

72 | 1960

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Klaus Eggers

Über Singularitätendarstellungen und Kraftwirkungen bewegter Körper in inkompressibler Flüssigkeit

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

Über Singularitätendarstellungen und Kraftwirkungen bewegter Körper in inkompressibler Flüssigkeit

Klaus Eggers,
Institut für Schiffbau Hamburg¹⁾

Einleitung

Vorgegeben sei eine inkompressible, zähigkeitsfreie Grundströmung. Gesucht wird nach einem Weg zur numerischen Bestimmung

1. der Störströmung, welche sich durch Anwesenheit eines bewegten Körpers der Grundströmung überlagert,
2. der Kraftwirkungen (Kraft und Moment) der resultierenden Umströmung auf den Körper.

Im Falle rotationsfreier Strömung können beide Teile der Aufgabe zusammenhängend gelöst werden. Als begriffliches Hilfsmittel dienen uns dabei spezielle Fortsetzungen der Strömung in das Körperinnere, welche, als Dipolverteilungen aufgefaßt, die äußere Störströmung erzeugen. Die Anforderungen an die Strömung im Inneren können durch eine Integralgleichung ausgedrückt werden.

Für die Kraftwirkungen (Kraft und Moment), welche die Flüssigkeit auf den Körper ausübt, finden wir eine Darstellung aus der Euler-Gleichung für den Druckgradienten im Inneren. Sie können ausgedrückt werden durch die ungestörte und die fortgesetzte resultierende Strömung im Körperinneren. Für die Kraft finden wir daraus eine Darstellung durch die Intensität der Singularitäten, welche den Körper erzeugen und die ungestörte Grundströmung in ihrer Umgebung. Durch den Übergang zu allgemeineren Singularitätensystemen können wir die Formel von Taylor [15] über den Zusammenhang von Kelvinimpuls und Dipolmoment verallgemeinern. Für das Moment finden wir eine entsprechende Darstellung nur für spezielle Dipolverteilungen, welche den oben erwähnten Strömungsfortsetzungen entsprechen; durch diese können aber dann alle Kraftwirkungen direkt ausgedrückt werden.

Dies steht im Einklang mit Ergebnissen von Cummins [2], welcher die Kraftwirkungen auf Körper untersuchte, welche sich durch diskrete Singularitätensysteme darstellen lassen.

Die Verallgemeinerung der älteren Ergebnisse von Lagally [6] auf instationäre Umströmungen gelang ihm nur für die Kraft; d. h. aber, daß im allgemeinen bei vorgegebenen Singularitäten der instationäre Anteil des Momentes erst nach Ermittlung der Kontur des dargestellten Körpers berechnet werden kann.

Indem wir die Kraftwirkungen durch eine fortgesetzte innere Strömung ausdrücken, können wir den Anteil der ungestörten Strömung abspalten und damit die Ergebnisse von Tollmien [18] für schwach gekrümmte Strömungen und ihre Ergänzungen durch Pistolesi [13] verifizieren. Dabei zeigt sich, daß Tollmiens Ansätze für das Moment im Falle des Ellipsoids durchaus vollständig sind.

Unsere Untersuchung bestätigt, daß zur Bestimmung des Geschwindigkeitspotentials und des daraus abgeleiteten Kelvinimpulses an einer Stelle stets die Auflösung einer Integralgleichung erforderlich wird; eine direkte Bestimmung dieser Größen — und damit der Kraftwirkungen — durch Quadratur würde implizit auch einer direkten Auflösung der Integralgleichung gleichkommen.

Für die numerische Behandlung der Integralgleichung für die räumliche Dipolverteilung werden zwei verschiedene Ansätze vorgeschlagen, aus denen für konkrete Probleme Annäherungsverfahren entwickelt werden können.

Von Rubbert [14] wurde ein Verfahren angegeben, den Kelvinimpuls auf direktem Wege aus der Körperform zu berechnen; ebenfalls wurde von ihm ein Verfahren zur direkten Bestimmung des Geschwindigkeitspotentials aus der Körperform angekündigt.

Wir können im folgenden bestätigen, daß die von Rubbert angegebene Methode sich im Falle der Kugel und des Kreiszylinders, allgemein sogar bei jedem Ellipsoid, mit Erfolg anwenden läßt. Aus den bekannten Lösungen dieser Fälle wird nämlich ersichtlich, daß die zu behandelnde vektorielle Integralgleichung wegen der speziellen Wahl des Grundgebietes in gewissem Sinne entartet, daß sie nämlich durch die Lösung einer linearen Gleichung, d. h. durch eine konstante Vektorverteilung befriedigt werden kann. Eine Ausdehnung des Ansatzes von Rubbert auf allgemeinere Körper erscheint nicht gerechtfertigt. Für den von Rubbert untersuchten Formtensor offenbart sich stattdessen seine Bedeutung im Kleinen, nämlich bei der Behandlung eines räumlichen uneigentlichen Integrals.

Der Versuch, unser Verfahren auf Grundströmungen mit Rotationen auszudehnen, stößt schon bei der Ermittlung der Störströmung auf Schwierigkeiten. Zwar läßt sich in vollkommen analoger Weise eine Potentiallösung angeben, welche in Überlagerung zur Grundströmung die kinematischen Bedingungen an der Körperoberfläche erfüllt und in großer Entfernung abklingt; es läßt sich jedoch offenbar nicht sicherstellen, daß die resultierende Strömung substantiell-rotationserhaltend wird; nur in diesem Falle aber kann ohne eingepreßte Kräfte ein Druckgradient existieren, d. h. der von Euler eingeführte Ausdruck für den Druckgradienten wirklich rotationsfrei sein; eben auf dieser Annahme aber baut sich unser Verfahren auf.

Allgemeine Voraussetzungen, Bezeichnungen

Für die Oberflächen der Körper, auf welche sich die folgende Theorie erstrecken soll, setzen wir voraus, daß sie für die auftretenden Randwerte des Potentials bzw. seiner Normalableitung eine eindeutige, singularitätenfreie Fortsetzung des Potentials ins Innere gestatten, d. h. daß die Dirichletsche bzw. Neumannsche Randwertaufgabe eindeutig lösbar ist. Weiter nehmen wir für die Oberflächen an, daß sie die Umwandlung von Oberflächenintegralen in Gebietsintegrale gestatten, wenn der Integrand am Rande stetig und innen stetig differenzierbar ist und in vektoralgebraischer Form den Normalenvektor als Faktor enthält; hinreichend hierfür ist, daß die Oberfläche fast überall eine stetige Normale hat [11]. Unter dieser Voraussetzung gilt folgende Verallgemeinerung des Satzes von Gauss [4], von der im folgenden häufig Gebrauch gemacht wird:

¹⁾ Vorgetragen vor dem Internationalen Kongreß für angewandte Mechanik, Stresa 1960.

Es sei $\pi(\alpha, b, c, \dots, u, \dots)$ ein vektoralgebraisches Produkt, das an einer Stelle als Faktor den Normalenvektor n , im übrigen ortsabhängige Vektoren α, b, c, \dots enthält. Ferner seien S_1 und S_2 zwei geschlossene Flächen, welche fast überall eine stetige äußere Normale n haben und S_1 schließe die Fläche S_2 ein. Dann gilt, falls alle Ortsfunktionen im Raum V zwischen S_1 und S_2 stetig differenzierbar sind und die Randwerte stetig annehmen,

$$\oint \pi(\alpha, b, c, \dots, u, \dots) dS_1 = \int_{S_1} \pi(\alpha, b, c, \dots, \bar{\nabla} \dots) dV + \oint \pi(\alpha, b, c, \dots, u, \dots) dS_2.$$

Das Symbol $\bar{\nabla}$ bezeichnet hierbei den Differentialoperator ∇ , die Überstreichung soll bedeuten, daß ∇ auf alle ortsabhängigen Faktoren von π (auch die vor ∇ stehenden) nach der Produktregel anzuwenden ist. Die obige Formel besagt dann, daß die Integration auf eine kleinere Fläche „zusammengezogen“ werden darf, wenn man zum Ausgleich ein Volumenintegral über den Raum zwischen den Flächen hinzunimmt, für welches man dS durch dV und n durch $\bar{\nabla}$ zu ersetzen hat. Insbesondere gilt der Satz auch, wenn S_2 verschwindet; das Volumenintegral ist dann über den gesamten von S_1 eingeschlossenen Raum auszudehnen.

Um die auftretenden mehrfachen Vektorprodukte mit einem Minimum an Symbolen darstellen zu können, unterscheiden wir im folgenden die verschiedenen vektoralgebraischen Produkte nur durch die Art der Klammer, durch welche beide Faktoren zusammengefaßt sind. Der Inhalt einer runden Klammer $()$ ist stets ein Skalar, der einer eckigen Klammer $[\]$ stets ein Vektor. Für die Darstellung dyadischer Produkte wird eine fett gedruckte Klammer $(\)$ verwendet, falls der dyadische Charakter der Größe betont werden soll, wobei wir unter den Darstellungen $(ab)_j c = (cb)_a = (ca)_b = a(bc) = b(ac)$ wählen können. Der Inhalt einer geschweiften Klammer $\{ \}$ kann von beliebigem Charakter sein.

Ist der Operator ∇ nicht überstrichen, so soll er stets nur auf den folgenden Faktor oder Klammersausdruck angewandt werden. In Sonderfällen sind die Faktoren durch Überstreichen gekennzeichnet, auf welche die ∇ -Operation erstreckt werden soll.

In der folgenden Darstellung werden drei- und zweidimensionale Strömungen gemeinsam behandelt. Eine zweidimensionale Strömung ist dadurch ausgezeichnet, daß der Strömungsverlauf in allen zu einer gegebenen Ebene parallelen Ebenen derselben ist, und daß die Strömungskomponenten senkrecht zu diesen Ebenen verschwinden; die Strömung kann dann im ebenen Koordinatensystem eindeutig beschrieben werden. Während nun einige der im folgenden benutzten Begriffe sowohl im Raum wie in der Ebene definiert sind (etwa Abstand, Dichte, Gebiet usw.), müssen wir anderen Begriffen des Raumes noch eine spezielle analoge Bedeutung im zweidimensionalen Fall zuordnen, um beide Fälle in gemeinsamer Terminologie behandeln zu können. So wollen wir in gewissen Fällen auch den Rand des zweidimensionalen Querschnitts, der einen zylindrischen Körper repräsentiert, als Körperoberfläche bezeichnen.

Unter „Kraft“ und „Moment“ wollen wir im zweidimensionalen Fall Kraft bzw. Moment pro Längeneinheit dieses unendlich ausgedehnten Zylinders verstehen; weitere Begriffserweiterungen ergeben sich sinngemäß.

Übersicht der wichtigsten Bezeichnungen

1. Skalare

D	— Dimensionszahl
dS	— Flächenelement
dS _k	— Kugeloberflächenelement
S ₀	— 2 ^D -1 π — Oberfläche von Einheitskugel bzw. -kreis
σ	— Oberflächenquellbelegung

q	— räumliche Quellbelegung
φ	— Geschwindigkeitspotential der Störströmung
ψ	— Beschleunigungspotential gemäß (6.14)
R	= $ r - r' $ — Abstand
G	— Potentialfunktion einer Quelle
a, b, c	— Ellipsoidhalbmesser
A, B, C	— Halbmesser eines dazu konfokalen Ellipsoids
abc	— Volumenverhältnis
ABC	— Distributionen
μ, θ	— Winkelvariable
Θ	— Winkelvariable
λ	— elliptische Koordinate gemäß (3.1)
α	— Funktion gemäß (3.4a, b)
k_x	— Koeffizienten der hydrodynamischen Masse
k_x'	— Koeffizienten des hydrodynamischen Trägheitsmomentes
J _{xx}	— polares Trägheitsmoment
p	— Druck
ρ	— Dichte
V	— Körpervolumen
E	— Verhältnis gemäß (3.3)

2. Vektoren

r	— Ortsvektor des Körperpunktes
r'	— Ortsvektor des Aufpunktes
r ₀	— Ortsvektor bezüglich des Körperformschwerpunktes
c	— Translationsgeschwindigkeit
ω	— Rotationsgeschwindigkeit
n	— äußere Normale
\mathfrak{L}	— ungestörte Grundströmung
\mathfrak{L}	— resultierende Strömung
\mathfrak{P}	— von der Flüssigkeit auf den Körper ausgeübte Kraft
\mathfrak{M}	— von der Flüssigkeit auf den Körper ausgeübtes Moment
\mathfrak{K}	— Kelvinimpuls gemäß (8.9a)
\mathfrak{I}	— Impuls gemäß (7.17)
\mathfrak{D}	— Kelvindrehimpuls gemäß (8.9b)
\mathfrak{D}_0	— Drehimpuls gemäß (7.21)
m	— kontinuierlich verteilter Dipolvektor
m*	— Dipolvektor, der (2.10) genügt
m*, ₀	— Dipolvektor mit $(\nabla \cdot m^*) = 0$
$\bar{\nabla}$	— Differentialoperator

3. Tensoren

I	— Einheitstensor
Γ	— Ableitungsaffinor einer schwach gekrümmten Strömung
Λ	— Formtensor eines Körpers bezüglich seines Formschwerpunktes
Λ_r	— Formtensor eines Körpers bezüglich eines Punktes mit Ortsvektor r

I. Die Störströmung und ihre Darstellungen

1. Allgemeine Darstellungen des Geschwindigkeitspotentials

Jede inkompressible Grundströmung w kann durch Superposition einer Potentialströmung so modifiziert werden, daß die resultierende Strömung als Umströmung eines vorgegebenen, beliebig bewegten starren Körpers erscheint. Verlangen wir, daß die überlagerte Strömung und ihr Potential φ mit zunehmender Entfernung abklingt, so gestattet [5] das Potential nach der Greenschen Formel die Darstellung

$$\varphi = - \frac{1}{S_0} \int G(n \nabla \varphi) dS + \frac{1}{S_0} \int \varphi(n \nabla G) dS. \quad (1.1)$$

Hierbei gilt im Falle drei- bzw. zweidimensionaler Strömung $G = 1/R$ bzw. $G = \ln 1/R$, wobei $R = |r - r'|$ der Abstand vom Körperpunkt r' zum Aufpunkt r des Potentials ist; $S_0 = 4\pi$ bzw. 2π ist die Oberfläche von Einheitskugel bzw. Einheitskreis. Weiter ist n der nach außen gerichtete Vektor der Normalen und dS das Element der Körperoberfläche S .

