

287 | Oktober 1972

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Th. Roestel

Hydrodynamische Probleme des freifahrenden Gegenlaufpropellers

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

Hydrodynamische Probleme des freifahrenden Gegenlaufpropellers

Th. Roestel, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1972

© Technische Universität Hamburg-Harburg

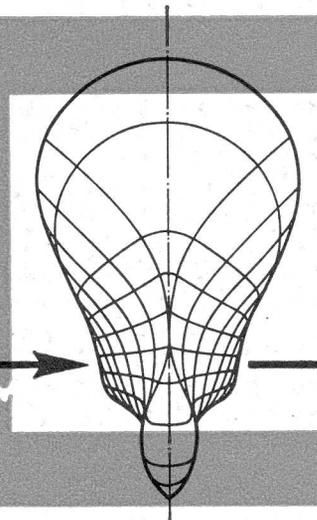
Schriftenreihe Schiffbau

Schwarzenbergstraße 95c

D-21073 Hamburg

<http://www.tuhh.de/vss>

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU
DER UNIVERSITÄT HAMBURG



Hydrodynamische Probleme des freifahrenden Gegenlaufpropellers

Th. Roestel

Oktober 1972

Bericht Nr. 287

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr. 287

Hydrodynamische Probleme des
freifahrenden Gegenlaufpropellers

Thomas Roestel

Hamburg, Oktober 1972

I n h a l t

	Seite
1. Problemstellung	1
2. Zur Optimierung des Wirkungsgrades	3
3. Diskussion der Ergebnisse	10
4. Grundlagen einer instationären Theorie	
a) Voraussetzungen	18
b) Das induzierte Geschwindigkeitsfeld	19
c) Diskussion der Singularitäten	22
d) Die Integralgleichung für die Zirkulationsdichte (Zum Problem einer Lösungsmethode)	24
 Anhang	 27
Bezeichnungen	29
Literatur	31
Abbildungen	
Tabellen	

1. Problemstellung

In der Diskussion über Propulsionssysteme, die zum Antrieb moderner, leistungsstarker Schiffe geeignet sind, spielt der Gegenlaufpropeller eine wichtige Rolle, verbindet er doch Vorteile des Ein-Schrauben-Antriebs mit der Möglichkeit, erheblich höhere Leistungen aufzunehmen.

Vom hydrodynamischen Standpunkt aus ist der Gegenlaufpropeller interessant, da er gestattet, einen Teil der im Nachlauf enthaltenen Drallenergie zurückzugewinnen und für den Vortrieb des Schiffes nutzbar zu machen.

Allerdings ist die theoretische Behandlung des Gegenlaufpropellers schwierig. Selbst wenn man einmal von dem Zerfall und der Vermischung der freien Wirbel absieht, - Vorgänge, die in einer genauen Darstellung auf jeden Fall berücksichtigt werden müßten - so ergibt sich immer noch ein hochgradig instationäres Problem, da die Flügel des hinteren Propellers periodisch von den freien Wirbelflächen des vorderen Propellers getroffen werden. Eine befriedigende instationäre Theorie, die diese Effekte erfaßt, liegt bisher nicht vor.

Auch in dieser Arbeit kann das vollständige Problem nicht gelöst werden, es sollen im letzten Abschnitt jedoch die Grundlagen einer instationären Tragflächentheorie erörtert werden.

Im übrigen geht die vorliegende Untersuchung^{*)} von der Annahme einer kontinuierlichen Verteilung der freien Wirbelflächen aus, so daß die stationäre Traglinientheorie angewandt werden kann. Ziel der Arbeit ist es, für einen freifahrenden Gegenlaufpropeller die Abhängigkeit des Wirkungsgrades von verschiedenen Parametern im Sinne einer Optimierung zu untersuchen. Dabei wurde auf die Einführung von Korrekturen, wie sie etwa für die praktische Auslegung von Bedeutung sind (Reibungseinfluß, usw.), zugunsten eines klareren Einblicks in die Auswirkung der vorgenommenen Parameteränderungen verzichtet.

*) Die Untersuchung wurde durch einen Auftrag der Deutschen Forschungsgemeinschaft ermöglicht.

Dafür werden keinerlei Voraussetzungen über die Wirbelbelegung oder Schubverteilung gemacht, diese ergeben sich vielmehr als Resultat einer mathematischen Optimierung des Wirkungsgrades bei gegebenem Gesamtschub.

Anschließend wird das entwickelte Verfahren auf das Propellerpaar 1253/1254 angewandt, das in der Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau, Berlin, hergestellt und in Freifahrtversuchen erprobt wurde.
Es folgt eine Diskussion der gewonnenen Ergebnisse.

2. Zur Optimierung des Wirkungsgrades

Wir untersuchen einen Gegenlaufpropeller in konstanter Anströmung der Geschwindigkeit u_0 , dessen Einzelpropeller die Flügelzahlen N_V und N_H haben und im Abstand d mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_V und ω_H um eine in Anströmrichtung liegende Achse rotieren. Die Außenradien sind R_V und R_H , die Nabenradien in beiden Fällen R_1 . (Dabei bezieht sich der Index V auf den vorderen, der Index H auf den hinteren Propeller; vgl. die Zusammenstellung der Bezeichnungen am Schluß der Arbeit.)

Zur Berechnung des Wirkungsgrades benötigen wir einmal die von jedem Propeller an seinem eigenen Flügelblatt selbst induzierten Geschwindigkeiten, zum zweiten die am Flügelblatt des anderen Propellers induzierten Wechselwirkungsgeschwindigkeiten. Dies in Wirklichkeit sehr komplizierte Problem läßt sich erheblich vereinfachen, wenn man zusätzlich annimmt, daß die freien Wirbelflächen räumlich-kontinuierlich verteilt sind; denn in diesem Fall wird das Geschwindigkeitsfeld für einen freifahrenden Gegenlaufpropeller stationär, und es darf die Traglinientheorie angewandt werden. ¹⁾

Da keine Längswirbel entstehen und der Einfluß der von den gebundenen Wirbeln induzierten Geschwindigkeiten vernachlässigt werden kann, sind allein die Querwirbel zu berücksichtigen. Wir bezeichnen die von den Querwirbeln induzierten Axialgeschwindigkeiten mit u , die Tangentialgeschwindigkeiten mit V . Unter der Voraussetzung, daß auch bei gegenläufiger Anordnung der Propeller die freien

¹⁾ Bei Beibehaltung diskreter freier Wirbelflächen wäre die Traglinientheorie zur Erfassung der instationären Wechselwirkungseffekte zwischen beiden Propellern ungeeignet, da die reduzierten Frequenzen zu hoch sind. Beispiel: Für zwei vierflüglige Propeller gleicher Drehzahl beträgt die Wechselwirkungsfrequenz 8ω .

Wirbelflächen als reguläre Schraubenflächen angenommen werden können, ergeben sich dann mit den Goldsteinfaktoren $\alpha_V(r, k_V, N_V)$ und $\alpha_H(r, k_H, N_H)$ ²⁾ die selbstinduzierten Geschwindigkeiten am vorderen Propeller zu

$$u_V^V(r) = \frac{N_V \Gamma_V(r)}{4\pi k_V \alpha_V(r)} \quad ; \quad V_V^V(r) = - \frac{N_V \Gamma_V(r)}{4\pi r \alpha_V(r)}$$

und die selbstinduzierten Geschwindigkeiten am hinteren Propeller zu

$$u_H^H(r) = \frac{N_H \Gamma_H(r)}{4\pi k_H \alpha_H(r)} \quad ; \quad V_H^H(r) = \frac{N_H \Gamma_H(r)}{4\pi r \alpha_H(r)}$$

Dabei sind k_V und k_H die Steigungsparameter der freien Wirbelflächen. Sie müssen vor Beginn der Rechnung geschätzt und anschließend gegebenenfalls iterativ verbessert werden (s.u.).

Bei der Berechnung der Wechselwirkungsgeschwindigkeiten ist zusätzlich zu berücksichtigen, daß der Steigungsparameter der vom vorderen Propeller abgehenden freien Wirbelflächen in Anströmrichtung zunimmt. Am hinteren Propeller hat er also nicht mehr den Wert k_V , sondern einen größeren Wert k_V^* (der ebenfalls zunächst geschätzt werden muß).

Wir erhalten dann für die vom vorderen Propeller am Ort des hinteren induzierten Geschwindigkeiten u_V^H und V_V^H mit Hilfe von [2], S. 46, Formel (48), (49) ³⁾ :

2) Die Goldsteinfaktoren wurden für das Beispiel im Abschnitt 3 der Arbeit [8] entnommen.

3) Da die Strömung stationär ist, kann dort ohne Einschränkung $\varphi = 0$ angenommen werden. Weiter ist $x = \pm d$ gesetzt und die innere ξ - Integration ausgeführt worden.

$$u_V^H = \frac{N_V \Gamma_V}{4\pi k_V^*} + \frac{N_V d}{4\pi^2 k_V^*} \int_{R_i}^{R_V} \int_0^\pi \frac{d\Gamma_V(s)}{ds} \cdot \frac{s(r \cos \psi - s)}{r^2 + s^2 - 2rs \cos \psi} \cdot \frac{1}{\sqrt{d^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos \psi}} d\psi ds$$

$$V_V^H = -\frac{N_V \Gamma_V}{4\pi r} + \frac{N_V d}{4\pi^2} \int_{R_i}^{R_V} \int_0^\pi \frac{d\Gamma_V(s)}{ds} \cdot \frac{s \cos \psi - r}{r^2 + s^2 - 2rs \cos \psi} \cdot \frac{1}{\sqrt{d^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos \psi}} d\psi ds$$

$$= -\frac{k_V^*}{r} u_V^H - \frac{N_V d}{4\pi^2 r} \int_{R_i}^{R_V} \int_0^\pi \frac{d\Gamma_V(s)}{ds} \cdot$$

$$\frac{1}{\sqrt{d^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos \psi}} d\psi ds$$

Für die vom hinteren Propeller am Ort des vorderen induzierten Geschwindigkeiten u_H^V und V_H^V ergibt sich analog:

$$u_H^V = \frac{N_H \Gamma_H}{4\pi k_H} - \frac{N_H d}{4\pi^2 k_H} \int_{R_i}^{R_H} \int_0^\pi \frac{d\Gamma_H(s)}{ds} \cdot$$

$$\frac{s(r \cos \psi - s)}{r^2 + s^2 - 2rs \cos \psi} \cdot \frac{1}{\sqrt{d^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos \psi}} d\psi ds$$

$$\begin{aligned}
 V_H^V &= \frac{N_H \Gamma_H}{4\pi r} - \frac{N_H d}{4\pi^2} \int_{R_i}^{R_H} \int_0^\pi \frac{d\Gamma_H(s)}{ds} \\
 &\quad \cdot \frac{r - s \cos \psi}{r^2 + s^2 - 2rs \cos \psi} \cdot \frac{1}{\sqrt{d^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos \psi}} d\psi ds \\
 &= \frac{k_H}{r} u_H^V - \frac{N_H d}{4\pi^2 r} \int_{R_i}^{R_H} \int_0^\pi \frac{d\Gamma_H(s)}{ds} \cdot \\
 &\quad \cdot \frac{1}{\sqrt{d^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos \psi}} d\psi ds
 \end{aligned}$$

Angesichts der besonderen Bedeutung, die die Strahlkontraktion für den Gegenlaufpropeller hat, wäre es wünschenswert, noch deren Radius als Parameter in die Wirkungsgradberechnung einzuführen. Das ist nun näherungsweise dadurch möglich, daß in den Ausdrücken für u_V^H und V_V^H die Aufpunktvariable r durch rR_V/R_{ST} ersetzt wird; denn die Transformation $r \rightarrow r \cdot R_V/R_{ST}$ bewirkt eine Stauchung der Strömung in der hinteren Propellerebene im Maßstab $R_{ST} \cdot R_V$.

