

500 | November 1989

## SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Ronald Horn

# Überschallströmung um Rotationskörper in gashaltigem Wasser

**TUHH**

*Technische Universität Hamburg-Harburg*

## **Überschallströmung um Rotationskörper in gashaltigem Wasser**

Ronald Horn, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1989

ISBN: 3-89220-500-0

© Technische Universität Hamburg-Harburg  
Schriftenreihe Schiffbau  
Schwarzenbergstraße 95c  
D-21073 Hamburg

<http://www.tuhh.de/vss>

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr. 500

Überschallströmung um Rotationskörper

in gashaltigem Wasser

von

Ronald Horn

Oktober 1989

# Inhaltsverzeichnis

	Zusammenfassung · Abstract . . . . .	2
	Liste der verwendeten Symbole . . . . .	3
<b>1</b>	Einleitung . . . . .	5
<b>2</b>	Annahmen der Theorie . . . . .	13
<b>3</b>	Theoretische Grundlagen der Kompressibilität des Fluids . . . . .	15
<b>4</b>	Die kompressible Potentialströmung . . . . .	20
	4.1 Der potentialtheoretische Ansatz . . . . .	20
	4.2 Das Potential des Rotationskörpers . . . . .	25
	4.3 Das Potential der Stoßfläche . . . . .	27
	4.4 Formulierung der Volumenquelle . . . . .	30
<b>5</b>	Die Singularitätenverteilung . . . . .	31
	5.1 Senkenstärke des Stoßpotentials . . . . .	31
	5.2 Quellen–Senkenstärke des Rotationskörperpotentials . . . . .	34
<b>6</b>	Das Druckfeld . . . . .	35
<b>7</b>	Vergleich mit der Theorie von Chao . . . . .	37
<b>8</b>	Numerische Lösung . . . . .	39
<b>9</b>	Ergebnisse . . . . .	42
	Abbildungen . . . . .	48
	Anhang A . . . . .	62
	Anhang B . . . . .	63
	Literatur . . . . .	65
	Danksagung . . . . .	68

## Zusammenfassung

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Behandlung von Überschallströmung um Rotationskörper in gashaltigem Wasser. Das Strömungsfeld wird durch eine kompressible Potentialströmung im thermodynamischen Gleichgewicht mit direkter Druck-Dichte-Beziehung beschrieben. Die sich vor dem Körper ausbildende Stoßfläche wird durch eine Senkenbelegung modelliert. Die numerischen Ergebnisse werden verglichen mit den aus der Überschall-Aerodynamik bekannten Resultaten. Sie sind nur beschränkt übertragbar.

## Abstract

Supersonic flow around bodies of revolution in gaseous water is investigated. A compressible potential-flow in thermo-dynamic equilibrium with direct pressure-density relation describes the flow field. The shock surface in front of the body is modelled by a source distribution. Numerical results show in comparison to well-known results of super-sonic aerodynamics only limited transferability.

## Liste der verwendeten Symbole

$a$	Schallgeschwindigkeit
$\alpha$	Gasvolumenverhältnis
$\alpha_{**}$	Beiwert des Zugspannungsabbaus nach Chao [6]
$c_p$	Druckbeiwert
$c_p$	spezifische Wärme bei konstantem Druck
$c_v$	spezifische Wärme bei konstantem Volumen
$E$	innere Energie
$e$	innere Energie pro Masseneinheit
$\vec{e}$	Einheitsvektor
$\epsilon$	Halböffnungswinkel der Stoßfläche
$\kappa$	Quotient der spezifischen Wärmen
$L$	Länge des Rotationskörpers
$M$	Machzahl
$M$	Masse
$\mu$	Viskosität
$\nu$	Zähigkeitsbeiwert
$p$	Druck
$\Phi$	Potential
$\Pi$	verallgemeinerte Druckfunktion
$\delta q$	(Differential der) Wärmezufuhr
$q$	(Quellen-)Senkenbelegung
$R$	Radius
$\vec{r}$	Ortsvektor
$\rho$	Dichte
$S$	Entropie
$s$	Entropie pro Masseneinheit
$\sigma$	Koeffizient der Oberflächenspannung
$\sigma_v$	Kavitationsbeiwert
$T$	Temperatur
$t$	Zeit
$U$	Geschwindigkeit
$\vec{v}$	Geschwindigkeitsvektor
$V$	Volumen
$w$	Wandgeschwindigkeit
$x_*$	Mittelpunkt der Kugelschale
$X$	Stromlinienkoordinate
$\zeta$	Blasendichte

$x, y, z$	kartesische Koordinaten
$r, \varphi, \vartheta$	Kugelkoordinaten
$\xi, r, \theta$	Zylinderkoordinaten

## Indices

G	Gas
i	inhomogen
k	Körper
L	Luft
n	Normale
(n)	Ordnung
v	Dampf
W	Wasser
st	Stoßfläche
t	Tangente
o	Ausgangswert/Zuströmung
*	Störgröße (Potential)
~	vor dem Stoß
^	nach dem Stoß

## Konstanten

$$p_v = 0.023 \text{ [bar]}$$

$$\rho_w = 10^{-6} \text{ [bar} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{cm}^{-2}\text{]}$$

$$\sigma = 7.2 \cdot 10^{-5} \text{ [bar} \cdot \text{cm}\text{]}$$

# 1. Einleitung

Überschallzustand liegt in einem Fluid dort vor, wo die Strömungsgeschwindigkeit  $\vec{U}$  des Fluids die örtliche Schallgeschwindigkeit  $a$  übersteigt. Diese selbst ist temperaturabhängig und steigt in reinem Wasser von  $a = 1400$  [m/s] ( $T = 273$  [K]) auf  $a = 1550$  [m/s] ( $T = 345$  [K]) an (Abbildung z.B. bei Isay [5]). Der Wert bei Raumtemperatur beträgt  $a = 1485$  [m/s]. Bereits ein geringes Gasvolumenverhältnis führt zu einer starken Absenkung der Schallgeschwindigkeit in gashaltiger Wasserströmung. Dabei kann sogar der für reine Luft geltende Wert ( $a = 330$  [m/s] bei  $T = 273$  [K]) deutlich unterschritten werden. Berücksichtigt man, daß experimentelle Voraussetzungen zur Untersuchung der Strömungseigenschaften bei hohen Geschwindigkeiten in der Anströmung für rein gasförmige Fluide prinzipiell einfacher zu realisieren sind als für Flüssigkeiten, wird es verständlich, daß Veröffentlichungen zum Thema Überschallströmung in gashaltigem Wasser, insbesondere Überschallanströmung, praktisch nicht vorliegen oder sich auf Unterschallanströmung mit Ausbildung eines lokalen Überschallgebietes reduzieren.

Im letzteren Fall kommt es zwar vor dem Körper durch dessen Stauwirkung zu einer Abnahme der Geschwindigkeit, jedoch kann weiter stromabwärts infolge der Beschleunigung der Strömung die Maximalgeschwindigkeit am Körper gleich der Schallgeschwindigkeit werden (Anströmung mit kritischer Machzahl) oder diese sogar noch übersteigen. Das dann vorliegende lokale Überschallgebiet ist durch einen stetigen Übergang von Unterschall- auf Überschallgeschwindigkeit charakterisiert, wird jedoch stromabwärts ähnlich wie in der Gasdynamik durch einen Verdichtungsstoß oder auch Kavitationsstoß abgeschlossen.

Ganz andere Verhältnisse liegen vor, wenn der Strömungskörper bereits mit Überschall angeströmt wird. Die Stauwirkung des Körpers führt in diesem Fall zu einer Abnahme der Machzahl ( $\equiv$  Strömungsgeschwindigkeit/ Schallgeschwindigkeit) auf  $M < 1$ , und es kommt stromaufwärts des Körpers zu einem Verdichtungsstoß mit einem daran anschließenden lokalen Unterschallgebiet. Stromabwärts wird die Strömung stetig auf Überschall beschleunigt. Überschallanströmung in gashaltigem Wasser ist nur äußerst schwer zu realisieren. Die einzelnen Feldgrößen, insbesondere Zuströmungsgeschwindigkeit  $\vec{U}_o$ , Zuströmdruck  $p_o$  und Gasvolumenverhältnis  $\alpha_o$  müssen innerhalb bestimmter Intervalle liegen, die noch zu besprechen sind. Eine Untersuchung von Überschallströmung in gashaltigem Wasser wurde soweit bekannt noch nie durchgeführt. Diese Tatsache mindert natürlich nicht ein durchaus vorhandenes Interesse an Messungen. So liegen der Hamburgischen Schiffbau-Versuchsanstalt (HSVA), zu der das Institut für Schiffbau (IfS) einen engen Kontakt pflegt, diesbezüglich Anfragen seitens des Bundesministeriums für Forschung und Technik (BMFT) vor. Da in Kavitationstunneln mit fortschreitendem Stand der Technik immer höhere Umlaufgeschwindigkeiten erreicht werden und sich auch die Entwicklung der Begasungsanlagen entsprechend verbessert, gewinnt die Frage nach einer Realisierung solcher Untersuchungen entsprechend an Bedeu-

tung.

Dies gilt um so mehr, wenn man bedenkt, daß die immer noch sehr hohe Schallgeschwindigkeit in Luft ( $a = 330 [m/s]$ ) meist nur kurzzeitige Messungen nach "Abblasen" der zuvor komprimierten Luft aus Überdruckbehältern erlaubt. Demgegenüber würde eine stationäre Überschallanströmung gashaltigen Wassers im Kavitationstunnel bezüglich experimenteller Voraussetzungen eine interessante Alternative darstellen. Die seitens des BMFT weitreichendere Frage, ob Messungen im Kavitationstunnel solche in Windkanälen langfristig ersetzen können, setzt nicht allein die theoretische Behandlung der Überschallanströmung gashaltigen Wassers voraus, sondern sollte erst nach einer Realisierung von Messungen abschließend beantwortet werden.

Zunächst werden in Kap.2 die Annahmen der Theorie aufgeführt. Sie betreffen die potentialtheoretische Beschreibung eines kompressiblen Fluids im thermodynamischen Gleichgewicht, die Behandlung seiner Phasen und Komponenten sowie die Einschränkung des Theemas bezüglich bestimmter Teilgebiete der Strömungsmechanik.

Die theoretischen Grundlagen zur Kompressibilität des Fluids sind Gegenstand von Kap.3. Hierzu liegen bereits Arbeiten von **Isay** [5], **Isay & Roestel** [4], **Wieghardt** [15] und **van Wijngaarden** [16] vor. Unter den Annahmen von Kap.2 wird eine direkte Druck-Dichte-Beziehung formuliert und der Ausdruck für die Schallgeschwindigkeit  $a$  abgeleitet.

Besonders sorgfältige Vorüberlegungen sind notwendig bei der Aufstellung der Erhaltungssätze, und zwar in Verbindung mit der Anpassung des lokalen Verdichtungsstoßes stromaufwärts des Rotationskörpers. Die bislang vorliegenden Arbeiten können bezüglich der Wahl der Lösungsmethode und Art der Stoßanpassung bis zu einem gewissen Grad zum Vergleich herangezogen werden. Es ist jedoch zu beachten, daß überkritische Unterschallanströmung mit Ausbildung eines lokalen Überschallgebietes (hier wurden sowohl reine Gasströmung als auch Strömung von gashaltigem Wasser untersucht) sowie Überschall- und Hyperschallanströmung im Bereich der Aerodynamik z.T. erhebliche Unterschiede bezüglich thermodynamischer und strömungsmechanischer Eigenschaften aufweisen. Aus diesem Grund sollen zunächst einige bekannte Verfahren beurteilt werden.

a) **Oswatitsch** [1] gab bereits 1950 eine Integralgleichung für die Geschwindigkeitsverteilung an, mit der lokale Überschallgebiete an flachen Profilen berechnet werden können. Die Verteilung ergibt sich aus

$$U(x, y) = U_p(x, y) + \frac{U^2(x, y)}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U^2(\xi, \eta)}{2} \frac{(\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}{((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2)^2} d\xi d\eta \quad (1.1)$$

mit  $U_p(x, y)$  als der Prandl-Geschwindigkeit der linearen Gleichung. Zur Lösung des Doppelintegrals wird die Geschwindigkeitsverteilung durch den Ansatz  $U(x, y) = U_o(x) \cdot E(y)$  separiert mit der Abklingfunktion  $E(y)$ . Die Funktion  $U_o(x)$ , mathematisch dargestellt als

Parabel (bzw. im Fall eines Stoßes als Aneinanderfügung von Halbparabeln), kann dann zusammen mit  $E(y)$  an eine Messung angepaßt werden (insgesamt drei freie Parameter). Insbesondere wird die Stoßlage auf dem Profil durch Kenntnis aus Messungen vorgegeben. In einer Übersicht gibt **Zierep** [2] noch weitere Lösungsansätze für das Doppelintegral in Gl.(1.1) von anderen Autoren an, die hinsichtlich der Anpassung freier Parameter an Messungen keine prinzipiell neue Methode darstellen. Da für die in dieser Arbeit untersuchte Überschallströmung in gashaltigem Wasser noch keine experimentellen Ergebnisse vorliegen, scheidet jede Lösung aus, die eine Anpassung an Meßwerte zwingend voraussetzt.

b) **Zierep** selbst [2] reduziert das o.a. Doppelintegral zunächst auf ein Einfachintegral über eine Quellbelegung auf der  $x$ -Achse ( $\equiv$  Strömungsrichtung) und leitet unter Berücksichtigung der Drehungsfreiheit sowie der Gleichung für den (als senkrecht angenommenen) Stoß eine Iterationsgleichung für die Stoßlage  $x_s$  auf der Profilloberfläche ab. Der Vergleich mit Messungen fällt zufriedenstellend aus, jedoch wurde nur die Unterschallströmung behandelt. Auch **Spreiter & Alksne** [17] haben das von Oswatitsch vorgestellte Integralgleichungsverfahren modifiziert. Sie stellen wie **Zierep** [2] fest, daß das iterative Lösungsverfahren nur dann konvergiert, wenn die Ausgangslösung der Geschwindigkeitsverteilung (bzw. Druckverteilung) bereits einen Verdichtungsstoß enthält.

c) **Rotta** [7] untersucht die Druckverteilung an symmetrischen Flügelprofilen bei transsonischer Strömung. Sie wird vor und hinter dem Stoß getrennt voneinander berechnet und dann am Fußpunkt des Stoßes zur Gesamtverteilung zusammengefügt. Stromaufwärts des Stoßes wird die Potentialgleichung für transsonische Strömungen schwacher Störungen,

$$\phi_{xx} \cdot (1 - M_\infty^2) - \frac{K}{U_\infty} \cdot \phi_x \phi_{xx} + \phi_{zz} = 0 \quad , \quad K = (\kappa + 1)M_\infty^2 \quad , \quad (1.2)$$

zugrundegelegt und durch Koordinatentransformation sowie Erfüllung der Randbedingung an der Oberfläche weiter umgeformt. Mit den gleichen Überlegungen, jedoch für negative Werte  $\phi_{xx}$ , ergibt sich die Druckverteilung stromabwärts des Stoßes. Die in letzterer Gleichung eingeführte Konstante  $c$  dient als freier Parameter, um die Druckverteilung mit den Bedingungen am Stoß in Einklang zu bringen. Die Lage des Stoßes wird als die Stelle im Gebiet  $dp/dx > 0$  definiert, an der die örtliche Machzahl  $M$  den Wert

$$M = \frac{M_{max} + 1}{2} \quad (1.3)$$

annimmt. Die Meßreihen steigender Anströmmachzahl verschieben die Stoßlage erwartungsgemäß stromabwärts; quantitativ wird wegen der willkürlich gewählten Definition der Stoßlage jedoch keine Übereinstimmung mit den ebenfalls dargestellten Messungen von Stoßlagen anderer Autoren erzielt.

d) **Nørstrud** [18] untersucht mit der Integralgleichungsmethode gewölbte und angestellte Profile, wobei er die Arbeit von **Gullstrand** [19] auf Anstellwinkel  $\alpha$  erweitert, die nicht mehr klein gegen das Dickenverhältnis  $\tau$  des Profils angenommen werden müssen. Weitere Berechnungen mit der gleichen Methode werden von **Chakrabarty** [20] und **Nixon** [21] durchgeführt.

e) In den Arbeiten von **Mitra** [22] und **Niyogi & Sen** [23] wird zusätzlich ein Störpotential eingeführt, um den Einfluß des Verdichtungsstoßes zu berücksichtigen. Der Ansatz ist rein empirisch. Die unter d) und e) zitierten Arbeiten stellen im wesentlichen eine Erweiterung der von **Oswatitsch** vorgestellten Methode dar.

Die bisher zitierten Arbeiten erzielen mit der potentialtheoretischen Behandlung eines nichtviskosen, isentropen und stationären Fluids durch die Integralgleichungsmethode überwiegend gute Übereinstimmung mit dem Experiment. Die Geschwindigkeitsverteilung vertikal zur Strömungsrichtung wird z.T. semiempirisch vorgegeben und die eingeführten Parameter zuletzt angepaßt. Die durch den Verdichtungsstoß hervorgerufene Beeinflussung des Geschwindigkeitsfeldes ergibt sich dabei nie durch einen direkten Beitrag eines Stoßterms bzw. Einbeziehung eines solchen in die Integralgleichung, sondern fließt z.B. durch verschiedene Vorgaben in den Iterationsprozeß ein.

f) Der Einfluß des Stoßes auf das Geschwindigkeitsfeld kann explizit einbezogen werden, wenn der potentialtheoretische Ansatz den Stoß bereits berücksichtigt. So behandelt **Rues** [24] den Einfluß ebener Körper auf stromaufwärts liegende senkrechte Stöße durch Berechnung der neuen, verschobenen Stoßlage nach Auslenkung eines schlanken Parabelbogenzweiecks gegen die Strömungsrichtung. Zuvor wird im ungestörten Zustand die Belegung der Stoßfläche mit Singularitäten durch Erfüllung der Randbedingungen berechnet. Das Strömungsfeld stromaufwärts des Stoßes wird nicht behandelt, eine dort durch die Belegung der Stoßfläche mit Singularitäten induzierte Geschwindigkeit nicht berücksichtigt. Auch **Isay & Roestel** [4], **Isay** [5] beziehen den Beitrag des Stoßes bei Unterschallanströmung in gashaltigem Wasser ein.

g) Ähnlich wie **Isay & Roestel** erhält **Voss** [25] nach Anwendung des Greenschen Satzes auf die nichtlineare Differentialgleichung des Geschwindigkeitspotentials  $\Phi$  der ebenen transsonischen Strömung um Profile eine nichtlineare Integralgleichung. In dieser Gleichung ist das Stoßintegral explizit enthalten.

Neben den bisher dargestellten Methoden gibt es eine Vielzahl rein numerischer Berechnungsverfahren, die die Differentialgleichungen entweder direkt in der Strömungsebene oder nach geeigneter Variablentransformation lösen. Der letztere Fall beinhaltet u.a. die Umformung auf Differentialgleichungen, für die bereits numerische Lösungsverfahren gefunden wurden. In einer der grundlegenden Arbeiten lösen **Murman & Cole** [26] die für das Störpotential aufgestellte Differentialgleichung durch ein finites Differenzenverfahren in der Strömungsebene. Während hier die Autoren noch Potentialtheorie anwenden ( $\vec{v} = \nabla\Phi \leftrightarrow \nabla \times \vec{v} = 0$ ), kann bei Betrachtung der Eulergleichung (weiterer Term  $\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$ ) bzw. Navier-Stokes-Gleichung (weiterer Term  $\mu \nabla \times (\nabla \times \vec{v})$ ) im allgemeinen nur auf Differenzenverfahren zurückgegriffen werden. Besondere Schwierigkeiten ergeben sich bei der Einbeziehung des Verdichtungsstoßes. Dieser erfordert unabhängig von der numerischen Behandlung als Diskontinuität oder Schicht finiter Dicke einen hohen Rechenzeitaufwand. Da die Differenzierbarkeit der Strömungsgrößen gerade in den Stoßgebieten nicht gegeben ist, muß bei Differenzenverfahren das Netz zumindest in der Umgebung des Stoßes erheblich verfeinert werden. Der Aufwand erhöht sich zusätzlich, wenn die Stoßlage nicht stationär bleibt (Iterationsprozesse, instationäre Pro-

bleme, Wechselwirkung zwischen Stoßfläche und Grenzschicht u.s.w.).

Bezüglich der Berechnung der Stoßlage sind in den letzten Jahren eine Vielzahl rein numerischer Methoden veröffentlicht worden, u.a. Relaxationsmethoden **Murman** [27], Finite-Differenzen-Methode **Magnus** [28], Shock-capturing-Methode **Niederdrenk** [29], **Moretti** [30], Shock-fitting-Methode **Salas** [31], Floating-shock-fitting **Daywitt et al** [32]. Der wesentliche Unterschied geht auf die Verwendung jeweils spezieller Algorithmen zurück. Für nähere Einzelheiten muß auf die Originalarbeiten verwiesen werden.

Die Nachteile hoher Rechenzeiten und numerischer Empfindlichkeit müssen prinzipiell in Kauf genommen werden, wenn andere Berechnungsverfahren nicht (mehr) anwendbar sind bzw. spezielle Eigenschaften nicht oder nur ungenügend erfaßt werden. Als Beispiel sei hier nur der Einfluß des für Gasströmung typischen, hohen Temperaturgradienten auf die Grenzschicht beim Durchtritt durch die Stoßfläche genannt. Demgegenüber liegen zur Ausbreitung von Stoßwellen in einem gashaltigen Fluid Messungen von **Campbell & Pitcher** [33] (hier in gashaltigem Glyzerin) vor, die einen so geringen Temperatursprung im Stoß messen ( $\delta T = 0.1 \text{ }^\circ\text{C}$  bei  $p_2/p_1 = 10$ ), daß dieser in guter Näherung vernachlässigt werden kann. **Rath** [34] setzt in seinen Untersuchungen zur Ausbreitung von Druck- und Stoßwellen in Blasen-Flüssigkeitsströmungen  $\tilde{T} = \hat{T}$  als Energieerhaltung an.

Mit der Kenntnis des verschwindenden Temperaturgradienten kann die Entropiezunahme im Stoß abgeschätzt werden. Mit der Beziehung (**Landau & Lifschitz** [11])

$$T \cdot dS = \epsilon_W \cdot dT + p \cdot d(1/\rho) \quad (1.4)$$

folgt in Verbindung mit der durch den Drucksprung höheren Dichte

$$(\hat{S} - \tilde{S})/\epsilon_W < \ln(\hat{T}/\tilde{T}) \quad . \quad (1.5)$$

Die Entropieänderungen sind also ebenfalls verschwindend gering. Beide Größen unterscheiden sich damit grundlegend von den aus der Aerodynamik bekannten Resultaten. Dort sind Temperaturänderungen von mehr als einer Größenordnung bekannt. Gleichzeitig wird es damit praktisch unmöglich, die Entropiezunahme im Stoß **Oswatitsch** [37] als Kriterium zur Anpassung der Stoßlage heranzuziehen. Hiernach setzt der Stoß an der Stelle ein, wo der von der stoßbedingten Entropiezunahme verursachte Widerstand  $W_S$  gleich dem vom Stoß erzeugten Widerstand  $W_p$  am Strömungskörper wird:

$$W_E = T_\infty \rho_\infty \int \int_{F_{st}} (\hat{S} - \tilde{S}) dF_{st} = \int \int_F p \cdot dydz = W_p \quad . \quad (1.6)$$

Die thermodynamische Größe Entropie ( $dS$ , s.o.) ist mit der Strömungsgeschwindigkeit  $\vec{v}$  durch den Wirbelsatz von **Crocco** verknüpft. Für stationäre Strömungen ergibt sich mit der Ruheenthalpie  $i_o$  der Zusammenhang

$$\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla i_o - T \cdot \nabla S \quad (1.7)$$

(folgt aus den Erhaltungssätzen für Impuls und Energie im Fall der stationären, reibungsfreien Strömung ohne Wärmeleitung und Verknüpfung mit der Eulergleichung (Eliminierung des statischen Druckes)). Da der Gradient der Ruheenthalpie in den meisten Fällen vernachlässigt werden kann, wird  $\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$  mit geringem Entropiesprung im Stoß ebenfalls klein. Im Idealfall der isoenergetischen, stationären und isentropen Strömung ist  $\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = 0$  überall erfüllt. Die Drehungsfreiheit hinter dem Stoß gilt auch dann, wenn sich ein gerader (z.B. senkrechter) Verdichtungsstoß bei gleichförmiger Anströmung ausbildet, da die Entropieänderung auf jedem Punkt der Stoßfläche den gleichen Wert annimmt. Demgegenüber ist die Strömung hinter einem gekrümmten Stoß im allgemeinen nicht mehr drehungsfrei. Allerdings ist zu beachten, daß bei der hier behandelten Strömung gashaltigen Wassers zwar in der Zuströmung ein so hohes Gasvolumenverhältnis  $\alpha$  vorgegeben werden muß, daß die Schallgeschwindigkeit deutlich absinkt, für den Absolutwert soll jedoch immer noch  $\alpha \ll 1$  gelten. Damit ist der relative Anstieg der Dichte im Stoß ebenfalls sehr gering. In diesem Zusammenhang liefert der Wirbelsatz von Crocco (s. z.B. [35]) erst im Bereich der Hyperschallströmung rein gasförmiger Fluide signifikante Beiträge der Entropiezunahme; hier werden die Gase im Stoß auch entsprechend stark verdichtet [3].

