

128 | 1964

## SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Harald Keil

# Über die Bestimmung von Spektren des Seegangs und der Schiffsbewegungen

**TUHH**

*Technische Universität Hamburg-Harburg*

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

IfS - Bericht Nr. 1128

Über die Bestimmung von Spektren des Seegangs und der  
Schiffsbewegungen

von Harald Keil

Hamburg, 1964

## Inhaltsübersicht

In der vorliegenden Arbeit wird über eine Methode zur Bestimmung der für eine quantitative Aussage über unregelmäßige Bewegungen wichtigen Spektren berichtet. Der Rechengang und zum großen Teil die mathematischen Ableitungen und Fehlerabschätzungen werden angegeben. Das Meßprinzip wird kurz erläutert. Eine eingehende Beschreibung der zur Messung der Bewegungen und zu einer rationellen Verarbeitung der anfallenden Daten entwickelten Geräte sind einem weiteren Bericht vorbehalten, der fertiggestellt wird, sobald alle Geräte geliefert und erprobt sind. Da noch keine Messungen durchgeführt sind, können Ergebnisse nicht aufgezeigt werden.

### A. Einleitung

### B. Theoretische Zusammenhänge

1. Definition des Spektrums
2. Definition der Autokovarianzfunktion
3. Zusammenhang Spektrum - Autokovarianzfunktion
4. Definition des Kreuzspektrums
5. Definition der Kovarianzfunktion
6. Zusammenhang Kreuzspektrum - Kovarianzfunktion
7. Spektrum einer Summe von zwei Funktionen
8. Zusammenhang zwischen dem Kreuzspektrum von zwei Funktionen und dem Kreuzspektrum von deren Ableitungen
9. Kreuzspektrum einer Funktion und einer anderen Funktion, von der nur die Ableitung gegeben ist
10. Zusammenhang zwischen den Spektren des Eingangs und des Ausgangs bei linearen Systemen
11. Spektraldichte eines Vorgangs, von dem eine Registrierung endlicher Länge vorliegt
12. Konfidenz der berechneten Spektraldichte

### C. Bestimmung der Spektren der Schiffsbewegungen

1. Messung der Schiffsbewegungen
2. Bestimmung der Spektren der Komponenten und der Beziehungen zwischen den Komponenten
3. Fehlerbetrachtung

**D. Bestimmung des Seegangsspektrums aus den Schiffsbewegungen**

**E. Praktischer Rechnungsgang**

**1. Formeln für die digitale Auswertung**

**2. Zusätzliche Fehler bei der digitalen Methode**

**F. Schrifttum**

**G. Abbildungen**

## A. Einleitung

Eine eingehende Behandlung des natürlichen, also unregelmäßigen Seegangs und der daraus resultierenden Schiffsbewegungen ist erst seit reichlich einem Jahrzehnt möglich. Das mathematische Modell wurde von Pierson (1952, 1953, 1955) und St.Denis (1953) eingeführt.

Mißt man die Erhebung  $\zeta$  der Meeresoberfläche an einem bestimmten Punkt und trägt sie über der Zeit auf, so erhält man die sog. Seegangsfunktion  $\zeta(t)$ . Es ist dies eine zufällige Funktion, d.h. unter gleichen äußeren Bedingungen (Windstärke, Windbahnlänge, genügende Winddauer) sind unendlich viele verschiedene Funktionen  $\zeta(t)$  möglich und gleich wahrscheinlich. Sie haben jedoch gewisse statistische Eigenschaften gemeinsam: z.B. sind die Funktionswerte normalverteilt mit gleichem Mittelwert und gleicher Varianz.

Man kann auch feststellen, daß die zu einer bestimmten Zeit an verschiedenen Punkten des gleichen Seegangsfeldes gemessenen Erhebungen  $\zeta$  die gleichen statistischen Eigenschaften haben. Zufällige Prozesse, bei denen die Mittelwerte über die Zeit gleich denen über die Glieder des Ensembles, d.h. über die verschiedenen Funktionen zur gleichen Zeit, sind, heißen ergodisch.

In Wirklichkeit ändern sich die äußeren Bedingungen mit der Zeit. Diese Änderungen gehen jedoch so langsam vor sich, daß man die äußeren Verhältnisse meist über kurze Zeitabschnitte (ca. 1/2 - 1 h) als konstant ansehen kann. Die während eines solchen Zeitabschnittes gemessene Funktion  $\zeta(t)$  kann man als Ausschnitt einer fiktiven, für  $-\infty \leq t \leq +\infty$  geltenden stationären zufälligen Funktion betrachten.

Ähnliches wie hier für den Seegang gesagt gilt auch für die Schiffsbewegungen.

Eingehende Aussagen über solche zufällige Funktionen und die Zusammenhänge zwischen zwei solchen Funktionen können mit Hilfe von Spektren und Kreuzspektren gemacht werden. Über einige dieser Aussagen gibt die zusammenfassende Arbeit von Bartsch (1959) einen guten Überblick. Diese Arbeit wird hier als bekannt vorausgesetzt. In der vorliegenden Arbeit wird nur auf die Bestimmung der Spektren und Kreuzspektren und die damit zusammenhängenden Probleme eingegangen, da es darüber keine deutschsprachige Literatur gibt.

Für das Folgende wird vorausgesetzt:

- a) Der Seegang und die daraus resultierenden Schiffsbewegungen sind stationär und ergodisch.
- b) Die betrachtete zufällige Funktion, also die Registrierung des Seegangs oder der Schiffsbewegung, hat den zeitlichen Mittelwert Null.

## B. Theoretische Zusammenhänge

### 1. Definition des Spektrums:

Wir gehen zunächst von einer reellen Funktion  $u(t)$  mit der Periode  $2T$  aus und entwickeln sie in eine Fourierreihe.

$$u(t) = u(t+2T) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cdot \cos \frac{n\pi t}{T} + b_n \cdot \sin \frac{n\pi t}{T} \right)$$

mit

$$a_n = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-T}^T u(t) \cdot e^{-i \frac{n\pi t}{T}} \cdot dt \right\}$$

$$b_n = -\operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-T}^T u(t) \cdot e^{-i \frac{n\pi t}{T}} \cdot dt \right\}$$

Man kann auch schreiben:

$$u(t) = u(t+2T) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \cos \left( \frac{n\pi t}{T} - \varepsilon_n \right)$$

mit  $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  und  $\varepsilon_n = \operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n}$

Für den quadratischen Mittelwert der Funktion

$$\overline{u^2(t)} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u^2(t) \cdot dt$$

erhält man mit der obigen Fourierreentwicklung

$$\overline{u^2(t)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$$

Der Wert ist unabhängig von den Phasen  $\varepsilon_n$ . Der Beitrag, der von der Komponente mit der Frequenz  $f_n = \frac{n}{2T}$  zu diesem Mittelwert geleistet

wird, ist gleich  $\frac{1}{2}c_n^2$ .

Für nichtperiodische Funktionen, d.h. Funktionen mit der Periode  $T \rightarrow \infty$ , geht die Fouriersumme über in das Fourierintegral

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(f) \cdot e^{i2\pi ft} \cdot df$$

mit

$$A(f) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot e^{-i2\pi ft} \cdot dt$$

Diese Transformation existiert jedoch nur, wenn  $u(t)$  absolut integrierbar ist, also

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| \cdot dt < \infty$$

Um diese Schwierigkeiten zu umgehen, ersetzen wir die Funktion  $u(t)$  durch eine Teilfunktion  $u_T(t)$  (im Angelsächsischen Truncated Function genannt), die so definiert ist:

$$\begin{aligned} u_T(t) &= u(t) & \text{für } |t| \leq T \\ &= 0 & \text{für } |t| > T \end{aligned}$$

Damit wird das Fourierintegral

$$A_T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} u_T(t) \cdot e^{-i2\pi ft} \cdot dt = \int_{-T}^T u(t) \cdot e^{-i2\pi ft} \cdot dt$$

Nach dem Parsevalschen Theorem gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_T^2(t) \cdot dt = \int_{-T}^T u^2(t) \cdot dt = \int_{-\infty}^{\infty} |A_T(f)|^2 \cdot df$$

und, da  $|A_T(f)|^2$  eine gerade Funktion ist,

$$\int_{-T}^T u^2(t) \cdot dt = 2 \int_0^{\infty} |A_T(f)|^2 \cdot df$$

Für den quadratischen Mittelwert erhält man also

$$\overline{u_T^2(t)} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u^2(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \int_0^{\infty} |A_T(f)|^2 \cdot df$$

Im periodischen Fall tragen nur die Komponenten mit den diskreten

Frequenzen  $f_n$  zu diesem Mittelwert bei, und zwar  $\frac{1}{2}c_n^2$ . Im nichtperiodischen Fall leisten alle Komponenten mit den Frequenzen zwischen 0 und  $\infty$  einen Beitrag. Der Beitrag jeder Komponente ist infinitesimal klein und beträgt  $|A_T(f)|^2 \cdot df$ .

Läßt man  $T \rightarrow \infty$  gehen, so ergibt sich

$$\overline{u^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u^2(t) \cdot dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{|A_T(f)|^2}{T} \cdot df$$

Die Spektraldichte ist nun definiert durch

$$S(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|A_T(f)|^2}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_0^{\infty} u(t) \cdot e^{-i2\pi ft} \cdot dt \right|^2 \quad (1)$$

Der quadratische Mittelwert ist dann gleich dem Integral über das Spektrum:

$$\overline{u^2(t)} = \int_0^{\infty} S_{uu}(f) \cdot df \quad (2)$$

Der Index uu weist darauf hin, daß das Integral gleich dem Mittelwert von  $u(t) \cdot u(t)$  ist.

Über die eventuell auftretenden Schwierigkeiten bei der Bestimmung des obigen Grenzwertes und die in diesem Fall zu beschreitenden Wege können entsprechende Fachbücher befragt werden (z.B. Bendat (1958) S.44). Im vorliegenden Fall sind sie nicht von Interesse, da das Spektrum nicht auf diese direkte Methode bestimmt werden soll.

Es sei daraufhingewiesen, daß hier nur positive Frequenzen betrachtet werden. Für den Fall, daß man auch mit negativen Frequenzen rechnet, gilt

$$S_{uu}(+f) = S_{uu}(-f) = \frac{1}{2}S_{uu}(f)$$

Die Eigenschaften des Spektrums seien noch einmal kurz zusammengefaßt:

- a)  $S_{uu}(f)$  ist nicht negativ
- b)  $S_{uu}(f)$  ist unabhängig von Phasenbeziehungen zwischen den Komponenten der Funktion  $u(t)$

Ferner gilt:  $S_{uu}(f) = 2\pi \cdot S_{uu}(\omega)$

Um Schwierigkeiten und Mißverständnissen beim Studium der Literatur vorzubeugen, seien einige kurze Bemerkungen gemacht:

In der elektrotechnischen Literatur wird das Spektrum 'Leistungsspektrum' genannt, da es die Leistung darstellt, wenn  $u(t)$  ein Strom ist, der über einen Widerstand von  $1 \Omega$  fließt.

In der Seegangsliteratur hat der Name 'Energiespektrum' Eingang gefunden, da

$$\frac{Q \cdot g}{2} \int_0^{\infty} S_{uu}(f) \cdot df = \frac{Q \cdot g}{2} \overline{u^2(t)}$$

gleich der mittleren Energie je Flächeneinheit der Meeresoberfläche ist, wenn  $u(t)$  die Seegangsfunktion bedeutet.

Diese unterschiedlichen Bezeichnungen stiften etwas Verwirrung. Da die Spektraldichte die Dimension der Varianz der Verteilungsdichte von  $u(t)$  multipliziert mit der Zeit hat, wäre es angebracht, das Spektrum 'Varianzspektrum' zu nennen (denn es stellt ja die Verteilung der Varianz über den Frequenzbereich dar), jedoch hat diese Bezeichnung schon anderweitig Verwendung gefunden. Aus diesem Grund wird hier nur die Bezeichnung 'Spektrum' verwendet.

Des weiteren ist Vorsicht geboten, da verschiedene Autoren nicht nur unterschiedliche Bezeichnungen sondern auch verschiedene Definitionen benutzen, z.B.:

Bartsch	$r(f)$
Rice	$w(f)$
Schlitt	$S(f)$
Tukey	$P(f)$

wobei  $r(f) = 2w(f) = 2S(f) = 4P(f)$

(Tukey rechnet mit negativen Frequenzen).

## 2. Definition der Autokovarianzfunktion:

Die Autokovarianzfunktion ist definiert als

$$R_{uu}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t) \cdot u(t+\tau) \cdot dt \quad (3)$$

Sie ist bei gegebenem  $u^2(t)$  ein Maß dafür, wie weit alle um  $\tau$  aus-

einanderliegenden Funktionswerte im Mittel voneinander abhängen. Die Autokovarianzfunktion einer harmonischen Funktion ist wieder eine harmonische Funktion. Phasenbeziehungen zwischen den Komponenten gehen bei der Berechnung der Autokovarianzfunktion verloren.

Sie hat folgende Eigenschaften:

- a)  $R_{uu}(\tau)$  ist eine gerade Funktion, also  $R_{uu}(\tau) = R_{uu}(-\tau)$ .
- b)  $R_{uu}(\tau)$  hat für  $\tau=0$  den größten Wert, also  $R_{uu}(0) \geq R_{uu}(\tau)$ .
- c)  $R_{uu}(\tau)$  geht für  $\tau \rightarrow \infty$  gegen Null.

Für die Autokovarianzfunktion wird auch die Bezeichnung 'Autokorrelationsfunktion' benutzt.