Damit liegen die induzierten Geschwindigkeiten in der Form vor, in der sie zur Berechnung des Schubs und Drehmomentes und damit des Wirkungsgrades benutzt werden sollen. Nach dem Kutta-Joukowskischen Satz ergibt sich für die Schubwerte S_V des vorderen und S_H des hinteren Propellers, wenn wir $\omega_V, \omega_H, \Gamma_V, \Gamma_H$ alle als positiv definieren:

$$\begin{aligned}
 S_V &= g N_V \int_{R_i}^{R_V} \Gamma_V(r) [\omega_V r + V_V^V(r) + V_H^V(r)] dr \\
 S_H &= g N_H \int_{R_i}^{R_H} \Gamma_H(r) [\omega_H r - V_H^H(r) - V_V^H(r)] dr
 \end{aligned}$$

und für die Drehmomente M_V und M_H :

$$M_V = \rho N_V \int_{R_i}^{R_V} r \Gamma_V(r) [u_0 + u_V^V(r) + u_H^V(r)] dr$$

$$M_H = \rho N_H \int_{R_i}^{R_H} r \Gamma_H(r) [u_0 + u_H^H(r) + u_V^H(r)] dr$$

Ziel ist es, den induzierten Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{u_0 (S_V + S_H)}{\omega_V M_V + \omega_H M_H}$$

bei gegebenem Schub als Funktion der Zirkulation, des Drehzahlverhältnisses, des Propellerabstandes und der Radienverhältnisse R_H/R_V und R_{ST}/R_V zu maximieren. Im folgenden soll zunächst die Berechnung der optimalen Zirkulation beschrieben werden, während die Abhängigkeit des Wirkungsgrades von den übrigen Parametern anhand der numerischen Ergebnisse im nächsten Abschnitt diskutiert wird.

Gesucht sind also diejenigen Zirkulationen $\Gamma_V(r)$ und $\Gamma_H(r)$, die (für festes $\omega_V, \omega_H, d, R_H, R_{ST}$) bei gegebenem Gesamtschub $S(\Gamma_V, \Gamma_H) = S_V(\Gamma_V, \Gamma_H) + S_H(\Gamma_V, \Gamma_H) = S_0$ die Leistung $\omega_V M_V(\Gamma_V, \Gamma_H) + \omega_H M_H(\Gamma_V, \Gamma_H)$ zum Minimum machen.

Dies Variationsproblem kann auf eine einfache Extremwertaufgabe zurückgeführt werden, wenn man für Γ den bewährten Ansatz

$$\Gamma_V(r_V) = \sum_{\mu=1}^5 A_\mu \sin \mu \vartheta$$

$$\text{mit } r_V = \frac{R_V + R_i}{2} - \frac{R_V - R_i}{2} \cos \vartheta \quad \text{und}$$

$$\Gamma_H(r_H) = \sum_{\mu=1}^5 A_\mu^* \sin \mu \vartheta$$

$$\text{mit } r_H = \frac{R_H + R_i}{2} - \frac{R_H - R_i}{2} \cos \vartheta \quad \text{macht.}$$

Die Extremwertaufgabe lautet dann:

$$\omega_V M_V (A_\mu, A_\mu^*) + \omega_H M_H (A_\mu, A_\mu^*) = \text{Min}$$

mit der Nebenbedingung $S(A_\mu, A_\mu^*) = S_0$,

oder bei Einführung eines Lagrangeschen Multiplikators α :

$$F(A_\mu, A_\mu^*, \alpha) = \omega_V M_V (A_\mu, A_\mu^*) + \omega_H M_H (A_\mu, A_\mu^*) \\ + \alpha [S(A_\mu, A_\mu^*) - S_0] = \text{Min} \quad (\mu=1, \dots, 5)$$

Notwendig für das Auftreten eines Minimums ist die Gültigkeit der Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial A_\mu} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial A_\mu^*} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{für } \mu=1, \dots, 5$$

Das sind 11 Gleichungen für die 11 Unbekannten A_μ, A_μ^* und α , die explizit im Anhang aufgeführt sind.

Man sieht, daß es sich um zehn lineare und eine quadratische Gleichung in A_μ und A_μ^* handelt. Diese Struktur legt folgenden Lösungsweg nahe:

Zunächst werden zwei Ausgangsnäherungen $\varrho^{(i)} = (A_\mu^{(i)}, A_\mu^{*(i)}, \alpha^{(i)})$ ($i=1,2$) so bestimmt, daß $\frac{\partial F(\varrho^{(1)})}{\partial \alpha} < 0$ und $\frac{\partial F(\varrho^{(2)})}{\partial \alpha} > 0$ ist. Durch fortgesetzte Halbierung des α -Intervalls und anschließende Auflösung des linearen Gleichungssystems

$$\frac{\partial F}{\partial A_\mu} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial A_\mu^*} = 0 \quad \text{kann dann nach Art der} \\ \text{regula falsi die Nullstelle von } \frac{\partial F}{\partial \alpha} \text{ eingeschlossen}$$

werden. Bei diesem Verfahren brauchen also lediglich lineare Gleichungssysteme gelöst zu werden. Als Lösung ergeben sich die gesuchten Ansatzkoeffizienten A_μ und A_μ^* und damit die optimalen Zirkulationen $\Gamma_V(r)$ und $\Gamma_H(r)$.

Zum Schluß müssen noch die geschätzten Werte für k_V, k_H, k_V^* überprüft werden. Es ist

$$\frac{k_V}{r} = \frac{u_0 + u_V^V + u_H^V}{\omega_V r + v_V^V + v_H^V}$$

$$\frac{k_V^*}{r} = \frac{u_0 + u_H^H + u_V^H}{\omega_V r + v_H^H + v_V^H}$$

$$\frac{k_H}{r} = \frac{u_0 + u_H^H + u_V^H}{\omega_H r - v_H^H - v_V^H}$$

Da sich bei der numerischen Rechnung für die Steigungsparameter im allgemeinen keine Konstanten ergeben werden, sind die Mittelwerte

$$k_V = \frac{1}{R_V - R_i} \int_{R_i}^{R_V} k_V(r) dr$$

$$k_V^* = \frac{1}{R_H - R_i} \int_{R_i}^{R_H} k_V^*(r) dr$$

$$k_H = \frac{1}{R_H - R_i} \int_{R_i}^{R_H} k_H(r) dr$$

zu bilden. Zeigen sich größere Abweichungen von der Ausgangsnäherung, so ist die gesamte Rechnung mit den verbesserten Werten zu wiederholen. Das Verfahren konvergiert allerdings schnell, so daß gewöhnlich eine Iteration ausreicht.

3. Diskussion der Ergebnisse

Das im vorigen Abschnitt entwickelte Verfahren wird auf das Propellerpaar Nr. 1253/1254 angewandt, das in der Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau, Berlin, hergestellt und im Bericht [4] beschrieben ist.

Es handelt sich um einen 4-Flügler (vorn) und einen 5-Flügler (hinten), dessen Wirkungsgrad im folgenden in Abhängigkeit von der Zirkulation, dem Radienverhältnis, der Strahlkontraktion, dem Drehzahlverhältnis und dem Propellerabstand untersucht werden soll.⁴⁾

Um einen direkten Vergleich zu ermöglichen, ist der

Schubbelastungsgrad
$$c_s = \frac{S_V + S_H}{\frac{\rho}{2} \pi R_V^2 u_0^2}$$

in allen Fällen konstant gehalten worden mit $c_s = 1,29$. Die Ergebnisse, denen stets die nach Abschnitt 2 berechnete optimale Zirkulation des Gegenlaufpropellers und die sich daraus ergebende optimale Schub- und Drehmomentverteilung zugrunde liegt, sind in der Tabelle 1 zusammengestellt.

Wir betrachten zunächst die optimale Zirkulationsverteilung.

Für zwei Propellerabstände, und zwar für den Wert $d/R_V = 0,434$ aus [4] und den besonders einfach zu behandelnden Fall $d/R_V = \infty$, sind die Zirkulationen in den Abbildungen 1 - 4 aufgezeichnet. Charakteristisch ist, daß sie im Gegensatz zur Zirkulation des optimalen Einzelpropellers ein relatives Maximum in Nabennähe haben. Dies Verhalten können wir uns am übersichtlichsten am Beispiel zweier unendlichflügliger Propeller im Abstand $d = \infty$ klarmachen, deren induzierter Wirkungsgrad

⁴⁾ Für die numerischen Rechnungen wurde uns freundlicherweise Rechenzeit auf der Anlage IBM 360/75 am Deutschen Elektronen-Synchrotron (DESY) zur Verfügung gestellt.

am Radius r

$$\eta = \frac{u_0}{r} \cdot \frac{N_V \Gamma_V (\omega_V r - \frac{N_V \Gamma_V}{4\pi r}) + N_H \Gamma_H (\omega_H r - \frac{N_H \Gamma_H}{4\pi r} + \frac{N_V \Gamma_V}{2\pi r})}{\omega_V N_V \Gamma_V (u_0 + \frac{N_V \Gamma_V}{4\pi k_V}) + \omega_H N_H \Gamma_H (u_0 + \frac{N_H \Gamma_H}{4\pi k_H} + \frac{N_V \Gamma_V}{2\pi k_V})}$$

$$(\omega_V, \omega_H, \Gamma_V, \Gamma_H > 0)$$

ist.

Man sieht, daß hier im Vergleich zu einem Paar unabhängig voneinander arbeitender Schrauben zusätzlich zwei entgegengesetzt gerichtete Einflüsse wirksam werden:

die wirkungsgradsteigernde Tangentialkomponente $\frac{N_V \Gamma_V}{2\pi r}$

und die wirkungsgradmindernde Axialkomponente $\frac{N_V \Gamma_V}{2\pi k_V}$

(bzw. die Produkte $\frac{N_V N_H \Gamma_V \Gamma_H}{2\pi r}$ und $\frac{\omega_H N_V N_H \Gamma_V \Gamma_H}{2\pi k_V}$).

Es ist plausibel, daß die Tangentialkomponente insgesamt dann besonders zur Geltung kommt, wenn die Zirkulationen Γ_V und Γ_H bei kleinem r , also in Nabennähe, groß werden.

Um eine Aussage darüber zu erhalten, wie viel sich der Wirkungsgrad mit der Zirkulation ändert, wurde dieser für eine Reihe von Zirkulationen berechnet, die mehr oder weniger stark von der optimalen Zirkulation abweichen. Einige davon sind in den Abbildungen 5 bis 7 dargestellt. Es zeigt sich, daß die genaue Form der Zirkulationsverteilung nur einen geringen Einfluß auf den Wirkungsgrad hat. Erst wenn die Schubverteilung auf die Propeller extrem ungleich ist (so daß etwa 70 % auf dem vorderen und nur 30 % auf dem hinteren Propeller liegen), sinkt der Wirkungsgrad steiler ab.