In der vorgestellten Theorie wird deshalb, wie auch in der Überschallaerodynamik üblich ([3], ausgenommen Grenzschichtrechnungen, chemische Reaktionen (z.B. Dissoziation der Gase) oder Wärmeleitung), Drehungsfreiheit des Strömungsmediums vorausgesetzt und die Strömung potentialtheoretisch beschrieben. Insbesondere wird der Einfluß des Stoßes explizit durch ein Stoßpotential berücksichtigt und entsprechend seinem physikalischen Charakter durch eine Senkenbelegung modelliert. Da das Stoßintegral bereits stromaufwärts des Stoßes, also in einem Gebiet, in dem die Strömung vom dessen stromabwärtigen Eintritt noch nichts "ahnt", einen (positiven) Beitrag zur Geschwindigkeit liefert, muß die Anpassung so erfolgen, daß sich hier die Stauwirkung des Rotationskörpers und die Saugwirkung der Stoßfläche stromaufwärts des Stoßes praktisch aufheben. Diese Forderung ist gerade bei niedrigen Überschallgeschwindigkeiten zwingend zu erfüllen, wenn im Gebiet einer relativ weit stromaufwärts liegenden Stoßfläche die Stauwirkung des Rotationskörpers noch nicht signifikant wird, d.h. Strömungsgeschwindigkeit und Zuströmgeschwindigkeit sich noch ungefähr entsprechen. Eine prinzipiell ähnliche Art der Stoßanpassung wurde erstmals von **Isay & Roestel** bzw. **Isay** [5] vorgeschlagen und hat sich im Fall der Unterschallanströmung von Flügelprofilen in gashaltiger Wasserströmung bewährt.

Die Herleitung der Differentialgleichung des Geschwindigkeitspotentials ist Gegenstand von Kap.4. Mit den zuvor getroffenen Annahmen ergibt sich unter Einbeziehung der Gleichung für die Schallgeschwindigkeit  $a$  eine inhomogene Laplacegleichung. Das Gesamtpotential wird durch Superposition von Teilpotentialen des Rotationskörpers, der Stoßfläche sowie der Lösung der inhomogenen Gleichung zusammengesetzt. Die Diskussion des Charakters der Differentialgleichung, die Bestimmung der Teilpotentiale sowie die grundsätzlichen Eigenschaften des Stoßes und seiner Anpassung schließen das Kapitel ab.

Die Quellen-Senken-Belegungen sind zunächst für beide Potentiale unbekannt. In Kap.5.

wird gezeigt, wie die Verteilung der Senken auf der Stoßfläche analytisch gewonnen werden kann. Sie ergibt sich aus den Stoßgleichungen für gashaltiges Wasser unter Einbeziehung des Blasenerhaltungssatzes. Mit den Feldgrößen Druck  $\hat{p}$ , Gasvolumenverhältnis  $\hat{\alpha}$  und Geschwindigkeit  $\hat{U}$  erhält man weiterhin die Schallgeschwindigkeit  $\hat{a}$  nach dem Stoß. Für die Belegung der Rotationskörperoberfläche wird die Randbedingung der tangentialen Umströmung herangezogen. Das Einsetzen der partiellen Ableitungen führt auf eine Fredholm'sche Integralgleichung zweiter Art. Sie wird durch ein iteratives Verfahren gelöst, das sich u.a. bereits bei Dreger [8] und Nowacki [9] bewährt hat. Die Integralgleichungen beider Autoren sind bezüglich ihres Typs identisch mit der hier vorliegenden.

In Kap.6. wird aus der allgemeinen Form der Bernoulli-Gleichung mit Hilfe der Druck-Dichte-Beziehung (Kap.3.) die Verknüpfung des Geschwindigkeitsfeldes mit der verallgemeinerten Druckfunktion  $\Pi$  hergestellt. Der Druck kann nicht unter den Wert des Gleichgewichtsdampfdruckes abfallen. Mit Kenntnis von Geschwindigkeits- und Druckfeld sowie den daraus berechneten Werten des Gasvolumenverhältnisses und der Schallgeschwindigkeit ergibt sich die Machzahl nach dem Stoß und damit das (lokale) Unterschallgebiet.

Das postulierte ungehemmte Gleichgewicht der Phasen bzw. die Nichtunterschreitung des Dampfdruckes schließt das Auftreten von Kavitationserscheinungen aus. Man macht sich aber leicht klar, daß durch Kombination der gemessenen  $c_{p,min}$ -Werte (Keller [10]) von Rotationshalbkörpern und den hier angenommenen sehr hohen Zuströmgeschwindigkeiten bei rein inkompressibler Rechnung der Druck sehr tief absinkt. Diese Werte stellen natürlich nur eine untere Grenze dar; tatsächlich ist die Zugfestigkeit gashaltigen Wassers stark vermindert. Eine Klärung der Frage, wie weit der Druck unter den Gleichgewichtsdampfdruck absinken kann, steht (nach bestem Wissen) noch aus. Chao [6] hat in seinen Beiträgen zur Berechnung von Kavitationserscheinungen eine Modifikation des Umgebungsdruckes von Blasen angegeben, so daß Anfang und Ende einer beobachteten Kavitationsschicht befriedigend gut mit der numerischen (quasistationären) Lösung der Rayleigh-Plesset-Gleichung übereinstimmen. Damit bietet sich zumindest ein qualitativer Vergleich an (Kap.7.), ob bei blasendynamischer Rechnung mit der Modifikation von Chao die Blasenauflösung in den Unterdruckgebieten an der Vorderkante des Strömungskörpers stabil bleibt oder der zur instabilen Auflösung notwendige Druck unterschritten wird.

Auf einige Einzelheiten der numerischen Lösung wird in Kap.8. näher eingegangen. Insbesondere müssen zwei Parameter, die die geometrische Gestalt der Stoßfläche festlegen, durch Variation bestimmt werden. Kriterium ist die Erfüllung der Stoßbedingung für alle Stromlinien, die durch die Stoßfläche verlaufen. Der nicht unwesentliche Anteil des numerischen Aufwands beruht auf der Lösung der Fredholm'schen Integralgleichung, die für jeden Parametersatz neu iteriert werden muß. Nach Abschluß der Parametervariation ist das Geschwindigkeitsfeld bekannt.

Die vorgestellte Theorie wurde in der Sprache Fortran programmiert und auf einer VAX-

8550 für verschiedene Ausgangsparameter gerechnet.

Kap.9. enthält die Darstellung und Diskussion der numerischen Ergebnisse. Eine Untersuchung mit experimentellen Mitteln der Hydrodynamik kann für Problemstellungen aus dem Bereich der Aerodynamik gerade dann vorteilhaft sein, wenn gleichzeitig die Anwendung bzw. Übertragbarkeit der Ergebnisse gegeben ist. Im Hinblick auf zukünftige Experimente ist deshalb an dieser Stelle insbesondere der Vergleich zur Überschallströmung in Luft zu ziehen.

## 2. Annahmen der Theorie

- 1) Der Potentialströmung liegt ein ungehemmtes thermodynamisches Gleichgewicht zugrunde. Damit entfallen die aus der Blasendynamik bekannten Relaxationsvorgänge. Nach einer Druckänderung im Außenraum einer Blase nimmt diese sofort, d.h. ohne Oszillationen, den neuen Gleichgewichtsradius an.
- 2) Aus der Bedingung des Gleichgewichts folgt weiter (Landau & Lifschitz [11]), daß in der flüssigen und gasförmigen Phase die gleiche Temperatur herrscht. Damit treten insbesondere an der Phasentrennfläche keine Temperaturgrenzsichten auf. Qualitativ führt bei einer blasendynamischen Betrachtung die Berücksichtigung des Temperaturgradienten, z.B. nach einer Druckabsenkung, zu einer Verlangsamung des Aufweitungsvorganges. Dieses Resultat kann durch Annahme 1) mit dem sofortigen Einnehmen des neuen Gleichgewichtsradius ohnehin nicht erzielt werden.
- 3) Systeme im thermodynamischen Gleichgewicht sind durch ein Maximum der Entropie  $S$  bzw. Minimum der inneren Energie  $E$  gekennzeichnet [11]. Wenn infolge einer Störung des Systems ein neuer Gleichgewichtszustand angenommen wird, ist nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik die Zunahme der inneren Energie pro Volumeneinheit  $e$  durch

$$de = \delta q + p \cdot d\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (2.1)$$

mit der Wärmezufuhr  $\delta q$  und der (Kompressions-) Arbeit pro Volumeneinheit  $p \cdot d(1/\rho)$  verknüpft. Nur der letztere Anteil soll berücksichtigt werden. Mit der Vernachlässigung von  $\delta q$  entfällt in Verbindung mit Annahme 2) der Beitrag der Wärmeleitung.

- 4) Wasser ist ein Mehrphasen- und Mehrkomponentenfluid. So setzt sich die gasförmige Phase, z.B. das Innere einer Blase, aus Luft und Wasserdampf zusammen. Umgekehrt enthält die flüssige Phase Wasser auch einen Anteil an gelöster Luft. Im folgenden wird von der allgemein üblichen Vereinfachung Gebrauch gemacht, nur den ungelösten Gasgehalt des Fluids zu berücksichtigen.
- 5) In realen Fluiden wird der ungelöste Gasgehalt sowohl durch die von der Strömung mitgeführten Blasen als auch durch Porenkeime repräsentiert, die sich an der Oberfläche von Schwebeteilchen stabilisieren können. Letztere werden zugunsten von Blasen vernachlässigt.
- 6) Für die Blasen wird eine kugelförmige Gestalt angenommen. Die Geometrie ist damit durch Angabe des Radius festgelegt. Abweichungen von der Kugelsymmetrie, die z.B. durch Wandeinflüsse, asymmetrische Druckfelder oder

Wechselwirkung mit Nachbarblasen hervorgerufen werden (Isay[5,Kap.13]), sollen nicht Gegenstand dieser Arbeit sein.

- 7) Die Zustandsänderungen der Komponenten Luft und Wasserdampf im Innern einer Blase sollen isotherm verlaufen. Im Bereich der Blasendynamik (vgl. [5,Kap.7]) ist diese Voraussetzung lediglich dann weniger gut erfüllt, wenn sich die Blase im fortgeschrittenen Stadium des Zusammenfalls befindet. Zumindest für den Luftanteil der Blase kann dann die Zustandsänderung adiabatisch, d.h. durch die Gleichung  $p_L \cdot v^\kappa = \textit{konstant}$  beschrieben werden mit  $\kappa$  als Quotient von  $c_p$  und  $c_v$ .
- 8) Bestandteile der Blase sind Wasserdampf und Luft. Entsprechend ergibt sich der Gesamtdruck  $p$  im Innern der Blase aus der Summe der Partialdrücke  $p = p_v + p_L$ . Bei isothermer Zustandsänderung ist  $p_v$  als konstant anzusehen. Allen Rechnungen liegt der Wert  $p_v = 0.023 \text{ [bar]}$  zugrunde, der Druck des gesättigten Wasserdampfes bei Raumtemperatur. Für den Luftanteil der Blase wird die ideale Gasgleichung zugrundegelegt.
- 9) Die Phasentrennfläche wird als echte Materiegrenze angesehen; ein Massenfluß infolge Verdampfung bzw. Kondensation findet nicht statt.
- 10) Die flüssige Phase des reinen Wassers wird inkompressibel behandelt, die Materiedichte  $\rho_W$  ist damit konstant. Allen Rechnungen liegt der Wert  $\rho_W = 10^{-6} \text{ [bar} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{cm}^{-2}]$  zugrunde.
- 11) Auf das Fluid sollen keine äußeren Kräfte (z.B. Schwerkraft) wirken.

### 3. Theoretische Grundlagen der Kompressibilität des Fluids

Zunächst wird unter den in Kap.1 und Kap.2 genannten Voraussetzungen die Dichte  $\rho$  des Fluids abgeleitet. Mit den Indices  $W$ -Wasser,  $G$ -Gas,  $L$ -Luft und  $v$ -Dampf (vapor) ergibt sich aus den elementaren Beziehungen

$$M = M_G + M_W, \quad V = V_G + V_W, \quad M_G = M_L + M_v, \quad V_G = V_L + V_v$$

sowie

$$\rho = M/V, \quad \rho_G = M_G/V_G, \quad \rho_W = M_W/V_W, \quad \rho_v = M_v/V_v$$

die Fluiddichte

$$\rho = \rho_W \frac{1 + \mu}{1 + \alpha} \quad (3.1)$$

mit dem Gasvolumenverhältnis  $\alpha$  und dem Massenverhältnis  $\mu$  von Gas zu Wasser :

$$\alpha = \frac{V_G}{V_W} = \frac{V_G}{V - V_G} \quad \text{bzw.} \quad \mu = \frac{M_G}{M_W} . \quad (3.2)$$

Nach Voraussetzung werden die Gasblasen ohne Relativbewegung von der Strömung mitbewegt. Damit ist das Massenverhältnis  $\mu$  im gesamten Fluid eine Konstante. Gl.(3.1) kann leicht in die Anteile

$$\rho = \rho_W \cdot \frac{1}{1 + \alpha} + \rho_G \cdot \frac{\alpha}{1 + \alpha} \approx \rho_W \cdot \frac{1}{1 + \alpha} \quad (3.3)$$

aufgespalten werden. Da ein geringes Gasvolumenverhältnis zugrundegelegt wird ( $\alpha \ll 1$ ), ist mit  $\rho_G \ll \rho_W$  die letzte Näherung der Vernachlässigung des Anteils der Gasdichte in Gl.(3.3) ausgezeichnet erfüllt.

Die Schallgeschwindigkeit  $a$  wird durch die Beziehung

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad (3.4)$$

bestimmt, die Gleichung setzt also die Kenntnis der Abhängigkeit des Druckes von der Dichte bzw. dem Volumen voraus. Im Fall des rein gasförmigen Fluids bzw. einer gasförmigen Phase kann auf hinreichend genaue Zustandsgleichungen der Thermodynamik/statistischen Physik zurückgegriffen werden (ideale Gasgleichung, van-der-Waals Gleichung, Beschreibung realer Gase durch Virialentwicklung u.s.w.), die u.a. bei **Hirschfelder, Curtiss & Bird** [12] übersichtlich dargestellt sind. Im Bereich der flüssigen Phase, die in der vorliegenden Arbeit als inkompressibel angenommen wird, liegen erheblich kompliziertere Verhältnisse vor, die im wesentlichen durch die komplexe Molekülwechselwirkung [11],[12] hervorgerufen werden. In diesem Fall kann auf die **Tait**-Gleichung

zurückgegriffen werden (**Knapp, Daily & Hammit** [13], siehe auch [5]). Sie gibt nach Anpassung zweier empirischer Konstanten die Druck–Dichte–Beziehung bezüglich eines Ausgangszustandes für die meisten Fälle praktischer Anwendungen hinreichend genau wieder, stellt aber vom Charakter her eine Zustandsänderungsgleichung dar.

Die angeführten Schwierigkeiten einer thermodynamisch–molekülphysikalischen Beschreibung der Wechselwirkungskräfte gelten in besonderem Maße für eine Mehrstoff– und Mehrphasenströmung. So existiert bis heute keine Gleichung, die das Wechselwirkungspotential von Molekülen in einem kompressiblen Fluid hinreichend genau beschreibt. Damit kann z.B. die Berechnung der Zustandssumme, der freien Energie  $F$  und schließlich mit Hilfe der bekannten Maxwell–Relation  $p = \partial F / \partial V$  die Berechnung des Druckes nicht durchgeführt werden. Es muß vielmehr auf Methoden der Blasendynamik zurückgegriffen werden, um die gesuchte Druck–Dichte–Beziehung herzustellen.

Hierzu werden zunächst die Verhältnisse einer Einzelblase betrachtet. Sie befindet sich im Gleichgewichtszustand, wenn innerer wie äußerer Gesamtdruck (einschließlich dem Anteil der Oberflächenspannung) den gleichen Wert annehmen (Gleichgewichtsbedingung an der Blasenwand) :

$$p_L + p_v = p + \frac{2\sigma}{R} \quad . \quad (3.5)$$

Dabei stellen  $p_v$  und  $p_L$  die Partialdrücke von Dampf und Luft in einer Blase des Radius  $R$  dar.  $\sigma$  ist der Koeffizient der Oberflächenspannung. Allen Rechnungen liegt der Wert  $\sigma = 7.2 \cdot 10^{-5} [\text{bar} \cdot \text{cm}]$  zugrunde. Gl.(3.5) kann auf  $p_L$  umgeformt und  $p_L$  auf einen Anfangswert  $p_{L0}$  bezogen werden :

$$\frac{p_o - p_v + \frac{2\sigma}{R_o}}{p - p_v + \frac{2\sigma}{R}} = \frac{p_{L0}}{p_L} \quad . \quad (3.6)$$

Nach Voraussetzung wird  $p_v$  als konstant angesehen und für den Luftanteil der Blase die ideale Gasgleichung zugrundegelegt. Dann ist das Produkt von Volumen und Luftdruck eine reine Funktion der Temperatur, bei den betrachteten isothermen Zustandsänderungen also konstant. Man erhält

$$\frac{p_{L0}}{p_L} = \left( \frac{R}{R_o} \right)^3 \quad . \quad (3.7)$$

Für den endgültigen funktionalen Zusammenhang wird abschließend eine Beziehung zwischen Radius  $R$  und Gasvolumenverhältnis  $\alpha$  benötigt . Zunächst liegen in realen Fluiden Blasen verschiedener Größe vor. Mit der Konzentration  $\zeta_i$  als Anzahl der Blasen mit dem Radius  $R_i$  pro Volumeneinheit gilt unter der Annahme von Kugelsymmetrie

$$\frac{V_G}{V} = \frac{\alpha}{1 + \alpha} = \frac{4\pi}{3} \sum_i \zeta_i R_i \quad . \quad (3.8)$$

Natürlich kann ein kontinuierliches Spektrum von Blasenradien nicht im einzelnen betrachtet werden. Man beschränkt sich deshalb entweder auf eine Unterteilung in geeignete

Größenklassen mit jeweils  $\zeta_i$  Blasen eines mittleren Radius  $R_i$  oder führt, wenn die explizite Zusammensetzung des Gasgehaltes wie hier nicht im Vordergrund steht, die Rechnung am Beispiel einer einzigen Radienklasse  $R$  durch. Dann ist das (absolute) Gasvolumenverhältnis  $\alpha/(1 + \alpha)$  durch

$$\frac{\alpha}{1 + \alpha} = \frac{4\pi}{3} \zeta R^3 \quad (3.9)$$

gegeben. Die Beschränkung auf einen Blasenradius stellt eine starke Vereinfachung dar. Man kann davon ausgehen, daß in einem Kavitationstunnel weder eine einheitliche Blasengröße erzeugt noch diese homogen verteilt werden kann. Dennoch lassen sich mit der Anwendung des Einblasenmodells nicht nur Ergebnisse prinzipieller Art erzielen, vielmehr kann es in vielen Fällen für durchaus komplexe Probleme der Strömungsmechanik als Modell herangezogen werden (siehe hierzu die entsprechenden Kapitel in [5], sowie [4],[6],[7] und [14]).

Es ist weiterhin die Frage der Blasenerhaltung zu behandeln. Mit der getroffenen Voraussetzung einer Strömung im ungehemmten thermodynamischen Gleichgewicht kann der lokale Druck nicht unter den zu der vorherrschenden Temperatur gehörenden Gleichgewichtsdampfdruck ( $p_v = 0.023[\text{bar}]$ ) absinken. Damit wird der für eine instabile Aufweitung notwendige kritische Druck weder erreicht noch unterschritten, so daß sich infolge des Ausbleibens von Zusammenwachs Vorgängen die Blasenanzahl nicht erhöhen kann (die Gleichungen einer Einzelblase verlieren dann ohnehin ihre Gültigkeit). Eine Erzeugung von Blasen kann ausgeschlossen werden. Damit bietet sich die Formulierung eines Blasenerhaltungssatzes an. Mit

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \zeta dV = 0 \quad (3.10)$$

folgt unter der Annahme gleicher Geschwindigkeit von Blasen und Flüssigkeit

$$\zeta \cdot (1 + \alpha) = \zeta_o \cdot (1 + \alpha_o) \quad (3.11)$$

(der Index "o" kennzeichnet einen Bezugszustand). Wegen  $\alpha \ll 1$  kann in Gl.(3.11) in sehr guter Näherung  $(1 + \alpha)/(1 + \alpha_o) \approx 1$  gesetzt und Anzahl der Blasen pro Volumeneinheit als Konstante betrachtet werden. Dann ist durch die Beziehung

$$\frac{\alpha}{\alpha_o} = \left( \frac{R}{R_o} \right)^3 \quad (3.12)$$

sowie Gl.(3.3) die gesuchte Druck-Dichte-Beziehung hergestellt. Die elementaren Ableitungen ergeben

$$\frac{dp}{d\alpha} = - \left( \frac{p - p_v + \frac{4\sigma}{3R}}{\alpha} \right), \quad \frac{d\alpha}{d\rho} = - \left( \frac{(1 + \alpha)^2}{\rho w} \right)$$

und damit

$$a_{isotherm} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\frac{dp}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{d\rho}} = (1 + \alpha) \cdot \sqrt{\frac{p - p_v + \frac{4\sigma}{3R}}{\alpha \cdot \rho_W}} \quad (3.13)$$

Prinzipiell kann wie häufig in der Blasendynamik für den Luftanteil eine adiabate Zustandsänderung angenommen werden. Die Formeln (3.12) und (3.13) modifizieren sich dann in bekannter Weise [5,Kap.15],[15]:

$$\frac{\alpha}{\alpha_o} = \left(\frac{R}{R_o}\right)^{3\kappa} \quad \text{bzw.} \quad a_{adiabat} = (1 + \alpha) \cdot \left(\frac{\rho_W \alpha}{\kappa(p - p_v) + \frac{2\sigma}{R}(\kappa - \frac{1}{3})} + \frac{1}{a_W^2}\right)^{-1/2} \quad (3.14)$$

mit  $\kappa = 1.4$  für Luft und  $a_W$  als dem Wert der Schallgeschwindigkeit in reinem Wasser. Gl.(3.14) erlaubt im Gegensatz zu Gl.(3.13) den Grenzübergang  $\alpha \mapsto 0$ . Sie liefert den Wert  $a = a_W$ , während Gl.(3.13) nicht endlich bleibt. Dieses Ergebnis ist für die vorliegende Arbeit praktisch bedeutungslos, da die Untersuchung der Überschallströmung stark kompressibles Wasser voraussetzt.

Der unterschiedliche Einfluß von isothermer bzw. adiabater Zustandsgleichung auf die Schallgeschwindigkeit ergibt sich ( $a \ll a_W$ ) aus Gl.(3.13),(3.14) zu dem vom Gasvolumenverhältnis  $\alpha$  unabhängigen Wert

$$\frac{a_{isotherm}}{a_{adiabat}} \approx \sqrt{\frac{p - p_v + \frac{4\sigma}{3R}}{\kappa(p - p_v) + \frac{2\sigma}{R}(\kappa - \frac{1}{3})}} \quad (3.15)$$

Zahlenbeispiel:  $R = 5 \cdot 10^{-3}[cm]$ ,  $p - p_v = 0.1[bar]$  (bzw.  $0.3[bar]$ ),  $\sigma = 7.2 \cdot 10^{-5}[bar \cdot cm]$  liefert nach Gl.(3.15)  $a(isotherm)/a(adiabat) = 0.838$  bzw.  $0.842$ . An den Grundlagen der hier vorgestellten Theorie ändert sich dadurch gar nichts.

Für jeden Aufpunkt kann die Schallgeschwindigkeit  $a$  bei bekanntem  $\alpha$  und  $p$  nach Gl.(3.13) berechnet werden. Insbesondere ergibt sich nach Wahl der Ausgangsparameter  $p_o, \alpha_o(R_o)$  sowie  $R_o$  der Wert  $a_o$  in der Zuströmung. Zur Verdeutlichung dieses Zusammenhangs ist in Abb.1 die Schallgeschwindigkeit  $a_o$  gegen den Zuströmdruck  $p_o$  aufgetragen. Dabei ist zu beachten, daß das gleiche Gasvolumenverhältnis  $\alpha_o$  in Abhängigkeit des vorgegebenen Radius  $R_o$  durch eine verschieden hohe Konzentration  $\zeta_o$  von Gasblasen realisiert werden kann. Jeweils drei zusammenhängende Kurven beziehen sich auf das gleiche Gasvolumenverhältnis  $\alpha_o$ . Im einzelnen dargestellt sind die Radien  $R_o = 1 \cdot 10^{-3}[cm]$ ,  $R_o = 5 \cdot 10^{-3}[cm]$ , sowie  $R_o \mapsto \infty$ .  $R \mapsto \infty$  entspricht dem Fall eines identisch verschwindenden Oberflächenspannungsterms.

Die Wahl des Radius ist zunächst willkürlich. Messungen von Keimverteilungen im Meerwasser bzw. im Kavitationstunnel der Hamburger Schiffsbau-Versuchsanstalt (Keller & Weitendorf [14], siehe auch die Darstellungen und Verweise bei Isay [5]) zeigen übereinstimmend ein Maximum der Partikelkonzentration im Radienbereich von

$R = 10^{-3} \dots 10^{-4} [cm]$ . Zu größeren Radien nimmt die Konzentration der Blasen stark ab. Dies gilt quantitativ ebenfalls für den Bereich kleinerer Blasenradien, jedoch sind hier im unteren Meßbereich auch die experimentellen und apparativen Möglichkeiten erheblich begrenzt. Es ist weiterhin zu berücksichtigen, daß der absolute Gasgehalt im Wasser bei den zitierten Messungen noch so gering ist, daß keine signifikante Absenkung der Schallgeschwindigkeit  $a$  gegenüber  $a_W$  auftritt. Dies muß jedoch für Experimente im Kavitationstunnel in hohem Maße gefordert werden (mindestens 1% Gasanteil, s. Abb. 1).

Zahlenbeispiel :  $R = 10^{-4} [cm]$  (Messung),  $\alpha = 10^{-7}$  (relativ "sauberes" Wasser) ergibt eine Konzentration von  $\zeta = 2.4 \cdot 10^4 [cm^{-3}]$ . Man kann davon ausgehen, daß sich die zur Überschallanströmung gegenüber reinem Wasser notwendige Erhöhung des Gasvolumenverhältnisses (z.B. nach Absenken des Druckes im Kavitationstunnel) sowohl durch eine Verschiebung des Keimspektrums zu höheren Blasenradien als auch (real) durch Ansteigen der Blasendichte auswirkt. Im obigen Beispiel wird das Gasvolumenverhältnis für  $R = 5 \cdot 10^{-3} [cm]$  bei gleicher Konzentration auf  $\alpha = 0.013$  erhöht; dies entspricht bei  $p - p_v = 0.1 [bar]$  einer Schallgeschwindigkeit von  $a = 31 [m \cdot s^{-1}]$ . Dieser Wert sinkt weiter ab, wenn zusätzlich eine höhere Konzentration angenommen wird.