### 3. Zusammenhang Spektrum - Autokovarianzfunktion:

Der Zusammenhang zwischen dem Spektrum und der Autokovarianzfunktion ist durch das 'Wiener-Khintchinsche Transformationstheorem' gegeben:

$$S_{uu}(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{uu}(\tau) \cdot e^{-i2\pi f\tau} \cdot d\tau \quad (4)$$

mit der Umkehrung

$$R_{uu}(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_{uu}(f) \cdot e^{i2\pi f\tau} \cdot df$$

Es muß wieder die Bedingung erfüllt sein:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R_{uu}(\tau)| \cdot d\tau < \infty$$

Da  $R_{uu}(\tau)$  eine gerade Funktion ist, kann man auch schreiben:

$$S_{uu}(f) = 4 \int_0^{\infty} R_{uu}(\tau) \cdot \cos(2\pi f\tau) \cdot d\tau \quad (4a)$$

Der Beweis des Transformationstheorems ergibt sich wie folgt:

Mit

$$R_{uu}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t) \cdot u(t+\tau) \cdot dt$$

wird aus Gleichung (4)

$$S_{uu}(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t) \cdot u(t+\tau) \cdot dt \cdot e^{-i2\pi f\tau} \cdot d\tau$$

Multipliziert man das innere Integral mit  $e^{-i2\pi ft} \cdot e^{i2\pi ft} = 1$ , so erhält man:

$$\begin{aligned} S_{uu}(f) &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t) \cdot u(t+\tau) \cdot e^{i2\pi ft} \cdot e^{-i2\pi f(t+\tau)} \cdot dt \cdot d\tau \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T u(t) \cdot e^{i2\pi ft} \cdot dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} u(t+\tau) \cdot e^{-i2\pi f(t+\tau)} \cdot d\tau \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot A_T^*(f) \cdot A_T(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|A_T(f)|^2}{T} = S_{uu}(f) \end{aligned}$$

Die Berechnung des Spektrums nach Gleichung (4) wird im Gegensatz zur 'direkten Methode' nach Gleichung (1) die 'indirekte Methode' genannt.

#### 4. Definition des Kreuzspektrums:

Zur Beschreibung der Zusammenhänge zwischen zwei Funktionen  $u(t)$  und  $v(t)$  benötigt man außer den Spektren der Funktionen noch das Kreuzspektrum. Die Definition des Kreuzspektrums ergibt sich analog zu der des Spektrums:

$$\begin{aligned} S_{uv}(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A_T^*(f) \cdot B_T(f)}{T} \\ S_{vu}(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A_T(f) \cdot B_T^*(f)}{T} \end{aligned} \tag{5}$$

mit 
$$A_T(f) = \int_{-T}^T u(t) \cdot e^{-i2\pi ft} \cdot dt$$

$$B_T(f) = \int_{-T}^T v(t) \cdot e^{-i2\pi ft} \cdot dt$$

Die Eigenschaften des Kreuzspektrums sind:

- a)  $S_{uv}(f)$  ist im allgemeinen komplex.
- b)  $S_{uv}(f) = 0$ , wenn  $u(t)$  und  $v(t)$  unabhängig voneinander sind.
- c)  $S_{uv}(f)$  ist unabhängig von Phasenbeziehungen zwischen den Komponenten der Funktion  $u(t)$  bzw.  $v(t)$ , enthält jedoch Informationen über die Phasendifferenz der entsprechenden Komponenten von  $u(t)$  und  $v(t)$ .

Ferner gilt:

$$S_{uv}(f) = 2\pi \cdot S_{uv}(\omega)$$

$$S_{uv}(f) = S_{vu}^*(f) = S_{vu}(-f)$$

Das Kreuzspektrum kann in Realteil und Imaginärteil zerlegt werden:

$$S_{uv}(f) = C_{uv}(f) - i \cdot Q_{uv}(f)$$

$$C_{uv}(f) = \operatorname{Re} \{ S_{uv}(f) \} \quad \text{heißt Kospektrum}$$

$$Q_{uv}(f) = -\operatorname{Im} \{ S_{uv}(f) \} \quad \text{heißt Quadraturpektrum}$$

Es gilt:

$$C_{uv}(f) = C_{uv}(-f) = C_{vu}(f)$$

$$Q_{uv}(f) = -Q_{uv}(-f) = -Q_{vu}(f)$$

### 5. Definition der Kovarianzfunktion:

Die Kovarianzfunktion ist ein Maß für die Abhängigkeit von zwei verschiedenen Funktionen  $u(t)$  und  $v(t)$  und ist definiert als

$$R_{uv}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t) \cdot v(t+\tau) \cdot dt \tag{6}$$

$$R_{vu}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T v(t) \cdot u(t+\tau) \cdot dt = R_{uv}(-\tau)$$

Die Kovarianzfunktion schließt die Autokovarianzfunktion als Sonderfall ein und hat folgende Eigenschaften:

- a)  $R_{uv}(\tau)$  ist immer kleiner als der größere der quadratischen Mittelwerte von  $u(t)$  und  $v(t)$ , also  $R_{uv}(\tau) < \operatorname{Max} \left\{ \overline{u^2(t)} ; \overline{v^2(t)} \right\}$ .

b)  $R_{uv}(\tau)$  ist für  $\tau=0$  gleich dem Mittelwert der Produkte  $u(t) \cdot v(t)$ ,  
also  $R_{uv}(0) = \overline{u(t) \cdot v(t)}$ .

c)  $R_{uv}(\tau)$  geht für  $\tau \rightarrow \infty$  gegen Null.

d)  $R_{uv}(\tau) = 0$ , wenn  $u(t)$  und  $v(t)$  voneinander unabhängig sind.

Für die Kovarianzfunktion wird auch die Bezeichnung 'Kreuzkorrelationsfunktion' benutzt.

### 6. Zusammenhang Kreuzspektrum - Kovarianzfunktion:

Die Wiener-Khintchinschen Beziehungen gelten auch für den Zusammenhang zwischen dem Kreuzspektrum und der Kovarianzfunktion:

$$S_{uv}(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{uv}(\tau) \cdot e^{-i2\pi f\tau} \cdot d\tau \quad (7)$$

mit der Umkehrung

$$R_{uv}(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_{uv}(f) \cdot e^{i2\pi f\tau} \cdot df$$

Für das Kospektrum bzw. Quadraturpektrum gilt:

$$C_{uv}(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{uv}(\tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau = 2 \int_0^{\infty} [R_{uv}(\tau) + R_{vu}(\tau)] \cos(2\pi f\tau) d\tau \quad (7a)$$

$$Q_{uv}(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{uv}(\tau) \sin(2\pi f\tau) d\tau = 2 \int_0^{\infty} [R_{uv}(\tau) - R_{vu}(\tau)] \sin(2\pi f\tau) d\tau$$

### 7. Spektrum einer Summe von zwei Funktionen:

Besteht die zu untersuchende Funktion  $w(t)$  aus der Summe von zwei Funktionen  $u(t)$  und  $v(t)$ ,

$$w(t) = u(t) + v(t) \quad ,$$

so ergibt sich für das Spektrum, wie man aus dem Vorangegangenen leicht ableiten kann:

$$C_T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} w_T(t) \cdot e^{-i2\pi ft} \cdot dt = A_T(f) + B_T(f)$$

$$|C_T(f)|^2 = C_T(f) \cdot C_T^*(f) = |A_T(f)|^2 + |B_T(f)|^2 + A_T^*(f) \cdot B_T(f) + A_T(f) \cdot B_T^*(f)$$

$$S_{ww}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|C_T(f)|^2}{T} = S_{uu}(f) + S_{vv}(f) + S_{uv}(f) + S_{vu}(f)$$

$$\begin{aligned} S_{ww}(f) &= S_{uu}(f) + S_{vv}(f) + 2 \cdot \text{Re}\{S_{uv}(f)\} \\ &= S_{uu}(f) + S_{vv}(f) + 2 \cdot C_{uv}(f) \end{aligned} \quad (8)$$

### 8. Zusammenhang zwischen dem Kreuzspektrum von zwei Funktionen und dem Kreuzspektrum von deren Ableitungen:

Wenn das Kreuzspektrum zweier Funktionen gesucht ist, die Funktionen selbst aber nicht bekannt sind sondern nur deren Ableitungen, so kann man auf die Integration verzichten, da zwischen den Kreuzspektren der Funktionen und deren Ableitungen ein einfacher Zusammenhang besteht. Man kann natürlich auch das Kreuzspektrum der Ableitungen aus dem Kreuzspektrum der Funktionen bestimmen.

Wir gehen aus von der Fourierdarstellung der Funktionen

$$\begin{aligned} u_T(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} A_T(f) \cdot e^{i2\pi ft} \cdot df \\ v_T(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} B_T(f) \cdot e^{i2\pi ft} \cdot df \end{aligned}$$

und erhalten für die ersten bzw. zweiten Ableitungen

$$\dot{u}_T(t) = \frac{du_T(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} A_T(f) \cdot e^{i2\pi ft} \cdot df = \int_{-\infty}^{\infty} i2\pi f \cdot A_T(f) \cdot e^{i2\pi ft} \cdot df$$

$$\ddot{u}_T(t) = \frac{d^2 u_T(t)}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \int_{-\infty}^{\infty} A_T(f) \cdot e^{i2\pi ft} \cdot df = - \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi f)^2 \cdot A_T(f) \cdot e^{i2\pi ft} \cdot df$$

und

$$\dot{v}_T(t) = \frac{dv_T(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} B_T(f) \cdot e^{i2\pi ft} \cdot df = \int_{-\infty}^{\infty} i2\pi f \cdot B_T(f) \cdot e^{i2\pi ft} \cdot df$$

$$\ddot{v}_T(t) = \frac{d^2 v_T(t)}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \int_{-\infty}^{\infty} B_T(f) \cdot e^{i2\pi ft} \cdot df = - \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi f)^2 \cdot B_T(f) \cdot e^{i2\pi ft} \cdot df$$

Daraus ergibt sich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}_T(t) \cdot e^{-i2\pi ft} \cdot dt = i2\pi f \cdot A_T(f) \quad ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{u}_T(t) \cdot e^{-i2\pi ft} \cdot dt = -(2\pi f)^2 \cdot A_T(f)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{v}_T(t) \cdot e^{-i2\pi ft} \cdot dt = i2\pi f \cdot B_T(f) \quad ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{v}_T(t) \cdot e^{-i2\pi ft} \cdot dt = -(2\pi f)^2 \cdot B_T(f)$$

Aus der Definition des Kreuzspektrums

$$S_{\dot{u}\dot{v}}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}_T(t) \cdot e^{i2\pi ft} \cdot dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \dot{v}_T(t) \cdot e^{-i2\pi ft} \cdot dt$$

$$S_{\ddot{u}\ddot{v}}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{u}_T(t) \cdot e^{i2\pi ft} \cdot dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{v}_T(t) \cdot e^{-i2\pi ft} \cdot dt$$

erhält man damit:

$$S_{\dot{u}\dot{v}}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot (-i2\pi f) \cdot A_T^*(f) \cdot i2\pi f \cdot B_T(f)$$

$$S_{\ddot{u}\ddot{v}}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot [ -(-2\pi f)^2 ] \cdot A_T^*(f) \cdot [ -(2\pi f)^2 ] \cdot B_T(f)$$

$$S_{\dot{u}\dot{v}}(f) = (2\pi f)^2 \cdot S_{uv}(f) \quad ; \quad S_{\dot{v}\dot{u}}(f) = (2\pi f)^2 \cdot S_{vu}(f)$$

$$S_{\ddot{u}\ddot{v}}(f) = (2\pi f)^4 \cdot S_{uv}(f) \quad ; \quad S_{\ddot{v}\ddot{u}}(f) = (2\pi f)^4 \cdot S_{vu}(f) \quad (9)$$

Wenn  $u(t) = v(t)$ , ergibt sich:

$$S_{\dot{u}\dot{u}}(f) = (2\pi f)^2 \cdot S_{uu}(f)$$

$$S_{\ddot{u}\ddot{u}}(f) = (2\pi f)^4 \cdot S_{uu}(f) \quad (9a)$$

**9. Kreuzspektrum einer Funktion und einer anderen Funktion, von der nur die Ableitung gegeben ist:**

Ist von einer der beiden Funktionen, deren Kreuzspektrum bestimmt werden soll, nur die Ableitung bekannt, so ergibt sich aus dem vorangegangenen Kapitel:

$$\begin{aligned}
 S_{u\dot{v}}(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot A_T^x(f) \cdot i2\pi f \cdot B_T(f) \\
 S_{\dot{v}u}(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot A_T(f) \cdot (-i2\pi f) \cdot B_T^x(f) \\
 S_{u\dot{v}}(f) &= i2\pi f \cdot S_{uv}(f) \\
 S_{\dot{v}u}(f) &= -i2\pi f \cdot S_{vu}(f)
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Für das Kospektrum bzw. Quadraturspektrum erhält man:

$$\begin{aligned}
 C_{u\dot{v}}(f) = 2\pi f \cdot Q_{uv}(f) \quad ; \quad Q_{u\dot{v}}(f) = -2\pi f \cdot C_{uv}(f) \\
 C_{\dot{v}u}(f) = -2\pi f \cdot Q_{vu}(f) \quad ; \quad Q_{\dot{v}u}(f) = 2\pi f \cdot C_{vu}(f)
 \end{aligned}
 \tag{10a}$$

Für die zweite Ableitung folgt analog:

$$\begin{aligned}
 S_{u\ddot{v}}(f) &= -(2\pi f)^2 \cdot S_{uv}(f) \\
 S_{\ddot{v}u}(f) &= -(2\pi f)^2 \cdot S_{vu}(f)
 \end{aligned}
 \tag{10b}$$

$$\begin{aligned}
 C_{u\ddot{v}}(f) = -(2\pi f)^2 \cdot C_{uv}(f) \quad ; \quad Q_{u\ddot{v}}(f) = -(2\pi f)^2 \cdot Q_{uv}(f) \\
 C_{\ddot{v}u}(f) = -(2\pi f)^2 \cdot C_{vu}(f) \quad ; \quad Q_{\ddot{v}u}(f) = -(2\pi f)^2 \cdot Q_{vu}(f)
 \end{aligned}
 \tag{10c}$$

**10. Zusammenhang zwischen den Spektren des Eingangs und des Ausgangs bei linearen Systemen:**

Um den Zusammenhang zwischen dem Spektrum des Seegangs und den Spektren der daraus resultierenden Schiffsbewegungen zu erhalten, gehen

wir von einem Ersatzsystem (Abb.1) aus, das einen linearen Schwinger darstellt. Die Einflußfunktion des Systems sei

$$F(f) = |F(f)| \cdot e^{i\alpha(f)} .$$

Ist der Eingang des Systems, also die Erregung, eine harmonische Funktion  $u(t) = \hat{u} \cdot e^{i2\pi ft}$ , so ist der Ausgang, also der Schwingungsweg von M,  $v(t) = \hat{v} \cdot e^{i2\pi ft}$ . Für die komplexen Amplituden gilt:

$$\hat{v} = F(f) \cdot \hat{u} \quad ; \quad |\hat{v}| = |F(f)| \cdot |\hat{u}|$$

$$\alpha = \text{arc}\hat{v} - \text{arc}\hat{u} \quad \text{Voreilwinkel von } v(t) \text{ gegenüber } u(t)$$

Der komplexen Amplitude einer harmonischen Funktion entspricht bei einer nichtperiodischen Funktion deren Fouriertransformierte (vgl. Kapitel 1), so daß sich, wenn  $u(t)$  eine nichtperiodische Funktion ist, ergibt:

$$B(f) = F(f) \cdot A(f) \quad ,$$

wobei  $B(f)$  die Fouriertransformierte von  $v(t)$  und  $A(f)$  die von  $u(t)$  bedeuten.