Besonders interessant ist die Wirkungsgradberechnung für den Fall, daß die Zirkulation des optimalen Einzelpropellers

zugrunde gelegt wird (Abb. 5). Es ergibt sich ein Wert, der nur um 1% unter dem des optimalen Gegenlaufpropellers liegt. Dagegen ist der Wirkungsgrad bei einer Zirkulationsverteilung mit horizontalen Tangenten in R_1, R_V und R_H schon um 7% niedriger als der optimale. (vgl. Abb. 5)

Zusammenfassend kann also gesagt werden, daß zwar ein Optimum des Wirkungsgrades in Abhängigkeit von der Zirkulation vorhanden ist, daß dieses aber sehr flach ist und insbesondere die Zirkulation des optimalen Einzelpropellers den Wirkungsgrad nur um etwa 1% vermindert.

Aus der optimalen Zirkulationsverteilung folgt die optimale Schub- und Drehmomentenverteilung auf die beiden Einzelpropeller. Sie ist abhängig von Drehzahl, Propeller-radius und Abstand. Halten wir beispielsweise die Drehzahl ω_V des vorderen Propellers fest und vergrößern ω_H , so erhöhen sich erwartungsgemäß S_H und $\omega_H M_H$, während entsprechend S_V und $\omega_V M_V$ abnehmen. Im Beispiel zeigt sich nun, daß dabei die Summe $\omega_V M_V + \omega_H M_H$ und also auch der Wirkungsgrad praktisch konstant bleiben.

Ausgehend von dem in [4] angegebenen Wert $\omega_V = \omega_H = 3,83 \cdot u_0 R_V$ wurden ω_V und ω_H bis zu 30 % erhöht und erniedrigt, ohne daß sich eine über 0,5 % hinausgehende Wirkungsgradänderung ergeben hätte.

In Tabelle 1 ist deshalb auch nur der Fall $\omega_V = \omega_H$ aufgeführt.

Die weitgehende Unabhängigkeit des Wirkungsgrades vom Drehzahlverhältnis wird durch andere Untersuchungen bestätigt.⁵⁾

⁵⁾ vgl. [5] S. 370

Van Gunsteren kommt zwar zu dem Ergebnis, daß bei $\omega_V = \omega_H$ ein Wirkungsgradmaximum liege, jedoch unterscheiden sich auch die von ihm genannten Werte für verschiedene Drehzahlen um weniger als 1%.

Weiter ist aus der Tabelle 1 die Abhängigkeit des Wirkungsgrades und der Schubverteilung vom Radienverhältnis R_H/R_V zu ersehen. Wie zu erwarten ist, sinkt der Wirkungsgrad deutlich, wenn man den Radius des hinteren Propellers (bei gleichbleibendem Gesamtschub) herabsetzt. Im Beispiel führte eine Reduktion von $R_H/R_V = 0,935$ auf $R_H/R_V = 0,850$ zu einer Wirkungsgradverschlechterung von 2 bis 3 %.

Für die Schubverteilung hat eine Verminderung von R_H/R_V zur Folge, daß der vordere Propeller stärker belastet werden muß. Während für $R_H/R_V = 0,935$ das Schubverhältnis (bei gleichen Drehzahlen $\omega_V = \omega_H$) im Optimalfall etwa $S_V:S_H = 52:48$ ist, so sollte es für $R_H/R_V = 0,850$ schon $S_V:S_H = 60:40$ betragen. ⁶⁾

Im Gegensatz zum Radienverhältnis, das somit einen merklichen Einfluß auf den Wirkungsgrad hat, macht sich der Radius der Strahlkontraktion direkt (bei festem R_H/R_V) kaum bemerkbar, indirekt allerdings dadurch, daß er den Radius des hinteren Propellers nach oben begrenzt.

Von Bedeutung ist noch der Einfluß des Propellerabstandes auf Schubverteilung und Wirkungsgrad.

Die Abbildungen 1 und 3 sowie 2 und 4 und die Tabelle 1 zeigen, daß die optimalen Werte für Zirkulation und Schub am vorderen Propeller durchschnittlich mit wachsendem Abstand etwas abnehmen, während sie am hinteren Propeller zunehmen. Das heißt, daß die Steigung des vorderen Propellers bei wachsendem Abstand ein wenig zurückgenommen und die des hinteren erhöht werden muß.

Dieser Effekt auf die Schubverteilung ist aber - im Gegensatz zum Einfluß des Radienverhältnisses - nur klein.

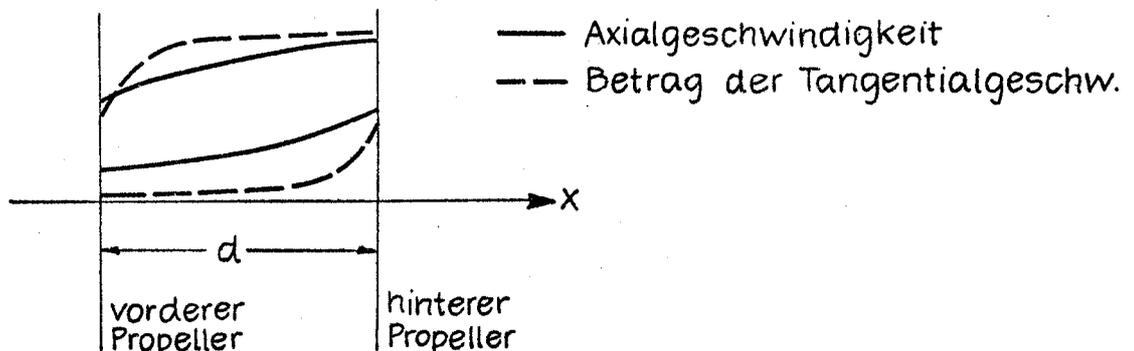
⁶⁾ Eine Herabsetzung von R_H/R_V kann in der Praxis erforderlich sein, wenn der hintere Propeller von den in der Regel mit Kavitationsblasen gefüllten Spitzenwirbeln des vorderen getroffen wird. (Gefahr der Blatterosion am hinteren Propeller.)

Dagegen hängen die Wirkungsgrade $\eta_V = \frac{u_0 S_V}{\omega_V M_V}$ und $\eta_H = \frac{u_0 S_H}{\omega_H M_H}$ merklich vom Abstand ab: η_V wird mit wachsendem Abstand größer, während η_H zurückgeht. Daß η_V sein Maximum bei $d = \infty$ annimmt, ist deshalb zunächst überraschend, weil in diesem Fall keine Rückwirkung des hinteren auf den vorderen Propeller mehr stattfindet und deshalb am vorderen Propeller auch kein Wirkungsgradgewinn durch Kompensation der Tangentialgeschwindigkeiten auftreten kann. Hier ist nun zu berücksichtigen, daß bei endlichem Abstand der vordere Propeller in einer Zuströmung arbeitet, die infolge der durch den hinteren Propeller induzierten Axialgeschwindigkeit erhöht ist und den durch die Tangentialgeschwindigkeiten erreichten Gewinn vollständig wieder zunichte macht, ja sogar noch im Sinne einer Minderung von η_V wirkt.

Wir wollen etwas genauer erläutern, wie diese Wirkungsgradverschlechterung zustandekommt.

Dazu betrachten wir die Propeller zunächst für einen kleinen Abstand. In unmittelbarer Propellernähe ändert sich die induzierte Tangentialgeschwindigkeit stärker als die Axialgeschwindigkeit, und während die vom hinteren Propeller induzierte Tangentialgeschwindigkeit am Ort des vorderen schon fast auf Null abgefallen und die vom vorderen am Ort des hinteren induzierte Tangentialgeschwindigkeit schon nahezu ihren maximalen Wert erreicht hat, sind die entsprechenden Axialgeschwindigkeiten noch nicht so stark ausgebildet. (s. Schemaskizze)

Es ist deshalb erklärlich, daß für kleine Abstände $\eta_V < \eta_H$ ist.



Vergrößern wir nun den Abstand über den bisherigen Wert hinaus, so ist jetzt der Zuwachs der Axialkomponente dem Betrage nach etwas größer als derjenige der Tangentialkomponente. Am vorderen Propeller steigt daher der Wirkungsgrad an, am hinteren sinkt er. Von einem bestimmten Abstand ab ist schließlich $\eta_V > \eta_H$.
(s. Tabelle 1)

Im Gegensatz zu η_V und η_H hängt aber der Gesamtwirkungsgrad kaum vom Abstand ab. Erst bei sehr großen Entfernungen steigt er um etwa 1%, im Bereich normaler Abmessungen dagegen bleibt er praktisch konstant. Diese letzte Aussage wird durch Freifahrtversuche bestätigt. ⁷⁾

Da sich also der größte Wirkungsgrad einstellt, wenn der vordere Propeller vom hinteren gar nicht beeinflusst wird, liegt die Vermutung nahe, daß eine weitere Wirkungsgradsteigerung - über das Maximum bei $d = \infty$ hinaus - möglich sein könnte, wenn die Wechselwirkung zwischen den Propellern überhaupt unterbleibt, diese also unabhängig nebeneinander arbeiten. Das ist auch tatsächlich der Fall: Für einen Zweischauber ergibt sich im Beispiel ein Wirkungsgradgewinn von ungefähr 5% (s. Tabelle 2). ⁸⁾

Bemerkenswert ist, daß man für einen einzelnen Propeller des Gegenlaufpaares einen höheren Wirkungsgrad als für den entsprechenden des Zweischaubers erhalten kann, wenn man ihn isoliert betrachtet. In einer Anordnung, die aus zwei unendlichflügligen Propellern in sehr großem Abstand besteht, ist der Wirkungsgrad am hinteren Propeller (wieder mit $\omega_V, \omega_H, \Gamma_V, \Gamma_H > 0$): ⁹⁾

⁷⁾ vgl. [6], S. 13

Im Nachstrom ist dagegen ein Einfluß des Abstandes auf den Wirkungsgrad festgestellt worden, s. [7], S. 284

⁸⁾ Die Berechnung des Zweischaubers kann nach der Theorie des Abschnitts 2 erfolgen, wenn man dort alle wechselseitig induzierten Geschwindigkeiten Null setzt.

⁹⁾ vgl. auch [2], S. 64

$$\begin{aligned}
 & \qquad \qquad \qquad 2\pi k_V \qquad 4\pi k_H \\
 & = \frac{1 + \frac{N_V \Gamma_V}{2\pi \omega_H r^2} - \frac{N_H \Gamma_H}{4\pi \omega_H r^2}}{1 + \frac{N_H \Gamma_H}{4\pi k_H \left(u_0 + \frac{N_V \Gamma_V}{2\pi k_V} \right)}} > \\
 & \frac{1 - \frac{N_H \Gamma_H}{4\pi \omega_H r^2}}{1 + \frac{N_H \Gamma_H}{4\pi k_H u_0}} = \frac{u_0}{\omega_H r} \frac{\omega_H r - \frac{N_H \Gamma_H}{4\pi r}}{u_0 + \frac{N_H \Gamma_H}{4\pi k_H}}
 \end{aligned}$$

Daraus kann man allerdings nicht auf einen höheren Gesamtwirkungsgrad des Gegenlaufpropellers im Vergleich zum Zweischauber schließen, da die erhöhte Zuströmung am hinteren Propeller ja vom System selbst erzeugt wird. Der Gesamtwirkungsgrad des Gegenlaufpropellers ist vielmehr niedriger.