Die Vorgabe der Ausgangsparameter muß weiter berücksichtigen, daß nach Festlegung mittlerer Machzahlen in der Zuströmung die Geschwindigkeit  $U_o > a$  nicht unrealistisch hohe Werte annimmt. Andererseits soll das Gasvolumenverhältnis  $\alpha_0$  die obere Grenze von  $\alpha_0 \approx 0.1$  nicht überschreiten, da diesem Wert der Beginn der optisch wahrnehmbaren Kavitation zugeordnet wird. Alle durchgeführten Rechnungen beziehen sich schließlich auf ein Gasvolumenverhältnis von  $\alpha = 0.05$  bei einem mittleren Radius der Blasen von  $R = 5 \cdot 10^{-3} [cm]$ . Diesen Werten entspricht eine Blasendichte von  $\zeta = 9.5 \cdot 10^4 [Blasen/cm^3]$ . Wählt man z.B.  $p = 0.1$ , ergibt sich (Abb.1) eine Schallgeschwindigkeit von  $a = 15 [m/s]$ , also etwa 1/100 des Wertes in reinem Wasser.  $M = 2$  ist dann gleichbedeutend mit einer Stömungsgeschwindigkeit von  $U_o = 30 [m/s]$ ; ein Wert, der durchaus in Hochgeschwindigkeitstunneln erreicht wird.

Mit der Festlegung des Radius  $R_o = 5 \cdot 10^{-3} [cm]$  nimmt der Oberflächenspannungsterm in Gl.(3.14) mit  $4\sigma/3R_o = 0.018 [bar] < p_v$  einen sehr geringen Wert an. Entsprechend weichen in Abb.1 die jeweiligen Kurven  $R_o = 5 \cdot 10^{-3} [cm]$  gegenüber  $R_o \mapsto \infty$  nur wenig voneinander ab. Für nicht zu niedrige Werte  $p - p_v$  kann der Oberflächenspannungsterm mit hinreichender Genauigkeit vernachlässigt werden.

## 4. Die kompressible Potentialströmung

Zunächst werden die Erhaltungssätze angegeben, die nach elementaren Umformungen zu einer inhomogenen Laplace-Gleichung für das Geschwindigkeitspotential führen. Die Kompressibilität geht durch das Gasvolumenverhältnis  $\alpha > 0$ , d.h.  $\rho < \rho_W$ , in das Gleichungssystem ein. Durch die Vernachlässigung aller Zähigkeitseinflüsse wirkt zwischen den Teilchen des Fluids bzw. zwischen Fluid und dem Rand des Rotationskörpers nur die allseitig gleiche Normalspannung, nämlich der Druck. Stoß, Rotationskörper und Kompressibilität werden durch entsprechende Teilpotentiale berücksichtigt. Ihre explizite Darstellung schließt das Kapitel ab.

### 4.1 Der potentialtheoretische Ansatz

Grundlegende Annahme zur Beschreibung des Fluids ist die der Massenerhaltung. Innerhalb eines Volumens  $V$  des Fluids verschwindet die totale zeitliche Änderung der Masse. Es wird keine Masse innerhalb von  $V$  erzeugt, d.h. das Fluid enthält keine Quellen:

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho dV = 0 \quad . \quad (4.1)$$

Nach Ausführung der Differentiation und Anwendung des Integralsatzes von Gauß ergibt sich die bekannte Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad . \quad (4.2)$$

Die Bewegungsgleichung wird aus der Tatsache gewonnen, daß eine totale zeitliche Änderung des Impulses eines Volumengebietes nur durch Einwirkung von Kräften auf seine Oberfläche möglich ist:

$$\frac{d}{dt} \int_{(v)} \rho \vec{v} dV = - \int_{(F)} \vec{K} dF \quad . \quad (4.3)$$

Ähnlich wie Gl.(4.2) erhält man den Impulssatz:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p - \mu \nabla \times (\nabla \times \vec{v}) + \frac{4}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) \quad . \quad (4.4)$$

Beide Erhaltungssätze vereinfachen sich durch die zuvor dargestellten Annahmen der Theorie. Insbesondere folgt aus dem ungehemmten thermodynamischen Gleichgewicht, daß eine

Blase nach Druckänderung sofort, d.h. ohne zu oszillieren, den neuen Gleichgewichtsradius annimmt. Das Strömungsfeld ist wie auch bei [1],[2],[4],[7]..[9], [17],[18],[20],[22]..[26] stationär (und drehungsfrei). Es entfallen die Terme

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \nabla \times \vec{v} = \vec{0}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad ,$$

und die substantielle Ableitung reduziert sich auf

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) = (\vec{v} \cdot \nabla) \quad . \quad (4.5)$$

Die Kontinuitätsgleichung nimmt die einfache Form

$$\nabla(\rho \cdot \vec{v}) = 0 \quad (4.6)$$

an. Nach Einsetzen der Schallgeschwindigkeit (Gl.(3.4)) gilt weiter:

$$\nabla \vec{v} = -\frac{\vec{v}}{\rho} \cdot \nabla \rho = -\frac{\vec{v}}{\rho} \cdot \frac{\nabla p}{a^2} \quad . \quad (4.7)$$

Da die Viskosität des Mediums nicht berücksichtigt wird (Zähigkeitsbeiwert  $\nu = 0$ ), vereinfacht sich der Impulssatz zu

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p \quad . \quad (4.8)$$

Mit Gl.(4.5) folgt weiter

$$\rho \cdot \vec{v} \cdot (\nabla \vec{v}) = -\nabla p \quad . \quad (4.9)$$

Die Annahme der Drehungsfreiheit ( $\nabla \times \vec{v} = 0$ ) wurde bereits zuvor hinreichend begründet. Setzt man die Geschwindigkeit als Gradient eines skalaren Geschwindigkeitspotentials  $\Phi$  an

$$\vec{v} = \nabla \Phi \quad , \quad (4.10)$$

so lautet Gl.(4.9) nach Einsetzen von Gl.(4.10):

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \nabla p &= \vec{v} \cdot (\nabla \vec{v}) = \frac{1}{2} \nabla (\vec{v})^2 \\ &= \frac{1}{2} \nabla (\nabla \Phi)^2 \quad . \end{aligned} \quad (4.11)$$

Der Druckterm wird mit Hilfe von Gl.(4.7) eliminiert. Zunächst ergibt sich nach Einsetzen von Gl.(4.10) in Gl.(4.7)

$$\begin{aligned} \nabla \vec{v} &\equiv \Delta \Phi \\ &= \frac{1}{a^2} \nabla \Phi \cdot \left( -\frac{1}{\rho} \nabla p \right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Die gesuchte Differentialgleichung für das Geschwindigkeitspotential erhält man nach Kombination von Gl.(4.11) mit Gl.(4.12):

$$\Delta\Phi = \frac{1}{a^2} \nabla\Phi \cdot \frac{1}{2} \nabla(\nabla\Phi)^2 \quad . \quad (4.13)$$

Nach Ersetzen der Schallgeschwindigkeit  $a$  gem. Gl.(3.13) ergibt sich insbesondere

$$\Delta\Phi = -\frac{\alpha \cdot \nabla\Phi \cdot \nabla p}{(1 + \alpha) \left( p - p_v + \frac{4\sigma}{3R} \right)} \quad . \quad (4.14)$$

Dieser Ausdruck läßt sich noch weiter vereinfachen. In Strömungsbereichen, in denen die Blasen hinreichend groß sind, so daß der Einfluß der Oberflächenspannung vernachlässigt werden darf ( $2\sigma/R \mapsto 0$  bzw.  $4\sigma/3R \mapsto 0$ ), reduziert sich die Gleichgewichtsbedingung an der Blasenwand (Gl.(3.5)) auf

$$p = p_v + p_L \quad \text{d.h.} \quad \nabla p = (p - p_v) \cdot \frac{\nabla\alpha}{\alpha} \quad . \quad (4.15)$$

Nach Einsetzen von Gl.(4.15) in Gl.(4.14) heben sich die meisten Terme weg. Es bleibt

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \frac{\nabla\Phi \cdot \nabla\alpha}{1 + \alpha} \\ &= \nabla\Phi \cdot \nabla[\ln(1 + \alpha)] \quad . \end{aligned} \quad (4.16)$$

Allen durchgeführten Berechnungen liegt zunächst diese Gleichung zugrunde. Die Rechtfertigung zur Benutzung der vereinfachten Gleichung (4.16) ergibt sich durch Vergleich mit der exakten Gl.(4.14) am Aufpunkt.  $\nabla\Phi$  bezeichnet die (Gesamt-)Geschwindigkeit und darf nicht mit dem in der Literatur ebenfalls üblichen Geschwindigkeitspotential  $\Phi$  verwechselt werden, dessen Gradient die Abweichung von der Geschwindigkeit  $U_o$  in der Zuströmung angibt. Auf diesen Unterschied, insbesondere in Bezug auf einen Vergleich mit der aus der Gasströmung bekannten gasdynamischen Grundgleichung wird weiter unten eingegangen. Eine Lösung der inhomogenen Laplace-Gleichung (4.16) kann durch Superposition von Teilpotentialen erhalten werden. Für das durch Gl.(4.7) eingeführte Gesamtpotential  $\Phi$  sind die Inhomogenität der Laplace-Gleichung sowie Stoßfläche und Rotationskörper zu berücksichtigen:

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_i && \text{[Lösung der inhomogenen Gleichung]} \\ &+ \Phi_{st} && \text{[Teilpotential der Stoßfläche]} \\ &+ \Phi_k && \text{[Teilpotential des Rotationskörpers]} \quad . \end{aligned} \quad (4.17)$$

Die Teilpotentiale  $\Phi_{st}$  und  $\Phi_k$  genügen der homogenen Laplace-Gleichung, d.h.

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_{st} &= 0 && \text{[außerhalb der Stoßfläche]} \\ \Delta\Phi_k &= 0 && \text{[außerhalb des Rotationskörpers]} \quad . \end{aligned} \quad (4.18)$$

Die Berücksichtigung der Kompressibilität, die zu einer inhomogenen Laplace-Gleichung geführt hat, ist letztendlich für die Einführung von  $\Phi_i$  verantwortlich.

Zur Untersuchung der inhomogenen Laplace-Gleichung

$$\Delta\Phi = \frac{1}{a^2} \cdot \nabla\Phi \cdot \frac{1}{2} \nabla(\nabla\Phi)^2 \quad (4.13)$$

werden die Ausdrücke

$$a^2 \cdot \Delta\Phi = a^2 \cdot \left( \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} \right) \quad (4.19)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \nabla(\nabla\Phi)^2 &= \left( \frac{\partial\Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial\Phi}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial r} \right) \cdot \vec{e}_x + \\ &+ \left( \frac{\partial\Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} \right) \cdot \vec{e}_r \end{aligned} \quad (4.20)$$

gebildet.  $\frac{1}{2} \nabla(\nabla\Phi)^2$  ist skalar mit  $\nabla\Phi$  zu multiplizieren. Man erhält

$$\begin{aligned} \nabla\Phi \cdot \frac{1}{2} \nabla(\nabla\Phi)^2 &= \left( \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right)^2 \cdot \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + 2 \cdot \left( \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial r} + \\ &+ \left( \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right)^2 \cdot \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} \quad . \end{aligned} \quad (4.21)$$

Nach Einsetzen von Gl.(4.19),(4.21) in Gl.(4.13) ergibt sich schließlich

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial^2 x} \left( a^2 - \left( \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right)^2 \right) - 2 \frac{\partial\Phi}{\partial x} \frac{\partial\Phi}{\partial r} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial r} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial^2 r} \left( a^2 - \left( \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right)^2 \right) = - \frac{a^2}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial r} \quad . \quad (4.22)$$

Gl.(4.22) ist bereits in der allgemeinen Form

$$\begin{aligned} A \left( x, r, \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + 2B \left( x, r, \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial r} + C \left( x, r, \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} \dots \\ \dots = D \left( x, r, \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (4.23)$$

dargestellt. Die Diskriminante  $AC - B^2$  der zweiten Ableitungen hat die Gestalt

$$\left( a^2 - \left( \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right)^2 \right) \cdot \left( a^2 - \left( \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right)^2 \right) - \left( \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right)^2 \cdot \left( \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right)^2$$

bzw.

$$a^2 \cdot \left( a^2 - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 \right)$$

bzw.

$$a^2 \cdot (a^2 - \bar{v}^2) \quad . \quad (2.24)$$

Die Differentialgleichung (4.23) heißt elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch, wenn die Diskriminante  $AC - B^2$  positiv, null oder negativ wird. Diese Eigenschaft liegt bei linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten  $A, B, C$  grundsätzlich fest, ist jedoch im vorliegenden Fall nicht im ganzen Raum einheitlich gegeben. Im allgemeinen hängt der Charakter nichtlinearer Differentialgleichungen (hier: quasilinear, da die höchsten vorkommenden Ableitungen nur linear auftreten) sowohl vom Aufpunkt, als auch von der (noch unbekannt) Lösung  $\Phi$  ab.

Nach Durchtritt durch die Stoßfläche liegt ein lokales Unterschallgebiet mit  $\bar{v}^2 < a^2$  vor. Die Diskriminante ist in diesem Gebiet positiv, entsprechend einer elliptischen Differentialgleichung (4.13).

Im gesamten übrigen Strömungsfeld herrscht Überschallzustand ( $\bar{v}^2 > a^2$ ) mit entsprechend negativer Diskriminante nach Gl.(4.24).

Wird statt des Potentials  $\Phi$  mit Hilfe von

$$\begin{aligned} \vec{U} = \nabla \Phi &= U_0 \cdot \vec{e}_x + \nabla \Phi_* \\ &= \left( U_0 + \frac{\partial \Phi_*}{\partial x} \right) \cdot \vec{e}_x + \frac{\partial \Phi_*}{\partial r} \cdot \vec{e}_r \end{aligned} \quad (4.25)$$

das Potential  $\Phi_*$  eingeführt ( $\Phi_*$  gibt die Abweichung von der Zuströmgeschwindigkeit  $U_0$  an), erhält man mit

$$\begin{aligned} \nabla \Phi \cdot \frac{1}{2} \nabla (\nabla \Phi)^2 &= \left( U_0 + \frac{\partial \Phi_*}{\partial x} \right)^2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \left( U_0 + \frac{\partial \Phi_*}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial \Phi_*}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_*}{\partial x \partial r} + \\ &+ \left( U_0 + \frac{\partial \Phi_*}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial^2 \Phi_*}{\partial r \partial x} \cdot \frac{\partial \Phi_*}{\partial r} + \left( \frac{\partial \Phi_*}{\partial r} \right)^2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \end{aligned} \quad (4.26)$$

nach Einsetzen in Gl.(4.13) die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi_*}{\partial^2 x} \left( 1 - \frac{(U_0 + \frac{\partial \Phi_*}{\partial x})^2}{a^2} \right) - 2 \left( \frac{U_0 + \frac{\partial \Phi_*}{\partial x}}{a^2} \right) \frac{\partial \Phi_*}{\partial r} \frac{\partial^2 \Phi_*}{\partial x \partial r} + \frac{\partial^2 \Phi_*}{\partial^2 r} \left( 1 - \frac{(\frac{\partial \Phi_*}{\partial r})^2}{a^2} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_*}{\partial r} \quad (4.27)$$

mit der Diskriminante

$$\left( 1 - \frac{(U_0 + \frac{\partial \Phi_*}{\partial x})^2}{a^2} \right) \cdot \left( 1 - \frac{(\frac{\partial \Phi_*}{\partial r})^2}{a^2} \right) - \left( \frac{U_0 + \frac{\partial \Phi_*}{\partial x}}{a^2} \right)^2 \cdot \left( \frac{\partial \Phi_*}{\partial r} \right)^2 \quad . \quad (4.28)$$

Auch dieser Ausdruck ermöglicht wie oben die Zuordnung einer hyperbolischen bzw. elliptischen Differentialgleichung entsprechend dem Überschall-/Unterschallzustand des Strömungsfeldes.

## 4.2 Das Potential des Rotationskörpers

Abb.(2) zeigt die Geometrie des Rotationskörpers, dargestellt in der  $(x, r)$ -Ebene. Der Beginn des Rotationskörpers wird in den Ursprung des Koordinatensystems gelegt. Aufgrund der Rotationssymmetrie um die  $x$ -Achse bietet sich die Verwendung von Zylinderkoordinaten an. Die Richtung der Zuströmung fällt mit der  $x$ -Achse zusammen, um die der Rotationskörper angeordnet ist. Er setzt sich aus einem zylinderförmigen Mittelteil des Durchmessers  $D$  und zwei an beiden Enden angesetzten Halbkugeln des Radius  $R = D/2$  zusammen. Die Gesamtlänge des Rotationskörpers wird mit  $L$  bezeichnet, alle durchgeführten Berechnungen beziehen sich auf ein Dickenverhältnis von  $D/L = 0.1$ . Zunächst ist die Oberfläche des Körpers zu beschreiben. Sie hat die Darstellung

$$\begin{aligned}\vec{r}_k &= x \cdot \vec{e}_x + R_k(x) \cos\theta \cdot \vec{e}_y + R_k(x) \sin\theta \cdot \vec{e}_z \\ &= x \cdot \vec{e}_x + R_k(x) \cdot \vec{e}_r \quad ,\end{aligned}\tag{4.29}$$

mit  $0 \leq x \leq L$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Der Rotationskörper wird mit einer Quellen-Senken-Verteilung  $q_k(x)$  auf der Oberfläche belegt. Das Verfahren zur Bildung des Potentials  $\Phi_k$  ist aus dem Gebiet der Aerodynamik des Flugzeugrumpfes wohlbekannt (s. **Schlichting & Truckenbrodt** [36], auch **Schlichting** [35]). Man erhält den Ausdruck

$$\Phi_k = -\frac{1}{4\pi} \int_{\xi=0}^L \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{q_k(\xi) \cdot \sqrt{1 + R_k'^2(\xi)} \cdot R_k(\xi) d\xi d\theta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + r^2 + R_k^2(\xi) - 2r R_k(\xi) \cos\theta}}\tag{4.30}$$

mit den typischen, dem Ort der Belegung entsprechenden Koordinatendifferenzen unter der Wurzel im Nenner und der Quellen-Senken-Stärke  $q_k(\xi)$  im Zähler. Die Quellen-Senken-Belegung ist zunächst noch unbekannt; sie ergibt sich aus der Randbedingung der tangentialen Umströmung, die in Kap.5.2. näher ausgeführt wird. Hierbei ist die Kenntnis der induzierten Geschwindigkeiten in  $x$ - bzw.  $r$ -Richtung an der Oberfläche des Rotationskörpers notwendig. Dazu ist zunächst Gl.(4.29) entsprechend partiell zu differenzieren und das Ergebnis an der Oberfläche bei  $r = R_k(\xi)$  zu nehmen. Man erhält mit  $R_k' = dR_k/dx$  (siehe auch **Dreger** [8], **Nowacki** [9]):

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial x} = -\frac{q_k(x)}{2} \frac{R_k'(x)}{\sqrt{1 + R_k'^2(x)}} + \dots$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_{\xi=0}^L \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{q_k(\xi)(x-\xi) \cdot \sqrt{1+R_k'^2(\xi)R_k(\xi)} d\xi d\theta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + R_k^2(x) + R_k^2(\xi) - 2R_k(x)R_k(\xi)\cos\theta}^3} \quad (4.31)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi_k}{\partial r} = & + \frac{q_k(x)}{2} \frac{1}{\sqrt{1+R_k'^2(x)}} + \dots \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{\xi=0}^L \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{q_k(\xi)(R_k(x) - R_k(\xi)\cos\theta) \cdot \sqrt{1+R_k'^2(\xi)R_k(\xi)} d\xi d\theta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + R_k^2(x) + R_k^2(\xi) - 2R_k(x)R_k(\xi)\cos\theta}^3} . \end{aligned} \quad (4.32)$$

Von dem üblichen Unstetigkeitsterm  $\pm\frac{1}{2}q_k(x)$  der Normalenkomponente einer Quellen-Senken-Verteilung ist der entsprechende Anteil in  $x$ -bzw.  $r$ -Richtung zu berücksichtigen. Man macht sich anhand der Geometrie des Rotationskörpers leicht klar, daß dieses durch die Faktoren an den Termen  $\pm\frac{1}{2}q_k(x)$  in Gl.(4.31),(4.32) geschieht.

Das Integral des Rotationskörperpotentials wird für jeden Aufpunkt der Körperoberfläche singular. Die Behandlung der Singularität wird für die in Gl.(4.31),(4.32) auszuwertenden Integrale im Anhang B dargestellt.

Das Potential  $\Phi_k$  nach Gl.(4.30) genügt der homogenen Laplace-Gleichung  $\Delta\Phi_k = 0$ .

## 4.3 Das Potential der Stoßfläche

Stoßflächen können durch verschiedene experimentelle Methoden sichtbar gemacht werden. In Abb.(3) sind zwei Interferenzaufnahmen ([3]) dargestellt, die einen anliegenden bzw. abgelösten Verdichtungsstoß zeigen. Der Unterschied geht neben der Machzahl  $M$  im wesentlichen auf die Geometrie der Körper zurück. Während sich bei dem zugespitzten Körper eine entsprechend gradlinige Stoßfläche ausbildet, liegt bei dem vorne abgerundeten Körper eine gekrümmte Stoßfläche vor; in jedem Fall paßt sich die Geometrie der Stoßfläche der Geometrie des umströmten Körpers an. Die potentialtheoretische Behandlung des Stoßes mit gekrümmter Stoßfläche erfordert zunächst einige Überlegungen:

1. Die Verweilzeit der jeweiligen Teilvolumen im Stoßbereich muß vernachlässigbar klein sein gegenüber einer für den instationären Fall charakteristischen Zeitperiode. Explizite Rechnungen werden in Kap.8.(Ergebnisse) nach Festlegung der Ausgangsparameter durchgeführt. Sie zeigen, daß die o.a. grundsätzliche Annahme gerechtfertigt ist. Damit kann die Stoßfläche als infinitesimal dünne Diskontinuitätsfläche betrachtet werden.
2. Bekanntlich weist das Fluid nach dem Stoß eine höhere Dichte  $\hat{\rho}$  auf, d.h. das Gasvolumenverhältnis  $\hat{\alpha}$  nimmt ab. In Verbindung mit den Stoßgleichungen (s. Kap.5.1) wird auch die Normalenkomponente  $U_n$  der Geschwindigkeit reduziert (die Tangentialkomponente  $U_t$  bleibt stetig). Diese Eigenschaft kann durch eine Belegung der Stoßfläche mit Senken der Stärke  $q_{st} < 0$  realisiert werden (der Normaleneinheitsvektor  $\vec{e}_n$  auf der Stoßfläche weist in stromaufwärtige Richtung, also vom Rotationskörper weg). Gleichzeitig liefert die Belegung der Stoßfläche damit stromaufwärts des Stoßes einen positiven Beitrag zur Geschwindigkeit. Dieser Umstand muß bei der Stoßanpassung berücksichtigt werden.
3. Ohne Kenntnis näherer Einzelheiten des Stoßes kann man davon ausgehen, daß bei einem mit Überschall angeströmten Halbkugelrotationskörper stets ein abgelöster Verdichtungsstoß vorliegt, so daß in der unmittelbaren Umgebung des Staupunktes Unterschallzustand herrscht. Damit vollzieht sich stromaufwärts des Rotationskörpers auf der  $x$ -Achse ein Übergang von Überschall- zu Unterschallgeschwindigkeit (starker Stoß). Es ist weiterhin bekannt, daß dieses Unterschallgebiet lokal begrenzt ist. Insbesondere nimmt die Unterschallgeschwindigkeit nach Durchtritt durch die Stoßfläche senkrecht zur Zuströmrichtung wieder zu. Damit gibt es entlang der Stoßfläche einen Punkt, wo die Unterschallgeschwindigkeit (stetig) auf den Wert der Schallgeschwindigkeit anwächst. Im weiteren Verlauf in  $\vec{r}$ -Richtung bleibt der Zustand der Überschallgeschwindigkeit auch nach Durchtritt durch die Stoßfläche erhalten, und die Strömung wird durch den Stoß praktisch nicht mehr beeinflusst (schwacher Stoß).
4. Im Hinblick auf Experimente im Kavitationstunnel ist besonders die Ausdehnung des lokalen Unterschallgebietes von Interesse. Es wird stromaufwärts durch die

Stoßfläche begrenzt, die in diesem Ausschnitt ihre größte Krümmung aufweist. Die o.a. Betrachtungen zur Anpassung der Geometrie der Stoßfläche an die des Rotationshalbkörpers werden deshalb herangezogen, um die Stoßfläche im Bereich des lokalen Unterschallgebietes in Form eines Ausschnittes aus einer Kugeloberfläche darzustellen.

5. Wie später gezeigt wird, sinkt die Senkenstärke  $q_{st}$  am Rand des Ausschnittes auf Null ab. Spätestens hier verliert die gewählte Geometrie ihre Bedeutung.