Mit Gleichung (1) erhält man daraus den Zusammenhang zwischen den Spektren des Eingangs und Ausgangs zu

$$S_{vv}(f) = |F(f)|^2 \cdot S_{uu}(f) \quad (11)$$

$$|F(f)| = \sqrt{\frac{S_{vv}(f)}{S_{uu}(f)}} \quad (11a)$$

Entsprechend gilt für die Kreuzspektren:

$$\begin{aligned} S_{uv}(f) &= C_{uv}(f) - i \cdot Q_{uv}(f) = F(f) \cdot S_{uu}(f) \\ S_{vu}(f) &= C_{vu}(f) - i \cdot Q_{vu}(f) = F^*(f) \cdot S_{uu}(f) \end{aligned} \quad (12)$$

Daraus folgt:

$$|F(f)| = \frac{|S_{uv}(f)|}{S_{uu}(f)} = \frac{\sqrt{C_{uv}^2(f) + Q_{uv}^2(f)}}{S_{uu}(f)} \quad (12a)$$

$$\text{tg } \alpha = - \frac{Q_{uv}(f)}{C_{uv}(f)} \quad (12b)$$

Für die praktische Anwendung ist noch folgender Wert von Bedeutung:

$$K_{uv}(f) = \frac{C_{uv}^2(f) + Q_{uv}^2(f)}{S_{uu}(f) \cdot S_{vv}(f)} \quad (13)$$

Dieser Ausdruck, der Kohärenz genannt wird, gibt nämlich an, ob und wie weit es einen Sinn hat, die Einflußfunktion  $F(f)$  zu berechnen. Wie aus den Gleichungen (11a) und (12a) folgt, muß sich für stationäre Prozesse, zwischen denen ein linearer Zusammenhang besteht, die Kohärenz zu eins und für Prozesse, die unabhängig voneinander sind, zu Null ergeben. Es hätte also nur einen Sinn, eine Aussage über  $F(f)$  zu machen, wenn  $K = 1$  ist. Da in der Praxis einmal die Funktionen  $u(t)$  und  $v(t)$  als Meßwerte gegeben und somit immer von Störungen überlagert sind und zum anderen das System meist nur näherungsweise linear sein wird, muß man sich in der Anwendung mit Kohärenzen unter eins zufriedengeben. Gebräuchlich sind Werte bis zu 0,8 - 0,66 herunter.

#### 11. Spektraldichte eines Vorgangs, von dem eine Registrierung endlicher Länge vorliegt:

Die im vorangegangenen Teil angegebenen Definitionen und Ableitungen gelten alle für eine zeitliche Ausdehnung des betrachteten Vorgangs von 0 bis  $\infty$  bzw. von  $-\infty$  bis  $+\infty$ . Diese Forderung wird nun nie erfüllt sein, da entweder der Vorgang selbst nur eine endliche Zeit andauert oder aber die Registrierzeit beschränkt werden muß.

Im Falle des Seegangs ergibt sich diese Beschränkung aus dem Vorgang selbst. Zu Beginn war die Forderung gestellt worden, daß der Vorgang stationär sein soll. Dies wird jedoch nur bei relativ geringer Registrierzeit der Fall sein, da die Meeresoberfläche in steter Wechselbeziehung mit der angrenzenden Luft steht.

Liegt eine Registrierung endlicher Länge  $T_n$  vor, so kann die Autokovarianzfunktion nur für Verschiebungen  $\tau$  berechnet werden, die kleiner als  $T_n$  sind.

Man erhält eine Funktion  $\tilde{R}_{uu}(\tau)$ , die wir 'scheinbare' Autokovarianzfunktion nennen wollen:

$$\tilde{R}_{uu}(\tau) = \frac{1}{T_n - \tau} \int_0^{T_n - \tau} u(t) \cdot u(t + \tau) \cdot dt \quad \text{für } |\tau| \leq T_m < T_n \quad (14)$$

mit  $T_m =$  maximale Verschiebung.

Um die Fouriertransformation, die von  $\tau = -\infty$  bis  $\tau = +\infty$  zu erstrecken ist, durchführen zu können, obwohl  $\tilde{R}_{uu}(\tau)$  für  $|\tau| > T_m$  nicht definiert ist, führen wir eine Hilfsfunktion  $D_i(\tau)$  ein, für die gilt:

$$\begin{aligned} D_i(0) &= 1 \\ D_i(\tau) &= D_i(-\tau) \\ D_i(\tau) &= 0 \quad \text{für } |\tau| > T_m \end{aligned}$$

Der Index  $i$  soll die Form von  $D_i(\tau)$  für  $|\tau| \leq T_m$  bezeichnen, auf die im Folgenden noch eingegangen wird.

Mit dieser Hilfsfunktion erhalten wir eine 'modifizierte' Autokovarianzfunktion

$$\tilde{\tilde{R}}_{uu}(\tau) = D_i(\tau) \cdot \tilde{R}_{uu}(\tau) ,$$

die für  $-\infty \leq \tau \leq +\infty$  definiert ist, so daß man auf sie die Fouriertransformation anwenden kann:

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{S}}_{uu}(f) &= 4 \int_{-T_m}^{\infty} \tilde{\tilde{R}}_{uu}(\tau) \cdot \cos(2\pi f\tau) \cdot d\tau = 4 \int_0^{\infty} D_i(\tau) \cdot \tilde{R}_{uu}(\tau) \cdot \cos(2\pi f\tau) \cdot d\tau \\ &= 4 \int_0^{\infty} D_i(\tau) \cdot \tilde{R}_{uu}(\tau) \cdot \cos(2\pi f\tau) \cdot d\tau \end{aligned} \quad (15)$$

Was bedeutet nun  $\tilde{\tilde{S}}_{uu}(f)$ ? Dazu kann man Folgendes überlegen:

Da  $u(t)$  ergodisch ist, ist für  $|\tau| \leq T_m$  der Erwartungswert der scheinbaren Autokovarianzfunktion  $\tilde{R}_{uu}(\tau)$ , also der über die Glieder des Ensembles gebildete Mittelwert, gleich der wahren Autokovarianzfunktion  $R_{uu}(\tau)$ , d.h. der aus einer Registrierung unendlicher Länge bestimmten:

$$E \left[ \tilde{R}_{uu}(\tau) \right] = R_{uu}(\tau) \quad \text{für } |\tau| \leq T_m$$

Daraus folgt für den Erwartungswert der modifizierten Autokovarianzfunktion  $\tilde{\tilde{R}}_{uu}(\tau)$ :

$$E \left[ \tilde{\tilde{R}}_{uu}(\tau) \right] = D_i(\tau) \cdot R_{uu}(\tau) \quad \text{für } -\infty \leq \tau \leq +\infty$$

Damit ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned} E\left[\tilde{S}_{uu}(f)\right] &= 4 \int_0^{\infty} D_i(\tau) \cdot R_{uu}(\tau) \cdot \cos(2\pi f\tau) \cdot d\tau \\ &= 4 \int_0^{T_m} D_i(\tau) \cdot R_{uu}(\tau) \cdot \cos(2\pi f\tau) \cdot d\tau \end{aligned}$$

Da  $R_{uu}(\tau) = \int_0^{\infty} S_{uu}(f) \cdot \cos(2\pi f\tau) \cdot df$  , wird

$$\begin{aligned} E\left[\tilde{S}_{uu}(f)\right] &= 4 \int_0^{T_m} D_i(\tau) \cdot \int_0^{\infty} S_{uu}(\xi) \cdot \cos(2\pi\xi\tau) \cdot d\xi \cdot \cos(2\pi f\tau) \cdot d\tau \\ &= 4 \int_0^{\infty} S_{uu}(\xi) \cdot \int_0^{T_m} D_i(\tau) \cdot \cos(2\pi\xi\tau) \cdot \cos(2\pi f\tau) \cdot d\tau \cdot d\xi \\ &= 2 \int_0^{\infty} S_{uu}(\xi) \cdot \int_0^{T_m} D_i(\tau) \cdot \left[ \cos\{2\pi(f-\xi)\tau\} + \cos\{2\pi(f+\xi)\tau\} \right] \cdot d\tau \cdot d\xi \\ &= \int_0^{\infty} S_{uu}(\xi) \cdot \left[ G_i(f-\xi) + G_i(f+\xi) \right] \cdot d\xi \quad , \end{aligned}$$

wobei  $G_i(f)$  die Fouriertransformation von  $D_i(\tau)$  bedeutet:

$$G_i(f) = \int_{-\infty}^{\infty} D_i(\tau) \cdot e^{-i2\pi f\tau} \cdot d\tau$$

Das nach Gleichung (15) berechnete Spektrum ist eine Abschätzung von  $E\left[\tilde{S}_{uu}(f)\right]$  . Der Erwartungswert  $E\left[\tilde{S}_{uu}(f)\right]$  ist ein mit den Gewichten  $\left[ G_i(f-\xi) + G_i(f+\xi) \right]$  über den Frequenzbereich  $0 \leq \xi \leq \infty$  gebildeter Mittelwert des wahren Spektrums  $S_{uu}(f)$  . Deshalb nennt man  $\tilde{S}_{uu}(f)$  'geglättetes' Spektrum.  $\tilde{S}_{uu}(f)$  wird dem wahren Spektrum umso ähnlicher, je schmaler der Bereich, über den gemittelt wird, d.h. je schmaler  $G_i(f)$  ist. Als Maß für die 'effektive Breite' von  $G_i(f)$  kann man nehmen:

$$W'_e = \frac{\left\{ \int_0^{\infty} \left[ G_i(f-\xi) + G_i(f+\xi) \right] \cdot d\xi \right\}^2}{\int_0^{\infty} \left[ G_i(f-\xi) + G_i(f+\xi) \right]^2 \cdot d\xi} \quad (16)$$

Es ist aber nicht nur die Breite sondern auch die Form von  $G_i(f)$  von

Bedeutung.  $G_1(f)$  sollte nämlich möglichst nie negativ werden, da sonst negative Spektralwerte auftreten, die physikalisch unsinnig sind. Da  $G_1(f)$  eine Gewichtsfunktion ist, muß noch gelten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_1(f) \cdot df = 1$$

Das Problem ist also, eine möglichst zweckmäßige Gewichtsfunktion  $G_1(f)$  zu finden.

Im Schrifttum werden eine Reihe solcher Gewichtsfunktionen angegeben (Abb.2 a und b), die alle einen Kompromiß darstellen. Denn entweder ist der Wert der Funktion in den Nachbarbändern klein, dann klingt sie nur langsam ab, oder aber sie klingt schnell ab, dann ist jedoch der Wert in den Seitenbändern größer. Für die effektive Breite dieser Funktionen kann man mit guter Näherung setzen:

$$W'_e = \frac{1}{T_m}$$

Für die vorliegenden Probleme soll die von J.von Hann angegebene Hilfsfunktion (ihre Anwendung wird im Angelsächsischen 'Hanning' genannt) benutzt werden:

$$D(\tau) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos \frac{\pi \tau}{T_m} \right] \quad (17)$$

mit der Transformation

$$G(f) = \frac{\sin(2\pi f T_m)}{2\pi f - \left[ \frac{T_m}{\pi} \right]^2 \cdot (2\pi f)^3} \quad (17a)$$

Diése Funktionen sind in Abb.3 dargestellt.

Für die praktische digitale Berechnung von  $\tilde{S}_{uu}(f)$  wird im Schrifttum vielfach folgende Formel angegeben:

$$\tilde{S}_{uu}(f_r) = \frac{1}{4} \cdot \tilde{S}_{uu}(f_{r-1}) + \frac{1}{2} \cdot \tilde{S}_{uu}(f_r) + \frac{1}{4} \cdot \tilde{S}_{uu}(f_{r+1}) \quad (18)$$

Hier bedeutet

$$\tilde{S}_{uu}(f) = 4 \int_0^{\infty} D_0(\tau) \cdot \tilde{R}_{uu}(\tau) \cdot \cos(2\pi f \tau) \cdot d\tau = 4 \int_0^{T_m} \tilde{R}_{uu}(\tau) \cdot \cos(2\pi f \tau) \cdot d\tau \quad (19)$$

mit  $D_0(\tau) = 1$  für  $|\tau| \leq T_m$  und  $D_0(\tau) = 0$  für  $|\tau| > T_m$  (Abb.2a).