Dagegen liegt erwartungsgemäß der Wirkungsgrad des Ein-Schrauben-Antriebs (bei gleichem Schub) erheblich unter dem des Gegenlaufpropellers. Die entsprechenden Werte, die entweder dem Kramer-Diagramm entnommen oder mit dem Optimierungsverfahren aus Abschnitt 2 berechnet werden können ¹⁰⁾, sind in der Tabelle 2 enthalten. Sie zeigen eine Wirkungsgradverbesserung des Gegenlaufpropellers von 12% gegenüber einem 4-Flügler und von 10% gegenüber einem 5-Flügler.

Zum Vergleich erwähnen wir die Arbeit [5], die Entwurfsdaten eines Gegenlaufpropellers und eines Einzelpropellers enthält. Der Gegenlaufpropeller hat die Flügelzahlen

¹⁰⁾ mit $N_V = N_H$, $u_V^H = u_H^V = v_V^H = v_H^V = 0$ und $S = \text{doppelter Schub des Einzelpropellers.}$

$N_V = 5$, $N_H = 4$, ein Radienverhältnis von $R_H/R_V = 0,97$ und wird bei einem Fortschrittsgrad von $u_o/(\omega R_V) = 0,41$ und einer Belastung von $c_s = 0,53$ betrachtet. Sein Wirkungsgrad ist $\eta = 0,761$. Beim 5-flügligen Einzelpropeller ist der Fortschrittsgrad auf $u_o/(\omega R) = 0,30$ zurückgenommen. Für einen Schubbelastungsgrad von $c_s = 0,48$ beträgt der zugehörige Wirkungsgrad $\eta = 0,687$. Diese Relationen liegen durchaus im Bereich der oben ermittelten Werte.

Wir fassen die in diesem Abschnitt erhaltenen Resultate über den freifahrenden Gegenlaufpropeller kurz zusammen:

1. Die optimale Zirkulationsverteilung hat (bei den untersuchten Radienverhältnissen) ein relatives Maximum in Nabennähe (Abb. 1-4). Der Wirkungsgrad hängt aber von der genauen Form der Verteilung nur wenig ab. (Abb. 5-7)
2. Mit sinkendem Radienverhältnis R_H/R_V nimmt die optimale Belastung des vorderen Propellers im Vergleich zum hinteren zu. Der optimale Wirkungsgrad nimmt ab. (Tabelle 1)
3. Drehzahlverhältnis und Propellerabstand beeinflussen den Wirkungsgrad kaum. Geringfügig steigt er mit wachsendem Abstand an, während sich das optimale Belastungsverhältnis des vorderen Propellers zum hinteren leicht verringert. (Tabelle 1)
4. Der optimale Wirkungsgrad des freifahrenden Gegenlaufpropellers liegt bei gleichem Schub unter dem des Zweischraubers und über dem des Einzelpropellers. (Tabelle 2)

a) Voraussetzungen

Während die in den vorangegangenen Abschnitten dargestellte stationäre Theorie auf der Annahme einer räumlich-kontinuierlichen Verteilung der freien Wirbel basierte, soll jetzt berücksichtigt werden, daß der hintere Propeller in Wirklichkeit periodisch von dem Strahl des vorderen getroffen wird und das Problem daher selbst für einen freifahrenden Gegenlaufpropeller instationär ist. Eine solche Darstellung stößt allerdings auf erhebliche Schwierigkeiten, die bisher noch nicht befriedigend gelöst worden sind. Auch hier sollen lediglich die Grundlagen einer instationären Theorie erörtert werden.

Dazu betrachten wir (im Gegensatz zum Vorangehenden) der Einfachheit halber zwei Propeller, deren Flügelzahlen und Drehzahlen gleich sind. Das ist zwar in der Praxis aus maschinen- und schwingungstechnischen Gründen im allgemeinen nicht der Fall, für den instationären Durchschlageffekt des Propellerstrahles durch die Flügel des hinteren Propellers spielt diese Vereinfachung jedoch keine wesentliche Rolle. Mathematisch ergibt sich dann der große Vorteil, daß die Zirkulation der Nebenflügel durch Phasenverschiebung aus der des Aufpunktflügels hervorgeht, während sonst der kompliziertere Ansatz aus [2], S. 62/62 herangezogen werden müßte.

Weiter soll angenommen werden, daß beide Propeller einen so großen gegenseitigen Abstand haben, daß die Rückwirkung des hinteren auf den vorderen vernachlässigt werden kann. Auch diese Einschränkung dürfte für den Durchschlageffekt unerheblich sein. Wir erreichen damit, daß die Zuströmung am vorderen Propeller stationär ist und die zugehörige Zirkulation traglinientheoretisch berechnet werden kann.

Bei einem großen Propellerabstand müssen wir konsequenterweise berücksichtigen, daß sich die freien Wirbel des

vorderen Propellers am Ort des hinteren bereits zu Spitzen- und Nabenwirbeln aufgerollt haben, so daß das Modell von rotierenden Hufeisenwirbeln angemessen ist. Außerdem hat die Anordnung der Propeller in großem gegenseitigem Abstand zur Folge, daß die (konstante) Zirkulation Γ_v des vorderen Propellers unabhängig von der des hinteren berechnet werden kann. Das geschieht mit einem der üblichen Verfahren, so daß Γ_v im folgenden als bekannt angesehen werden darf.

Das Problem ist also die Bestimmung der Zirkulation des hinteren Propellers, wozu wegen der hochfrequenten Zuströmung nur die Tragflächentheorie infrage kommt. (vgl. Fußnote 1)

b) Das induzierte Geschwindigkeitsfeld

Um die Zirkulationsdichte aus der Strömungsrandbedingung berechnen zu können, benötigen wir zunächst sämtliche am Aufpunktflügel des hinteren Propellers induzierten Geschwindigkeiten. Die vom Wirbelsystem des hinteren Propellers selbst induzierten Geschwindigkeiten sind aus der Tragflächentheorie des Einzelpropellers bekannt, wie sie etwa in [1], Kapitel I enthalten ist. Zu bestimmen ist also nur noch das vom vorderen Propeller induzierte Geschwindigkeitsfeld. In der Bezeichnungsweise schließen wir uns dabei an die Darstellungen in [1] und [2] an.¹¹⁾ Den Ursprung des Koordinatensystems legen wir in den Mittelpunkt des hinteren Propellers, so daß sich der vordere an der Stelle $x = -d$ befindet.

¹¹⁾ d.h. wir verwenden Zylinderkoordinaten $x, y = r \cos \varphi$, $z = r \sin \varphi$. Die Aufpunkte auf dem hinteren Propeller sind durch den Radius r und den Winkel χ^* gegeben, der Steigungsparameter der hinteren (schraubenflächenförmigen) Flügelblätter ist k_1 . Ein Aufpunkt auf der tragenden Linie des vorderen Propellers ist durch r gekennzeichnet, die zugehörigen Integrationsvariablen sind s und für die freien Wirbelflächen s und ψ .

Die Flügelstellungen beider Propeller sind verknüpft durch die Bedingung, daß sie gegenläufig gleich schnell rotieren. Kennzeichnen wir die Stellung des hinteren Aufpunktflügels durch den Umfangswinkel φ_0 , so sind die Flügelstellungen des vorderen Propellers durch $\varphi_n = -\varphi_0 + 2\pi n/N + \Psi$ ($n = 0, \dots, N-1$) gegeben, wobei Ψ ein von der Anfangsstellung abhängiger Phasenwinkel ist. Da wir einen freifahrenden Propeller betrachten, kann ohne Einschränkung $\Psi = 0$, also $\varphi_n = -\varphi_0 + 2\pi n/N$ gesetzt werden.

Damit ist der Ortsvektor der gebundenen Wirbel des vorderen Propellers

$$\mathcal{R}_r = -d \mathbf{n}_x + s \cos \varphi_n \mathbf{n}_y + s \sin \varphi_n \mathbf{n}_z,$$

und der zugehörige Richtungsvektor ist

$$d\mathcal{G}_r = \frac{\partial \mathcal{R}_r}{\partial s} ds = [\cos \varphi_n \mathbf{n}_y + \sin \varphi_n \mathbf{n}_z] ds$$

Wir benötigen die induzierten Geschwindigkeiten in einem Punkt

$$\mathcal{R}_0 = k_1 \chi^* \mathbf{n}_x + r \cos(\varphi_0 + \chi^*) \mathbf{n}_y + r \sin(\varphi_0 + \chi^*) \mathbf{n}_z$$

des Aufpunktflügels. Nach dem Biot-Savartschen Gesetz ergibt sich dann für die von den gebundenen Wirbeln in \mathcal{R}_0 induzierte Geschwindigkeit \mathcal{W}_r , wenn wir Γ_v wieder als positiv definieren:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_r &= \frac{\Gamma_v}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{R_i}^{R_v} \frac{(\mathcal{R}_0 - \mathcal{R}_r) \times d\mathcal{G}_r}{|\mathcal{R}_0 - \mathcal{R}_r|^3} \\ &= -\frac{\Gamma_v}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{R_i}^{R_v} \left[r \sin\left(2\varphi_0 + \chi^* - \frac{2\pi n}{N}\right) \mathbf{n}_x \right. \\ &\quad \left. - (k_1 \chi^* + d) \cos\left(2\varphi_0 + \chi^* - \frac{2\pi n}{N}\right) \mathbf{n}_y \right. \\ &\quad \left. - (k_1 \chi^* + d) \sin\left(2\varphi_0 + \chi^* - \frac{2\pi n}{N}\right) \mathbf{n}_z \right] \cdot \\ &\quad \cdot \left[(k_1 \chi^* + d)^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos\left(2\varphi_0 + \chi^* - \frac{2\pi n}{N}\right) \right]^{-3/2} ds \end{aligned}$$

Die freien Spitzenwirbel denken wir uns wie bisher auf regulären Schraubenlinien der Steigung k_V/R_V angeordnet. Dabei kann die Strahlkontraktion näherungsweise durch die Annahme berücksichtigt werden, daß die Wirbel nicht auf dem Außenradius $s = R_V$, sondern auf dem Radius der Strahlkontraktion $s = s_0$ abgehen. Das ist möglich, weil hier nur die Wirkung der Wirbel auf den hinteren Propeller von Bedeutung ist.