Der erste Summand entspricht einer Quellbelegung von S mit einer Ergiebigkeit $-(n \nabla \varphi)$; der zweite einer Dipolverteilung auf S vom Moment $n\varphi$; — d. h., der erste Term bringt den Einfluß der Normalgeschwindigkeit auf S , der zweite den der Tangentialgeschwindigkeit, welche durch Vorgabe von φ auf S bestimmt wird.

Die kinematische Bedingung, daß S als Oberfläche des starren Körpers nicht durchflossen wird, kann durch

$$(\mathfrak{B}_{rel} n) = 0 \quad (1.2)$$

ausgedrückt werden, wenn $\mathfrak{B}_{rel} = \mathfrak{B}_{rel} - \nabla\varphi$ ist, wobei \mathfrak{B}_{rel} die ungestörte Strömung relativ zum Körper und $-\nabla\varphi$ die überlagerte Strömung darstellt.

Es sei nun φ_i ein Potential, das in dem von S eingeschlossenen Gebiet V definiert und differenzierbar ist und stetig auf S die Werte von φ annimmt.

Dann erhalten wir aus (1.1) und (1.2)

$$\varphi = -\frac{1}{S_0} \int (\mathfrak{B}_{rel} n) G dS + \frac{1}{S_0} \int \varphi_i (n \nabla G) dS \quad (1.3)$$

und durch Anwendung des Satzes von Gauss daraus

$$\varphi = -\frac{1}{S_0} \int (\mathfrak{B}_{rel} \nabla G) dV + \frac{1}{S_0} \int (\nabla \varphi_i \nabla G) dV, \quad (1.4)$$

da für die Grundströmung die Divergenz $(\nabla \mathfrak{B}_{rel})$ verschwindet.

(1.4) kann aufgefaßt werden als Erzeugung von φ aus einer räumlichen Dipolverteilung vom Moment

$$m = \mathfrak{B}_{rel} + \nabla \varphi_i \quad (1.5)$$

in der Form
$$\varphi = \frac{1}{S_0} \int (m \nabla) G dV; \quad (1.6)$$

dem ist äquivalent eine Quelledarstellung

$$\varphi = \frac{1}{S_0} \int (mm) G dS - \frac{1}{S_0} \int G (\nabla m) dV \quad (1.7)$$

aus einer Oberflächenquellbelegung der Ergiebigkeit

$$\sigma = (mm) \quad (1.8)$$

auf S und einer räumlichen Quellverteilung der Ergiebigkeit

$$q = -(\nabla m). \quad (1.9)$$

Aus (1.2) und (1.8) folgt

$$\sigma = (n \nabla \varphi_i) - (n \nabla \varphi), \quad (1.10)$$

d.h. die Quellbelegung bestimmt in bekannter Weise den Sprung der Normalgeschwindigkeiten auf der Fläche S.

Über die Existenz der erzeugenden Dipolverteilung m zu vorgegebenen \mathfrak{B}_{rel} kommen wir damit zu folgenden Aussagen:

1. Die Lösbarkeit des Dirichletschen Randwertproblems (Vorgabe von φ_i auf S) bedingt, daß es zu jeder Quellverteilung q in V eine φ erzeugende Dipolverteilung m gibt mit $(\nabla m) = -q$ und

$$[\nabla m] = -[\nabla \mathfrak{B}_{rel}] \quad (1.11)$$

insbesondere gibt es eine Verteilung m_0 mit $(\nabla m_0) = 0$.

2. Die Lösbarkeit der Neumannschen Randwertaufgabe (Vorgabe von $(n \nabla \varphi_i)$ auf S) bedingt, daß es dann auch zu jeder in V vorgegebenen Strömung u eine φ darstellende Dipolverteilung m gibt mit $[\nabla m] = [\nabla u] - [\nabla \mathfrak{B}_{rel}]$ und $(\nabla m) = (\nabla u)$.

Divergenz und Rotation von m können also im Inneren frei vorgegeben werden, wenn wir (mm) offenhalten.

Ist die Grundströmung \mathfrak{B}_{rel} relativ zum Körper zeitabhängig, so gilt wegen (1.2), (1.5), (1.6) dasselbe für φ , σ und m. Bezeichnen wir die Zeitableitungen dieser Größen in einem körperfesten Ort durch einen aufgesetzten Punkt, so hat $\dot{\varphi}$ die Bedeutung eines Beschleunigungspotentials der Störströmung relativ zu einem körperfesten Bezugssystem. Insbesondere erhalten wir analog zu (1.7)

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{S_0} \int \dot{\sigma} G dS - \frac{1}{S_0} \int \dot{q} G dV \quad (1.12)$$

mit
$$\dot{\sigma} = (\dot{mm}) \quad \text{und} \quad -\dot{q} = (\nabla \dot{m}). \quad (1.13)$$

2. Die Integralbedingung räumlicher Dipolverteilungen

Wenn die Störströmung $-\nabla\varphi_i$ in V aus der Belegung σ auf S und der Quellverteilung q in V erzeugt wird, wenn also

$$\nabla\varphi_i = \nabla \frac{1}{S_0} \int \sigma G dS + \nabla \frac{1}{S_0} \int q G dV \quad (2.1)$$

gilt, so folgt daraus wegen (1.8), (1.9), (1.5) für die innere Relativströmung $\mathfrak{B}_{rel} = -m$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{rel} &= \mathfrak{B}_{rel} + \nabla \frac{1}{S_0} \int (n \mathfrak{B}_{rel}) G dS - \nabla \frac{1}{S_0} \int (\nabla \mathfrak{B}_{rel}) G dV. \\ &= \mathfrak{B}_{rel} + \nabla \frac{1}{S_0} \int (n \mathfrak{B}_{rel}) G dS - \nabla \frac{1}{S_0} \int (\nabla \mathfrak{B}_{rel}) G dV. \end{aligned} \quad (2.2a)$$

Schon unter der schwachen Voraussetzung, daß $q = (\nabla \mathfrak{B}_{rel})$ beschränkt und integrierbar ist, kann gezeigt werden, daß der letzte Summand von (2.1) bzw. (2.2a) in V gleichmäßig stetig ist, und daß die ∇ -Operation mit der Integration vertauscht werden darf [3]. Wegen (1.10) folgt, daß bei Erfüllung von (2.2a) die äußere Strömung

$$\mathfrak{B}_{rel} = \mathfrak{B}_{rel} + \nabla \frac{1}{S_0} \int (n \mathfrak{B}_{rel}) G dS - \nabla \frac{1}{S_0} \int (\nabla \mathfrak{B}_{rel}) G dV \quad (2.2b)$$

die Bedingung $(\mathfrak{B}_{rel} n) = 0$ erfüllt und damit die gesuchte Relativströmung außerhalb des Körpers durch (2.2b) dargestellt werden kann; äquivalent zu (2.2b) ist

$$\mathfrak{B}_{rel} = \mathfrak{B}_{rel} + \nabla \frac{1}{S_0} \int (\mathfrak{B}_{rel} \nabla) G dV, \quad (2.2c)$$

wobei \mathfrak{B}_{rel} hier die Dipolverteilung $m^* = -\mathfrak{B}_{rel}$ bestimmt. Alle Dipolverteilungen m, welche einer inneren Strömung \mathfrak{B}_{rel} entsprechen, welche (2.2a) genügt, wollen wir im folgenden mit einem * kennzeichnen. Die Verteilungen sind durch die Bedingung (1.11) charakterisiert.

Als Lösung der Dirichletschen Randwertaufgabe existiert nun insbesondere eine Fortsetzung φ_{oi} von φ in V, für welche $\Delta\varphi_{oi} = 0$ gilt und damit auch $q = (\nabla \mathfrak{B}_{rel})$ verschwindet. Die zugehörige Dipolverteilung m_0^* genügt dann der Gleichung

$$m_0^* = -\mathfrak{B}_{rel} + \frac{1}{S_0} \nabla \int (m_0^* n) G dS. \quad (2.3)$$

Durch skalare Multiplikation mit n folgt daraus für die Quellbelegung $\sigma_0 = (m_0^* n)$ die Integralgleichung

$$\sigma_0 = -(\mathfrak{B}_{rel} n) + (n \nabla) \frac{1}{S_0} \int \sigma_0 G dS \quad (2.4a)$$

wobei im zweiten Summanden der Grenzwert des Gradienten bei Annäherung von innen zu verstehen ist; wegen (1.10) können wir gleichwertig schreiben

$$\sigma_0 = -(\mathfrak{B}_{rel} n) + (n \nabla) \frac{1}{S_0} \int \sigma_0 G dS + \frac{\sigma_0}{2} \quad (2.4b)$$

wenn wir jetzt den Mittelwert des Gradienten bei Annäherung von beiden Seiten verstehen wollen.

Der Typ der Integralgleichung (2.4b) ist im Rahmen der klassischen Potentialtheorie eingehend untersucht worden [3], [5]. Es wurde gezeigt, daß die zugehörige homogene Gleichung keine nichttriviale Lösung zuläßt, und daß der dreifach iterierte Kern beschränkt ist und damit die Gleichung im Anwendungsbereich der Fredholmschen Theorie liegt.

Wegen der singulären Stelle des Kerns an der Stelle $R = 0$, dem Sprung des Gradienten auf S und wegen der Notwendigkeit der Integration über gekrümmte Flächen ist die Integralgleichung (2.4b) nur schwierig mit numerischen Methoden zu behandeln. Es wird deshalb im folgenden eine Integralgleichung für eine räumliche Dipolverteilung im Inneren auf-

gestellt und auf ihre Lösbarkeit untersucht. Wir werden später sehen, daß die Lösungen dieser Gleichung sich auch dadurch vor Oberflächenquellbelegungen auszeichnen, daß sie unmittelbar die Berechnung aller Kraftwirkungen auf den Körper gestatten.

Wir gehen aus von einer Betrachtung der Integralbedingung (2.2a), welche für die Dipolverteilung m^* lautet

$$m^* = -\mathfrak{M}_{rel} + \nabla \int_{S_0} (m^* n) G dS - \nabla \int_{S_0} (\nabla m^*) G dV. \quad (2.5)$$

Diese Gleichung läßt sich unter Abspaltung der Singularität bei $R = 0$ so umformen, daß rechts ein Gebietsintegral über V auftritt. Der Term, den wir als Beitrag der singulären Stelle dem Volumenintegral hinzufügen, hängt dabei ab von der Wahl des Umgebungssystems mit dem wir die Stelle $R = 0$ von der Integration ausschließen.