Im Gegensatz zum Rotationskörper bieten sich zur mathematischen Beschreibung der Stoßfläche Kugelkoordinaten an. Für einen Ausschnitt aus der Kugeloberfläche wird dann

$$\begin{array}{ll} \text{der Radius der Kugel} & : \quad R_{st}, \\ \text{die Koordinate des Mittelpunktes} & : \quad x_*, \text{ sowie} \\ \text{der Halböffnungswinkel} & : \quad \epsilon \end{array}$$

benötigt. In Abb.(4) ist die Geometrie graphisch dargestellt. Die Gleichung der Stoßfläche lautet:

$$\vec{r}_{st} = (x_* + R_{st} \cos \vartheta) \cdot \vec{e}_x + R_{st} \sin \vartheta \cos \psi \cdot \vec{e}_y + R_{st} \sin \vartheta \sin \psi \cdot \vec{e}_z \quad . \quad (4.33)$$

mit den Beziehungen

$$\pi - \epsilon \leq \vartheta \leq \pi + \epsilon \quad , \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi \quad .$$

Das Potential  $\Phi_{st}$  wird prinzipiell ähnlich wie  $\Phi_k$ , s. Gl.(4.30), gebildet. Für den Nenner benötigt man die Koordinaten des Aufpunktes. Aus Abb.(4) entnimmt man die Darstellung

$$\vec{r} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z = x \cdot \vec{e}_x + r \cdot \cos \phi \cdot \vec{e}_y + r \cdot \sin \phi \cdot \vec{e}_z \quad . \quad (4.34)$$

Mit  $q_{st} < 0$  ergibt sich für das Stoßpotential:

$$\begin{aligned} \Phi_{st} = \\ -\frac{1}{4\pi} \int_{\pi-\epsilon}^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{q_{st}(\vartheta)}{\sqrt{(x - x_* - R_{st} \cos \vartheta)^2 + (y - R_{st} \sin \vartheta \cos \psi)^2 + (z - R_{st} \sin \vartheta \sin \psi)^2}} \cdot \frac{R_{st}^2 \sin \vartheta d\psi d\vartheta}{\sqrt{(x - x_* - R_{st} \cos \vartheta)^2 + (y - R_{st} \sin \vartheta \cos \psi)^2 + (z - R_{st} \sin \vartheta \sin \psi)^2}} \quad . \quad (4.35) \end{aligned}$$

Wie im Fall des Potentials  $\Phi_k$  des Rotationskörpers benötigt man die Beiträge der partiellen Ableitungen zur Formulierung der Strömungsrandbedingung am Körper. Sie lauten

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{st}}{\partial x} = \\ \frac{1}{4\pi} \int_{\pi-\epsilon}^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{q_{st}(\vartheta)}{\sqrt{(x - x_* - R_{st} \cos \vartheta)^2 + (y - R_{st} \sin \vartheta \cos \psi)^2 + (z - R_{st} \sin \vartheta \sin \psi)^2}} \cdot \frac{R_{st}^2 \sin \vartheta \cdot (x - x_* - R_{st} \cos(\vartheta))}{\sqrt{(x - x_* - R_{st} \cos \vartheta)^2 + (y - R_{st} \sin \vartheta \cos \psi)^2 + (z - R_{st} \sin \vartheta \sin \psi)^2}^3} d\psi d\vartheta \quad , \quad (4.36) \end{aligned}$$

bzw.

$$\frac{\partial \Phi_{st}}{\partial r} = \frac{1}{4\pi} \int_{\pi-\epsilon}^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{q_{st}(\vartheta) \cdot R_{st}^2 \sin\vartheta \cdot (r - R_{st} \sin(\vartheta)) \, d\psi d\vartheta}{\sqrt{(x - x_* - R_{st} \cos\vartheta)^2 + (r - R_{st} \sin\vartheta)^2}^3} \quad (4.37)$$

Die Stoßfläche liefert stromabwärts des Stoßes einen negativen, stromaufwärts einen positiven Beitrag zur Geschwindigkeit. Die Senkenstärke  $q_{st}(\vartheta)$  ist durch die Stoßgleichungen für gashaltiges Wasser festgelegt. Sie kann für jeden Winkel in Abhängigkeit der Ausgangsvariablen angegeben werden. Die Ableitung ist, neben der Bestimmung des Halboffnungswinkels  $\epsilon$ , Gegenstand von Kap.5.1. Im folgenden werden  $\vartheta$  und  $\psi$  als Integrationsvariable auf der Stoßfläche verwendet;  $\vartheta_{st}$  und  $\psi_{st}$  bezeichnen analog die Aufpunktkoordinaten.

Wenn wir die Geschwindigkeit in eine Tangential- und Normalenkomponente zerlegen und deren Werte vor und nach der Stoßfläche vergleichen, so ergibt sich die für eine Quellen-Senken-Schicht übliche Unstetigkeit der Normalenkomponente, während sich die Tangentialgeschwindigkeit auf der Stoßfläche stetig verhält. Die Diskontinuitätsrelation der induzierten Normalengeschwindigkeit lautet

$$\left( \frac{\partial \tilde{\Phi}_{st}}{\partial n} \right) = \left( \frac{\partial \Phi_{st}}{\partial n} \right)_m - \frac{q_{st}(\vartheta_{st})}{2} \quad [\tilde{\Phi} \text{ vor dem Stoß}] \quad (4.38)$$

bzw.

$$\left( \frac{\partial \hat{\Phi}_{st}}{\partial n} \right) = \left( \frac{\partial \Phi_{st}}{\partial n} \right)_m + \frac{q_{st}(\vartheta_{st})}{2} \quad [\hat{\Phi} \text{ nach dem Stoß}] \quad (4.39)$$

Alle Größen vor dem Stoß sind durch “ $\tilde{\phantom{x}}$ ”, die entsprechenden Größen danach durch “ $\hat{\phantom{x}}$ ” gekennzeichnet.  $\left( \frac{\partial \Phi_{st}}{\partial n} \right)_m$  bezeichnet den Mittelwert auf der Stoßfläche. Er beträgt (s. Anhang A)

$$\left( \frac{\partial \Phi_{st}}{\partial n} \right)_m = -\frac{1}{8\pi} \int_{\pi-\epsilon}^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{q_{st}(\vartheta) \cdot \sin\vartheta \, d\psi d\vartheta}{\sqrt{2 - 2\cos\vartheta \cos\vartheta_{st} - 2\sin\vartheta \sin\vartheta_{st} \cos\psi}} \quad (4.40)$$

Die Lage der Stoßfläche vor dem mit Überschall angeströmten Rotationskörper ist durch die Koordinaten  $x_*$ ,  $R_{st}$  sowie den Winkel  $\epsilon$  eindeutig bestimmt. Die zunächst unbekanntesten Werte des Mittelpunktes  $x_*$  der Stoßfläche sowie ihr Radius  $R_{st}$  werden durch das zuvor begründete Anpassungskriterium der annähernd ungestörten Zuströmung (d.h. Kompensation der Saugwirkung der Senkenbelegung mit der Stauwirkung des Rotationskörpers) gewonnen.

Das Potential  $\Phi_{st}$  erfüllt die homogene Laplace-Gleichung  $\Delta\Phi = 0$ .

## 4.4 Formulierung der Volumenquelle

Ausgangspunkt der Überlegungen sind die Potentialgleichungen (4.13) bzw. (4.16). Sie stellen inhomogene Laplace-Gleichungen dar, wobei der Inhomogenitätsterm auf der rechten Seite durch die Berücksichtigung der Kompressibilität des Fluids hervorgerufen wurde. Dadurch bedingt ist das Auftreten von Volumenquellen im Strömungsfeld. Bei der Aufstellung des Potentials  $\Phi_i$  geht man prinzipiell ähnlich vor wie schon bei Gl.(4.39) bzw. (4.35). An Stelle der sonst üblichen Quellen-Senken-Belegung wird jetzt der Inhomogenitätsterm im Zähler eingesetzt. Man erhält

$$\Phi_i = -\frac{1}{8\pi} \int \int \int_{(B)} \frac{a^{-2} \nabla \Phi \nabla (\nabla \Phi)^2 \cdot s ds d\theta d\xi}{\sqrt{(x - \xi)^2 + r^2 + s^2 - 2r s \cos \theta}} \quad . \quad (4.41)$$

Für den Fall, daß der Oberflächenspannungsterm vernachlässigt werden kann, gilt nach Gl.(4.14)..(4.16):

$$\Phi_i = -\frac{1}{4\pi} \int \int \int_{(B)} \frac{\nabla \Phi \nabla [\ln(1 + \alpha)] \cdot s ds d\theta d\xi}{\sqrt{(x - \xi)^2 + r^2 + s^2 - 2r s \cos \theta}} \quad . \quad (4.42)$$

Der Integrand beider Potentiale ist zunächst nicht bekannt. Die partiellen Ableitungen des Potentials  $\Phi_i$  werden für die Lösung der Randbedingung der tangentialen Umströmung des Rotationskörpers benötigt. Da diese Integralgleichung, dargestellt in Kap.5.2, ebenfalls iterativ gelöst wird, kann als Integrand in den obigen Gleichungen stets auf die bekannte Lösung  $(a, \nabla \Phi, \alpha \dots)$  des letzten Iterationsschrittes zurückgegriffen werden.

Der Gradient von  $\ln(1 + \alpha)$  in Gl.(4.42) bzw. der Gradient von  $p$  in Gl.(4.41)/(4.15) schränkt das Integrationsgebiet  $(B)$  auf die Gebiete der Strömung ein, wo sich diese Feldgrößen nennenswert ändern. Insbesondere entfällt das gesamte Gebiet der Zuströmung, da  $\alpha = \alpha_o$ ,  $p = p_o$  hier konstant sind sowie der Bereich der Stoßfläche und das Volumengebiet des Rotationskörpers. Die Frage, in welchen Volumenbereich stromabwärts der Stoßfläche die vereinfachte Form des Inhomogenitätsterms in Gl.(4.42) verwendet werden darf, muß im Einzelfall entschieden werden. Bei niedrigem Druck in der Zuströmung mit vergleichbaren Werten des Terms der Oberflächenspannung wird nur die exakte Lösung nach Gl.(4.41) verwendet. Bei höheren Zuströmldrücken ist  $2\sigma/R$  bzw.  $4\sigma/3R$  gegenüber  $p - p_v$  zumindest weiter stromabwärts des Rotationskörpers vernachlässigbar. In der unmittelbaren Umgebung des Rotationskörpers, insbesondere im Bereich des Staupunktes, muß die Abweichung des vereinfachten Ausdrucks am Aufpunkt numerisch geprüft werden.

Eine Möglichkeit der Vernachlässigung der Oberflächenspannung ist nur durch das postulierte thermodynamische Gleichgewicht gegeben. Die bei instationärer Betrachtung im Fall einer Druckerhöhung auftretenden Minima der Blasenradien bedingen z.T. sehr hohe Oberflächenspannungen, die stets berücksichtigt werden müssen.

## 5. Die Singularitätenverteilung

### 5.1 Senkenstärke des Stoßpotentials

Im Bereich der ungestörten Zuströmung verläuft die Geschwindigkeit parallel zur x-Achse; die Normalenkomponente auf der Stoßfläche erhält man nach Multiplikation mit  $-\cos\vartheta_{st}$

$$\vec{U} = U_o \cdot \vec{e}_x, \quad \tilde{U}_n = -U_o \cos\vartheta_{st} \quad . \quad (5.1)$$

Die Differenz der Normalengeschwindigkeiten vor und nach dem Stoß, also die Senkenstärke  $q_{st}$ , ist als Funktion der Ausgangsparameter darstellbar. Hierzu werden die Stoßgleichungen für gashaltiges Wasser herangezogen ([3],[5]). Aus dem Massenerhaltungssatz ergibt sich:

$$\frac{\tilde{U}_n}{\hat{U}_n} = \frac{1 + \tilde{\alpha}}{1 + \hat{\alpha}} \quad (5.2)$$

$$\tilde{U}_{t1} = \hat{U}_{t1} \quad . \quad (5.3)$$

Die zweite Komponente  $U_{t2}$  der Normalengeschwindigkeit tritt aus Symmetriegründen nicht auf;  $U_{t1}$  wird im folgenden mit  $U_t$  bezeichnet. Mit Hilfe der Impulserhaltung und Einsetzen von Gl.(5.2),(3.3) erhält man für den Druck  $\hat{p}$ :

$$\begin{aligned} \hat{p} - \tilde{p} &= \tilde{\rho} \tilde{U}_n^2 - \hat{\rho} \hat{U}_n^2 \\ &= \tilde{\rho} \tilde{U}_n \cdot (\tilde{U}_n - \hat{U}_n) \\ &= \rho_w \tilde{U}_n^2 \frac{\tilde{\alpha}}{(1 + \tilde{\alpha})^2} \left(1 - \frac{\hat{\alpha}}{\tilde{\alpha}}\right) \quad . \end{aligned} \quad (5.4)$$

Gl.(5.4) kann auch mit Hilfe des Energiesatzes

$$c_w \tilde{T} + \frac{\tilde{U}_n^2}{2} + \frac{\tilde{p}}{\rho_w} (1 + \tilde{\alpha}) = c_w \hat{T} + \frac{\hat{U}_n^2}{2} + \frac{\hat{p}}{\rho_w} (1 + \hat{\alpha}) \quad (5.5)$$

gewonnen werden, wenn man die Beziehungen  $\hat{T} \approx \tilde{T}$  sowie  $\tilde{\alpha}, \hat{\alpha} \ll 1$  ausnutzt. Die Senkenstärke im Stoß kann jetzt mit Gl.(5.1),(5.2) auf

$$q_{st}(\vartheta_{st}) = \hat{U}_n - \tilde{U}_n = \tilde{U}_n \left( \frac{\hat{\alpha} - \tilde{\alpha}}{1 + \tilde{\alpha}} \right) = U_o \cos\vartheta_{st} \left( \frac{\alpha_o - \hat{\alpha}}{1 + \alpha_o} \right) \quad . \quad (5.6)$$

umgeformt werden. Es bleibt, das Gasvolumenverhältnis  $\hat{\alpha}$  nach dem Stoß zu bestimmen. Mit dem Blasenerhaltungssatz und der Gleichgewichtsbedingung an der Blasenwand gilt zunächst

$$\frac{\hat{\alpha}}{\alpha_o} = \left( \frac{\hat{R}}{R_o} \right)^3 \approx \frac{p_o - p_v}{\hat{p} - p_v} . \quad (5.7)$$

$\hat{p}$  kann aus der Stoßgleichung (5.3) gewonnen werden. Einsetzen von Gl.(5.1),(5.7) in Gl.(5.3) liefert

$$\hat{p} - p_o = \rho_W U_o^2 \cos^2 \vartheta_{st} \frac{\alpha_o}{(1 + \alpha_o)^2} \left( 1 - \frac{p_o - p_v}{\hat{p} - p_v} \right) , \quad (5.8)$$

oder auch

$$\hat{p} - p_v = \rho_W U_o^2 \cos^2 \vartheta_{st} \frac{\alpha_o}{(1 + \alpha_o)^2} . \quad (5.9)$$

Also ergibt sich aus Gl.(5.7)

$$\frac{\hat{\alpha}}{\alpha_o} = \frac{p_o - p_v}{\rho_W U_o^2 \cos^2 \vartheta_{st}} \frac{(1 + \alpha_o)^2}{\alpha_o} . \quad (5.10)$$

Einsetzen von Gl.(10) in Gl(5.6) liefert die endgültige Form der Senkenstärke im Stoß:

$$\begin{aligned} q_{st}(\vartheta_{st}) &= \hat{U}_n - \tilde{U}_n \\ &= \frac{U_o \cos \vartheta_{st} \alpha_o}{(1 + \alpha_o)} \left( 1 - \frac{\hat{\alpha}}{\alpha_o} \right) \\ &= \frac{\alpha_o U_o \cos \vartheta_{st}}{1 + \alpha_o} \left( 1 - \frac{(1 + \alpha_o)^2 (p_o - p_v)}{\alpha_o \rho_W U_o^2 \cos^2 \vartheta_{st}} \right) . \end{aligned} \quad (5.11)$$

Damit kann die Senkenstärke im Stoß nach Festlegung der Ausgangsparameter für jeden Winkel  $\vartheta_{st}$  analytisch bestimmt werden. Gl. (5.11) ist in Abb.(5) dargestellt; die Ergebnisse für die verschiedenen Parameter werden in Kap. 9 diskutiert.  $q_{st}(\vartheta_{st})$  nimmt für  $\vartheta = \pi$  ein Minimum an, d.h. der Stoß ist entlang der  $x$ -Achse am stärksten. Mit zunehmender Abweichung (Rotationssymmetrie!) des Winkels  $\vartheta_{st}$  von  $\vartheta_{st} = \pi$  nimmt der Absolutwert der Senkenstärke entsprechend ab. Die Senkenstärke verschwindet schließlich, wenn der rechte Ausdruck in der Klammer von Gl.(5.11) den Wert 1 annimmt; dies führt zu einer Bedingung für den Winkel  $\vartheta_{st}$  :

$$\cos^2 \vartheta_{st,E} = \cos^2 \epsilon = \frac{(1 + \alpha_o)^2 (p_o - p_v)}{\alpha_o \rho_W U_o^2} . \quad (5.12)$$

Dieser Wert ist gleichbedeutend mit dem Halböffnungswinkel  $\epsilon$  der Stoßfläche. Damit kann auch die Größe  $\epsilon$  aus Gl.(4.35) nach Festlegung der Ausgangsvariablen durch die Bestimmungsgleichung (5.12) berechnet werden. Die mit Hilfe der Stoßgleichungen gewon-

nenen Ausdrücke für  $\hat{p}$  und  $\hat{\alpha}$  können weiterhin zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit  $\hat{a}$  nach dem Stoß herangezogen werden. Mit Gl.(5.9),(5.10) ergibt sich unter der Annahme  $\hat{\alpha} \ll 1$  :

$$\hat{a} = (1 + \hat{\alpha}) \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} - p_v}{\rho_W \hat{\alpha}}} = (1 + \hat{\alpha}) \cdot \sqrt{\frac{\rho_W U_o^4 \cos^4 \vartheta_{st}}{p_o - p_v} \cdot \frac{\alpha_o}{(1 + \alpha_o)^4}} \quad (5.13)$$

Gl.(5.12) wird in Abb.(6) graphisch dargestellt; die Diskussion der einzelnen Kurven erfolgt im Ergebnisteil (Kap.9.).

An der Stelle  $\vartheta = \pi - \epsilon$ , d.h. bei verschwindender Senkenstärke, findet bereits ein schwacher Stoß statt. Aufgrund der Stauwirkung des Rotationskörpers wird der Übergang auf Überschallgeschwindigkeit stromabwärts der Stoßfläche bereits für höhere Winkel  $\vartheta$ , also näher zur  $x$ -Achse, erzielt. Der genaue Ort, an dem die Begrenzung des lokalen Unterschallgebietes stromabwärts der Stoßfläche beginnt, kann analytisch bestimmt werden. Zunächst ergibt sich mit Gl.(5.1),(5.2) die Geschwindigkeit nach dem Stoß zu

$$\begin{aligned} \hat{U} &= \sqrt{\hat{U}_n^2 + \hat{U}_t^2} \\ &= U_o \cdot \sqrt{\sin^2 \vartheta_{st} + \cos^2 \vartheta_{st} \cdot \left( \frac{1 + \hat{\alpha}}{1 + \alpha} \right)^2} \quad (5.14) \end{aligned}$$

$\hat{M} = \hat{U} / \hat{a}$  ergibt sich nach Einsetzen von Gl.(5.13)

$$\hat{a} = (1 + \hat{\alpha}) \cdot \frac{U_o^2 \cos^2 \vartheta_{st}}{(1 + \alpha_o)^2} \cdot \sqrt{\frac{\rho_W \alpha_o}{p_o - p_v}} \quad (5.15)$$

zu

$$\hat{M} = \frac{(1 + \alpha_o)^2}{(1 + \hat{\alpha}) U_o \cos^2 \vartheta_{st}} \cdot \sqrt{\frac{p_o - p_v}{\rho_W \alpha_o}} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \vartheta_{st} \left( \left( \frac{1 + \hat{\alpha}}{1 + \alpha_o} \right)^2 - 1 \right)} \quad (5.16)$$

Der Wert des Gasvolumenverhältnisses  $\hat{\alpha}$  nach dem Stoß ergibt sich aus Gl.(5.10). Gl.(5.16) ist in Abb.(7) graphisch dargestellt. Die Diskussion erfolgt (s.o.) in Kap.9.

## 5.2 Quellen–Senkenstärke des Rotationskörperpotentials

Die an Körpern oder festen Wänden zu erfüllende Randbedingung lautet

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad , \quad (5.17)$$

d.h. senkrecht zur Körperoberfläche verschwinden alle (Normalen–)Komponenten der Geschwindigkeit. Gl.(5.17) gilt auch für inkompressible Strömungen. Gleichbedeutend mit Gl.(5.17) ist die Aussage, daß die Körperoberfläche eine Stromfunktion darstellt ( $\Psi = konst.$ ). Damit verschwindet das vollständige Differential

$$\begin{aligned} d\Psi(x, r) &= \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \cdot dx + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \cdot dr \\ &= - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \cdot dx + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \cdot dr \\ &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (5.18)$$

Nach Umformung kann  $dr/dx$  am Rand des Rotationskörpers durch  $R'(x)$  dargestellt werden. Man erhält unter Berücksichtigung der Geschwindigkeit  $U_o$  in der Zuströmung:

$$\left( U_o + \frac{\partial \Phi_{st}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \right) \cdot R'(x) = \frac{\partial \Phi_{st}}{\partial r} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} + \frac{\partial \Phi_k}{\partial r} \quad . \quad (5.19)$$

Die partiellen Ableitungen der Potentiale nach Kap.4.2 ... 4.3 sind am Ort  $r = R_k(x)$  zu bilden. Gl.(5.19) führt auf eine Fredholm'sche Integralgleichung zweiter Art. Sie hat nach Zusammenfassung aller Terme folgende Gestalt :

$$\begin{aligned} &\frac{q_k(x)}{2} \sqrt{1 + R'^2(x)} - U_o \cdot R'(x) + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^L \int_0^\pi \frac{q_k(\xi) \sqrt{1 + R'^2(\xi)} (R(x)R(\xi) - R^2(\xi)\cos\theta - (x - \xi)R'(x)R(\xi)) d\theta d\xi}{\sqrt{(x - \xi)^2 + R^2(x) + R^2(\xi) - 2R(x)R(\xi)\cos\theta}^3} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\pi-\epsilon}^\pi \int_0^\pi \frac{q_{st}(\vartheta) R_{st}^2 \sin\vartheta ((x - x_* - R_{st}\cos\vartheta)R'(x) - R(x) + R_{st}\sin\vartheta\cos\psi) d\psi d\vartheta}{\sqrt{(x - x_* - R_{st}\cos\vartheta)^2 + R^2(x) + R_{st}^2 - 2R(x)R_{st}\sin\vartheta\cos\psi}^3} \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int \int \int_{(B)} \frac{\nabla\Phi(\xi, s) \nabla[\ln(1 + \alpha(\xi, s))] ((x - \xi)R'(x) - R(x) + s \cdot \cos\theta) ds ds d\xi d\theta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + R^2(x) + s^2 - 2R(x)s \cdot \cos\theta}^3} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Unbekannte der Gleichung sind neben der Quellen–Senkenbelegung des Rotationskörpers der Radius  $R_{st}$  und Mittelpunkt  $x_*$  der Stoßfläche sowie der Integrand des Volumenintegrals. Gl.(5.20) kann nicht analytisch gelöst werden, es wird vielmehr ein iteratives Lösungsverfahren verwendet. Alle Einzelheiten zum numerischen Lösungsweg sind geschlossen in Kap.8. dargestellt.

## 6. Das Druckfeld

Im Fall einer stationären Strömung lautet die Bernoulli-Gleichung allgemein

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\nabla\Phi)^2 + \int_{p_0}^p \frac{dp'}{\rho(p')} \\ &= \frac{1}{2} U_o^2 + p_0 \\ &= \textit{konstant} \quad . \end{aligned} \quad (6.1)$$

Die Integration kann nach Einsetzen der Druck-Dichte-Beziehung (Kap.3) ausgeführt werden. Man erhält mit Gl.(3.3) zunächst

$$\frac{\rho_w}{2} ((\nabla\Phi)^2 - U_o^2) = - \int_{p_0}^p (1 + \alpha') dp' = p_0 - p - \int_{p_0}^p \alpha' dp' \quad (6.2)$$

und mit Gl.(3.12),(3.7),(3.6)

$$\frac{\rho_w}{2} ((\nabla\Phi)^2 - U_o^2) = p_0 - p - \alpha_o (p_0 - p_v) \int_{p_0}^p \frac{dp'}{p - p_v} \quad . \quad (6.3)$$

Die letzte Umformung setzt die Vernachlässigung der Oberflächenspannung voraus ( $\frac{2\sigma}{R} \mapsto 0$ ). Nach Division mit  $p_0 - p_v$  kann Gl.(6.3) so umgeformt werden, daß bis auf den konstanten Zuströmdruck  $p_0$  alle Terme mit  $p$  auf der rechten Seite stehen:

$$\frac{\rho_w}{2(p_0 - p_v)} ((\nabla\Phi)^2 - U_o^2) - 1 = \Pi \quad ; \quad (6.4)$$

mit

$$\Pi = - \frac{p - p_v}{p_0 - p_v} - \alpha_o \cdot \ln \left( \frac{p - p_v}{p_0 - p_v} \right) \quad (6.5)$$

als der verallgemeinerten Druckfunktion. Gl.(6.5) ist transzendent, die Berechnung des Druckes  $p$  bei bekanntem Gradienten des Potentials erfolgt numerisch. Der Druck sinkt nicht unter den Dampfdruck  $p_v$  ab ( $p_v = 0.023$  [bar]). Gl.(6.4) kann noch weiter vereinfacht werden. Da die Strömung im wesentlichen parallel zur x-Achse verläuft, gilt im gesamten Strömungsgebiet mit Ausnahme der Umgebung des Staupunktes die Näherung

$$\vec{U} = \nabla\Phi = U_o \cdot \vec{e}_x + \nabla\Phi^* \quad (6.6)$$

mit

$$(\nabla\Phi^*)^2 \ll U_o^2 \quad . \quad (6.7)$$

In solchen Strömungsbereichen liefert eine Linearisierung

$$(\nabla\Phi)^2 - U_o^2 = \left(\frac{\partial\Phi^*}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial\Phi^*}{\partial x}U_o \approx 2\frac{\partial\Phi^*}{\partial x}U_o \quad (6.8)$$

und man erhält an Stelle von Gl.(6.4):

$$\frac{\rho w}{p_o - p_v} U_o \frac{\partial\Phi^*}{\partial x} - 1 = \Pi \quad . \quad (6.9)$$

Nach erfolgter Anpassung der Stoßlage und mit Kenntnis der Belegungen  $q_k(x)$  bzw.  $q_{st}(\vartheta)$  können zunächst die partiellen Ableitungen des Geschwindigkeitspotentials für jeden gewünschten Aufpunkt stromabwärts der Stoßfläche berechnet werden. Danach ermöglicht Gl.(6.4)/(6.9) in Verbindung mit Gl.(6.5) die Bestimmung des Druckes an diesem Ort.