Der Ortsvektor der Spitzenwirbel ist:

$$\mathcal{r}_s = (-d + k_V \psi) \mathcal{r}_x + s_0 \cos(\varphi_n - \psi) \mathcal{r}_y + s_0 \sin(\varphi_n - \psi) \mathcal{r}_z \quad (0 \leq \psi < \infty)$$

mit der Achsenrichtung ¹²⁾

$$d\mathcal{G}_s = [k_V \mathcal{r}_x + s_0 \sin(\varphi_n - \psi) \mathcal{r}_y - s_0 \cos(\varphi_n - \psi) \mathcal{r}_z] d\psi$$

Für die in \mathcal{r}_0 induzierten Geschwindigkeiten liefert das Biot-Savartsche Gesetz:

$$\begin{aligned} \mathcal{w}_s &= \frac{\Gamma_V}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \int_0^\infty \frac{(\mathcal{r}_0 - \mathcal{r}_s) \times d\mathcal{G}_s}{|\mathcal{r}_0 - \mathcal{r}_s|^3} \\ &= \frac{\Gamma_V}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \int_0^\infty \left\{ \mathcal{r}_x \left[s_0^2 - r s_0 \cos\left(2\varphi_0 + \chi^* - \frac{2\pi n}{N} + \psi\right) \right] \right. \\ &\quad + \mathcal{r}_y \left[-(k_1 \chi^* + d - k_V \psi) s_0 \sin\left(2\varphi_0 + \chi^* - \frac{2\pi n}{N} + \psi\right) \right. \\ &\quad \quad \left. \left. - r k_V + s_0 k_V \cos\left(2\varphi_0 + \chi^* - \frac{2\pi n}{N} + \psi\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{r}_z \left[(k_1 \chi^* + d - k_V \psi) s_0 \cos\left(2\varphi_0 + \chi^* - \frac{2\pi n}{N} + \psi\right) \right. \right. \\ &\quad \quad \left. \left. + k_V s_0 \sin\left(2\varphi_0 + \chi^* - \frac{2\pi n}{N} + \psi\right) \right] \right\} \\ &\quad \cdot \left\{ (k_1 \chi^* + d - k_V \psi)^2 + r^2 + s_0^2 - 2r s_0 \cos\left(2\varphi_0 + \chi^* - \frac{2\pi n}{N} + \psi\right) \right\}^{-3/2} d\psi \end{aligned}$$

¹²⁾ vgl. [1], S. 5

Da die genaue geometrische Struktur der Nabenwirbel für die Untersuchung nicht wesentlich ist, können wir das Modell weiter durch die Annahme vereinfachen, daß sich alle Nabenwirbel zu einem einzigen, auf der x-Achse liegenden Wirbel der Stärke $N\Gamma_V$ zusammengerollt haben. Sein Ortsvektor ist $\mathbf{r}_N = (-d + \psi) \mathbf{e}_x$ mit dem Richtungsvektor \mathbf{e}_x , und er induziert in \mathbf{r}_0 die Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} \omega_N &= \frac{N\Gamma_V}{4\pi} \int_0^\infty \frac{r \omega_\varphi d\psi}{\sqrt{(k_1 \chi^* + d - \psi)^2 + r^2}^3} \\ &= \frac{N\Gamma_V}{4\pi r} \left(1 + \frac{k_1 \chi^* + d}{\sqrt{(k_1 \chi^* + d)^2 + r^2}} \right) \omega_\varphi \end{aligned}$$

Damit sind alle vom vorderen Propeller am Ort des hinteren induzierten Geschwindigkeiten bekannt.

c) Diskussion der Singularitäten

Da die Ausdrücke für die induzierten Geschwindigkeiten zum Teil singuläre Integranden haben, ist es erforderlich, die auftretenden Singularitäten näher zu untersuchen. Dabei können wir uns wieder auf die vom vorderen Propeller induzierten Geschwindigkeiten beschränken.¹³⁾ Die einzige Singularität tritt dann offenbar in der von den Spitzenwirbeln herrührenden Geschwindigkeit auf. Der Nenner des Integranden verschwindet, wenn

1. $r = s_0$

2. $\psi = \frac{k_1 \chi^* + d}{k_V}$

3. $2\varphi_0 + \chi^* - \frac{2\pi n}{N} + \psi = 2\pi m \quad ; \quad m = 0, 1, \dots$
gleichzeitig erfüllt ist.

¹³⁾ Eine Diskussion der von einem Einzelpropeller an seinem Aufpunktflügel selbst induzierten Geschwindigkeiten findet sich in [1], S. 54-58 sowie in [9].

Die Auflösung dieses Gleichungssystems nach ψ und χ^* zeigt, daß eine singuläre Stelle (r, χ_k^*, ψ_k) neben der trivialen Forderung $r = s_0$ durch

$$\psi_k = \frac{d}{k_1 + k_v} + \frac{2k_1}{k_1 + k_v} \left(\pi m + \frac{\pi n}{N} - \varphi_0 \right)$$

$$\chi_k^* = -\frac{d}{k_1 + k_v} + \frac{2k_v}{k_1 + k_v} \left(\pi m + \frac{\pi n}{N} - \varphi_0 \right)$$

mit $\psi_k > 0$; $\chi_v(r) \leq \chi_k^* \leq \chi_H(r)$; $n=0, \dots, N-1$; $m=0, 1, \dots$ gekennzeichnet ist.

Um die von den Spitzenwirbeln induzierte Geschwindigkeit in der ε -Umgebung einer Singularität zu erhalten, entwickeln wir Zähler und Nenner des Integranden von ω_s um (χ_k^*, ψ_k) in eine Taylor-Reihe bis zu Gliedern

2. Ordnung. Mit den Substitutionen $\chi^* - \chi_k^* = \sigma$, $\psi - \psi_k = \vartheta$ ergibt sich

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma_v}{4\pi} \int_{\psi_k - \varepsilon}^{\psi_k + \varepsilon} \left\{ \text{Integrand von } \omega_s \right\} d\psi \\ &= \frac{\Gamma_v (r n_\chi + k_v n_\varphi)}{4\pi} \left\{ \frac{s_0 - r}{(k_v^2 + r s_0)(r - s_0)^2 + (k_1 + k_v)^2 r s_0 \sigma^2} \cdot \right. \\ & \quad \cdot \left. \frac{(k_v^2 + r s_0) \vartheta + (r s_0 - k_1 k_v) \sigma}{\sqrt{(k_v^2 + r s_0) \vartheta^2 + 2(r s_0 - k_1 k_v) \sigma \vartheta + (k_1^2 + r s_0) \sigma^2 + (r - s_0)^2}} \right\} \\ & \quad - \frac{s_0}{2 \sqrt{k_v^2 + r s_0}} \ln \left| (k_v^2 + r s_0)(r - s_0)^2 + (k_1 + k_v)^2 r s_0 \sigma^2 \right| \end{aligned}$$

+ beschränkte Glieder höherer Ordnung in $(s_0 - r), \sigma, \varepsilon$

Man sieht, daß die im Durchschlagpunkt $r = s_0$, $\tilde{\sigma} = 0$, $\tilde{v} = 0$ induzierte Geschwindigkeit unendlich wird. Das liegt daran, daß der aufgerollte Spitzenwirbel im Modell durch einen einzelnen Potentialwirbel dargestellt wird. In Wirklichkeit treten infolge von Zähigkeitseinflüssen keine unendlichen Geschwindigkeiten auf, ein aufgerollter Wirbel verhält sich vielmehr wie ein Rankine-Wirbel mit endlichem Kernradius. ¹⁴⁾

- d) Die Integralgleichung für die Zirkulationsdichte
(Zum Problem einer Lösungsmethode)

Die Wirbeldichte ist aus der Randbedingung zu bestimmen, daß die Strömung normal zum Blatt des Aufpunktflügels verschwindet. Bezeichnen wir die Summe aller vom hinteren Propeller selbstinduzierten Axialgeschwindigkeiten mit u_H , die Tangentialgeschwindigkeiten mit V_H , so lautet die Randbedingung ¹⁵⁾

$$\frac{k_1}{r} = \frac{u_0 + u_\Gamma + u_S + u_H}{\omega r + V_\Gamma + V_S + V_N + V_H}$$

oder

$$-ru_H + k_1 V_H = r(u_0 + u_\Gamma + u_S) - k_1(\omega r + V_\Gamma + V_S + V_N),$$

wobei jetzt auf der linken Seite die Kernanteile der Integralgleichung stehen, während die rechte Seite bekannt ist.

Zur Lösung der Gleichung kann man zunächst ähnlich wie in der Theorie des Nachstrompropellers vorgehen:

In γ^* wird die Zeit- bzw. φ_0 -Abhängigkeit durch den

Ansatz $\gamma^* = \sum_{\mu} \gamma_{\mu}^* e^{i\mu\varphi_0}$ abgespalten, die rechte Seite wird in eine Fourierreihe $\sum_{\mu} A_{\mu} e^{i\mu\varphi_0}$ mit den Fourierkoeffizienten $A_{\mu} = \bar{A}_{-\mu}$ entwickelt.

Durch Koeffizientenvergleich in $e^{i\mu\varphi_0}$ erhält man eine Anzahl unabhängiger Integralgleichungen zur Bestimmung der Funktionen γ_{μ}^* .

¹⁴⁾ Über die Erweiterung des Modells durch Einführung eines Kernradius siehe [3], S. 30/32.

¹⁵⁾ vgl. [1], S. 18

Hier zeigt sich aber schon der Unterschied zum Nachstrompropeller:

Während der Schiffsnachstrom durch Reihenglieder bis zu $\mu = 6$ darstellbar ist, sind in unserem Fall die viel höheren Wechselwirkungsfrequenzen zwischen den beiden Propellern entscheidend. Da die rechte Seite der Integralgleichung in φ_0 periodisch mit der Periode π/N ist, treten in der Fourierentwicklung nur Terme mit $\mu = 2mN$ ($m = 0, 1, \dots$) auf, die instationäre Grundfrequenz ist also $2N\omega$. Mit derselben hohen Frequenz oszillieren auch die Integranden in den Formeln für die von den freien Wirbeln induzierten Geschwindigkeiten, die deshalb numerisch nur äußerst mühsam auszuwerten wären.

Der Versuch, einen für große μ gültigen Näherungsausdruck für die Kernanteile zu gewinnen, scheitert daran, daß der von den freien Längswirbeln stammende Anteil für $\mu \rightarrow \infty$ nicht konvergiert, sondern oszilliert.

Dagegen strebt der entsprechende Querwirbelanteil für $\mu \rightarrow \infty$ gegen Null. Legen wir nun die linearisierte Flügeltheorie zugrunde, so können außerdem die Ausdrücke für die induzierten Geschwindigkeiten für große μ in die analogen Formeln aus der Theorie des Einzeltragflügels übergeführt werden, und es liegt der Gedanke nahe, den Propeller für hohe Frequenzen näherungsweise durch einen Tragflügel unendlicher Spannweite zu ersetzen. Das hätte den Vorteil, daß die γ_μ^* für große μ direkt durch Inversion der Integralgleichungskerne gewonnen werden könnten¹⁶⁾, während für $\mu = 0$ die beim freifahrenden Propeller übliche numerische Auflösungsmethode anzuwenden wäre.

Allerdings liegen auch die Nachteile dieses Verfahrens auf der Hand:

Einmal ist es schwer abzuschätzen, inwieweit die für sehr große μ zutreffenden Näherungen schon für $\mu = 2N$ gültig

¹⁶⁾ vgl. [10], S. 59-66

sind, zum anderen wird die Zirkulationsdichte des ebenen Tragflügels an der Vorderkante unendlich, während das beim Schraubenpropeller mit abgerundeter Vorderkante nicht der Fall ist. Der Einfluß dieser Abweichung auf den Gesamtverlauf der Zirkulation wird zwar dadurch gemildert, daß sich die Aufpunkte nach der $\frac{3}{4}$ - Punkt - Methode mehr in Hinterkantennähe konzentrieren; dennoch wäre es in einer genaueren Darstellung wünschenswert, den dreidimensionalen Charakter der Integralgleichung der Propellertragflächentheorie für hohe reduzierte Frequenzen beizubehalten. Von einem numerisch praktikablen Lösungsverfahren sind wir in diesem Fall jedoch noch weit entfernt.