Betrachten wir vorerst als Umgebungen U_ε eines inneren Punktes r kugelförmige Bereiche $R < \varepsilon$ mit Oberfläche S_ε und untersuchen den Ausdruck $1/S_0 \nabla \int (an) G dS_\varepsilon$ für den Fall, daß a ein in U_ε konstanter Vektor ist. Bei Einführung von Kugelkoordinaten R, Θ, φ bzw. Polarkoordinaten R, Θ , wobei der Winkel Θ gegen die Richtung von a gemessen wird, so daß $(an) = |a| \cos \Theta$ gilt, folgt mit $G = 1/R$ bzw. $G = \ln 1/R$

$$\frac{1}{S_0} \nabla \int (an) G dS_\varepsilon \quad u | v | = \frac{1}{4\pi} \cos \Theta \sin \Theta d\Theta d\varphi \quad (2.6a)$$

$$\text{bzw.} \quad = |a| n \frac{1}{2\pi} \cos \Theta d\Theta \quad (2.6b)$$

unabhängig vom Radius ε ; es ergibt sich dann

$$\frac{1}{S_0} \nabla \int (an) G dS_\varepsilon = \frac{a}{2} \int_0^\pi \cos^2 \Theta \sin \Theta d\Theta = \frac{1}{3} a \quad (2.7a)$$

$$\text{bzw.} \quad \frac{1}{S_0} \nabla \int (an) G dS_\varepsilon = \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \Theta d\Theta = \frac{1}{2} a. \quad (2.7b)$$

Wenden wir die ∇ -Operation nicht auf die Koordinaten des Aufpunktes r , sondern die des Punktes r' an, über den integriert wird, so haben wir, da G eine Funktion der Koordinatendifferenzen von r und r' ist, auf den rechten Seiten von 7a, b) das Vorzeichen zu wechseln, wir erhalten

$$\frac{1}{S_0} \int (an) \nabla G dS_\varepsilon = -\frac{a}{D}, \quad (2.7c)$$

wenn D die Dimensionszahl, d. h. 3 bzw. 2 ist. Wenn m^* in U_ε nur linear von m_0 , dem Wert für $R = 0$, abweicht, verschwindet aus Symmetriegründen der Beitrag dieser Abweichung, für eine allgemeine Verteilung m^* gilt damit

$$\frac{1}{S_0} \int (m^* n) \nabla G dS_\varepsilon = -\frac{m_0}{D} + 0(\varepsilon^2). \quad (2.8)$$

Wenden wir jetzt den Satz von Gauss auf die rechte Seite der Gleichung (2.5) und auf das Gebiet zwischen S und S_ε an, so ergibt sich

$$m^* = -\mathfrak{M}_{rel} + \frac{m^*}{D} - \frac{1}{S_0} \int_{S_\varepsilon} (m^* \nabla) \nabla G dV - \frac{1}{S_0} \int_{S_\varepsilon} (\nabla m^*) \nabla G dV + 0(\varepsilon^2) \quad (2.9)$$

bzw. bei Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$

$$m^* = -\mathfrak{M}_{rel} + \frac{m^*}{D} + \frac{1}{S_0} \oint (m^* \nabla) \nabla G dV, \quad (2.10)$$

wobei das Symbol \oint in Analogie zum Cauchywert den Grenzwert des Integrals bei Auslassung kugel- bzw. kreisförmiger Umgebungen der singulären Stelle $R = 0$ bedeutet.

Den Kern der Integralbedingung (2.10) können wir nach Durchführung der Differentiation als Dyade ausdrücken. Sei r° der Einheitsvektor der Richtung vom Punkt r zum Punkt r' , so finden wir für den Kern die Darstellung:

$$-(\nabla \nabla G) = \left(\nabla \frac{r^\circ}{R^{D-1}} \right) = \frac{1}{R^D} (I - D(r^\circ r^\circ)) \quad (2.11)$$

wenn die fettgedruckten Klammern $()$ die dyadische Verknüpfung darstellen und I der Einheitstensor ist.

3. Die Umströmung eines bewegten Ellipsoids

Im Falle eines Ellipsoids, das sich gegen ruhende Grundströmung bewegt, wurde das Potential der Störströmung von Clebsch explizit angegeben [7], [19]. Für Bewegung längs bzw. um eine Hauptachse erscheint es als Produkt einer Funktion der elliptischen Koordinate λ und einem Monom der kartesischen Koordinaten bezüglich der Ellipsoidhauptachsen. Eine vektorielle Darstellung der Umströmung wird daraus im folgenden entwickelt:

Es seien a, b, c die Halbachsen des Ellipsoids, x, y, z die entsprechenden kartesischen Koordinaten des Aufpunktes P bezüglich des Mittelpunktes. Das konfokale Ellipsoid durch P mit Halbachsen A, B, C bestimmt die elliptische Koordinate λ von P als Differenz korrespondierender Halbachsenquadrate:

$$\lambda = A^2 - a^2 = B^2 - b^2 = C^2 - c^2. \quad (3.1)$$

Für Translation mit c längs der a -Achse lautet das Geschwindigkeitspotential, wenn r_0 der Ortsvektor vom Mittelpunkt aus ist:

$$\varphi = -\delta \frac{\alpha(A, B, C)}{2 - \alpha(a, b, c)} (cr_0) \quad (3.2a)$$

und für Rotation mit ω um diese Achse gilt

$$\varphi = \delta \frac{\alpha(C, A, B) - \alpha(B, C, A)}{2 - E\{\alpha(c, a, b) - \alpha(b, c, a)\}} |\omega| yz \quad (3.2b)$$

hierbei ist $\delta = \frac{abc}{ABC}$ das Verhältnis der Volumina der Ellipsoide und

$$E = \frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2}; \quad (3.3)$$

die Funktion α dreier Argumente ist gegeben durch

$$\alpha(x, y, z) = xyz \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(x^2 + \lambda)^{1/2} (y^2 + \lambda)^{1/2} (z^2 + \lambda)^{1/2}}. \quad (3.4a)$$

Im ebenen Fall gilt mit $y \rightarrow \infty$:

$$\alpha(x, \infty, z) = \frac{2z}{x + z}. \quad (3.4b)$$

Die Bildung von $\nabla \varphi$ erfolgt nach der Produktregel, wobei einmal ∇ in kartesischen, einmal ∇ in Ellipsoidkoordinaten zu bilden ist. Der Gradient von λ verläuft in Richtung der Normalen, als Maßstabsfaktor ist die partielle Ableitung nach

λ noch mit $U = \frac{1}{|\partial r / \partial \lambda|}$ zu multiplizieren [12].

Nun gilt für die Normale n des Ellipsoids mit Halbachsen ABC in P (c, ω in A -Richtung)

$$(cn) = \{2A^2\}^{-1} U(\tau_0) \quad (3.5a)$$

$$(\omega r_0 n) = \frac{y^2}{2} U \left(\frac{1}{C^2} - \frac{1}{B^2} \right) |\omega| \quad (3.5b)$$

$$(\overline{\omega r_0 n}) = \frac{y^2}{2} U \left(\frac{1}{C^2} + \frac{1}{B^2} \right) |\omega| = \frac{B^2 + C^2}{B^2 - C^2} (\omega r_0 n) \quad (3.5c)$$

wenn $\overline{\tau_0}$ der an der x, y -Ebene gespiegelte Vektor τ_0 ist, d. h. $\overline{\tau_0}$ habe die Koordinaten $x, y, -z$.

Unter Ausnutzung dieser Relationen erhalten wir für die Translation

$$-\nabla\varphi = \delta \frac{1}{2 - \alpha(a, b, c)} [2(cn)n - \alpha(A, B, C)c] \quad (3.6a)$$

und speziell auf der Oberfläche S des umströmten Ellipsoids

$$-\nabla\varphi = -k_x c + (1 + k_x)(cn)n \quad (3.6b)$$

mit $k_x = \frac{\alpha(a, b, c)}{2 - \alpha(a, b, c)} \quad (3.7)$

woraus die Erfüllung der Oberflächenbedingung $(\nabla\varphi n) = -(cn)$ ersichtlich ist; man erkennt k_x als Maß der „Übergeschwindigkeit“ auf der durch $(cn) = 0$ gegebenen Hauptellipsoide.

Für die Rotation erhalten wir

$$-\nabla\varphi = \frac{\delta}{2 - E\{\alpha(c, a, b) - \alpha(b, c, a)\}} \left\{ 2(\omega r_0 n)n - \{\alpha(C, A, B) - \alpha(B, C, A)\} [\omega \overline{r_0}] \right\} \quad (3.8a)$$

und speziell auf S

$$-\nabla\varphi = -E k_x' [\omega \overline{r_0}] + \{1 + E^2 k_x'\} (\omega r_0 n) \quad (3.8b)$$

mit $k_x' = \frac{\alpha(c, a, b) - \alpha(b, c, a)}{E\{2 - E\{\alpha(c, a, b) - \alpha(b, c, a)\}\}} \quad (3.9)$

Unter Berücksichtigung von (3.5c) erkennt man, daß (3.8b) die Oberflächenbedingung $(\nabla\varphi n) = -(\omega r_0 n)$ erfüllt; k_x' bestimmt die relative Umströmung auf der durch $(\omega r_0 n) = 0$ gegebenen Äquatorellipse.

Durch Vergleiche der Formeln (3.6a) und (3.6b) bzw. (3.8a) und (3.8b) erkennt man, daß außerhalb jedes konfokalen Ellipsoids die Umströmung dieselbe wäre, wenn sich dieses Ellipsoid als starrer Körper mit der korrespondierenden Translationsgeschwindigkeit

$$\tilde{c} = \frac{1}{\delta} \frac{2 - \alpha(A, B, C)}{2 - \alpha(a, b, c)} c \quad (3.10a)$$

bzw. mit der korrespondierenden Winkelgeschwindigkeit

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{\delta} \frac{2 - E\{\alpha(C, A, B) - \alpha(B, A, C)\}}{2 - E\{\alpha(c, a, b) - \alpha(b, c, a)\}} \omega \quad (3.10b)$$

bewegt; es folgt daraus ganz allgemein, daß wir zu jeder Singularitätenverteilung im Inneren des Ellipsoids eine korrespondierende auf einem kleineren konfokalen Ellipsoid angeben können, welche dieselbe Umströmung von S erzeugt, insbesondere können wir zu jeder Volumendipolverteilung eine entsprechende auf der Zentralellipsenfläche angeben.

Die Darstellungen (3.6b) und (3.8b) machen es einfach, die Quellbelegung σ_0 auf der Körperoberfläche und die zugehörige der Integralgleichung (2.3) genügende Dipolverteilung m_0^* zu finden. Wenn wir setzen

$$-\nabla\varphi_i = -k_x c \quad (3.11a)$$

bzw. $-\nabla\varphi_i = -E k_x' [\omega \overline{r_0}] \quad (3.11b)$

d. h. wenn wir die zweiten Summanden von (3.6b) und (3.8b) im Inneren fortlassen, so ist diese Strömung divergenz- und rotationsfrei und ihre tangentialen Komponenten fallen auf S mit der äußeren Strömung zusammen; dadurch ist die innere

Strömung eindeutig bestimmt. Die Ergiebigkeit der Quellbelegung ergibt sich aus der Differenz der Normalkomponenten zu

$$\sigma_0 = \{1 + k_x\} (cn) \quad (3.12a)$$

bzw. $\sigma_0 = \{1 + E^2 k_x'\} (\omega r_0 n) \quad (3.12b)$

sie ist also beim Ellipsoid den Normalkomponenten der Körperbewegung konstant proportional.

Für die Dipolverteilung ergibt sich aus (3.11a), (3.11b) und (2.4a)

$$m_0^* = c + k_x c \quad (3.13a)$$

bzw. $m_0^* = [\omega r] + E k_x' [\omega \overline{r_0}] \quad (3.13b)$

Wegen (2.4c) erfüllen übrigens auch die Dipolverteilungen

$$m = \{1 + E^2 k_x'\} [\omega r_0] \quad (3.14a)$$

und $m = \frac{1}{E} \{1 + E^2 k_x'\} [\omega \overline{r_0}] \quad (3.14b)$

sowie geeignete Linearkombinationen die Bedingung $(mn) = \sigma_0$ und leisten damit die Erzeugung der Umströmung; da sie jedoch nicht unmittelbar die von ihnen induzierte innere Relativströmung erkennen lassen, sind diese Verteilungen für die Untersuchungen von Kraftwirkungen weniger geeignet, wie wir später erkennen werden.

4. Der Formtensor und seine Bedeutung für das Geschwindigkeitsfeld

Wir haben im letzten Abschnitt die Darstellung der Umströmung der Ellipsoide ausführlich behandelt, um einerseits an einem Beispiel die Bedeutung der Größen σ_0 und m_0^* zu zeigen, andererseits aber auch um herauszustellen, daß beim Ellipsoid besonders einfache Beziehungen erfüllt sind, wodurch überhaupt die Auffindung des Geschwindigkeitspotentials und seine Darstellung durch explizite Funktionen der Koordinaten möglich wird. Diese Sonderstellung der Ellipsoide macht sich speziell bemerkbar bei der Untersuchung der Integralgleichung (2.3) für die Dipolverteilung m^* , wenn wir den Fall konstanter Relativströmung \mathfrak{B}_{rel} betrachten.

