

538 | Dezember 1993

## SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Glenn Bannister

### Ermittlung kombinierter Wellen- und Strömungskräfte auf Offshorebauwerken

**TUHH**

*Technische Universität Hamburg-Harburg*

## **Ermittlung kombinierter Wellen- und Strömungskräfte auf Offshorebauwerken**

Glenn Bannister, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1993

ISBN: 3-89220-538-8

© Technische Universität Hamburg-Harburg  
Schriftenreihe Schiffbau  
Schwarzenbergstraße 95c  
D-21073 Hamburg

<http://www.tuhh.de/vss>

# Ermittlung kombinierter Wellen- und Strömungskräfte auf Offshorebauwerke

Dem Promotionsausschuß der  
Technischen Universität Hamburg-Harburg  
zur Erlangung des akademischen Grades  
Doktor-Ingenieur  
genehmigte Dissertation

von

Glenn Bannister

aus St. John's, Kanada

1993

1. Gutachter: Professor Dr.-Ing. O. Mahrenholtz

2. Gutachter: Professor Dr.-Ing. H. Söding

Tag der mündlichen Prüfung: 16. November, 1993

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr. 538

# Ermittlung kombinierter Wellen- und Strömungskräfte auf Offshorebauwerken

Glenn Bannister

Dez 1993

## **Vorwort**

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter des Arbeitsbereiches Meerestechnik I der Technischen Universität Hamburg-Harburg.

Mein besonderen Dank gilt den Herrn Prof. Dr.-Ing. O. Mahrenholtz von der Technischen Universität Hamburg-Harburg und Prof. Dr.-Ing. H. Söding vom Institut für Schiffbau der Universität Hamburg, die nach dem plötzlichen Tod des Leiters des Arbeitsbereiches, Professor Konstatin Kokkinowrachos, die fachliche Betreuung und Begutachtung meiner Arbeit übernommen haben.

Herrn Prof. Dr.-Ing. E. Lehmann danke ich für die freundliche Übernahme des Vorsitzes des Prüfungsausschusses.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Bezeichnungen</b>	<b>ii</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Formulierung des Randwertproblems</b>	<b>4</b>
2.1 Allgemeine Randbedingungen . . . . .	5
2.2 Linearisierung des Randwertproblems . . . . .	6
2.3 Perturbationsexpansion . . . . .	10
<b>3 Ermittlung der harmonischen Wellenkräfte</b>	<b>14</b>
<b>4 Anwendung auf rotationssymmetrische Körper</b>	<b>20</b>
4.1 Stationäres Potential . . . . .	21
4.2 Diffraktionspotential ohne Strömung . . . . .	22
4.3 Fiktive Radiationspotentiale . . . . .	22
4.4 Perturbationspotential . . . . .	23
4.5 Wellenkräfte . . . . .	24
<b>5 Allgemeine Lösungen</b>	<b>28</b>
5.1 Lösungen mittels einer Eigenfunktionsexpansion . . . . .	28
5.2 Fernfeldlösungen . . . . .	30
<b>6 Analytische Lösung für einen vertikalen Zylinder</b>	<b>33</b>
6.1 Potentialausdrücke . . . . .	33
6.2 Wellenkräfte . . . . .	35
<b>7 Verfahren für beliebige rotationssymmetrische Körper mit vertikaler Achse</b>	<b>37</b>
7.1 Allgemeine Beschreibung . . . . .	37
7.2 Lösungsansätze für die Fourierkomponenten . . . . .	39
7.3 Anwendung eines Galerkin-Verfahrens . . . . .	40
7.4 Ausdrücke für die Kraftkoeffizienten . . . . .	43
<b>8 Numerische Ergebnisse</b>	<b>47</b>
<b>9 Zusammenfassung</b>	<b>52</b>
<b>Literatur</b>	<b>54</b>

## Bezeichnungen

Entsprechend dem Aufbau dieser Arbeit werden zuerst die Bezeichnungen für das allgemeine Wellen-/Strömungsproblem aufgelistet, danach die Bezeichnungen für die Anwendung auf rotationssymmetrische Körper.