Diese Gleichung (18) ergibt sich aus Gleichung (15) wie folgt:

$$\tilde{S}_{uu}(f) = 4 \int_0^{T_m} D_1(\tau) \cdot \tilde{R}_{uu}(\tau) \cdot \cos(2\pi f\tau) \cdot d\tau$$

Da  $\tilde{R}_{uu}(\tau) = \int_0^{\infty} \tilde{S}_{uu}(f) \cdot \cos(2\pi f\tau) \cdot df$ , wird

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{uu}(f) &= 4 \int_0^{T_m} D_1(\tau) \cdot \int_0^{\infty} \tilde{S}_{uu}(\xi) \cdot \cos(2\pi\xi\tau) \cdot d\xi \cdot \cos(2\pi f\tau) \cdot d\tau \\ &= 4 \int_0^{\infty} \tilde{S}_{uu}(\xi) \cdot \int_0^{T_m} D_1(\tau) \cdot \cos(2\pi\xi\tau) \cdot \cos(2\pi f\tau) \cdot d\tau \cdot d\xi \\ &= \int_0^{\infty} \tilde{S}_{uu}(\xi) \cdot \left[ G_1(f-\xi) + G_1(f+\xi) \right] \cdot d\xi \end{aligned} \quad (20)$$

Schreibt man Gleichung (20) als Summe

$$\tilde{S}_{uu}(f_r) = \sum_{j=0}^M \tilde{S}_{uu}(f_j) \cdot \left[ G_1(f_r - f_j) + G_1(f_r + f_j) \right] \cdot \Delta f_j,$$

so erhält man mit der Gewichtsfunktion von Hann:

$$\tilde{S}_{uu}(f_r) = \sum_{j=0}^M \tilde{S}_{uu}(f_j) \left\{ \frac{\sin [2\pi (f_r - f_j) T_m]}{2\pi (f_r - f_j) - \left[ \frac{T_m}{\pi} \right]^2 \cdot [2\pi (f_r - f_j)]^3} + \frac{\sin [2\pi (f_r + f_j) T_m]}{2\pi (f_r + f_j) - \left[ \frac{T_m}{\pi} \right]^2 \cdot [2\pi (f_r + f_j)]^3} \right\} \Delta f_j$$

Mit  $f_r = r \cdot \Delta f$ ,  $f_j = j \cdot \Delta f_j$  und  $\Delta f_j = \Delta f = \frac{1}{2T_m}$  ergibt sich daraus:

$$\tilde{S}_{uu}(f_r) = \sum_{j=0}^M \tilde{S}_{uu}(f_j) \cdot \left[ \frac{\sin(r-j)\pi}{r-j-(r-j)^3} + \frac{\sin(r+j)\pi}{r+j-(r+j)^3} \right] \cdot \frac{1}{2\pi}$$

Der Klammerausdruck ist gleich Null außer für  $j=r-1$ ,  $j=r$  und  $j=r+1$ . Bestimmt man für diese Werte den Grenzwert, so erhält man:

$$\tilde{S}_{uu}(f_r) = \frac{1}{4} \cdot \tilde{S}_{uu}(f_{r-1}) + \frac{1}{2} \cdot \tilde{S}_{uu}(f_r) + \frac{1}{4} \cdot \tilde{S}_{uu}(f_{r+1})$$

An einem Beispiel soll nun gezeigt werden, wie sich die 'Glättung'

auswirkt. Wir wählen dazu der Einfachheit halber eine periodische Funktion

$$u(t) = u_0 \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varepsilon)$$

Die Autokovarianzfunktion dafür ist:

$$\begin{aligned} R_{uu}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{u_0^2}{T} \int_0^T \cos(2\pi f_0 t + \varepsilon) \cdot \cos[2\pi f_0 (t+\tau) + \varepsilon] \cdot dt \\ &= \frac{u_0^2}{2} \cdot \cos(2\pi f_0 \tau) \quad 0 \leq \tau \leq \infty \end{aligned}$$

Für die Spektraldichte ergibt sich:

$$S_{uu}(f) = 2 \cdot u_0^2 \int_0^{\infty} \cos(2\pi f_0 \tau) \cdot \cos(2\pi f \tau) \cdot d\tau = \frac{u_0^2}{2} \cdot \delta(f - f_0)$$

$\delta(f)$  = Diracsche Deltafunktion .

Ist  $u(t)$  nur für  $0 \leq t \leq T_n$  gegeben, so ist die scheinbare Autokovarianzfunktion nach Gleichung (14):

$$\tilde{R}_{uu}(\tau) = \frac{u_0^2}{2} \left[ \cos(2\pi f_0 \tau) + \cos(2\pi f_0 T_n + 2\varepsilon) \cdot \frac{\sin[2\pi f_0 (T_n - \tau)]}{2\pi f_0 (T_n - \tau)} \right]$$

Zur Vereinfachung der Rechnung setzen wir  $\varepsilon = \frac{\pi}{4} - \pi f_0 T_n$ , so daß

$$\tilde{R}_{uu}(\tau) = \frac{u_0^2}{2} \cdot \cos(2\pi f_0 \tau) \quad 0 \leq \tau \leq T_m$$

Damit ergibt sich nach Gleichung (19):

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{uu}(f) &= 4 \int_0^{\infty} D_0(\tau) \cdot \tilde{R}_{uu}(\tau) \cdot \cos(2\pi f \tau) \cdot d\tau = \int_0^{T_m} \tilde{R}_{uu}(\tau) \cdot \cos(2\pi f \tau) \cdot d\tau \\ &= u_0^2 \left[ \frac{\sin[2\pi(f-f_0)T_m]}{2\pi(f-f_0)} + \frac{\sin[2\pi(f+f_0)T_m]}{2\pi(f+f_0)} \right] \end{aligned}$$

Statt der Spektrallinie bei  $f=f_0$  erhält man also ein kontinuierliches Spektrum.

Für das geglättete Spektrum nach Gleichung (15) erhält man mit der Hilfsfunktion  $D(\tau)$  nach Gleichung (17):

$$\begin{aligned}
 \tilde{S}_{uu}(f) &= 2u_0^2 \cdot \int_0^{\infty} D(\tau) \cdot \tilde{R}_{uu}(\tau) \cdot \cos(2\pi f\tau) \cdot d\tau \\
 &= u_0^2 \cdot \int_0^{T_m} \left[ 1 + \cos\frac{\pi\tau}{T_m} \right] \cdot \cos(2\pi f_0\tau) \cdot \cos(2\pi f\tau) \cdot d\tau \\
 &= \frac{u_0^2}{2} \left[ \frac{\sin[2\pi(f-f_0)T_m]}{2\pi(f-f_0) - \left[\frac{T_m}{\pi}\right]^2 [2\pi(f-f_0)]^3} + \frac{\sin[2\pi(f+f_0)T_m]}{2\pi(f+f_0) - \left[\frac{T_m}{\pi}\right]^2 [2\pi(f+f_0)]^3} \right]
 \end{aligned}$$

Aus den Abb. 4 und 5 ersieht man, daß  $\tilde{S}_{uu}(f)$  eine bessere Abschätzung des wahren Spektrums  $S_{uu}(f) = \frac{u_0^2}{2} \cdot \delta(f-f_0)$  darstellt als  $\tilde{S}_{uu}(f)$ .

#### 12. Konfidenz der berechneten Spektraldichte:

Ein Maß für die statistische Schwankung von  $\tilde{S}_{uu}(f)$  ist die Varianz, bestimmt aus dem Ensemble:

$$\text{Var} \left[ \tilde{S}_{uu}(f) \right] = E \left\{ \left[ \tilde{S}_{uu}(f) - E \left\{ \tilde{S}_{uu}(f) \right\} \right]^2 \right\}$$

Macht man die Varianz mit dem Quadrat des Mittelwerts dimensionslos, so erhält man den Variationskoeffizienten

$$\frac{\text{Var} \left[ \tilde{S}_{uu}(f) \right]}{\left\{ E \left[ \tilde{S}_{uu}(f) \right] \right\}^2}$$

Unter bestimmten Bedingungen (vgl. Blackman-Tukey (1958)) kann man setzen:

$$\frac{\text{Var} \left[ \tilde{S}_{uu}(f) \right]}{\left\{ E \left[ \tilde{S}_{uu}(f) \right] \right\}^2} = \frac{\int_0^{\infty} S_{uu}^2(\xi) \cdot \left[ G_1(f-\xi) + G_1(f+\xi) \right]^2 \cdot d\xi}{T_n \left\{ \int_0^{\infty} S_{uu}(\xi) \cdot \left[ G_1(f-\xi) + G_1(f+\xi) \right] \cdot d\xi \right\}^2}$$

Wenn sich  $S_{uu}(\xi)$  in dem Bereich, in dem  $\left[ G_1(f-\xi) + G_1(f+\xi) \right]$  von Null verschieden ist, nicht sehr stark mit  $\xi$  ändert, kann man auch setzen:

$$W_e = \frac{\left\{ \int_0^{\infty} S_{uu}(\xi) \cdot \left[ G_1(f-\xi) + G_1(f+\xi) \right] \cdot d\xi \right\}^2}{\int_0^{\infty} S_{uu}^2(\xi) \cdot \left[ G_1(f-\xi) + G_1(f+\xi) \right]^2 \cdot d\xi} \approx \frac{1}{T_m}$$

Durch den Vergleich der letzten beiden Gleichungen erhält man den Zusammenhang zwischen der Varianz von  $\tilde{S}_{uu}(f)$ , der Länge der Registrierung  $T_n$  und der Breite von  $G_1(f)$  bzw. der maximalen Verschiebung  $T_m$  zu

$$\frac{\text{Var}[\tilde{S}_{uu}(f)]}{\{E[\tilde{S}_{uu}(f)]\}^2} = \frac{1}{T_n \cdot W_e} \approx \frac{T_m}{T_n} \quad (21)$$

Nimmt man nun an, daß  $\tilde{S}_{uu}(f)$  sich aus den Spektralwerten  $s(f)$  vieler Teilschwingungen der gleichen Frequenz  $f$  zusammensetzt,

$$\tilde{S}_{uu}(f) = \sum_{n=1}^k s_n(f) \quad ,$$

und daß  $\sqrt{s(f)}$  normalverteilt ist, dann folgt, daß  $\tilde{S}_{uu}(f)$  nach einer  $\chi^2$ -Verteilung mit dem Freiheitsgrad  $k$  verteilt ist.

Für die  $\chi^2$ -Verteilung gilt:

$$\begin{aligned} E[\chi_k^2] &= k \\ \text{Var}[\chi_k^2] &= 2k \\ \frac{\text{Var}[\chi_k^2]}{\{E[\chi_k^2]\}^2} &= \frac{2k}{k^2} = \frac{2}{k} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den Freiheitsgrad der  $\chi^2$ -Verteilung, nach der  $\tilde{S}_{uu}(f)$  verteilt ist (vgl. Gleichung (21)):

$$k \approx 2 \cdot \frac{T_n}{T_m} \quad (22)$$

Aus der Länge der Aufzeichnung  $T_n$  und der maximalen Verschiebung  $T_m$  kann also  $k$  bestimmt werden. Damit ist die  $\chi^2$ -Verteilung bekannt, und man kann berechnen, wie groß die Schwankungen von  $\tilde{S}_{uu}(f)$  um den Erwartungswert  $E[\tilde{S}_{uu}(f)]$  mit vorgegebener Wahrscheinlichkeit sind.

Abb.6 zeigt die auf den Erwartungswert bezogenen Werte, die mit der Wahrscheinlichkeit  $p$  überschritten werden, in Abhängigkeit vom Freiheitsgrad  $k$ .

### C. Bestimmung der Spektren der Schiffsbewegungen

#### 1. Messung der Schiffsbewegungen:

Die Bewegungen des Schiffes werden nach folgendem Prinzip gemessen: Im Massenmittelpunkt M des Schiffes ist eine B-C-kreiselstabilisierte Plattform aufgestellt, deren Längsachse mit der des Schiffes zusammenfällt. Auf dieser Plattform ist in den drei Achsen je ein linearer Beschleunigungsmesser befestigt, woraus man die Beschleunigungen des Massenmittelpunktes in den drei Achsen erhält. Die Winkel der Plattform gegen das Schiff werden durch zwei Potentiometer gemessen. Der dritte Winkel, der Gierwinkel  $\theta$ , wird vom Kurskreisel des Schiffes abgenommen. Damit sind die Bewegungen in den sechs Freiheitsgraden bekannt.

Das Koordinatensystem x-y-z, das der nachfolgenden Rechnung zugrundeliegt, zeigt Abb.7. Dieses System ist quasiraumfest, d.h. es wird mit gleichförmiger Geschwindigkeit mit dem Schiff mitbewegt. Macht das Schiff keine Fahrt, so ist das Koordinatensystem raumfest.

Durch das Prinzip der Plattform ist es bedingt, daß die Komponenten der Bewegung nicht alle in dem oben definierten Koordinatensystem gemessen werden können. Wir definieren deshalb noch ein System x'-y'-z', das aus dem ersten durch Drehung um die z-Achse um den Winkel  $\theta$  hervorgeht, und ein drittes x''-y''-z'', das gegen das zweite um den Winkel  $\psi'$  um die y'-Achse gedreht ist (Abb.7). Gemessen werden in diesen Systemen folgende Größen:

$$\ddot{x}'_M, \ddot{y}'_M, \ddot{z}'_M, \theta, \psi', \varphi''$$

Bei den Beschleunigungen wird im Folgenden der Index M der Einfachheit halber weggelassen, da es eindeutig ist, daß es sich um die Beschleunigungen des Massenmittelpunktes M handelt.

Wir erhalten für die gesuchten Komponenten:

$$\text{Tauchbeschleunigung } \ddot{z}(t) = \ddot{z}'(t)$$

$$\text{Längsbeschleunigung } \ddot{x}(t) = \ddot{x}'(t) \cdot \cos\theta(t) - \ddot{y}'(t) \cdot \sin\theta(t)$$

$$\text{Querbeschleunigung } \ddot{y}(t) = \ddot{y}'(t) \cdot \cos\theta(t) + \ddot{x}'(t) \cdot \sin\theta(t) \quad (23)$$

$$\text{Stampfwinkel } \psi(t) = \psi'(t) \cos\theta(t) + \varphi''(t) \frac{\sin\theta(t)}{\cos\theta(t)} + \theta(t) \sin\theta(t) \operatorname{tg}\psi'(t)$$

Gierwinkel  $\theta(t) = \theta'(t)$

Rollwinkel  $\varphi(t) = \varphi''(t) \frac{\cos\theta(t)}{\cos\psi(t)} + \theta(t) \cos\theta(t) \operatorname{tg}\psi'(t) - \psi'(t) \sin\theta(t)$

Da es sich um kleine Winkel handelt, man also  $\sin\alpha = \alpha$  und  $\cos\alpha = 1$  setzen kann, ergibt sich:

$$\ddot{z}(t) = \ddot{z}'(t)$$

$$\ddot{x}(t) = \ddot{x}'(t) - \ddot{y}'(t) \cdot \theta(t)$$

$$\ddot{y}(t) = \ddot{y}'(t) + \ddot{x}'(t) \cdot \theta(t)$$

$$\psi(t) = \psi'(t) + \varphi''(t) \cdot \theta(t) + \psi'(t) \cdot \theta^2(t) \tag{23a}$$

$$\theta(t) = \theta'(t)$$

$$\varphi(t) = \varphi''(t)$$

## 2. Bestimmung der Spektren der Komponenten und der Beziehungen zwischen den Komponenten:

Die Berechnung der Spektren der Beschleunigungen und Winkel und ihre Glättung ergibt sich aus den in Teil B aufgezeigten Zusammenhängen.