## 7. Vergleich mit der Theorie von Chao

Nach Lösung der bisher dargestellten Gleichungen ist das Geschwindigkeits- und Druckfeld der kompressiblen Potentialströmung bekannt. Es bleibt jedoch zu prüfen, ob das Ausbleiben der Dampfdruckunterschreitung durch Annahme eines ungehemmten thermodynamischen Gleichgewichts realistisch ist. Hierzu soll die Arbeit von Chao herangezogen werden, die als wesentlichen Teil den Zugspannungsabbau in einem Fluid untersucht. Grundlage ist eine modifizierte Lösung der Rayleigh-Plesset-Gleichung (umfassende Darstellung in [5],[6]).

Das von Rayleigh und Plesset für die Einzelblase angegebene Potential

$$\Phi = -\frac{R^2 \cdot \dot{R}}{r} \quad , \quad \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_R = \dot{R} \quad (7.1)$$

führt nach Einsetzen in die Bernoulli-Gleichung

$$\frac{\partial \Phi(r)}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} \right)^2 + \frac{p(r)}{\rho_w} = \textit{konstant} \quad , \quad (7.2)$$

die zwischen  $r = R$  (Blasenwand) und  $r \mapsto \infty$  gelöst wird, zu

$$R \cdot \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{1}{\rho_w} \cdot \left( p_{L0} \left( \frac{R_0}{R} \right)^3 + p_v - \frac{2\sigma}{R} - p \right) \quad . \quad (7.3)$$

Damit kann die Dynamik der Einzelblase entlang ihrer Stromlinie bestimmt werden. Natürlich stellt die Betrachtung einer einzigen Blase in ansonsten inkompressiblem Wasser, die zudem auf eine Druckänderung in sehr großer Entfernung reagiert, eine starke Idealisierung dar. Jedoch liegt bis heute noch kein befriedigender Ansatz vor, der die Dynamik eines Vielblasensystems korrekt beschreibt. Man bemüht sich vielmehr, die Kompressibilität des Wassers durch geeignete Modifikationen zu berücksichtigen. Da in der physikalischen Realität die Drücke in der unmittelbaren Umgebung der Blasen für deren Dynamik entscheidend sein dürften, die Blasen aber durch Oszillationen bzw. instabile Aufweitungen der Druckänderung entgegenwirken, werden letztendlich die inkompressibel berechneten Drücke, insbesondere niedrige oder sogar negative Drücke, nicht - oder nicht in dem Maße - erreicht. Dies ist gleichbedeutend damit, daß die Rayleigh-Plesset-Gleichung im Fall der instabilen Aufweitung den Kavitationseinsatz, d. h. das Überschreiten eines gewissen Gasvolumenverhältnisses zu früh voraussagt. Chao [6] schlug vor, durch einen geeignet angepaßten Faktor, der mit steigendem Gasvolumen abnimmt, den treibenden Druck wie folgt zu modifizieren:

$$p - p_v \mapsto (p - p_v) \cdot \exp(-\alpha/\alpha_{**}) \quad , \quad \alpha_{**} = 0.01 \quad . \quad (7.4)$$

Diese empirische Korrektur leistet bis heute - und wohl auch noch länger - sehr gute Dienste. Chao legt in seiner Arbeit eine inkompressible Potentialströmung zugrunde. Im Fall konstanter Dichte kann der Druck z.B. mit der hinreichend bekannten Beziehung

$$p = p_o - \rho_w \cdot \left( U_o \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 \right) \quad (7.5)$$

bestimmt werden. Das so ermittelte inkompressible Druckfeld kann in Gl.(7.4) als treibender Druck eingesetzt und die mit der Modifikation von Chao erhaltene Reduzierung zum Vergleich herangezogen werden. Zuvor bietet sich die Umrechnung der Zeitabhängigkeit in Gl.(7.3) in eine Ortsabhängigkeit an. Im einfachsten Fall ist  $\hat{U}$  entlang der Stromlinien näherungsweise als konstant anzusetzen :

$$dX = \hat{U} \cdot dt, \quad \frac{dR}{dt} = \frac{dR}{dX} \cdot \hat{u} \quad (7.6)$$

Man erhält

$$R \cdot \frac{d^2 R}{dX^2} + \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{dR}{dX} \right)^2 = \frac{1}{\rho_w \cdot \hat{U}^2} \cdot \left( p_{L0} \left( \frac{R_0}{R} \right)^3 - \frac{2\sigma}{R} - (p - p_v) \cdot \exp(-\alpha/\alpha_{**}) \right) \quad (7.7)$$

Wenn wir abschließend die Druckdifferenzen durch den Druckbeiwert  $c_p$  und den Kavitationsbeiwert  $\sigma_v$

$$c_p = \frac{\hat{p} - p}{\frac{\rho}{2} \hat{U}^2}, \quad \sigma_v = \frac{\hat{p} - p_v}{\frac{\rho}{2} \hat{U}^2} \quad (7.8)$$

ausdrücken, kann die Gleichung endgültig in der Form

$$\frac{3}{2} \left( \frac{dR}{dX} \right)^2 + R \cdot \frac{d^2 R}{dX^2} = 2(c_p - \sigma_v) e^{-\frac{\alpha}{\alpha_{**}}} - \frac{8\sigma}{\rho \hat{U}^2 R} + 2 \left( \sigma_v + \frac{4\sigma}{\rho \hat{U}^2 \hat{R}} \right) \cdot \left( \frac{\hat{R}}{R} \right)^3 \quad (7.9)$$

geschrieben werden. Bezugsgrößen sind die Geschwindigkeit  $\hat{U}$  und der Druck  $\hat{p}$  aus der Zuströmung (nach der Stoßfläche). Die Vergleichsrechnungen wurden für jeden der (in Kap.9 dargestellten) Parametersätze ausgeführt. Dabei ergab sich übereinstimmend, daß durch die hier vorliegenden (im Vergleich zu den üblichen Werten in Kavitationstunneln) sehr hohen Gasvolumina der Druck praktisch nicht unter den Dampfdruck  $p_v$  absinkt. In jedem Fall wurde  $(p_v - p_{min})/p_v < 10^{-2}$  erreicht. Damit wird der kritische Druck, d.h. der Druck, unterhalb dem die Blasen instabil aufweiten, weder erreicht noch unterschritten (man muß vielmehr von einer "Fähigkeit" des Wassers sprechen, Zugspannungen aushalten zu können; sie ist hier nicht gegeben). Wir erhalten das wichtige Ergebnis, daß keine Kavitation auftritt.

## 8. Numerische Lösung

Zunächst ist die Quellen-Senken-Belegung  $q_k(x)$  auf der Oberfläche des Rotationskörpers zu bestimmen. Hierzu ist Integralgleichung (5.4) iterativ zu lösen. Die Behandlung der logarithmischen Singularität des Oberflächenintegrals über den Rotationskörper wird im Anhang C gesondert beschrieben. Gl.(5.4) kann nach Umformung auf  $q_k(x)$  in die folgende prinzipielle Form gebracht werden :

$$q_k(x) = f(x) - c \cdot \int_{\xi=0}^L \int_{\theta=0}^{2\pi} q_k(\xi) K(x, \xi, \theta) d\theta d\xi \quad . \quad (8.1)$$

Sowohl zur Existenz von Lösungen als auch zum Konvergenzverhalten existiert umfangreiche Literatur [1],[2],[3],[8],[9]; der Lösungsweg soll daher nur kurz skizziert werden. Man erhält  $q_k^{(n+1)}(x)$ , d.h. die Quellen-Senken-Stärke an einem Aufpunkt, nach Einsetzen des Spektrums aller  $q_k^{(n)}(\xi)$  in das Oberflächenintegral. Diese Rechnung kann aus Gründen des numerischen Aufwandes nur für endlich viele Aufpunkte durchgeführt werden, so daß nach einer Iterationsfolge die übrigen für das Integral benötigten Werte der Belegung durch einen Spline zu ermitteln sind. Für den Startwert der Iteration wählt man zweckmäßigerweise  $f(x)$ ; mit Gl.(5.4) gilt unter Vernachlässigung des Volumenintegrals

$$q_k^{(0)}(x) = \frac{2 U_o R'(x)}{\sqrt{1 + R'^2(x)}} \quad . \quad (8.2)$$

Das Konvergenzverhalten des Iterationsverfahrens kann erheblich beschleunigt werden, wenn an Stelle von  $q_k^{(n+1)}(x)$  der Mittelwert aus den letzten beiden Iterationsschritten verwendet wird, da die Abweichungen aufeinanderfolgender Näherungen von der exakten Lösung alternierende Vorzeichen aufweisen:

$$q_k^{(n+2)}(x) = \frac{1}{2} \left( q_k^{(n+1)}(x) + q_k^{(n)}(x) \right) \quad . \quad (8.3)$$

Für die Parameterkombination 1 (siehe hierzu Kap.9) ist diese Eigenschaft in Abb.(8) graphisch dargestellt. Im allgemeinen sind die Abweichungen aufeinanderfolgender Lösungen nach spätestens acht Iterationsschritten vernachlässigbar gering, so daß der Iterationsprozeß abgebrochen werden kann. Die dann für vorgewählte Parameter  $R_{st}$  und  $x_*$  bekannte Quellen-Senken-Belegung des Rotationskörpers und die nach Gl.(5.11) bekannte Senkenbelegung der Stoßfläche ermöglicht im Anschluß die Berechnung der partiellen Ableitungen der Potentiale  $\Phi_k(x, r)$ ,  $\Phi_{st}(x, r)$  und damit die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes, insbesondere stromaufwärts der Stoßfläche. Im Anschluß daran ist die Stoßlage anzupassen. Hierzu entspricht der Forderung, daß stromaufwärts vor dem Stoß annähernd die ungestörte Zuströmung herrschen soll, die Bedingung

$$\nabla \Phi_{st} + \nabla \Phi_k = 0 \quad . \quad (8.4)$$

Zur Stoßanpassung sind im einzelnen folgende Schritte notwendig:

1. Wahl der Ausgangsparameter für die Anströmgeschwindigkeit  $U_o$ , das Gasvolumen  $\alpha_o$  und den Druck  $p_o$ .

Hieraus ergibt sich der Halböffnungswinkel  $\epsilon$  der Stoßfläche, die Schallgeschwindigkeit  $a_o$  und die Machzahl  $M$ .

2. Bestimmung des Mittelpunktes  $x_*$  der Stoßfläche zu verschiedenen, vorgegebenen Radien  $R_{st}$  (oder umgekehrt) durch systematische Testrechnungen.

Die ermittelten Wertepaare können in einem Diagramm  $x_* = f(R_{st})$  als Kurve dargestellt werden.

3. Wiederholung von Punkt 2. für verschiedene Stromlinien. Für jede Stromlinie ergibt sich eine entsprechende Kurve im o.a. Diagramm. Der Schnittpunkt stellt das gesuchte Lösungspaar  $(R_{st}, x_*)$  dar.

Die Anpassung der Stoßfläche soll anhand eines Beispiels (Abb.(9)) verdeutlicht werden. Wählt man als Stromlinie z.B. die Symmetrieachse, also  $r/D=0$ , so ist nach Vorgabe von  $x_* = 0$ , d.h. Koordinatenurprung = Mittelpunkt der Kugelschale, der Radius  $R_{st}$  iterativ zu bestimmen. Hierzu wird das Geschwindigkeitsfeld der Strömung stromaufwärts der Stoßfläche berechnet. Der optimale Wert  $R_{st}$  ist dort gefunden, wo die Saugwirkung der Stoßfläche die Stauwirkung des Rotationskörpers so aufhebt, daß vor dem Stoß möglichst lange die ungestörte Zuströmung herrscht. Mit  $x_*$  und  $R_{st}$  sind gleichzeitig die Koordinaten bestimmt, an der die Stoßfläche die Stromlinie schneidet. Wählt man jetzt auf der gleichen Stromlinie einen kleineren Wert  $x_*$ , also einen Mittelpunkt, der weiter stromaufwärts vor dem Rotationskörper liegt, so ergibt sich ein entsprechend geringerer Wert  $R_{st}$ , d.h. der Schnittpunkt der Stoßfläche mit der Stromlinie bleibt praktisch erhalten. Damit folgt zunächst, daß die Erfüllung der Anpassungsbedingung auf einer Stromlinie zu einer Mannigfaltigkeit von Lösungen führt, die als Lösungsgerade im Diagramm  $x_* = f(R_{st})$  darstellbar ist. Entlang dieser Lösungsgeraden gibt es jedoch nur ein beschränktes Intervall, in dem das Kriterium der Stoßanpassung auch für die übrigen Stromlinien zutrifft. Die Rechnung ist also für verschiedene Stromlinien durchzuführen und es ergibt sich, daß der gemeinsame Schnittpunkt in einem eng begrenzten Intervall liegt, dessen Mittelpunkt die gesuchte Lösung darstellt und für die weiteren Rechnungen verwendet wird.

Die Berechnung des Volumenintegrals stellt den größten Anteil des numerischen Aufwandes zur Lösung der Fredholm'schen Integralgleichung dar. Die am Aufpunkt aus dem jeweils letzten Iterationsschritt bekannten partiellen Ableitungen des Potentials ergeben nach Einsetzen in Gl.(6.4) zunächst den Wert der verallgemeinerten Druckfunktion. In Verbindung mit Gl.(6.5) bzw. (6.9) wird dann der Druck  $\hat{p}$  am Aufpunkt bestimmt. Mit Hilfe von Gl.(3.5),(3.7) und Gl.(3.12) erhält man das Gasvolumenverhält-

nis  $\hat{\alpha}$ :

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= \alpha_o \cdot \frac{p_{L0}}{p_L} \\ &= \frac{\alpha_o p_{L0}}{p - p_v + 2\sigma/R} \quad .\end{aligned}\tag{8.5}$$

Diese Gleichung wird interessanterweise auch für die zeitunabhängigen Anteile der Rayleigh - Plesset - Gleichung

$$p + \frac{2\sigma}{R} = p_{L0} \left( \frac{R_0}{R} \right)^3 + p_v$$

zugrundegelegt, wenn man Eigenfrequenz der Blasen bestimmen will (mit  $\bar{R}$  als mittleren Radius, s.[5]). Da  $\nabla\alpha$  bzw.  $\nabla p$  numerisch als (endlicher ) Differenzenquotient gebildet wird, müssen hinreichend viele Aufpunkte berechnet werden. Die dabei erzielte Genauigkeit des jeweiligen Gradienten ist im Einzelfall zu prüfen, d.h. die Anzahl der Aufpunkte darf hinsichtlich der Rechenzeiterparnis nur soweit begrenzt werden, wie lokale Schwankungen von  $\alpha$  (und damit  $\nabla\alpha$ ) noch ausreichend erfaßt werden.

Nach Iteration der Fredholm'schen Integralgleichung liegt die optimale Lösung der die Lage der Stoßfläche bestimmenden Parameter  $R_{st}$  und  $x_*$  vor. Die Berechnung der Feldgrößen stromabwärts des Verdichtungsstoßes erfolgt wie zuvor im Fall des Volumenintegrals beschrieben. Mit Kenntnis der Schallgeschwindigkeit  $\hat{a}$  nach Gl.(5.15) und damit der Machzahl  $\hat{M}$  nach Gl.(5.16) wird zuletzt die Begrenzung des lokalen Unterschallgebietes bestimmt.

## 9. Ergebnisse

Die vorgestellte Theorie wurde für eine Reihe von Ausgangsparametern numerisch erprobt. Unter der Voraussetzung, daß eine stationäre Überschallanströmung mit einem homogenen Gasvolumenverhältnis experimentell realisiert werden kann, ist damit die Frage von Interesse, welche Ergebnisse sich mit der Variation des Druckes  $p_0$  und der Geschwindigkeit  $U_0$  in der Zuströmung ergeben. Allen Rechnungen liegen die Ausgangsparameter  $\alpha_0 = 0.05$  (Gasvolumenverhältnis) und  $R_0 = 5 \cdot 10^{-3}$  [cm] (Blasenradius) zugrunde. Die Geometrie des Rotationskörpers ist durch seine Länge  $L = 40$  [cm] und den Durchmesser  $D = 4$  [cm] bestimmt (Dickenverhältnis 0.1).

a)

Zunächst wird bei konstantem Zuströmdruck  $p_0 = 0.1$  [bar] die Geschwindigkeit variiert. Für  $U_0 = 30$  [m/s] ergibt sich mit Gl.(3.13) unter Vernachlässigung des Terms der Oberflächenspannung die Schallgeschwindigkeit in der Zuströmung zu  $a_0 = 15$  [m/s]. Die Verdopplung von  $U_0$  entspricht der Machzahl  $M = 4$ .

Ausgangsparameter		
Nr.	1	2
$\alpha_0$	0.05	0.05
$p_0$ [bar]	0.10	0.10
$a_0$ [m/s]	15.0	15.0
$U_0$ [m/s]	30.0	60.0
$M$	2.00	4.00

Nach Festlegung der Ausgangsparameter kann die charakteristische Zusammenfallszeit  $t_z$  berechnet werden, die man bei instationärer Betrachtung (Isay [5, Kap.10]) erhalten würde. Sie beträgt

$$t_z = 0.915 \cdot R_0 \cdot \sqrt{\frac{\rho_w}{p_\infty - p_v}} \quad (9.1)$$

Nach Einsetzen ergibt sich  $t_z = 1.65 \cdot 10^{-5}$  [sec]. In dieser Zeit bewegt sich ein Volumengebiet um  $s_z = 0.049$  [cm] bzw.  $s_z = 0.098$  [cm] weiter. Bezogen auf die charakteristische Länge  $L$  des Rotationskörpers entspricht dieses einem Verhältnis von  $s_z/L = 1.2 \cdot 10^{-3}$  bzw.  $s_z/L = 2.4 \cdot 10^{-3}$ . Die Stoßfläche kann damit in guter Näherung als Diskontinuitätsfläche behandelt werden.

Während in der Zuströmung alle Parameter prinzipiell als Konstanten vorgegeben werden, sind die Werte  $\hat{U}$ ,  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{p}$  und  $\hat{a}$  unmittelbar nach dem Stoß abhängig von dem Ort, wo die im einzelnen betrachtete Stromlinie durch die Stoßfläche verläuft (Winkel  $\vartheta_{st}$ ). Die Feldgrößen können mit Hilfe von Gl.(5.2),(5.10),(5.9) und (5.13) berechnet werden. Speziell auf der  $x$ -Achse ergibt sich für die Parameterkombination 1:  $\hat{p} - p_v = 0.41$  [bar], also ein Druckanstieg um den Faktor 4.1,  $\hat{\alpha} = 0.0125$ ,  $\hat{U} = 28.94$  [m/s],  $\hat{a} = 58.43$  [m/s] und damit  $\hat{M} = 0.495$ .

Für die Parameterkombination 2 erhält man:  $\hat{p} - p_v = 1.63$  [bar], also ein Druckanstieg um den Faktor 16.3,  $\hat{\alpha} = 0.0031$ ,  $\hat{U} = 57.32$  [m/s],  $\hat{a} = 23.16$  [m/s] und damit  $\hat{M} = 0.247$ . Zur Machzahl nach dem Stoß zeigt Abb.(7) die winkelabhängige Verteilung. Die o.a. Werte können am Schnittpunkt mit der  $\hat{M}$ -Achse abgelesen werden.

In Abb.(5) ist die Senkenstärke nach Gl.(5.11) aufgetragen gegen den Winkel  $\vartheta$ , also gegen ein Maß für die Entfernung senkrecht zur Symmetrieachse, in der der Rotationskörper liegt. Auf der  $x$ -Achse ( $\vartheta_{st} = \pi$ ) ergibt sich eine Senkenstärke von  $q_{st} = -1.08$  [m/s] ( $M = 2$ ) bzw.  $q_{st} = -2.68$  [m/s] ( $M = 4$ ). (Nur) Für diesen Winkel entnimmt man weiterhin aus Gl.(5.16), daß sich (bei gleichem Gasvolumenverhältnis) die Machzahl  $\hat{M}$  und die Anströmgeschwindigkeit  $U_o$  umgekehrt proportional zueinander verhalten. In Verbindung mit der Tatsache, daß eine höhere Anströmgeschwindigkeit bei sonst unveränderten Parametern immer zu einer höheren Stoßstärke sowie zu einem größeren Halböffnungswinkel  $\epsilon$  führt, erhält man damit auch immer einen stärkeren Stoß. Diese Ergebnisse sind zumindest qualitativ von der Überschallanströmung in Luft bekannt. Dort führt eine Abnahme der Machzahl zu einem weiter vom Körper entfernten abgelösten Stoß, wobei auch die Krümmung der Stoßfläche weiter abnimmt, bis schließlich im schallnahen Bereich der Stoß fast senkrecht wird ([3]). Ein entsprechendes Verhalten der hier vorgestellten Theorie wird erzielt, wenn eine Anpassung der Stoßfläche bei steigender Machzahl in der Anströmung nur durch höhere Werte  $R_{st}$  bei gleichzeitig niedrigeren Winkeln  $\epsilon$  realisiert werden kann. Tatsächlich erhält man für die Parameterkombination 1 den Wert  $\epsilon = 1.035$  bzw.  $\epsilon = 1.321$  im Fall  $M = 4$ .

Interessant ist weiter die Eigenschaft, daß die Minima der Senkenstärke (auf der Symmetrieachse) betragsmäßig geringere Werte annehmen als die Maxima der Quellen-Senken-Belegung des Rotationskörpers (s.Abb.(8)), und zwar um mehr als eine Größenordnung. Es ist bereits jetzt abzusehen, daß die Stoßfläche das Geschwindigkeitsfeld deutlich schwächer beeinflusst als der Rotationskörper. Die wesentliche Folgerung ergibt sich, wenn man das Kriterium zur Stoßanpassung heranzieht: Damit die Zuströmung möglichst lange ungestört bleibt, wird die Stoßfläche in dem Bereich vor dem Körper liegen, wo sich die Absolutwerte der beiden induzierten Geschwindigkeiten ungefähr entsprechen. Bei deutlich geringeren Werten der Senkenstärke ist dies natürlich entsprechend weit stromaufwärts vor dem Körper der Fall, mithin also ein gravierender Unterschied zur Gasströmung.

Abb.(10) zeigt die angepaßte Stoßfläche sowie die stromabwärtige Begrenzung des lokalen Unterschallgebietes für die Parameterkombination 1. Die Iteration der Fredholm'schen Integralgleichung liefert die Werte

$$R_{st}/D = 1.34$$

sowie

$$x_*/D = -0.51 \quad .$$

Während sich die Normalenkomponente der Geschwindigkeit nach dem Stoß nur unwesentlich ändert, sinkt die Schallgeschwindigkeit  $\hat{a}$  nach dem Stoß deutlich ab. Für alle durchgeführten Rechnungen können die Werte  $\hat{a}$  aus Abb.(6), der grafischen Darstellung von

Gl.(5.13), entnommen werden. Wie schon bei der Betrachtung der Senkenstärke des Stoßes angedeutet, liegt die Stoßfläche deutlich vor dem Rotationskörper. Neben dem reinen Anpassungskriterium kann dieses Ergebnis auch physikalisch gedeutet werden: Der Stoß findet dort statt, wo die örtliche Strömungsgeschwindigkeit von oben durch die Schallgeschwindigkeit tritt. Verantwortlich für die Verringerung der Strömungsgeschwindigkeit ist die Stauwirkung des Rotationskörpers. Entscheidend für die "Übertragung" dieser Stauwirkung sind die physikalischen Eigenschaften des dazwischenliegenden Mediums. Wenn wir Wasser mit Gas vergleichen und insbesondere die höhere Dichte (Faktor 800 bei reiner Phase gegenüber Luft, Faktor  $5 \cdot 10^5$  gegenüber Wasserdampf) berücksichtigen, muß sich die Geschwindigkeit schon weiter stromaufwärts vor dem Stoß verringern als im Fall der Gasströmung; d.h. der Stoß tritt früher ein.

In Abb.(10) sind darüberhinaus an der Stoßfläche die Orte markiert, wo die Senkenbelegung den Wert Null bzw. die Machzahl nach dem Stoß den Wert  $\hat{M} = 1$  annimmt. Im letzteren Fall kann der entsprechende Winkel auch mit Hilfe von Gl.(5.16) ermittelt werden. Mit der Bezeichnung  $\epsilon_{M_1}$  ergeben sich die Werte  $\epsilon_{M_1} = 0.79$  und  $\epsilon_{M_1} = 1.05$  für  $M = 2$  bzw.  $M = 4$ . Diese Winkel ergeben sich graphisch aus Abb.(7). In der Abbildung ist parallel zur  $x$ -Achse auf der Höhe  $\hat{M} = 1$  der Schnittpunkt mit den Kurven aller Parameterkombinationen gekennzeichnet. Die Zahlen beziehen sich auf die Nummer der Parameterkombinationen.