Setzen wir in diese Gleichung die Lösung (3.13a) ein, nämlich

$$m^* = \{1 + k_x\} c \quad (4.1)$$

welche wir für die Translation des Ellipsoids längs der a -Hauptachse gefunden hatten, so erhalten wir die Identität

$$\{1 + k_x\} c \equiv c - \frac{1 + k_x}{4\pi} \int (cn) \nabla \frac{1}{R} dS \quad (4.2)$$

wobei über die Ellipsoidfläche S integriert wird. Diese Relation muß nun aber, da m^* im Inneren konstant ist, unabhängig sein von der Lage des Aufpunktes τ , von dem die Distanz R gemessen wird, solange τ im Inneren bleibt. Nach der Umformung

$$\frac{k_x}{1 + k_x} c = -\frac{1}{4\pi} \int (cn) \nabla \frac{1}{R} dS \quad (4.3)$$

läßt sich die rechte Seite darstellen als Produkt von c mit dem Tensor

$$\Lambda = -\frac{1}{S_0} \int (\nabla G, n) dS \quad (4.4)$$

der durch Integration der Dyade $(\nabla G, n)$ über die Körperoberfläche entsteht mit $G = 1/R$. Wir erhalten

$$\frac{k_x}{1 + k_x} c = \Lambda c \quad (4.5a)$$

Der Tensor Λ wurde von Rubbert [14] im dreidimensionalen Fall als Formtensor des Körpers — bezüglich des Aufpunktes τ — eingeführt. Liegt nun c in Richtung der b - bzw. c -Achse, so gilt analog

$$\frac{k_y}{1+k_y} c = \Lambda c \quad (4.5b)$$

bzw.
$$\frac{k_z}{1+k_z} c = \Lambda c \quad (4.5c)$$

wobei die Größen k_y, k_z sich aus dem Ausdruck (3.6) mit (3.3) durch zyklische Vertauschung von a, b, c bilden. Aus der Orthogonalität der Hauptachsen des Ellipsoids folgt, daß Λ ein symmetrischer Tensor ist — wie Rubbert auch allgemein gezeigt hat — und daß seine charakteristischen Zahlen λ_1, λ_2 und λ_3 gegeben sind durch

$$\lambda_1 = \frac{k_x}{1+k_x} \quad \lambda_2 = \frac{k_y}{1+k_y} \quad \lambda_3 = \frac{k_z}{1+k_z} \quad (4.6)$$

Während bei allgemeinen Körpern der Formtensor Λ stets von der Wahl des Aufpunktes r abhängen wird, muß er nun wegen (4.5a, b, c) bei Ellipsoiden und ihren Entartungen, den unendlichen langen elliptischen Zylindern, konstant sein. Dies läßt sich für die Kugel — nach einer Berichtigung von Rubberts Berechnungen — und für den Zylinder rechnerisch verifizieren; und zwar gilt hier $\Lambda = 1/D I$.

Die Summe der charakteristischen Zahlen, d. h. die Spur von Λ , ergibt sich als Skalarprodukt der dyadischen Faktoren zu

$$\text{spur} \{ \Lambda \} = - \frac{1}{S_0} \int (n \nabla G) dS \quad (4.7)$$

Liegt r im Inneren, so ist der Beitrag einer Umgebung U_ϵ von r aus der Integration auszunehmen, es gilt wegen $\nabla G = n \frac{\partial G}{\partial R} = - \frac{1}{R^{D-1}} n$ auf S_ϵ dann

$$\text{spur} \{ \Lambda \} = - \frac{1}{S_0} \int (n \nabla G) dS_\epsilon = 1. \quad (4.8a)$$

Dieses von Rubbert aufgestellte Spurtheorem gilt also auch im zweidimensionalen Fall.

Liegt der Aufpunkt nicht im Inneren, so folgt

$$\text{spur} \{ \Lambda \} = - \frac{1}{S_0} \int \Delta G dV = 0 \quad (4.8b)$$

Durch Einsetzen von (4.4) erhalten wir mit $\mathfrak{B}_{rel} = -c$ aus (2.4) die Beziehung

$$m^* = c + \Lambda m^* \quad (4.9)$$

woraus bei Existenz des Inversen

$$m^* = (I - \Lambda)^{-1} c \quad (4.10)$$

folgt.

Indem wir nun diese Darstellung des Dipolvektors in

$$\nabla \varphi = \nabla \frac{1}{S_0} \int (m^* n) G dS \quad (4.11)$$

einsetzen, erhalten wir durch

$$\nabla \varphi = \Lambda_{(r)} (I - \Lambda)^{-1} c \quad (4.12)$$

eine direkte Darstellung von $\nabla \varphi$ durch den außerhalb von S ortsabhängigen Formtensor $\Lambda_{(r)}$ und seinen Wert Λ im Inneren.

Der Kelvinimpuls \mathfrak{J}_k , dargestellt durch

$$\mathfrak{J}_k = - \int \rho \nabla \varphi dV \quad (4.13)$$

(vgl. 8.9a) erlaubt somit beim Ellipsoid die Darstellung

$$\mathfrak{J}_k = - \Lambda (I - \Lambda)^{-1} c \int \rho dV$$

welche auf anderem Wege von Rubbert gefunden wurde. Die Formeln (4.10), (4.12) und (4.13) gelten offenbar für die Translation aller Körper, für welche der Formtensor, vom Bezugspunkt unabhängig ist. Die Integralgleichung (2.4) wird dann durch die Lösung der linearen Vektorgleichung (4.9) befriedigt, so daß (4.10) eine räumlich

konstante Lösung ist; umgekehrt folgt, daß Λ konstant sein muß, wenn (2.4) für beliebig gerichtete c sich durch konstante Dipolverteilungen m^* befriedigen läßt.

Rubbert hat die Relation (4.13) für allgemein geformte Körper hergeleitet und kommt dadurch zu einer Einteilung aller Körper in Klassen, die bezüglich ihres Trägheitsverhaltens durch je ein äquivalentes Ellipsoid vertreten werden können. Die Relation (4.13) kann nun aber nur gelten für Körper, deren Formtensor konstant ist, da andernfalls eine Abhängigkeit des koordinaten invariant definierten Kelvinimpulses von der Wahl des Koordinaten-Anfangspunktes folgen müßte. Im allgemeinen Fall liegt eine Unabhängigkeit des Tensors Λ von r aber nicht vor, was man z. B. im Falle eines Würfels einfach feststellen kann.

5. Wege zur numerischen Behandlung der Dipolverteilung

Es wird im folgenden versucht, die Integralgleichung (2.10)

$$m^* = - \mathfrak{B}_{rel} + \frac{m^*}{D} - \frac{1}{S_0} \oint (m^* \nabla) \nabla G dV \quad (5.1)$$

durch ein lineares Gleichungssystem für die Dipolverteilung m^* zu approximieren, indem das Integral durch einen geeigneten Summenausdruck ersetzt wird, der nur den Wert von m^* an gewissen Punkten enthält. Die Verwendung einer Quadraturformel, etwa der von Gauß, verspricht hier keinen Vorteil, da der Integrand entweder nicht beschränkt oder, falls wir ihn in einer Umgebung der singulären Stelle gleich Null setzen, nicht mehr stetig ist. Wir werden stattdessen das Körperinnere in eine Anzahl von Zellen unterteilen und für den Beitrag dieser Zellen zum Integral angenäherte Ausdrücke so festsetzen, daß die Summe der Beiträge mit zunehmender Verfeinerung der Unterteilung gegen das Integral konvergiert. Bei vorgegebener Zellenzahl wird dann die Güte der Approximation wesentlich abhängen von der Wahl der Zellen und der zugehörigen Ausdrücke.

Wir kamen von (2.5) zur Integralgleichung (2.10) durch Betrachtung eines Systems konzentrischer kugelförmiger Umgebungen U_ϵ vom Radius ϵ der singulären Stelle $R = 0$. Wählen wir für die Umgebungen eine andere Form, etwa die eines Würfels, so wird der Grenzwert des Volumenintegrals i. a. anders ausfallen, d. h. es muß ein anderer Term ergänzt werden, um die Integrale in (2.5) zu ersetzen.

Für jede Umgebung U_ϵ mit Oberfläche S_ϵ und maximalem Durchmesser 2ϵ gilt gleichwertig mit (5.1)

$$m^* = - \mathfrak{B}_{rel} - \frac{1}{S_0} \int_{S_\epsilon} (m^* \nabla) \nabla G dV + \nabla \frac{1}{S_0} \int (m^* n) G dS_\epsilon - \nabla \frac{1}{S_0} \int_{S_\epsilon} (\nabla m^*) G dV \quad (5.2)$$

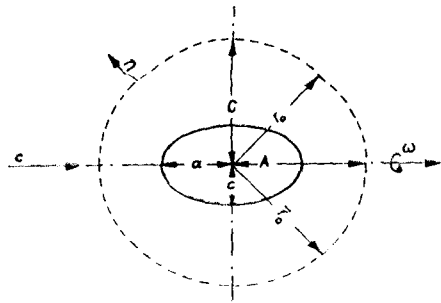
und bei Stetigkeit von m^* folgt daraus

$$m^* = - \mathfrak{B}_{rel} - \frac{1}{S_0} \int_{S_\epsilon} (m^* \nabla) \nabla G dV + \Lambda m^* + 0(\epsilon) \quad (5.3)$$

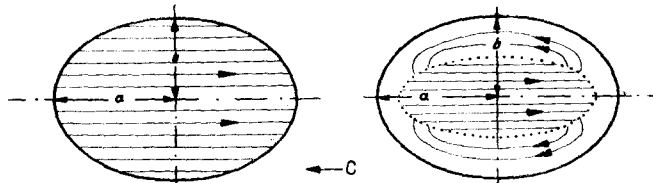
wenn Λ der — ähnlichkeitsinvariante — Formtensor des Umgebungssystem ist; wir erhalten damit nach Grenzübergang

$$m^* = - \mathfrak{B}_{rel} + \Lambda m^* - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{S_0} \int_{S_\epsilon} (m^* \nabla) \nabla G dV \quad (5.4)$$

In dieser Formel offenbart sich eine Bedeutung des Formtensors im kleinen: Der Unterschied der Ergebnisse verschie-

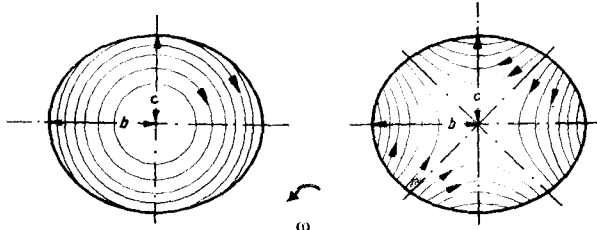


Typische Fälle für inneren Strömungsverlauf



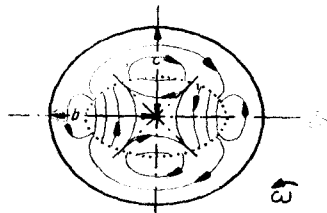
Translation, Quellbelegung auf Oberfläche

Translation, Quellbelegung auf konfokalem Ellipsoid



Rotation, innere Strömung konstanter Wirbelstärke, Quellbelegung auf der Oberfläche $m \sim |\omega r_0|$

Rotation, Quellbelegung auf Oberfläche $m \sim |\omega F_0|$



Rotation, Quellbelegung auf konfokalem Ellipsoid

dener Grenzübergänge für das Volumenintegral an der singulären Stelle drückt sich im Unterschied der Formtensoren des benutzten Umgebungssystems aus.

Für kugelförmige Umgebungen ergab sich

$$\Lambda = \frac{1}{D} \mathbf{I} \quad (5.5)$$

Aus dem Spurtheorem (4.8) folgt, daß diese Relation auch für alle Körper mit den Symmetrieeigenschaften des Würfels — und des Quadrats im ebenen Falle — gilt.

Bei Einteilung des Körpers in N kugel- oder würfelförmige Zellen kommen wir damit zu dem Ansatz:

$$m_K^* = -\mathfrak{B}_{rel} + \frac{1}{D} m_K^* - \frac{1}{S_0} \sum_{i \neq K} g_i (m_i^* \nabla) \nabla G \quad (5.6)$$

$(K = 1, \dots, N)$

wenn g_i das Volumen der i -ten Zelle und m_i^* der Wert im Zellenmittelpunkt r_i ist; explizit lauten diese Gleichungen mit $R_{iK} = |r_i - r_K|$ und $D = 2$ bzw. 3

$$m_K^* = -\mathfrak{B}_{rel} + \frac{1}{D} m_K^* + 2^{1-D} \pi \sum_{i \neq K} R_{iK}^{-(D+2)} \{R_{iK}^2 m_i^* - D (m_i, r_i - r_K) \{r_i - r_K\}\} \quad (5.7)$$

Es gibt noch eine andere Möglichkeit, die Integralgleichung (5.1) anzunähern, die sich von der Formel (5.6) wesentlich unterscheidet. Wir haben gesehen (3.13), daß für Ellipsoide die Integralgleichung im Falle konstanter Anströmung durch eine räumlich konstante Dipolverteilung m^* befriedigt wird. Gehen wir von der Annahme aus, daß sich die Komponenten von m^* im Vergleich zu den übrigen Faktoren des Integranden in einer Zelle nur wenig ändern, so liegt es nahe, für eine Zelle zu setzen

$$\frac{1}{S_0} \int (m^* \nabla) \nabla G dV_i \approx m_i^* \frac{1}{S_0} \int (\nabla \nabla G) dV_i = \Lambda_{iK} m_i^* \quad (5.8)$$

wobei m_i^* der Wert von m_i im Zellenschwerpunkt und Λ_{iK} der Formtensor der Zelle bezüglich eines Aufpunktes r_K ist; — diese Ersetzung rechtfertigt sich durch den Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Wir erhalten damit das Gleichungssystem

$$m_K^* = -\mathfrak{B}_{rel} + \sum_1^N \Lambda_{iK} m_i^* \quad (K = 1, \dots, N) \quad (5.9)$$

Da der Formtensor des Gesamtkörpers gleich der Summe der Formtensoren der Körperzellen ist, ergibt sich, daß für Ellipsoide mit $-\mathfrak{B}_{rel} = c$ dieser Ansatz stets exakt erfüllt

wird von der Lösung $m^* = \frac{D}{D-1} c$, und zwar unabhängig von der Wahl der Zelleneinteilung.