Von den Beziehungen zwischen den Komponenten sind die zwischen Stampfen und Tauchen bzw. Rollen und Tauchen die wichtigsten.

Man erhält für Stampfen-Tauchen:

Phase des Tauchens gegenüber dem Stampfen

$$\alpha_{\psi z}(f) = \operatorname{arctg} - \frac{Q_{\psi \ddot{z}}(f)}{C_{\psi \ddot{z}}(f)}$$

Kohärenz zwischen Tauchen und Stampfen

$$K_{\psi z}(f) = \frac{C_{\psi \ddot{z}}^2(f) + Q_{\psi \ddot{z}}^2(f)}{S_{\psi \psi}(f) \cdot S_{\ddot{z} \ddot{z}}(f)}$$

Entsprechend ergibt sich für Rollen-Tauchen:

Phase des Tauchens gegenüber dem Rollen

$$\alpha_{\varphi z}(f) = \operatorname{arctg} - \frac{Q_{\varphi \ddot{z}}(f)}{C_{\varphi \ddot{z}}(f)}$$

### Kohärenz zwischen Tauchen und Rollen

$$K_{\varphi z}(f) = \frac{C_{\varphi \ddot{z}}^2(f) + Q_{\varphi \ddot{z}}^2(f)}{S_{\varphi\varphi}(f) \cdot S_{\ddot{z}\ddot{z}}(f)}$$

### 3. Fehlerbetrachtung:

- a) Wir betrachten zunächst die Fehler, die dadurch entstehen, daß man anstatt der exakten Gleichungen (23) die vereinfachten Gleichungen (23a) der Rechnung zugrundelegt. Diese Fehler sind am größten, wenn die Komponenten in Phase sind.

Nehmen wir an, daß  $\ddot{x}$  und  $\ddot{y}$  ungefähr von gleicher Größe sind und  $\varphi = 3\psi$  ist, und setzen  $\psi' = \vartheta = 10^\circ$ , so erhalten wir, da  $\arcsin 10^\circ = 1,005 \cdot \sin 10^\circ = 0,99 \cdot \operatorname{tg} 10^\circ$  und  $\cos 10^\circ = 0,985$ , als maximale Abweichung von (23a) gegenüber (23):

$$\Delta \ddot{x}(t) = +0,01 \cdot \ddot{x}(t)$$

$$\Delta \ddot{y}(t) = +0,02 \cdot \ddot{y}(t)$$

$$\Delta \psi(t) = +0,02 \cdot \psi(t)$$

$$\Delta \varphi(t) < +0,005 \cdot \varphi(t)$$

- b) Es war vorausgesetzt, daß die Komponenten der Schiffsbewegungen im Massenmittelpunkt gemessen werden. Die Lage dieses Punktes hängt nun vom jeweiligen Beladungszustand des Schiffes ab. Die Plattform hingegen muß aus baulichen Gründen einen festen Platz haben. Dadurch können in den Beschleunigungen Fehler auftreten, die im Folgenden bestimmt werden.

Sind die Koordinaten der Plattform P im schiffsfesten System  $l, b$  und  $t$  (Abb.8) und im quasiraumfesten System  $x_p, y_p$  und  $z_p$ , so werden die Beschleunigungen um folgende Beträge zu groß gemessen:

$$\Delta \ddot{z}(t) = y_p \cdot \ddot{\vartheta}(t) - x_p \cdot \ddot{\psi}(t)$$

$$\Delta \ddot{y}(t) = x_p \cdot \ddot{\vartheta}(t) - z_p \cdot \ddot{\varphi}(t)$$

$$\Delta \ddot{x}(t) = z_p \cdot \ddot{\psi}(t) - y_p \cdot \ddot{\vartheta}(t)$$

mit

$$z_p = t \cdot \cos \psi' \cdot \cos \varphi'' + b \cdot \cos \psi' \cdot \sin \varphi'' - l \cdot \sin \psi'$$

$$y_p = t \cdot (\sin \theta \cdot \sin \psi' \cdot \cos \varphi'' - \cos \theta \cdot \sin \varphi'') + b \cdot (\sin \theta \cdot \sin \psi' \cdot \sin \varphi'' + \cos \theta \cdot \cos \varphi'') + l \cdot \sin \theta \cdot \cos \psi'$$

$$x_p = t \cdot (\cos \theta \cdot \sin \psi' \cdot \cos \varphi'' + \sin \theta \cdot \sin \varphi'') + b \cdot (\cos \theta \cdot \sin \psi' \cdot \sin \varphi'' - \sin \theta \cdot \cos \varphi'') + l \cdot \cos \theta \cdot \cos \psi'$$

#### D. Bestimmung des Seegangsspektrums aus den Schiffsbewegungen

Für die Bestimmung des Seegangsspektrums aus den Schiffsbewegungen sind zwei Wege möglich.

- a) Ist die Einflußfunktion  $F(f)$  des Schiffes bekannt, so kann das Seegangsspektrum aus dem Spektrum der Bewegung direkt ermittelt werden:

$$S_{\zeta\zeta}(f) = \frac{S_{zz}(f)}{|F_{\zeta z}(f)|^2}$$

mit  $S_{\zeta\zeta}(f) =$  Seegangsspektrum

$S_{zz}(f) =$  Spektrum der Tauchbewegung

$F_{\zeta z}(f) =$  Einflußfunktion von Seegang-Tauchen

Diese Beziehung gilt natürlich auch für die anderen Bewegungskomponenten.

In der Praxis wird jedoch die Einflußfunktion nur in den seltensten Fällen bekannt sein, so daß dieser Weg meistens ausscheidet.

- b) Eine einfachere Methode wurde durch Tucker (1954) vorgezeichnet. Die Seegangsfunktion setzt sich ja zusammen aus der Vertikalbewegung eines Punktes D des Schiffes und der Wellenhöhe relativ zum Schiff an diesem Punkt D. Da die Wellen durch das Schiff beeinflusst werden, muß dieser Punkt an den Schiffsenden liegen, wo der Seegang noch ungestört ist.

Mit Abb.9 ergibt sich für die Seegangsfunktion:

$$\zeta(t) = z(t) + h_G(t) - h_T(t)$$

$$\begin{aligned}
 \zeta(t) &= z(t) + h_G(t) - h_0 \cos \psi'(t) - \left[ e - (H_M - T) \cdot \operatorname{tg} \frac{\psi'(t)}{2} \right] \sin \psi'(t) \\
 &= z(t) + h_G(t) - h_0 \cos \psi'(t) - e \cdot \sin \psi'(t) + (H_M - T) \left[ 1 - \cos \psi'(t) \right] \\
 &= z(t) + h_G(t) - h_0 - e \cdot \sin \psi'(t) + (H_M - H_D) \left[ 1 - \cos \psi'(t) \right]
 \end{aligned}$$

Mit  $h_G(t) - h_0 = h(t)$  ergibt sich:

$$\zeta(t) = z(t) + h(t) - e \cdot \sin \psi'(t) + (H_M - H_D) \left[ 1 - \cos \psi'(t) \right] \quad (24)$$

Da  $\psi'(t)$  ein kleiner Winkel ist, kann man setzen:

$$\zeta(t) = z(t) + h(t) - e \cdot \psi'(t) \quad (24a)$$

Der durch den Übergang von Gleichung (24) auf Gleichung (24a) auftretende Fehler ist gering. Nimmt man wieder einen Winkel  $\psi' = 10^\circ$  an, so ergibt sich im Fall des Forschungsschiffes ( $e \approx 35\text{m}$ ,  $H_M - H_D \approx 4\text{m}$ ) ein maximaler Fehler von  $-0,09\text{m}$ , d.h. die Seegangsfunktion erscheint um  $0,09\text{m}$  zu klein. In Wirklichkeit werden die Fehler wesentlich geringer sein, da  $\psi' = 10^\circ$  ein selten erreichter Wert ist.

Der Einfluß der Rollbewegung wird dadurch ausgeschaltet, daß  $h(t)$  an Backbord und Steuerbord gemessen und der Mittelwert in die Rechnung eingeführt wird.

Für das Seegangsspektrum ergibt sich also:

$$\begin{aligned}
 S_{\zeta\zeta}(f) &= S_{zz}(f) + S_{hh}(f) + e^2 \cdot S_{\psi\psi}(f) + 2 \cdot \operatorname{Re} \left\{ S_{zh}(f) \right\} - 2e \cdot \operatorname{Re} \left\{ S_{z\psi}(f) \right\} \\
 &\quad - 2e \cdot \operatorname{Re} \left\{ S_{h\psi}(f) \right\} \\
 &= S_{zz}(f) + S_{hh}(f) + e^2 \cdot S_{\psi\psi}(f) + 2 \cdot C_{zh}(f) - 2e \cdot C_{z\psi}(f) \\
 &\quad - 2e \cdot C_{h\psi}(f)
 \end{aligned} \quad (25)$$

### E. Praktischer Rechnungsgang

Die Rechnungen sollen auf einem größeren Digitalrechner durchgeführt werden. Die von den Meßwertgebern gelieferten Größen  $\ddot{x}'_g(t)$ ,  $\ddot{y}'_g(t)$ ,  $\ddot{z}'_g(t)$ ,  $\psi'_g(t)$ ,  $\varphi'_g(t)$ ,  $\theta'_g(t)$  und  $h'_g(t)$  liegen für  $t=t_n=n\Delta t$  ( $n=0\dots 2N$ ) als Spannungswerte [Volt] in digitaler Form vor. Sie müssen zunächst mit den Eichfunktionen der Meßwertgeber multipliziert werden. Subtrahiert man von den so erhaltenen Größen  $\ddot{x}'_e(t)$ ,  $\ddot{y}'_e(t)$ ,  $\ddot{z}'_e(t)$ ,  $\psi'_e(t)$ ,  $\varphi'_e(t)$ ,  $\theta'_e(t)$  und  $h'_e(t)$  den jeweiligen Mittelwert, so erhält man die Größen  $\ddot{x}'(t)$ ,  $\ddot{y}'(t)$ ,  $\ddot{z}'(t)$ ,  $\psi'(t)$ ,  $\varphi(t)$ ,  $\theta(t)$  und  $h(t)$ , aus denen dann die Komponenten in dem zugrundegelegten Koordinatensystem bestimmt werden. Anschließend werden deren Spektren und Kreuzspektren berechnet, und zwar  $S_{\ddot{x}\ddot{x}}$ ,  $S_{\ddot{y}\ddot{y}}$ ,  $S_{\ddot{z}\ddot{z}}$ ,  $S_{hh}$ ,  $S_{\psi\psi}$ ,  $S_{\psi'\psi'}$ ,  $S_{\varphi\varphi}$ ,  $C_{\psi\ddot{z}}$ ,  $Q_{\psi\ddot{z}}$ ,  $C_{\varphi\ddot{z}}$ ,  $Q_{\varphi\ddot{z}}$ ,  $C_{h\ddot{z}}$ ,  $C_{\psi'\ddot{z}}$  und  $C_{h\psi'}$ .

Alle Integrationen werden nach der Simpson-Regel durchgeführt.

Für jede der Komponenten werden noch die Häufigkeitsfunktion der Ordinaten und die der Maxima bestimmt.

#### 1. Formeln für die digitale Auswertung:

##### a) Bestimmung der Komponenten:

Gegeben:  $a_g(t_n) = a_{gn} \quad n = 0, 1, \dots, 2N$

1. Schritt:  $a_{en} = E(a) \cdot a_{gn}$  mit  $E(a) =$  Eichfunktion des Meßwertgebers

2. Schritt:  $\overline{a_{en}} = \frac{1}{3N} \left[ 0,5(a_{e0} + a_{e2N}) + 2 \cdot \sum_{n=1}^N a_{e2n-1} + \sum_{n=1}^{N-1} a_{e2n} \right]$

3. Schritt:  $a_n = a_{en} - \overline{a_{en}}$

Diese Schritte werden für alle Größen durchgeführt, so daß man  $\ddot{x}'_n$ ,  $\ddot{y}'_n$ ,  $\ddot{z}'_n$ ,  $\psi'_n$ ,  $\varphi'_n$ ,  $\theta'_n$  und  $h'_n$  erhält.

Nach Gleichung (23a) ergibt sich:

$$\ddot{x}_n = \ddot{x}'_n - \ddot{y}'_n \cdot \theta_n$$

$$\ddot{y}_n = \ddot{y}'_n + \ddot{x}'_n \cdot \theta_n$$

$$\psi_n = \psi'_n + \varphi'_n \cdot \theta_n + \psi'_n \cdot \theta_n^2$$

**b) Bestimmung der Autokovarianzfunktion:**

für  $m = \text{gerade}$ :

$$R_{uu}(m \cdot \Delta t) = \frac{1}{3(N-\frac{m}{2})} \left[ 0,5(u_0 u_m + u_{2N-m} u_{2N}) + 2 \sum_{n=1}^{N-\frac{m}{2}} u_{2n-1} u_{2n+m-1} + \sum_{n=1}^{N-\frac{m+2}{2}} u_{2n} u_{2n+m} \right]$$

für  $m = \text{ungerade}$ :

$$R_{uu}(m \cdot \Delta t) = \frac{1}{3(N-\frac{m+1}{2})} \left[ 0,5(u_0 u_m + u_{2N-m-1} u_{2N-1}) + 2 \sum_{n=1}^{N-\frac{m+1}{2}} u_{2n-1} u_{2n+m-1} + \sum_{n=1}^{N-\frac{m+3}{2}} u_{2n} u_{2n+m} \right]$$

Diese Rechnung ist für  $u = \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, h, \psi, \psi', \varphi$  und  $m = 0, \dots, 2M$  durchzuführen.

