gemäß der Blasendynamik abgeleitete Gl.(II.2.5) berücksichtigt werden kann, wenn p_* an Stelle von p_∞ in die Blasengleichung (I.2.3) eingesetzt wird. Diese gilt allerdings nur für eine einheitliche Radienklasse; aber in Anbetracht des Nährungscharakters unserer Betrachtung dürfte dieses eine zulässige Vereinfachung sein.

Durch Einsetzen der folgenden Ansätze

$$(II.2.7) \quad p_* = p_\infty + \zeta \alpha^{1/3} (2\dot{R}^2 + R\ddot{R}),$$

$$(II.2.8) \quad p_* = (p_\infty + \eta \alpha p_d) / (1 + \eta \alpha)$$

sowie

$$(II.2.9) \quad p_* = p_\infty e^{-\alpha/\alpha_{**}} + p_d (1 - e^{-\alpha/\alpha_{**}})$$

an Stelle von p_∞ in die Blasengleichung (I.2.3) wurden Probe-rechnungen durchgeführt, wobei sind ζ , η und α_{**} Parameter. Es zeigt sich, daß sich der Ansatz (II.2.9) am besten bewertet hat. Wir wollen daher nur mit diesem Ansatz für verschiedene α_{**} -Werte die Rechnungsergebnisse zeigen.

Als Rechnungsmodell wurde ein kugelförmiger Halbkörper mit Durchmesser $d=45\text{mm}$ ausgewählt. Die Rechnungen beziehen sich auf die von Keller /2/ gemessene Keimverteilung für übersättigtes ungefiltertes Wasser. Mit \mathcal{N}_j als der Anzahl der Keime der Radienklasse R_{0j} pro Volumeinheit wird die gemessene Keimverteilung für die Rechnungen in folgenden Radiengrößenklassen aufgeteilt:

$$\begin{aligned} R_{01} &= 3 \cdot 10^{-4} \text{ cm} ; & \mathcal{N}_{01} &= 150 \text{ cm}^{-3} \\ R_{02} &= 6 \cdot 10^{-4} \text{ cm} ; & \mathcal{N}_{02} &= 70 \text{ cm}^{-3} \\ R_{03} &= 10 \cdot 10^{-4} \text{ cm} ; & \mathcal{N}_{03} &= 40 \text{ cm}^{-3} \\ R_{04} &= 17 \cdot 10^{-4} \text{ cm} ; & \mathcal{N}_{04} &= 22 \text{ cm}^{-3} \\ R_{05} &= 25 \cdot 10^{-4} \text{ cm} ; & \mathcal{N}_{05} &= 10 \text{ cm}^{-3} \end{aligned}$$

Die gesamte Anzahl $\sum \mathcal{N}_j$ der Keime beträgt auch 292 cm^{-3} , und aus der Relation (II.1.1) ergibt sich das Gasvolumenverhältnis in der Zuströmung $\alpha_0 = 1,35 \cdot 10^{-6}$.

Die Blasengleichung (I.2.3) wurde mit Korrektur für den Umgebungsdruck (II.2.9)

$$\begin{aligned} \text{(II.2.10)} \quad \frac{3}{2} \dot{R}^2 + R\ddot{R} &= \frac{1}{\rho_w} (p_L + p_d - \frac{2\sigma}{R} - p_*) \\ &= \frac{1}{\rho_w} (p_{L_0} (\frac{R}{R_0})^3 - \frac{2\sigma}{R} - p_{\infty} e^{-\alpha_{**}} + p_d e^{-\alpha_{**}}) \end{aligned}$$

für jede Radienklasse mit Runge-Kutta-Verfahren gelöst. Abb.6 und 7 zeigen die Ergebnisse für verschiedene Parameterwerte α_{**} . Man erkennt deutlich, wie stark das örtliche Gasvolumenverhältnis α von dem Parameter α_{**} beeinflusst ist. Aus diesen Ergebnissen und hinsichtlich der gemäß der Blasendynamik ermittelten Abschätzung (II.2.6) wird für die weiteren Rechnungen des Blasenaufweitungsvorgangs in dieser Arbeit $\alpha_{**} = 0,01$ festgelegt.

II.3. Kavitationsbeginn

Als Kavitationsbeginn für einen bestimmten Keim definiert man das Erreichen des Instabilitätspunktes, d.h. wenn zwischen dem äußeren Druck p_{∞} , Dampfdruck der Flüssigkeit p_d , Partialdruck der Luft in der Blase p_L , dem aus der Oberflächenspannung her-

rühenden Druckanteil $\frac{2\sigma}{R}$ und den Trägheitskräften kein Gleichgewicht mehr möglich ist (Gl.(I.2.3)). Aus der Blasendynamik ist bekannt, daß größere Keimblasen eher ihren kritischen Druck erreichen als kleinere. Da aber in einer Flüssigkeit die Keime stochastisch verteilt sind, ist zu erwarten, daß die beginnende Kavitation (incipient cavitation) auch in einer stochastischen Weise einsetzt, was in Versuchen immer beobachtet wurde.

Besonders von Bedeutung für die beginnende Kavitation sind auch die Einflüsse von Grenzschicht und Turbulenz der Strömung. So hat z.B. Arakeri /16//17/ in den letzten Jahren gefunden, daß auf einem kugelförmigen Halbkörper die Kavitation zuerst in der Nähe von Endstelle des laminaren Ablösungsgebietes in Blasenformen beginnt. Allerdings ist diese beginnende Kavitation ein unregelmäßiger Prozeß, in dem eine Vielzahl von Blasen in verstreuten Positionen längs der Körperoberfläche erscheinen.

Da die Ausdehnung des Kavitationsgebietes zu ermitteln, das Hauptziel der vorliegenden Arbeit ist, wird auf die genaue Bestimmung des Einsatzpunktes nicht eingegangen. Mit vorgegebenem Keimspektrum definieren wir als Anfangsstelle einer ausgebildeten Kavitationsschicht diejenige, wo der modifizierte Druck p_* gemäß Gl.(II.2.9) den Dampfdruck erreicht, oder zum gleichen Sinn, wo das örtliche Gasvolumenverhältnis α einen Wert von ungefähr 0,05 hat.

II.4. Bemerkung des Aufweitungsvorgangs

Für die Berechnung der Kavitationserscheinung ist die Theorie der Blasendynamik so lange anwendbar, wie die Blasen genügend weit voneinander entfernt sind, oder, mit anderem Wort, wie das Gasvolumen noch klein gegenüber dem Wasservolumen bleibt.

Weiten sich die Blasen immer weiter auf, so werden die Zwischenabstände immer kleiner, und der Wechselwirkungseffekt wird mehr und mehr von Bedeutung. Wenn benachbarte Blasen sich berühren, dann hat die auf der Voraussetzung einzelner Kavitationsblase beruhende Theorie bei der Anwendung ihre Berechtigung völlig verloren. Letzteres ist etwa bei einem Gasvolumenverhältnis $\alpha \approx 1$ der Fall.

Gemäß dieser Überlegung hat Lederer /18/ bei seinen Untersuchungen $\alpha = 1$ als Grenze gesetzt. Aber sicher ist, daß im Kavitationsgebiet die α -Werte größer als 1 erreicht werden; man spricht daher vielmehr von Dampfströmung mit feinverteilten Wassertröpfchen. Eine physikalisch besser begründete Theorie dafür ist zur Zeit leider nicht bekannt.

Daher nimmt man in vorliegender Arbeit die Mängel der Theorie im Kauf, und führt die blasendynamische Rechnung ohne Unterbrechung von der Aufweitung an bis zum durch den Stoß eingeleiteten Zusammenfall durch, d.h. die Rechnung wird nicht bei $\alpha = 1$ abgebrochen.

II.5. Überlegungen zur Berechnung des Zusammenfalls einer Kavitationsschicht

Kavitation ist ein Strömungsvorgang im gashaltigen Wasser, in dem die örtliche Schallgeschwindigkeit mit zunehmendem Volumenanteil α von freiem Gas sehr klein werden kann und im Bereich niedrigen Drucks auf der Profilsaugseite lokales Überschallgebiet auftritt, das stromabwärts mit Stoßfläche berandet ist.

Um die Kavitationsströmung vollständig zu beschreiben und den Beginn des Zusammenfalls der Kavitationsschicht festzulegen, werden die konventionellen Stoßgleichungen bei einer stationären Strömung herangezogen. Für die Einzelheiten über Stoßrelationen müssen auf /19/ oder /20/ hingewiesen werden. Für eine ebene Strömung um ein Flügelprofil mit Koordinatensystem (x,y) beträgt die Stärke des Druckstosses am Ende des lokalen Überschallgebiets nach /20/

$$(II.5.1) \quad \partial p = \hat{p} - \tilde{p} = \rho_w \tilde{U}_n^2 \tilde{\alpha} / (1 + \tilde{\alpha})^2$$

und der durch den Stoß bedingte Druck ist

$$(II.5.2) \quad p_{st} = - \frac{\partial p}{\pi} \arctg \frac{y}{x_{st} - x},$$

dabei werden die jeweiligen Werte vor dem Stoß mit " \sim " und hinter dem Stoß mit " \wedge " gekennzeichnet. \tilde{U}_n stellt die Normal-

komponente der Geschwindigkeit vor dem Stoß zur Stoßfläche dar. Hinsichtlich der Beobachtung bei Profilstömungen, daß stromaufwärts von der durch einen stossartigen Druckanstieg bedingten Auslöschung einer Kavitationsschicht eine Strecke lang etwa Dampfdruck herrscht, wird die Stoßlage λ_{st} ebenfalls nach der Methode von Isay und Roestel /20/ festgelegt durch die Forderung, daß vor dem Stoß ungefähr Dampfdruck herrschen muß, also

$$(II.5.3) \quad p_{\infty} + p_{st} \approx p_d,$$

dabei ist p_{∞} der durch inkompressible Rechnung ermittelte Druck. Es wird nun angenommen, daß der Zusammenfall der Kavitationsschicht von der angepassten Stoßlage an beginnt.

Wie schon in Ziffer II.4. besprochen, wollen wir keine Grenze für den α -Wert in Kavitationsgebiet festlegen. Für größere werdende α -Werte berühren sich die Blasen nicht nur, sie wachsen sogar zusammen, und der Erhaltungssatz für die gesamte Blasenanzahl gilt dabei natürlich nicht mehr. Es ist verständlich, daß der Zusammenfallvorgang wirklich von den beteiligten Volumen des Dampfgebietes bzw. der Kavitationsschicht beeinflusst wird, und daß die Geometrie der Schicht, die ja keineswegs kugelsymmetrisch ist, irgendwie berücksichtigt werden muß. Um aber die Dynamik der kugelsymmetrischen Einzelblase auch bei der Berechnung des Zusammenfallvorgangs überhaupt zu verwenden, gehen wir davon aus, daß bei einem Gasvolumenverhältnis α_* zu Beginn des Zusammenfalls die Kavitationsschicht durch einen blasenartigen Referenzhohlraum von Radius R_* charakterisiert werden kann, und setzen voraus, daß R_* ein Gleichgewichtsradius im Sinn der Blasendynamik ist.

Doch zuerst eine Bemerkung über den Zusammenfall einer Einzelblase.

Die Untersuchungen von Lederer /18/ über den durch einen Druckanstieg des Außendrucks und insbesondere durch Druckstöße ausgelösten Zusammenfall von Blasen haben gezeigt, daß nach dem Zusammenfall eine Wiederaufweitung erfolgt, die in eine gedämpfte Schwingung um einen neuen Gleichgewichtsradius übergeht. Diese

gedämpfte Wiederaufweitung bei Zusammenfall einer Blase ist auch experimentell bestätigt /1/. Da die Dämpfung bzw. die Zeitdauer, bis die Schwingung ihren neuen Gleichgewichtsradius annimmt, stark vom Luft-Partialdruck zu Beginn des Zusammenfalls abhängt, ist es notwendig, den Luft-Partialdruck möglich genau zu erfassen.

Unter der Vernachlässigung von Diffusionsvorgang gehen wir von dem Erhaltungssatz der Luftmasse aus, der besagt

$$\frac{d M_L}{d t} = 0$$

oder

$$(II.5.4) \quad \frac{\partial \rho^{(L)}}{\partial t} + \nabla \text{grad } \rho^{(L)} = \frac{d \rho^{(L)}}{d t} = - \rho^{(L)} \text{div } \vec{N},$$

dabei ist

$$\rho^{(L)} = \frac{M_L}{V_L + V_d + V_w}$$

die Partialdichte der Luft bezüglich des Gesamtvolums des Mediums. Mit ρ als Gemischdichte, und zwar /6/

$$(II.5.5) \quad \rho = \frac{M_L + M_d + M_w}{V_L + V_d + V_w} \approx \frac{\rho_w}{1 + \alpha},$$

haben wir die Kontinuitätsgleichung

$$(II.5.6) \quad \text{div } \vec{N} = - \frac{1}{\rho} \frac{d \rho}{d t}$$

Dabei bedeutet in Gl.(II.5.5) und (II.5.6) M die Masse, V das Volum; mit den Indexen "L", "d" bzw. "w" kennzeichnen wir die jeweiligen Größen für Luft, Dampf bzw. Wasser, und wie früher ist α das Gasvolumverhältnis.

Aus Gl.(II.5.4) und (II.5.6) folgt

$$(II.5.7) \quad \frac{d}{d t} \left(\frac{\rho^{(L)}}{\rho} \right) = 0$$

und

$$(II.5.8) \quad \rho^{(L)}(1+\alpha) = \rho_o^{(L)}(1+\alpha_o) \approx \rho_o^{(L)} \quad (\alpha_o \ll 1)$$

es wird mit "o" den Zustand der Zuströmung beschrieben.

Wir betrachten in der Zuströmung eine Blase von Radius R_{oj} in Gleichgewicht mit dem Druck $(p_{\infty})_o$ der Zuströmung. Dann ist der Partialdruck der Luft in der Blase gegeben durch (vgl. Gl.(I.2.2))

$$(II.5.9) \quad p_{Lj}(0) = (p_{\infty})_o + \frac{2\sigma}{R_{oj}} - p_d$$

und die Luftmasse in dieser Blase ergibt sich aus der isothermen Zustandsgleichung zu

$$(II.5.10) \quad M_{Lj}(0) = \frac{p_{Lj}(0) \cdot \frac{4\pi}{3} (R_{oj})^3}{R_L \cdot T} = \frac{4\pi}{3} (R_{oj})^3 \cdot \frac{(p_{\infty})_o + \frac{2\sigma}{R_{oj}} - p_d}{R_L \cdot T}$$

Damit ist die Luftmasse pro Volumeinheit $\rho_o^{(L)}$ in der Zuströmung mit Keimspektrum $(R_{oj}, \mathcal{J}_{oj})$

$$(II.5.11) \quad \rho_o^{(L)} = \sum_{(j)} \mathcal{J}_{oj} M_{Lj}(0) = \frac{4\pi}{3} \sum_{(j)} R_{oj}^3 \mathcal{J}_{oj} \frac{(p_{\infty})_o + \frac{2\sigma}{R_{oj}} - p_d}{R_L \cdot T}$$

Da wir zu Beginn des Zusammenfalls eine "Blase" pro Volumeinheit haben, ist die dortige Luftdichte

$$(II.5.12) \quad \rho_*^{(L)} = 1 \cdot M_L^* = M_L^*$$

mit M_L^* als der Luftmasse des blasenartigen Referenzhohlraums.

Aus Gl.(II.5.8) und (II.5.12) folgt

$$(II.5.13) \quad \frac{\rho_o^{(L)}}{1+\alpha_*} = M_L^*$$

Mit R_* als dem Radius des blasenartigen Referenzhohlraums wird nach allgemeiner Beziehung (vgl. Gl.(II.1.2))

$$(II.5.14) \quad \left(\frac{V_G}{V_w + V_G} \right)_* = \frac{\alpha_*}{1+\alpha_*} = \frac{4\pi}{3} R_*^3$$

Damit erhalten wir unter der Berücksichtigung von Gl.(II.5.14) den Luft-Partialdruck in der "Blase"

$$(II.5.15) \quad p_L^* = \frac{M_L^* R_L T}{\frac{4\pi}{3} R_*^3} = \frac{\rho_0^{(L)} R_L T}{(1+\alpha_*) \frac{4\pi}{3} R_*^3} = \frac{\frac{4\pi}{3} \sum_{(j)} R_{0j}^3 \zeta_{0j} \left((p_{\infty})_0 + \frac{2\sigma}{R_{0j}} - p_d \right)}{\alpha_*},$$

wenn wir $\rho_0^{(L)}$ nach Gl.(II.5.11) einsetzen.

Für α_* ist der bis zum Stoß erreichte $\tilde{\alpha}$ -Wert zu nehmen, und der nach Gl.(II.5.15) ermittelte Luft-Partialdruck wird zur Berechnung des Zusammenfallsvorgangs gebraucht.

Es ist bekannt, daß alle in einem örtlichen Unterdruckfeld instabil werdenden Keime nach kurzer Lauflänge auf der Saugseite eines Profils fast den gleichen Absolutradius erreichen, unabhängig von ihrer Ausgangsgröße, und sie liefern etwa den gleichen Anteil zum gesamten Gasvolum und α hängt fast nur von der Anzahl der Keime ab.

Wir haben also den Endradius der aufgeweiteten Blase (vgl. Gl. (II.1.3))

$$(II.5.16) \quad \tilde{R} = \left(\frac{\tilde{\alpha}}{\frac{4\pi}{3} \sum_{(j)} \zeta_{0j}} \right)^{1/3},$$

der annähernd vom Ausgangsradius und natürlich auch von der Anzahl der aufgeweiteten Blasen unabhängig ist.

Nun ist es zweckmäßig, den für den Zusammenfall maßgebenden Radius R_* unter Berücksichtigung des Zusammenwachsens der Blasen in der Form anzusetzen

$$(II.5.17) \quad R_* = \chi \tilde{R} = \chi \left(\frac{\tilde{\alpha}}{\frac{4\pi}{3} \sum_{(j)} \zeta_{0j}} \right)^{1/3}.$$

Der Vorfaktor χ sollte dazu dienen, eine Übereinstimmung zwischen theoretischen Voraussagen und Experimenten zu gewinnen. Da aber \tilde{R} im wesentlichen durch den Kavitationsbeiwert, also durch den Unterdruckbereich $p \leq p_d$ auf dem Profil, geprägt wird, ist zu erwarten, daß für χ eine einigermaßen universelle empirische Konstante gefunden werden kann. Nach den später mitzuteilenden Rechnungsergebnissen an dem HSVA-Modellpropeller 1283

wird $\chi = 5,5$ als ein brauchbarer Mittelwert festgelegt.

II.6. Rechenvorgang

Als Resumee dieses Abschnittes soll der Rechenvorgang kurz erläutert werden.

Man berechnet zuerst die inkompressible Druckverteilung. Mit vorgegebener Keimverteilung und unter der Voraussetzung, daß alle Keime im Gleichgewichtszustand sind, beginnt man dann mit Gl.(II.2.10) für jeden Blasenkeim, daher wird das Gasvolumverhältnis α , das für nächsten Schritt in Gl.(II.2.10) eingesetzt wird, nach Gl.(II.1.3) aufgebaut. Zugleich erhält man nach dem Ansatz (II.2.9) p_* , den an Stelle von p_∞ in Rayleigh-Plesset-Gleichung (I.2.3) eingesetzten modifizierten Außendruck.

Die Berechnung wird durchgeführt, bis der Stoß auftritt. Die Stoßlage wird nach dem Kriterium von Isay und Roestel (Gl.(II.5.1)) angepasst; von dort an beginnt der Zusammenfallvorgang.

Zu Beginn des Zusammenfalls bestimmt man den Radius des blasenartigen Referenzhohlraums nach Gl.(II.5.17) und zugleich nach Gl.(II.5.15) den Luft-Partialdruck der "Blase". Die Gilmore-Gleichung (I.2.5) wird nun herangezogen unter der Berücksichtigung der Relationen (I.2.6), (I.2.7) und (I.2.8).

Bei der Berechnung des Zusammenfallvorgangs gilt der Ansatz (II.2.9) natürlich nicht mehr, da dieser Ansatz nur dazu dienen, die durch inkompressible Rechnung ermittelten Unterdrücke abzubauen. Der Druck bei dem durch Stoß eingeleiteten Zusammenfallvorgang liegt ja schon über Dampfdruck.

Man führt die Berechnung des Zusammenfallvorgangs weiter durch, bis der erste Minimalradius erscheint, dann ist die Berechnung zu Ende. Der erfolgende Wiederaufweitungsvorgang wird nicht mehr berücksichtigt. Man hat dann das Kavitationsgebiet.

III. Anwendung der Blasendynamik zur Berechnung der Kavitationserscheinung auf Beispiele

III.1. HSVA Modellpropeller 1283

Eine wesentliche Voraussetzung für die Berechnung der Kavitationserscheinung für einen Schiffspropeller im Schiffsnachstrom ist die Kenntnis zuverlässiger Druckverteilungen an Propellerflügeln. Zur Zeit geht man zur Berechnung der Druckverteilung an Propellerflügeln in zwei Richtungen; eine ist mit seit über 20 Jahren von Lerbs /21/ entwickelter Traglinientheorie mit Tragflächenkorrekturen /22/; die andere ist die Berechnung, die sich direkt auf die Tragflächentheorie stützen.

Am Institut für Schiffbau der Universität Hamburg existiert ein im Rahmen des Sonderforschungsbereichs SFB 98 entwickeltes umfangreiches Programmsystem, das von der von Prof. Isay entwickelten Tragflächentheorie /23/ ausgeht, zur Berechnung der Druckverteilung eines Propellers im Schiffsnachstrom unter der Annahme inkompressibler Potentialströmung. Das Programmsystem und dessen Verbesserung wurde in /24/ und /25/ ausführlich beschrieben. Es berechnet die Druckverteilung an Propeller vorgegebener Geometrie in vorgegebenem Schiffsnachstrom und berücksichtigt dabei die Einflüsse der Flügeldicke und der Wirbelverteilung auf den Flügeln.

Als erstes Beispiel in dieser Arbeit wird der HSVA Modellpropeller 1283 mit 3 Flügeln, einem Flächenverhältnis von $A_R/A_0 = 0,77$ und einem Durchmesser von $D = 240$ mm ausgewählt, der von Keller und Weitendorf /13/ in der Kavitationstunnel der HSVA in Freifahrtszustand (d.h. ohne Nachstrom) untersucht wurde. Die Druckverteilung an Flügeln dieses Modellpropellers wird mit dem eben erwähnten Programm berechnet.

Die Richtigkeit der Rechnung lässt sich durch den Test auf die Erfüllung der Strömungsrandbedingung prüfen. Das bedeutet, daß der Vektor der von Anströmung sowie vom Einfluß der Flügeldicke und der Wirbeldichte erzeugten berechneten Strömungsgeschwindigkeiten in jedem Punkt der Flügelebene mit der dort durch Geometrie und Anstellwinkel des Flügels vorgegebenen Richtung der Skelettlinie übereinstimmen muß.

Nach den vorliegenden Rechnungsergebnissen ist die Randbedingung jeweils im hinteren und im mittleren Teil gut erfüllt (Abweichungen von weniger als 2%). Im Bereich nahe der Flügelvorderkante, auf etwa 10% der gesamten Flügeltiefe, ist sie jedoch stark verletzt.

Wir bezeichnen mit $\delta_0(r, \chi)$ den Winkel zwischen der Skelettlinie des Propellerflügels und der $r\varphi$ -Achse (Abb.8 unten). Dabei wird wie üblich beim Propellerproblem das Zylinderkoordinatensystem verwendet und φ_n bedeutet die Winkelkoordinate des n-ten Flügels, r die Radial- und x die Axialkoordinate. Ferner sei χ die Koordinate der Tiefe des Propellerschnittes und χ_v bzw. χ_H die Vorder- bzw. Hinterkante.

Mit $\delta_1(r, \chi)$ bezeichnen wir den von δ_0 unterschiedlichen, aus der Rechnung ergebenden Skelettlinienwinkel, dann lässt sich die Abweichung der Randbedingung durch die Differenz ($\delta_1 - \delta_0$) ausdrücken. Abb.8 zeigt diese Abweichungswinkel für Radien $r/R_a = 0,7$ und $0,8$.

Bezeichnen wir mit

ω Winkelgeschwindigkeit des Propellers,

u_0 Geschwindigkeit der homogenen Anströmung,

$\sum u_i$ die Axialkomponente,

$\sum V_i$ die Umfangskomponente

sowie

$\sum W_i$ die Radialkomponente der durch Wirbeldichte und Flügeldicke induzierten Geschwindigkeiten,

dann lautet die Strömungsrandbedingung /23/

$$(III.1.1) \quad (\omega r + \sum V_i) \sin \delta_0 = (u_0 + \sum u_i) \cos \delta_0.$$

An Stelle der Gl.(III.1.1) erfüllt die Rechnung jedoch nur die folgende Relation

$$(III.1.2) \quad (\omega r + \sum V_i)_1 \sin \delta_1 = (u_0 + \sum u_i)_1 \cos \delta_1.$$

Um sicherzustellen, daß die Randbedingung wirklich erfüllt wird, führen wir nun eine Zusatzwirbelbelegung $\tilde{\gamma}$ für jeden Radius mit

Hilfe der Profiltheorie ein. Also an Stelle von Gl.(III.1.1) soll

$$(III.1.3) \quad (\omega\lambda + \sum V_i)_1 \sin \delta_0 - (u_0 + \sum u_i)_1 \cos \delta_0 = -V_{\tilde{\gamma}} \sin \delta_0 + u_{\tilde{\gamma}} \cos \delta_0.$$

Dabei ist nach der ebenen Theorie mit $\delta(\lambda)$ dem Winkel zwischen der Profilsehne und der $\lambda\varphi$ -Achse (Abb.8 unten)

$$V_{\tilde{\gamma}} = - \frac{\sin \delta}{2\pi} \int_{x_v}^{x_H} \frac{\tilde{\gamma}(x)}{x^* - x} dx$$

$$u_{\tilde{\gamma}} = \frac{\cos \delta}{2\pi} \int_{x_v}^{x_H} \frac{\tilde{\gamma}(x)}{x^* - x} dx.$$

Also wird Gl.(III.1.3) die folgende Form nehmen:

$$(III.1.4) \quad (\omega\lambda + \sum V_i)_1 \sin \delta_0 - (u_0 + \sum u_i)_1 \cos \delta_0 = \cos(\delta_0 - \delta) \frac{1}{2\pi} \int_{x_v}^{x_H} \frac{\tilde{\gamma}(x)}{x^* - x} dx.$$

Andererseits ist unter Vernachlässigung der induzierten Geschwindigkeiten mit $\tan \delta \approx \frac{u_0}{\omega\lambda}$ die Tangentialgeschwindigkeit an der Profilsehne gegeben durch

$$(III.1.5) \quad (u_0 + \sum u_i)_1 \sin \delta + (\omega\lambda + \sum V_i)_1 \cos \delta \approx \sqrt{u_0^2 + \omega^2 \lambda^2}.$$

Aus Gl.(III.1.2) und (III.1.5) ergibt sich

$$(III.1.6) \quad (u_0 + \sum u_i)_1 = \frac{\sin \delta_1}{\cos(\delta_1 - \delta)} \sqrt{u_0^2 + \omega^2 \lambda^2},$$

$$(\omega\lambda + \sum V_i)_1 = \frac{\cos \delta_1}{\cos(\delta_1 - \delta)} \sqrt{u_0^2 + \omega^2 \lambda^2}.$$

Durch Einsetzen von Gl.(III.1.6) in die Relation (III.1.4) folgt die gesuchte Bestimmungsgleichung für $\tilde{\gamma}(x)$, und zwar

$$\frac{\sin(\delta_0 - \delta_1) \sqrt{u_0^2 + \omega^2 \lambda^2}}{\cos(\delta_1 - \delta) \cos(\delta_0 - \delta)} = \frac{1}{2\pi} \int_{x_v}^{x_H} \frac{\tilde{\gamma}(x)}{x^* - x} dx,$$

oder näherungsweise

$$(III.1.7) \quad \tan(\delta_0 - \delta_1) \sqrt{u_0^2 + \omega^2 \lambda^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{x_v}^{x_H} \frac{\tilde{\gamma}(x)}{x^* - x} dx.$$

Mit der Substitution

$$(III.1.8) \quad \begin{aligned} \chi &= \frac{1}{2} (\chi_H + \chi_V) - \frac{1}{2} (\chi_H - \chi_V) \cos \tau \\ \chi^* &= \frac{1}{2} (\chi_H + \chi_V) - \frac{1}{2} (\chi_H - \chi_V) \cos \vartheta \end{aligned}$$

und einem üblichen Ansatz

$$(III.1.9) \quad \frac{\tilde{\gamma}(\chi)}{2\sqrt{u_0^2 + \omega^2 \lambda^2}} = A_0 \operatorname{ctg} \frac{\tau}{2} + A_1 \sin \tau + A_2 \sin 2\tau + \dots$$

erhält man aus Gl.(III.1.7) die Relation

$$(III.1.10) \quad \operatorname{tg}(\delta_0 - \delta_1) = A_0 - A_1 \cos \vartheta - A_2 \cos 2\vartheta - A_3 \cos 3\vartheta - \dots$$

Nun kann jede quadratisch integrable Funktion $\operatorname{tg}(\delta_0 - \delta_1)$ im Bereich $0 \leq \vartheta \leq \pi$ in eine Fourier-Cosinus-Reihe entwickelt werden. Es ist dann

$$(III.1.11) \quad \begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{tg}(\delta_0 - \delta_1) d\vartheta, \\ A_n &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{tg}(\delta_0 - \delta_1) \cdot \cos n\vartheta d\vartheta. \end{aligned}$$

Wir haben nun zu überlegen, in welcher Form wir mit der eingeführten Korrektur die Druckverteilung am Propellerflügel bestimmen wollen. Für einen stationär belasteten Flügel in vorliegendem Fall gilt nach der Propellertheorie /23/

$$(III.1.12) \quad \frac{p_0 - p}{\rho} = \frac{1}{2} \left\{ \left[(u_0 + \sum u_i) \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + \lambda^2}} + (\omega \lambda + \sum V_i) \frac{\lambda}{\sqrt{k_1^2 + \lambda^2}} + \frac{r}{2} \right] \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4} \frac{1}{\lambda^2 + k_1^2} \left(\frac{\partial p}{\partial x^2} \right)^2} \right\}^2 + \frac{1}{2} (\sum W_i)^2 - \frac{\omega^2 \lambda^2 + u_0^2}{2}$$

wobei bedeutet der Term $\sqrt{1 + \frac{1}{4} \frac{1}{\lambda^2 + k_1^2} \left(\frac{\partial p}{\partial x^2} \right)^2}$ den Riegelfaktor. ($k_1 = \lambda \operatorname{tg} \delta$)

Dagegen liefert die ebene Profiltheorie

$$(III.1.13) \quad \frac{p_0 - p}{\rho} = \frac{1}{2} (U_T)^2 - \frac{\omega^2 \lambda^2 + u_0^2}{2}$$

Einzelheiten über die Gleichung (III.1.12) und die induzierten Geschwindigkeiten $\sum u_i$, $\sum V_i$ und $\sum W_i$ sind auf das Buch von Prof. Isay /23/ zu verweisen.

Nach der Profiltheorie lässt sich die Dicke D des Profils durch eine Quellen-Senkenbelegung q ersetzen. Mit der üblichen Trans-

formation (III.1.8) ist /26/

$$(III.1.14) \quad \frac{1}{2\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda^2}} \frac{\partial D}{\partial x} = \frac{q}{2\sqrt{\omega^2 \lambda^2 + u_0^2}} =$$

$$= B_0 \left(\lambda_1 \frac{\tau}{2} - 2 \sin \tau \right) + B_1 \left(\lambda_1 \frac{\tau}{2} - 2 \sin \tau \right) + \sum_{n \geq 2} B_n \sin n \tau,$$

und die durch q induzierte Geschwindigkeit wird

$$(III.1.15) \quad \frac{U_T}{\sqrt{\omega^2 \lambda^2 + u_0^2}} = B_0 (1 + 2 \cos \vartheta) - B_1 (1 - 2 \cos \vartheta) - \dots$$

Damit erhalten wir aus Gl.(III.1.13) nach der Profiltheorie /26/

$$(III.1.16) \quad \frac{p_0 - p}{\frac{1}{2} \rho (\omega^2 \lambda^2 + u_0^2)} = \left[\frac{1 + B_0 (1 + 2 \cos \vartheta) - B_1 (1 - 2 \cos \vartheta) + \frac{1}{2} \gamma}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} \frac{\gamma^2}{\omega^2 \lambda^2 + u_0^2}}} \right]^2 - 1$$

Wie in Gl.(III.1.12) bedeutet der Nenner auf der linken Seite der Gl.(III.1.16) den Riegelfaktor, und $\frac{1}{2} \gamma$ ist die durch die auf der Profilsehne belegte Wirbelverteilung induzierte Geschwindigkeit in Sehnerichtung.

Wir bezeichnen mit γ_T die aus der Rechnung nach Tragflächentheorie ermittelte Wirbelverteilung, es gibt nun zwei Möglichkeiten, die Korrektur einzuführen.