Es ist deshalb zu vermuten, daß für ellipsoidähnliche Körper der Ansatz (5.9) bei gleicher Zellenzahl eine bessere Annäherung liefert als der Ansatz (5.6). Dafür ergibt sich aber die Schwierigkeit in der Aufstellung der Formtensoren für die im allgemeinen nicht eben begrenzten Randzellen. Für Quader- und Rechteckzellen läßt sich aber der Ausdruck für den Formtensor in geschlossener Form gewinnen.

Betrachten wir nun den Fall eines Rechteckes und nehmen wir an, daß der Koordinatenursprung im Aufpunkt liegt, für den wir den Formtensor berechnen. Die Ecken des Rechtecks seien durch die Wertepaare (x_1, y_1) ; (x_2, y_1) ; (x_1, y_2) und (x_2, y_2) gegeben, es sei $x_2 > x_1$ und $y_2 > y_1$. Zu betrachten ist der Tensor

$$\Lambda = \frac{1}{2\pi} \int \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})}{R^2} dS \quad (5.10)$$

Sind i und j die Einheitsvektoren der x - bzw. y -Richtung, so daß $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ gilt, so erhalten wir folgende Komponentenzerlegung von Λ

$$\begin{aligned} \Lambda = & \text{(ii)} \frac{1}{2\pi} \int_{y_1}^{y_2} \left\{ \frac{x_2}{y^2 + x_2^2} - \frac{x_1}{y^2 + x_1^2} \right\} dy + \\ & + \text{(ii)} \frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{y_2}{x^2 + y_2^2} - \frac{y_1}{x^2 + y_1^2} \right\} dx + \\ & + \text{(ii)} \frac{1}{2\pi} \int_{y_1}^{y_2} \left\{ \frac{y}{y^2 + x_2^2} - \frac{y}{y^2 + x_1^2} \right\} dy + \\ & + \text{(ii)} \frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{x}{x^2 + y_2^2} - \frac{x}{x^2 + y_1^2} \right\} dx. \quad (5.11) \end{aligned}$$

Durchführung der Integration ergibt:

$$\Lambda = \text{(ii)} \frac{1}{2\pi} \left\{ \arctg \frac{y_2}{x_2} - \arctg \frac{y_1}{x_2} - \arctg \frac{y_2}{x_1} + \arctg \frac{y_1}{x_1} \right\} + \\ + \text{(ji)} \frac{1}{2\pi} \left\{ \arctg \frac{x_2}{y_2} - \arctg \frac{x_2}{y_1} - \arctg \frac{x_1}{y_2} + \arctg \frac{x_1}{y_1} \right\} + \\ + \text{(ii)} + \text{(ji)} \left\{ \frac{1}{4\pi} \left\{ \ln \left\{ (y_2^2 + x_1^2)(y_1^2 + x_2^2) \right\} - \right. \right. \\ \left. \left. - \ln \left\{ (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) \right\} \right\} \right. \quad (5.12)$$

Die Faktoren von (ii) und (ji) entsprechen den Winkeln, unter denen die Seiten des Rechtecks vom Aufpunkt aus gesehen werden. Für ein Rechteck der Seitenlänge 2a, 2b ergibt Einsetzen von (5.12) in (5.9) für die Komponente von m_K in Anströmrichtung

$$(m_K i) = (c_i) + \frac{2}{\pi} \arctg \frac{b}{2} (m_K i) + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N (m_i i) \left\{ \arctg \frac{(y_i + b - y_K)}{(x_i + a - x_K)} - \arctg \frac{y_i - b - y_K}{x_i + a - x_K} - \right. \\ \left. - \arctg \frac{y_i - b - y_K}{x_i - a - x_K} + \arctg \frac{y_i + b - y_K}{x_i - a - x_K} \right\} + \\ + \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^N (m_i i) \ln \left\{ \frac{((y_i + b - y_K)^2 + (x_i - a - x_K)^2)((y_i - b - y_K)^2 + (x_i + a - x_K)^2)}{((y_i - b - y_K)^2 + (x_i - a - x_K)^2)((y_i + b - y_K)^2 + (x_i + a - x_K)^2)} \right\} \quad (5.13) \\ (K = 1, \dots, N)$$

Wegen der nicht eindeutigen Fortsetzung des Potentials φ in das Innere, aus der wir die Integralbedingung (5.1) entwickelten, werden wir im allgemeinen nicht erwarten können, daß verschiedene Näherungsausdrücke für die rechte Seite von (5.1) mit abnehmendem maximalen Zelldurchmesser zu denselben inneren Strömungen führen; für unsere Aufgabenstellung ist es aber auch vollkommen ausreichend, wenn die aus den approximativen Dipolverteilungen berechneten Ausdrücke für die Kraftwirkungen bzw. für die äußere Umströmung gegen die exakten Werte konvergieren.

II. Kraftwirkungen

6. Der Euler-Druckgradient und seine Transformation

Zur Berechnung der Kraftwirkungen gehen wir aus von der Eulerschen Darstellung des Druckgradienten in kräftefreier, inkompressibler Flüssigkeit [7]:

$$-\nabla \frac{p}{\rho} = \frac{D\mathfrak{B}}{Dt} = \mathfrak{B}_t + (\mathfrak{B} \nabla) \mathfrak{B} \quad (6.1)$$

welche den Gradienten des auf die Dichte ρ bezogenen Druckes p der substantiellen Beschleunigung des Flüssigkeitselementes gleichsetzt. Der Index t bedeutet hier die partielle Ableitung nach der Zeit in einem ruhenden Bezugssystem.

Die Gleichung (6.1) setzt voraus, daß die rechte Seite tatsächlich ein Gradient ist, d. h., daß ihre Rotation verschwindet; andernfalls könnte die Strömung nur unter dem Einfluß nichtkonservativer Kräfte existieren. Bei Potentialströmungen ist dies stets gesichert und der Druck kann sogar explizit durch die Bernoulligleichung ausgedrückt werden.

Wir betrachten im folgenden einen Körper, der sich mit Geschwindigkeit c seines geometrischen Schwerpunktes und Winkelgeschwindigkeit ω bewegt gegen ein Bezugssystem, in dem (6.1) gilt; die Strömungsgeschwindigkeit relativ zum Körper ist dann

$$\mathfrak{B}_{rel} = \mathfrak{B} - c - [\omega r] \quad (6.2)$$

wenn r der Ortsvektor vom Schwerpunkt zum Aufpunkt ist. Für die Rotation der Relativströmung gilt dann wegen

$$[\nabla[\omega r]] = \omega (\nabla r) - (\omega \nabla) r = 2\omega \quad (6.3)$$

die Gleichung

$$[\nabla \mathfrak{B}_{rel}] = [\nabla \mathfrak{B}] - 2\omega. \quad (6.4)$$

Wir wollen nun die rechte Seite von (6.1) durch die Daten der Relativströmung ausdrücken. Spalten wir diese Gleichung auf in

$$-\nabla \frac{p}{\rho} = \mathfrak{B}_t + (c + [\omega r], \nabla) \mathfrak{B} + (\mathfrak{B}_{rel} \nabla) \mathfrak{B} \quad (6.5)$$

so ergibt die Summe der beiden ersten Terme die Änderung von \mathfrak{B} auf einem körperfesten Punkt, der dritte Term bringt den Einfluß der Relativströmung. Die körperfeste Änderung von \mathfrak{B} läßt sich nun andererseits darstellen aus der Zeitableitung der Relativströmung in körperfestem Bezugssystem, ihrer Änderung infolge der Drehung und die Beschleunigung des körperfesten Punktes, so daß wir erhalten

$$\mathfrak{B}_t + (c + [\omega r], \nabla) \mathfrak{B} = \\ = \dot{\mathfrak{B}}_{rel} + [\omega \mathfrak{B}_{rel}] + c_t + [\omega_t r] + [\omega [\omega r]] \quad (6.6)$$

wobei ein aufgesetzter Punkt wie in (1.12) die Zeitableitung in einem sich mit dem Körper stationär bewegenden System bezeichnet. Da weiter gilt

$$(\mathfrak{B}_{rel} \nabla) \mathfrak{B} = (\mathfrak{B}_{rel}) \nabla \{c + [\omega r] + \mathfrak{B}_{rel}\} = \\ = [\omega \mathfrak{B}_{rel}] + (\mathfrak{B}_{rel} \nabla) \mathfrak{B}_{rel} \quad (6.7)$$

erhalten wir schließlich

$$-\nabla \frac{p}{\rho} = \dot{\mathfrak{B}}_{rel} + (\mathfrak{B}_{rel} \nabla) \mathfrak{B}_{rel} + c_t + \\ + [\omega_t r] + [\omega [\omega r]] + 2[\omega \mathfrak{B}_{rel}]. \quad (6.8)$$

Wir sehen damit, daß im bewegten Bezugssystem im Ausdruck (6.1) noch die Beschleunigung des Körperpunktes gegen das Ausgangssystem und die Coriolisbeschleunigung $2[\omega \mathfrak{B}_{rel}]$ zur substantiellen Relativbeschleunigung $\dot{\mathfrak{B}}_{rel}$ hinzukommt.

Ist nun die Bedingung

$$[\mathfrak{B}_{rel} [\nabla \mathfrak{B}]] = 0 \quad (6.9)$$

erfüllt, so gilt wegen (6.4)

$$(\mathfrak{B}_{rel} \nabla) \mathfrak{B}_{rel} + [2\omega, \mathfrak{B}_{rel}] = \nabla \frac{(\mathfrak{B}_{rel}, \mathfrak{B}_{rel})}{2} \quad (6.10)$$

und damit muß auch die Summe der restlichen Terme von (6.6) einen Gradienten darstellen; da die Rotation von c_t und $[\omega [\omega r]]$ verschwindet, muß gelten

$$[\nabla \mathfrak{B}_{rel}] = -2\omega_t \quad (6.11)$$

und wir dürfen ein verallgemeinertes Beschleunigungspotential ψ einführen durch

$$c_t + [\omega [\omega r]] + \dot{\mathfrak{B}}_{rel} + [\omega_t r] = -\nabla \psi \quad (6.12)$$

woraus dann folgt, daß

$$-\nabla \frac{p}{\rho} = \nabla \frac{(\mathfrak{B}_{rel}, \mathfrak{B}_{rel})}{2} - \nabla \psi. \quad (6.13)$$

Die Funktion ψ kann dann durch geeignete Wahl einer additiven Konstanten so bestimmt werden, daß

$$\frac{p}{\rho} = \psi - \frac{(\mathfrak{B}_{rel}, \mathfrak{B}_{rel})}{2} \quad (6.14)$$

gilt. Die Darstellung (6.14) für den Druck ist für die Berechnung der Kraftwirkungen auf den Körper dadurch besonders ausgezeichnet, daß ψ eine stetige Fortsetzung in das Körperinnere zuläßt, und daß der zweite Term wegen $(\mathfrak{B}_{rel}^n) = 0$ auf S besonders einfach umzuformen ist.

Wir werden im folgenden von der Relation (6.14) und damit von der Bedingung (6.9) nur auf der Körperoberfläche Gebrauch zu machen haben.

Im ebenen Fall müssen wir mit (6.9) verlangen, daß auf S die Rotation der Strömung \mathfrak{B} verschwindet, sobald $\mathfrak{B}_{rel} \neq 0$ ist; im räumlichen Fall brauchen wir nur vorauszusetzen, daß etwa auf S existierende Wirbel die Richtung von \mathfrak{B}_{rel} haben (Beltrami-Strömung); sie verlaufen damit wegen $(\mathfrak{B}_{rel}^n) = 0$ in der Oberfläche.