**c) Bestimmung des geglätteten Spektrums:**

$$S_{uu}(f_r = \frac{r}{4M \cdot \Delta t}) = \frac{4}{3} \Delta t \left[ R_{uu}(0) + 2 \sum_{m=1}^M R_{uu}([2m-1] \Delta t) \cdot \left(1 + \cos \frac{(2m-1)\pi}{2M}\right) \cdot \cos \frac{(2m-1)r\pi}{2M} \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{M-1} R_{uu}(2m \Delta t) \cdot \left(1 + \cos \frac{m\pi}{M}\right) \cdot \cos \frac{mr\pi}{M} \right]$$

mit  $r = 0, 1, \dots, 2M$ .

**d) Bestimmung der Kovarianzfunktion:**

für  $m = \text{gerade}$ :

$$R_{uv}(m \cdot \Delta t) = \frac{1}{3(N-\frac{m}{2})} \left[ 0,5(u_0 v_m + u_{2N-m} v_{2N}) + 2 \sum_{n=1}^{N-\frac{m}{2}} u_{2n-1} \cdot v_{2n+m-1} + \sum_{n=1}^{N-\frac{m+2}{2}} u_{2n} v_{2n+m} \right]$$

$$R_{vu}(m \cdot \Delta t) = \frac{1}{3(N-\frac{m}{2})} \left[ 0,5(v_0 u_m + v_{2N-m} u_{2N}) + 2 \sum_{n=1}^{N-\frac{m}{2}} v_{2n-1} u_{2n+m-1} + \sum_{n=1}^{N-\frac{m+2}{2}} v_{2n} u_{2n+m} \right]$$

für  $m = \text{ungerade}$ :

$$R_{uv}(m \cdot \Delta t) = \frac{1}{3(N-\frac{m+1}{2})} \left[ 0,5(u_0 v_m + u_{2N-m-1} v_{2N-1}) + 2 \sum_{n=1}^{N-\frac{m+1}{2}} u_{2n-1} v_{2n+m-1} + \sum_{n=1}^{N-\frac{m+3}{2}} u_{2n} v_{2n+m} \right]$$

$$R_{vu}(m \cdot \Delta t) = \frac{1}{3(N-\frac{m+1}{2})} \left[ 0,5(v_0 u_m + v_{2N-m-1} u_{2N-1}) + 2 \sum_{n=1}^{N-\frac{m+1}{2}} v_{2n-1} u_{2n+m-1} + \sum_{n=1}^{N-\frac{m+3}{2}} v_{2n} u_{2n+m} \right]$$

Diese Rechnung ist für  $u = \varphi, \psi, \psi', h$  und  $v = \ddot{z}$  bzw.  $u = h$  und  $v = \psi'$  und  $m = 0, 1, \dots, 2M$  durchzuführen.

e) Bestimmung des geglätteten Kreuzspektrums:

$$C_{uv}(f_r = \frac{r}{4M \cdot \Delta t}) = \frac{2}{3} \Delta t \left[ 2R_{uv}(0) + 2 \sum_{m=1}^M \left\{ R_{uv}([2m-1]\Delta t) + R_{vu}([2m-1]\Delta t) \right\} \left( 1 + \cos \frac{(2m-1)\pi}{2M} \right) \cos \frac{(2m-1)r\pi}{2M} \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{M-1} \left\{ R_{uv}(2m\Delta t) + R_{vu}(2m\Delta t) \right\} \left( 1 + \cos \frac{m\pi}{M} \right) \cos \frac{mr\pi}{M} \right]$$

$$Q_{uv}(f_r = \frac{r}{4M \cdot \Delta t}) = \frac{2}{3} \Delta t \left[ 2 \sum_{m=1}^M \left\{ R_{uv}([2m-1]\Delta t) - R_{vu}([2m-1]\Delta t) \right\} \left( 1 + \cos \frac{(2m-1)\pi}{2M} \right) \sin \frac{(2m-1)r\pi}{2M} \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{M-1} \left\{ R_{uv}(2m\Delta t) - R_{vu}(2m\Delta t) \right\} \left( 1 + \cos \frac{m\pi}{M} \right) \sin \frac{mr\pi}{M} \right]$$

mit  $r = 0, 1, \dots, 2M$ .

f) Bestimmung der Häufigkeitsfunktion der Ordinaten:

Der Bereich, in dem die Ordinaten  $a_n$  ( $n = 0, 1, \dots, 2N$ ) liegen, wird in  $2K$  Klassen eingeteilt, von  $-K \cdot \Delta a$  bis  $+K \cdot \Delta a$ . Die Zahl  $i_k$  der Ordinaten, die in die  $k$ -te Klasse ( $k = -K, -K + 1, \dots, +K$ ) fallen, wird angegeben.

1. Schritt: Man bestimmt  $\frac{a_n}{\Delta a}$ , streicht im Ergebnis die Stellen hinter dem Komma weg und erhält  $k$ .
2. Schritt:  $i_k$  wird um 1 erhöht.

g) Bestimmung der Ordinaten der Maxima:

Es werden jeweils drei aufeinanderfolgende Werte verglichen. Bedingung für das Vorliegen eines Maximums ist:

$$a_n < a_{n+1} > a_{n+2}$$

Das Maximum liegt dann zwischen  $a_n$  und  $a_{n+2}$ . Da das Intervall  $\Delta t$  klein ist im Verhältnis zur Periode der Harmonischen mit der größten Frequenz, kann man als Näherung für die Ordinate des Maximums den Wert  $a_{n+1}$  nehmen.

2. Zusätzliche Fehler bei der digitalen Methode:

Eine Funktion  $u(t)$ , deren Spektrum  $S_{uu}(f)$  für  $f > f_M$  verschwindet, ist vollständig bestimmt durch die Funktionswerte  $u(t_i = i \cdot \Delta t)$ , wenn

$$\Delta t = \frac{1}{2f_N} \leq \frac{1}{2f_M}$$

$f_N$  wird Nyquist-Frequenz genannt.

Werden die Funktionswerte in Abständen  $\Delta t > \frac{1}{2f_M}$  der Registrierung entnommen, so treten in dem daraus berechneten Spektrum Fehler durch eine 'Spektrumsfaltung' (im Angelsächsischen 'Aliasing' genannt) auf. Das Spektrum wird bei  $f = n \cdot f_N$  gefaltet (Abb.10a). Man erhält dann (vgl. Abb.10b):

$$S(f) = S_o(f) + S_o(2f_N - f) + S_o(2f_N + f) + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} S_o(2n \cdot f_N + f) + \sum_{n=1}^{\infty} S_o(2n \cdot f_N - f) \quad ,$$

wo  $S(f)$  das berechnete und  $S_o(f)$  das wirkliche Spektrum bedeuten.

F. Schrifttum

- Bartsch, Statistische Methoden zur Untersuchung der Bewegungen eines Schiffes im Seegang.  
Schiffstechnik Band 6 Heft 30/31. 1959
- Bendat, Principles and Applications of Random Noise Theory  
John Wiley and Sons, New York. 1958
- Blackman-Tukey, The Measurement of Power Spectra  
Dover Publication, New York. 1958
- Brüning, Frequenzgangmessungen an einem instabilen Flugzeug mittels der Systemtheorie für regellose Vorgänge  
Zeitschrift für Flugwissenschaften 9.Jahrgang Heft 12 1961
- Canham-Cartwright-Goodrich-Hogben, Seakeeping Trials on OWS Weather Reporter  
TRINA 1962
- Cramer, Mathematical Methods of Statistica  
Princeton University Press, Princeton. 1951
- Davenport-Root, An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise  
MacGraw-Hill Book Comp., New York. 1958
- Gerritsma, Ship Motions in Longitudinal Waves  
Int.Shipb.Progress Band 7 Heft 66. 1960
- Krappinger, Zur Bestimmung des Freibords von Schiffen  
Unveröffentlichter Bericht. Hamburg 1964
- Korvin-Kroukovski, Theory of Seakeeping  
SNAME, New York 1961
- Pierson, An Unified Mathematical Theory for the Analysis Propagation and Refraction of Storm Generated Ocean Surface Waves  
Research Division, College of Engineering, New York University, 1952
- Pierson-St.Denis, On the Motion of Ships in Confused Seas  
TSNAME 1953
- Pierson, Wind Generated Gravity Waves  
In 'Advances in Geophysics' Band 2, Academic Press, New York 1955
- Rice, Mathematical Analysis of Random Noise  
In 'Selected Papers on Noise and Stochastic Processes' edited by N.Wax, Dover Publication, New York. 1954
- Schlitt, Systemtheorie für regellose Vorgänge  
Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1960

Tou, Digital and Sampled-data Control Systems  
MacGraw-Hill Book Comp., New York. 1959

Tucker, A Ship-borne Wave Recorder  
Int.Report of NIO, Wormley. 1954

Vossers, Behavior of Ships in Waves  
In 'Resistance, Propulsion and Steering of Ships' Band C  
Techn.Publishing Comp. Stam, Haarlem. 1962

Welch, A Direct Digital Method of Power Spectrum Estimation  
IBM-Journal, April 1961

G. Abbildungen

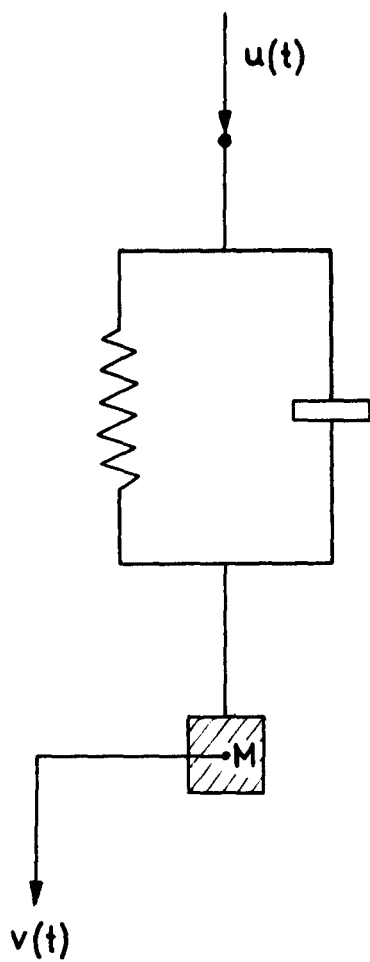


Abb. 1

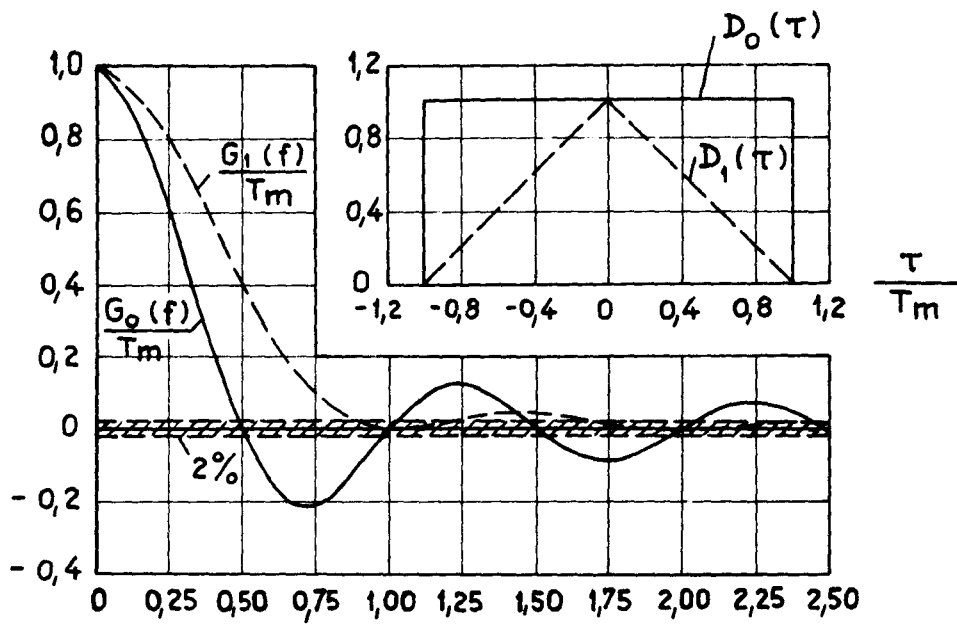


Abb. 2a (Nach Blackman - Tukey)

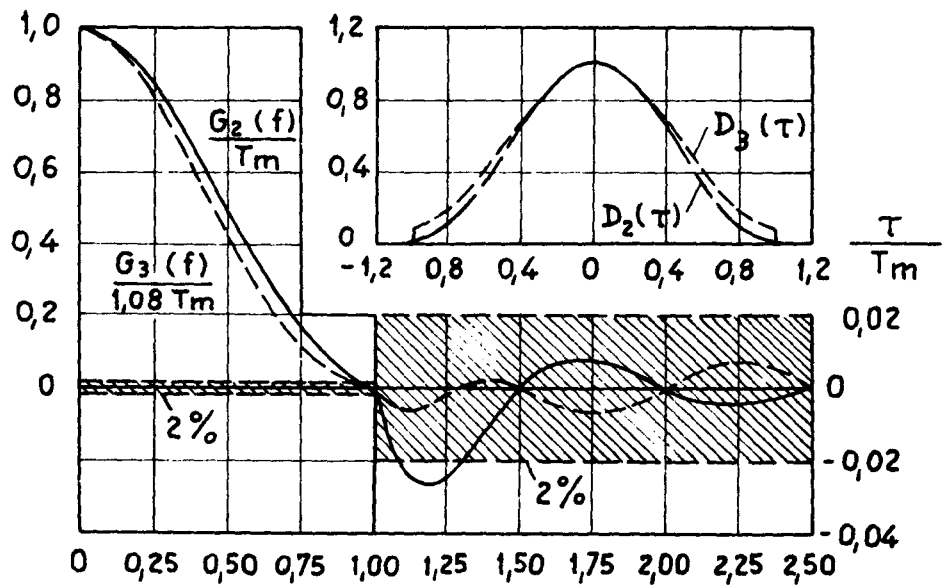


Abb. 2b (Nach Blackman - Tukey)