Anhang

Es sollen hier die im Abschnitt 2 erwähnten Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial A_\mu} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial A_\mu^*} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0 \quad (\mu = 1, \dots, 5)$$

zusammengestellt werden.

Wir setzen

$$u_V^{V,H}(r) = \sum_{\mu=1}^5 A_\mu u_V^{V,H}(\mu, r), \quad V_V^{V,H}(r) = \sum_{\mu=1}^5 A_\mu V_V^{V,H}(\mu, r)$$

$$u_H^{V,H}(r) = \sum_{\mu=1}^5 A_\mu^* u_H^{V,H}(\mu, r), \quad V_H^{V,H}(r) = \sum_{\mu=1}^5 A_\mu^* V_H^{V,H}(\mu, r)$$

Mit

$$r_V = \frac{R_V + R_i}{2} - \frac{R_V - R_i}{2} \cos \vartheta; \quad r_H = \frac{R_H + R_i}{2} - \frac{R_H - R_i}{2} \cos \vartheta$$

lauten die Gleichungen für $\mu, \lambda = 1, \dots, 5$:

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda} A_\lambda N_V (R_V - R_i) \int_0^\pi [(\omega_V r_V u_V^V(\lambda, \vartheta) + \alpha V_V^V(\lambda, \vartheta)) \sin \mu \vartheta \\ & + (\omega_V r_V u_V^V(\mu, \vartheta) + \alpha V_V^V(\mu, \vartheta)) \sin \lambda \vartheta] \sin \vartheta \, d\vartheta \\ & + \sum_{\lambda} A_\lambda^* \left\{ N_V (R_V - R_i) \int_0^\pi [\omega_V r_V u_H^V(\lambda, \vartheta) + \alpha V_H^V(\lambda, \vartheta)] \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \sin \mu \vartheta \cdot \sin \vartheta \, d\vartheta \right. \\ & \left. + N_H (R_H - R_i) \int_0^\pi [\omega_H r_H u_V^H(\mu, \vartheta) - \alpha V_V^H(\mu, \vartheta)] \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \sin \lambda \vartheta \cdot \sin \vartheta \, d\vartheta \right\} \\ & = -\omega_V N_V (R_V - R_i) \int_0^\pi (u_0 + \alpha) r_V \sin \mu \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\lambda} A_{\lambda} \left\{ N_V (R_V - R_i) \int_0^{\pi} \left[\omega_V r_V u_H^V(\mu, \vartheta) + \alpha V_H^V(\mu, \vartheta) \right] \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. \sin \lambda \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \right. \\
 & + N_H (R_H - R_i) \int_0^{\pi} \left[\omega_H r_H u_V^H(\lambda, \vartheta) - \alpha V_V^H(\lambda, \vartheta) \right] \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. \sin \mu \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \right. \\
 & + \sum_{\lambda} A_{\lambda}^* N_H (R_H - R_i) \int_0^{\pi} \left[(\omega_H r_H u_H^H(\lambda, \vartheta) - \alpha V_H^H(\lambda, \vartheta)) \sin \mu \vartheta \right. \\
 & \left. + (\omega_H r_H u_H^H(\mu, \vartheta) - \alpha V_H^H(\mu, \vartheta)) \sin \lambda \vartheta \right] \sin \vartheta \, d\vartheta \\
 & = -\omega_H N_H (R_H - R_i) \int_0^{\pi} (u_0 + \alpha) r_H \sin \mu \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\lambda} A_{\lambda} \omega_V N_V (R_V - R_i) \int_0^{\pi} r_V \sin \lambda \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \\
 & + \sum_{\lambda} A_{\lambda}^* \omega_H N_H (R_H - R_i) \int_0^{\pi} r_H \sin \lambda \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \\
 & + \sum_{\mu, \lambda} A_{\mu} A_{\lambda} \left\{ N_V (R_V - R_i) \int_0^{\pi} V_V^V(\lambda, \vartheta) \sin \mu \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \right\} \\
 & - \sum_{\mu, \lambda} A_{\mu}^* A_{\lambda}^* \left\{ N_H (R_H - R_i) \int_0^{\pi} V_H^H(\lambda, \vartheta) \sin \mu \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \right\} \\
 & + \sum_{\mu, \lambda} A_{\mu} A_{\lambda}^* \left\{ N_V (R_V - R_i) \int_0^{\pi} V_H^V(\lambda, \vartheta) \sin \mu \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \right. \\
 & \left. - N_H (R_H - R_i) \int_0^{\pi} V_V^H(\mu, \vartheta) \sin \lambda \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \right\} \\
 & = 2 S_0
 \end{aligned}$$

Bezeichnungen

Index V	vorderer Propeller
Index H	hinterer Propeller
A_{μ}, A_{μ}^*	Ansatzkoeffizienten für Γ_V, Γ_H ; S. 7
c_s	Schubbelastungsgrad; S. 10
d	Propellerabstand
F	s. Definition S. 8
k_1	geometrische Steigung der Flügelfläche
k_V, k_H	hydrodynamische Steigung; S. 9
k_V^*	Steigung der vom vorderen Propeller abgehenden freien Wirbel am Ort des hinteren; S. 9
M_V, M_H	Drehmomente
N, N_V, N_H	Flügelzahlen
R_1	Nabenradius
R_V, R_H	Außenradius der Propellerflügel
R_{ST}	Radius der Strahlkontraktion
r, r_V, r_H	Koordinaten in radialer Richtung
S, S_0	Gesamtschub
S_V, S_H	Schub
s	Integrationsvariable in radialer Richtung
s_0	Radius der Strahlkontraktion
u_0	konstante Anströmgeschwindigkeit
u_V^V, v_V^V	am vorderen Propeller selbstinduzierte Axial- bzw. Tangentialgeschwindigkeiten
u_V^H, v_V^H	vom vorderen am hinteren Propeller induzierte Axial- bzw. Tangentialgeschwindigkeiten
u_H^V, v_H^V	vom hinteren am vorderen Propeller induzierte Axial- bzw. Tangentialgeschwindigkeiten
u_H^H, v_H^H	am hinteren Propeller selbstinduzierte Axial- bzw. Tangentialgeschwindigkeiten
u_s, v_s	von den freien Spitzenwirbeln induzierte Geschwindigkeiten
u_r, v_r	von den gebundenen Wirbeln induzierte Geschwindigkeiten
v_N	von den freien Nabenwirbeln induzierte Tangentialgeschwindigkeiten
u_H, v_H	Summe aller vom hinteren Propeller selbstinduzierten Axial- bzw. Tangentialgeschwindigkeiten; S. 24

n_x, n_y, n_z	Einheitsvektoren in x-, y-, z-Richtung
n_φ, n_r	Einheitsvektoren in tangentialer bzw. radialer Richtung
w_0	Aufpunkt
w_r	Ortsvektor der gebundenen Wirbel
w_s	Ortsvektor der freien Spitzenwirbel
$d\sigma_r, d\sigma_s$	Richtungsvektor der gebundenen Wirbel bzw. der freien Spitzenwirbel
w_r, w_s, w_N	von den gebundenen, Spitzen- und Nabenwirbeln induzierte Geschwindigkeiten
α	Lagrangescher Multiplikator; S. 8
Γ_v, Γ_H	Zirkulation
γ^*	mit dem Bogenelement multiplizierte Zirkulationsdichte; s. [1], S. 3
γ_μ^*	s. Definition S. 24
η, η_v, η_H	induzierter Wirkungsgrad
ϑ	a) transformierte radiale Variable; S. 7 b) $\psi - \psi_K$
α_v, α_H	Goldsteinfaktoren
λ, μ	Indizes
ρ	Dichte des Wassers
σ	$\chi - \chi_K^*$
φ_0	Umfangswinkel; s. [1], Abb. 3
φ_n	$-\varphi_0 + 2\pi n/N$
$\chi_v(r), \chi_H(r)$	Randkurve des Flügelblatts; s. [1], Abb. 3
χ^*	Aufpunkt auf dem Flügelblatt in χ - (Tiefen-) Richtung
χ_K^*	s. Definition S. 23
ψ	Integrationsvariable für die freien Wirbelflächen
ψ_K	s. Definition S. 23
$\omega, \omega_v, \omega_H$	Winkelgeschwindigkeiten

Literatur

- [1] W.-H. Isay:
Moderne Probleme der Propellertheorie
Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970
- [2] W.-H. Isay:
Propellertheorie
Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1964
- [3] W.-H. Isay:
Einfache Strömungsmodelle in Zusammenhang mit dem
Problem eines von der Wasseroberfläche belüfteten
Propellers
Bericht Nr. 284 des Instituts für Schiffbau der
Universität Hamburg, März 1972
- [4] A. Kracht, A. Nolte:
Modellversuche für gegenläufige Propeller
Forschungszentrum des Deutschen Schiffbaus,
Bericht Nr. 20/1971
- [5] L.A. van Gunsteren:
Application of Momentum Theory in Counterrotating
Propeller Design
International Shipbuilding Progress 18 (1971) 206
- [6] W.B. Morgan:
The Design of Counterrotating Propellers
Using Lerbs' Theory
Trans. SNAME, vol. 68, 1960
- [7] J.B. Hadler:
Contrarotating Propeller Propulsion -
A State - of - the - Art Report
Marine Technology, vol. 6, no. 3, July 1969

[8] H. Lerbs:

Ergebnisse der angewandten Theorie des
Schiffspropellers
Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft,
49. Band, 1955

[9] H. Klingsporn:

Integralgleichungen der Propellertragflächentheorie
Bericht Nr. 248 des Instituts für Schiffbau der
Universität Hamburg, September 1969

[10] W. Schmeidler:

Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik
und Technik
Akademische Verlagsgesellschaft, Geest u. Portig K.-G.
Leipzig, 1950