7. Kraft und Moment

Kraft und Moment, welche die Flüssigkeit als „hydrodynamische Reaktion“ auf den Körper ausübt, stellen sich dar durch

$$\mathfrak{P} = - \int p n dS \quad (7.1)$$

$$\mathfrak{M} = - \int p [rn] dS. \quad (7.2)$$

Ist auf S (6.1 und (6.9) erfüllt, so können wir (6.14) benutzen, müssen aber beachten, daß die äußere Relativströmung \mathfrak{B}_{rel} einzusetzen ist; wir werden dann (7.1) und (7.2) ausdrücken durch innere Relativströmungen, welche durch Quellbelegungen σ der Oberfläche und Quellverteilungen q im Inneren erzeugt werden. Es gilt dann

$$\sigma n = \mathfrak{B}_{rel} - \mathfrak{B}_{rel,i}, \quad (7.3)$$

$$\text{wenn} \quad \mathfrak{B}_{rel,i} = \mathfrak{B}_{rel} + \nabla \varphi_i \quad (7.4)$$

in Analogie zu (1.2) die resultierende Relativströmung im Inneren ist; (der Index i wird im folgenden nur verwandt, wenn eine Unterscheidung gegen die äußere Strömung notwendig ist). Es folgt aus (1.2), daß $\sigma = - (n\mathfrak{B}_{rel,i})$ wird. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{(\mathfrak{B}_{rel}, \mathfrak{B}_{rel})}{2} n &= \frac{(\mathfrak{B}_{rel,i}, \mathfrak{B}_{rel,i})}{2} n - (n\mathfrak{B}_{rel,i}) \mathfrak{B}_{rel,i} - \\ &- \sigma (n\mathfrak{B}_{rel,i}) n + \frac{\sigma^2}{2} n - \sigma \mathfrak{B}_{rel,i} \\ &= \frac{(\mathfrak{B}_{rel,i}, \mathfrak{B}_{rel,i})}{2} n - (n\mathfrak{B}_{rel,i}) \mathfrak{B}_{rel,i} - \frac{\sigma}{2} \{\mathfrak{B}_{rel} + \mathfrak{B}_{rel,i}\} \end{aligned} \quad (7.5)$$

weiter ist nach dem Satz von Gauß

$$\begin{aligned} \int \frac{(\mathfrak{B}_{rel,i}, \mathfrak{B}_{rel,i})}{2} n dS - \int (n\mathfrak{B}_{rel,i}) \mathfrak{B}_{rel,i} dS &= \\ &= - \int \mathfrak{B}_{rel,i} (\nabla \mathfrak{B}_{rel,i}) dV - \int [\mathfrak{B}_{rel,i} [\nabla \mathfrak{B}_{rel,i}]] dV, \end{aligned} \quad (7.6)$$

so daß wir erhalten

$$\begin{aligned} \int \frac{(\mathfrak{B}_{rel}, \mathfrak{B}_{rel})}{2} n dS &= - \int \frac{\sigma}{2} \{\mathfrak{B}_{rel} + \mathfrak{B}_{rel,i}\} dS - \\ &- \int q \mathfrak{B}_{rel,i} dV + \left[2\omega \int \mathfrak{B}_{rel,i} dV \right] - \int [\mathfrak{B}_{rel,i} [\nabla \mathfrak{B}]] dV. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Setzen wir noch (7.4) ein, so ergibt sich hiermit

$$\begin{aligned} \int \frac{(\mathfrak{B}_{rel}, \mathfrak{B}_{rel})}{2} n dS &= - \int \sigma \mathfrak{B}_{rel} dS - \int q \mathfrak{B}_{rel} dV + \\ &+ \left[2\omega \int \mathfrak{B}_{rel,i} dV \right] - \int [\mathfrak{B}_{rel,i} [\nabla \mathfrak{B}]] dV + \\ &+ \int \frac{\sigma}{2} \{\nabla \varphi_i + \nabla \varphi\} dS + \int q \nabla \varphi_i dV. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Die Umformungen (7.5) bleiben erhalten, wenn wir vektoriell von links mit dem Ortsvektor r multiplizieren. Außerdem gilt analog (7.6), da $[\nabla r]$ identisch verschwindet,

$$\begin{aligned} \int \frac{(\mathfrak{B}_{rel,i}, \mathfrak{B}_{rel,i})}{2} [rn] dS - \int (n\mathfrak{B}_{rel,i}) [r\mathfrak{B}_{rel,i}] dS &= \\ &- \int q [r\mathfrak{B}_{rel,i}] dV + \int [r [\mathfrak{B}_{rel,i} [\nabla \mathfrak{B}_{rel,i}]]] dV \end{aligned} \quad (7.9)$$

und wir erhalten in Analogie zu (7.7)

$$\begin{aligned} \int \frac{(\mathfrak{B}_{rel}, \mathfrak{B}_{rel})}{2} [rn] dS &= - \int \sigma [r\mathfrak{B}_{rel}] dS - \int q [r\mathfrak{B}_{rel}] dV - \\ &- 2 \int [r [\omega \mathfrak{B}_{rel,i}]] dV - \int [r [\mathfrak{B}_{rel,i} [\nabla \mathfrak{B}]]] dV + \\ &+ \int \sigma [r, \nabla \varphi + \nabla \varphi_i] dS + \int q [r \nabla \varphi_i] dV. \end{aligned} \quad (7.10)$$

In den Ausdrücken (7.8) und (7.10) gelangt man zu einer Vereinfachung, wenn man berücksichtigt, daß die wechselseitigen Kräfte zwischen zwei Quellpunkten denselben Betrag und dieselbe Wirkungslinie, aber entgegengesetzte Richtung haben. Deshalb (d. h. weil die Funktion G in (1.7) eine gerade Funktion der Koordinatendifferenzen ist) verschwindet a fortiori das Integral der Wirkung eines Quellsystems auf sich selbst als Beitrag zu resultierenden Kraft- und Momentwirkungen. Es muß also gelten

$$\int \sigma \nabla \varphi_i dS + \int \sigma \nabla \varphi dS + 2 \int q \nabla \varphi_i dV = 0 \quad (7.11a)$$

$$\int \sigma [r \nabla \varphi_i] dS + \int \sigma [r \nabla \varphi] dS + 2 \int q [r \nabla \varphi_i] dV = 0 \quad (7.11b)$$

d. h. die letzten Terme von (7.8) und (7.10) leisten insgesamt keinen Beitrag.

Mit (7.4) gilt auch

$$\mathfrak{B}_{rel} = \mathfrak{B}_{rel} - \nabla \psi \quad (7.12a)$$

$$\mathfrak{B}_{rel,i} = \mathfrak{B}_{rel} - \nabla \psi_i. \quad (7.12b)$$

Wir können dann wegen (1.12) ψ so zu einer Funktion ψ_i in das Innere fortsetzen, daß $\psi_i = \psi$ auf S gilt und

$$-\nabla \psi_i = c_t + [\omega [\omega r]] + [\omega_t r] + \mathfrak{B}_{rel} - \nabla \psi_i. \quad (7.13)$$

Dann erhalten wir durch Anwendung des Satzes von Gauß auf (7.1) und (7.2) unter Berücksichtigung von (7.8), (7.10), (7.11a, b) und (7.13)

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} &= \int q \{\mathfrak{B}_{rel} + (\mathfrak{B}_{rel} \nabla) \mathfrak{B}_{rel} + c_t + 2 [\omega \mathfrak{B}_{rel}]\} dV \\ &- \int q [\mathfrak{B}_{rel} [\nabla \mathfrak{B}]] dV. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Der letzte Term drückt im ebenen Fall die Kraft auf eine Wirbelverteilung nach Kutta-Joukowski aus.

Da nun

$$[\nabla \mathfrak{B}_{rel}] = [\nabla \mathfrak{B}_{rel}] = -2\omega + [\nabla \mathfrak{B}] \quad (7.15)$$

ist, können wir dafür vereinfachend schreiben

$$\mathfrak{P} = \int q \mathfrak{B}_{rel} dV + \int q (\nabla \mathfrak{B}_{rel}) \mathfrak{B}_{rel} dV + \frac{d\mathfrak{J}_0}{dt} \quad (7.16)$$

wobei $(\nabla \mathfrak{B}_{rel})$ den Ableitungsaffinor der ungestörten Grundströmung darstellt und \mathfrak{J}_0 definiert ist durch

$$\mathfrak{J}_0 = \int q c dV. \quad (7.17)$$

(Wird nicht der Körper, sondern die ungestörte Strömung beschleunigt, so verschwindet $d\mathfrak{J}_0/dt$; \mathfrak{B}_{rel} nimmt mit \mathfrak{B}_{rel} dieselben Werte an.)

Für das Moment erhalten wir, wenn wir beachten, daß

$$(\nabla \mathfrak{B}_{rel}) [r\mathfrak{B}_{rel}] \equiv [r\mathfrak{B}_{rel} (\nabla \mathfrak{B}_{rel})] + [r, (\mathfrak{B}_{rel} \nabla) \mathfrak{B}_{rel}] + [\mathfrak{B}_{rel} \mathfrak{B}_{rel}] \quad (7.18)$$

ist auf analogem Wege

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} = & \int \rho \left[r, \mathfrak{B}_{\text{rel}} + (\mathfrak{B}_{\text{rel}} \nabla) \mathfrak{B}_{\text{rel}} + [\omega [\omega r]] + \right. \\ & \left. + [\omega_t r] + 2 [\omega \mathfrak{B}_{\text{rel}}] \right] dV + \int \rho [\mathfrak{B}_{\text{rel}} \mathfrak{B}_{\text{rel}}] dV - \\ & - \int \rho \left[r [\mathfrak{B}_{\text{rel}} [\nabla \mathfrak{B}]] \right] dV \end{aligned} \quad (7.19)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} = & \int \rho [r \dot{\mathfrak{B}}_{\text{rel}}] dV + \int \rho [r, (\nabla \mathfrak{B}_{\text{rel}}) \mathfrak{B}_{\text{rel}}] dV + \\ & + \frac{d\mathfrak{D}_0}{dt} + \int \rho [\mathfrak{B}_{\text{rel}} \mathfrak{B}_{\text{rel}}] dV \end{aligned} \quad (7.20)$$

wobei \mathfrak{D}_0 definiert ist durch

$$\mathfrak{D}_0 = \int \rho [r [\omega r]] dV \quad (7.21)$$

so daß gilt

$$\frac{d\mathfrak{D}_0}{dt} = \dot{\mathfrak{D}}_0 + [\omega \mathfrak{D}_0]. \quad (7.22)$$

Durch die Formeln (7.16) und (7.20) sind Kraft und Moment ausgedrückt durch die ungestörte und die gestörte Relativströmung im Inneren und die Trägheitsterme eines starren Körpers der Dichte ρ .

8. Kelvinimpuls und Kelvindrehimpuls

Im folgenden wollen wir Kraft und Moment ausdrücken durch die ungestörte Grundströmung und die Störströmung $-\nabla\varphi$; wir benutzen dazu die Relationen (6.2) und (1.2), d. h.

$$\mathfrak{B}_{\text{rel}} = \mathfrak{B}_{\text{rel}} - \nabla\varphi \quad (8.1)$$

$$\mathfrak{B}_{\text{rel}} = \mathfrak{B} - c - [\omega r]. \quad (8.2)$$

In Abwesenheit des bewegten Körpers ergibt die Druckintegration über S mit $\nabla\varphi = 0$ nach (5.1) die Kraft

$$\mathfrak{P}_W = \int \rho \mathfrak{B}_t dV + \int \rho (\mathfrak{B} \nabla) \mathfrak{B} dV \quad (8.3)$$

und das Moment

$$\mathfrak{M}_W = \int \rho [r \mathfrak{B}_t] dV + \int \rho [r, (\mathfrak{B} \nabla) \mathfrak{B}] dV \quad (8.4)$$

da weiter gilt

$$\begin{aligned} (\mathfrak{B}_{\text{rel}} \nabla) \mathfrak{B}_{\text{rel}} &= (\mathfrak{B}_{\text{rel}} \nabla) (\mathfrak{B} - c - [\omega r]) \\ &= (\mathfrak{B}_{\text{rel}} \nabla) \mathfrak{B} - [\omega \mathfrak{B}_{\text{rel}}] \end{aligned} \quad (8.5)$$

erhalten wir durch Einsetzen von (8.1) und (8.2.) in (7.14)

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} &= \mathfrak{P}_W - \int \rho \nabla\varphi dV - [\omega \int \rho \nabla\varphi dV] \\ &- \int \rho (\nabla\varphi \nabla) \mathfrak{B} dV. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Bei Herleitung der entsprechenden Formel für das Moment aus (7.19) ergibt sich unter Benutzung der Jacobi-Identität

$$[\nabla\varphi [\omega r]] + [\omega [r \nabla\varphi]] + [r [\nabla\varphi \omega]] \equiv 0 \quad (8.7)$$

auf analogem Wege

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \mathfrak{M}_W - \int \rho [r \nabla\varphi] dV - \int \rho [\omega [r \nabla\varphi]] dV \\ &- [c \int \rho \nabla\varphi dV] - \int \rho [r, (\nabla\varphi \nabla) \mathfrak{B}] dV - \int \rho [r \nabla\varphi, \mathfrak{B}] dV \end{aligned} \quad (8.8)$$

In diesen Formeln empfiehlt sich die Einführung der Größen

$$\mathfrak{J}_k = -\int \rho \nabla\varphi dV \quad (\text{Kelvinimpuls}) \quad (8.9a)$$

$$\mathfrak{D}_k = -\int \rho [r \nabla\varphi] dV \quad (\text{Kelvindrehimpuls}) \quad (8.9b)$$

Durch Einsetzen erhalten wir

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_W + \dot{\mathfrak{J}}_k + [\omega \mathfrak{J}_k] - \int \rho (\nabla\varphi \nabla) \mathfrak{B} dV \quad (8.10)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \mathfrak{M}_W + \dot{\mathfrak{D}}_k + [\omega \mathfrak{D}_k] \\ &+ [c \mathfrak{J}_k] - \int \rho [r, (\nabla\varphi \nabla) \mathfrak{B}] dV + \int \rho [\mathfrak{B} \nabla\varphi] dV \end{aligned} \quad (8.11)$$

Die Formeln lassen erkennen, daß das dynamische Verhalten des Körpers in ruhender Grundströmung ($\mathfrak{B} = 0$) durch die Kelvinimpulsgrößen und ihre Zeitableitungen bestimmt wird. Von Kirchhoff [7] wurden in diesem Falle die Gleichungen (8.10) und (8.11) gewonnen aus Energieansätzen, wobei \mathfrak{J}_k und \mathfrak{D}_k definiert waren durch

$$\mathfrak{J}_k = -\int \rho \varphi n dS \quad (8.12a)$$

$$\mathfrak{D}_k = -\int \rho \varphi [rn] dS \quad (8.12b)$$

Eine Deutung dieser Größen als Impuls bzw. Drehimpuls der — unendlich ausgedehnten — Flüssigkeit, welche den Körper umgibt, ist nur möglich bei Wahl spezieller Grenzübergänge bei der Ausdehnung des Integrationsbereichs, wie Tollmien gezeigt hat [1], [17]. Die Einführung innerer Strömungen als Hilfsmittel unserer Untersuchung erlaubt die Deutung (8.9a, b) als Impulsgrößen der Strömung im Inneren.