Die erste ist, daß wir genau mit Hilfe der Formel (III.1.16) das Druckfeld berechnen, wobei für γ der Wert

$$\gamma = \gamma_T + \tilde{\gamma}$$

eingesetzt wird, $\tilde{\gamma}$ ist die Korrekturbelegung aus Gl.(III.1.9).

Zur anderen verwenden wir die Gl.(III.1.12) ebenfalls mit

$$\gamma = \gamma_T + \tilde{\gamma}.$$

Dann kann das Ergebnis der Druckverteilungsrechnung nach der Tragflächentheorie ausgenutzt werden. Wir bezeichnen mit

$$C_p^{(\tau)} = \frac{p_0 - p^{(\tau)}}{\frac{1}{2} \rho (\omega^2 \lambda^2 + u_0^2)}$$

den nur mit γ_T berechneten Druckbeiwert, dann, hinsichtlich der aus der Propellertheorie bekannten kleinen Größenordnung der induzierten Geschwindigkeiten im Vergleich mit dem Korrekturterm, insbesondere im Bereich nahe der Vorderkante, wo ja die Abweichung der Randbedingung groß und die Korrektur einzuführen ist, haben wir nach Gl.(III.1.12) in guter Näherung

$$(III.1.17) \quad \frac{p_0 - p}{\frac{\rho}{2}(\omega^2 r^2 + u_0^2)} = C_p^{(\tau)} + \frac{\tilde{\gamma}^2}{4(\omega^2 r^2 + u_0^2)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \frac{\rho^2}{\omega^2 r^2 + u_0^2}} +$$

$$+ \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \frac{\rho^2}{\omega^2 r^2 + u_0^2}} \cdot \frac{\tilde{\gamma}}{\omega^2 r^2 + u_0^2} \left[\frac{\tilde{\gamma}_T}{2} + \frac{1}{2} \frac{u_0 + \omega^2 r^2}{\sqrt{k_1^2 + r^2}} \right].$$

Die beiden Korrekturrechnungen wurden durchgeführt, Abb. 9 und 10 zeigen die korrigierten sowie die aus dem Tragflächenprogramm berechneten Druckverteilungen für Radien $r/R_a = 0,7$ und $0,8$.

Der Unterschied zwischen den unkorrigierten und korrigierten Druckverteilungen ist schon ab 10% Profiltiefe von der Vorderkante klein, und die beiden korrigierten Druckverteilungen liefern für die ganze Profiltiefe auch keinen großen Unterschied. Zur Berechnung der Kavitationserscheinung an dem Flügel wird der Mittelwert der beiden korrigierten Druckverteilungen benutzt.

Die von Keller und Weitendorf /13/ bei Versuchen des HSVA Modellpropellers 1283 gemessenen Keimspektren für vier Fälle sind in Abb. 3 aufgetragen. Die Kurvennummer sind auch die Versuchsnummer. Die zu den in vorliegender Arbeit als Beispiele eingezogenen Versuchen gehörenden Daten sind wie folgende Tabelle:

Versuch-Nr.	Drehzahl (sec ⁻¹)	σ_{VA}	α_0
31	30	3,0	$0,251 \cdot 10^{-4}$
38	25	3,0	$0,104 \cdot 10^{-4}$
56	22	3,0	$0,455 \cdot 10^{-4}$
39	25	2,0	$0,250 \cdot 10^{-4}$
47	22	2,0	$0,103 \cdot 10^{-4}$
48	22	1,75	$0,135 \cdot 10^{-4}$

$$\sigma_{VA} = \frac{p_0 - p_d}{\frac{1}{2} \rho_w u_0^2}$$

Die Messung wurde aus Eichungsgrund auf Blasen mit $R_0 > 1,1 \cdot 10^{-3}$ cm beschränkt. Da aber in der Zuströmung auch sehr kleine Keime vorhanden sind, die zwar den Gasvolumanteil α_0 der Zuströmung nicht beeinflussen, jedoch für die Kavitationserscheinung einen wesentlichen Beitrag liefern können, ist es notwendig, solche kleine Keime mitzuberücksichtigen. Bezugnehmend auf die früheren Keimverteilungsmessungen von Keller /2/ wurde eine zusätzliche Radiengrößenklasse von $R_0 = 0,3 \cdot 10^{-3}$ cm als zutreffend angenommen, und deren Anzahl wurde mit Extrapolation bestimmt.

Wie schon in Ziffer II.1. kurz angedeutet, wurde zum Rechnungszweck jede gemessene Keimverteilung in 6 Radiengrößenklassen aufgeteilt, insgesamt haben wir für jeden Versuch also entsprechend der nachfolgenden Tabelle 7 Radiengrößenklassen.

Versuch-Nr.	Radiengrößenklasse							α_0	$\sum \zeta_{0j} (\text{cm}^3)$	
		1	2	3	4	5	6			7
31	$R_{0j} \cdot 10^4 (\text{cm})$	3	23	42	65	83	116	167	$0,251 \cdot 10^{-4}$	105,42
	$\zeta_{0j} (\text{cm}^3)$	95	4,64	2,11	1,18	0,91	0,78	0,80		
38	$R_{0j} \cdot 10^4 (\text{cm})$	3	23	42	59	84	118	169	$0,102 \cdot 10^{-4}$	184,38
	$\zeta_{0j} (\text{cm}^3)$	180	2,41	0,66	0,40	0,32	0,24	0,35		
56	$R_{0j} \cdot 10^4 (\text{cm})$	3	23	42	59	81	111	151	$0,452 \cdot 10^{-4}$	217,70
	$\zeta_{0j} (\text{cm}^3)$	170	16,05	10,0	11,75	8,01	1,60	0,29		
39	$R_{0j} \cdot 10^4 (\text{cm})$	3	23	42	59	83	118	168	$0,247 \cdot 10^{-4}$	212,0
	$\zeta_{0j} (\text{cm}^3)$	200	5,63	2,27	1,59	1,04	0,70	0,77		
47	$R_{0j} \cdot 10^4 (\text{cm})$	3	23	42	58	82	118	168	$0,102 \cdot 10^{-4}$	259,90
	$\zeta_{0j} (\text{cm}^3)$	255	2,73	0,76	0,50	0,31	0,25	0,35		
48	$R_{0j} \cdot 10^4 (\text{cm})$	3	23	42	59	83	116	167	$0,133 \cdot 10^{-4}$	307,33
	$\zeta_{0j} (\text{cm}^3)$	300	3,79	1,23	0,87	0,58	0,46	0,40		

Zu bemerken ist, daß das Gasvolumanteil α_0 , der Zuströmung für jeden Versuch auch nach der Aufteilung beibehalten ist.

Die nach der in vorangehenden Abschnitten besprochenen Theorie und Modifikation berechneten örtlichen Druckverteilungen und Gasvolumverhältnisse für den Modellpropeller 1283 sind in Abb.11 bis 16 aufgetragen, und zwar Abb.11, 12 und 13 für Propeller-radius $r/R_A = 0,7$ und Abb.14, 15 und 16 für $r/R_A = 0,8$. Bei der Einpassung von Stoß wird ein Wert $y/c = 0,0025$ gemäß Gl.(II.5.2) verwendet, dabei ist c die Profiltiefe des Propellerschnittes bei bezogenem Radius.

Der Vollständigkeit halber wird auch die Aufweitung des Radius der einzelnen Blasenkeime bei den Versuchen 56 und 39 in Abb.17

dargestellt, und zwar wurden der kleinste, der mittlere und der größte Keim gewählt.

Wie schon in Ziffer II.5. bei der Ermittlung des Radius von blasenartigem Referenzhohlraum kurz erwähnt, erkennt man aus Abb.17 deutlich, daß die kleinsten Blasen R_{01} schon nach kurzer Lauflänge im Bereich des Unterdruckgebietes fast den gleichen Absolutradius erreichen wie die 50 mal größeren R_{07} -Blasen. Danach hängt das Gasvolumenverhältnis $\alpha(x)$ fast nur von der Anzahl der Keime ab.

Die während der Versuche aufgenommenen Bilder zeigen, daß die Kavitationsschicht für alle Versuche dicht an der Vorderkante beginnt. Abgesehen von dem Ergebnis des Versuchs 31 beginnt die Kavitation nach der in Ziffer II.3. besprochenen Definition für Anfangsstelle der Schicht schon vor 0,5% Profiltiefe von der Vorderkante, oder umgerechnet etwa bei einem Abstand von 1 mm von der Vorderkante in vorliegenden Fällen; dies ist aber bei den Versuchen schwer festzustellen.

Ohne Festlegung einer bestimmten Grenze für α in dem Kavitationsgebiet ist die Stärke des Druckstosses am Ende des lokalen Überschallgebietes nicht nur proportional zu $\rho \tilde{u}^2$, sie hängt vielmehr mit $\tilde{\alpha}$ zusammen. Der Maximumwert des Drucks wird nach Gl.(II.5.1) um so größer, je kleiner der $\tilde{\alpha}$ -Wert ist. Da aber das Druckmaximum nur sehr kurzzeitig angenommen wird, hat es für den Zusammenfallvorgang eine relative geringe Bedeutung.

Die Stoßlage wurde nach dem Kriterium (II.5.3) /20/ festgelegt. Der Stoß tritt um so früher auf, je höher der inkompressible Druck über Dampfdruck ist.

Bedingt durch die dynamische Trägheit der Kavitationsblase ist die Ausdehnung der Kavitationsschicht stets größer als das Gebiet, in dem der Druck bei inkompressibler Strömung unter Dampfdruck liegt. Die Übereinstimmungen zwischen den theoretischen Aussagen und den Beobachtungen sind gut mit der Ausnahme von dem Versuch 31. Den Grund für diese allerdings nur relativ größere Abweichung führt man zu der ungenau extrapolierten Anzahl des kleinsten Keims zurück.

III.2. NACA 4412 und 66₁-012 Profile

Die Kavitationserscheinungen an den beiden Profilen wurden von Kermeen /27/ /28/ untersucht. Da wir uns in der vorliegenden Arbeit nur für die Teilkavitation interessieren, werden nur die Versuchsergebnisse für NACA 4412 Profil bei Anstellwinkel $\delta_0 = 8^\circ$ und für NACA 66₁-012 Profil bei $\delta_0 = 6^\circ$ in Betracht eingezogen.

Sowohl die inkompressible potentiale als auch die den Zähigkeitseffekt berücksichtigte Druckverteilungen wurde nach der Methode von Brockett /29/ berechnet, bei der letzteren wurde der experimentelle Auftriebsbeiwert im kavitationsfreien Zustand zur empirischen Modifikation eingeführt.

Schwierigkeit bei der Anwendung der Blasendynamik in diesen Beispielen ist das, daß wir das Keimspektrum nicht kennen. Für die Berechnung wurde aus folgenden Gründen eine einheitliche Keimgröße von $R_0 = 3 \cdot 10^{-4}$ cm mit der Anzahl $\gamma_0 = 180 \text{ cm}^{-3}$ gewählt.

Bei der ausgebildeten Kavitationsschicht hängt der $\alpha(x)$ -Verlauf fast nur von der gesamten Anzahl der aufgeweiteten Keime ab, dies haben wir schon besprochen. Zwar spielen die größeren Keime, die einen wesentlichen Beitrag zu dem Aufbau des Gasvolumenverhältnisses α_0 in der Zuströmung liefern, bei der Festlegung des Kavitationseinsatzpunktes eine wichtige Rolle, wollen wir jedoch auf die genaue Bestimmung des Einsatzpunktes nicht eingehen (Ziffer II.3.). Man wählt daher zum Rechenzweck nur eine einheitliche Keimgröße, und zwar mit $R_0 = 3 \cdot 10^{-4}$ cm, da bei den normalen Kavitationsversuchen solche kleinen Keime als stets vorhanden angenommen werden können.

Die Zahl $\gamma_0 = 180 \text{ cm}^{-3}$ wurde gewählt, weil nach einer Messung von Keller /2/ in entgastem Wasser und bei den Berechnungen in der vorangehenden Ziffer die gesamte Anzahl der Keime pro Volumeneinheit etwa 180 beträgt. Sicher liegt dabei eine gewisse Willkür, die man im Kauf nehmen muß.

Für NACA 4412 Profil wurde nur die unter der Berücksichtigung des Zähigkeitseffektes modifizierte Druckverteilung benutzt, während bei NACA 66₁-012 Profil zum Vergleichszweck beide Druck-

verteilungen gebraucht wurden. Die Abb.18 bis 23 zeigen die Rechenergebnisse. Die in Abbildungen bezeichneten experimentellen Endstellen der Kavitationsschicht wurden aus den angegebenen Bildchen in /27/ und /28/ von Kermeen mit linearer Interpolation ermittelt.

Für einige Fälle beträgt der maximale α -Wert unter 1, bevor der Zusammenfallvorgang beginnt. Mit der Ausnahme von NACA 4412 Profil liegen die berechneten Anfangsstellen der Kavitationsschicht vor etwa 1% Profiltiefe von der Vorderkante, die bei der Beobachtung auch schwer festzustellen sind. Nach den Angaben von Kermeen begann die Kavitation für alle Fälle von der Vorderkante an.

Der Unterschied zwischen der mit potentialer und der mit der den Zähigkeitseffekt berücksichtigten Druckverteilung berechneten Ergebnissen, wenn auch nicht sehr groß ist, ist nicht vernachlässigbar klein. Dies erkennt man aus dem Verlauf der α -Kurve, der Stoßlage sowie der Kavitationsausdehnung (Abb.20 bis 23).

Da zur Berechnung nur eine einzelne Keimgröße für alle betrachteten Fälle angenommen wurde, sind die Ausdehnungen der Kavitationsschicht nach der theoretischen Berechnung mit den Beobachtungen schwer zu vergleichen. Die Übereinstimmung kann jedoch als qualitativ gut angesehen werden.

III.3. Kugelförmiger Halbkörper von van der Meulen /30/

Vor kurzen wurden neue Versuchsergebnisse der Kavitation an Rotationskörpern veröffentlicht. Van der Meulen /30/ ist es gelungen, mit holografischer Methode sowohl den Kavitationseinsatz als auch die Ausdehnung der Kavitationsschicht genau zu bestimmen. Als letztes Beispiel ziehen wir den kugelförmigen Halbkörper in Betracht.

Die in /30/ angegebene, unter der Berücksichtigung des Wandeffektes berechnete Druckverteilung wurde benutzt.

Wie bei den NACA Profilen in der letzten Ziffer, kennt man leider die Keimverteilung bei den Versuchen wieder nicht, obwohl der

totale Gasgehalt gemessen wurde. Nach der Angabe von van der Meulen wurde in Kavitationstunnel ein Filter gebaut, und durch die Filterung können nur die Keimgröße unter $5 \mu\text{m}$ in die Teststrecke kommen. Daher wurde nur eine einzelne Keimgröße von $R_0 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$ gewählt, und die Anzahl der Keime wurde $\gamma_0 = 360 \text{ cm}^{-3}$ angenommen. Wieder wurde eine gewisse Willkür hierbei im Kauf genommen. Dann beträgt das Gasvolumenverhältnis in der Zuströmung nur $\alpha_0 = 0,12 \cdot 10^{-7}$.

Bei den Profilen wurde angenommen, daß der Zusammenfallvorgang von der Stoßlage beginnt. Sicher kann diese Annahme auch für den vorliegenden Rotationskörper gelten, aber Schwierigkeit ist es, daß eine befriedigende Theorie oder ein Rechenverfahren zur Stoßberechnung für Rotationskörper zur Zeit noch nicht bekannt. Bedenkt man, daß bei Profilen das durch den Stoß bedingte Druckmaximum sehr kurzzeitig angenommen wird und daher nur eine geringe Bedeutung für den Zusammenfallvorgang hat, so kann im vorliegenden Fall angenommen werden, daß der Zusammenfallvorgang an der Stelle beginnt, wo der inkompressible Druck den Dampfdruck übersteigt.

Die Abb. 24 bis 27 zeigen die Rechenergebnisse.

Man bemerkt, daß bei höheren Kavitationsbeiwerten (Fall 3) der maximale Wert des Gasvolumenverhältnisses nur etwa 0,06 beträgt; für solchen kleinen α -Wert können die Wechselwirkung und das Zusammenwachsen der Blasen vernachlässigt werden, dann gilt zu Beginn des Zusammenfalls noch der Erhaltungssatz der gesamten Anzahl der Blasenkeime, und man hat für diesen Fall $\lambda = 1$ in Gl. (II.5.17) einzusetzen, während für die anderen Fälle wieder $\lambda = 5,5$ anzunehmen ist.

Sowohl die experimentellen Anfangs- als auch die Endstellen der Kavitationsschicht sind in den Abbildungen bezeichnet. Nach der Definition in Ziffer II.3. beginnt die Kavitation für Fälle 1 und 2 früher als die Beobachtungen. Für die Ausdehnung stimmen die theoretischen Aussagen mit den Beobachtungen qualitativ überein.

IV. Zur Behandlung der Teilkavitation mit Methoden der Profiltheorie

Die Dicke der Kavitationsschicht ist das andere charakteristische Maß der Kavitationsausdehnung im Vergleich mit der Länge der Schicht, die wir in vorangehenden Abschnitten berechnet haben. Man kann auch die Dicke der Kavitationsschicht ebenfalls mit Hilfe der Blasendynamik berechnen, indem man entsprechende Rechnungen für größere Abstände von der Profilsaugseite durchführt. Man erhält dann erwartungsgemäß kleinere Kavitationsbereiche mit zunehmenden Abständen /18/. Bis zu einem Abstand von der Profilsaugseite wird keine Kavitation mehr erscheinen, dann ist dieser Abstand die Dicke der Kavitationsschicht.

Aber wegen Zeitaufwand werden solche Rechnungen in vorliegender Arbeit nicht durchgeführt, stattdessen wird man versuchen, mit Hilfe der Singularitätsverfahren der Profiltheorie das Teilkavitationsproblem auf dem Profil zu erfassen.

Hanaoka /31/ entwickelte eine linearisierte Theorie eines 2-dimensionalen Profils mit Kavitation in einer stationären Strömung nach der Singularitätsmethode. Er benutzte ein nicht abgeschlossenes Modell für die Kavitationsschicht, d.h. deren Dicke an Endstelle der Schicht ist von Null verschieden. Die durch Experiment ermittelte Länge der Kavitationsschicht wurde als Parameter eingeführt, um bessere, mit den experimentellen Ergebnissen vergleichbare hydrodynamische Charakteristiken gewinnen zu können. Es besteht einen relativ komplizierten Zusammenhang zwischen der Dicke an Endstelle, der Länge der Kavitationsschicht, dem Anstellwinkel und der Kavitationszahl. Ein sehr komplizierter Ausdruck für die Dicke der Kavitationsschicht wurde auch angegeben, aber kein numerisches Ergebnis dafür. In einer anderen Arbeit erweiterte Hanaoka seine Theorie für 3-dimensionalen teilkavitierten Tragflügel /32/; er hat die abgeleiteten simultanen Integralgleichungen mit graphischer Methode gelöst, aber die Dicke der Kavitationsschicht blieb nicht berechnet.

Ukon /33/ erweiterte die Theorie Hanaokas und berechnete die Druckverteilung und die Dicke der Kavitationsschicht von 3-dimen-

sionalen teilkavitierten elliptischen und rechteckigen Flügeln, beide sind von plankonvexem Querschnitt und mit runder Vorder- und Hinterkante, in stationärer Strömung bei relativ zu hohen Anstellwinkeln.

Als letzter Abschnitt der vorliegenden Arbeit wollen wir die Anwendbarkeit der von Hanaoka entwickelten Theorie auf die Ermittlung der Dicke der Kavitationsschicht und der Druckverteilung untersuchen. Einfachheit halber geben wir in nächster Ziffer den grundsätzlichen Gedankengang für 2-dimensionalen Profil wieder.

IV.1. Grundlage der Theorie

Es sei (Abb.28)

$\gamma_0(x)$: die geometrische Oberseite (Saugseite),

$\gamma_u(x)$: die geometrische Unterseite (Druckseite),

$\gamma_s(x)$: die geometrische Skelettlinie,

$\gamma_d(x)$: die geometrische Dickenlinie,

$\gamma_0^*(x)$: die Oberseite einschließlich der Kavitationsschicht,

$\gamma_s^*(x)$: die Skelettlinie einschließlich der Kavitationsschicht,

$\gamma_d^*(x)$: die Dickenlinie einschließlich der Kavitationsschicht

und

$2\eta(x)$: die Dicke der Kavitationsschicht,

dann haben wir

$$\gamma_0^*(x) = \gamma_0(x) + 2\eta(x)$$

$$\gamma_s^*(x) = \gamma_s(x) + \eta(x)$$

$$\gamma_d^*(x) = \gamma_d(x) + \eta(x)$$

Wir belegen wie üblich auf der Profilsehne kontinuierlich eine Wirbeldichte $\hat{\gamma}(x)$ und eine Quellen-Senkenverteilung $\hat{q}(x)$, dann gilt für das Profil ohne Kavitation die Strömungsrandbedingung /26/

$$(IV.1.1) \quad \frac{v_0}{u_0} - \frac{d\gamma_s(x)}{dx} = \frac{1}{2\pi u_0} \int_{-A}^A \frac{\hat{\gamma}(\xi)}{x-\xi} d\xi$$

Die Lösung $\hat{\gamma}(x)$ mit der Kutta-Abflußbedingung lautet

$$(IV.1.2) \quad \frac{\hat{\gamma}(x)}{2u_0} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{A-x}{A+x}} \int_{-A}^A \frac{\sqrt{A+\xi}}{\sqrt{A-\xi}} \left(\frac{d\gamma_s(\xi)}{d\xi} - \frac{v_0}{u_0} \right) \frac{d\xi}{x-\xi}$$

Wir haben den Druckbeiwert nach Bernoullischer Gleichung

$$(IV.1.3) \quad C_p(x) = \frac{p_0 - p(x)}{\frac{\rho}{2} u_0^2} = -1 - \left(\frac{v_0}{u_0}\right)^2 + \frac{1}{1 + y_d^2} \left(1 + \frac{u_{\hat{f}}}{u_0} + \frac{u_{\hat{r}}}{u_0}\right)^2,$$

dabei ist $\sqrt{1 + y_d^2}$ der Riegelfaktor und $u_{\hat{f}}$ bzw. $u_{\hat{r}}$ die durch $\hat{f}(x)$ bzw. $\hat{r}(x)$ auf der Profilsehne induzierte Geschwindigkeit in Sehnerichtung, und zwar

$$(IV.1.4) \quad u_{\hat{f}}(x) \Big|_{y=+0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \frac{\hat{f}(\xi)}{x-\xi} d\xi,$$

$$u_{\hat{r}}(x) \Big|_{y=+0} = \frac{1}{2} \hat{r}(x).$$

Der Einfluß der Kavitationsschicht wird durch eine zusätzliche Quellen-Senkenbelegung $\tilde{q}(x)$ und eine Wirbeldichte $\tilde{\gamma}(x)$ erfasst. Bezeichnet man mit C_A und C_E die Anfangs- und Endstelle des Kavitationsgebietes, dann ist $\tilde{q}(x)$ nur im Bereich $C_A \leq x \leq C_E$ von Null verschieden.

Das Geschwindigkeitspotential für den Profil mit Kavitation lautet

$$(IV.1.5) \quad \phi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \gamma(\xi) \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x-\xi} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A q(\xi) \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi,$$

dabei ist

$$\gamma(x) = \hat{\gamma}(x) + \tilde{\gamma}(x)$$

$$q(x) = \hat{q}(x) + \tilde{q}(x),$$

und nach der Profiltheorie gelten

$$\frac{dy_d^*(x)}{dx} = \frac{q(x)}{2u_0} \quad ; \quad \frac{d\eta(x)}{dx} = \frac{\tilde{\gamma}(x)}{2u_0},$$

und die induzierten Geschwindigkeiten sind

$$(IV.1.6) \quad u_{\pm}(x) = \lim_{y \rightarrow \pm 0} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \pm \frac{1}{2} \gamma(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \frac{q(\xi)}{x-\xi} d\xi,$$

$$(IV.1.7) \quad v_{\pm}(x) = \lim_{y \rightarrow \pm 0} \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \frac{\gamma(\xi)}{x-\xi} d\xi \pm \frac{1}{2} q(x)$$

Die kinematischen Randbedingungen

$$\frac{dy_0^+(x)}{dx} = \frac{v_0 + v_+}{u_0 + u_+} = \frac{v_0 + v_+}{u_0}$$

$$\frac{dy_0^-(x)}{dx} = \frac{v_0 + v_-}{u_0 + u_-} = \frac{v_0 + v_-}{u_0}$$

führt auf

$$\frac{d(y_0^*(x) + \eta(x))}{dx} = \frac{v_+ + v_-}{u_0} + \frac{2v_0}{u_0}$$

oder, mit Gl.(IV.1.7),

$$(IV.1.8) \quad \frac{d(y_s(x) + \eta(x))}{dx} = -\frac{1}{2\pi u_0} \int_{-A}^A \frac{\gamma(\xi) d\xi}{x-\xi} + \frac{v_0}{u_0}$$

Also die "neue" Skelettlinie wird als Stromlinie für das Profil einschließlich der Kavitationsschicht angesehen.

Aus Gl.(IV.1.1) und (IV.1.8) folgt eine zusätzliche Strömungsrandbedingung, oder, ein Zusammenhang zwischen $\tilde{\varphi}(x)$ und $\tilde{\gamma}(x)$.

$$(IV.1.9) \quad \frac{d\eta(x)}{dx} = \frac{\tilde{\varphi}(x)}{2u_0} = -\frac{1}{2\pi u_0} \int_{-A}^A \frac{\tilde{\gamma}(\xi)}{x-\xi} d\xi$$

Da auf der Oberseite des Profils im Kavitationsgebiet der Dampfdruck herrscht, haben wir

$$p_+ = p_d \quad ; \quad C_A \leq x \leq C_E$$

oder entsprechend zu (IV.1.3)

$$(IV.1.10) \quad \begin{aligned} \sigma_v &= \frac{p_0 - p_d}{\frac{1}{2} \rho u_0^2} = \frac{1}{1 + \gamma_d^2} \left(1 + \frac{u_v}{u_0} + \frac{u_d}{u_0} \right)^2 - 1 - \left(\frac{v_0}{u_0} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{1 + \gamma_d^2} \left(1 + \frac{u_v}{u_0} + \frac{u_d}{u_0} + \frac{u_{\tilde{\gamma}}}{u_0} + \frac{u_{\tilde{\xi}}}{u_0} \right)^2 - 1 - \left(\frac{v_0}{u_0} \right)^2, \end{aligned}$$

und unter Berücksichtigung von Gl.(IV.1.3) ergibt sich aus Gl. (IV.1.10)

$$\sqrt{1 + \gamma_d^2} \cdot (\sqrt{\sigma_v + 1 + \delta_0^2} - \sqrt{C_p + 1 + \delta_0^2}) = \frac{1}{2\pi u_0} \int_{C_A}^{C_E} \frac{\tilde{\varphi}(\xi)}{x-\xi} d\xi + \frac{\tilde{\gamma}(x)}{2u_0}$$

mit $\delta_0 = \frac{v_0}{u_0}$ und im Bereich $C_A \leq x \leq C_E$. Im Rahmen der linearisierten Theorie geht diese Gleichung über in die Relation

$$(IV.1.11) \quad \sigma_v - C_p = \frac{1}{\pi u_0} \int_{C_A}^{C_E} \frac{\tilde{\varphi}(\xi)}{x-\xi} d\xi + \frac{\tilde{\gamma}(x)}{u_0}$$

Aus den simultanen Gleichungen (IV.1.9) und (IV.1.11) sind $\tilde{\gamma}(x)$ und $\tilde{\varphi}(x)$ zu bestimmen.

Während man die Kavitationsschicht als einen Strömungskörper betrachtet und Ansätze für $\frac{d\eta(x)}{dx}$ in Gl.(IV.1.9) nach der üblichen

Tropfentheorie je nach den verschiedenen Annahmen über das Modell der Schicht machen kann, ist die physikalische Eigenschaft von $\tilde{\gamma}(x)$, der durch Kavitation bedingten Zusatzzirkulation, unbekannt. Man hat daher zwei Möglichkeiten mit verschiedenen Annahmen für $\tilde{\gamma}(x)$ zu untersuchen, die wir in nächsten zwei Ziffern besprechen wollen.

IV.2. Lösungen, wenn die durch Kavitation bedingte Zusatzzirkulation $\tilde{\gamma}(x)$ im ganzen Profilbereich definiert ist

Die Strömungsrandbedingung liefert für die Zusatzzirkulation $\tilde{\gamma}(x)$ die Relation

$$(IV.2.1) \quad -\tilde{\varphi}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\tilde{\gamma}(\xi)}{x-\xi} d\xi$$

im Bereich $C_A \leq x \leq C_E$ und

$$(IV.2.2) \quad 0 = \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\tilde{\gamma}(\xi)}{x-\xi} d\xi$$

im Bereich $-A \leq x < C_A$; $C_E < x \leq A$.

Den Bedingungen (IV.2.1)(IV.2.2) liegt die Überlegung zugrunde, daß die Wirbeldichte $\tilde{\gamma}(x)$ des Profils über die gesamte Tiefe durch die Ausbildung der im Bereich $C_A \leq x \leq C_E$ liegenden Kavitations-schicht beeinflußt wird und sich gegenüber dem von Kavitation freien Zustand verändert.

Die Lösung der Gln.(IV.2.1)(IV.2.2) lautet zusammengefaßt unter Berücksichtigung der auf jeden Fall zu erfüllenden Abflußbedingung $\tilde{\gamma}(+A) = 0$

$$(IV.2.3) \quad \tilde{\gamma}(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{A-x}{A+x}} \int_{-A}^A \frac{\tilde{\gamma}_*(\xi)}{x-\xi} \sqrt{\frac{A+\xi}{A-\xi}} d\xi.$$

Dabei ist zu beachten, daß die Lösung (IV.2.3) auf der Voraussetzung basiert, daß die aus zwei Zweigen bestehende Funktion

$$\tilde{\gamma}_*(x) = \begin{cases} \tilde{\gamma}(x) & \text{in } C_A \leq x \leq C_E \\ 0 & \text{in } -A \leq x < C_A, C_E < x \leq +A \end{cases}$$

im offenen Bereich $-A < x < A$ quadratisch integrabel ist. Unter dieser Voraussetzung darf die Lösung (IV.2.3) ersetzt werden durch

$$(IV.2.4) \quad \tilde{y}(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{A-x}{A+x}} \int_{C_A}^{C_E} \frac{\tilde{y}(\zeta)}{x-\zeta} \sqrt{\frac{A+\zeta}{A-\zeta}} d\zeta$$

Man kann dann die Lösung (IV.2.4) in die Druckbedingung (IV.1.11) auf der Saugseite einsetzen, die lautet nun

$$(IV.2.5) \quad \sigma_v - C_p(x) = \frac{1}{\pi u_0} \int_{C_A}^{C_E} \frac{\tilde{y}(\zeta)}{x-\zeta} \left(1 + \sqrt{\frac{A-x}{A+x}} \sqrt{\frac{A+\zeta}{A-\zeta}}\right) d\zeta.$$

Die Gl.(IV.2.5) ist die Integralgleichung für $\tilde{y}(x)$. Sie ist unter der Voraussetzung zu lösen, daß

- (I) $\tilde{y}(x)$ im geschlossenen Intervall $C_A \leq x \leq C_E$ quadratisch integrabel ist, wenn $C_A \neq -A$.
- (II) $\tilde{y}(x)$ im halbgeschlossenen Intervall $-A < x \leq C_E$ quadratisch integrabel ist, wenn $C_A = -A$.

Wir diskutieren nun die Lösungsverfahren von Hanaoka zunächst und betrachten einige Eigenschaften von $\tilde{y}(x)$ und $y(x)$.