Die Parameterkombination 2 unterscheidet sich von der ersten durch die Verdoppelung der Machzahl bei sonst unveränderten Parametern. Die Lage der Stoßfläche ist in Verbindung mit dem lokalen Unterschallgebiet in Abb.(11) dargestellt. Sowohl  $R_{st}$  als auch  $x_*$  nehmen betragsmäßig kleinere Werte an, und zwar

$$R_{st}/D = 1.25$$

sowie

$$x_*/D = -0.31 \quad .$$

Damit ergibt sich auch nach systematischen numerischen Testrechnungen (Parametervariation) das nach der Beurteilung der Senkenstärke erwartete Resultat, daß eine höhere Anströmungsgeschwindigkeit zu einer Verschiebung der Stoßfläche zum Rotationskörper führt. Der absolute Wert der Verschiebung beträgt etwa 12 %.

b)

Den nächsten beiden Parameterkombinationen liegt eine Erhöhung des Druckes von  $p_0 = 0.1$  [bar] auf  $p_0 = 0.3$  [bar] in der Zuströmung zugrunde. Bei gleichem Gasvolumenverhältnis  $\alpha_0$  liefert Gl.(4.12) dann eine höhere Schallgeschwindigkeit (Faktor  $\sqrt{3}$ ). Damit die Zuströmgeschwindigkeit nicht unrealistisch hohe Werte annimmt, wurden im Vergleich zu Teil a) etwas geringere Machzahlen vorgegeben.

Ausgangsparameter		
Nr.	3	4
$\alpha_0$	0.05	0.05
$p_0$ [bar]	0.30	0.30
$a_0$ [m/s]	24.5	24.5
$U_0$ [m/s]	36.7	73.4
$M$	1.5	3.00

Die Berechnung der Feldgrößen  $\hat{U}$ ,  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{p}$  und  $\hat{a}$  ist bereits in Teil a) ausgeführt worden. Es ergibt sich für die Parameterkombination 3 ( $\vartheta_{st} = \pi$ ):  $\hat{p} - pv = 0.61$  [bar],  $\hat{\alpha} = 0.025$ ,  $\hat{U} = 35.04$  [m/s],  $\hat{a} = 51.12$  [m/s] und damit  $\hat{M} = 0.685$ . Auf gleiche Weise erhält man im Fall  $M = 3$ :  $\hat{p} - pv = 2.44$  [bar],  $\hat{\alpha} = 0.006$ ,  $\hat{U} = 70.33$  [m/s],  $\hat{a} = 200.71$  [m/s] und damit  $\hat{M} = 0.35$ . Wie im Teil a) ist  $\hat{a}$  in Abb.(6) und die winkelabhängige Machzahl nach dem Stoß in Abb.(7) dargestellt. Weiterhin zeigt Abb.(5) die Senkenstärke nach Gl.(5.11) für die Parameterkombinationen 3 und 4. Es ergibt sich auch bei  $p_0 = 0.3$  [bar] eine Erhöhung der Stoßstärke  $q_{st}$  und des Halböffnungswinkels  $\epsilon$  bei steigender Machzahl, und zwar  $q_{st} = -0.889$  [m/s] und  $\epsilon = 0.857$  bei  $M_o = 1.5$  sowie  $q_{st} = -3.067$  [m/s] und  $\epsilon = 1.213$  bei  $M_o = 3$ . In Abb.(12) ist die angepaßte Stoßfläche sowie die Begrenzung des lokalen Unterschallgebietes für die Parameterkombination 3 dargestellt. Nach Iteration der Fredholm'schen Integralgleichung ergibt sich

$$R_{st}/D = 1.52$$

sowie

$$x_*/D = -0.82 \quad .$$

Zunächst fällt auf, daß der Stoß für  $M = 1.5$  gegenüber  $M = 2$  um ca.  $0.5 D$  weiter stromaufwärts vor dem Rotationskörper liegt. Dieses Ergebnis ergibt sich aus der Tatsache, daß bei ähnlichen Geschwindigkeiten in der Anströmung für  $M = 1.5$  eine geringere Geschwindigkeitsdifferenz gegenüber  $M = 2$  von dem Rotationskörper "abzubremsen" ist, bis bei  $M = 1$  der Stoß eintritt.

Wesentlich interessanter ist das Ergebnis, daß sich der in Abb. (13) dargestellte Stoß für  $M = 3$  jetzt deutlich näher am Rotationskörper ausbildet. Die Anpassung ergibt hier die Werte

$$R_{st}/D = 1.28$$

sowie

$$x_*/D = -0.34 \quad .$$

Zunächst werden (wie auch qualitativ in Teil a) betragsmäßig geringere Werte gegenüber der Parameterkombination 3 erzielt. Allerdings ist die relative Verschiebung der Stoßfläche stromabwärts (ebenfalls nach einer Verdoppelung der Anströmgeschwindigkeit) bei einer Erhöhung des Zuströmdruckes stärker ausgeprägt.

Dieses Ergebnis kann mit Hilfe der vorgestellten Theorie erklärt werden: Unter Vernachlässigung des Terms der Oberflächenspannung bewirkt die Beziehung zwischen  $\alpha$  und  $p$  bei einem Anstieg von  $p$  eine Reduzierung des Gasvolumenverhältnisses (im etwa umgekehrt proportionalen Verhältnis). Die Tatsache, daß bei unverändertem Gasvolumenverhältnis  $\alpha = 0.5$  ein dreifach erhöhter Druck  $p_o$  vorliegt, entspricht in einem Fluid ohne Druckänderung dem Fall, daß in diesem jetzt das dreifache Gasvolumen stabilisiert ist. Eine vergleichende Betrachtung bei identischem Verhältnis der Machzahlen führt nach Einsetzen in die Gl.(5.11) (Senkenstärke  $q_{st}$ ) zu einem überproportionalen Ansteigen der Stoßstärke nach Erhöhung des Zuströmdruckes.

Entsprechende Werte liest man in der graphischen Darstellung beim Vergleich der Minima der Senkenstärke  $\vartheta_{st}$  in Abb.(5) ab. Es ergibt sich für den Anstieg auf der x-Achse (also  $\vartheta = \pi$ ) bei gleichem Druck  $p = 0.3$  [bar] ein Faktor 3.45 gegenüber einem Faktor 2.48 bei  $p = 0.1$  [bar]. Die numerischen Ergebnisse sind damit auch nach der Parametervariation zur Anpassung der Stoßlage völlig konsistent mit der vorgestellten Theorie.

c)

In Kap.4.3 wurde unter Punkt 5. die Grenze der geometrischen Annahme einer als Ausschnitt aus einer Kugeloberfläche dargestellten Stoßfläche dargelegt. Insbesondere wird für  $\pi - \vartheta \mapsto \epsilon$ , also weiter entfernt von der Symmetrieachse, ein Kugelausschnitt der Realität nicht mehr gerecht. Hier schmiegt sich die Stoßfläche, wie bekannt, an eine durch die Beziehung

$$\tan\phi = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \quad (9.2)$$

gegebene Gerade an (Mach-Kegel, [3]). Die nach Gl.(9.2) berechneten Winkel ergeben sich nach Einsetzen der den Parameterkombinationen entsprechenden Machzahlen zu:  $\phi = 0.524$ ,  $\phi = 0.253$ ,  $\phi = 0.730$  sowie  $\phi = 0.340$  für die Parameterkombinationen 1...4. In allen Abbildungen (10)..(13) sind die durch  $\phi$  bestimmten Geraden am Ort der Stoßfläche angesetzt, wo die Senkenstärke den Wert Null annimmt. Sie fügen sich stetig an. Dabei wird die Tatsache des realen, sukzessiven Anschmiegens durch eine an dem Ort des Aneinanderfügens zu stark stromaufwärts gekrümmte Stoßfläche kompensiert.

d)

Die Ergebnisse sollen abschließend mit den aus der Literatur bekannten Werten verglichen werden. Da Messungen an einem Rotationskörper, soweit bekannt, noch nie in gashaltiger

Wasserströmung durchgeführt wurden, reduziert sich der Vergleich auf 1) den identischen Strömungskörper in Unterschallanströmung bzw. 2) auf Überschallanströmung bei rein gasförmigen Fluiden.

Für den Rotationskörper ist die  $c_p$ -Verteilung an der Oberfläche von Keller [10] experimentell bestimmt worden. Er erhält im Vergleich zu den weiterhin vermessenen strömungsgünstigeren Körpern ein Maximum der  $c_p$ -Verteilung, das stromabwärts früher eintritt und stärker ausgeprägt ist. Die gemessenen Werte von Keller wurden mit Gl.(7.8) auf eine Druckverteilung umgerechnet und in Abb.(14) durch Kreise dargestellt. Die hier vorliegenden sehr hohen Anströmgeschwindigkeiten führen im Bereich des  $c_p$ -Maximums zu unrealistischen, negativen Drücken. Die Kurve ist in diesem Bereich gestrichelt gezeichnet. Weiter stromaufwärts ergibt sich eine gute Übereinstimmung mit den berechneten Werten aus der vorgestellten Theorie.

Messungen von Überschallanströmung, soweit sie sich auf die hier relevanten Größen wie z.B. das lokale Unterschallgebiet oder Abstand Stoßfläche-Strömungskörper beziehen, liegen nach bestem Wissen für den identischen Strömungskörper nicht vor. Der Vergleich muß sich deshalb auf Körper anderer Formen beschränken. **Zierep** [38] erhält für spitze Körper in schallnaher Überschallanströmung einen Kopfwellenabstand, der erheblich unter den in der vorliegenden Arbeit berechneten Werten ( $R_{st} - x_*$ ) liegt. **Xerikos et al** [39] untersuchen den Abstand der Stoßfläche für den Fall einer Kugel. Sie geben bei verschiedenen Messungen mit  $M > 3$  einen Abstand  $x/R < 0.22$  an! Auch **van Tuyl** [40] und **Kim** [41] bestätigen dieses Ergebnis qualitativ bei stumpfen Körpern. Weitere Beispiele findet man bei **Zierep** [3].

Damit wird insgesamt festgestellt, daß eine Übertragbarkeit der Ergebnisse in gashaltiger Wasserströmung auf solche in Luft praktisch ausgeschlossen werden kann. In jedem Fall müßten bei einer Realisierung von Versuchen nicht unerhebliche Mittel bereitgestellt werden, da die bislang (in Kavitationstunneln) erreichten Gasvolumenverhältnisse von  $\alpha \approx 10^{-3}$  bei weitem nicht ausreichen, durch Erhöhung der Anströmgeschwindigkeiten einen Überschallzustand in der Anströmung herzustellen. Diese Anstrengung sollte nicht unternommen werden.

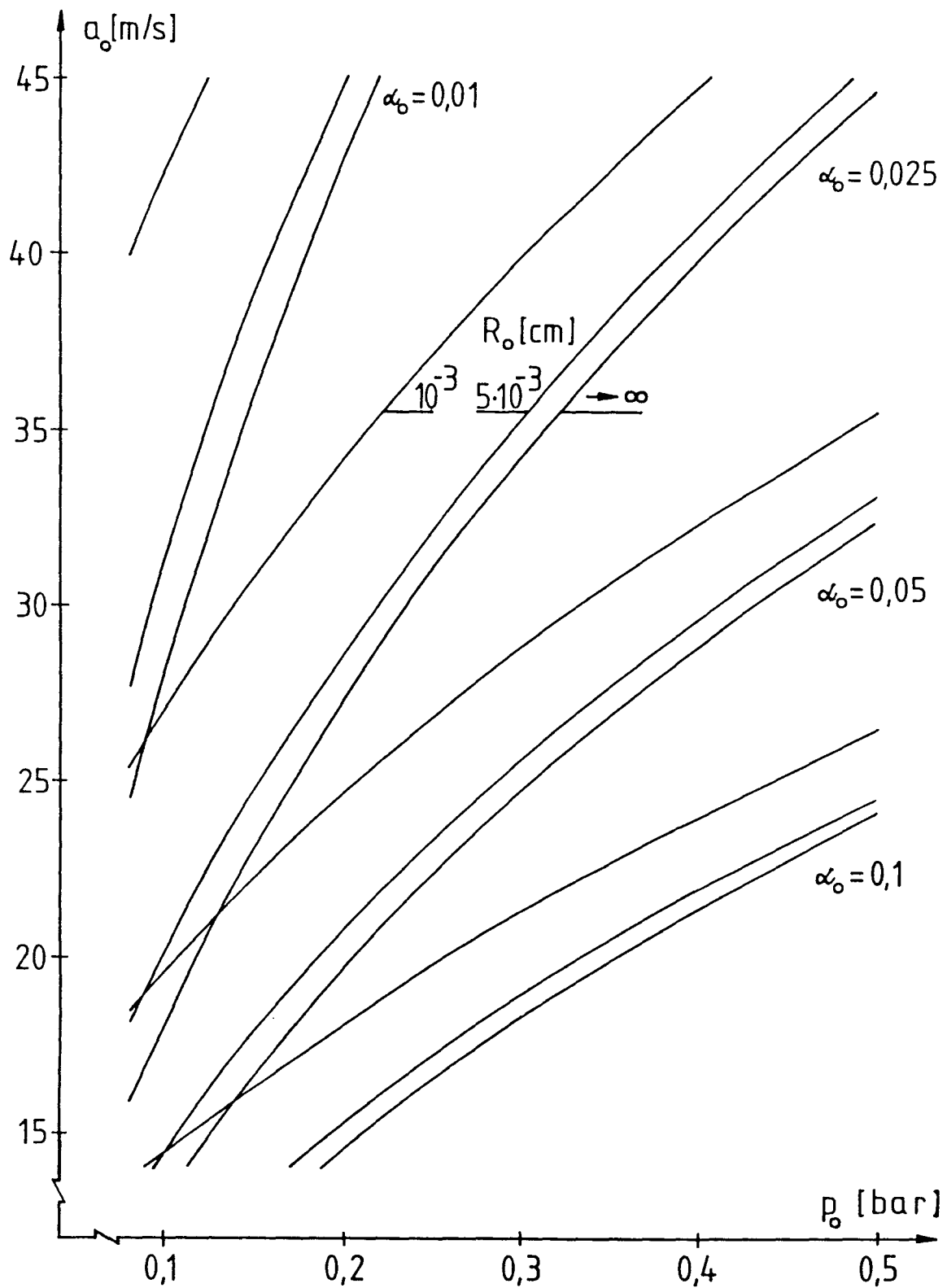


Abb.(1): Schallgeschwindigkeit vor dem Stoß

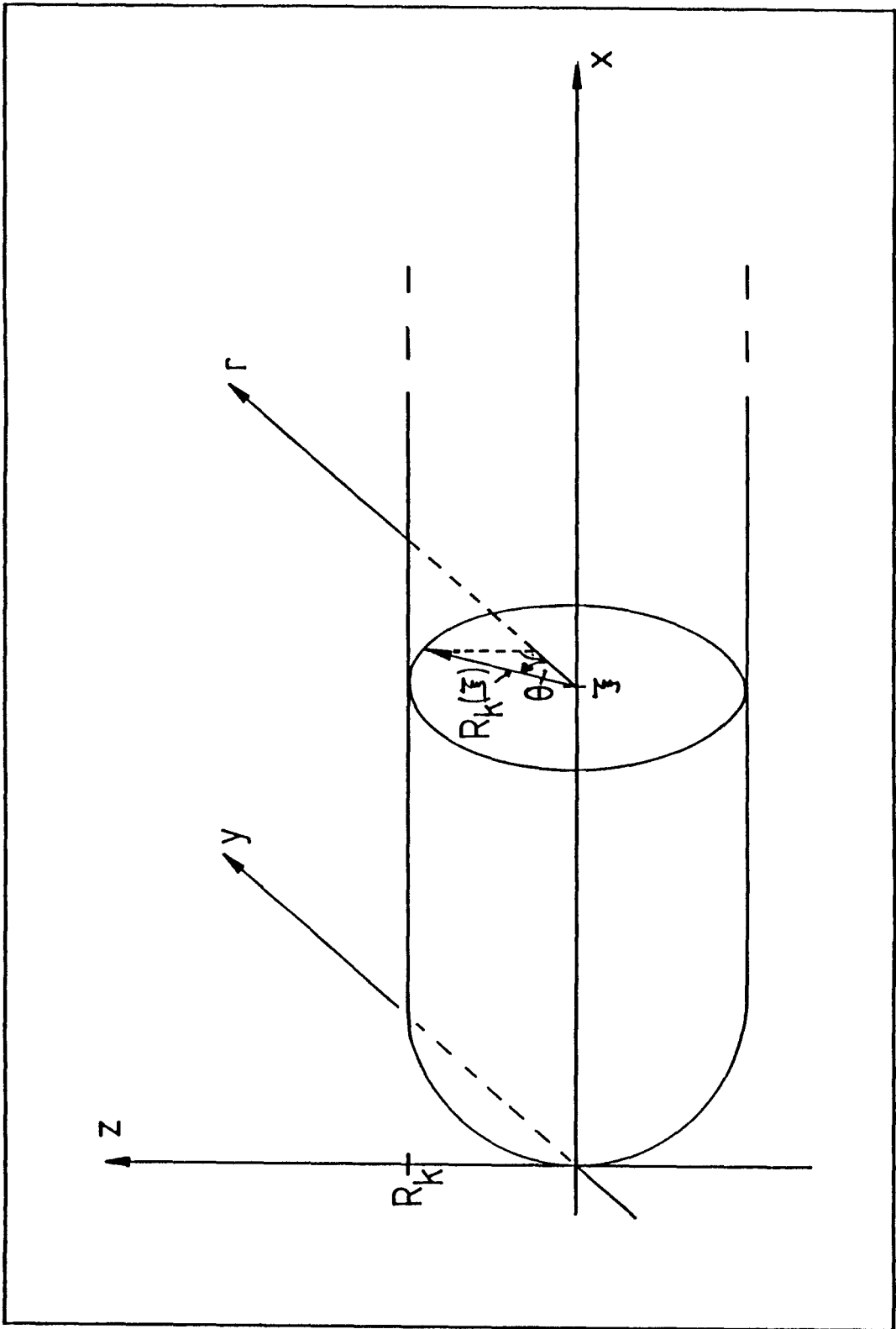


Abb.(2): Geometrie des Rotationskörpers

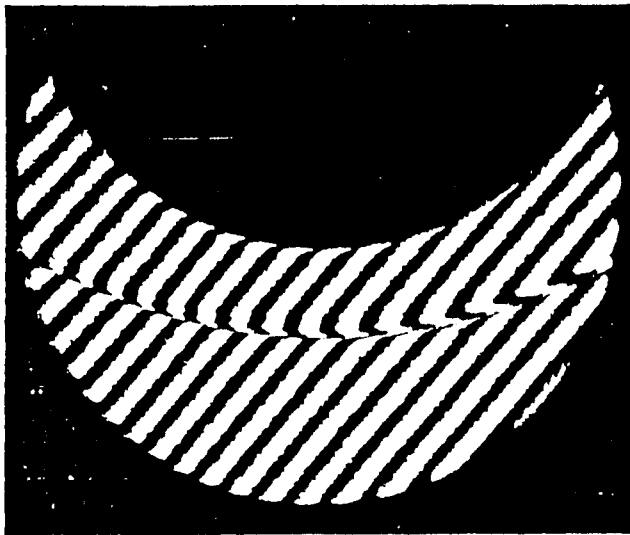
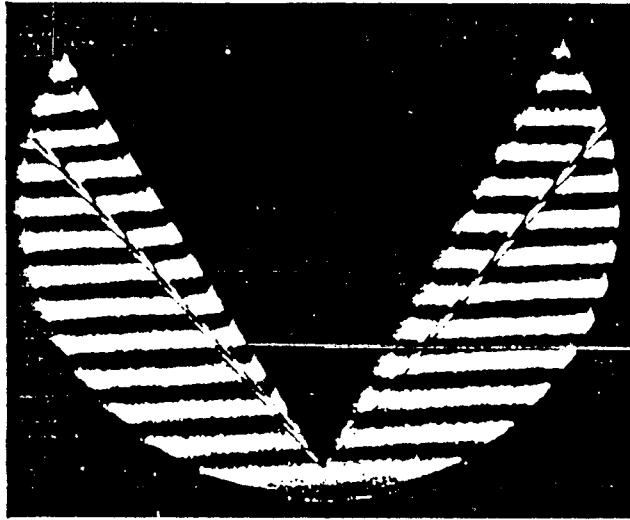