Für das Ellipsoid in Translationsbewegung längs der a-Achse ergibt sich aus (2.11a)

$$\mathfrak{J}_k = -k_x c \int \rho dV, \quad \mathfrak{D}_k = 0 \quad (8.13)$$

$$\text{und damit} \quad \mathfrak{P} = -k_x c_t \int \rho dV \quad (8.14)$$

Bei Rotation um dieselbe Achse wird

$$\mathfrak{J}_k = 0, \quad \mathfrak{D}_k = -\int \rho E k_x' [r [\omega r]] dV = -\omega k_x' \rho J_{xx} \quad (8.15)$$

wenn J_{xx} das polare geometrische Trägheitsmoment bezüglich der a-Achse ist.

Es ergibt sich weiter

$$\mathfrak{M} = -k' \rho \omega_t J_{xx} \quad (8.16)$$

Aus (8.14) und (8.16) wird die Bedeutung von k_x und k_x' als Koeffizienten von hydrodynamischer Zusatzmasse bzw. Zusatzträgheitsmoment ersichtlich.

9. Darstellung des Kelvinimpulses aus Reihenentwicklungen des Potentials

Als harmonische, im Unendlichen verschwindende Funktion gestattet φ in genügend großer Entfernung eine Entwicklung nach negativen Potenzen der Distanz R vom Koordinatenursprung; die Entwicklungskoeffizienten sind die Kugel- bzw. Kreisfunktionen, welche die Darstellung auf den Flächen $R = \text{const.}$ leisten. Außerhalb und auf jeder derartigen Fläche, welche den Körper einschließt, ist φ regulär und die Entwicklung gleichmäßig konvergent.

Das Flächenintegral, welches den Kelvinimpuls ausdrückt, läßt sich nun auf die Integration über eine Fläche S_k mit $R = \text{const.}$ zurückführen und damit in Beziehung setzen mit den Koeffizienten der Entwicklung.

Es gilt nämlich, unabhängig vom Bezugspunkt des Ortsvektors r ,

$$\begin{aligned} \int \varphi n dS_k - \int r (n \nabla\varphi) dS_k &= \\ &= \int \varphi n dS - \int r (n \nabla\varphi) dS - \int_r \Delta\varphi dV \end{aligned} \quad (9.1)$$

wie aus der Anwendung des Satzes von Gauß auf die linke Seite folgt. Weiter gilt aber, da auf S $(n \nabla\varphi) = (n \mathfrak{B}_{\text{rel}})$ ist,

$$\int r (n \nabla\varphi) dS = \int r (\mathfrak{B}_{\text{rel}} n) dS = \int \mathfrak{B}_{\text{rel}} dV \quad (9.2)$$

und da weiter $\Delta\varphi$ außerhalb von S verschwindet, erhalten wir

$$\int \varphi n dS = \int \mathfrak{B}_{\text{rel}} dV + \int \{ \varphi n - r (n \nabla\varphi) \} dS_k \quad (9.3)$$

Im dreidimensionalen Fall können wir die Entwicklung einsetzen

$$\varphi = \frac{S_1(\varphi, \Theta)}{R^2} + \sum_{\nu=2}^{\infty} R^{-(\nu+1)} S_\nu(\varphi, \Theta) \quad (9.4)$$

im zweidimensionalen Fall

$$\begin{aligned} \varphi &= (A_1 \cos \Theta + B_1 \sin \Theta) \frac{1}{R} + \\ &+ \sum_{\nu=2}^{\infty} R^{-\nu} (A_\nu \cos \nu \Theta + B_\nu \sin \nu \Theta) \end{aligned} \quad (9.5)$$

Beziehen wir den Ortsvektor r auf den Ursprung der Entwicklung, so gilt auf S_k

$$r = Rn \quad (9.6)$$

$$\text{und} \quad r (n \nabla\varphi) = \left(R \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) n \quad (9.7)$$

Da nun die Komponenten des Normalvektors Kugelfunktionen erster Ordnung bzw. Winkelfunktionen der Elementarperiode 2π sind, leistet wegen der Orthogonalitätsrelationen der Kugel- bzw. Kreisfunktionen nur der zweite Term von (9.4) bzw. (9.5) einen Beitrag zur Integration über S_k in (9.3). Dieser zweite Term läßt sich mit Hilfe eines geeigneten Dipolvektors α ausdrücklich als $\frac{1}{S_0} (\alpha \nabla G)$ und es wird

unter Beachtung von (2.7c) und (9.7)

$$\frac{1}{S_0} \int \{ (\alpha \nabla G) n - r (n \nabla) (\alpha \nabla G) \} dS_k = -D \Delta \alpha$$

$$= -D \frac{\alpha}{D} = -\alpha \quad (9.8)$$

damit folgt aus (9.3)

$$\int \varphi n dS = \alpha - \int \mathfrak{B}_{rel} dV \quad (9.9)$$

$$\text{bzw. mit } \mathfrak{B}_{rel} = \mathfrak{B}_{rel} - \nabla \varphi \quad (9.10)$$

$$\int \mathfrak{B}_{rel} dV = -\alpha$$

Der Kelvinimpuls wird also allein durch den Dipolterm der Entwicklung bestimmt; die Beziehung (9.10) ist äquivalent der Gleichung $\mathfrak{B}_{rel} = -m$ für kontinuierliche Dipolverteilungen.

Die Beiträge der Entwicklungskoeffizienten von (9.4) zu Kraft und Moment bei stationärer Grundströmung und $\omega = 0$ wurden von Cummins berechnet, indem er das Potential der Grundströmung ebenfalls nach Kugelfunktionen entwickelte. Kraft und Moment erscheinen dann als Bilinearformen korrespondierender Entwicklungskoeffizienten des Grundpotentials und des Störpotentials. Für instationäre Strömungen läßt sich das Moment nicht mehr allein durch die Terme dieser Entwicklungen ausdrücken.

10. Zusammenhang zwischen Kraftwirkungen und darstellenden Singularitäten

Nehmen wir jetzt wieder an, das Potential sei durch eine Quellbelegung σ auf S und eine Quellverteilung q im Inneren erzeugt. Wir haben (1.7), (1.8) gesehen, daß dann jede Dipolverteilung m ebenfalls die Darstellung leistet, wenn nur gilt $\sigma = (mn)$ und $q = -(\nabla m)$. Auch in diesem Fall läßt sich der Kelvinimpuls und damit weiter der vollständige Ausdruck für die Kraft in einfacher Form durch die Singularitäten ausdrücken. Es gilt

$$\int \varphi n dS = \int \nabla \varphi_i dV = \int r (n \nabla \varphi_i) dS - \int r \Delta \varphi dV \quad (10.1)$$

$$\text{und mit } (n \nabla \varphi_i) = \sigma + (n \nabla \varphi) = \sigma + (n \mathfrak{B}_{rel}) \quad (10.2)$$

$$\text{und } \Delta \varphi = -q \quad (10.3)$$

erhalten wir

$$\int \varphi n dS = \int r \sigma dS + \int r q dV + \int \mathfrak{B}_{rel} dV \quad (10.4)$$

$$\text{bzw. } \int \mathfrak{B}_{rel} dV = -\int r \sigma dS - \int r q dV \quad (10.5)$$

und ausgedrückt durch die Dipolverteilung m wird

$$\int \mathfrak{B}_{rel} dV = -\int m dV \quad (10.6)$$

in Analogie zu (9.10).

Aus (7.8), (7.11a) und (7.14b) erhalten wir

$$\int \frac{(\mathfrak{B}_{rel} \mathfrak{B}_{rel})}{2} n dS = - \int \sigma \mathfrak{B}_{rel} dS - \int q \mathfrak{B}_{rel} dV - 2 \left[\omega, \int r \sigma dS + \int r q dV \right] \quad (10.7)$$

und für die Dipolverteilung durch Anwendung des Satzes von Gauß auf die hier auftretenden Oberflächenintegrale in (10.7)

$$\int \frac{(\mathfrak{B}_{rel} \mathfrak{B}_{rel})}{2} n dS = - \int (m \nabla) \mathfrak{B}_{rel} dV - 2 \left[\omega, \int m dV \right]. \quad (10.8)$$

Damit drückt sich die Gesamtkraft (7.14) aus als

$$\mathcal{P} = \varrho \left\{ -\int r \dot{\sigma} dS - \int r \dot{q} dV + 2 [\omega, \int r \sigma dS + \int r q dV] - \int \sigma \mathfrak{B}_{rel} dS - \int q \mathfrak{B}_{rel} dV \right\} + \frac{d \mathfrak{J}_0}{dt} \quad (10.9a)$$

bzw.

$$\mathcal{P} = \varrho \left\{ -\int \dot{m} dV + 2 [\omega, \int m dV] - \int (m \nabla) \mathfrak{B}_{rel} dV \right\} + \frac{d \mathfrak{J}_0}{dt} \quad (10.9b)$$

Aus (10.9b) sehen wir, daß sich die Kraft aus jeder Dipolverteilung m ausdrücken läßt, welche der Körper erzeugt. Dasselbe läßt sich analog auch für das Moment bei Translation in stationärer Relativströmung zeigen. Der Term $\int \varrho [\mathfrak{B}_{rel} \mathfrak{B}_{rel}] dV$ in (7.19) läßt sich im Fall $\mathfrak{B}_{rel} = -c$ vermöge (10.4), (10.5) durch die Singularitäten ausdrücken. Im allgemeinen aber dürfen die Substitutionen

$$\int \varrho [r \mathfrak{B}_{rel}] dV = - \int \varrho [r m] dV \quad (10.10a)$$

$$\text{und } \int \varrho [\mathfrak{B}_{rel} \mathfrak{B}_{rel}] dV = - \int \varrho [\mathfrak{B}_{rel} m] dV \quad (10.10b)$$

bei nichtkonstantem \mathfrak{B}_{rel} in (7.20) nur durchgeführt werden, wenn $m = -\mathfrak{B}_{rel}$ ist, d. h. wenn m die Überlagerung von \mathfrak{B}_{rel} mit einer Potentialströmung ist; d. h. aber, das Moment kann im allgemeinen nur dann durch die Dipolverteilung m , welche den Körper darstellt, ausgedrückt werden, wenn $m = m^*$ der Integralbedingung (2.5) bzw. (2.10) genügt.

11. Kraftwirkungen bei Körperdarstellung durch Distributionen

Soweit wir die Kraftwirkungen direkt durch die darstellenden Singularitäten ausdrücken können, lassen sich unsere Ergebnisse unmittelbar erweitern auf den Fall, daß wir nicht nur Quell-Senken- oder Dipol-Systeme, sondern allgemeine Distributionen im Sinne der Theorie von Laurent Schwartz [15] zur Erzeugung der Störströmung zulassen. Ein einfaches Beispiel liefert die Erzeugung einer Kugel durch einen diskreten Dipol, welche man ansehen kann als Grenzfall kontinuierlich belegter, konzentrischer innerer Kugeln gemäß (3.10), aber auch als Spezialfall der Entwicklungen (9.4) bzw. (9.5) nach Differentialoperatoren höherer Ordnung, welche sich auf einen Punkt konzentrieren.

Die Verallgemeinerung einer Formel, die für den Fall stetiger Quellbelegungen q bewiesen ist, auf den Fall allgemeinerer Distributionen ϑ ergibt sich aus einem Satz, nach dem auf jedem kompakten Grundgebiet die Menge der beliebig oft differenzierbaren Funktionen — und damit erst recht die der stetigen Funktionen — „überall dicht liegt“ im Raume aller Distributionen auf diesem Grundgebiet, d. h., daß jede Distribution in ihrer Operatoreigenschaft beliebig gut approximiert werden kann durch die Wirkung einer stetigen Funktion. Folgern wir aus diesem Satz das Prinzip, daß die abgeleiteten Sätze Gültigkeit behalten, wenn wir formal q durch ϑ ersetzen, so finden wir damit die Bestätigung von Formeln, die für den Fall diskreter Distributionen höherer Ordnung auf anderem Wege von Cummins gefunden worden sind.