(a) es sei $C_A = -A$

Wenn $C_A = -A$ ist, haben wir

$$(IV.2.6) \quad \tilde{y}(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{A-x}{A+x}} \int_{-A}^{C_E} \frac{\tilde{y}(\zeta)}{x-\zeta} \sqrt{\frac{A+\zeta}{A-\zeta}} d\zeta$$

und

$$(IV.2.7) \quad \sigma_v - C_p(x) = \frac{1}{\pi u_0} \int_{-A}^{C_E} \frac{\tilde{y}(\zeta)}{x-\zeta} \left(1 + \sqrt{\frac{A-x}{A+x}} \sqrt{\frac{A+\zeta}{A-\zeta}}\right) d\zeta.$$

Hanaoka verwendete die folgenden Substitutionen /31/

$$(IV.2.8a) \quad \frac{I}{2}(1+\theta) = \sqrt{\frac{A+x}{A-x}} \quad ; \quad I = \sqrt{\frac{A+C_E}{A-C_E}}$$

$$(IV.2.8b) \quad \frac{A-x}{A} = \frac{I/I^2}{(1+\theta)^2 + 4/I^2}$$

$$(IV.2.8c) \quad x = A \cdot \frac{I^2/4 \cdot (1+\theta)^2 - 1}{I^2/4 \cdot (1+\theta)^2 + 1}$$

entsprechend hat man

$$(IV.2.8d) \quad \xi = A \cdot \frac{I^2/4 \cdot (1+\theta)^2 - 1}{I^2/4 \cdot (1+\theta)^2 + 1}$$

$$(IV.2.8e) \quad d\xi = A \cdot \frac{I^2 (1+\theta)'}{(I^2/4 \cdot (1+\theta')^2 + 1)^2} d\theta'$$

Nach einer elementaren Zwischenrechnung erhält man (Gl.(IV.2.7))

$$(IV.2.9) \quad \sigma_v - C_p(\theta) = \frac{2}{\pi u_0} \int_{-1}^1 \frac{(1+\theta)^2 + \frac{4}{I^2}}{1+\theta} \cdot \frac{1+\theta'}{(1+\theta')^2 + \frac{4}{I^2}} \cdot \frac{\tilde{\xi}(\theta')}{\theta - \theta'} d\theta'$$

Wir definieren

$$(IV.2.10) \quad B(\theta) = \frac{1+\theta}{(1+\theta)^2 + \frac{4}{I^2}} \cdot (\sigma_v - C_p(\theta)),$$

$$(IV.2.11) \quad \Delta(\theta') = \frac{1+\theta'}{(1+\theta')^2 + \frac{4}{I^2}} \cdot \frac{2 \tilde{\xi}(\theta')}{u_0},$$

und haben

$$(IV.2.12) \quad B(\theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Delta(\theta')}{\theta - \theta'} d\theta'$$

Man erkennt unmittelbar aus Gl.(IV.2.11), daß bei $\theta = -1$, oder entsprechend bei $x = -A$,

$$(IV.2.13) \quad \Delta(-1) = 0$$

wird, wenn dort $\tilde{\xi}$ nicht stärker singulär ist als $(1+\theta)^{-1} \sim (A+x)^{-1/2}$.

Die Lösung der Gl.(IV.2.12) mit der Bedingung (IV.2.13) lautet dann

$$(IV.2.14) \quad \Delta(\theta) = -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1+\theta}{1-\theta}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\theta'}{1+\theta'}} \frac{B(\theta')}{\theta - \theta'} d\theta'$$

Da $B(\theta')$ im Bereich $-1 \leq \theta' \leq 1$ einen begrenzten Wert nimmt, mit den Substitutionen

$$(IV.2.15) \quad \begin{aligned} \theta &= -\cos \varphi \\ \theta' &= -\cos \varphi' \end{aligned}$$

läßt sich $B(\theta')$ im Bereich $-1 \leq \theta' \leq 1$ bzw. $0 \leq \varphi' \leq \pi$ in eine Fourier-cosinusreihe entwickeln. Das Integral in Gl.(IV.2.14)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\theta'}{1+\theta'}} \cdot \frac{B(\theta')}{\theta - \theta'} d\theta' = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{\frac{1+\cos \varphi'}{1-\cos \varphi'}} \cdot \frac{\sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos n\varphi'}{\cos \varphi' - \cos \varphi} \cdot \sin \varphi' d\varphi' = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{(1+\cos \varphi') \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos n\varphi'}{\cos \varphi' - \cos \varphi} d\varphi' \\ &= B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\sin n\varphi \cdot (1+\cos \varphi)}{\sin \varphi} = f(\varphi) \end{aligned}$$

hat also auch einen begrenzten Wert.

Wir haben nun

$$(IV.2.16) \quad \Delta(\varphi) = -\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \cdot f(\varphi)$$

und es verhält sich bei $C_A = -A$

$$(IV.2.17) \quad \Delta(0) \sim \lim_{\varphi \rightarrow 0} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

Dann folgt mit (IV.2.11)

$$\Delta(\varphi) = \frac{2\tilde{\zeta}(\varphi)}{u_0} \cdot \frac{1 - \cos \varphi}{(1 - \cos \varphi)^2 + \frac{1}{4}^2}$$

eine Eigenschaft von $\tilde{\zeta}$ bei $C_A = -A$:

$$(IV.2.18) \quad \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\tilde{\zeta}(\varphi)}{u_0} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{[(1 - \cos \varphi)^2 + \frac{1}{4}^2]}{1 - \cos \varphi} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \cdot f(\varphi) \sim \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 - \cos \varphi} \sim$$

$$\sim \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{1}{\varphi} \sim \lim_{\theta \rightarrow -1} \frac{1}{\sqrt{2(1+\theta)}} \sim \lim_{x \rightarrow -A} \frac{1}{\sqrt{A+x}}$$

Also trotz der Forderung, daß

$$\Delta(\theta = -1) = \Delta(\varphi = 0) = 0$$

sein soll, ist

$$(IV.2.19) \quad |\tilde{\zeta}(\theta = -1)| = |\tilde{\zeta}(\varphi = 0)| = \infty$$

Diese Eigenschaft von $\tilde{\zeta}$ bei $x = -A$ für den Fall $C_A = -A$ ist ganz anders als die Forderung von Hanaoka; er verlangt, daß für die von der Vorderkante beginnende Kavitationsschicht auch

$$(IV.2.19a) \quad \tilde{\zeta}(x = -A) = \tilde{\zeta}(\theta = -1) = \tilde{\zeta}(\varphi = 0) = 0$$

sein soll.

Bedenkt man, daß durch die Kavitationsschicht der Krümmungsradius bei $C_A = -A$ vergrößert wird, so wird man die Eigenschaft von $\tilde{\zeta}$ (IV.2.19) für richtiger halten, und (IV.2.14) wird die gesuchte Lösung der Gl.(IV.2.12) sein. Aber wir haben aus Gln.(IV.2.11) und (IV.2.14)

$$(IV.2.20) \quad \tilde{\zeta}(\theta) = - \frac{u_0 [(1+\theta)^2 + \frac{1}{4}^2]}{2\pi \sqrt{(1+\theta)(1-\theta)}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\theta'}{1+\theta'}} \frac{B(\theta')}{\theta-\theta'} d\theta'$$

Also $\tilde{\zeta}(\theta)$ wird auch singulär bei $\theta = 1$, oder entsprechend bei $x = C_E$,

und zwar *)

$$(IV.2.21) \quad \lim_{x \rightarrow C_E} \tilde{f}(x) \sim \lim_{x \rightarrow C_E} \frac{1}{\sqrt{C_E - x}}$$

Das bedeutet, daß die zur Lösung der Gln. (IV.2.1) und (IV.2.2) erforderliche Voraussetzung (II) für $\tilde{f}(x)$ im halbgeschlossenen Intervall $-A < x \leq C_E$ für den Fall $C_A = -A$ nicht erfüllt ist, und die Gl. (IV.2.5) ist nicht zu lösen. Dies lässt sich erkennen, wenn man $\tilde{f}(x)$ in der Umgebung von $x = C_E$ betrachtet. Aus Gl. (IV.2.4) haben wir mit $\delta > 0$

$$(IV.2.22) \quad \tilde{f}(C_E) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{A-C_E}{A+C_E}} \int_{-A}^{C_E-\delta} \frac{\tilde{f}(\xi)}{C_E-\xi} \sqrt{\frac{A+\xi}{A-\xi}} d\xi + II$$

dabei ist unter Berücksichtigung der Eigenschaft von \tilde{f} dicht an C_E (IV.2.21)

$$II = \lim_{x \rightarrow C_E} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{A-x}{A+x}} \int_{C_E-\delta}^{C_E} \frac{Const. \sqrt{\frac{A+\xi}{A-\xi}}}{\sqrt{C_E-\xi}} \cdot \frac{d\xi}{x-\xi} =$$

$$= Const. \cdot \lim_{x \rightarrow C_E} \int_{C_E-\delta}^{C_E} \frac{1}{\sqrt{C_E-\xi}} \frac{d\xi}{x-\xi}$$

Mit der Substitution

$$u = \sqrt{C_E - \xi}$$

erhält man

$$II = Const. \cdot \lim_{x \rightarrow C_E} \int_{\sqrt{\delta}}^0 \frac{-2 du}{u^2 + x - C_E} =$$

(IV.2.23)

$$= \begin{cases} Const. \cdot \lim_{x \rightarrow C_E} \left[\frac{-2}{\sqrt{x-C_E}} \cdot \operatorname{tg}^{-1} \frac{u}{\sqrt{x-C_E}} \right]_{\sqrt{\delta}}^0, & x > C_E \\ Const. \cdot \lim_{x \rightarrow C_E} \left[\frac{1}{\sqrt{C_E-x}} \cdot \ln \frac{u + \sqrt{C_E-x}}{u - \sqrt{C_E-x}} \right]_{\sqrt{\delta}}^0, & x < C_E. \end{cases}$$

Für $x < C_E$ haben wir durch den Grenzübergang $x \rightarrow C_E$

$$(IV.2.24a) \quad I_- = Const. \cdot \lim_{x \rightarrow C_E-} \left\{ \frac{-1}{\sqrt{C_E-x}} \ln \frac{\sqrt{\delta} + \sqrt{C_E-x}}{\sqrt{\delta} - \sqrt{C_E-x}} \right\}$$

$$= -Const. \cdot \lim_{x \rightarrow C_E-} \left\{ \frac{\frac{d}{dx} \ln \frac{\sqrt{\delta} + \sqrt{C_E-x}}{\sqrt{\delta} - \sqrt{C_E-x}}}{\frac{d}{dx} \sqrt{C_E-x}} \right\} = \frac{-2 \cdot Const.}{\sqrt{\delta}},$$

und für $x > C_E$

$$I_+ = Const. \cdot \lim_{x \rightarrow C_E+} \left\{ \frac{2}{\sqrt{x-C_E}} \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{x-C_E}} \right\} = Const. \cdot \pi \cdot \lim_{x \rightarrow C_E+} \frac{1}{\sqrt{x-C_E}}$$

*) Mit (IV.2.8a) haben wir

$$1 - \theta = 2 \left(1 - \sqrt{\frac{A+x}{A-x}} \sqrt{\frac{A-C_E}{A+C_E}} \right) = \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{A+x}{A-x}} \sqrt{\frac{A-C_E}{A+C_E}}} \cdot \frac{2A(C_E-x)}{(A-x)(A+C_E)}$$

Also

$$\lim_{x \rightarrow C_E} \tilde{f}(x) = \lim_{\theta \rightarrow 1} \tilde{f}(\theta) \sim \lim_{\theta \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{1-\theta}} \sim \lim_{x \rightarrow C_E} \frac{1}{\sqrt{C_E-x}}$$

Diese Ergebnisse zeigen, daß die Lösung (IV.2.20) für $\tilde{\gamma}$ eine $\tilde{\gamma}$ -Verteilung liefert, die sich bei C_E so verhält wie

$$\begin{aligned} |\tilde{\gamma}(C_E)| & \text{ endlich} \\ |\tilde{\gamma}(C_{E+})| & \longrightarrow \infty \end{aligned}$$

Solche Eigenschaft einer Wirbeldichte würde physikalisch uninterpretierbar sein.

Aber wenn man davon absieht, erhält man mit Gl.(IV.2.20) nach einer weitschweifigen Zwischenrechnung unter der Anwendung der in /31/ von Hanaoka angegebenen Hilfsformeln die Dicke der Kavitationsschicht bei C_E für eine ebene Platte mit

$$\begin{aligned} C_p(x) - C_p(\theta) &= 2\delta_0 \sqrt{\frac{A-x}{A+x}} = \frac{4\delta_0}{I(1+\theta)} , \\ \frac{\eta_E}{A} &= \frac{1}{2u_0 A} \int_{-A}^{C_E} \tilde{\gamma}(x) dx = \\ \text{(IV.2.25)} \quad &= \frac{\sigma_v \cdot \pi \cdot (1 - \sqrt{1+I^2})}{4(1+I^2)} + \frac{\delta_0 \cdot \pi I (1 + \sqrt{1+I^2})}{2(1+I^2)} \end{aligned}$$

Man definiert t als "Öffnungsfaktor" der Kavitationsschicht bei C_E und schreibt den Ausdruck für die Schichtdicke bei C_E in folgender Form: /34/

$$\text{(IV.2.26)} \quad 2\eta_E = 2\delta_0 (C_E - C_A) \cdot t = 2\delta_0 (C_E + A) \cdot t ,$$

dann hat man mit

$$\frac{C_E + A}{2A} = \frac{I^2}{1+I^2}$$

nach einer Umformung:

$$\text{(IV.2.27)} \quad \frac{\sigma_v}{\delta_0} = \frac{2I(1+\sqrt{1+I^2})}{\sqrt{1+I^2}-1} - \frac{8I^2 \cdot t}{\pi(\sqrt{1+I^2}-1)} .$$

Abb.29 zeigt den Zusammenhang zwischen σ_v/δ_0 und der Länge der Kavitationsschicht nach Gl.(IV.2.27) für verschiedene angenommene t -Werte und das Ergebnis nach Hanaoka /31/.

Für $\frac{C_E + A}{2A} \geq 0,7$ hat Hanaoka eine von Null verschiedene Dicke eingeführt, um nach Gl.(IV.2.25) eine den experimentellen Ergebnissen angepasste Länge der Kavitationsschicht erlangen zu können (Abb.30), aber die physikalische Bedeutung solcher Dicke ist unklar.

Mit eben durchgeführter Untersuchung kann man feststellen, daß

die nach Hanaoka erhaltene Lösung nicht geeignet ist; auch wenn diese Lösung mit einigen nach Experimenten eingeführten Daten einen brauchbaren Zusammenhang zwischen σ_v/δ_0 und der Schichtlänge liefern könnte, ist das Verhalten der Zusatzzirkulation $\tilde{\gamma}(x)$ bei dem Endpunkt der Schicht schwer zu interpretieren, und mit solcher $\tilde{\gamma}(x)$ kann man keinen vernünftigen Druckbeiwert $C_p(x)$ bekommen, insbesondere an dem Endpunkt der Kavitationsschicht.

Wir betrachten nun die zweite mögliche Lösung der Gl.(IV.2.12). Jetzt wird verlangt, daß

$$(IV.2.28) \quad \Delta(\theta = +1) = 0$$

sein soll. Die Lösung der Gl.(IV.2.12) lautet dann

$$(IV.2.29) \quad \Delta(\theta) = -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-\theta}{1+\theta}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\theta'}{1-\theta'}} \frac{B(\theta')}{\theta'-\theta} d\theta'$$

und mit (IV.2.11)

$$(IV.2.30) \quad \tilde{\gamma}(\theta) = -\frac{u_0 [(1+\theta)^2 + 4/I^2] \sqrt{1-\theta}}{2\pi (1+\theta)^{3/2}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\theta'}{1-\theta'}} \frac{B(\theta')}{\theta'-\theta} d\theta'$$

Man bemerkt, daß

$$\tilde{\gamma}(\theta = +1) = 0$$

ist, während $\tilde{\gamma}(\theta)$ sich bei $\theta = -1$, entsprechend bei $x = -A$, stark singulär wie $(1+\theta)^{-1/2} \sim (A+x)^{-1/2}$ verhält. Dabei ist die Voraussetzung (II) erfüllt, obwohl diese Singularität noch zu interpretieren bleibt.

Die Dicke der Schicht bei C_E ist

$$(IV.2.31) \quad \frac{\eta_E}{A} = \frac{1}{2u_0 A} \int_{-A}^{C_E} \tilde{\gamma}(x) dx = \frac{1}{\pi I^{3/4}} \int_{-1}^1 \frac{1-\theta}{\sqrt{1-\theta^2} [(1+\theta)^2 + 4/I^2]} \frac{d\theta}{\theta'-\theta} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\theta'}{1-\theta'}} B(\theta') d\theta'$$

unter der Anwendung der Transformationen (IV.2.8) und (IV.2.30).

Mit Hilfe der von Hanaoka angegebenen Formeln wird

$$(IV.2.31a) \quad \frac{\eta_E}{A} = \frac{2I \{ I \sqrt{\sqrt{1+I^2} + 1} - \sqrt{1+I^2} - 1 \}}{I^2 \sqrt{2(1+I^2)}} \int_{-1}^1 \frac{1+\theta'}{(1+\theta')^2 + 4/I^2} \sqrt{\frac{1+\theta'}{1-\theta'}} B(\theta') d\theta' + \frac{4 \{ I \sqrt{\sqrt{1+I^2} - 1} + \sqrt{1+I^2} + 1 \}}{I^2 \sqrt{2(1+I^2)}} \int_{-1}^1 \frac{1}{(1+\theta')^2 + 4/I^2} \sqrt{\frac{1+\theta'}{1-\theta'}} B(\theta') d\theta'$$

Für eine ebene Platte mit Anstellwinkel δ_0 wird in Gl.(IV.2.10)

$$C_p(\theta) = 4 \delta_0 / I (1 + \theta)$$

und man erhält wieder mit den Hilfsformeln von Hanaoka nach einer weitschweifigen Zwischenrechnung

$$(IV.2.31b) \quad \frac{\eta_E}{A} = \frac{4\pi}{(\frac{4}{I^2})^2} \left\{ \sigma_r \frac{(2\sqrt{I^2+1}+1)(\sqrt{I^2+1}-1)}{I^4(1+I^2)} - \frac{\delta_0 \cdot 2(\sqrt{1+I^2}+1)}{I^3(1+I^2)} \right\}$$

Wenn $\eta_E = 0$ (Schließungsbedingung) angenommen wird, hat man

$$(IV.2.32) \quad \frac{\sigma_r}{\delta_0} = \frac{2 I (\sqrt{1+I^2} - 1)}{(2\sqrt{1+I^2} + 1)(\sqrt{1+I^2} - 1)}$$

Gl.(IV.2.32) liefert folgende Zahlbeispiele: ($C_A = -A$)

C_E/A	-0,5	0	0,5	1,0
$(C_E+A)/2A$	0,25	0,50	0,75	1,0
σ_r/δ_0	4,86	3,05	2,08	1,0

Diese Ergebnisse sind natürlich sehr unbefriedigend^e. Man bedenkt, daß die Schließungsbedingung allerdings nicht erforderlich ist, und benutzt wieder den in Gl.(IV.2.26) definierten "Öffnungsfaktor" t und erhält aus Gl.(IV.2.31b) nach einer Umformung

$$(IV.2.32a) \quad \frac{\sigma_r}{\delta_0} = \frac{2/\pi \cdot t I^2}{(2\sqrt{1+I^2}+1)(\sqrt{1+I^2}-1)} + \frac{2 I (\sqrt{1+I^2}+1)}{(2\sqrt{1+I^2}+1)(\sqrt{1+I^2}-1)}$$

Aus Gl.(IV.2.32a) hat man die folgenden Zahlbeispiele:

	C_E/A	-0,5	0	0,5	1,0
	$(C_E+A)/2A$	0,25	0,50	0,75	1,0
$t=0,25$	σ_r/δ_0	5,27	3,45	2,46	1,32
$t=0,50$	σ_r/δ_0	5,69	3,85	2,84	1,64
$t=0,75$	σ_r/δ_0	6,10	4,25	3,22	1,95
$t=1,0$	σ_r/δ_0	6,51	4,65	3,61	2,27

Diese Zahlbeispiele zeigen die schwache Abhängigkeit des σ_r/δ_0 - Verhältnisse von dem Modell der Kavitationsschicht und die Unbrauchbarkeit der Gl.(IV.2.30), und zurückgeführt ist die

Lösung (IV.2.29) ungeeignet.

Die dritte mögliche Lösung der Gl.(IV.2.12) mit den Forderungen

$$\Delta(\theta = -1) = 0$$

und

$$\Delta(\theta = +1) = 0$$

unter der Bedingung

$$(IV.2.33) \quad \int_{-1}^1 \frac{B(\theta)}{\sqrt{(1-\theta)(1+\theta)}} d\theta = 0$$

lautet

$$(IV.2.34) \quad \Delta(\theta) = - \frac{\sqrt{(1+\theta)(1-\theta)}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{B(\theta')}{\sqrt{(1+\theta')(1-\theta')}} \frac{d\theta'}{\theta - \theta'}$$

Mit Gl.(IV.2.11) haben wir

$$(IV.2.35) \quad \tilde{\zeta}(\theta) = - \frac{u_0 [(1+\theta)^2 + \frac{4}{I^2}] \sqrt{\frac{1-\theta}{1+\theta}}}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{B(\theta')}{\sqrt{(1+\theta')(1-\theta')}} \frac{d\theta'}{\theta - \theta'}$$

also

$$\tilde{\zeta}(\theta = -1) = 0$$

$$\tilde{\zeta}(\theta \rightarrow +1) = \tilde{\zeta}(x \rightarrow -A) \sim (A+x)^{-1/4}$$

und solche Eigenschaften von $\tilde{\zeta}(\theta)$ genügen auch der Voraussetzung (II).

Es fragt sich, welche physikalische Bedeutung die erforderliche Bedingung (IV.2.33) hat. Zunächst würde man erwarten, daß diese Bedingung einen Zusammenhang zwischen σ_r/δ_0 und der Schichtlänge liefern könnte. Mit der Definition von $\beta(\theta)$ (Gl.(IV.2.10)) haben wir für eine ebene Platte

$$(IV.2.36) \quad \int_{-1}^1 \frac{1+\theta}{(1+\theta)^2 + \frac{4}{I^2}} \cdot \frac{\sigma_r - \frac{4\delta_0}{I(1+\theta)}}{\sqrt{(1-\theta)(1+\theta)}} d\theta = 0$$

oder

$$(IV.2.37) \quad \sigma_r \int_{-1}^1 \frac{1+\theta}{\sqrt{1-\theta^2} [(1+\theta)^2 + \frac{4}{I^2}]} d\theta = \frac{4}{I} \delta_0 \int_{-1}^1 \frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2} [(1+\theta)^2 + \frac{4}{I^2}]}$$

Die in Gl.(IV.2.37) auftretenden Integral hat Hanaoka ermittelt, und zwar

$$\sigma_r \frac{\pi I}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{1+I^2}-1}{2(1+I^2)}} = \delta_0 \pi I \sqrt{\frac{\sqrt{1+I^2}+1}{2(1+I^2)}}$$

oder mit der Substitution (IV.2.8a)

$$(IV.2.38) \quad \frac{\sigma_v}{\delta_0} = 2 \sqrt{\frac{\sqrt{1+I^2} + 1}{\sqrt{1+I^2} - 1}} = 2 \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{1}{1-(C_E+A)/2A} + 1}}{\sqrt{\frac{1}{1-(C_E+A)/2A} - 1}}}$$

Die Dicke η_E der Kavitationsschicht bei C_E ergibt sich wieder aus dem Integral

$$\eta_E = \frac{1}{2u_0} \int_{-A}^{C_E} \tilde{\zeta}(x) dx$$

und man erhält mit Gl.(IV.2.35) und der Transformation (IV.2.8e) nach einer Zwischenrechnung für eine ebene Platte

$$\frac{\eta_E}{A} = \frac{\pi I (\sqrt{1+I^2} - 1)}{4(1+I^2)} \left\{ \frac{\sigma_v}{I} + 2\delta_0 \right\}$$

oder

$$(IV.2.38a) \quad \frac{\eta_E}{A\delta_0} = \frac{\pi I (\sqrt{1+I^2} - 1)}{4(1+I^2)} \left\{ \frac{\sigma_v}{I\delta_0} + 2 \right\}$$

Die mit Gl.(IV.2.38) für gegebenes σ_v/δ_0 -Verhältnis ermittelte Länge der Kavitationsschicht ist aber zu klein im Vergleich mit derjenigen, die von Hanaoka berechnet wurde. Abb.30 zeigt den Zusammenhang zwischen σ_v/δ_0 und der Länge der Kavitationsschicht sowie die Dicke bei C_E nach Gl.(IV.2.38) und (IV.2.38a); aufgetragen sind auch die Ergebnisse von Hanaoka.

Wir haben bisher angenommen, daß die Kavitationsschicht von der Vorderkante anfängt. Nun wollen wir den Fall $C_A \neq -A$ betrachten.

(b) es sei $C_A \neq -A$

In diesem Fall schreiben wir die Druckbedingung (IV.2.5) in folgender Form

$$(IV.2.39) \quad \sigma_v - C_p(x) = \frac{2}{\pi u_0} \int_{C_A}^{C_E} \tilde{\zeta}(\xi) \left[\frac{1}{x-\xi} + \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{(A-x)(A+\xi)}{(A+x)(A-\xi)}} - 1 \right) \frac{1}{x-\xi} \right] d\xi$$

oder

$$(IV.2.40) \quad F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{C_A}^{C_E} \frac{\tilde{\zeta}(\xi)}{u_0} \left[\frac{1}{x-\xi} + H(x, \xi) \right] d\xi,$$

dabei ist

$$(IV.2.41) \quad F(x) = \frac{1}{2} (\sigma_v - C_p(x)) ,$$

$$(IV.2.42) \quad H(x, \xi) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{(A-x)(A+\xi)}{(A+x)(A-\xi)}} - 1 \right) \frac{1}{x-\xi} .$$

Für $C_A \neq -A$ ist die Funktion $H(x, \xi)$ auch bei $x=\xi$ stetig, und zwar nach L'Hospitalscher Regel

$$H(\xi, \xi) = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{A-\xi} + \frac{1}{A+\xi} \right) .$$

Da die Funktionen (IV.2.41) (IV.2.42) im ganzen Integrationsbereich stetig sind, kann man die Lösungsmethode von Schmeidler /35/ anwenden. Man geht mit den Substitutionen

$$(IV.2.43) \quad \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} (C_E + C_A) - \frac{1}{2} (C_E - C_A) \cos \vartheta \\ \xi &= \frac{1}{2} (C_E + C_A) - \frac{1}{2} (C_E - C_A) \cos \tau \end{aligned}$$

zu trigonometrischen Formen über, multipliziert Gl.(IV.2.40) mit $\sin \vartheta$ und setzt zur Abkürzung

$$(IV.2.44) \quad \zeta(\tau) = \sin \tau \cdot \frac{\tilde{q}(\tau)}{u_0} .$$

Dann erhält man für Gl.(IV.2.40)

$$(IV.2.45) \quad \sin \vartheta \cdot F(\vartheta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \zeta(\tau) \left\{ \frac{\sin \vartheta}{\cos \tau - \cos \vartheta} + \frac{C_E - C_A}{2} \cdot \sin \vartheta \cdot H(\vartheta, \tau) \right\} d\tau .$$

Nun approximiert man

$$(IV.2.46) \quad \sin \vartheta \cdot F(\vartheta) = \sum_{\lambda=1}^{N-1} f_\lambda \sin \lambda \vartheta$$

$$(IV.2.47) \quad \frac{C_E - C_A}{2} \cdot \sin \vartheta \cdot H(\vartheta, \tau) = \sum_{\lambda=1}^{M-1} \sum_{\mu=0}^M b_{\lambda\mu} \sin \lambda \vartheta \cdot \cos \mu \tau$$

durch Fourier-Polynome im Bereich $0 \leq \vartheta, \tau \leq \pi$.

Dabei ist

$$(IV.2.48) \quad f_\lambda = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} (\sin \vartheta_j \cdot F(\vartheta_j)) \sin \lambda \vartheta_j ,$$

$$\left(\vartheta_j = \frac{j\pi}{N} ; \quad \lambda = 1, 2, \dots, N-1 \right)$$

und

$$(IV.2.49) \quad b_{\lambda\mu} = \frac{4}{M^2} \sum_{j=1}^{M-1} \sin \lambda \vartheta_j \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{M-1} \sin \vartheta_j \cdot H(\vartheta_j, \tau_k) \cos \mu \tau_k + \frac{\sin \vartheta_j}{2} [H(\vartheta_j, 0) + (-1)^\mu H(\vartheta_j, \pi)] \right\} \frac{c_E - c_A}{2}.$$

$$(\vartheta_j = j\pi/M; \tau_k = k\pi/M; \lambda, \mu = 1, 2, \dots, M-1).$$

Für $\mu=0$ und $\mu=M$ ist die Hälfte des sich aus (IV.2.49) ergebenden Wertes zu nehmen.

Nun geht die Integralgleichung (IV.2.45) in die Form

$$(IV.2.50) \quad \sum_{\lambda=1}^{N-1} f_\lambda \sin \lambda \vartheta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \zeta(\tau) \left\{ \frac{\sin \vartheta}{\cos \tau - \cos \vartheta} + \sum_{\lambda=1}^{M-1} \sum_{\mu=0}^M b_{\lambda\mu} \sin \lambda \vartheta \cdot \cos \mu \tau \right\} d\tau.$$

Für die Lösung wird der Ansatz

$$(IV.2.51) \quad \zeta(\tau) = \sum_{\mu=0}^M \zeta_\mu \cos \mu \tau$$

gemacht, und wir haben

$$(IV.2.52) \quad \sum_{\lambda=1}^{N-1} f_\lambda \sin \lambda \vartheta = \sum_{\mu=0}^M \zeta_\mu \sin \mu \vartheta + \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{M-1} \sum_{\mu=1}^M \zeta_\mu b_{\lambda\mu} \sin \lambda \vartheta + \sum_{\lambda=1}^{M-1} b_{\lambda 0} \zeta_0 \sin \lambda \vartheta.$$

Durch Koeffizientenvergleich in $\sin \lambda \vartheta$ erhalten wir das folgende Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten

$$(IV.2.53) \quad \zeta_\lambda + \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^M b_{\lambda\mu} \zeta_\mu = f_\lambda - \zeta_0 b_{\lambda 0}$$

Dabei sind alle gemäß unseren Ansätzen (IV.2.46)(IV.2.47) und (IV.2.51) nicht vorkommenden Größen gleich Null zu setzen.

Im Gleichungssystem (IV.2.53) bleibt der Koeffizient ζ_0 bei der Auflösung zunächst unbekannt. Er ist durch physikalische Bedingung festzulegen. Wenn man die Schließungsbedingung

$$\eta_E = \int_{c_A}^{c_E} \frac{d\eta}{dx} dx = \int_0^\pi \frac{\hat{\zeta}(\vartheta)}{2u_0} \cdot \frac{c_E - c_A}{2} \cdot \sin \vartheta d\vartheta = 0$$

verlangt, dann mit (IV.2.44) und (IV.2.51) hat man

$$\zeta_0 = 0$$

und das Gleichungssystem kann exakt gelöst werden. Um eine ausreichende Genauigkeit zu erhalten, werden die Größen $M = N = 12$ gesetzt.

Die Druckbedingung nimmt mit den Ansätzen nach einer Zwischenrechnung die Form

$$(IV.2.54) \quad \frac{1}{2}(\sigma_v - c_p) = \frac{1}{\sin \vartheta} \left\{ \sum_{\mu=1}^{M-1} \zeta_{\mu} \sin \mu \vartheta + \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{M-1} \sum_{\lambda=1}^{M-1} b_{\lambda \mu} \zeta_{\mu} \sin \lambda \vartheta \right\}.$$

Die Dicke der Kavitationsschicht ist

$$(IV.2.54) \quad \eta(x) - \eta(\vartheta) = \frac{C_E - C_A}{4} \sum_{\mu=1}^{M-1} \frac{\zeta_{\mu} \sin \mu \vartheta}{\mu}$$

und die zusätzliche Wirbelverteilung $\tilde{\gamma}(x)$ innerhalb der Kavitations-
schicht wird

$$(IV.2.56) \quad \frac{\tilde{\gamma}(x)}{2u_0} = \frac{\tilde{\gamma}(\vartheta)}{2u_0} = \frac{1}{2 \sin \vartheta} \left\{ \sum_{\mu=1}^{M-1} \zeta_{\mu} \sin \mu \vartheta + \sum_{\mu=1}^{M-1} \sum_{\lambda=1}^{M-1} b_{\lambda \mu} \zeta_{\mu} \sin \lambda \vartheta \right\}.$$

Die somit ermittelten Ergebnisse für die Dicke und den Druckbeiwert innerhalb der Kavitationsschicht scheinen zwar gut zu sein (Abb. 31 bis 33), aber es fragt sich, ob die Lösung (IV.2.4) für $\tilde{\gamma}(x)$ überhaupt auch in Bereichen $x < C_A$ und $x > C_E$ sinnvoll bleibt.