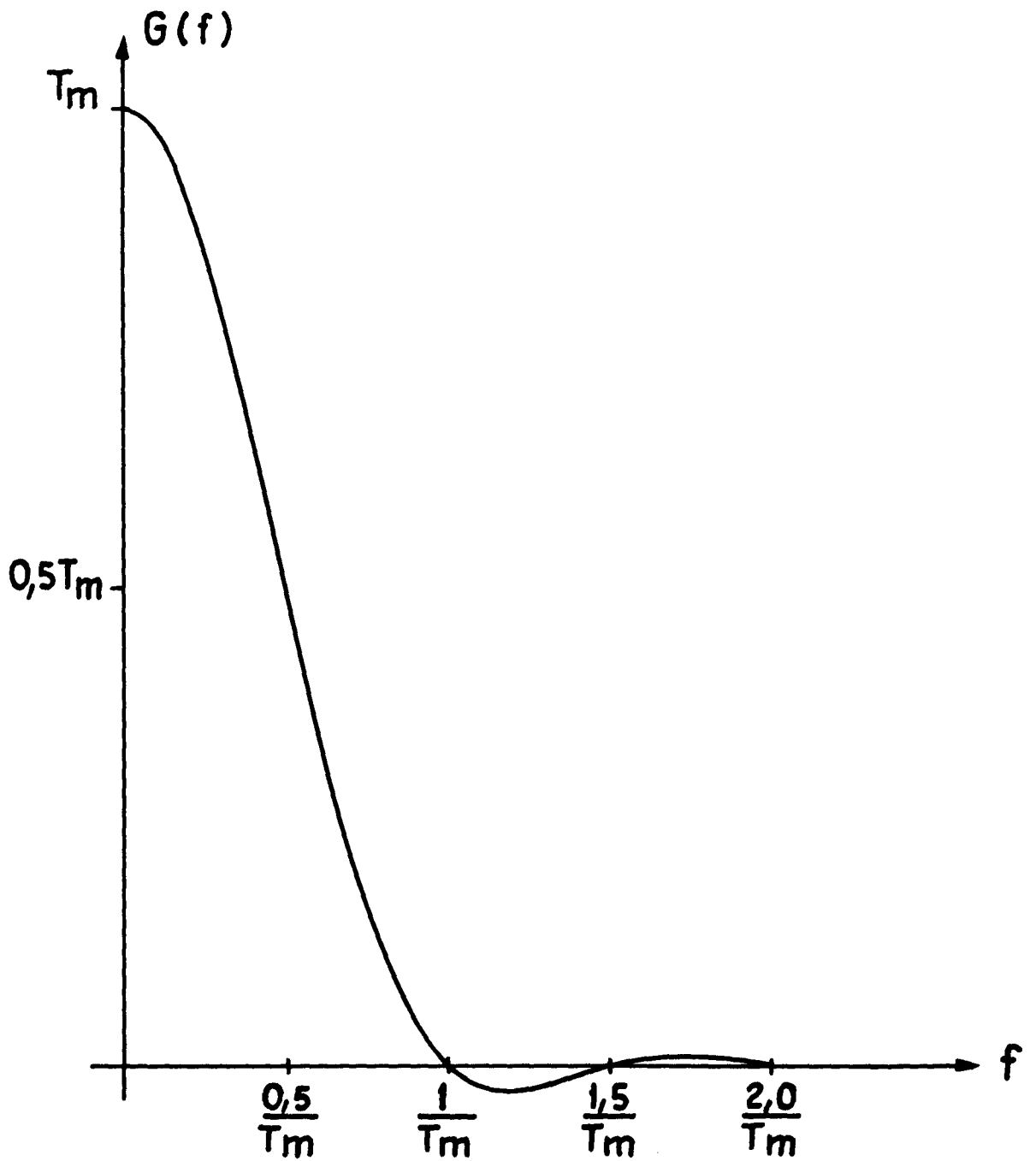
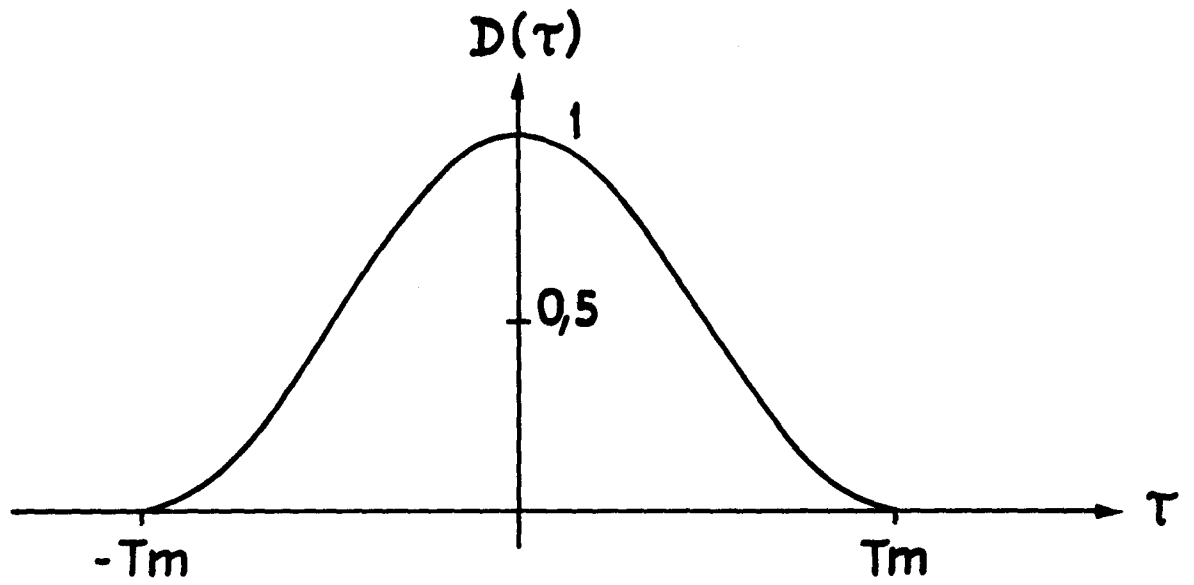