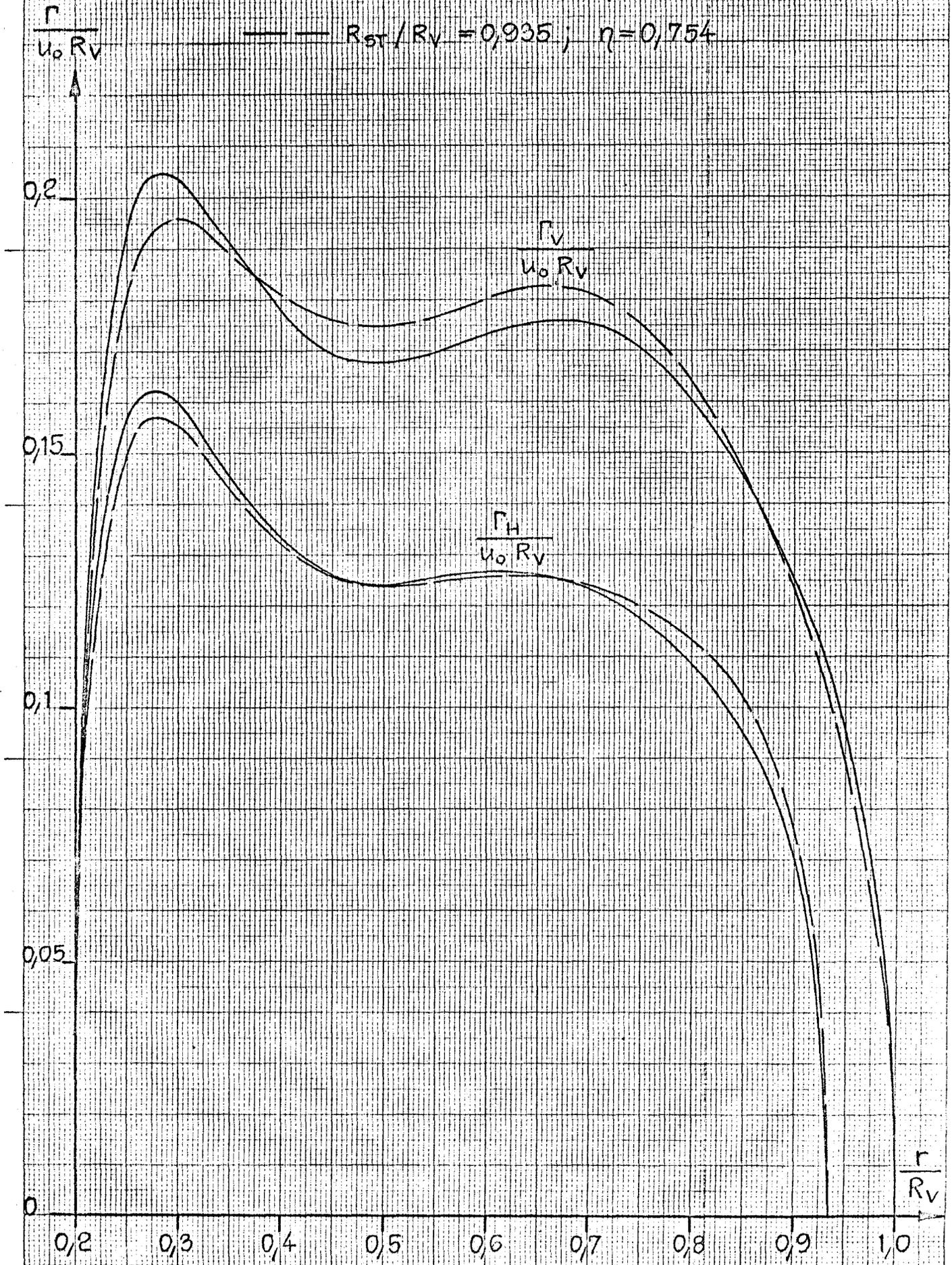
[11] W. Gröbner, N. Hofreiter:

Integraltafel, 1. Teil, 2. Auflage
Springer-Verlag, Wien und Innsbruck, 1957

$d/R_v = 0,434 ; R_H/R_v = 0,935$

— $R_{st}/R_v = 1 ; \eta = 0,758$

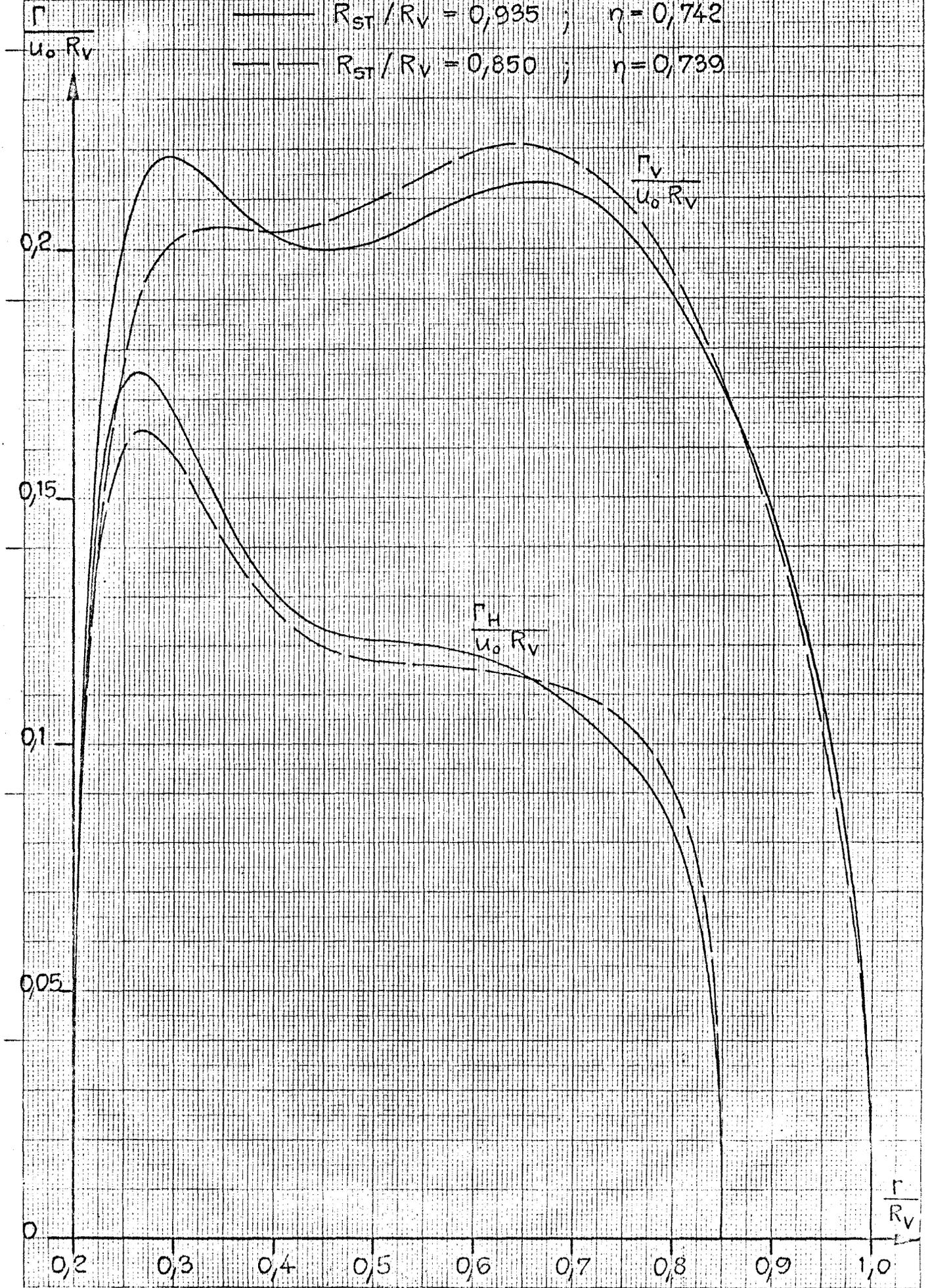
— — $R_{st}/R_v = 0,935 ; \eta = 0,754$



$d/R_v = 0,434 ; R_H/R_v = 0,850$

— $R_{st}/R_v = 0,935 ; \eta = 0,742$

— $R_{st}/R_v = 0,850 ; \eta = 0,739$



$\frac{\Gamma}{u_0 R_V}$

$d/R_V = \infty ; R_H/R_V = 0,935$

— $R_{ST}/R_V = 1 ; \eta = 0,767$

— $R_{ST}/R_V = 0,935 ; \eta = 0,763$

0,2

0,15

0,1

0,05

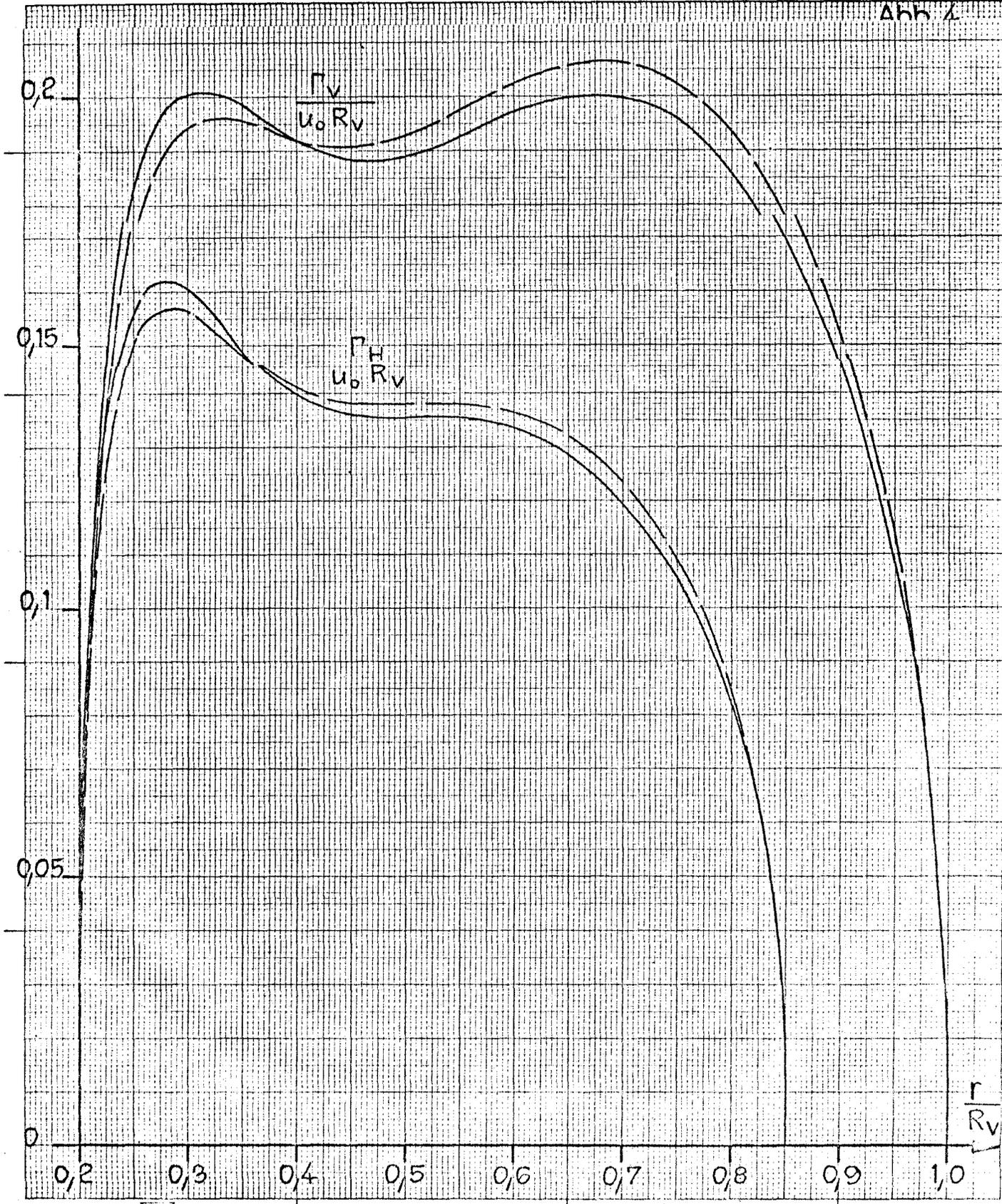
0

$\frac{\Gamma_V}{u_0 R_V}$

$\frac{\Gamma_H}{u_0 R_V}$

0,2 0,3 0,4 0,5 0,5 0,7 0,8 0,9 1,0

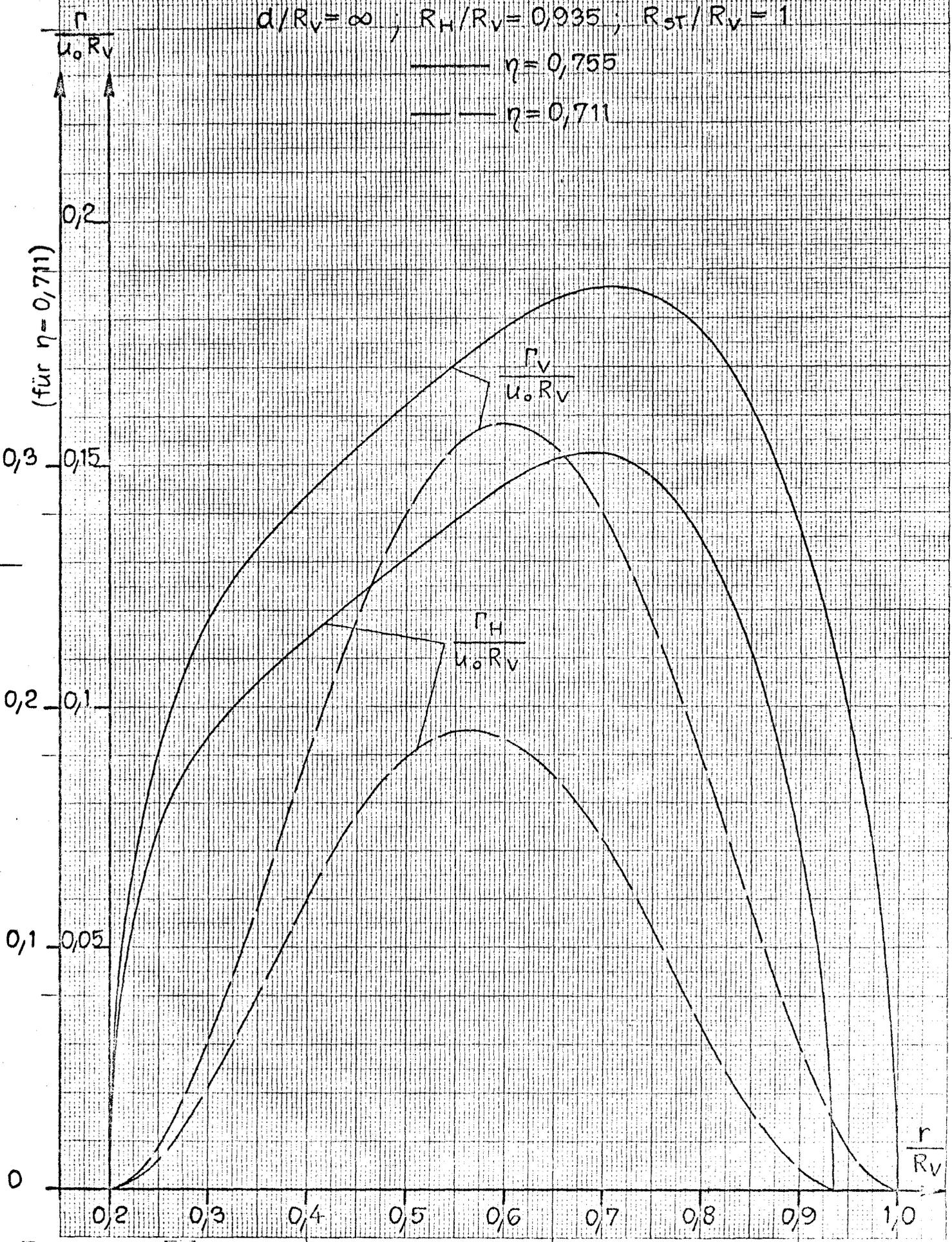
$\frac{r}{R_V}$



$d/R_v = \infty ; R_H/R_v = 0,935 ; R_{ST}/R_v = 1$

— $\eta = 0,755$

- - $\eta = 0,711$



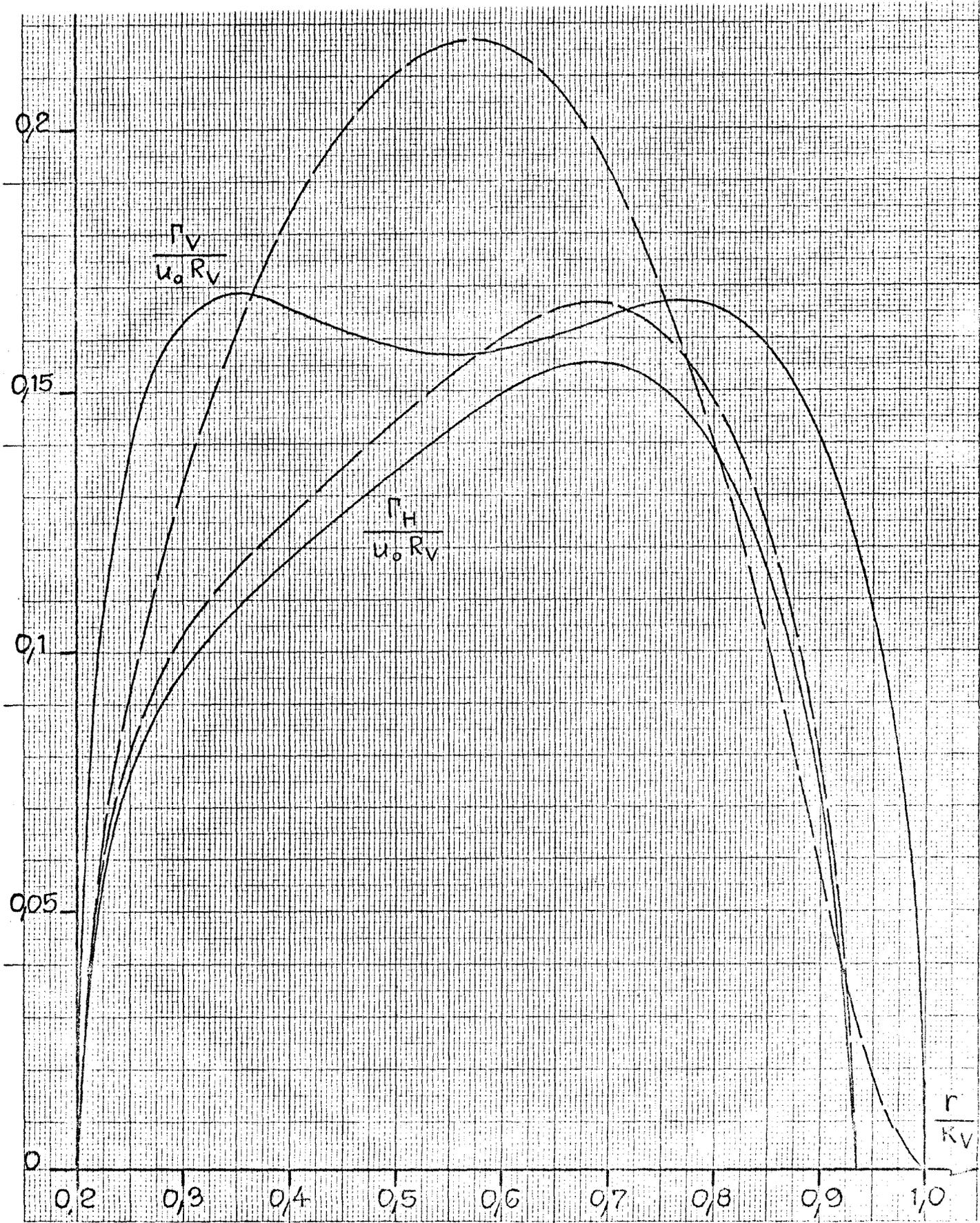


Tabelle 1:

$N_V = 4$; $N_H = 5$; $R_i/R_V = 0,2$; $\omega_V R_V/u_0 = \omega_H R_V/u_0 = 3,83$; $c_s = 1,29$

d/R_V	R_H/R_V	R_{ST}/R_V	k_V/R_V	k_H/R_V	k_V^*/R_V	S_V/S_H	M_V/M_H	η_V/η_H	η
0,217	0,935	1,000	0,351	0,339	0,375	1,09	1,15	0,95	0,758
	0,935	0,935	0,350	0,343	0,371	1,11	1,15	0,96	0,754
	0,850	0,935	0,362	0,345	0,387	1,58	1,70	0,93	0,738
	0,850	0,850	0,360	0,349	0,379	1,61	1,71	0,94	0,734
0,434	0,935	1,000	0,350	0,342	0,389	1,09	1,10	0,99	0,758
	0,935	0,935	0,349	0,345	0,384	1,10	1,11	0,99	0,754
	0,850	0,935	0,361	0,346	0,401	1,55	1,62	0,96	0,742
	0,850	0,850	0,358	0,350	0,391	1,58	1,64	0,96	0,739
0,868	0,935	1,000	0,346	0,344	0,399	1,07	1,05	1,02	0,760
	0,935	0,935	0,344	0,346	0,393	1,08	1,05	1,03	0,759
	0,850	0,935	0,358	0,350	0,412	1,52	1,52	1,00	0,742
	0,850	0,850	0,356	0,353	0,405	1,55	1,54	1,01	0,739
∞	0,935	1,000	0,334	0,349	0,403	1,04	0,96	1,08	0,767
	0,935	0,935	0,333	0,353	0,397	1,05	0,96	1,09	0,763
	0,850	0,935	0,343	0,355	0,413	1,42	1,32	1,08	0,755
	0,850	0,850	0,342	0,362	0,408	1,44	1,32	1,09	0,748

wegen
 $\Gamma/u_0 R_V$
siehe
Abb.1/2

wegen
 $\Gamma/u_0 R_V$
siehe
Abb.3/4

Tabelle 2:

$$N_V = 4 ; N_H = 5 ; R_i / R_V = 0,2 ; \omega_V R_V / u_0 = \omega_H R_V / u_0 = 3,83 ; C_S = 1,29$$

Optimaler Gegenlaufpropeller	$d / R_V = 0,434 ; R_H / R_V = R_{ST} / R_V = 0,935$	$\eta = 0,754$
	$d / R_V = \infty ; R_H / R_V = R_{ST} / R_V = 0,935$	$\eta = 0,763$
Gegenlaufprop. m. der Zirkulation der opti- malen Einzelpropeller	$d / R_V = 0,434 ; R_H / R_V = R_{ST} / R_V = 0,935$	$\eta = 0,747$
	$d / R_V = \infty ; R_H / R_V = R_{ST} / R_V = 0,935$	$\eta = 0,755$
Optimaler Zweischrauber	$R_H / R_V = 1$	$\eta = 0,807$
	$R_H / R_V = 0,935$	$\eta = 0,794$
Optimaler Einzelpropeller	$N = 4$	$\eta = 0,676$
	$N = 5$	$\eta = 0,687$