(Gl.(IV.2.56) ist gültig nur im Bereich $C_A \leq x \leq C_E$)

Mit

$$\xi = \frac{1}{2}(C_E + C_A) - \frac{1}{2}(C_E - C_A) \cos \tau$$

$$\frac{\tilde{\gamma}(\xi)}{u_0} = \frac{1}{\sin \tau} \sum_{\mu=1}^M \zeta_{\mu} \cos \mu \tau$$

und für die außerhalb der Kavitationsschicht liegenden Aufpunkte mit

$$x = \frac{1}{2}(C_E + C_A) - \frac{1}{2}(C_A - C_E) \cosh \tau^*, \quad \tau^* > 0; \quad x > C_E$$

$$x = \frac{1}{2}(C_E + C_A) + \frac{1}{2}(C_A - C_E) \cosh \tau^{**}, \quad \tau^{**} > 0; \quad x < C_A$$

hat man die Gl.(IV.2.4)

$$(IV.2.57) \quad \tilde{\gamma}(\tau^*) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2A - C_E - C_A - (C_E - C_A) \cosh \tau^*}{2A + C_E + C_A + (C_E - C_A) \cosh \tau^*}} \int_0^{\pi} \frac{\sum_{\mu=1}^M \zeta_{\mu} \cos \mu \tau}{\cos \tau + \cosh \tau^*} \cdot \sqrt{\frac{2A + C_E + C_A - (C_E - C_A) \cos \tau}{2A - C_E - C_A + (C_E - C_A) \cos \tau}} d\tau$$

Die im Integrand auf der rechten Seite stehende Wurzel lässt sich im Bereich $0 \leq \tau \leq \pi$ in eine Cosinusreihe entwickeln, und man hat das Integral wie folgendes auszuwerten:

$$(IV.2.58) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos \lambda \tau}{\cos \tau + \cosh \tau^*} d\tau = (-1)^{\lambda} \frac{e^{-\lambda \tau^*}}{\sinh \tau^*}; \quad \tau^* > 0.$$

Entsprechend wird die folgende Formel für $\tilde{\gamma}(\tau^{**})$

$$(IV.2.59) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos \lambda \tau}{\cos \tau - \cosh \tau^{**}} d\tau = - \frac{e^{-\lambda \tau^{**}}}{\sinh \tau^{**}}; \quad \tau^{**} > 0.$$

Also wird $|\tilde{\gamma}| \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow C_{A-}$ und $x \rightarrow C_{E+}$, wenn nicht eine ganz spezielle Koeffizientenkombination der ζ_{μ} als Lösung der Gl.

(IV.2.39) vorliegt. Dadurch wird geklärt, warum die Lösung eine

unrealistische $\tilde{\gamma}$ -Verteilung und Druckbeiwerte an den dicht bei beiden Endpunkten liegenden Aufpunkten liefert *)).

Eine andere physikalische mögliche Bedingung in diesem Fall ($C_A \neq -A$) ist es, daß

$$\frac{d\eta}{dx} \Big|_{x=C_A} = 0$$

sein soll, also ein glattes Zusammentreffen zwischen der Schicht und der geometrischen Oberseite des Profils bei $x=C_A$. Dann erhalten wir aus Gln.(IV.2.44)(IV.2.51)

$$(IV.2.60) \quad \zeta_0 = -\sum_{\mu=1}^M \zeta_{\mu}$$

Den Gln.(IV.2.54)(IV.2.55) und (IV.2.56) entsprechend haben wir

$$(IV.2.61) \quad \frac{1}{2}(\sigma_r - C_p) = \frac{1}{\sin \vartheta} \left\{ \sum_{\mu=1}^{M-1} \zeta_{\mu} \sin \mu \vartheta + \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{M-1} (2b_{\lambda 0} \zeta_0 + \sum_{\mu=1}^{M-1} b_{\lambda \mu} \zeta_{\mu}) \sin \lambda \vartheta \right\},$$

$$(IV.2.62) \quad \eta(x) - \eta(\vartheta) = \frac{C_B - C_A}{4} \sum_{\mu=1}^{M-1} \frac{\zeta_{\mu} \sin \mu \vartheta}{\mu} + \frac{C_E - C_A}{4} \zeta_0 \cdot \vartheta$$

$$(IV.2.63) \quad \frac{\tilde{\gamma}(x)}{2u_0} = \frac{\tilde{\gamma}(\vartheta)}{2u_0} = \frac{1}{2 \sin \vartheta} \left\{ \sum_{\lambda=1}^{M-1} [2b_{\lambda 0} \zeta_0 + \sum_{\mu=1}^{M-1} b_{\lambda \mu} \zeta_{\mu}] \sin \lambda \vartheta + \sum_{\mu=1}^{M-1} \zeta_{\mu} \sin \mu \vartheta \right\}.$$

Die Ergebnisse sind in Abb.34 bis 36 aufgetragen. Die negative Schichtdicke in der Nähe von C_E ist durch das singuläre Verhalten von $\tilde{\gamma}$ bedingt. In diesem Fall, also $\tilde{\gamma}(C_A)=0$, ist $\tilde{\gamma}$ bei C_E stärker singulär als in eben mit Schließungsbedingung behandeltem Fall, als ob die Singularität von $\tilde{\gamma}$ bei C_A schon auf C_E übertragen würde, und wegen dieser stärkeren Singularität bei C_E würde die Schichtrand in den Körper durchdringen.

*) In diesem Zusammenhang vergleiche man die Diskussion über $\tilde{\gamma}(x)$ in der Umgebung von $x=C_E$ auf Seiten 40/41.

IV.3. Lösungen, wenn die durch Kavitation bedingte Zusatzzirkulation $\tilde{\gamma}$ nur im Bereich der Kavitationsschicht definiert ist

Soweit haben wir angenommen, daß die Wirbeldichte des Profils im ganzen Profilbereich durch die Kavitationsschicht beeinflusst wird. Nun wollen wir die andere Möglichkeit mit der Annahme untersuchen, daß die Wirkung der zusätzlichen Wirbeldichte $\tilde{\gamma}$ auf die Zirkulationsverteilung am Profil nur im Bereich der Kavitationsschicht beschränkt wird. Unter dieser Annahme können die Bedingungen (IV.2.1) und (IV.2.2) ersetzt werden durch

$$(IV.3.1) \quad -\tilde{\gamma}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{C_A}^{C_E} \frac{\tilde{\gamma}(\xi)}{x-\xi} d\xi$$

im Bereich $C_A \leq x \leq C_E$, und

$$(IV.3.2) \quad \tilde{\gamma}(x) = 0$$

außerhalb des Kavitationsbereiches.

(a) es sei $C_A = -A$

Wenn $C_A = -A$ ist, wird man fordern, daß

$$(IV.3.3) \quad \tilde{\gamma}(C_E) = 0$$

sein soll. Dann lautet die Lösung der Gl. (IV.3.1)

$$(IV.3.4) \quad \tilde{\gamma}(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{C_E-x}{A+x}} \int_{-A}^{C_E} \frac{\tilde{\gamma}(\xi)}{x-\xi} \sqrt{\frac{A+\xi}{C_E-\xi}} d\xi,$$

und man hat die folgende Druckbedingung

$$(IV.3.5) \quad \sigma_v - C_p(x) = \frac{1}{\pi u_0} \int_{-A}^{C_E} \frac{\tilde{\gamma}(\xi)}{x-\xi} \left(1 + \sqrt{\frac{C_E-x}{A+x}} \sqrt{\frac{A+\xi}{C_E-\xi}} \right) d\xi$$

Wir verwenden nun die Transformationen

$$(IV.3.6a) \quad \frac{1+\theta}{1-\theta} = \sqrt{\frac{A+x}{C_E-x}}$$

$$(IV.3.6b) \quad x = C_E - \frac{(C_E+A)(1-\theta)^2}{(1+\theta)^2 + (1-\theta)^2},$$

$$(IV.3.6c) \quad \xi = C_E - \frac{(C_E+A)(1-\theta')^2}{(1+\theta')^2 + (1-\theta')^2},$$

$$(IV.3.6d) \quad d\xi = (C_E + A) \frac{1 - \theta'^2}{(1 + \theta'^2)^2} d\theta'$$

und erhalten nach einer Zwischenrechnung

$$(IV.3.7) \quad \sigma_v - C_p(\theta) = \frac{2}{\pi u_0} \int_{-1}^1 \frac{(1-\theta)^2 + (1+\theta)^2}{1+\theta} \cdot \frac{1+\theta'}{(1-\theta')^2 + (1+\theta')^2} \cdot \frac{\tilde{q}(\theta') d\theta'}{\theta - \theta'}$$

Nun definieren wir

$$(IV.3.8) \quad B(\theta) = (\sigma_v - C_p(\theta)) \frac{1+\theta}{(1-\theta)^2 + (1+\theta)^2}$$

$$(IV.3.9) \quad \Delta(\theta') = \frac{2 \tilde{q}(\theta')}{u_0} \cdot \frac{1+\theta'}{(1-\theta')^2 + (1+\theta')^2}$$

und haben

$$(IV.3.10) \quad B(\theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Delta(\theta')}{\theta - \theta'} d\theta'$$

Zusammengefaßt lautet die Lösung der Gl.(IV.3.10) unter verschiedenen Forderungen wie folgende:

$$1) \quad \Delta(-1) = 0$$

$$(IV.3.11) \quad \Delta(\theta) = -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1+\theta}{1-\theta}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\theta'}{1+\theta'}} \frac{B(\theta')}{\theta - \theta'} d\theta'$$

$$(IV.3.12) \quad \tilde{q}(\theta) = -\frac{u_0 [(1-\theta)^2 + (1+\theta)^2]}{2\pi \sqrt{(1+\theta)(1-\theta)}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\theta'}{1+\theta'}} \frac{B(\theta')}{\theta - \theta'} d\theta'$$

$$2) \quad \Delta(+1) = \Delta(-1) = 0$$

mit

$$(IV.3.13) \quad \int_{-1}^1 \frac{B(\theta)}{\sqrt{(1-\theta)(1+\theta)}} d\theta = 0,$$

$$(IV.3.14) \quad \Delta(\theta) = -\frac{\sqrt{(1-\theta)(1+\theta)}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{B(\theta')}{\sqrt{(1-\theta')(1+\theta')}} \frac{d\theta'}{\theta - \theta'}$$

$$(IV.3.15) \quad \tilde{q}(\theta) = -\frac{u_0 [(1-\theta)^2 + (1+\theta)^2]}{2\pi} \sqrt{\frac{1-\theta}{1+\theta}} \int_{-1}^1 \frac{B(\theta')}{\sqrt{(1-\theta')(1+\theta')}} \frac{d\theta'}{\theta - \theta'}$$

$$3) \quad \Delta(+1) = 0$$

$$(IV.3.16) \quad \Delta(\theta) = -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-\theta}{1+\theta}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\theta'}{1-\theta'}} \frac{B(\theta')}{\theta - \theta'} d\theta'$$

$$(IV.3.17) \quad \tilde{q}(\theta) = -\frac{u_0 [(1-\theta)^2 + (1+\theta)^2]}{2\pi} \frac{\sqrt{1-\theta}}{\sqrt{1+\theta^3}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\theta'}{1-\theta'}} \frac{B(\theta')}{\theta - \theta'} d\theta'$$

Die drei Lösungen sind möglich, denn die entsprechenden $\tilde{\zeta}(\theta)$ in Gl.n. (IV.3.12) (IV.3.15) und (IV.3.17) genügen der erforderlichen Voraussetzung, daß $\tilde{\zeta}(\theta)$ im offenen Intervall $-1 < \theta < 1$ ($-A < x < C_E$) quadratisch integrabel sein soll.

Mit Gl. (IV.3.12) haben wir die Dicke η_E bei $x=C_E$ der Kavitations-schicht

$$\begin{aligned} \eta_E &= \frac{1}{2u_0} \int_{-A}^{C_E} \tilde{\zeta}(x) dx = \frac{C_E+A}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{1-\theta^2}{1+\theta^2} \frac{1}{\theta'-\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\theta'}{1+\theta'}} B(\theta') d\theta' \\ &= \frac{C_E+A}{2\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\theta'}{1+\theta'}} B(\theta') \frac{1}{1+\theta'^2} \int_{-1}^1 \left[\frac{2(\theta+\theta')}{1+\theta^2} + \frac{1-\theta^2}{\theta'-\theta} \right] \frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}} d\theta' \\ &= \frac{C_E+A}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \frac{\theta'}{1+\theta'^2} \sqrt{\frac{1-\theta'}{1+\theta'}} B(\theta') d\theta' \end{aligned}$$

und mit Gl. (IV.3.8) wird

$$(IV.3.18) \quad \frac{\eta_E}{C_E+A} = \frac{\sigma_v}{2\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \frac{\theta' \sqrt{1-\theta'^2}}{(1+\theta'^2)^2} d\theta' - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \frac{\theta' \sqrt{1-\theta'^2}}{(1+\theta'^2)^2} C_p(\theta') d\theta'$$

Das erste Integral auf der rechten Seite der Gl. (IV.3.18) ist wegen des ungeraden Integrandes gleich Null, also η_E würde von σ_v , der Kavitationszahl, unabhängig sein. Dies ist natürlich ein unbrauchbares Ergebnis.

Demselben Rechenverfahren nach erhält man mit Gl. (IV.3.15)

$$(IV.3.19) \quad \frac{\eta_E}{C_E+A} = \frac{2-\sqrt{2}}{8} \pi \cdot \sigma_v - \int_{-1}^1 \left(\frac{1+\theta'}{\sqrt{2}(1+\theta'^2)} - \frac{1}{2} \right) \frac{1+\theta'}{2(1+\theta'^2)} \frac{C_p(\theta')}{\sqrt{1-\theta'^2}} d\theta'$$

und für eine ebene Platte

$$(IV.3.20) \quad \frac{\eta_E}{C_E+A} = \frac{2-\sqrt{2}}{8} \pi \cdot \sigma_v - \int_{-1}^1 \left(\frac{1+\theta'}{\sqrt{2}(1+\theta'^2)} - \frac{1}{2} \right) \frac{\delta_0}{1+\theta'^2} \cdot \frac{\sqrt{\frac{2A}{A+C_E}(1-\theta'^2) + \frac{A-C_E}{A+C_E}(1+\theta'^2)}}{\sqrt{1-\theta'^2}} d\theta'$$

Nach einer numerischen Integration liefert Gl. (IV.3.20) jedoch unsinnige Ergebnisse.

Es bleibt nun die dritte mögliche Lösung üblich. Mit

$$\sqrt{\frac{A^*+x^*}{A^*-x^*}} = \frac{1+\theta}{1-\theta} \quad ; \quad \sqrt{\frac{A^*+\xi^*}{A^*-\xi^*}} = \frac{1+\theta'}{1-\theta'}$$

und unter der Berücksichtigung der Definition (IV.3.8) für $B(\theta)$ wird die Gl. (IV.3.17)

$$\frac{\tilde{\varphi}(x^*)}{u_0} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{A^* - x^*}{A^* + x^*}} \int_{-A^*}^{A^*} \sqrt{\frac{A^* + \zeta^*}{A^* - \zeta^*}} (C_p(\zeta^*) - \sigma_r) \left(1 + \sqrt{\frac{A^* + \zeta^*}{A^* - \zeta^*}} \sqrt{\frac{A^* - x^*}{A^* + x^*}}\right) \frac{d\zeta^*}{x^* - \zeta^*}$$

Man macht nun Transformationen

$$x^* = -A^* \cos \vartheta$$

$$\zeta^* = -A^* \cos \tau$$

und erhält

$$\frac{\tilde{\varphi}(\vartheta)}{u_0} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\cotg \frac{\vartheta}{2}} \int_0^\pi \sqrt{\tan \frac{\tau}{2}} (C_p(\tau) - \sigma_r) \left(1 + \tan \frac{\tau}{2} \cotg \frac{\vartheta}{2}\right) \frac{\sin \tau}{\cos \tau - \cos \vartheta} d\tau$$

Die Dicke der Kavitationsschicht am Ende wird

$$\begin{aligned} 2\eta_E &= \int_{-A}^A \frac{\tilde{\varphi}(x)}{u_0} dx = \frac{C_E + A}{2} \int_{-A^*}^{A^*} \frac{\tilde{\varphi}(x^*)}{u_0 A^*} dx^* = \\ &= \frac{A + C_E}{2} \int_0^\pi \frac{\sqrt{\cotg \frac{\vartheta}{2}}}{4\pi} \left\{ \int_0^\pi \sqrt{\tan \frac{\tau}{2}} (C_p(\tau) - \sigma_r) \left(1 + \tan \frac{\tau}{2} \cotg \frac{\vartheta}{2}\right) \frac{\sin \tau d\tau}{\cos \tau - \cos \vartheta} \right\} \sin \vartheta d\vartheta \\ &= \frac{A + C_E}{8} \int_0^\pi \sqrt{\tan \frac{\tau}{2}} (C_p(\tau) - \sigma_r) \sin \tau \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{\cotg \frac{\vartheta}{2}} \left(1 + \tan \frac{\tau}{2} \cotg \frac{\vartheta}{2}\right) \frac{\sin \vartheta}{\cos \tau - \cos \vartheta} d\vartheta \right\} d\tau \end{aligned}$$

Mit den folgenden nach der Residuummethode ermittelten Formeln

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{\cotg \frac{\vartheta}{2}} \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta - \cos \tau} d\vartheta = \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1 + \sin \tau + \cos \tau}{\sqrt{\sin \tau + \sin^2 \tau}}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{\cotg \frac{\vartheta}{2}}^3 \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta - \cos \tau} d\vartheta = \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1 + \sin \tau + \cos \tau}{\sqrt{\sin \tau + \sin^2 \tau}} \right)^3$$

haben wir

$$\begin{aligned} \text{(IV.3.21)} \quad \frac{2\eta_E}{A + C_E} &= -\frac{\sqrt{2}}{8} \int_0^\pi \sqrt{\tan \frac{\tau}{2}} (C_p(\tau) - \sigma_r) \sin \tau d\tau - \\ &\quad - \frac{\sqrt{2}}{8} \int_0^\pi \sqrt{\tan \frac{\tau}{2}}^3 (C_p(\tau) - \sigma_r) \sin \tau d\tau + \\ &\quad + \frac{1}{8\sqrt{2}} \int_0^\pi \sqrt{\tan \frac{\tau}{2}} (C_p(\tau) - \sigma_r) \sin \tau \cdot \frac{1 + \sin \tau + \cos \tau}{\sqrt{\sin \tau + \sin^2 \tau}} d\tau - \\ &\quad - \frac{1}{16\sqrt{2}} \int_0^\pi \sqrt{\tan \frac{\tau}{2}}^3 (C_p(\tau) - \sigma_r) \sin \tau \cdot \left(\frac{1 + \sin \tau + \cos \tau}{\sqrt{\sin \tau + \sin^2 \tau}} \right)^3 d\tau \end{aligned}$$

Die Singularität des Integrandes von dem zweiten Integral auf der rechten Seite bei $\tau = \pi$ lässt sich wie folgend behandeln.

Mit $\tau = \pi - \chi$ ist

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \pi} \left[\sqrt{xg \frac{\tau}{2}}^3 \sin \tau \cdot (C_p(\tau) - \sigma_v) \right] &= (C_p(\pi) - \sigma_v) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\sqrt{cg \frac{x}{2}}^3 \cdot \sin x \right] \approx \\ &\approx (C_p(\pi) - \sigma_v) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2\sqrt{2}}{x^{3/2}} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{x^2}{12}\right) \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{6}\right) \right) \approx \\ &\approx (C_p(\pi) - \sigma_v) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x}} = (C_p(\pi) - \sigma_v) 2\sqrt{2} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \pi} \frac{1}{\sqrt{\pi - \tau}} \end{aligned}$$

also schreiben wir

$$\begin{aligned} \text{(IV.3.22)} \quad &\int_0^{\pi} \sqrt{xg \frac{\tau}{2}}^3 \sin \tau (C_p(\tau) - \sigma_v) d\tau = \\ &= \int_0^{\pi} \left\{ \sqrt{xg \frac{\tau}{2}}^3 \cdot \sin \tau (C_p(\tau) - \sigma_v) - \frac{2\sqrt{2} (C_p(\pi) - \sigma_v)}{\sqrt{\pi - \tau}} \right\} d\tau + 4\sqrt{2} (C_p(\pi) - \sigma_v) \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Der Integrand ist nun bei $\tau = \pi$ gleich Null zu setzen.

Als Beispiele wurden die experimentellen Ergebnisse von Kermeen /27//28/ entnommen, und zwar für Profil NACA 4412 bei Anstellwinkel $\delta_0 = 8^\circ$ und für NACA 66₁-012 bei $\delta_0 = 6^\circ$. (vgl. Ziffer III.2.)

Die Ergebnisse:

	δ_0	σ_v	C_{EA}	$\frac{2\sqrt{2}}{A}$
NACA 4412	8	1,2	0,2	0,60
	8	1,5	-0,36	0,21
NACA 66 ₁ -012	6	0,8	0,6	1,09
	6	1,0	0,12	0,64
	6	1,2	-0,32	0,44
	6	1,6	-0,72	0,21

Wenn man umgekehrt nach Nishiyama /34/ einen Öffnungsfaktor t für die Kavitationsschicht bei $x=C_E$ definiert, erhält man nach Gl.(IV.2.26) mit $t=1$ durch Interpolation die in Abb.37 gezeigten Ergebnisse.

(b) es sei $C_A \neq -A$

Unter der Annahme, daß $\tilde{f}(x)$ nur im Bereich $C_A \leq x \leq C_E$ definiert ist, hat man in diesem Fall zunächst

$$\text{(IV.3.23)} \quad \tilde{f}(C_A) = 0$$

zu setzen, da $\tilde{f}(C_A) \neq 0$ bedeutet eine plötzliche Änderung der gesamten

Wirbeldichte an der Anfangsstelle, das ist aber physikalisch unmöglich. In diesem Zusammenhang ist

$$(IV.3.24) \quad \frac{\tilde{\zeta}(x)}{2 u_0} \Big|_{x=C_A} = \frac{d\tilde{\eta}(x)}{dx} \Big|_{x=C_A} = 0,$$

also ein glattes Zusammentreffen zwischen Kavitationsschicht und der geometrischen Oberseite des Profils, eine erforderliche Bedingung für die Kavitationsschicht.

Mit (IV.3.23) lautet die Lösung der Gl.(IV.3.1)

$$(IV.3.25) \quad \tilde{\gamma}(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{x-C_A}{C_E-x}} \int_{C_A}^{C_E} \frac{\tilde{\zeta}(\xi)}{x-\xi} \sqrt{\frac{C_E-\xi}{\xi-C_A}} d\xi$$

und die Druckbedingung wird

$$(IV.3.26) \quad \sigma_v - c_p(x) = \frac{1}{\pi u_0} \int_{C_A}^{C_E} \frac{\tilde{\zeta}(\xi)}{x-\xi} \left(1 + \sqrt{\frac{x-C_A}{C_E-x}} \sqrt{\frac{C_E-\xi}{\xi-C_A}} \right) d\xi.$$

Analog zu (IV.3.6a) verwenden wir nun die Transformation

$$(IV.3.27a) \quad \frac{1+\theta}{1-\theta} = \sqrt{\frac{x-C_A}{C_E-x}}$$

Nach einer Zwischenrechnung haben wir

$$(IV.3.28) \quad \sigma_v - c_p(\theta) = \frac{2}{\pi u_0} \int_{-1}^1 \frac{(1-\theta)^2 + (1+\theta)^2}{1-\theta} \cdot \frac{1-\theta'}{(1-\theta')^2 + (1+\theta')^2} \cdot \frac{\tilde{\zeta}(\theta') d\theta'}{\theta - \theta'}$$

Nun setzen wir

$$(IV.3.29) \quad B(\theta) = (\sigma_v - c_p(\theta)) \frac{1-\theta}{(1-\theta)^2 + (1+\theta)^2},$$

$$(IV.3.30) \quad \Delta(\theta') = \frac{2 \tilde{\zeta}(\theta')}{u_0} \cdot \frac{1-\theta'}{(1-\theta')^2 + (1+\theta')^2},$$

und Gl.(IV.3.28) nimmt die Form

$$(IV.3.31) \quad B(\theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Delta(\theta')}{\theta - \theta'} d\theta'.$$

Da nach (IV.3.24) $\tilde{\zeta}(\theta' = -1) = 0$ ist, haben wir mit (IV.3.30) zunächst

$$(IV.3.32) \quad \Delta(-1) = 0$$

Die Lösung der Gl.(IV.3.31) lautet dann

$$(IV.3.33) \quad \Delta(\theta) = -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1+\theta}{1-\theta}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\theta'}{1+\theta'}} \cdot \frac{B(\theta')}{\theta-\theta'} d\theta'$$

und nach (IV.3.30) ist

$$(IV.3.34) \quad \tilde{\zeta}(\theta) = -\frac{u_0[(1-\theta)^2+(1+\theta)^2]}{2\pi} \frac{\sqrt{1+\theta}}{\sqrt{1-\theta}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\theta'}{1+\theta'}} \frac{B(\theta')}{\theta-\theta'} d\theta'$$

Die starke Singularität von $\tilde{\zeta}$ bei $\theta=1$, entsprechend bei $x=C_E$, ist physikalisch unerklärbar, wir schließen deshalb diese Lösung aus.

Wenn sich $\tilde{\zeta}(\theta)$ gegen $\theta=1$ verhält wie

$$\tilde{\zeta}(\theta) \sim (1-\theta)^\lambda$$

mit $0 \leq \lambda < 1$, dann haben wir nach (IV.3.30) auch

$$(IV.3.35) \quad \Delta(1) = 0.$$

Mit den Bedingungen (IV.3.32)(IV.3.35) hat die Gl.(IV.3.31) nur dann eine Lösung, wenn

$$(IV.3.36) \quad \int_{-1}^1 \frac{B(\theta')}{\sqrt{(1-\theta')(1+\theta')}} d\theta' = 0$$

ist, und die Lösung lautet

$$(IV.3.37) \quad \Delta(\theta) = -\frac{1}{\pi} \sqrt{(1-\theta)(1+\theta)} \int_{-1}^1 \frac{B(\theta')}{\sqrt{(1-\theta')(1+\theta')}} \frac{d\theta'}{\theta-\theta'}$$

und nach (IV.3.30) ist

$$(IV.3.38) \quad \tilde{\zeta}(\theta) = -\frac{u_0[(1-\theta)^2+(1+\theta)^2]}{2\pi} \frac{\sqrt{1+\theta}}{\sqrt{1-\theta}} \int_{-1}^1 \frac{B(\theta')}{\sqrt{(1-\theta')(1+\theta')}} \frac{d\theta'}{\theta-\theta'}$$

Den Lösungen (IV.3.34)(IV.3.38) liegt die Gl.(IV.3.25) für $\tilde{\gamma}(x)$ zugrund, und nach (IV.3.25) ist $\tilde{\gamma}(x)$ bei C_E singulär. Man bedenkt, daß durch solche $\tilde{\gamma}$ -Verteilung eine erhebliche Geschwindigkeit in der Umgebung von C_E induziert wird, infolgedessen wird die Strömungsrandbedingung, daß die Oberseite des Profils hinter der Kavitationsschicht als die Stromlinie bleiben soll, gefährdet. Man hat deshalb bei Anwendung der Lösung nachträglich zu überprüfen, ob die berechneten Belegungen $\tilde{\zeta}$ und $\tilde{\gamma}$ tatsächlich in

Bereichen $x < C_A$ und $x > C_E$ nicht zu einer Modifikation der Strömungsrandbedingung gegenüber dem von Kavitation freien Zustand führt, oder dieser Einfluß wenigstens vernachlässigbar klein bleibt.

Mit dieser Überlegung schließen wir die Lösung (IV.3.25) aus und suchen für $C_A \neq -A$ nach einer anderen bei $x=C_A$ und $x=C_E$ beschränkt bleibenden Lösung der Gl.(IV.3.1), d.h. wir verlangen

$$(IV.3.39) \quad \tilde{\gamma}(C_A) = \tilde{\gamma}(C_E) = 0$$

unter einer erforderlichen Bedingung

$$(IV.3.40) \quad \int_{C_A}^{C_E} \frac{\tilde{\gamma}(\xi)}{\sqrt{(C_E-\xi)(\xi-C_A)}} d\xi = 0.$$

Die Lösung lautet dann

$$(IV.3.41) \quad \tilde{\gamma}(x) = \frac{\sqrt{(C_E-x)(x-C_A)}}{\pi} \int_{C_A}^{C_E} \frac{\tilde{\gamma}(\xi)}{\sqrt{(\xi-C_A)(C_E-\xi)}} \frac{d\xi}{x-\xi},$$

und die linearisierte Druckbedingung wird

$$(IV.3.42) \quad \sigma_v - C_p(x) = \frac{1}{\pi u_0} \int_{C_A}^{C_E} \frac{\tilde{\gamma}(\xi)}{x-\xi} \left(1 + \frac{\sqrt{(C_E-x)(x-C_A)}}{\sqrt{(C_E-\xi)(\xi-C_A)}} \right) d\xi.$$

Mit der Transformation (IV.3.27a) haben wir endgültig die folgende Form

$$(IV.3.42a) \quad \sigma_v - C_p(\theta) = \frac{1}{\pi u_0} \int_{-1}^1 \frac{4(1+\theta\theta')}{(1-\theta')^2 + (1+\theta')^2} \cdot \frac{\tilde{\gamma}(\theta')}{\theta-\theta'} d\theta'$$

und die erforderliche Bedingung (IV.3.40) wird

$$(IV.3.40a) \quad 0 = \int_{-1}^1 \frac{4\tilde{\gamma}(\theta') d\theta'}{(1-\theta')^2 + (1+\theta')^2}$$

Wir multiplizieren Gl.(IV.3.40a) mit $-\theta\theta'/\pi u_0$ und fügen zu der Gl. (IV.2.42a) hinzu, um den im Integrand der Gl.(IV.3.42a) stehenden Term $\theta\theta'$ zu eliminieren, und erhalten

$$(IV.3.42b) \quad \sigma_v - C_p(\theta) = \frac{1}{\pi u_0} \int_{-1}^1 \frac{2\tilde{\gamma}(\theta')}{1+\theta'^2} \cdot \frac{1+\theta^2}{\theta-\theta'} d\theta'$$

Definieren wir nun

$$(IV.3.43) \quad B(\theta) = \frac{\sigma_r - c_p(\theta)}{1 + \theta^2}$$

$$(IV.3.44) \quad \Delta(\theta') = \frac{2\tilde{f}(\theta')}{u_0} \cdot \frac{1}{1 + \theta'^2}$$

dann haben wir wieder die Standardform

$$(IV.3.45) \quad B(\theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Delta(\theta')}{\theta - \theta'} d\theta'$$

Die Lösung der Gl.(IV.3.45) mit der Bedingung $\Delta(-1)=0$ lautet

$$(IV.4.46) \quad \Delta(\theta) = -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1+\theta}{1-\theta}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\theta'}{1+\theta'}} \frac{B(\theta')}{\theta - \theta'} d\theta'$$

und nach (IV.3.44) ist

$$(IV.3.47) \quad \tilde{f}(\theta) = -\frac{u_0(1+\theta^2)}{2\pi} \sqrt{\frac{1+\theta}{1-\theta}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\theta'}{1+\theta'}} \frac{B(\theta')}{\theta - \theta'} d\theta'$$

Denn das Integral auf der rechten Seite der Gl.(IV.3.47) bleibt beschränkt, ist $\tilde{f}(\theta)$ bei $\theta=1$, entsprechend bei $x=C_E$, singulär, und zwar

$$(IV.3.47a) \quad \lim_{x \rightarrow C_E} \tilde{f}(x) \sim \lim_{x \rightarrow C_E} \frac{1}{\sqrt{C_E - x}}$$

Wir prüfen jetzt nach, ob die so erhaltene Lösung (IV.3.47) tatsächlich die Bedingung (IV.3.39) erfüllt. Analog zu der Untersuchung auf der Seite 40 haben wir mit Gln.(IV.3.41) und (IV.3.47a) für $\tilde{f}(x)$ ($\delta > 0$)

$$(IV.3.48) \quad \tilde{f}(x) = \frac{\sqrt{(C_E - x)(x - C_A)}}{\pi} \int_{C_A}^{C_E - \delta} \frac{\tilde{f}(\xi)}{\sqrt{(\xi - C_A)(C_E - \xi)}} \cdot \frac{d\xi}{x - \xi} + \\ + \frac{\sqrt{(C_E - x)(x - C_A)}}{\pi} \frac{1}{\sqrt{C_E - C_A}} \int_{C_E - \delta}^{C_E} \frac{Const}{(C_E - \xi)^{3/2}} \cdot \frac{d\xi}{x - \xi}$$

Nach der Rechnung des zweiten Integrals erkennt man, daß sich $\tilde{f}(x)$ bei $x=C_E$ verhält wie

$$(IV.3.49) \quad \tilde{f}(C_E) \sim \lim_{x \rightarrow C_E} \frac{1}{\sqrt{C_E - x}}$$

d.h. die zweite Bedingung in (IV.3.39), $\tilde{f}(C_E)=0$, wird nicht erfüllt, und die Lösung existiert nicht.

Zusammenfassung

Es wurde zunächst kurz diskutiert, daß Keime in der Form von ungelösten, im Wasser enthaltenen Gasbläschen (Gas bedeutet Luft und Dampf) als Ausgangspunkt der Kavitation fungieren.

Der Einfluß der Zähigkeit sowie der Verdampfung und der Kondensation ist bei Wasser vernachlässigbar klein und wird nicht berücksichtigt. Die Massenveränderung der Luft in der Blase durch die Diffusion erfolgt nur sehr langsam im Verhältnis zu den für die Strömungskavitation verantwortlichen Druckänderungen, daher wurde die Luftmasse als konstant betrachtet.

Unter der Voraussetzung, daß die bekannte Theorie der Blasendynamik für die Verformung und Stabilität einer Einzelblase in einem kugelsymmetrischen, zeitabhängigen Druckfeld auch für die Reaktion der den Gasgehalt der Strömung charakterisierenden Blasen in dem nicht kugelsymmetrischen Druckfeld eines Strömungskörper verwendet werden darf, wurde der Umgebungsdruck der Blasen hinsichtlich der verminderten Zugfestigkeit des gashaltigen Wassers in einer Strömung mit dicht angeordneten Kavitationsblasen nach einer Überlegung gemäß der Blasendynamik mit einem Ansatz modifiziert, der mit dem örtlichen Gasvolumenverhältnis verknüpft ist. Die Rayleigh-Plesset-Gleichung mit diesem Ansatz wurde zur Berechnung des Aufweitungsvorgangs der Blasen benutzt, und als Anfangsstelle einer ausgebildeten Kavitationsschicht wurde definiert, wo der modifizierte Umgebungsdruck der Blasen den Dampfdruck erreicht.