Der Darstellung der Störströmung durch eine Quellbelegung nach (1.7)

$$\nabla \varphi = \frac{1}{S_0} \nabla \int \varrho G dV \quad (11.1a)$$

entspricht die allgemeinere Darstellung

$$\nabla \varphi = \frac{1}{S_0} \nabla \int \vartheta G dV \quad (11.1b)$$

durch eine Distribution ϑ — im Falle der kontinuierlichen Dipolbelegung ist $\vartheta = (m \nabla)$ einzusetzen.

Die Differenz ϑ_h zweier verschiedener Distributionen, die außerhalb des Körpers dieselbe Störströmung erzeugen, muß der homogenen Gleichung

$$\frac{1}{S_0} \nabla \int \vartheta_h G dV = 0 \quad (11.2)$$

genügen für alle Punkte, welche außerhalb von V liegen, d. h. ϑ_h muß in einem gewissen Sinne „orthogonal“ sein zu allen Funktionen G , welche in V beschränkt sind.

Im Falle des unbewegten Körpers in stationärer Grundströmung \mathfrak{B} erhalten wir aus (10.9a) für die Kraft die Darstellung

$$\mathfrak{P} = - \int \varrho q \mathfrak{B} dV \quad (11.3a)$$

welche der Formel von Lagally [6] in Anwendung auf die kontinuierliche Quellverteilung q entspricht; für die Distribution ϑ ergibt sich damit

$$\mathfrak{P} = - \int \varrho \vartheta \mathfrak{B} dV \quad (11.3b)$$

Erlaubt nun die Potentialströmung w eine Darstellung durch eine Distribution ϑ_w , welche in V mit der Nulldistribution identisch ist, falls also gilt

$$\mathfrak{B} = - \frac{1}{S_0} \nabla \int \vartheta_w G dV' \quad (11.4)$$

mit $V \cap V' = 0$

so wird der Ausdruck (11.3b) unabhängig von der Wahl von ϑ , wenn nur ϑ gemäß (11.1a) eine Darstellung der Störströmung leistet; denn für jede Lösung ϑ_h von (11.2) folgt aus (11.4) durch Einsetzen

$$- \int \varrho \vartheta_h \mathfrak{B} dV = 0 \quad (11.5)$$

d. h. die Distributionen ϑ_h , welche als Lösungen der homogenen Gleichung (11.2) nur von der Körperform, nicht von w abhängen, leisten keinen Beitrag zu \mathfrak{P} .

Für das Moment gilt bei Quellverteilung q

$$\mathfrak{M} = - \int \varrho q [r \mathfrak{B}] dV \quad (11.6a)$$

damit für Distributionendarstellung

$$\mathfrak{M} = - \int \varrho \vartheta [r \mathfrak{B}] dV \quad (11.6b)$$

wobei die Differentialoperatoren von ϑ auch auf den Ortsvektor r anzuwenden sind; \mathfrak{M} ist also im allgemeinen nicht gleich dem Integral des Momentes der Kräfte, die zu (11.6a) beitragen. Für den Fall $\vartheta = (m \nabla)$ finden wir unsere Formeln (7.16) und (7.19) mit $m = -\mathfrak{B}_{rel}$. Dem Ausdruck (11.6b) ist offenbar nicht unmittelbar anzusehen, daß er für alle Lösungen ϑ aus (11.1b) denselben Wert darstellt.

Für den Kelvinimpuls folgt aus der Quelldarstellung (10.5)

$$\mathfrak{J}_k = \int \varrho \mathfrak{B}_{rel} dV - \int \varrho q r dV \quad (11.7a)$$

die entsprechende Distributionendarstellung

$$\mathfrak{J}_k = \int \varrho \mathfrak{B}_{rel} dV - \int \varrho \vartheta r dV \quad (11.7b)$$

Hieraus wird unmittelbar ersichtlich, daß nur Quell- und Dipolsingularitäten zum Kelvinimpuls beitragen.

Wir können die Ergebnisse der Formeln (11.3b), (11.6b) und (11.7b) in die Ausdrücke (8.10) und (8.11) für Kraft und Moment einsetzen und erhalten damit

$$\mathfrak{P} = \int \varrho \mathfrak{B}_i dV + \int \dot{\vartheta} r dV + [\omega \int \vartheta r dV] - \int \varrho \vartheta \mathfrak{B} dV \quad (11.8a)$$

$$\mathfrak{M} = \int \varrho [r \mathfrak{B}_i] dV - \dot{\mathcal{D}}_k - [\omega \mathcal{D}_k] - \int \varrho \vartheta [r \mathfrak{B}] dV + [c \int \vartheta r dV] \quad (11.8b)$$

wobei nur $\mathcal{D}_k = - \int \varrho \varphi [r n] dS$ nicht direkt von ϑ , sondern von dem durch ϑ erzeugten Potential abhängt.

12. Schwach gekrümmte Strömungen

Wir wollen jetzt speziell solche Grundströmungen \mathfrak{B} betrachten, welche im Bereich des Körpers so schwach gekrümmt sind, daß ihre Ortsabhängigkeit linear angesetzt werden darf, etwa in der Form

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 + \Gamma r. \quad (12.1)$$

Dabei sei r der Ortsvektor bezüglich eines raumfesten Bezugspunktes, der momentan mit dem Schwerpunkt des bewegten Körpers zusammenfällt; dann ist \mathfrak{B}_0 die ungestörte Geschwindigkeit an diesem Punkt und der Tensor Γ hat die Bedeutung des Ableitungsaffinors:

$$\Gamma = (\nabla \mathfrak{B}). \quad (12.2)$$

Er ist für die betrachtete rotations- und quellenfreie Strömung symmetrisch und hat die Spur Null. Es gilt dann

$$(\mathfrak{B} \nabla) \mathfrak{B} = \Gamma \mathfrak{B}_0 + \Gamma^2 r. \quad (12.3)$$

Bewegt sich der Körper mit c , so wird

$$\mathfrak{B}_{rel} = \mathfrak{B}_0 - c + \Gamma r \quad (12.4)$$

$$\dot{\mathfrak{B}}_{rel} = -c_t + \Gamma c. \quad (12.5)$$

Wir erhalten dann aus (8.10)

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_w + \mathfrak{J}_k + \Gamma \mathfrak{J}_k \quad (12.6)$$

mit $\mathfrak{P}_w = \varrho \Gamma \mathfrak{B}_0 \int dV$ und $\mathfrak{J}_k = - \int \varrho \nabla \varphi dV$ und aus (8.11)

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_w + \dot{\mathcal{D}}_k + [c - \mathfrak{B}_0, \mathfrak{J}_k] - \int \varrho \{ [r, \Gamma \nabla \varphi] - [\Gamma r, \nabla \varphi] \} dV \quad (12.7)$$

mit $\mathfrak{M}_w = \int [r, \Gamma^2 r] dV$ und $\dot{\mathcal{D}}_k = - \int \varrho [r \nabla \varphi] dV$ \mathfrak{P}_w und \mathfrak{M}_w entsprechen der ungestörten Strömung.

Das Potential φ der Störströmung addiert sich aus den Anteilen der Summanden von (12.4), d. h. es ist

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 \quad (12.8)$$

wenn φ_0 das Potential der örtlich konstanten Relativströmung $\mathfrak{B}_0 - c$, φ_1 das Potential zur Grundströmung Γr ist. Das Potential φ entspricht dann der Funktion φ_0 bezüglich der Anströmung (12.5).

Wir nehmen nun insbesondere an, c und \dot{c} seien Null und alle die Vektoren seien klein gegen \mathfrak{B}_0 , in denen Γ als Faktor auftritt; dann ist φ_1 und $\dot{\varphi}$ von gleicher Ordnung klein gegen φ . Ordnen wir dann die Summanden von (12.6) und (12.7) nach ihrer Größenordnung, so erhalten wir

$$\mathfrak{P} = \Gamma \mathfrak{B}_0 \int \varrho dV + \Gamma \mathfrak{J}_{k_0} + \Gamma \mathfrak{J}_{k_1} \quad (12.9)$$

wobei \mathfrak{J}_{k_0} den Kelvinimpuls bezüglich φ_0 , d. h. bezüglich der konstanten Anströmung \mathfrak{B}_0 , darstellt. Der Term $\Gamma \mathfrak{J}_{k_1}$ entspricht dem Strömungsanteil Γr und ist damit von kleinerer Ordnung als die ersten beiden Summanden. Verläuft \mathfrak{B}_0 in Richtung einer hydrodynamischen Trägheitsachse und ist k_x der zugehörige Massenkoeffizient, so ist

$$\mathfrak{J}_{k_0} = k_x \mathfrak{B}_0 \int \varrho dV \quad (12.10)$$

d. h. in erster Näherung erhalten wir ein Anwachsen der „Auftriebskraft“ \mathfrak{P}_w um den Faktor $(1 + k_x)$ unabhängig von den Richtungen der Hauptachsen von Γ .

Für das Moment erhalten wir

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{J}_{k_0} \mathfrak{B}_0] + [\mathfrak{J}_{k_1} \mathfrak{B}_0] + \int \varrho \{ [\Gamma r, \nabla \varphi_0] - [r, \Gamma \nabla \varphi_0] \} dV + \int \varrho \{ [\Gamma r, \nabla \varphi_1] - [r, \Gamma \nabla \varphi_1] \} dV + \int \varrho [r, \Gamma^2 r] dV. \quad (12.11)$$

Der erste Summand ist auch bei räumlich konstanter Grundströmung von null verschieden, solange nicht \mathfrak{B}_0 in einer hydrodynamischen Hauptträgheitsrichtung des Körper liegt.

Die Terme der zweiten Zeile sind von erster Ordnung klein. Bereits von Pistoiesi [11] wurde gezeigt, daß neben dem ersten von Tollmien angegebenen Term noch weitere von gleicher Größenordnung auftreten, welche sich nicht durch den Kelvinimpuls ausdrücken lassen.

Wir sehen aber aus (3.11), daß für alle Ellipsoide die innere Strömung örtlich konstant angesetzt werden kann, und wegen der Wahl des Körperschwerpunktes zum Bezugspunkt sehen wir unmittelbar, daß die Näherung Tollmiens

$$\mathcal{M} = [\mathfrak{J}_{k_0} + \mathfrak{J}_{k_1}, \mathfrak{W}_0] \quad (12.12)$$

für Ellipsoide bis auf Größen höherer Ordnung durchaus korrekt ist.

(Eingegangen am 8. März 1960)

Schrifttum

- [1] Birkhoff: Hydrodynamics — a Study in Logic, Fact and Similitude. Princeton 1950.
- [2] Cummins: The Forces and Moments Acting on a Body Moving in an Arbitrary Potential Stream. TMB Report 780, Washington.
- [3] Courant, Hilbert: Mathematische Methoden der Physik. Springer.
- [4] Diesselhorst: Magnetische Felder und Kräfte. Leipzig 1939.
- [5] Kellog: Foundations of Potential Theory. Springer 1929.
- [6] Lagally: Berechnung der Kräfte und Momente, die strömende Flüssigkeiten auf ihre Begrenzung ausüben. ZAMM 1922.
- [7] Lamb: Hydrodynamics. Cambridge University Press 1932.
- [8] Landweber: Added Masses of a three Parameter Family. Journal of Ship Research, March 1951.
- [9] Landweber: Forces, Moments and Added Masses of Rankine Bodies. Journ. of Fluid Mech., 1956.
- [10] Lewis: The Inertia of the Water Surrounding a Vibrating Ship. SNAME 1929, Vol. 37.
- [11] Lichtenstein: Grundlagen der Hydrodynamik. Springer 1929.
- [12] Magnus, Oberhettinger: Formeln und Sätze für spezielle Funktionen der mathematischen Physik. Springer 1943.
- [13] Pistoiesi: Forzi e momenti in una corrente leggera curva convergente. Pont. Acad. Sci. 1944, Bd. 8.
- [14] Rubbert: Allgemeine Theorie der hydrodynamischen Trägheitskoeffizienten. Bericht an die Deutsche Forschungsgemeinschaft, Hamburg 1957.
- [15] Schwartz: Theorie general des distributions.
- [16] Taylor: The Energy of a Body Moving in an Infinite Fluid with Application to Airships. Proc. Roy. Soc. London A 120, 1928.
- [17] Tollmien: Die Unbestimmtheit des Strömungsimpulsflusses in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit. ZAMM Bd. 18, 1938.
- [18] Tollmien: Über Kräfte und Momente in schwachgekrümmten oder konvergenten Strömungen. Ingenieur-Archiv 1938, 9.
- [19] Zahm: Flow and Force Equations for a Body Revolving in a Fluid. NACA Report 323.