Abb.(3): Interferenzaufnahmen

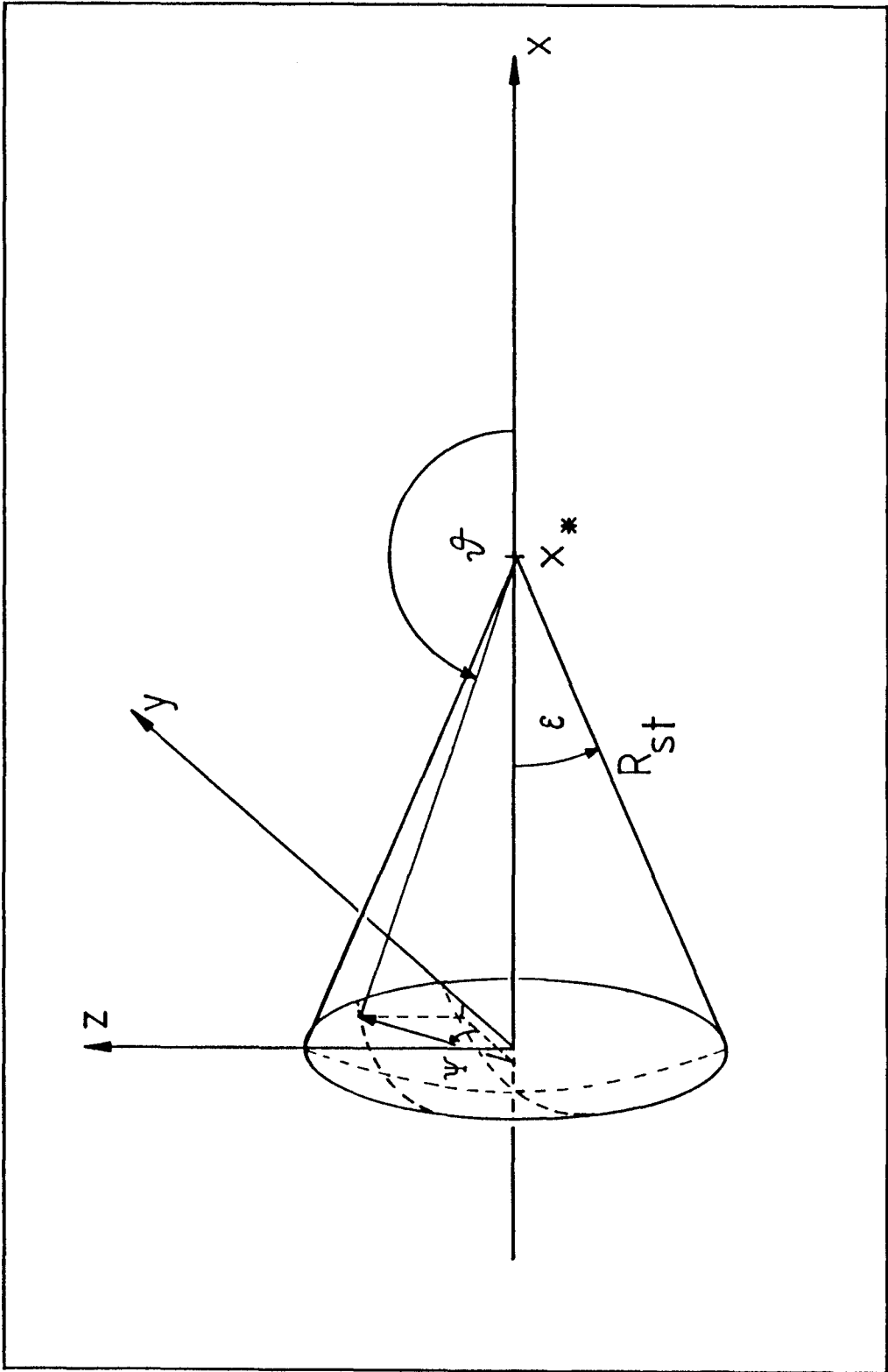


Abb.(4): Geometrie der Stoßfläche

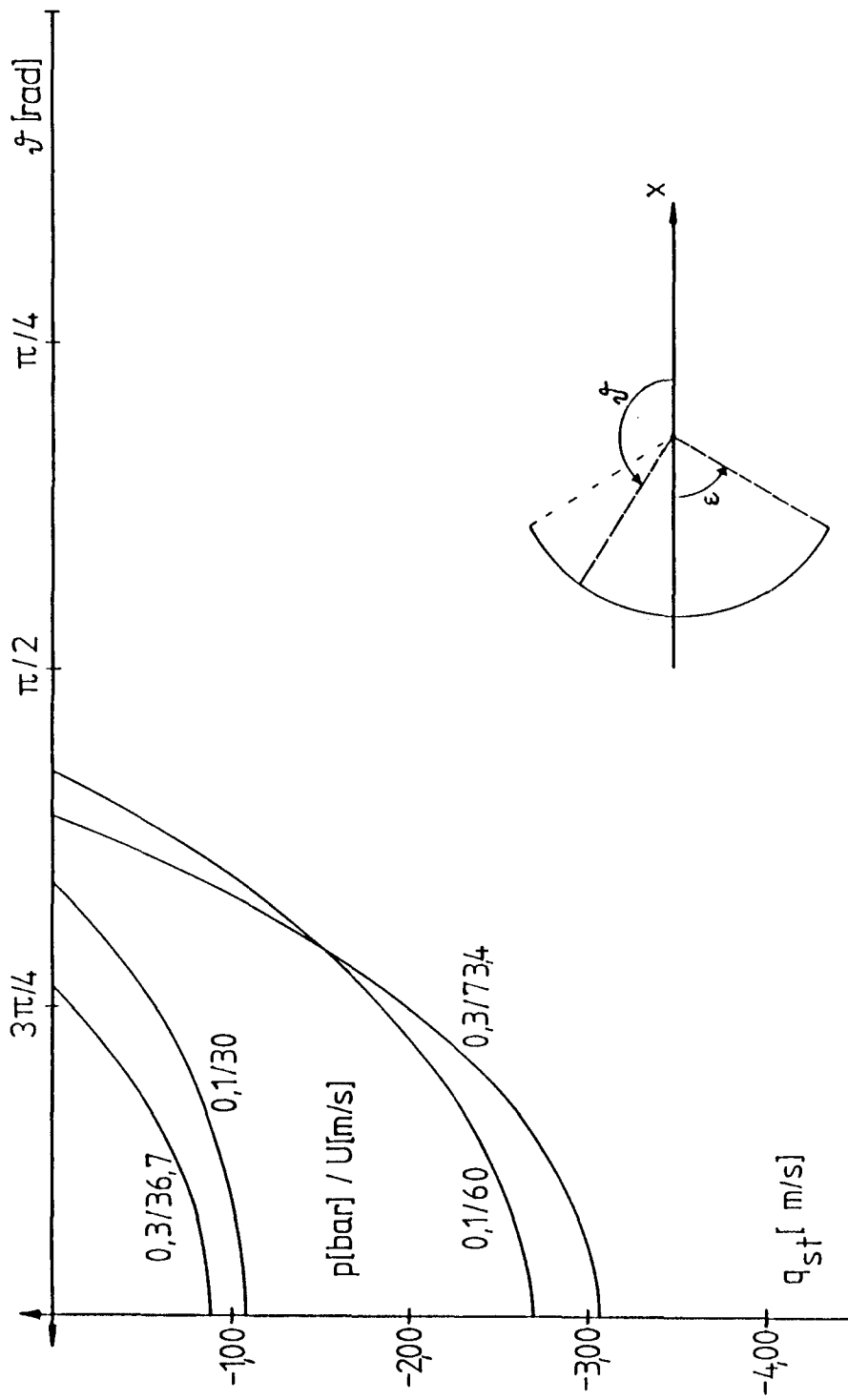


Abb.(5): Senkenstärke

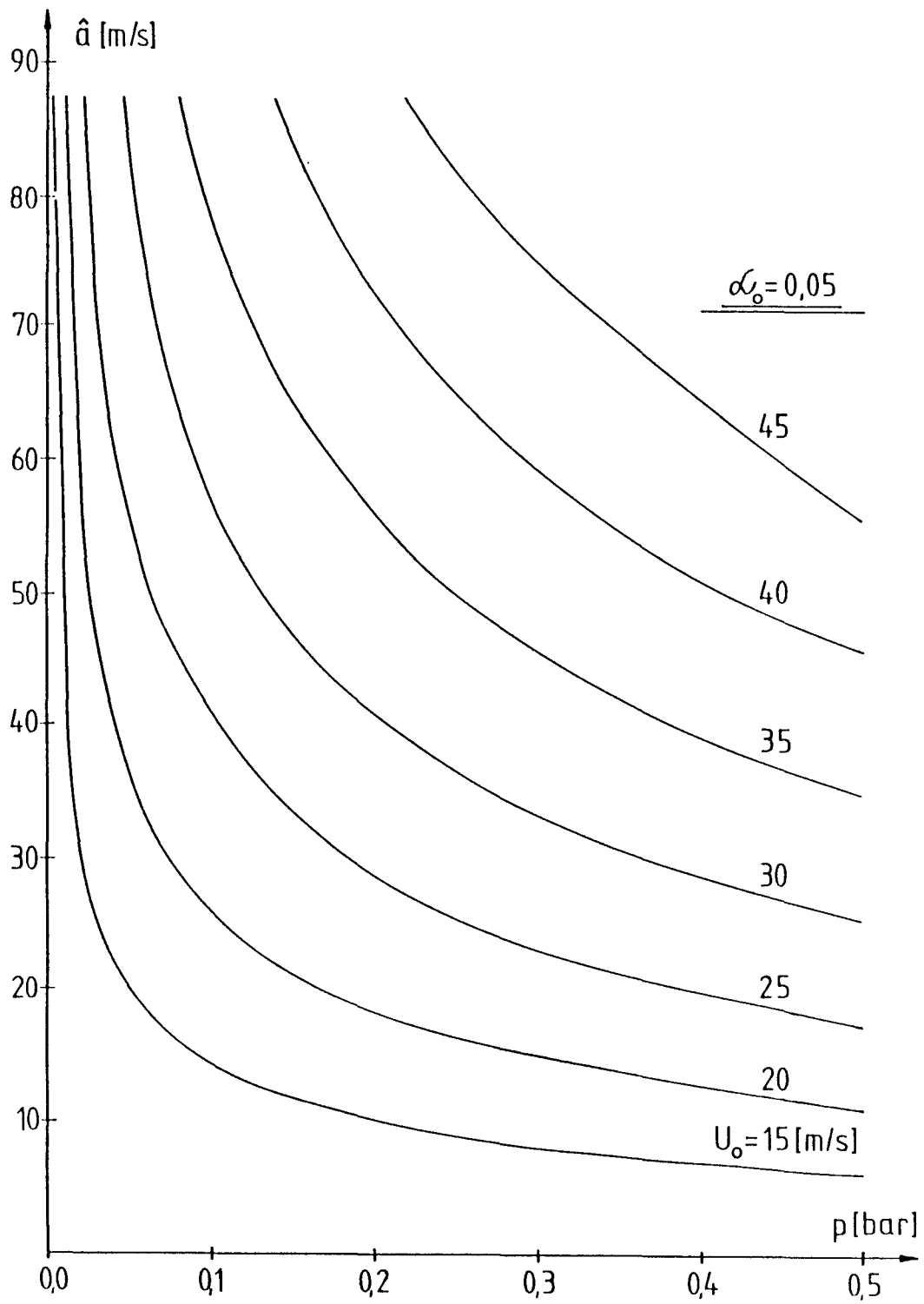


Abb.(6): Schallgeschwindigkeit nach dem Stoß

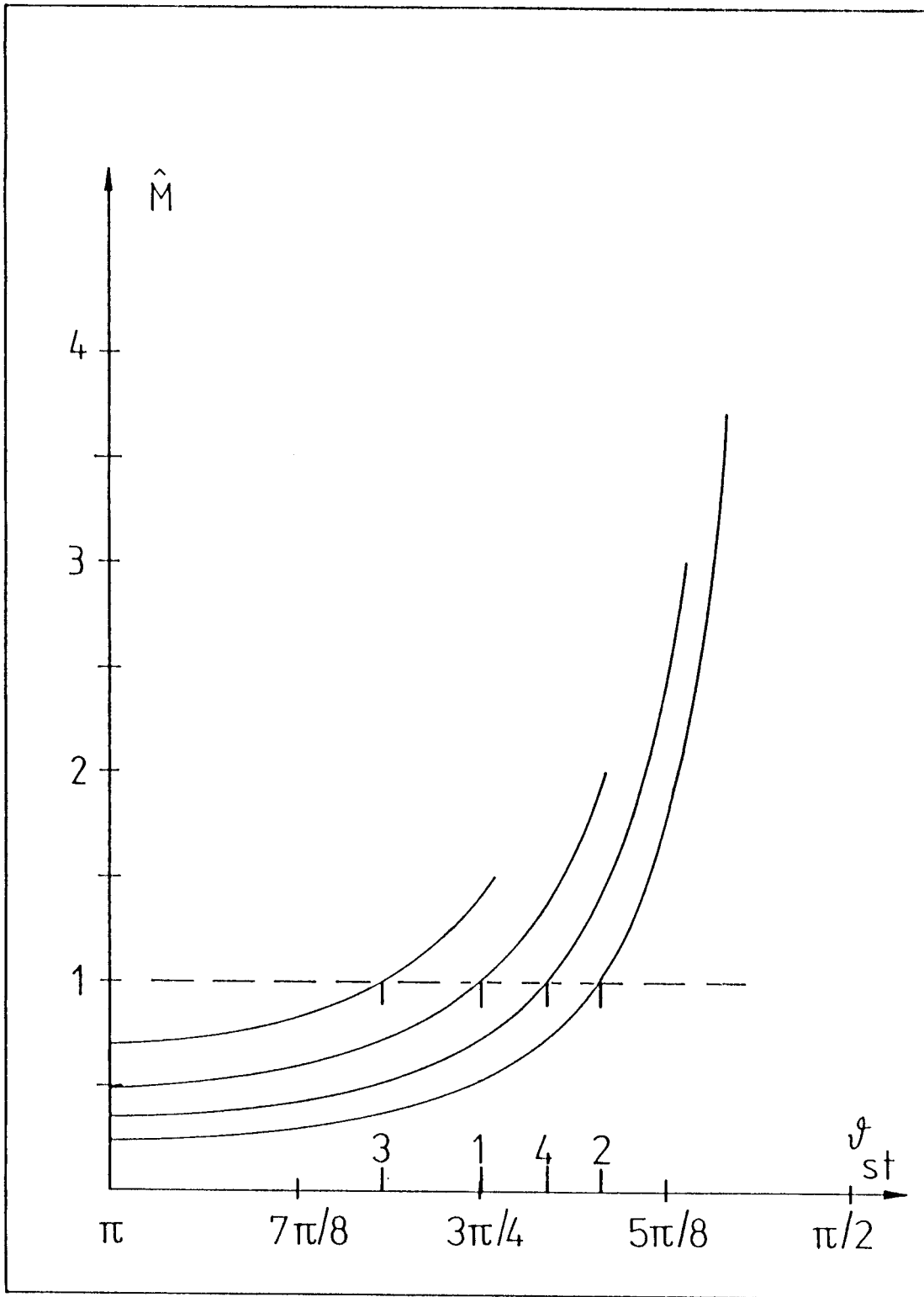


Abb.(7): Machzahl  $\hat{M}$  stromabwärts des Stoßes

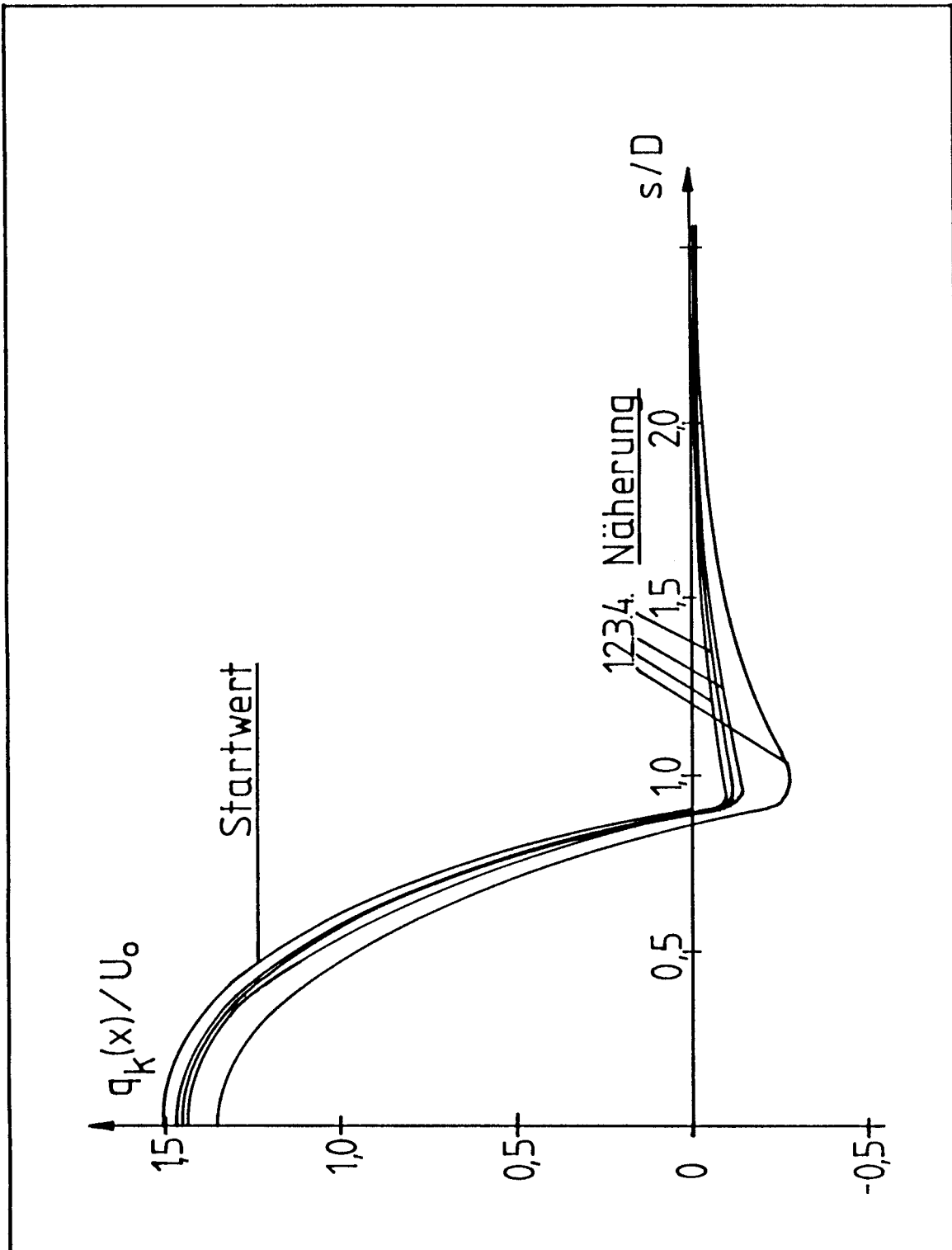


Abb.(8): zur Iteration der Integralgleichung

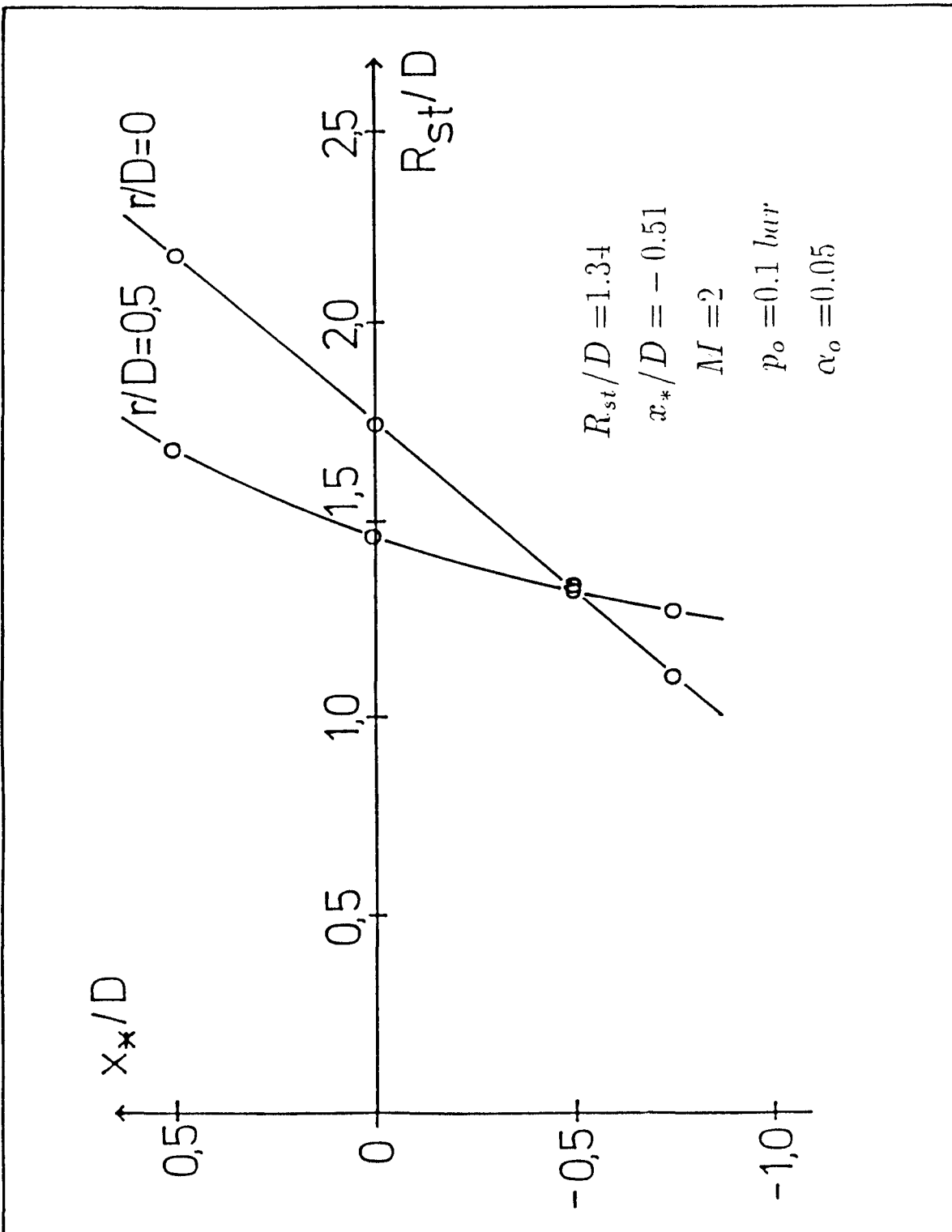


Abb.(9): Anpassung der Stoßfläche

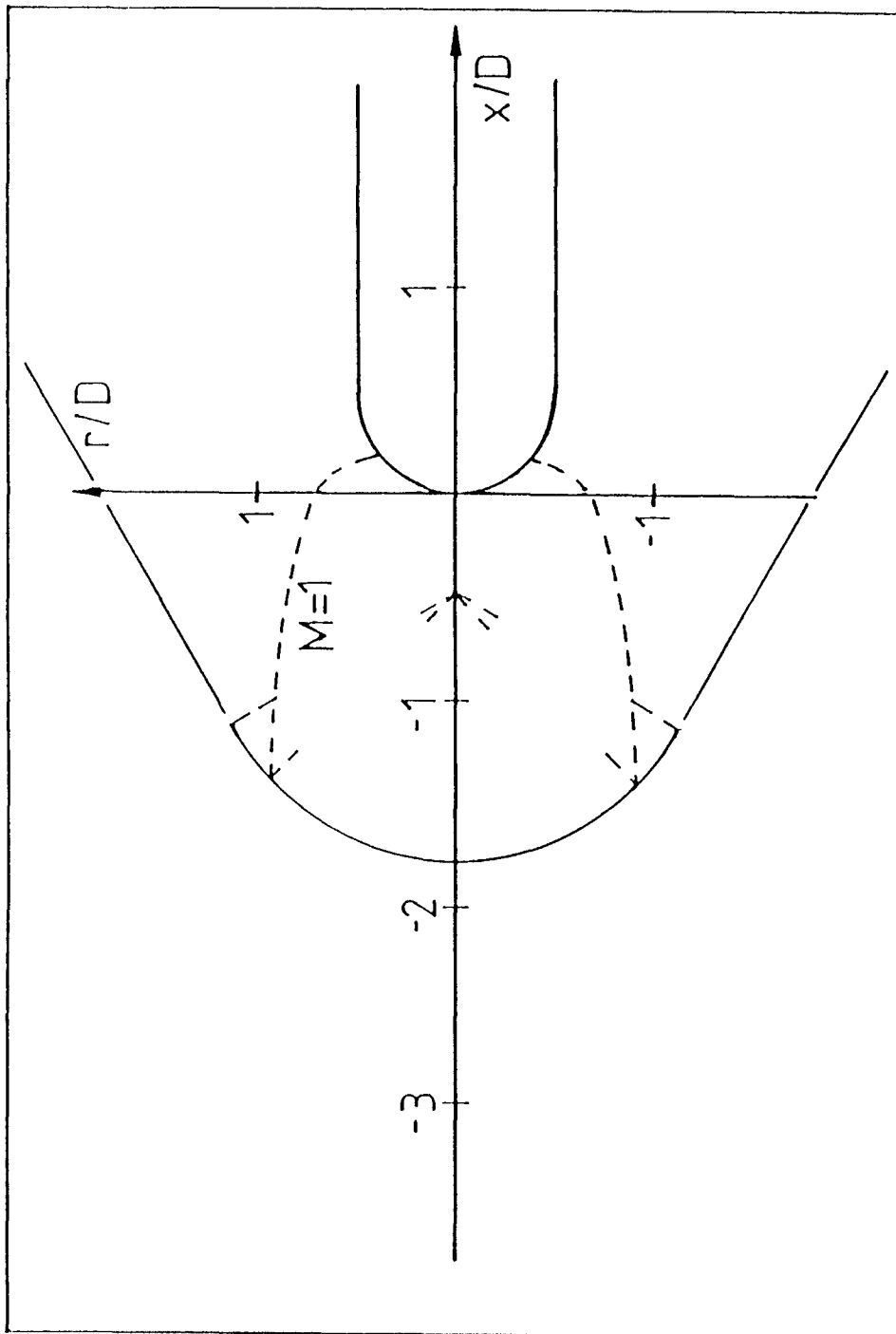


Abb.(10): Stoßfläche und lokales Unterschallgebiet (1)

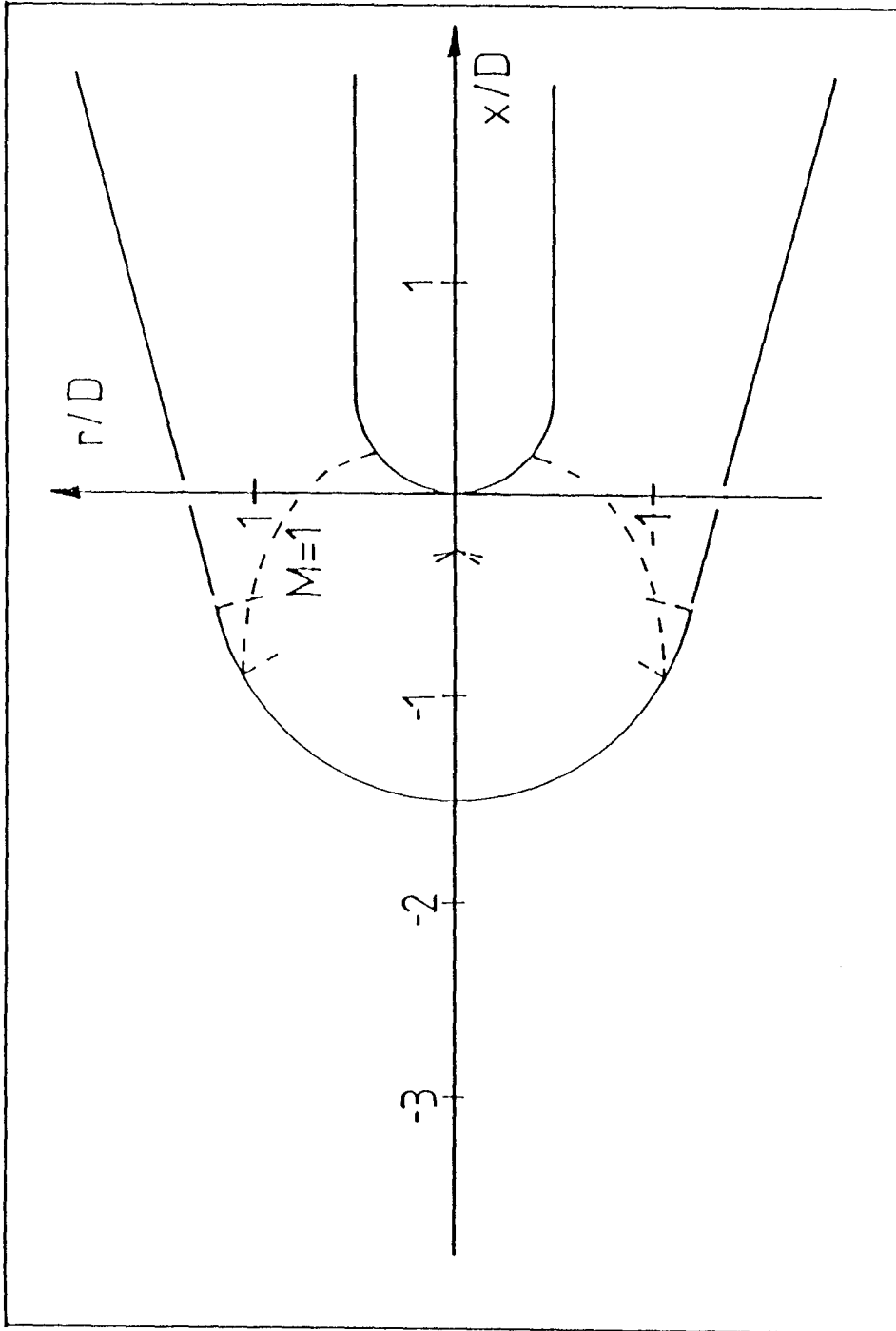


Abb.(11): Stoßfläche und lokales Unterschallgebiet (2)