Es wurde angenommen, daß der Zusammenfall der Kavitationsschicht von der gemäß den konventionellen Stoßrelationen bei einer ebenen stationären Strömung und durch die Forderung angepassten Stoßlage an beginnt, daß vor dem Stoß ungefähr Dampfdruck herrschen muß.

Die Gilmore-Gleichung wurde zur Berechnung des Zusammenfallvorgangs gebraucht.

Die auf der Voraussetzung einzelner Kavitationsblase beruhende Theorie verliert völlig ihre Berechtigung bei der Anwendung, wenn sich benachbarte Blasen berühren. Für größere werdende

örtliche Gasvolumverhältnisse berühren sich die Blasen nicht nur, sie wachsen sogar zusammen. Da eine physikalisch besser begründete Theorie für diese Dampfströmung mit feinverteilten Wassertröpfchen zur Zeit noch nicht bekannt ist, wurde davon ausgegangen, daß zu Beginn des Zusammenfalls die Kavitations-schicht durch einen blasenartigen Referenzhohlraum charakterisiert werden kann, um die Dynamik der kugelsymmetrischen Einzelblase auch bei der Berechnung des Zusammenfallvorgangs überhaupt zu verwenden.

Gemäß den Beobachtungen und theoretischen Untersuchungen ist die gedämpfte Wiederaufweitung beim Zusammenfall einer Blase stark vom Luft-Partialdruck zu Beginn des Zusammenfalls abhängig, daher wurde dieser Luft-Partialdruck nach dem Erhaltungssatz der Luftmasse genauer erfasst.

Als erstes Beispiel wurde der HSVA Modellpropeller 1283 ausgewählt. Die nach dem am Institut für Schiffbau der Universität Hamburg existierten Tragflächenprogramm berechnete Druckverteilung wurde durch eine Zusatzwirbelbelegung mit Hilfe der Profiltheorie ergänzt, um die Strömungsrandbedingung sicherzustellen. Mit den nach Laser-Streulichtverfahren gemessenen Keimspektren wurden die Berechnungen durchgeführt. Beim Vergleich der theoretischen Ergebnisse mit den Messungen zeigt sich gute Übereinstimmung.

Mit angenommenen Keimspektren für die anderen Beispiele, die NACA 4412 und 66₁-012 Profile sowie einen kugelförmigen Halbkörper, liefert die theoretische Berechnung auch qualitativ gute Ergebnisse im Vergleich mit den Beobachtungen.

Als zweiter Teil der vorliegenden Arbeit wurde systematisch untersucht, inwieweit das Teilkavitationsproblem mit Hilfe des Singularitätenverfahrens behandelt werden kann. Der Einfluß der Kavitationsschicht wurde durch eine zusätzliche Quellen-Senkenbelegung und eine Wirbeldichte erfasst. Für das aus den Strömungsrandbedingungen erhaltene Integralgleichungssystem wurden die Lösungsverfahren ausführlich diskutiert.

Unter der Annahme, daß die durch die Kavitationsschicht bedingte Zusatzzirkulation im ganzen Profilbereich definiert ist, hat es

sich gezeigt, daß die nach Hanaoka erhaltene Lösung nicht geeignet ist; auch wenn diese Lösung mit einigen nach Experimenten eingeführten Daten eine brauchbare, von der Kavitationszahl und dem Anstellwinkel abhängige Schichtlänge liefern könnte, ist die somit ermittelte Zusatzzirkulation bei den beiden Endpunkten der Kavitationsschicht singulär.

Nur unter den Annahmen, daß die durch Kavitation bedingte Zusatzzirkulation nur auf den Kavitationsbereich beschränkt bleibt, und daß die Kavitation von der Vorderkante des Profils beginnt, kann diese Methode eine sinnvolle Lösung liefern.

Literaturverzeichnis

- /1/ Knapp, R.T., Daily, J.W. and Hammit, F.G.:
Cavitation
Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1970
- /2/ Keller, A.:
Experimentelle und Theoretische Untersuchungen zum Problem
der Modellmässigen Behandlung von Strömungskavitation.
Bericht Nr. 26 (1973), Versuchsanstalt für Wasserbau der
Tech. Univ. München.
- /3/ van der Meulen, J.H.J.:
Cavitation on hemispherical nosed Teflon Bodies.
Intern. Shipbuilding Progress, Vol.19, No.218, 1972
- /4/ van der Meulen, J.H.J.:
Incipient and Desinent Cavitation on hemispherical nosed
Bodies.
Intern. Shipbuilding Progress, Vol.19, No.209, 1972
- /5/ Hsien, D.Y.:
Some Analytical Aspects of Bubble Dynamics.
Journ. of Basic Engineering, Vol.87, 1965
- /6/ Isay, W.H.:
Kavitation
Vorlesungsmanuscript Nr. 9 (1976), Inst. für Schiffbau der
Universität Hamburg
- /7/ Epstein, P.S. and Plesset, M.S.:
On the Stability of Gas Bubble in Liquid-Gas Solution.
Journ. Chem. Phys., 18 (1950)
- /8/ Shima, A. and Tsujino, T.:
The Dissolution and Growth of a Gas Bubble in Water.
Rep. Inst. of High Speed Mechanics, Tohoku Univ., Sendai,
Japan, 30 (1974)
- /9/ Plesset, M.S.:
Bubble Dynamics.
in Cavitation in Real Liquids ed. by Robert Devis,
Elsevier Publishing Company, Amsterdam, 1964

- /10/ Hickling, R. and Plesset, M.S.:
Collapse and Rebound of a Spherical Bubble in Water.
Physics of Fluids, 7 (1964)
- /11/ Gilmore, F.R.:
The Growth and Collapse of a Spherical Bubble in a
Viscous Compressible Liquid.
Calif. Inst. of Tech. Hydrodyn. Lab. Rep. 26-4 (1952)
- /12/ Holl, J.W. and Kornhauser, A.L.:
Thermodynamic Effect on Desinent Cavitation on Hemi-
spherical Nosed Bodies in Water at Temperatures from
80 Deg F to 260 Deg F.
Journ. of Basic Engineering, Vol.92, March 1970
- /13/ Keller, A. and Weitendorf, E.-A.:
Der Einfluss des ungelösten Gasgehaltes auf die
Kavitationserscheinungen an einem Propeller and auf die
von ihm erregten Druckschwankungen;
Teil A: Gasgehalts- und Druckschwankungsmessungen.
Bericht Nr. 321 A, Inst. für Schiffbau der Univ. Hamburg.
- /14/ Plesset, M.S.:
The Dynamics of Cavitation Bubbles.
Journ. of Applied Mechanics, 16 (1949)
- /15/ Knapp, R.T. and Hollander, A.:
Laboratory Investigations of the Mechanism of Cavitation.
Trans. ASME 70 (1948)
- /16/ Arakeri, V.H.:
Viscous Effects in Inception and Development of Cavitation
on Axisymmetric Bodies.
Calif. Inst. of Techn. Rep. E-183-1.
- /17/ Arakeri, V.H.:
Viscous Effects on the Position of Cavitation Separation
from Smooth Bodies.
Journ. Fluid Mechanics (1975), Vol.68, Part 4
- /18/ Lederer, L.:
Profilströmungen unter Berücksichtigung der Dynamik von
Kavitationsblasen.
Bericht Nr. 341 Inst. für Schiffbau der Univ. Hamburg (1976)

- /19/ Isay, W.H.:
Kompressible Strömungen (Ideale Gase, Wasser, Lufthaltiges Wasser)
Vorlesungsmanuscript Nr. 5, Inst. für Schiffbau der Univ.
Hamburg, Feb. 1973
- /20/ Isay, W.H. und Roestel, Th.:
Berechnung der Druckverteilung an Flügelprofilen in
gashaltiger Wasserströmung.
ZAMM 54 (1974)
- /21/ Lerbs, H.W.:
Moderately Loaded Propellers with a Finite Number of Blades
and an Arbitrary Distribution of Circulation.
Trans. SNAME, Vol.60 (1952)
- /22/ van Oossanen, P.:
Theoretical Prediction of Cavitation on Propellers.
Marine Technology, Vol.14, No.4 (1977)
- /23/ Isay, W.H.:
Moderne Probleme der Propellertheorie
Springer-Verlag, Berlin, 1970
- /24/ Bauschke, W. und Lederer, L.:
Zur numerischen Berechnung der Druckverteilung und der
Kräfte an Propellern im Schiffsnachstrom.
Bericht Nr. 309, Inst. für Schiffbau der Univ. Hamburg
Okt. 1974
- /25/ Voß, R.:
Modifizierte Form des FORTRAN-Programms zur Berechnung
der Druckverteilung an Propellerflügeln.
Schrift Nr. 2261, Inst. für Schiffbau der Univ. Hamburg,
Dez. 1976
- /26/ Isay, W.H.:
Inkompressible Strömungen (Tragflügeltheorie)
Vorlesungsmanuscript Nr. 1, Inst. für Schiffbau der Univ.
Hamburg, Juli 1972

- /27/ Kermeen, R.W.:
Water Tunnel Tests of NACA 4412 and Walchner Profile 7
Hydrofoils in Noncavitating and Cavitating Flows.
Calif. Inst. of Techn. Rep.No. 47-5 (1956)
- /28/ Kermeen, R.W.:
Water Tunnel Tests of NACA 66₁-012 Hydrofoil in
Noncavitating and Cavitating Flows.
Calif. Inst. of Techn. Rep.No. 47-7 (1956)
- /29/ Brockett, T.:
Steady Two-dimensional Pressure Distribution on
Arbitrary Profiles.
D.T.M.B. Rep.No. 1821, 1965
- /30/ van der Meulen, J.H.J.:
A Holographic Study of Cavitation on Axisymmetric Bodies
and the Influence of Polymer Additives.
Pub.No. 509, Netherlands Ship Model Basin, 1977
- /31/ Hanaoka, T.:
Linearized Theory of Cavity Flow about a Hydrofoil of
Arbitrary Shape.
Selected Papers from the Journ. of Soc. Naval Arch. Japan
1969
- /32/ Hanaoka, T.:
Three-dimensional Theory of Partially Cavitated Hydrofoils
(Part I, Lifting-Line Theory about a Wing and a Screw
Propeller)
Journ. Soc. Naval Arch. Japan, Vol.123, 1968
- /33/ Ukon, Y.:
Pressure Distribution and Cavitation on Three-dimensional
Steady Wings.
Journ. Soc. Naval Arch. Japan, Vol.128, 1975
- /34/ Nishiyama, T. and Ota, T.:
Linearized Potential Flow Models for Hydrofoils in
Supercavitating Flows.
Journ. Basic Engineering, Vol.93, Dec. 1971
- /35/ Schmeidler, W.:
Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik
Leipzig 1950, Akademische Verlagsgesellschaft

Abb. 1

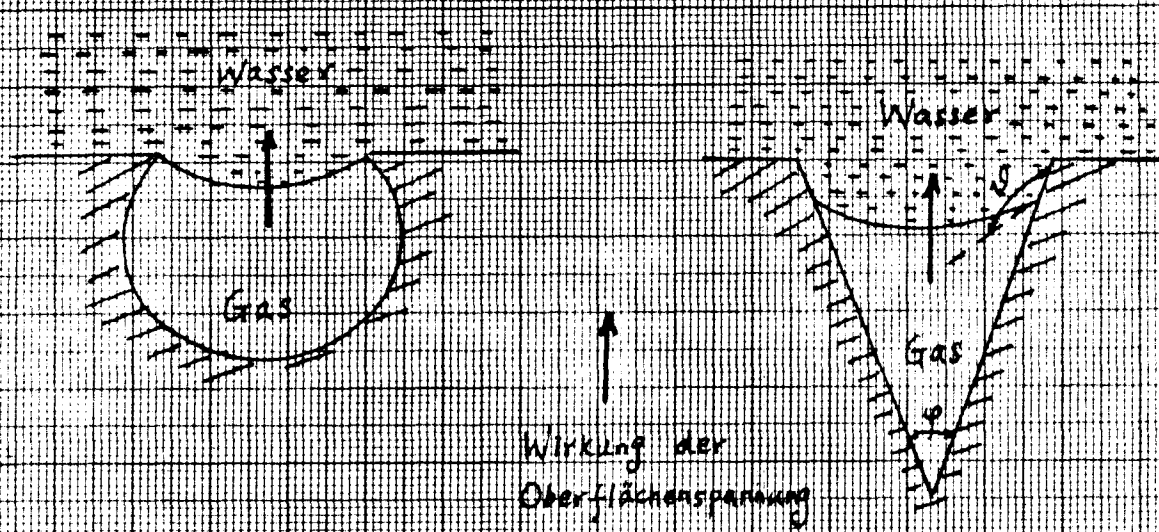
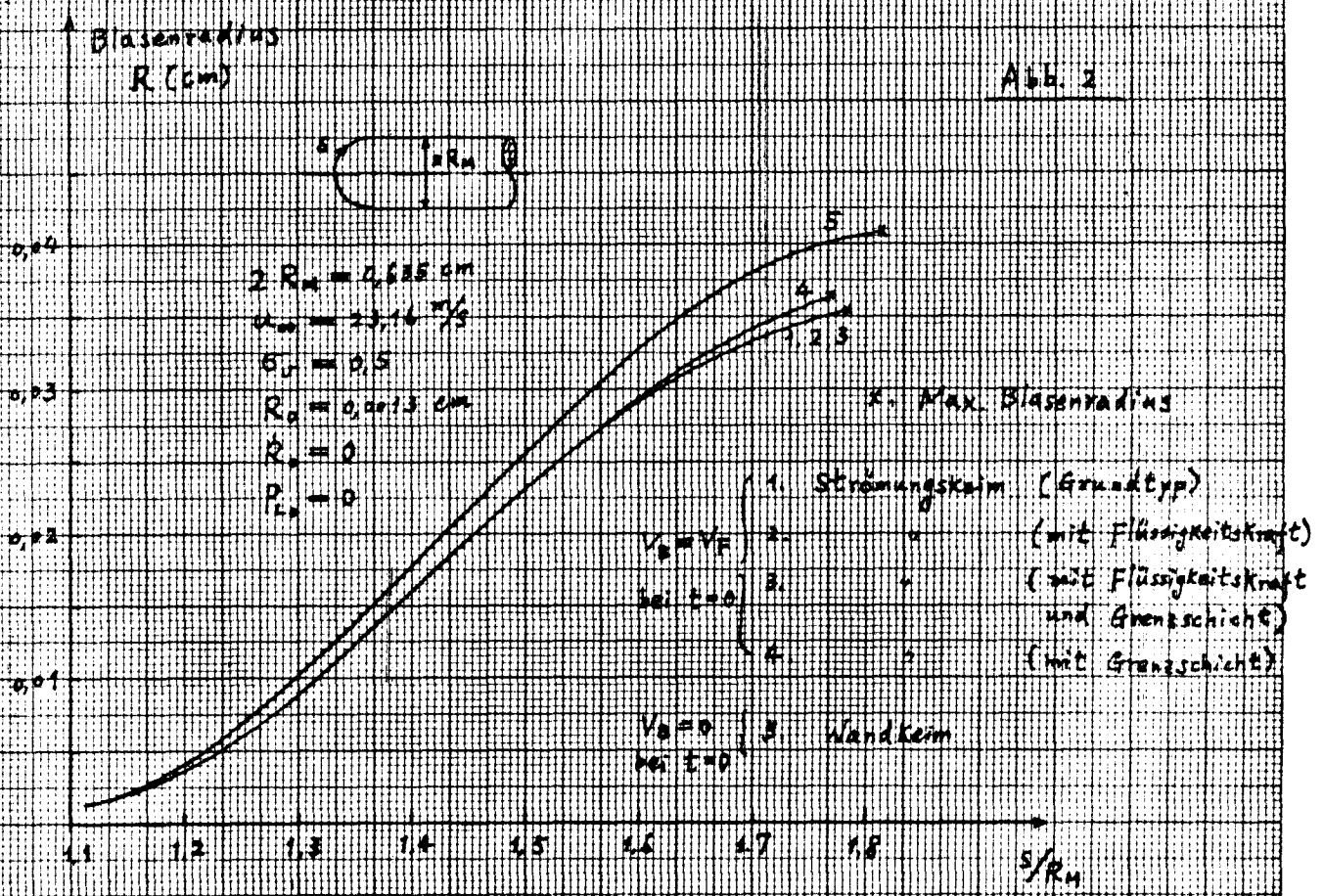
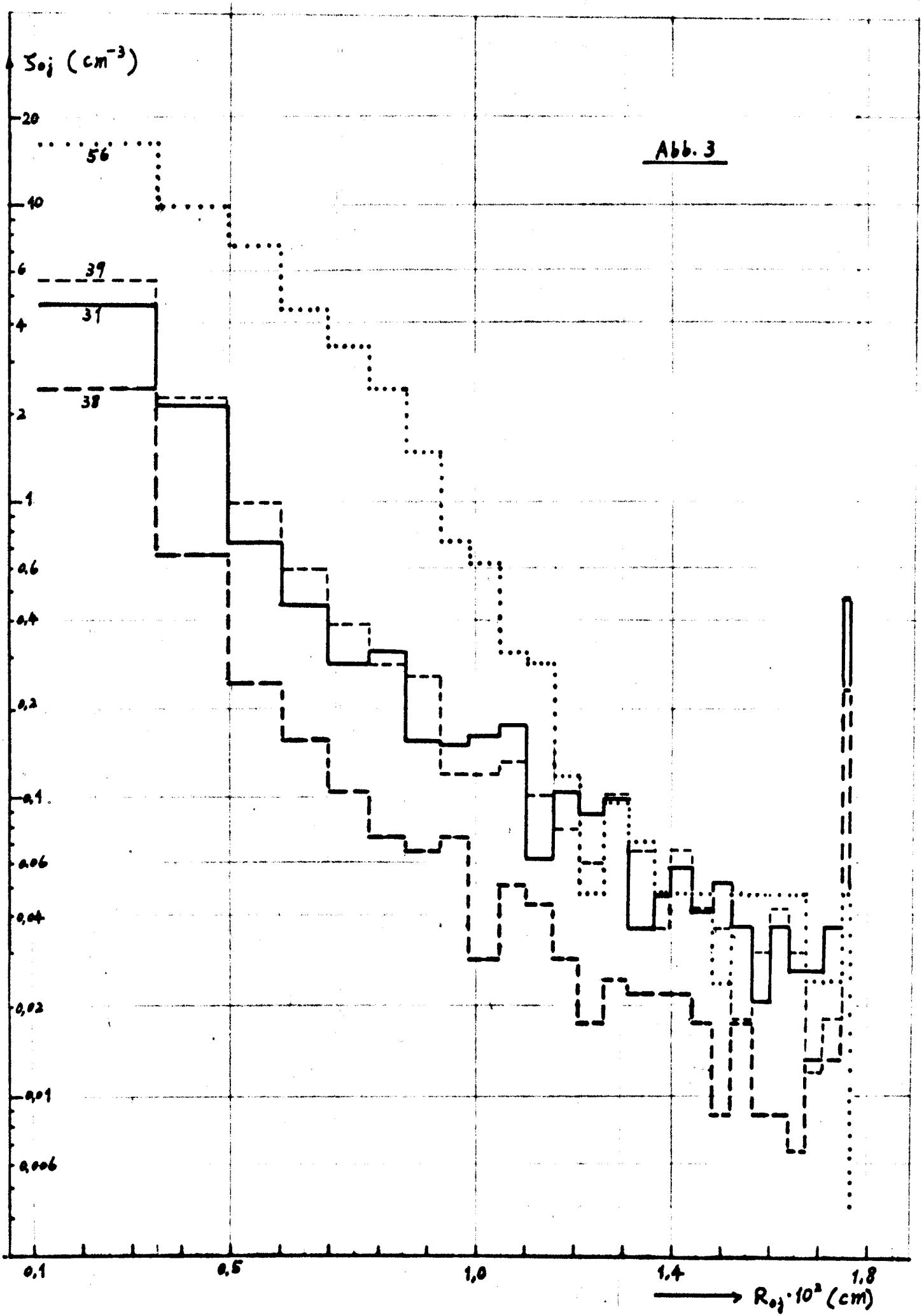


Abb. 2



Bemerkung = v_0 : Geschwindigkeit der Blase längs der Mäkeloberfläche
 v_F : Geschwindigkeit der Flüssigkeit
 Flüssigkeitskraft = Widerstandskraft + Kraft bedingt durch Druckgradient



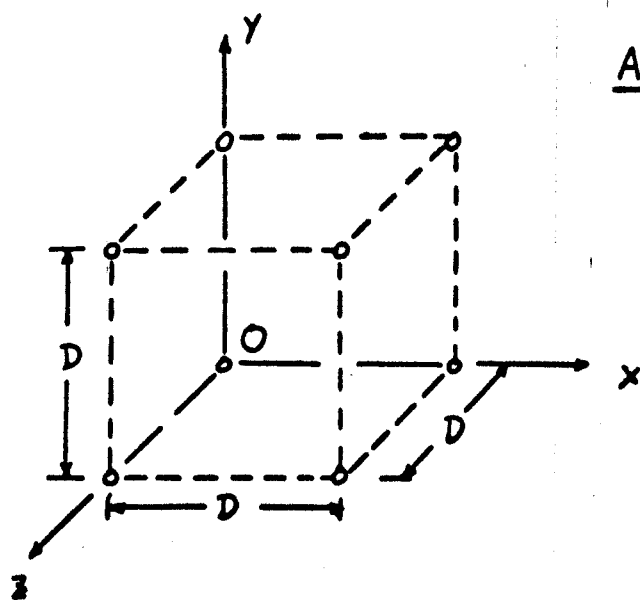
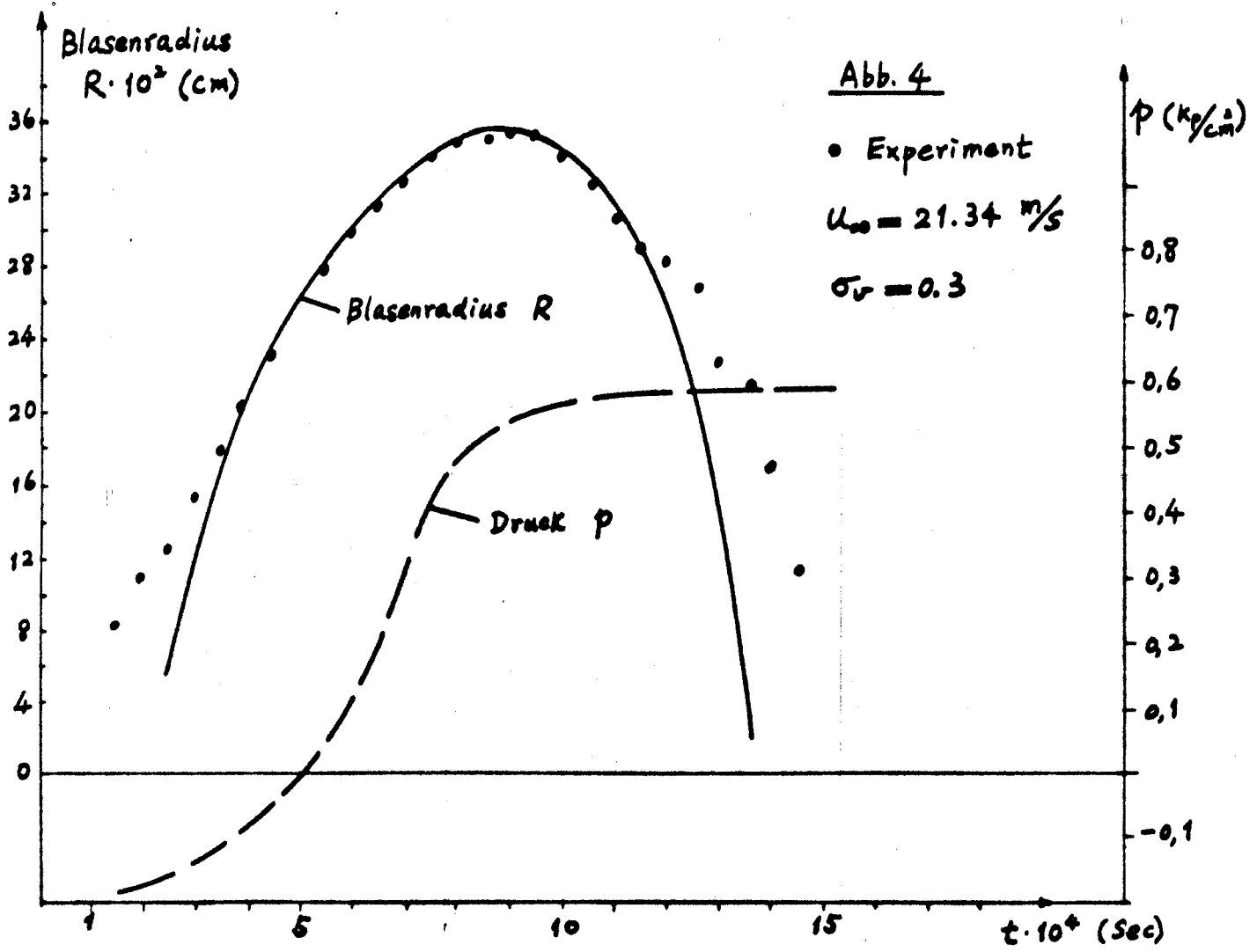




Abb. 6

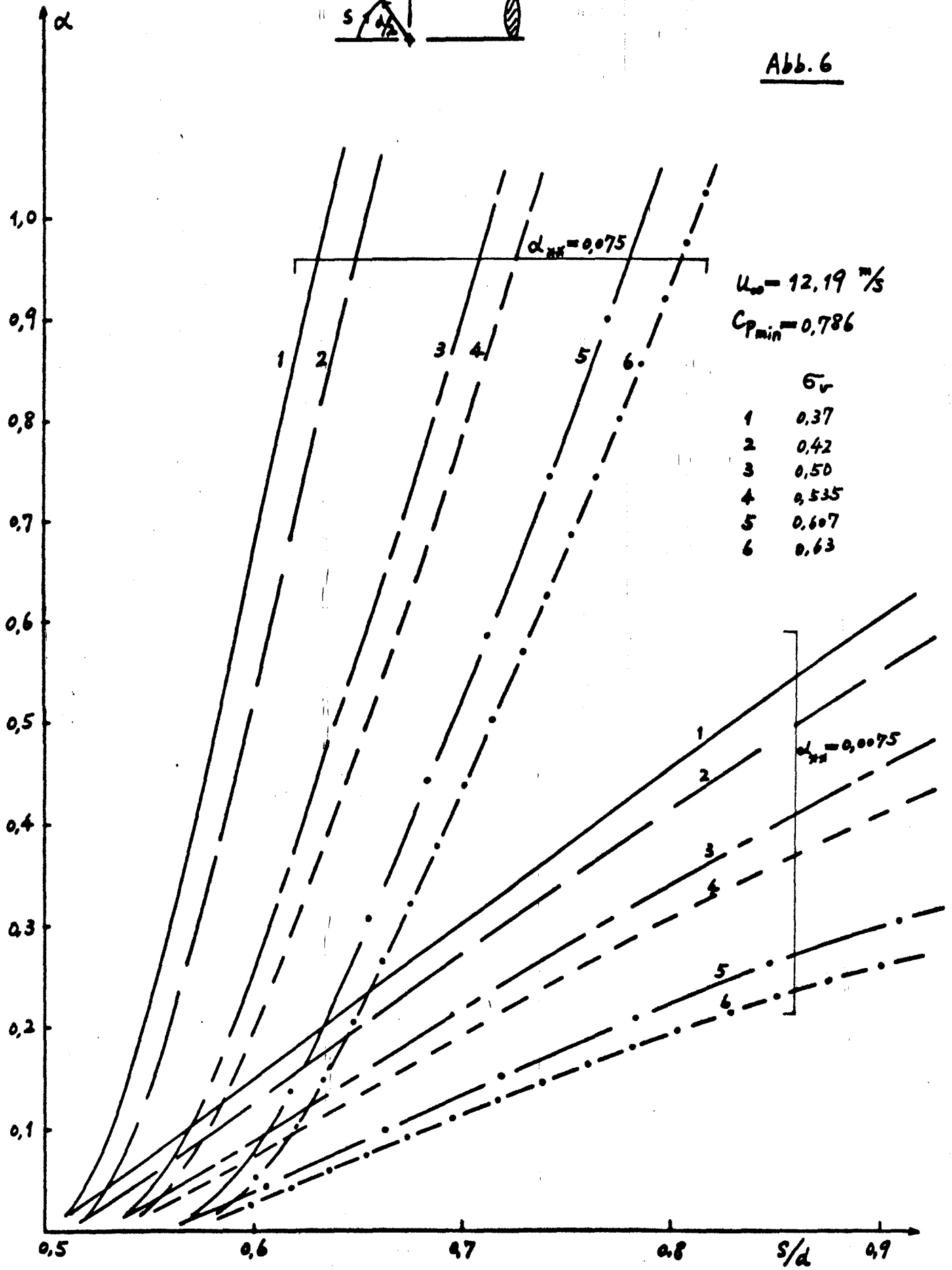
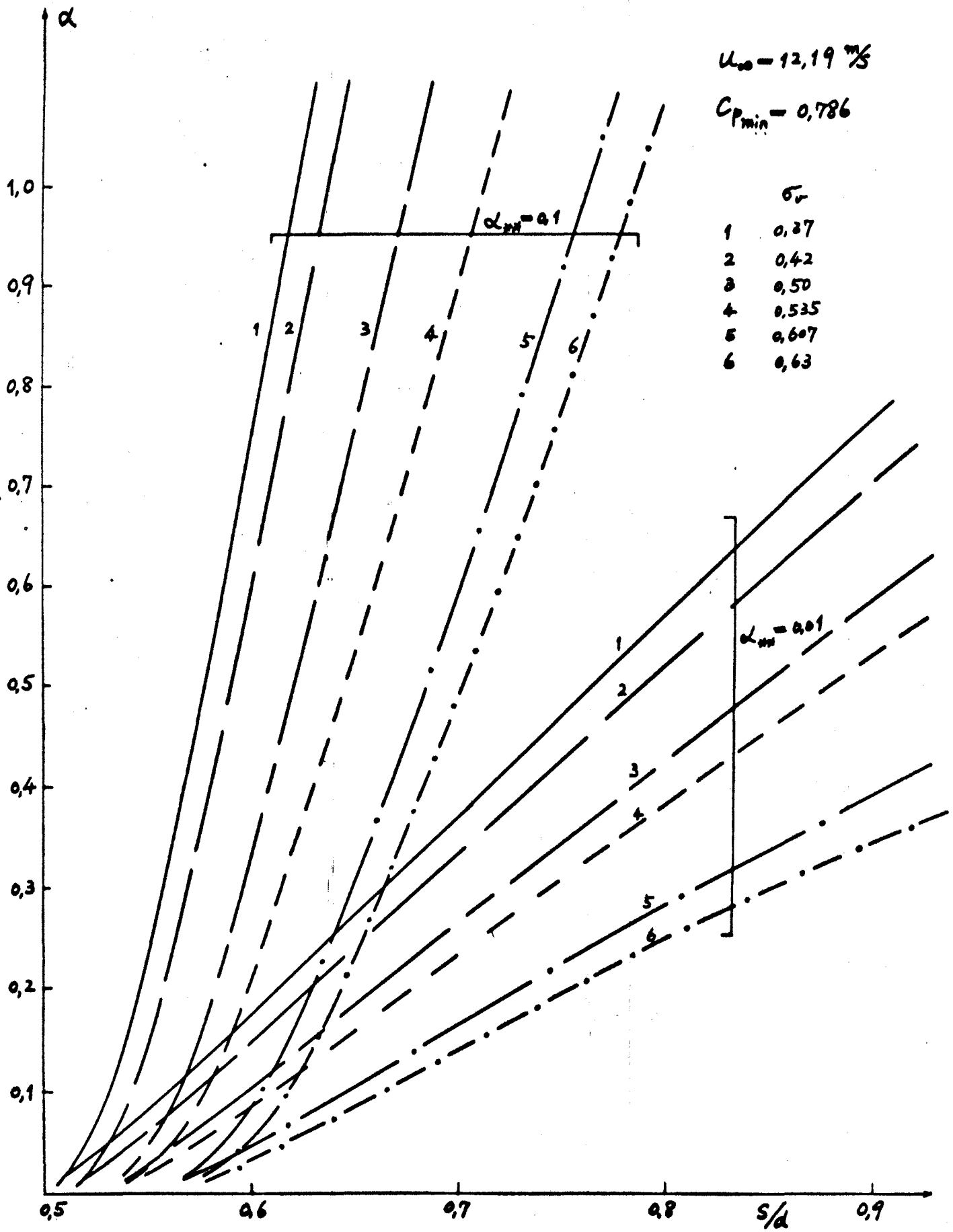
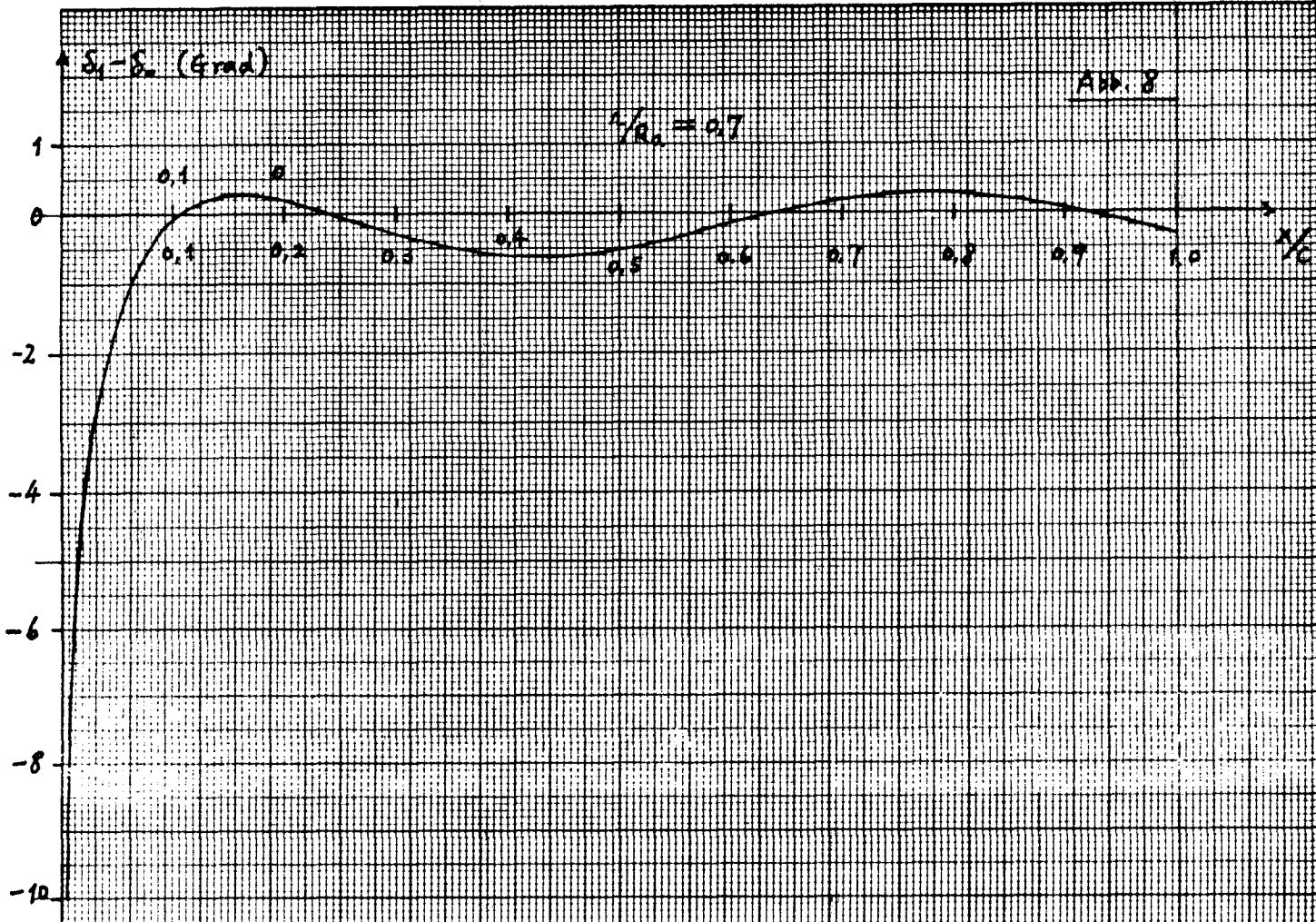