Abb. 3

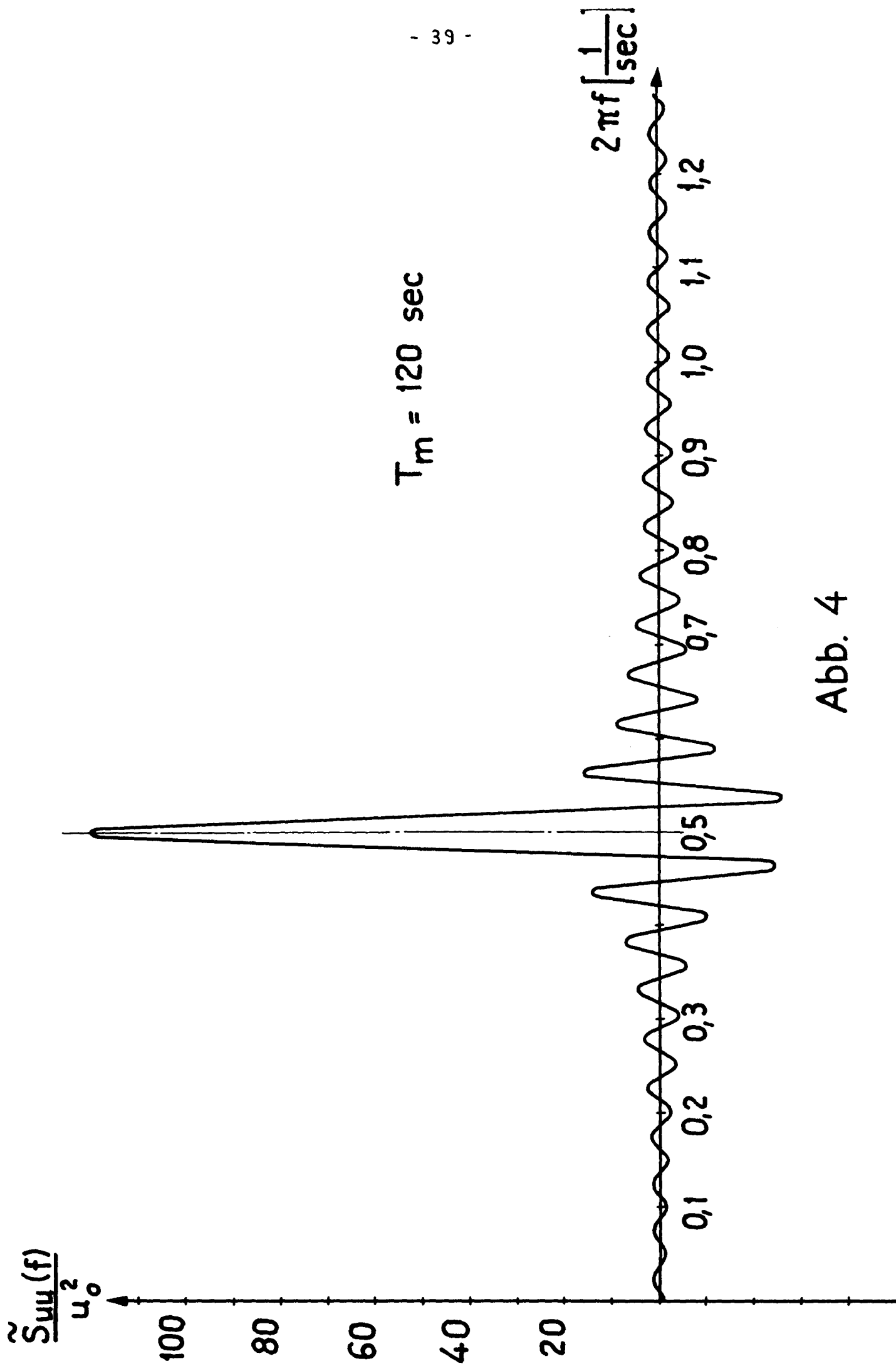


Abb. 4

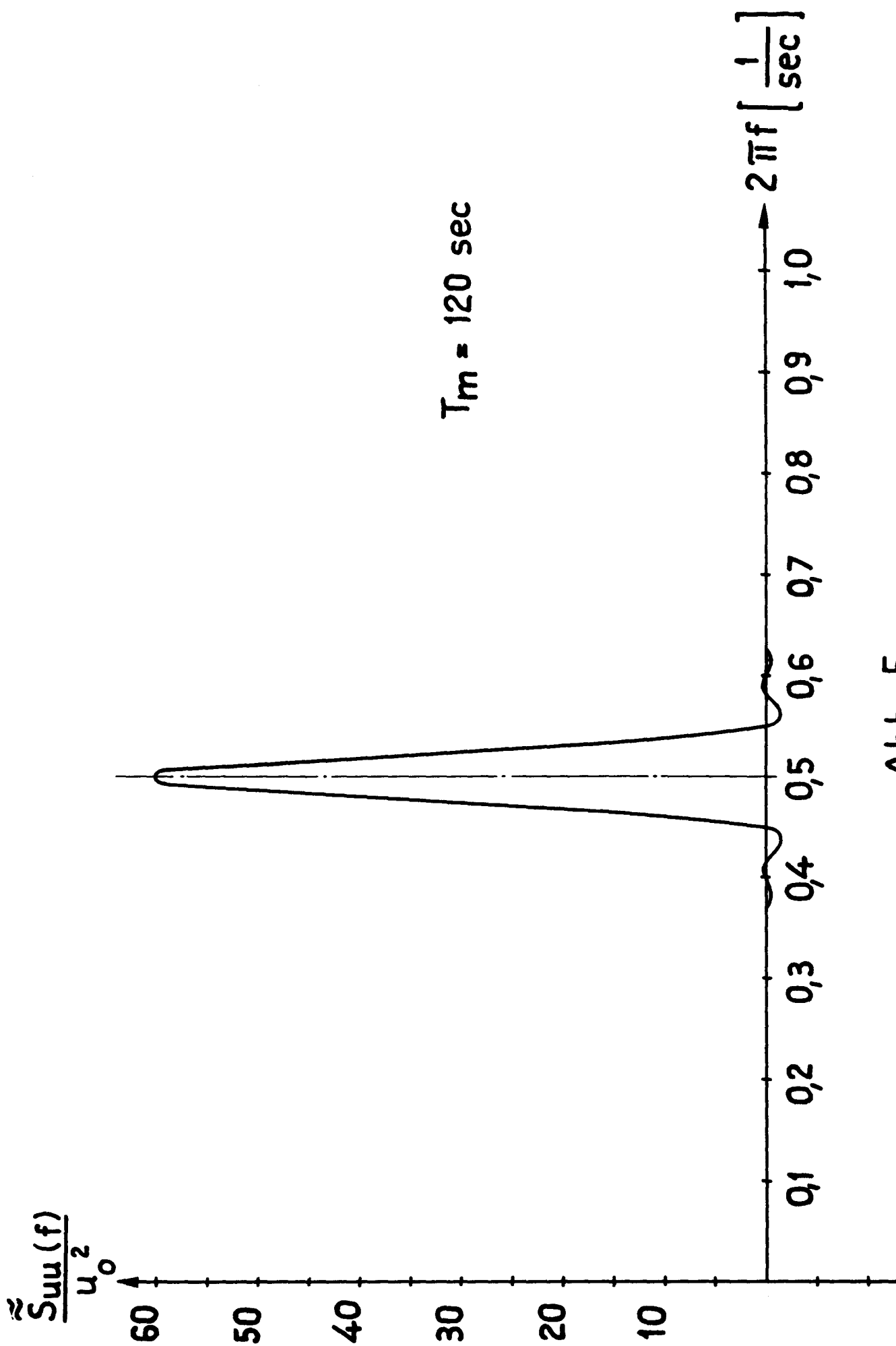


Abb. 5

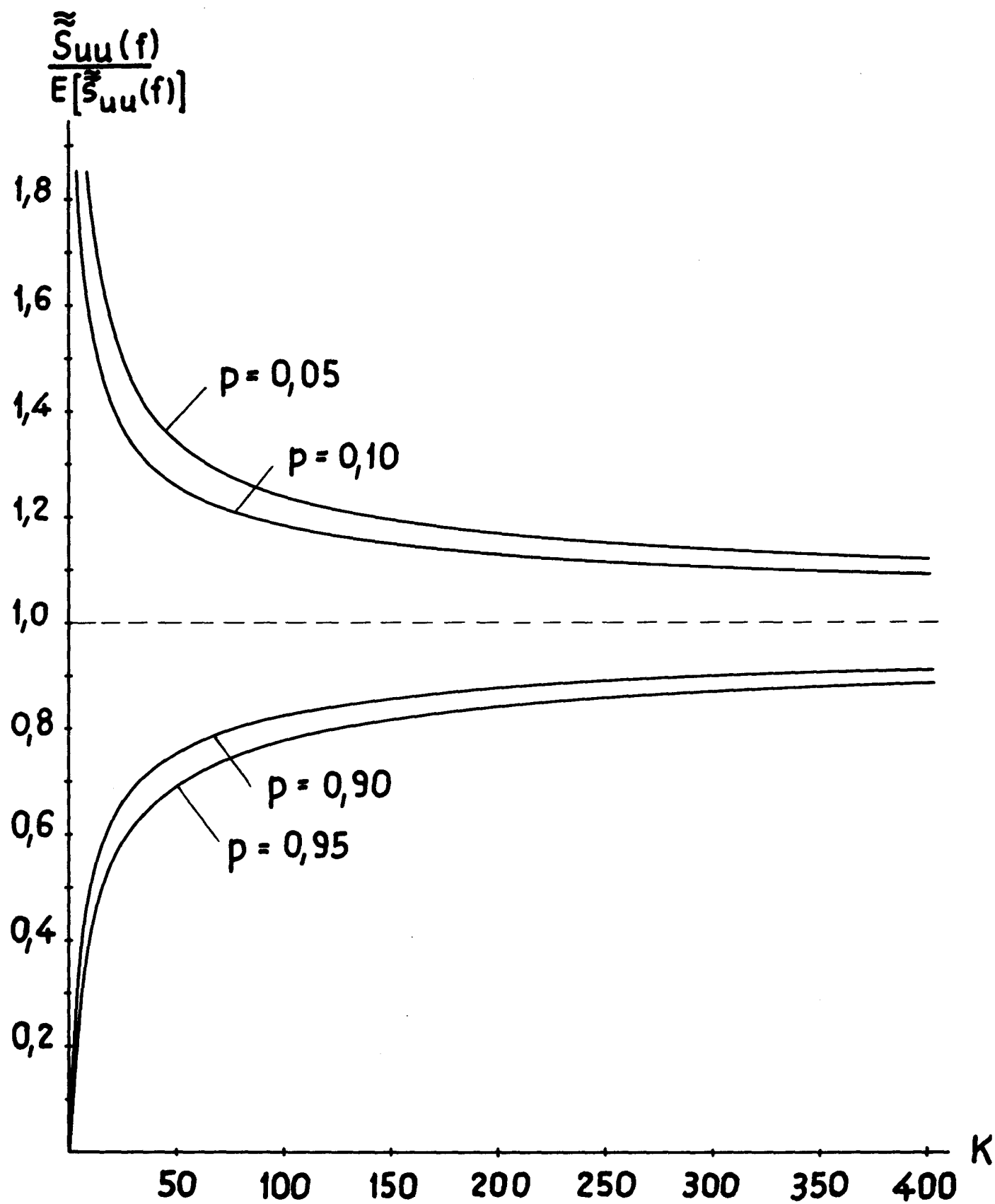
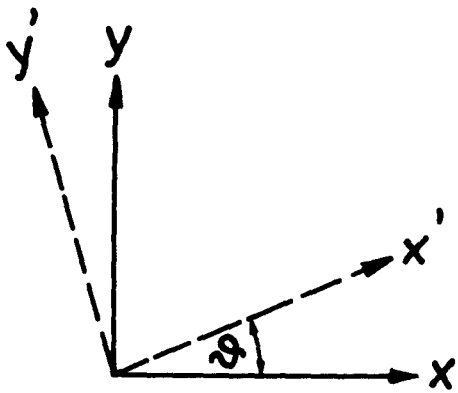
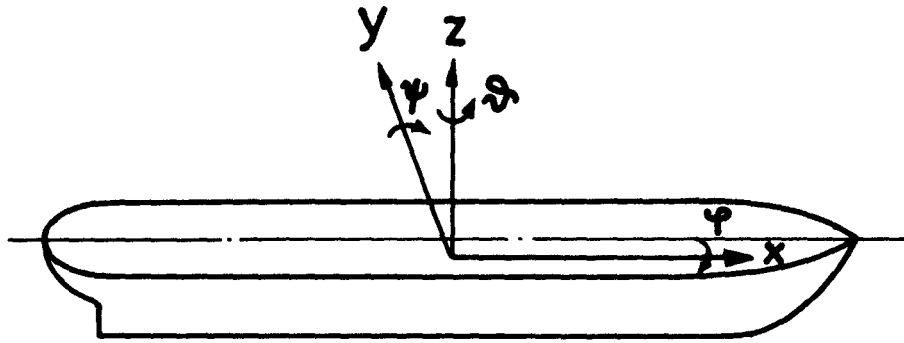
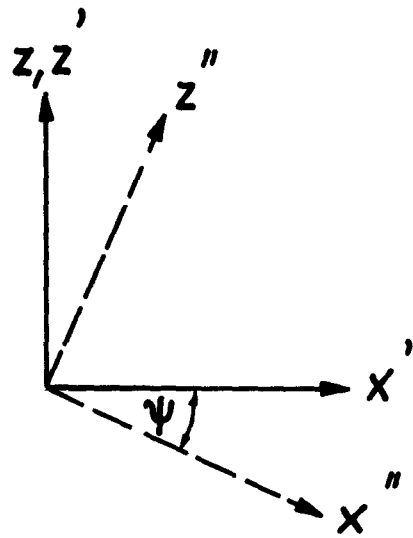


Abb. 6



$x$ - $y$ -Ebene



$x'$ - $z'$ -Ebene

Abb. 7

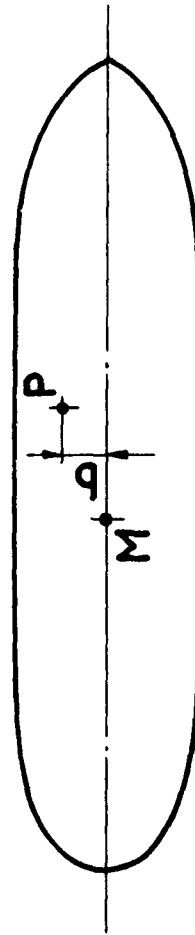
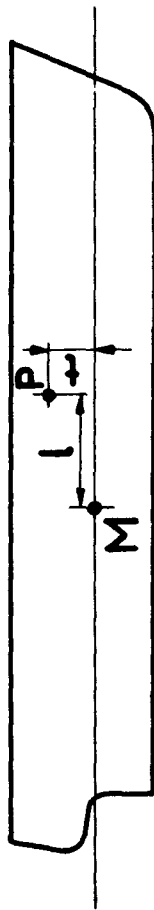
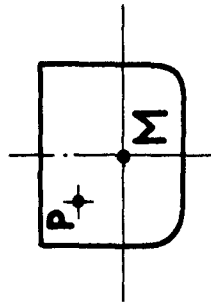
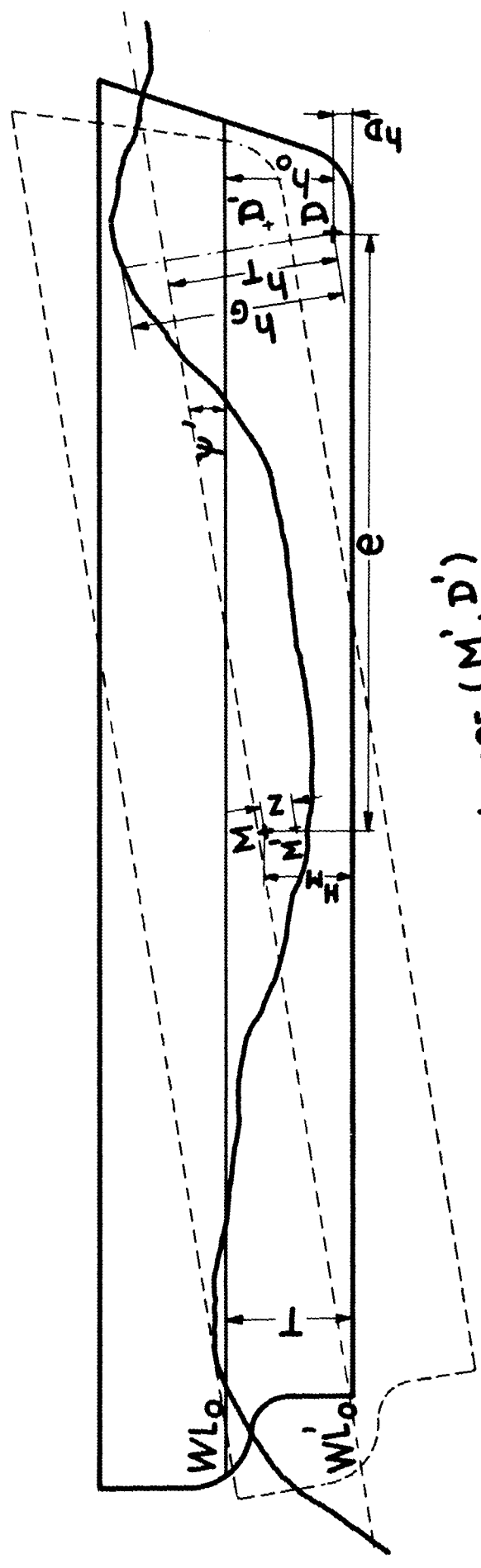


Abb. 8



Schiff in glattem Wasser ( $M', D'$ )

Abb. 9

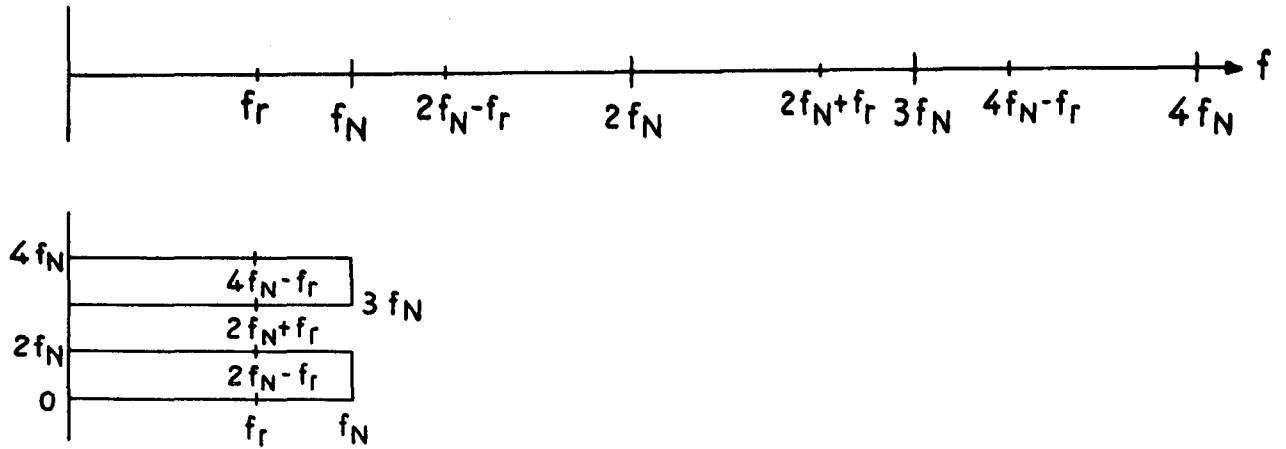


Abb. 10 a

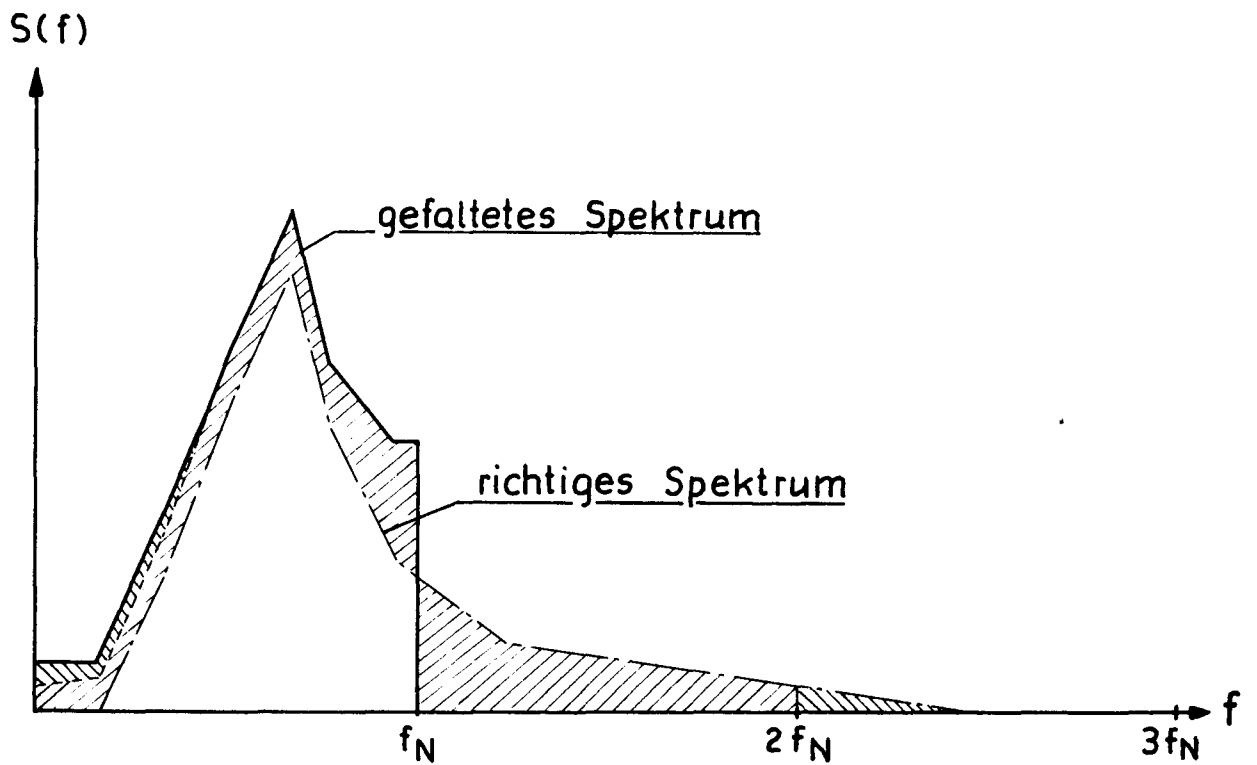


Abb. 10 b