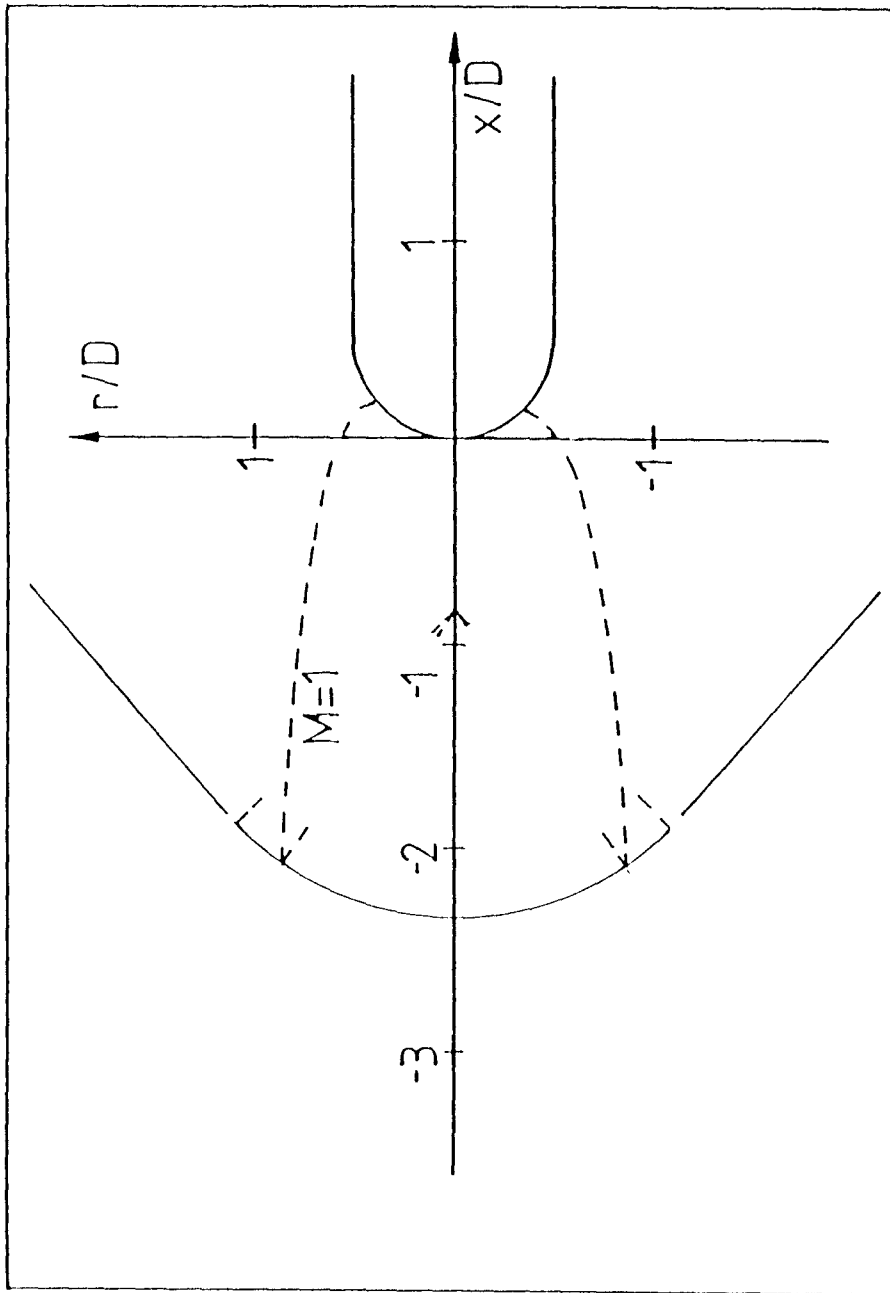


Abb.(12): Stoßfläche und lokales Unterschallgebiet (3)

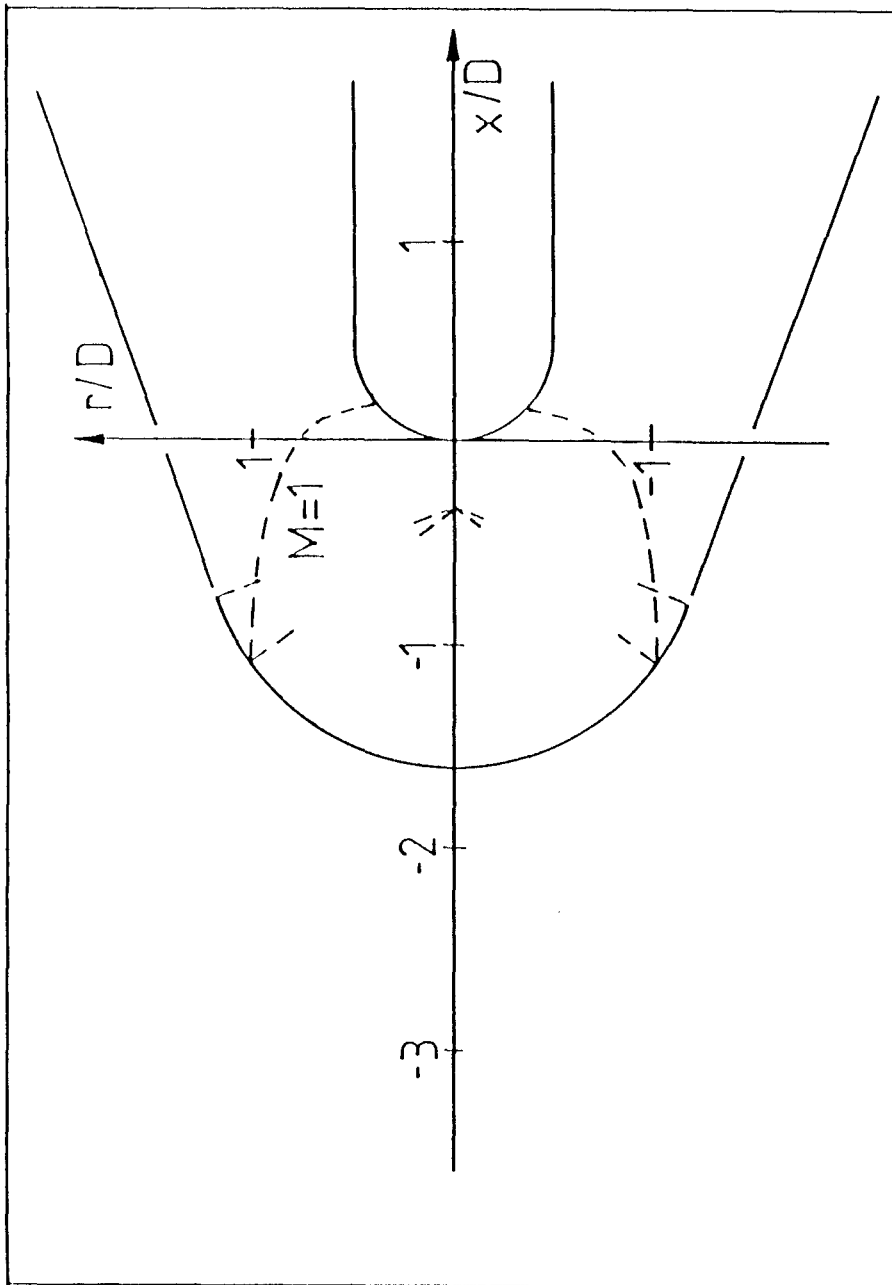


Abb.(13): Stoßfläche und lokales Unterschallgebiet (4)

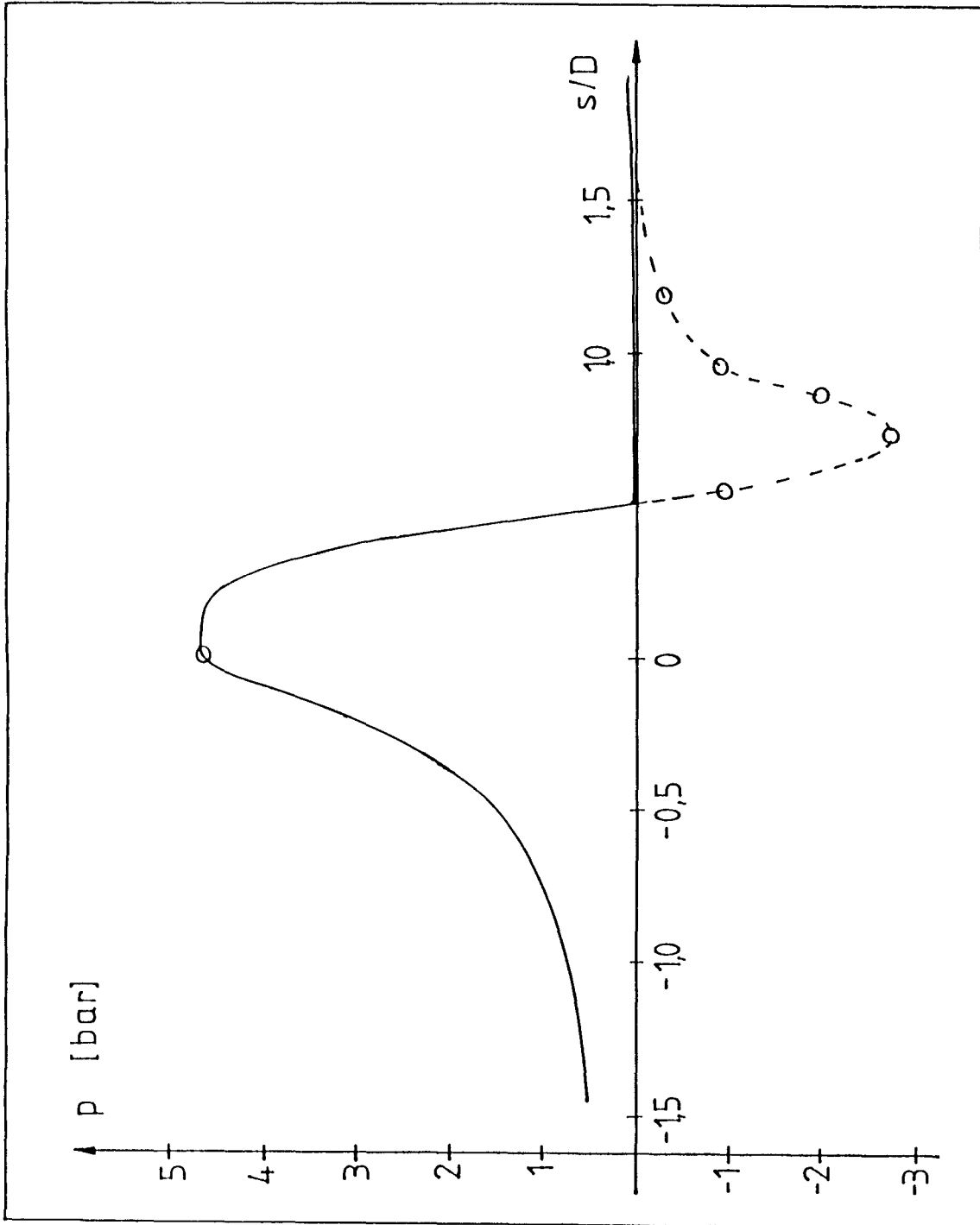


Abb.(14): Druckverteilung

## Anhang A

In Kap. 4.3 wurde ausgeführt, daß für die induzierte Normalengeschwindigkeit die Diskontinuitätsrelation

$$\left( \frac{\partial \tilde{\Phi}_{st}}{\partial n} \right) = \left( \frac{\partial \Phi_{st}}{\partial n} \right)_m - \frac{q_{st}(\vartheta_{st})}{2} \quad , \quad \left( \frac{\partial \hat{\Phi}_{st}}{\partial n} \right) = \left( \frac{\partial \Phi_{st}}{\partial n} \right)_m + \frac{q_{st}(\vartheta_{st})}{2} \quad (A.1)$$

besteht. Dabei ist der Normaleneinheitsvektor auf der Stoßfläche durch

$$\vec{e}_n = -\cos\vartheta_{st} \cdot \vec{e}_x - \sin\vartheta_{st} \cos\psi_{st} \cdot \vec{e}_y - \sin\vartheta_{st} \sin\psi_{st} \cdot \vec{e}_z \quad (A.2)$$

gegeben.  $\left( \frac{\partial \Phi_{st}}{\partial n} \right)_m$  bezeichnet den Mittelwert auf der Stoßfläche. Für seine Berechnung sind die partiellen Ableitungen des Potentials  $\Phi_{st}$

$$\Phi_{st} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\pi-\epsilon}^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{q_{st}(\vartheta) \cdot R_{st}^2 \sin\vartheta d\psi d\vartheta}{\sqrt{(x-x_* - R_{st}\cos\vartheta)^2 + (y - R_{st}\sin\vartheta\cos\psi)^2 + (z - R_{st}\sin\vartheta\sin\psi)^2}} \quad (A.3)$$

zu bilden, skalar mit den entsprechenden Komponenten des Normaleneinheitsvektors zu multiplizieren

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \Phi_{st}}{\partial n} \right)_m &= \vec{e}_n \cdot \nabla \Phi_{st} \\ &= -\cos\vartheta_{st} \cdot \frac{\partial \Phi_{st}}{\partial x} - \sin\vartheta_{st} \cos\psi_{st} \frac{\partial \Phi_{st}}{\partial y} - \sin\vartheta_{st} \sin\psi_{st} \frac{\partial \Phi_{st}}{\partial z} \end{aligned} \quad (A.4)$$

und an der Stelle

$$x = x_* + R_{st}\cos\vartheta_{st}, y = R_{st}\sin\vartheta_{st}\cos\psi_{st}, z = R_{st}\sin\vartheta_{st}\sin\psi_{st} \quad (A.5)$$

zu nehmen (der Index "st" kennzeichnet die Werte auf der Stoßfläche). Nach Multiplikation und Zusammenfassung aller Integrale ergibt sich im Nenner der Ausdruck

$$R_{st}^3 (2 - 2\cos\vartheta_{st}\cos\vartheta - 2\sin\vartheta_{st}\sin\vartheta\cos(\psi_{st} - \psi)) \quad ,$$

während der Zähler zusammengefaßt werden kann zu

$$\sqrt{R_{st}^3 \sin\vartheta (1 - \cos\vartheta_{st}\cos\vartheta - \sin\vartheta_{st}\sin\vartheta\cos(\psi - \psi_{st}))}^3 \quad .$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wurde  $\psi_{st} = 0$  gesetzt (Rotationssymmetrie). Man erhält also insgesamt

$$\left( \frac{\partial \Phi_{st}}{\partial n} \right)_m = -\frac{1}{8\pi} \int_{\pi-\epsilon}^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{q_{st}(\vartheta) \cdot \sin\vartheta d\psi d\vartheta}{\sqrt{2 - 2\cos\vartheta\cos\vartheta_{st} - 2\sin\vartheta\sin\vartheta_{st}\cos\psi}} \quad (A.6)$$

Die Werte der Normalenkomponenten vor und nach dem Stoß weichen also um einem Betrag von  $\pm q_{st}/2$  von diesem Mittelwert ab.

## Anhang B

Der Kern der Integralgleichung (5.20) wird nur dann singularär, wenn der Winkel  $\theta$  für  $x = \xi$  den Wert  $\theta = 2\pi$  bzw.  $\theta = 0$  annimmt. Durch die Aufspaltung

$$\int_0^{2\pi} \dots d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \dots d\theta = \int_{-\pi}^{\delta} \dots d\theta + \int_{\delta}^{\pi} \dots d\theta + \int_{-\delta}^{\delta} \dots d\theta \quad (B.1)$$

enthält nur das letzte Teilintegral die Singularität. Mit

$$R(\xi) = R(x) + \frac{\partial R(x)}{\partial x} \cdot \xi - x, \quad \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} \quad (B.2)$$

gilt dann in der Umgebung der singularären Stelle  $\theta = 0$ ,  $\xi = x$ :

$$\begin{aligned} K^*(x, \xi) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{(R(x)R(\xi) - R^2(\xi)\cos\theta - (x - \xi)R'(x)r(\xi)) d\theta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + R^2(x) + R^2(\xi) - 2 \cdot R(x)R(\xi)\cos\theta}^3} \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\theta^2 (R(x) + R'(x) \cdot (\xi - x))^2 d\theta}{\sqrt{(x - \xi)^2 \cdot ((1 + R'^2(x)) + \theta^2 (R(x) + R'(x) \cdot (\xi - x)))}^3} \\ &= \frac{1}{8\pi} \frac{1}{R(x)} \sqrt{1 + R'(x) \frac{\xi - x}{R(x)}} \cdot \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\theta^2 d\theta}{\sqrt{\theta^2 + \frac{(\xi - x)^2 \cdot (1 + R'^2(x))}{R^2(x) + R(x)R'(x)(\xi - x)}}^3} \quad (B.3) \end{aligned}$$

Das Integral kann elementar ausgewertet werden; man erhält mit

$$\int \frac{\theta^2 d\theta}{\sqrt{\theta^2 + c^2}^3} = -\frac{\theta}{\sqrt{\theta^2 + c^2}} + \ln\left(\theta + \sqrt{\theta^2 + c^2}\right)$$

den Ausdruck ( $R = R(x)$ ):

$$\begin{aligned} K^*(x, \xi) &= -\frac{\delta}{4\pi} \frac{1 + R' \frac{\xi - x}{R}}{\sqrt{\delta^2 (R^2 + RR'(\xi - x)) + (\xi - x)^2 (1 - R'^2)}} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \frac{1}{R} \sqrt{1 + R' \frac{\xi - x}{R}} \dots \\ &= \ln \left( \frac{\delta \sqrt{R^2 + RR'(\xi - x)} + \sqrt{\delta^2 (R^2 + RR'(\xi - x)) (\xi - x)^2 (1 + R'^2)}}{|\xi - x| \sqrt{1 + R'^2}} \right) \quad (B.4) \end{aligned}$$

Für  $\xi \mapsto x$  folgt die Singularitätendarstellung

$$\lim_{\xi \rightarrow x} K^*(x, \xi) = -\frac{1}{4\pi R(x)} + \frac{1}{4\pi R(x)} \ln \left( \frac{2\delta R(x)}{|\xi - x| \sqrt{1 + R'^2(x)}} \right) . \quad (B.5)$$

Der Kern der Integralgleichung gestattet damit die Darstellung

$$\begin{aligned} K(x, \xi) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(R(x)R(\xi) - R^2(\xi)\cos\theta - (x - \xi)R'(x)r(\xi)) d\theta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + R^2(x) + R^2(\xi) - 2 \cdot R(x)R(\xi)\cos\theta}^3} \\ &+ \underbrace{\frac{1}{4\pi R(x)} - \frac{1}{4\pi R(x)} \cdot \ln \left( \frac{2\delta R(X)}{|\xi - x| \sqrt{1 + R'^2(x)}} \right)}_{L(x, \xi)} - \\ &- \frac{1}{4\pi R(x)} + \frac{1}{4\pi R(x)} \cdot \ln \left( \frac{2\delta R(X)}{|\xi - x| \sqrt{1 + R'^2(x)}} \right) . \end{aligned} \quad (B.6)$$

Dabei ist  $L(x, x)$  stetig, und  $f$  bedeutet, daß bei der Auswertung des Integrals für  $\xi = x$  die Stelle  $\theta = 0$  mit einer  $\delta$  - Umgebung wegzulassen ist.

## Literaturverzeichnis

- [1] Oswatitsch, K. : 'Die Geschwindigkeitsverteilung bei lokalen Überschallgebieten an flachen Profilen'  
Z. angew. Math. Mech. **30** (1950), S. 17
- [2] Zierep, J. : 'Die Integralgleichungsmethode zur Berechnung schallnaher Strömungen'  
Symp. Transonicum I., Springer Verlag Berlin- Göttingen-Heidelberg, 1964
- [3] Zierep, J. : 'Theoretische Gasdynamik', 'Schallnahe und Hyperschallströmungen'  
Verlag Braun Karlsruhe, 1972
- [4] Isay, W.H. und Roestel, Th. : 'Berechnung der Druckverteilung an Flügelprofilen in gashaltiger Wasserströmung'  
Z. angew. Math. Mech. **54** (1974), S. 571  
Isay, W.H. und Roestel, Th. : 'Die niederfrequent instationäre Druckverteilung an Flügelprofilen in gashaltiger Wasserströmung'  
Z. angew. Math. Mech. **55** (1975), S. 465
- [5] Isay, W.H. : 'Kavitation'  
Schiffahrts-Verlag "Hansa", C.Schroedter & Co., Hamburg 1984
- [6] Chao, K.Y. : 'Beiträge zur Berechnung von Kavitationserscheinungen an Strömungskörpern'  
Institut für Schiffbau der Universität Hamburg, Bericht Nr.369,  
Hamburg 1978
- [7] Rotta, J.C. : 'Druckverteilung an symmetrischen Flügelprofilen bei transsonischer Strömung'  
Symp. Transonicum I., Springer Verlag Berlin- Göttingen-Heidelberg, 1964
- [8] Dreger, W. : 'Ein Verfahren zur Berechnung des Potentialsogs'  
Schiffstechnik **6** (1959), S. 175
- [9] Nowacki, H. : 'Potentialtheoretische Strömungs- und Sogberechnungen für schiffsähnliche Körper'  
Jahrb. Schiffbautechn. Ges. **57** (1963)
- [10] Keller, A. : 'Experimentelle und theoretische Untersuchungen zum Problem der modellmäßigen Behandlung von Strömungskavitation'  
Ber. Nr. 26 (1973) Versuchsanstalt für Wasserbau,  
Technische Universität München
- [11] Landau, L.D., Lifschitz, E.M. : 'Lehrbuch der Theoretischen Physik', Bd. V., Akademie-Verlag, Berlin (1975)
- [12] Hirschfelder, Curtiss, Bird : 'Molecular Theory of Gases and Liquids'  
J. Wiley & Sons Ltd., Chichester (1954)
- [13] Knapp, R.T., Daily, J.W., Hammit, F.G. : 'Cavitation'  
Mc Graw Hill Book Company, New York-London (1970)

- [14] Keller, A., Weitendorf, E.A. : 'Der Einfluß des ungelösten Gasgehalts auf die Kavitationserscheinungen an einem Propeller und auf die von ihm erregten Druckschwankungen'  
Ber. Nr. 321 A, Inst. f. Schiffbau, Universität Hamburg (1975)
- [15] Wieghardt, K. : 'Kompressibilitätseffekte in Wasser mit freiem Gasgehalt'  
Schiffstechnik **14** (1967)
- [16] van Wijngaarden, L. : 'One Dimensional Flow of Liquids Containing Small Gas Bubbles'  
Ann. Rev. Fluid Mech. **4** (1972)
- [17] Spreiter, J.R., Alksne, A. : 'Theoretical Prediction of Pressure Distribution on non-lifting Airfoils at high subsonic speeds'  
NACA Rep. **1217** (1955)
- [18] Nørstrud, H. : 'Numerische Lösungen für schallnahe Strömungen um ebene Profile'  
Zeitschrift f. Flugwissenschaften, **5** (1970)  
Three-dimensional nonlinear flow over finite symmetrical wings of arbitrary planform'  
Acta Mechanica **11** (1971)
- [19] Gullstrand, T.R. : 'The flow over two-dimensional aerofoils at incidence in the transonic speed range'  
KTH Aero TN **27** (1952)
- [20] Chakrabarrty, S.K., : 'Approximate shock-free transonic solution for lifting airfoils'  
AIAA Journal, Vol. **13**, No. **8** (1975)
- [21] Nixon, D. : 'Calculation of unsteady transonic flows using the Integral Equation Method'  
AIAA Journal, Vol. **38**, No. **9**, (1978)
- [22] Mitra, R. : 'Approximate transonic flow with shock'  
Acta Mechanica **25** (1976)
- [23] Niyogi, P., Sen, R. : 'Approximate transonic flow at incidence with shock'  
Acta Mechanica **30** (1978)
- [24] Rues, D. : 'Der Einfluß ebener Körper auf stromaufwärts liegende senkrechte Stöße'  
Zeitschrift f. Flugwissenschaften **8** Heft **3** (1960)
- [25] Voss, R. : 'Berechnung ebener transsonischer Strömungen nach der Integralgleichungsmethode mit Stoßanpassung'  
Zeitschrift f. Flugwissenschaften **4** Heft **5** (1980)
- [26] Murman, E.M., Cole, J.D. : 'Calculation of Plane Steady Transonic Flows'  
AIAA Journal Vol. **9** (1971)
- [27] Murman, E.M. : 'Analysis of Embedded Shock Waves Calculated by Relaxation Methods'  
AIAA Journal Vol. **12** No. **5** (1974)

- [28] Magnus, R.M. : 'The Direct Comparison of the Relaxation Method and the Pseudo-Unsteady Finite Difference Method for Calculating Steady Planar Transonic Flow'  
General Dynamics TN **73** (1973)
- [29] Niederdrenk, P. : 'Gleitende Stoßeinpassung in schallnaher Strömung'  
Z. angew. Math. Mech. **63** (1983)
- [30] Moretti, G. : 'Three-Dimensional, Supersonic, Steady Flows With Any Number of Embedded Shock'  
AIAA Paper **74-10** (1974)
- [31] Salas. M.D. : 'Shock Fitting Method for Complicated Two-Dimensional Supersonic Flows'  
AIAA Journal Vol. **14**, No. **5** (1976)
- [32] Daywitt, J., Kutler, P., Anderson, D. : 'Floating Shock Fitting for Cones at Large Incidence'  
AIAA Journal Vol. **16**, No. **4** (1978)
- [33] Campbell, I.J., Pitcher, A.S. : 'Shock Waves in a Liquid Containing Gas Bubbles'  
Proc. Royal Society Ser. A **243** (1958)
- [34] Rath, H.J. : 'Unsteady Pressure Waves and Shock Waves in Elastic Tubes Containing Bubble Air-Water Mixtures'  
Acta Mechanica **38** (1981)
- [35] Truckenbrodt, E. : 'Fluidmechanik'  
Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980, Zwei Bände
- [36] Schlichting, H., Truckenbrodt, E. : 'Aerodynamik des Flugzeuges'  
Springer Verlag, Berlin Göttingen Heidelberg, 1959, Zwei Bände
- [37] Oswatitsch, K. : 'Der Luftwiderstand als Integral des Entropiestromes'  
Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys.Kl., 1945
- [38] Zierep, J. : 'Der Kopfwellenabstand bei einem spitzen, schlanken Körper in schallnaher Überschallanströmung'  
Acta Mechanica **5** (1968)
- [39] Xerikos, J., Anderson, W.A. : 'An Experimental Investigation of the Shock Layer Surrounding a Sphere in Supersonic Flow'  
AIAA Journal Vol.3, No.3 (1965)
- [40] van Tuyl, A. H. : 'Use of Rational Approximations in the Calculation of Flows Past Blunt Bodies'  
AIAA Journal Vol5, No2 (1967)
- [41] Kim, Chul-Soo : 'Experimental Studies of Supersonic Flow past a Circular Cylinder'  
Journ. Phys. Soc. Japan, **7** (1956)

## Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1987 bis 1989 am Institut für Schiffbau der Universität Hamburg.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Dr.-Ing. W. H. Isay für die Anregung des Themas sowie für seine stets vorhandene Diskussionsbereitschaft.

Herrn Professor Dr.-Ing. A. E. Beylich, Stoßwellenlabor der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen und Herrn Professor D. A. Fay, Institut für Angewandte Physik der Universität Hamburg möchte ich danken für Ihr Interesse und Ihre Tätigkeit als Gutachter der Arbeit.

Für die finanzielle Unterstützung bedanke ich mich bei der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG).

Hamburg,