Abb. 7



$r/R_0 = 0.7$



$r/R_0 = 0.8$

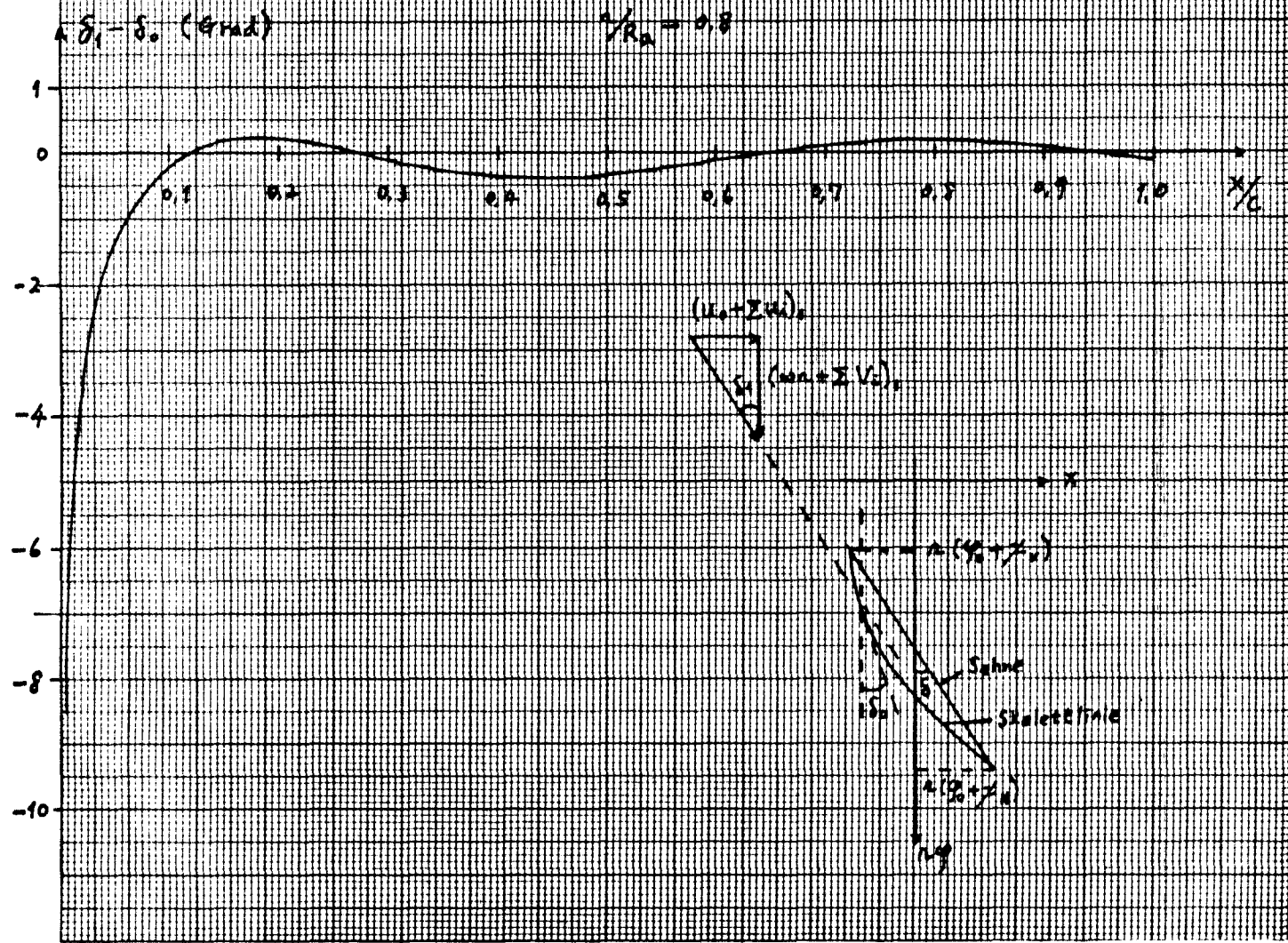


Abb. 9

Druckverteilung des Propellers 1283
bei Radius $r/R_a = 0,7$

$$C_p = \frac{p_0 - p}{\frac{1}{2} \rho (\omega^2 r^2 + u_0^2)}$$

- ohne Korrektur
- mit Korrektur Gl. (III. 1.17)
- • — mit Korrektur Gl. (III. 1.16)

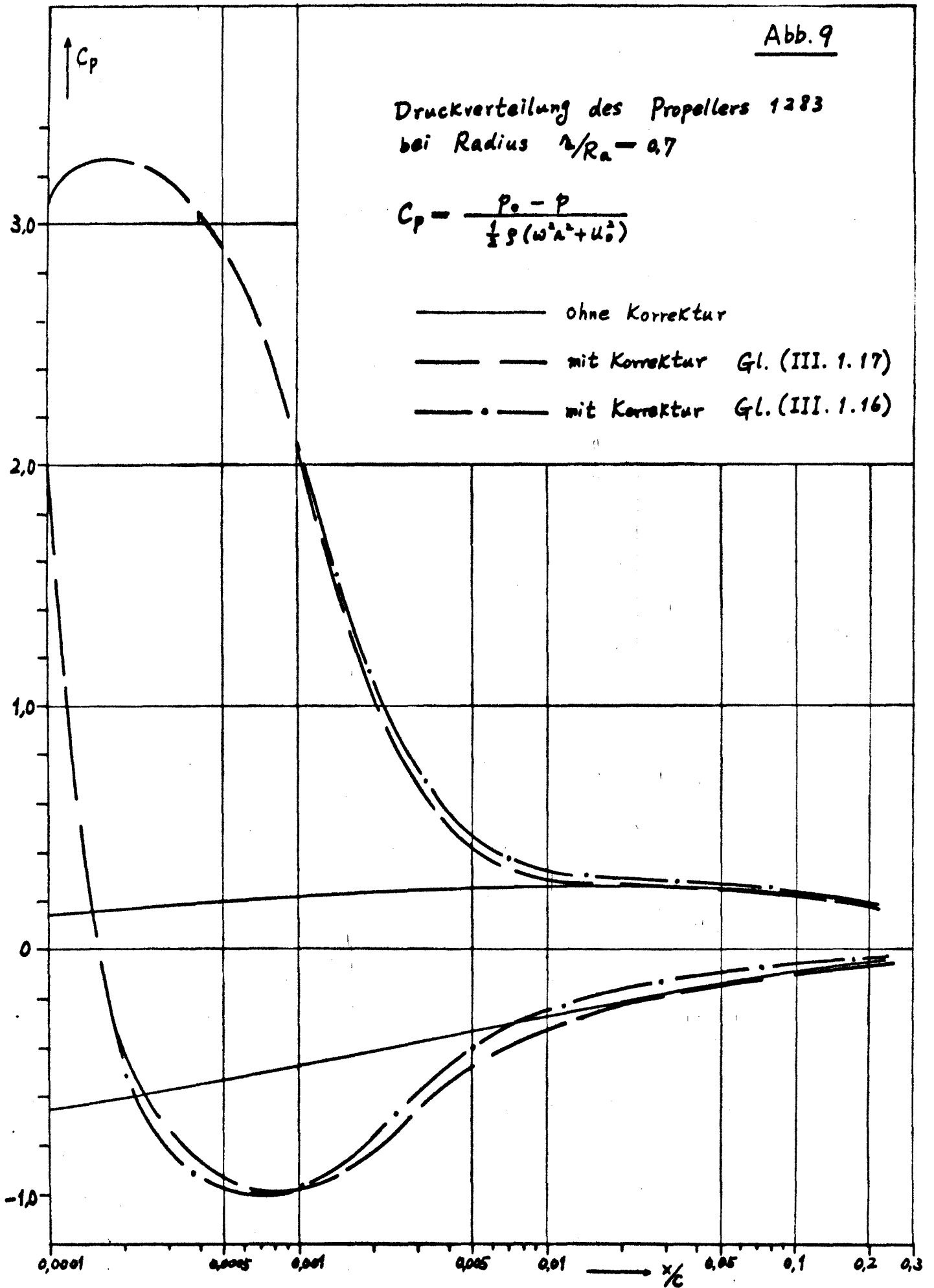
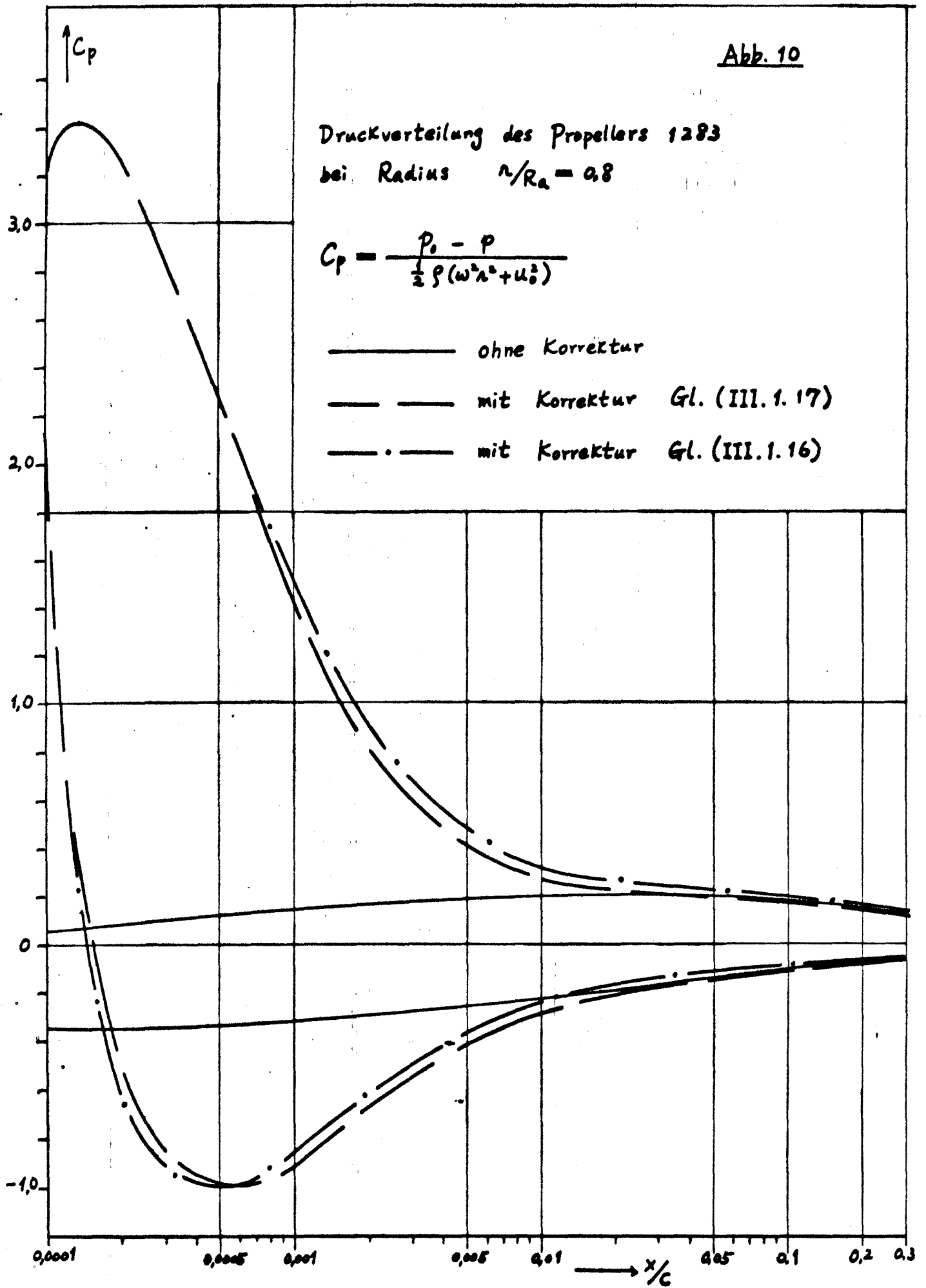


Abb. 10

Druckverteilung des Propellers 1283
bei Radius $r/R_a = 0.8$

$$C_p = \frac{p_0 - p}{\frac{1}{2} \rho (\omega^2 r^2 + u_0^2)}$$

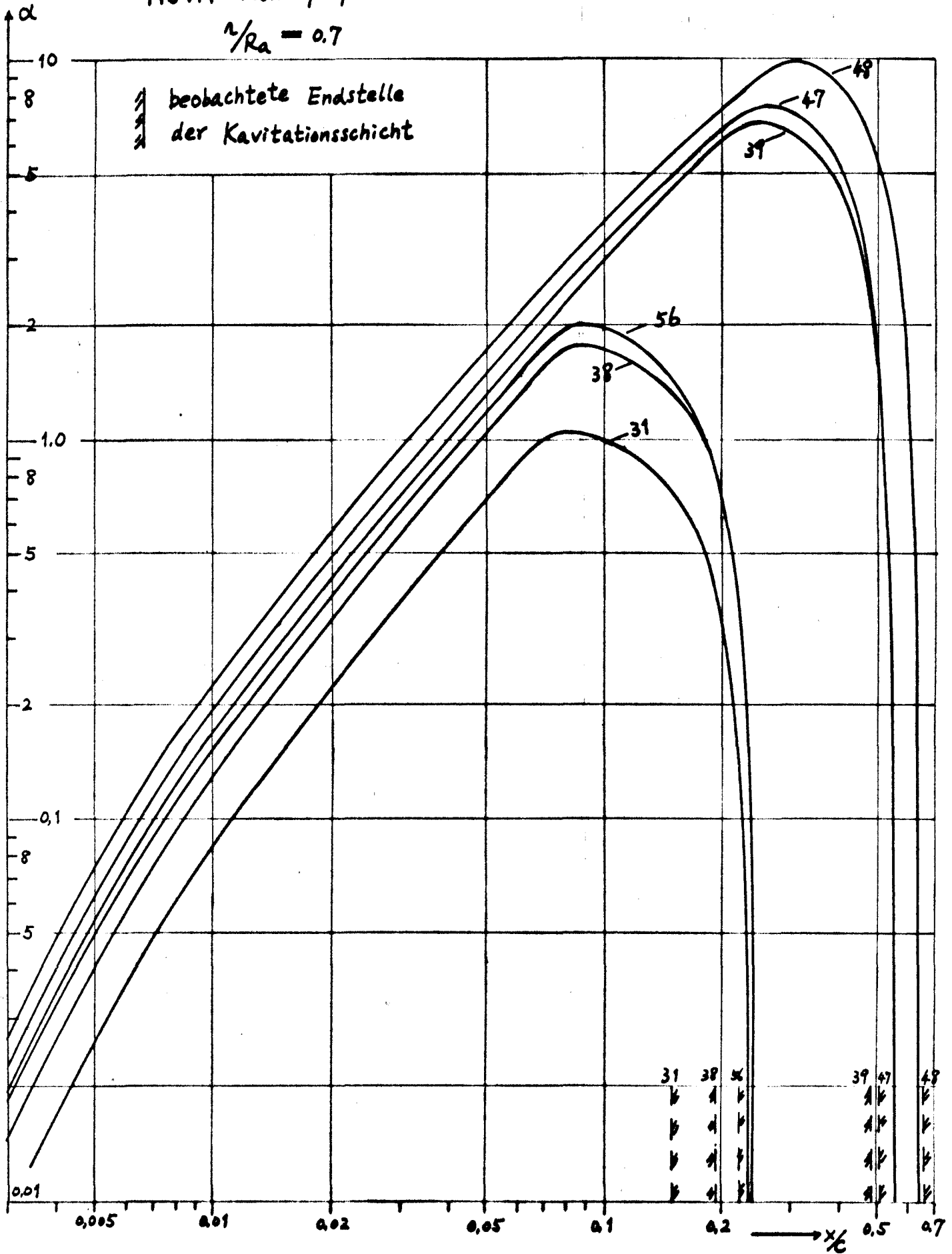
- ohne Korrektur
- - - mit Korrektur Gl. (III. 1. 17)
- · - mit Korrektur Gl. (III. 1. 16)



HSVA Modellpropeller 1283

Abb. 11

$r/R_a = 0.7$



HSVA Modellpropeller 1283

Abb. 12

$$\frac{n}{R_a} = 0.7$$

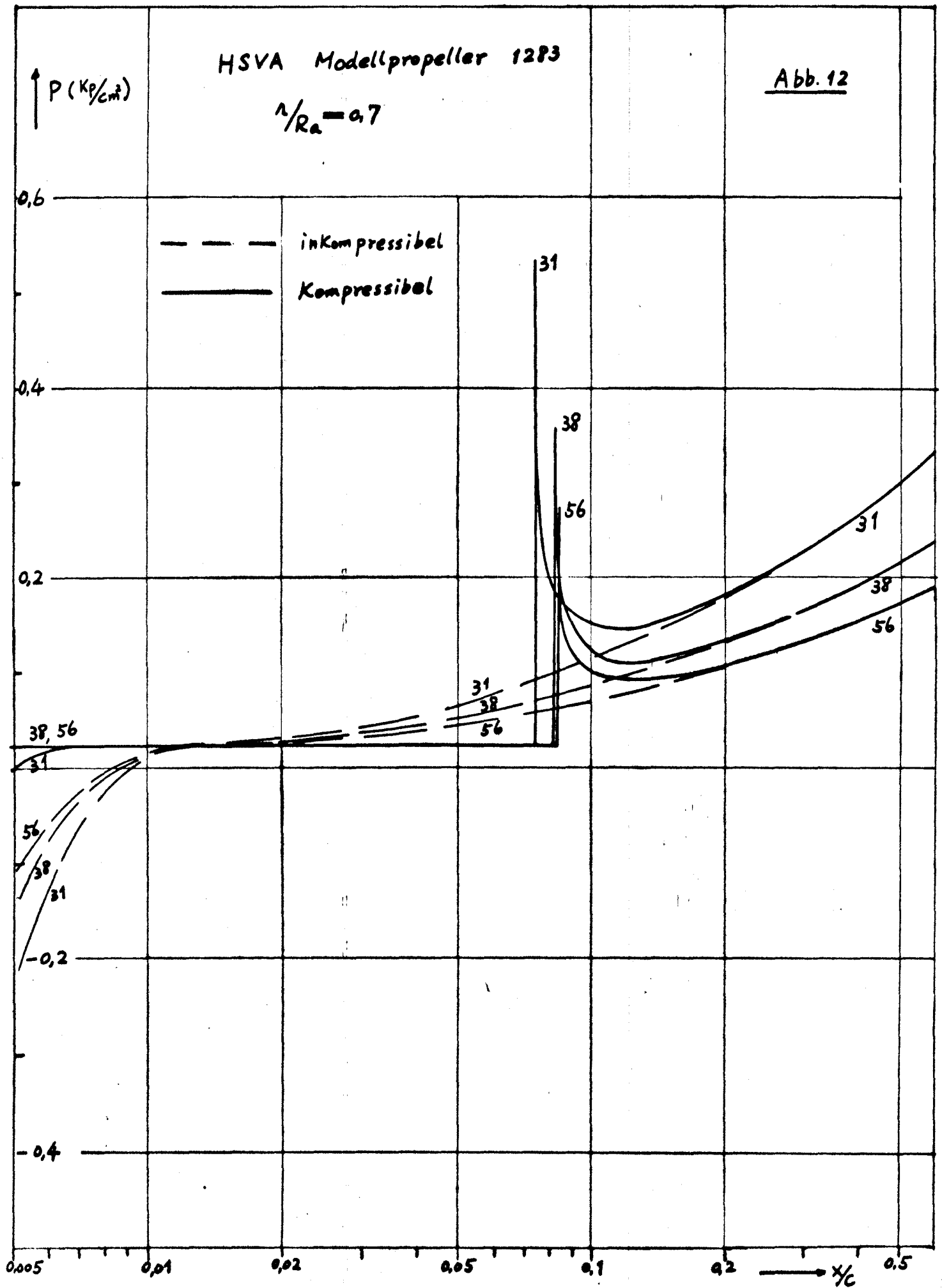
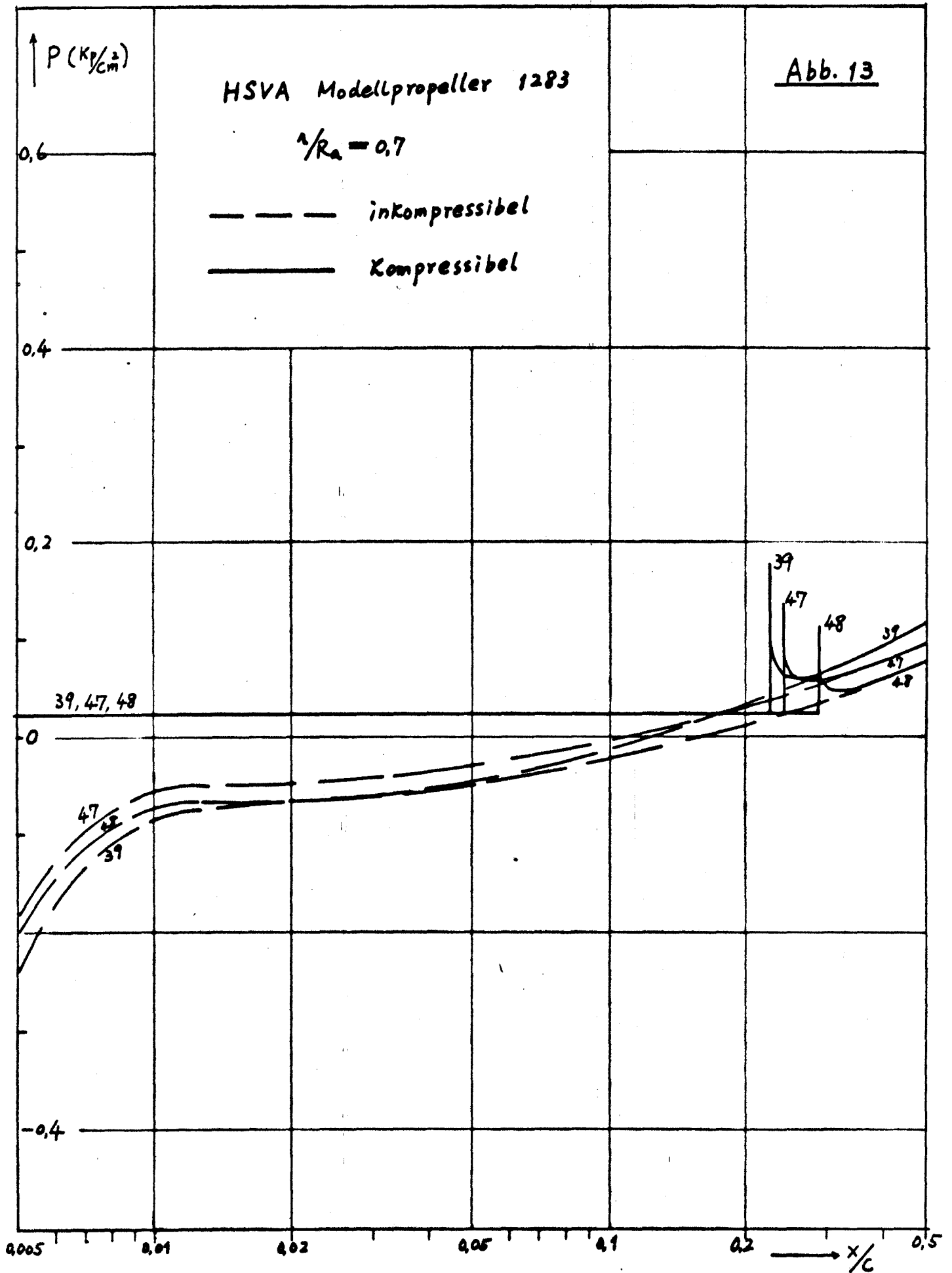