### Allgemeine Bezeichnungen:

$\nabla$	Laplace-Operator
$\nabla_1$	Laplace-Operator in der horizontalen Ebene
$x, y, z$	kartesische Koordinaten
$r, \theta, z$	Zylinderkoordinaten
$[\ ]^{(0)}$	Bezeichnet eine Größe ohne Meeresströmung
$[\ ]^{(1)}$	Bezeichnet eine Größe linear in der Meeresströmungsgeschwindigkeit
$a$	Maximaler Körperradius
$a_B$	Körperradius an der Stillwasserlinie
$A$	Amplitude der harmonischen Elementarwelle
$F_j$	harmonische Wellenkraft in Richtung $j$
$\widehat{F}_j$	komplexe Amplitude der harmonischen Wellenkraft in Richtung $j$
$F_n$	Froudezahl; $F_n = U/\sqrt{ga}$
$g$	Beschleunigung infolge Gravitation
$G$	Greensche Funktion
$h$	Wassertiefe
$h_1$	Amplitudenverteilung für Fernfeldwellen
$i$	Imaginärzahl
$k$	Wellenzahl, Integrationsvariable
$k_0$	Wellenzahl der harmonischen Elementarwelle
$k_1$	Wellenzahlfunktion für das Diffraktionspotential
$\vec{n}$	Einheitsnormale zu einer Fläche
$n_j$	verallgemeinerte Normalkomponente
$p$	Druck
$p_{\text{inst}}, \hat{p}$	instationärer Druck, komplexe Amplitude des instationären Druckes
$S_B, S_0, S_F$	Körper-, Wasser-, und Bodenoberflächen
$S_I$	Zylindrische Kontrollfläche außerhalb des Körpers
$S_\infty$	Zylindrische Kontrollfläche im Unendlichen
$t$	Zeit
$U$	Meeresströmungsgeschwindigkeit
$\vec{v}$	Geschwindigkeitsvektor der Flüssigkeit
$V_n$	Normalgeschwindigkeit einer Fläche
$X_j$	Dimensionslose Kraft- und Momentkoeffizienten in Richtung $j$
$X_j^{(0)}, X_j^{(1)}$	Komponente von $X_j$ ohne und linear in die Meeresströmung
$X_{Pj}, X_{Cj}$	Komponente von $X_j^{(1)}$
$\mathcal{F}$	Funktion für die inhomogene Wasseroberflächenbedingung
$\mathcal{F}^L, \mathcal{F}^F$	lokale und Fernfeldkomponenten von $\mathcal{F}$
$\alpha$	Richtung der Meeresströmung gegenüber der positiven $x$ -Achse
$\beta$	Richtung der harmonischen Elementarwelle gegenüber der positiven $x$ -Achse
$\gamma$	Winkel zwischen Richtung der Elementarwelle und der Meeresströmung; $\gamma = \beta - \alpha$
$\delta_{ij}$	Kronecker-Symbol

$\delta_j$	Länge zur Normalisierung der Wellenmomente
$\lambda$	Wellenlänge
$\nu, \nu_0$	Wellenparameter; $\nu = \omega^2/g, \nu_0 = \omega_0^2/g$
$\tau, \tau_0$	Dimensionslose Geschwindigkeitsparameter; $\tau = U\omega/g, \tau_0 = U\omega_0/g$
$\rho$	Wasserdichte
$\Phi$	Gesamtgeschwindigkeitspotential, $\Phi = \varphi + U\bar{\varphi}$
$\varphi$	Zeitharmonische Komponente von $\Phi$
$\bar{\varphi}$	zeitstationäre Komponente von $\Phi$ für $U = 1$
$\varphi_0$	Potential der freien harmonischen Elementarwelle
$\phi$	komplexe Amplitude des zeitharmonischen Potentials $\varphi$ ; $\phi = A(\phi_0 + \phi_7)$
$\bar{\phi}$	Störkomponente von $\bar{\varphi}$ infolge der Präsenz des Körpers
$\phi_0$	komplexe Amplitude von $\varphi_0$ für $A = 1$
$\phi_7$	Diffraktionsanteil von $\phi$ für $A = 1$ $\phi_7 = \phi_7^{(0)} + i\tau_0\phi_7^{(1)}$
$\phi_j^{(0)}$	komplexe Amplitude des $j$ -ten Strömungspotentials ohne Strömung; für die fiktiven Radiationspotentiale ist $j=1, \dots, 6$ , für das Diffraktionspotential ist $j=7$
$\phi_7^{(1)}$	Perturbationskomponente von $\phi_7$ linear in der Strömungsgeschwindigkeit
$\phi_p$	partikuläre Fernfeldlösung für $\phi_7^{(1)}$
$\sigma_0$	dimensionsloser Parameter abhängig von der Wassertiefe
$\omega$	Wellenbegegnungsfrequenz
$\omega_0$	Wellenkreisfrequenz ohne Meeresströmung
$\zeta$	Erhebung der Wasseroberfläche
$\bar{\zeta}$	Erhebung der Wasseroberfläche infolge der zeitstationären Strömung
$\zeta_0$	Erhebung der Wasseroberfläche infolge der harmonischen Elementarwelle