Abb. 13

HSVA Modellpropeller 1283

$$\lambda/R_a = 0.7$$

--- inkompressibel
— kompressibel



HSVA Modellpropeller 1283

$$r/R_a = 0.8$$

Abb. 15

$\uparrow P \text{ (kg/cm}^2\text{)}$

0.6

0.4

0.2

38, 56

31

-0.4

— — — inkompressibel
— — — kompressibel

31

38

56

31

38

56

0.005

0.01

0.02

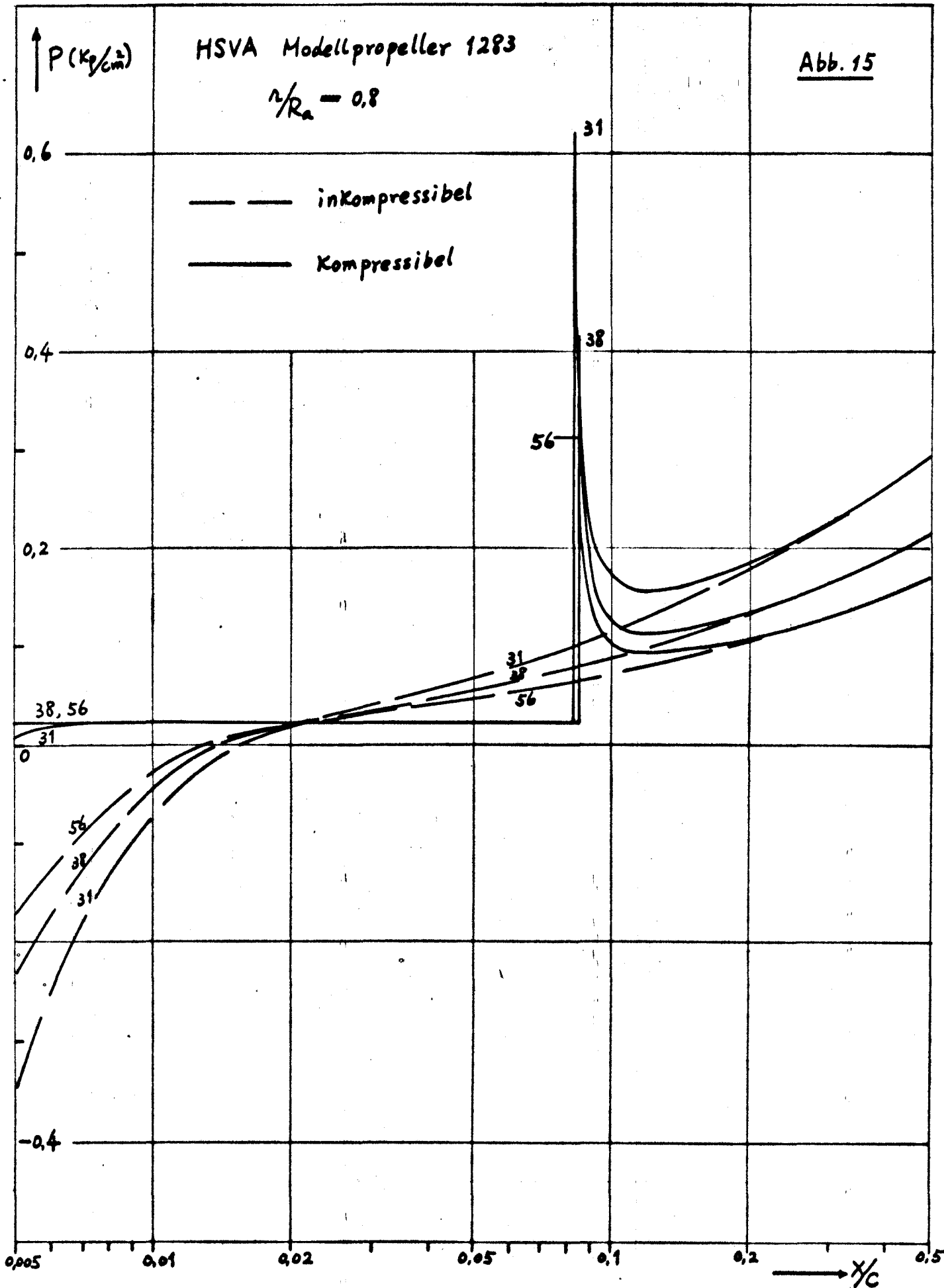
0.05

0.1

0.2

0.5

$\longrightarrow x/c$

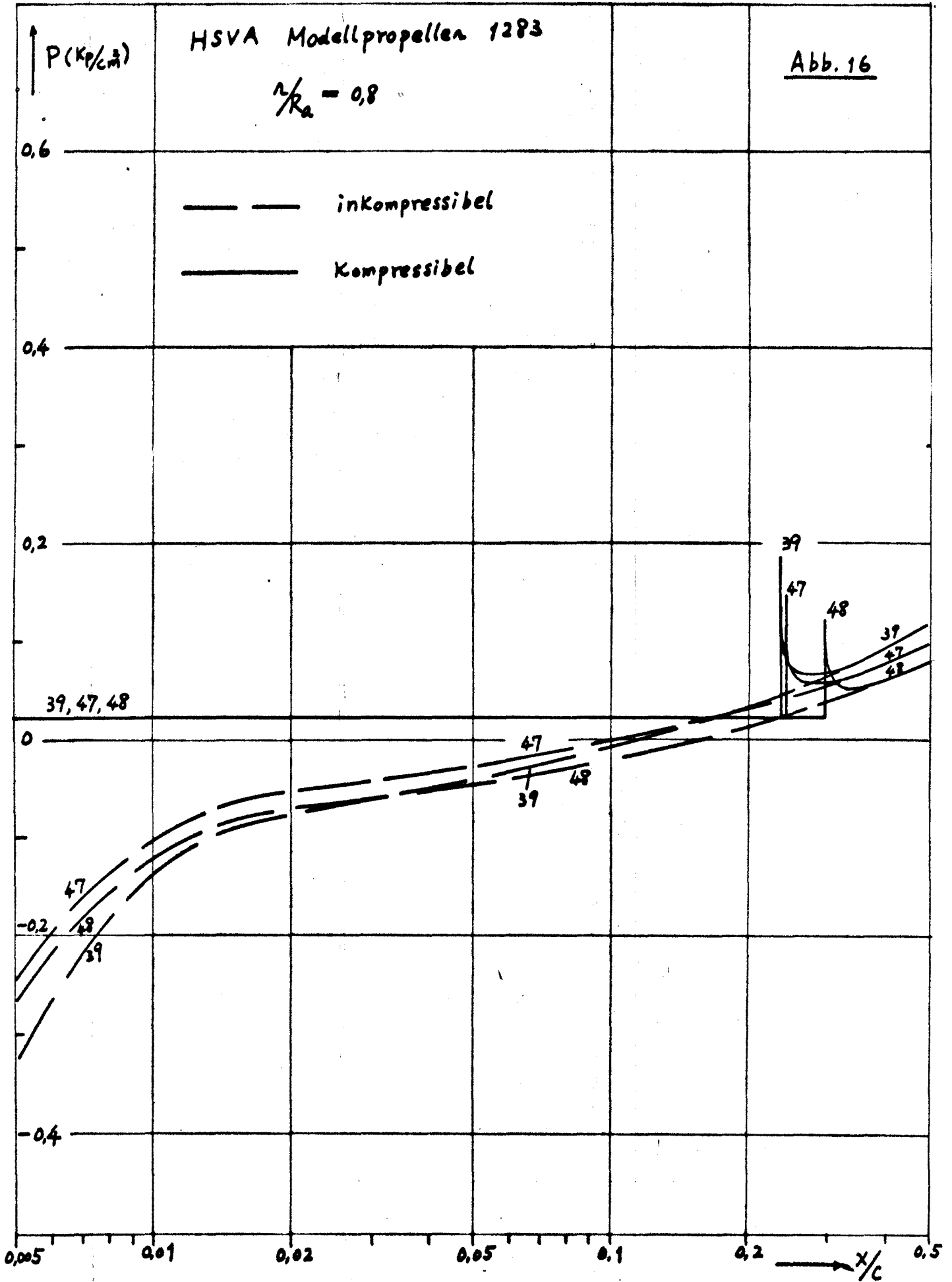


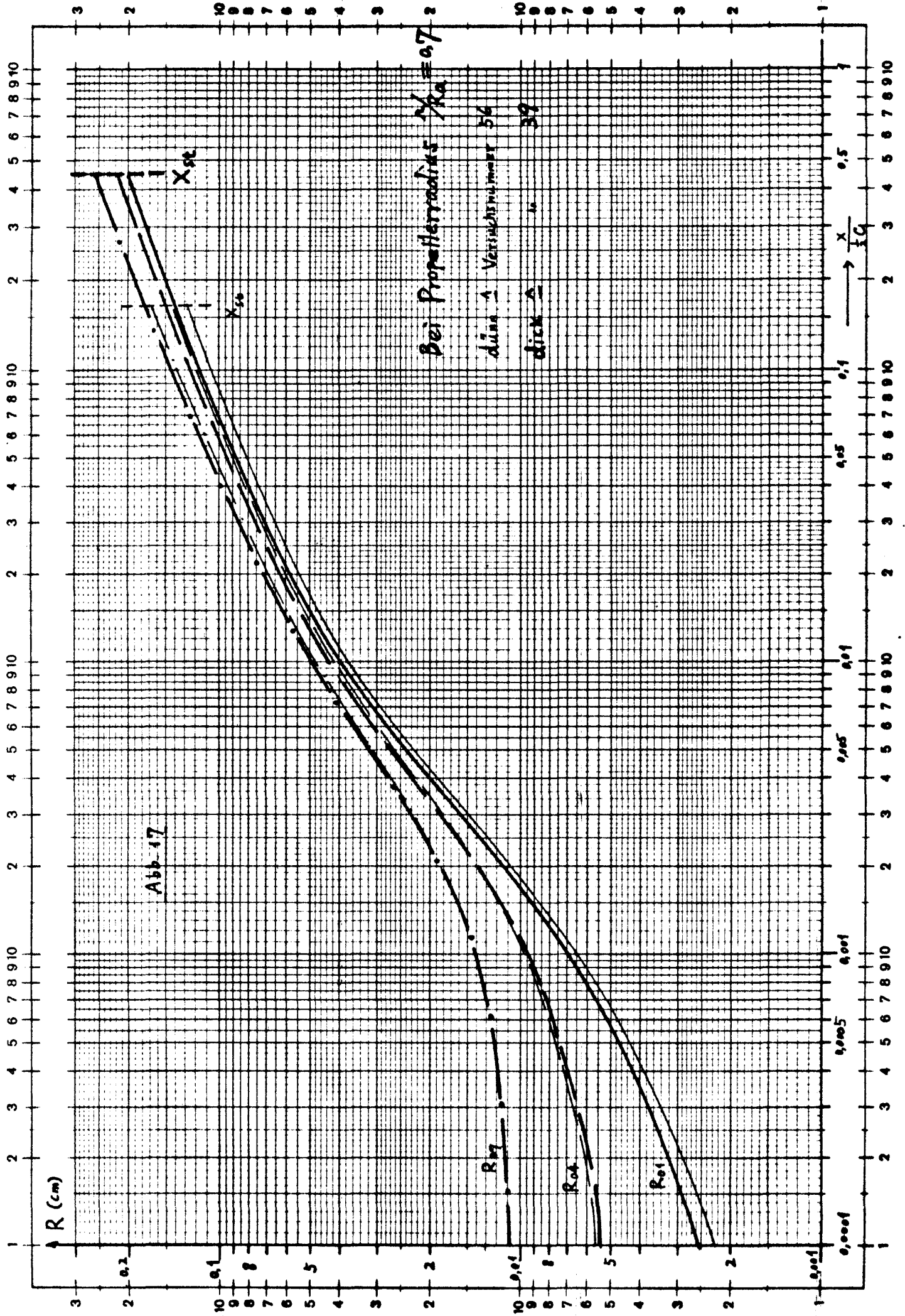
HSVA Modellpropeller 1283

$$\frac{v}{c} = 0,8$$

Abb. 16

— — — — — inkompressibel
————— kompressibel





NACA 4412 Profil
 bei Anstellwinkel $\alpha_0 = 8^\circ$

Abb. 18

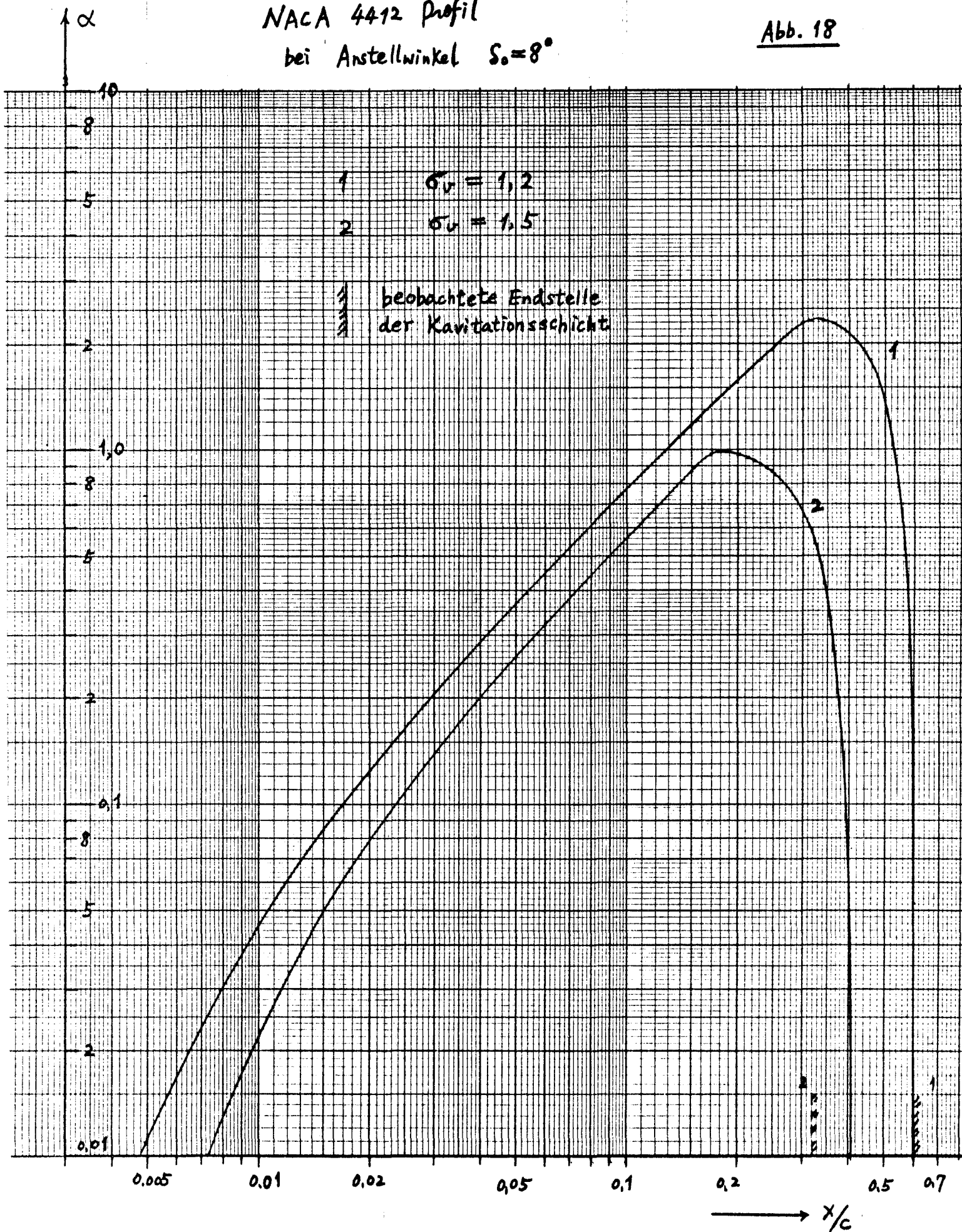


Abb. 19

NACA 4412 Profil
bei Anstellwinkel $\delta_0 = 8^\circ$

1 $\sigma_w = 1,2$

2 $\sigma_w = 1,5$

Δp (KP/cm²)

0.7

0.6

0.5

0.4

0.3

0.2

0.1

0

-0.1

-0.2

-0.3

-0.4

0.007

0.01

0.02

0.05

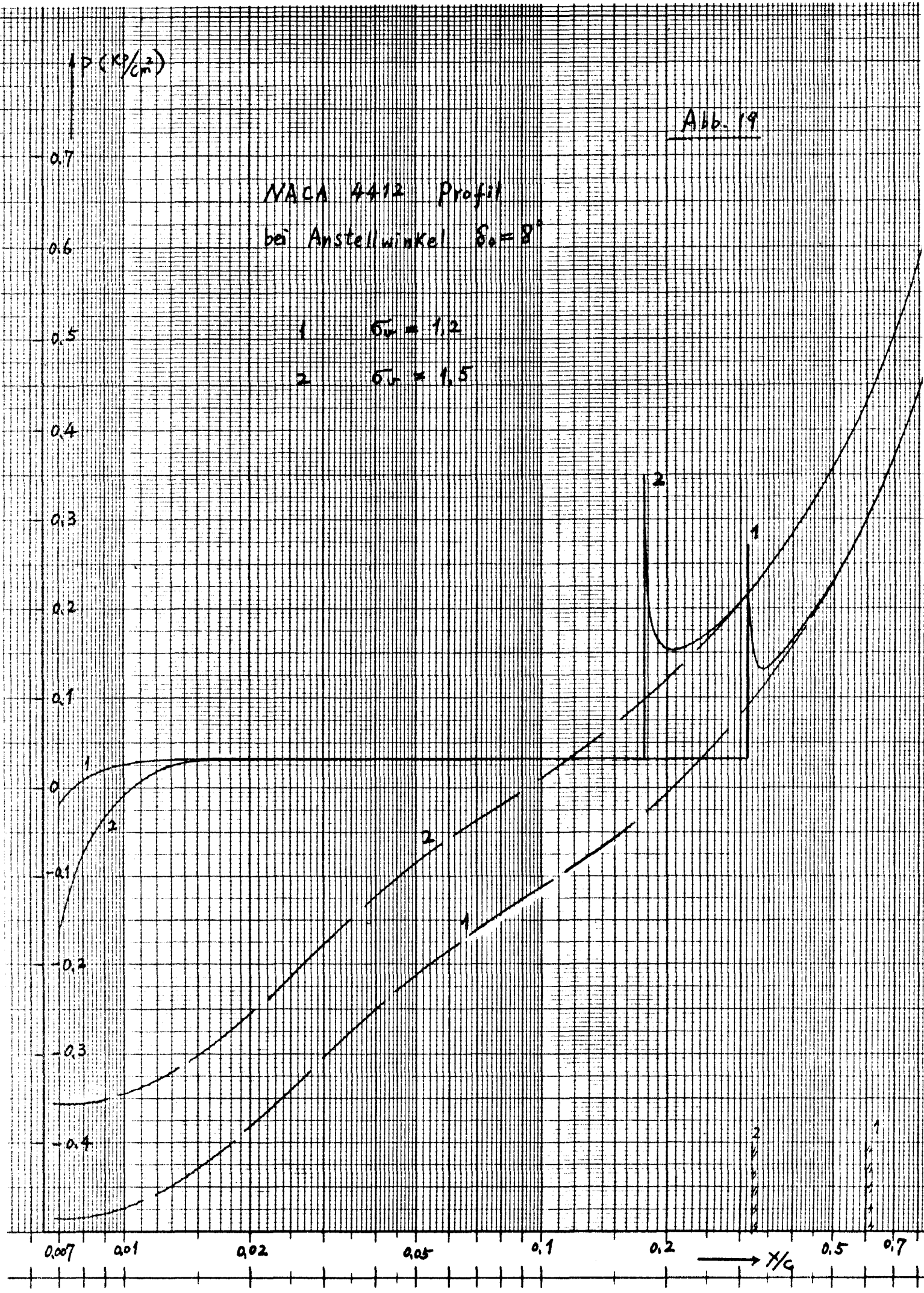
0.1

0.2

0.5

0.7

$\rightarrow T/c$



NACA 66₁-012 Profil
 bei Anstellwinkel $\delta_0 = 6^\circ$

Abb. 20

Druckverteilung mit Zähigkeitseffekt

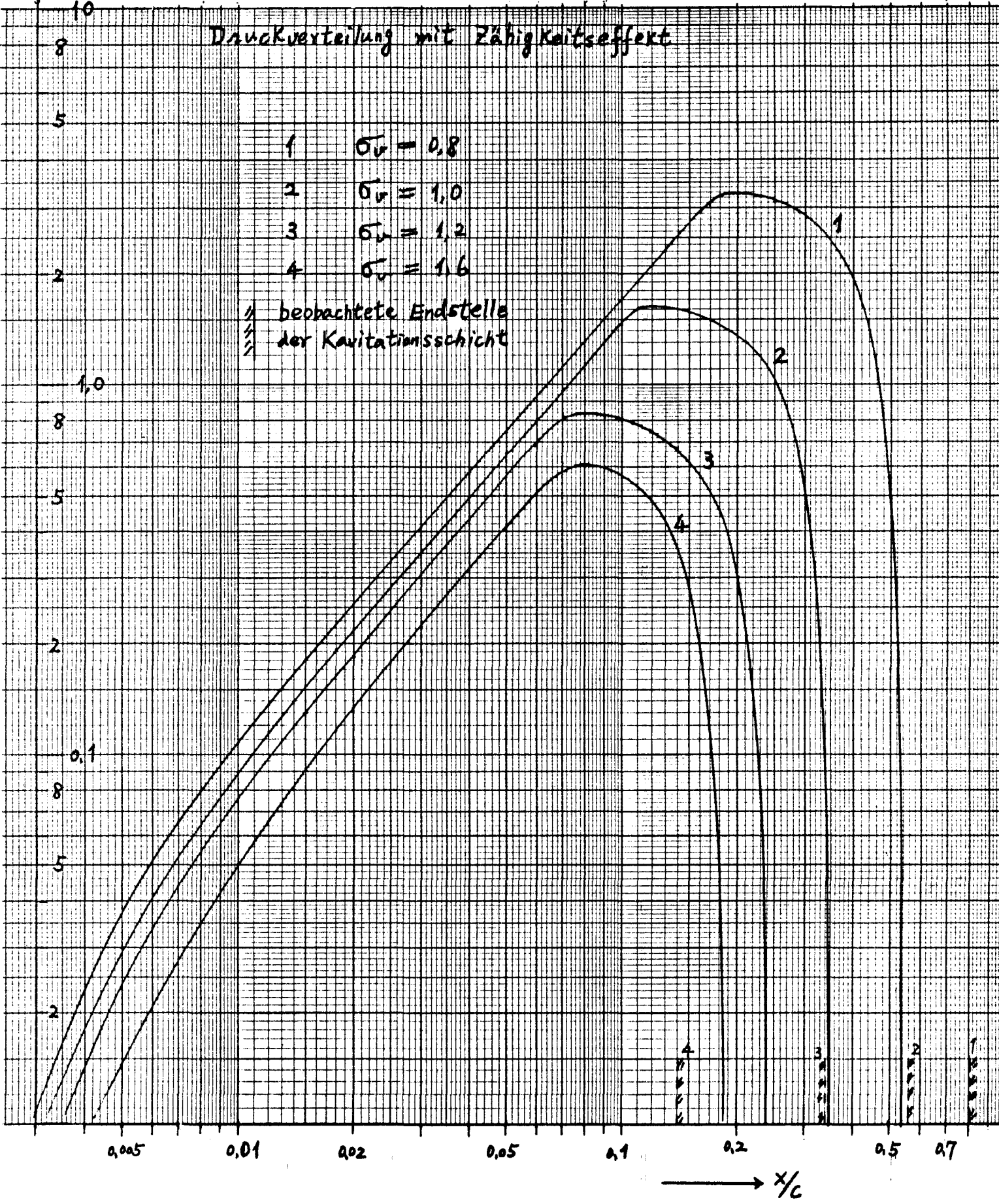
1 $\sigma_v = 0,8$

2 $\sigma_v = 1,0$

3 $\sigma_v = 1,2$

4 $\sigma_v = 1,6$

/// beobachtete Endstelle
 /// der Kavitationsschicht

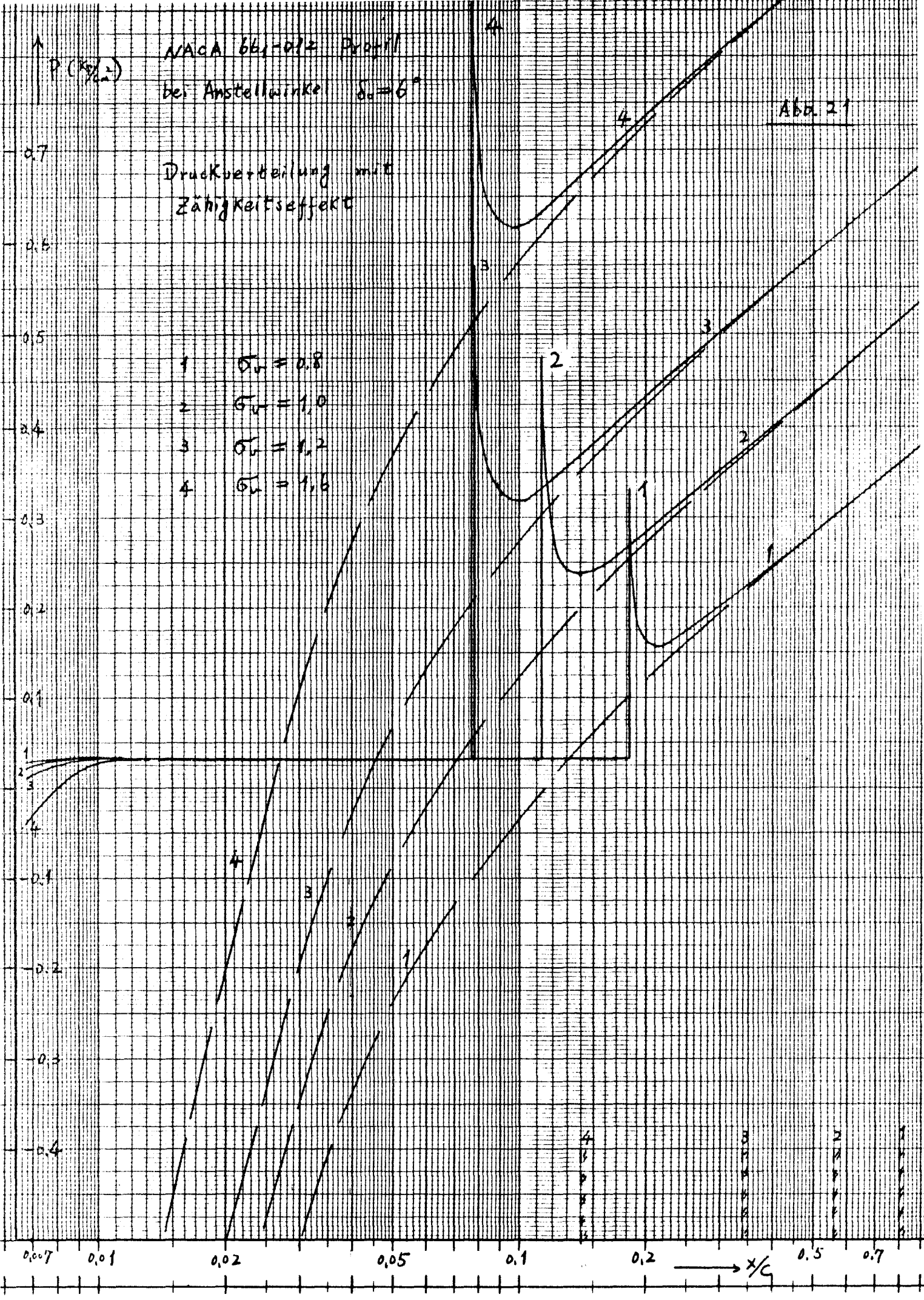


NACA 661-012 Profil
 bei Anstellwinkel $\delta_0 = 6^\circ$

Abb. 21

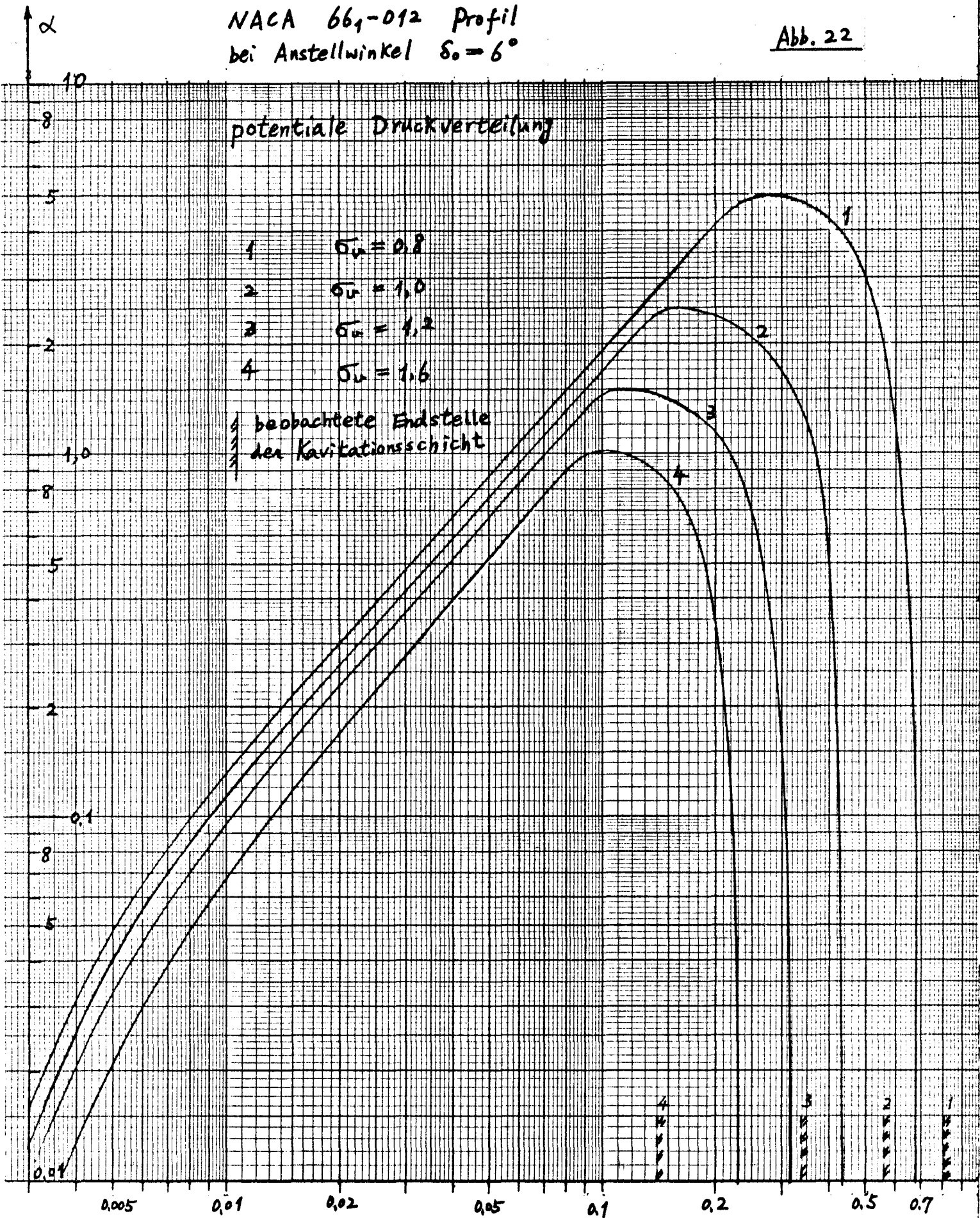
Druckverteilung mit
 Zähigkeitseffekt

- 1 $\sigma_v = 0,8$
- 2 $\sigma_v = 1,0$
- 3 $\sigma_v = 1,2$
- 4 $\sigma_v = 1,6$



NACA 66₁-012 Profil
 bei Anstellwinkel $\delta_0 = 6^\circ$

Abb. 22

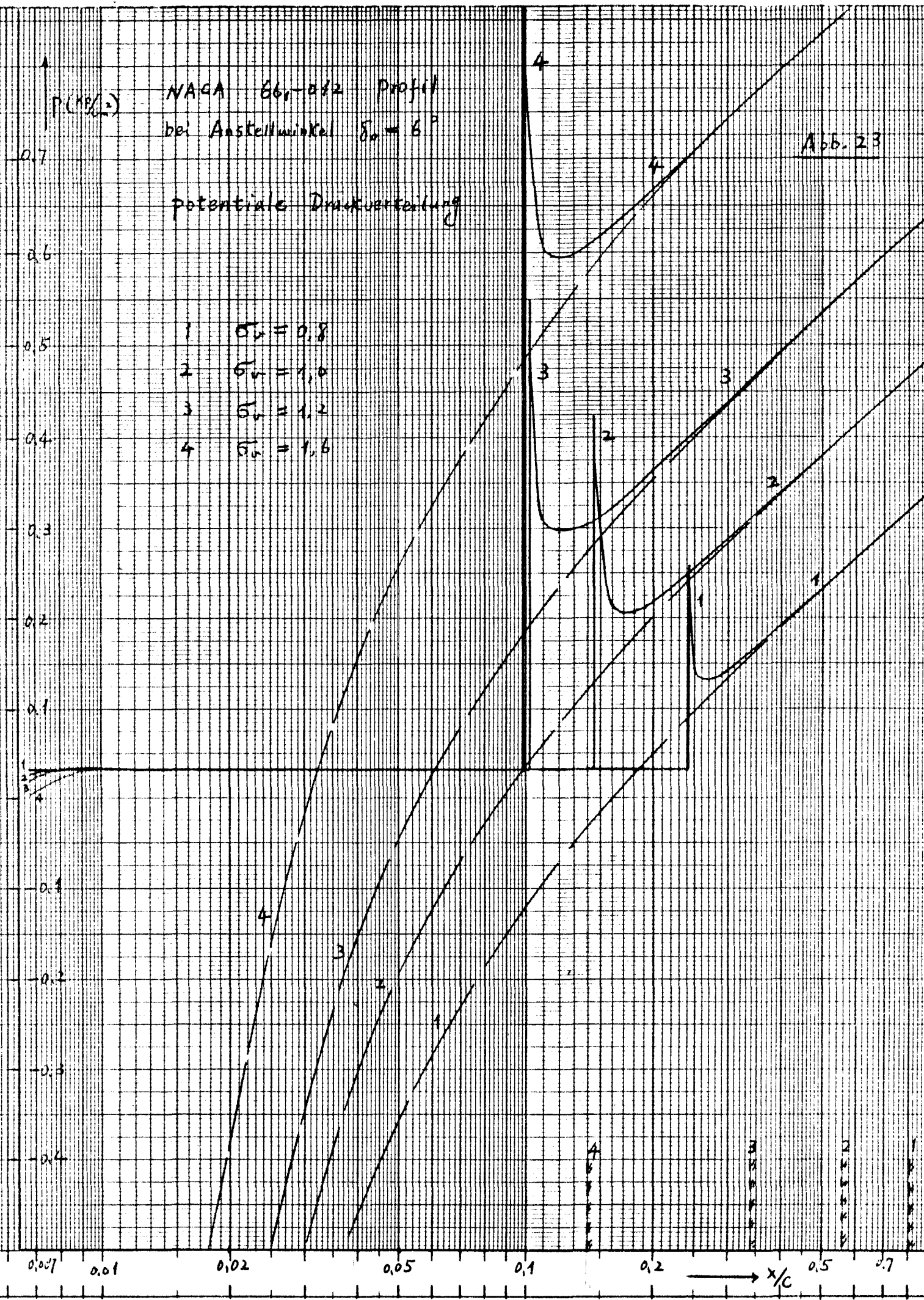


NACA 66₁-012 Profil
 bei Anstellwinkel $\delta_0 = 6^\circ$

Abb. 23

potentielle Druckverteilung

- 1 $\sigma_v = 0,8$
- 2 $\sigma_v = 1,0$
- 3 $\sigma_v = 1,2$
- 4 $\sigma_v = 1,6$



α

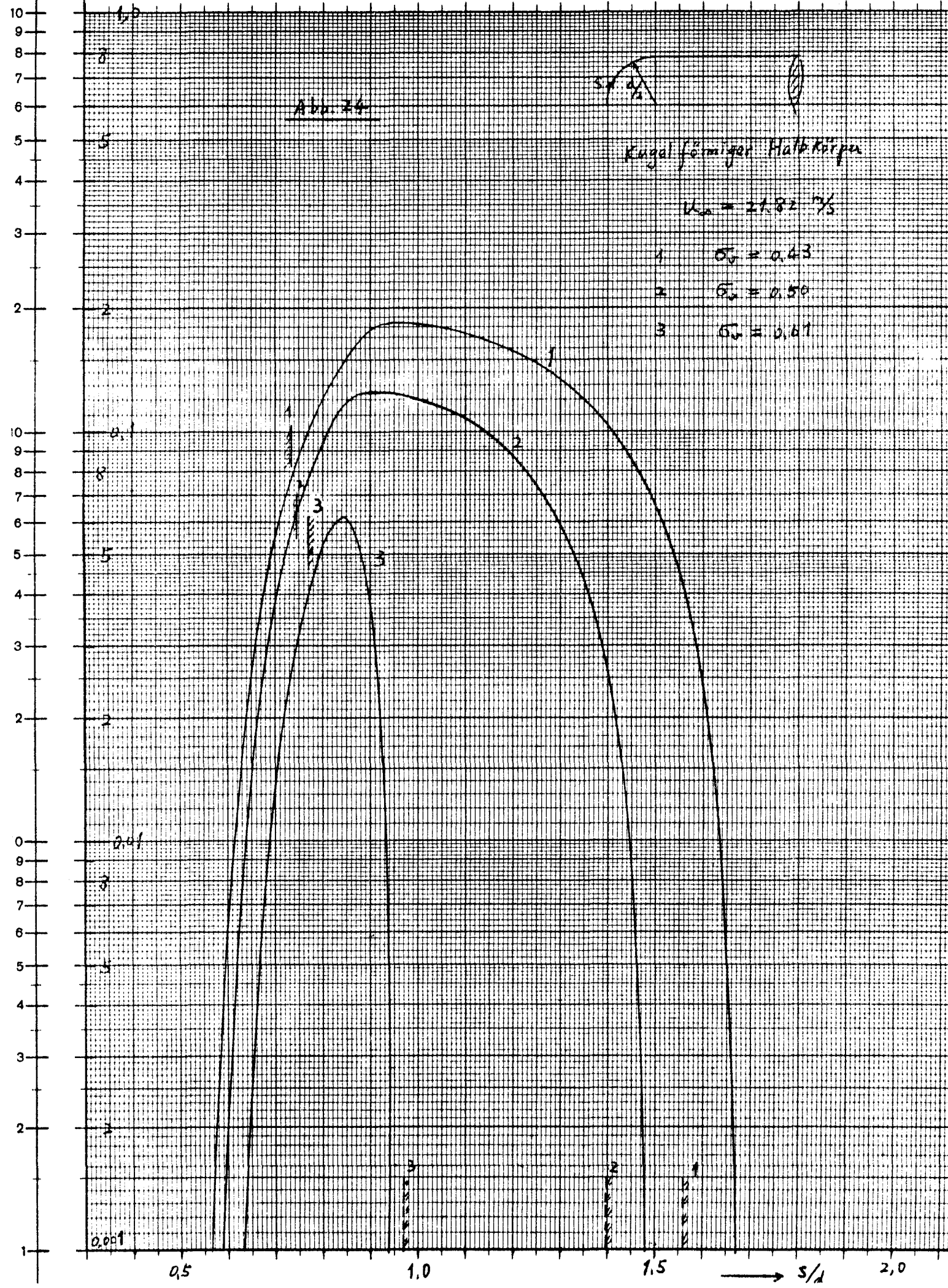
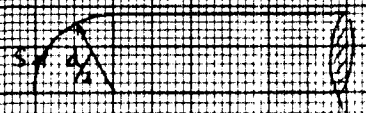


Abb. 24



Kugelförmiger Halbkörper

$u_a = 21.82 \%$

- 1 $\sigma_0 = 0.43$
- 2 $\sigma_0 = 0.50$
- 3 $\sigma_0 = 0.67$

0.001

0.5

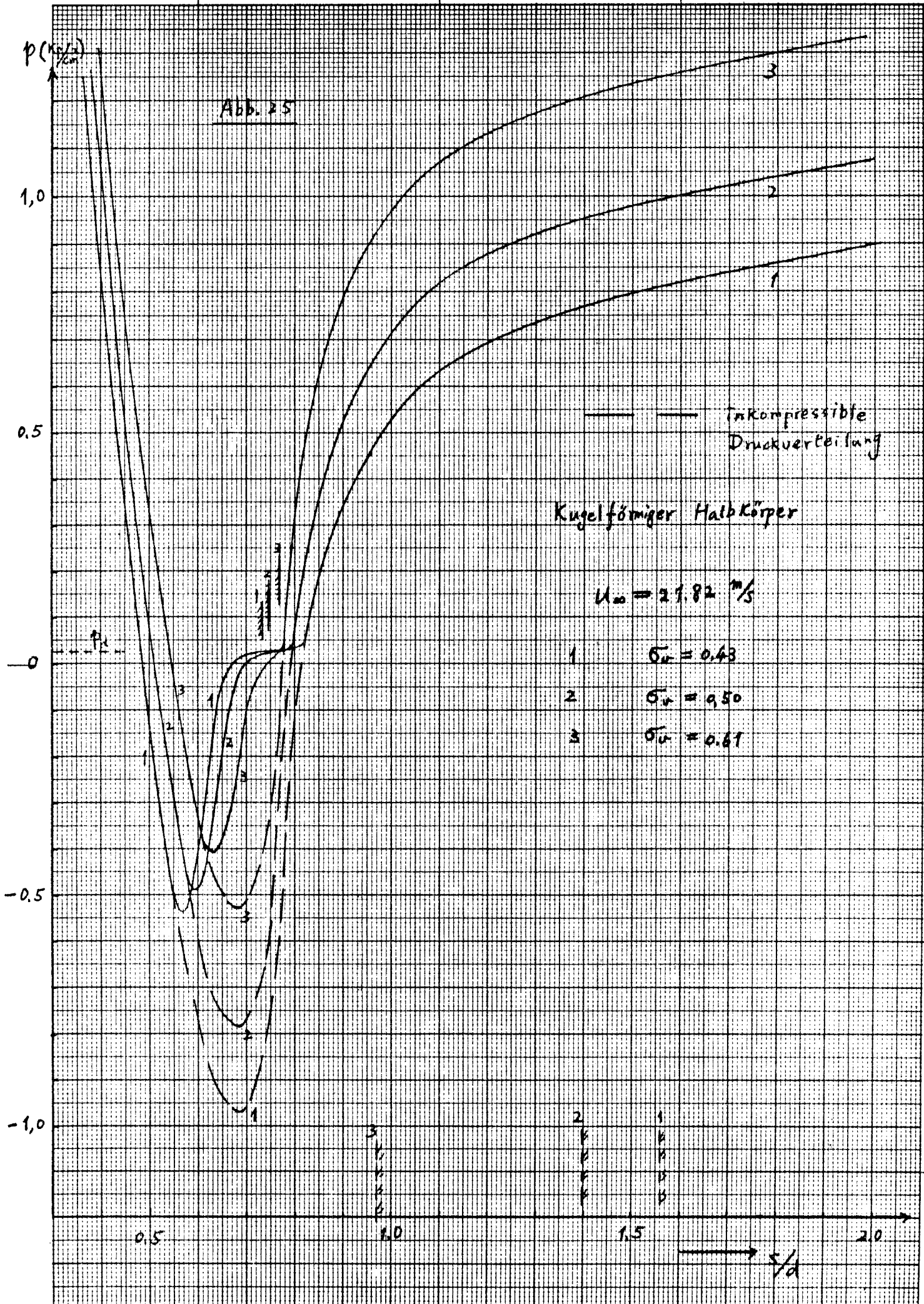
1.0

1.5

2.0

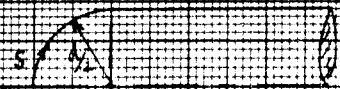
→ s/λ

Abb. 25



α 8

Abb. 26



Kugelförmiger Halbkörper

$\mu_{00} = 13.62 \cdot \frac{r}{s}$

1 $\sigma_0 = 0.39$

2 $\sigma_0 = 0.47$

3 $\sigma_0 = 0.56$

2

0.1

8

5

2

0.1

8

5

2

0.001

0.5

1.0

1.5

2.0

$\rightarrow s/d$

1
2
3

1
2
3

1
2
3

3

1

2

3

2

1

1

1

1

1

1

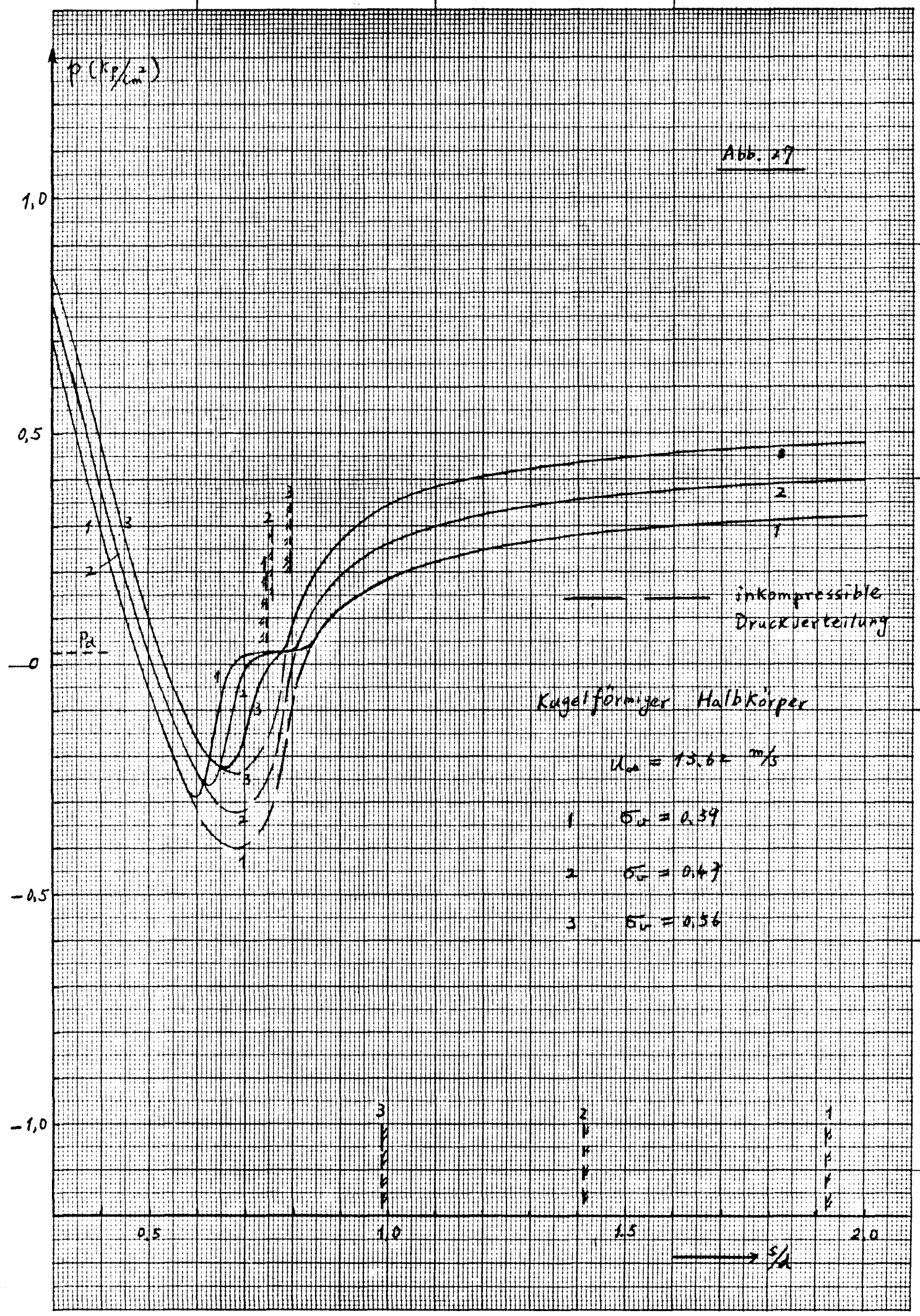
1

1

1

1

Abb. 27



$p \text{ (kg/cm}^2\text{)}$

1,0

0,5

0

-0,5

-1,0

p_a

inkompressible
Druckverteilung

Kugelförmiger Halbkörper

$$u_a = 13.6 \text{ m/s}$$

1 $\sigma_v = 0.39$

2 $\sigma_v = 0.47$

3 $\sigma_v = 0.56$

3

2

1

0,5

1,0

1,5

2,0

$\rightarrow x/a$

Abb. 28

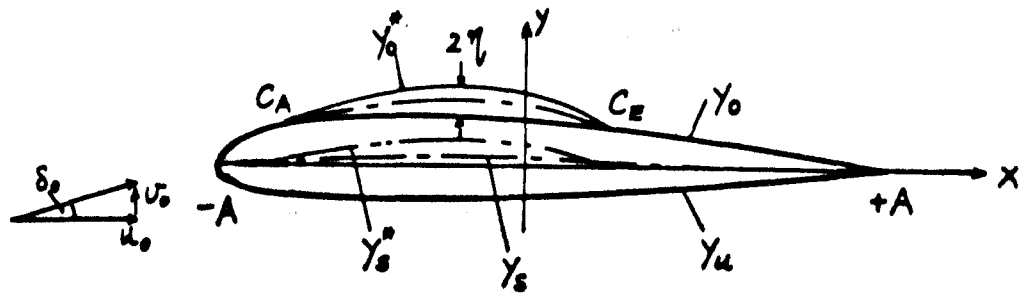


Abb. 30

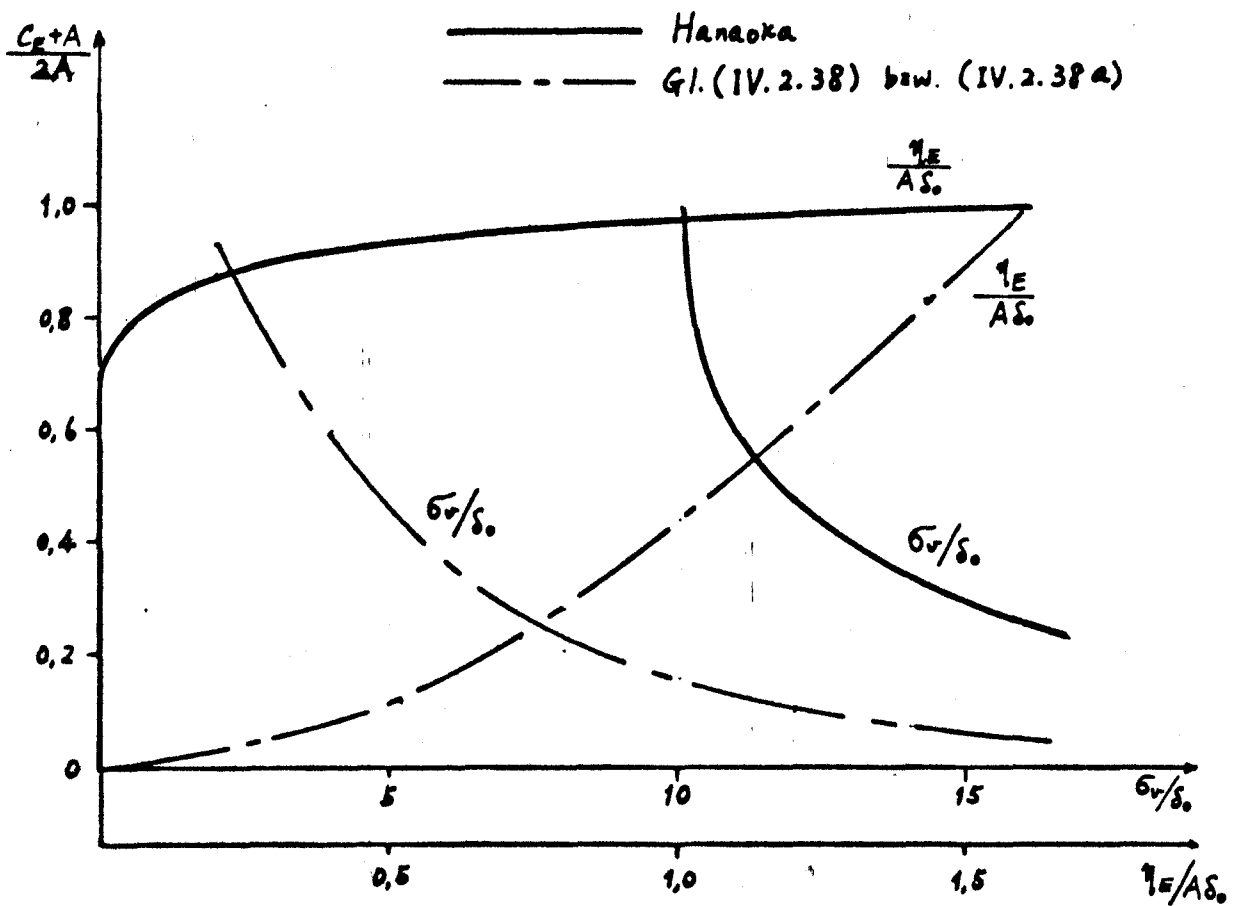


Abb. 29

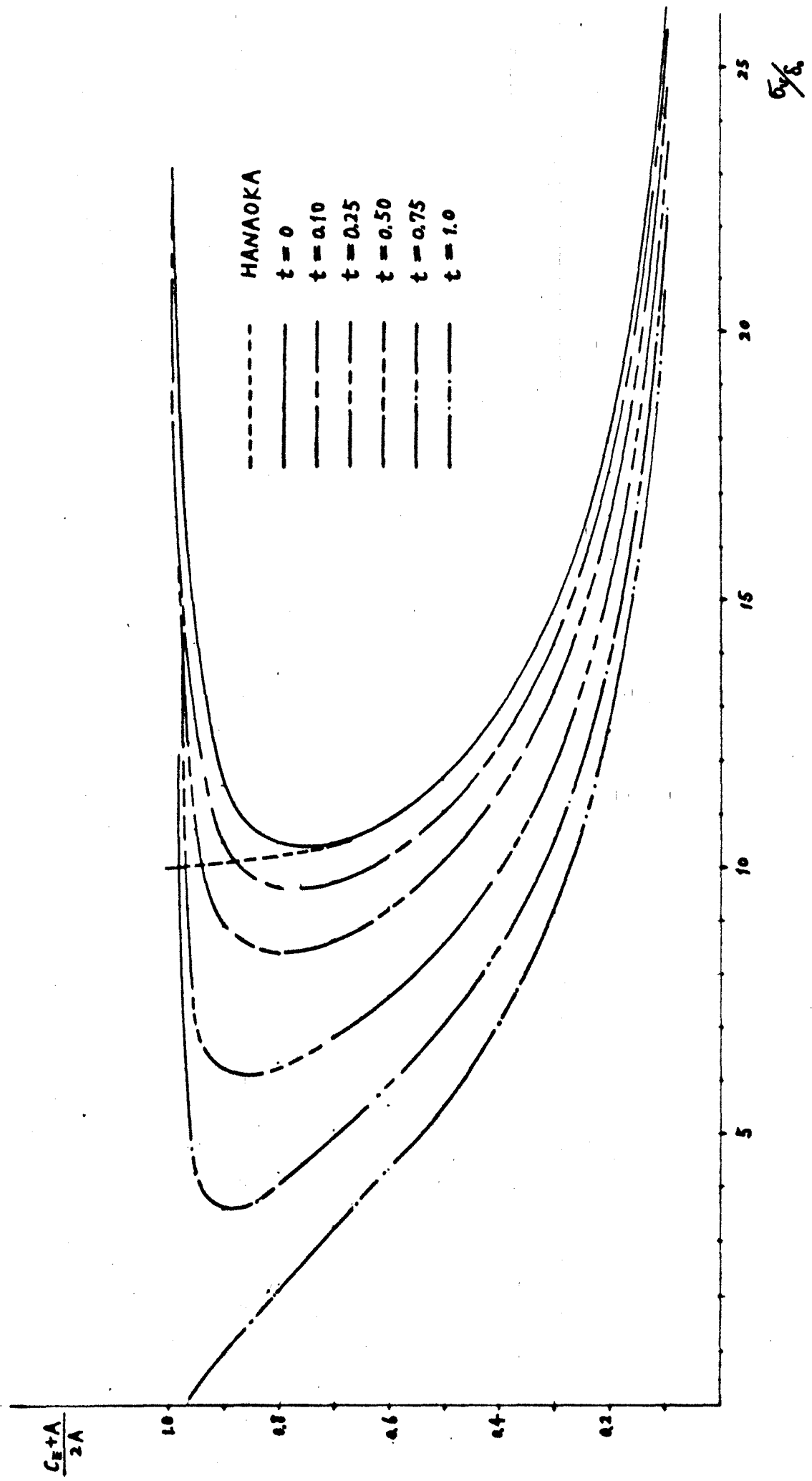


Abb. 31

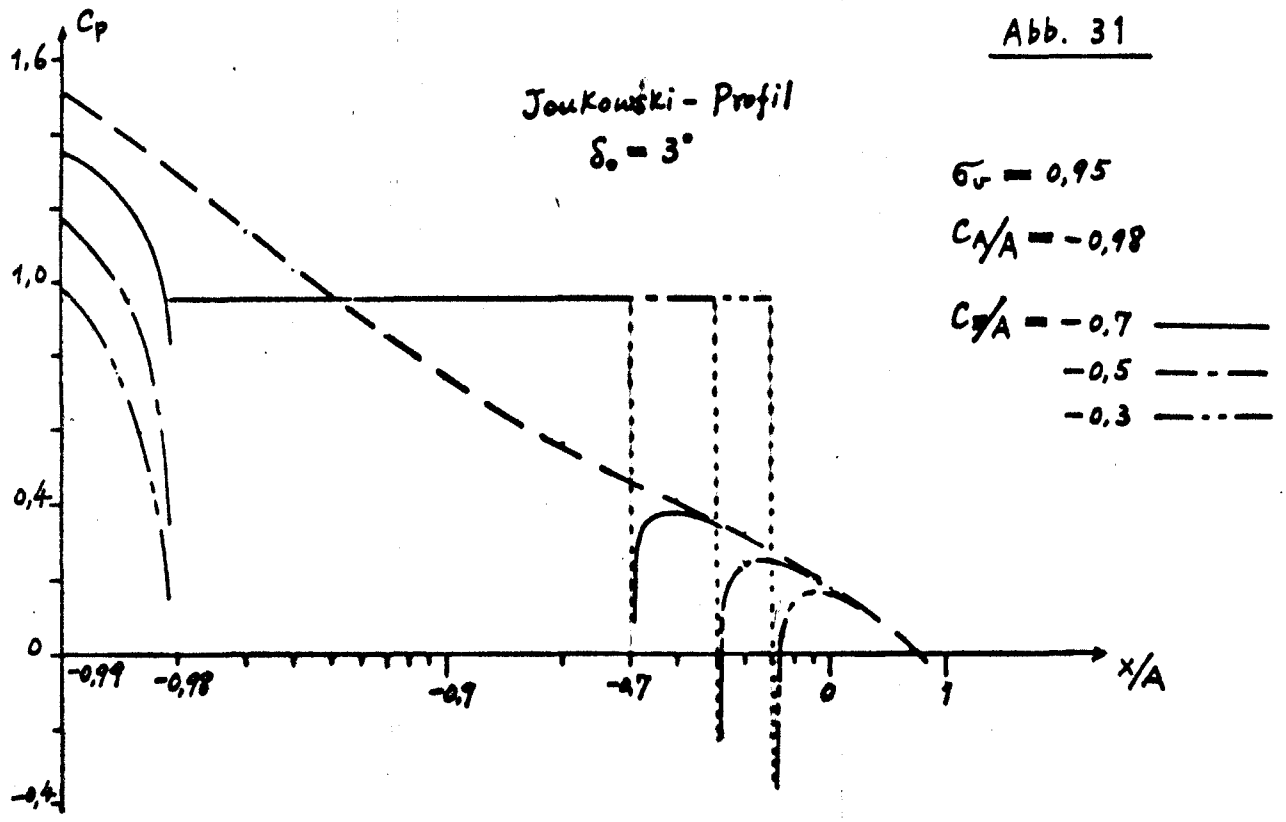


Abb. 32

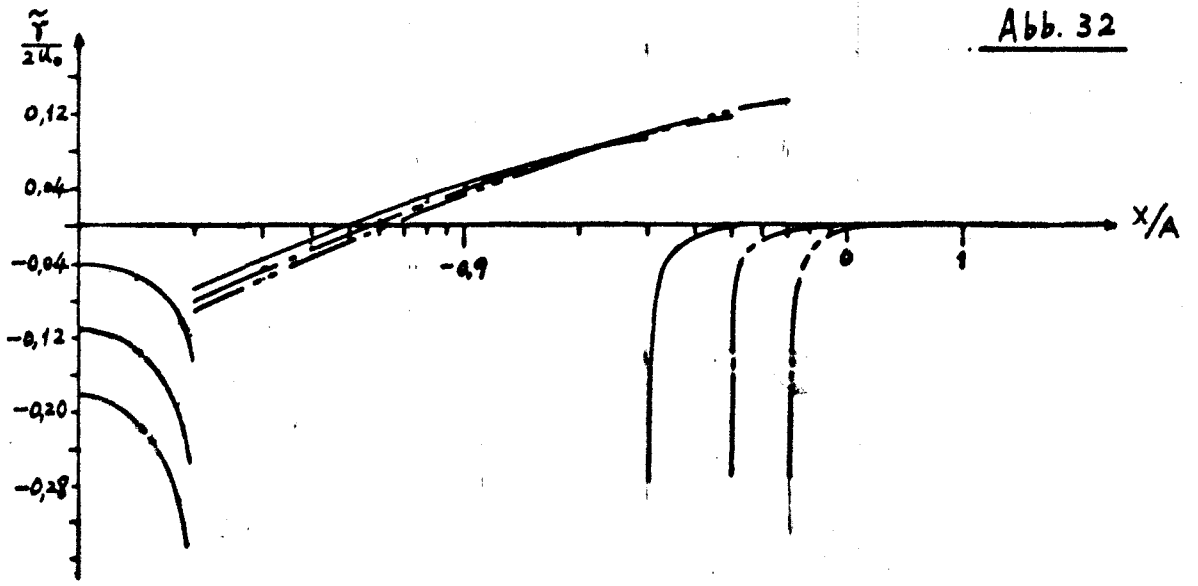
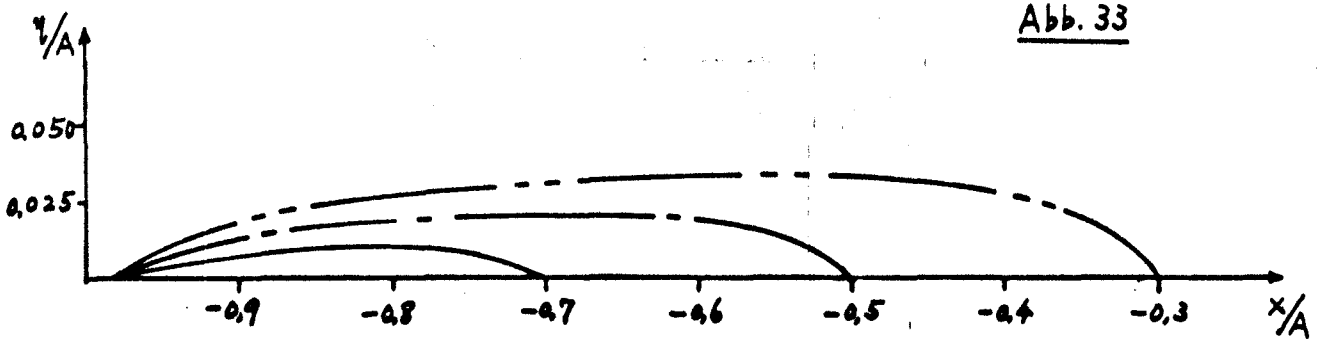


Abb. 33



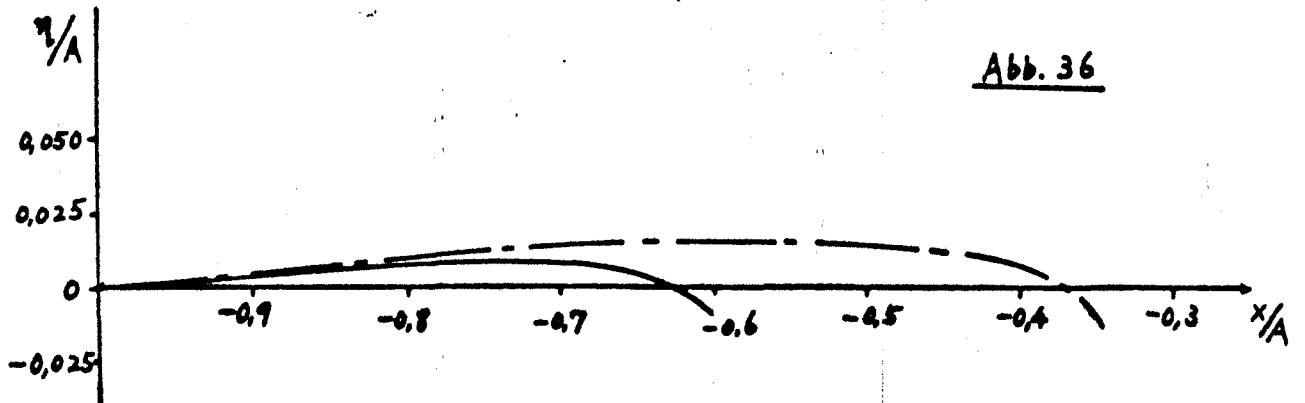
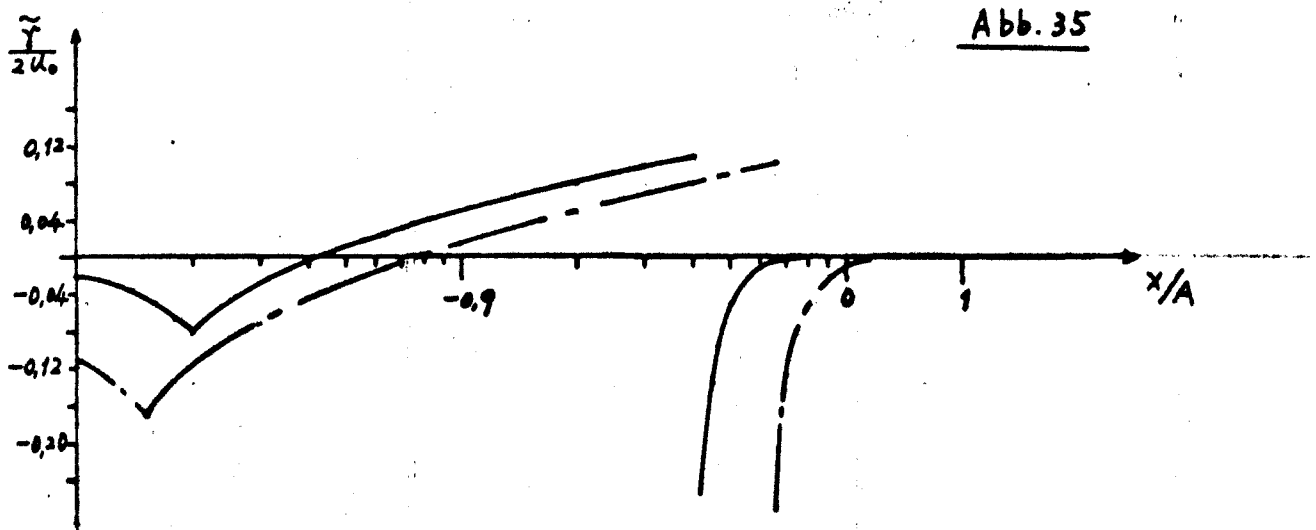
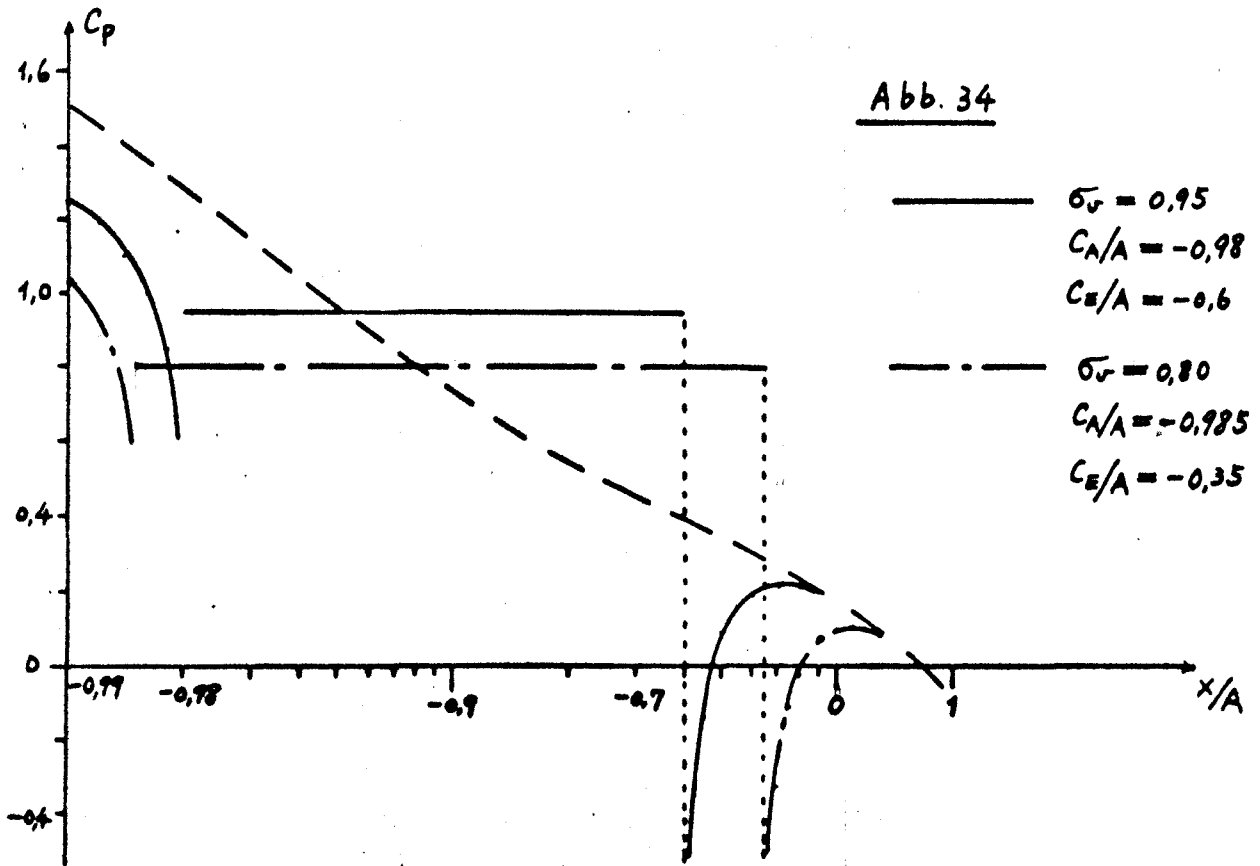


Abb. 37