### Bezeichnungen für rotationssymmetrische Körper:

$[ ]^l$	Bezeichnet eine Größe für den Fluidbereich $l$
$a_l, a_l^*$	Innerer und äußerer Radius des Elementes $l$
$A_{0m}$	Koeffizienten für die Expansion des Elementarwellenpotentials $\phi_0$
$A_{jm}$	Koeffizienten für die Lösung des Potentials $\psi_{jm}$ im Fernfeld
$A_{Ajmi}^l, A_{Bjmi}^l$	Lösungskoeffizienten für $\psi_{jm}$ im Fluidbereich $l, i = 0, \dots, N_l - 1$
$\bar{A}_{Ai}^l, \bar{A}_{Bi}^l$	Lösungskoeffizienten für $\bar{\psi}$ im Fluidbereich $l, i = 0, \dots, N_l - 1$
$\bar{A}_m$	Koeffizienten für die partikuläre Lösung des Perturbationspotentials
$B_{1i}, B_{5i}$	Lösungskoeffizienten für $\psi_{11}$ und $\psi_{51}$ für den vertikalen Zylinder
$d_l$	$z$ -Koordinate der Treppenstufe für Element $l$
$h_l$	Höhe des Elementes $l$
$f_m, g_m, h_m$	Hilfsfunktionen für die inhomogene Wasseroberflächenbedingung
$\mathcal{F}_m, \mathcal{F}_m^L, \mathcal{F}_m^F$	Fourier Komponenten von $\mathcal{F}, \mathcal{F}^L$ und $\mathcal{F}^F$
$\mathcal{F}_m^l$	Fourier Komponente $\mathcal{F}_m$ für Element $l$
$\mathcal{G}_m$	Fourierkomponente der inhomogenen Strahlungsbedingung für $\phi_7^{(1)}$
$\mathcal{H}_m$	Fourierkomponente des Integralkerns für $X_{Cj}$
$\mathbf{G}(\psi, \phi)$	Greenscher Operator; $\mathbf{G}(\psi, \phi) = \psi\phi_r - \phi\psi_r$
$m$	Fourierterm in $\theta$
$n_r, n_z$	Normalkomponente der Körperoberfläche in radialer und vertikaler Richtung

$N_l$	Anzahl der Lösungsterme für Fluidelement $l$
$N_U, N_L, N_I$	Anzahl der Lösungsterme für die oberen, die unteren und das äußere Fluidelement
$q_{jm}^l$	partikuläre Lösungskomponente für $\psi_{jm}$ im Fluidbereich $l \neq 0$
$Q_{jm}^l$	Eigenfunktionsexpansion für $\psi_{jm}$ im Fluidbereich $l$
$\bar{Q}^l$	Eigenfunktionsexpansion für $\bar{\psi}$ im Fluidbereich $l$
$R_{0m}$	Radialfunktionen für das harmonische Wellenpotential
$R_{1i}$	Radialfunktionen für den vertikalen Zylinder
$R_{jmi}^l, \bar{R}_i^l$	Radialfunktionen für $\psi_{jm}, \bar{\psi}$ im Fluidbereich $l$
$R_{Ajmi}^l, R_{Bjmi}^l$	radiale Eigenfunktionen für $\psi_{jm}$ im Fluidbereich $l$
$\bar{R}_{Ai}^l, \bar{R}_{Bi}^l$	radiale Eigenfunktionen für $\bar{\psi}$ im Fluidbereich $l$
$\mathcal{R}_{mn}$	Hilfsfunktion; $\mathcal{R}_{mn}(r) = A_{0m}J_n(k_0r) + A_{7m}H_n(k_0r)$
$Y_j^{(0)}, Y_j^{(1)}$	winkelunabhängige Kraftkoeffizienten
$Y_{Pj}, Y_{Cj}$	Komponente von $Y_j^{(1)}$
$Z_i$	vertikale Eigenfunktionen für den vertikalen Zylinder
$Z_i^l, \bar{Z}_i^l$	vertikale Eigenfunktionen für $\bar{\psi}, \psi_{jm}$ im Fluidbereich $l$
$\alpha_i^l, \bar{\alpha}_i^l$	Wellenzahlen für den Fluidbereich $l$
$\alpha_i$	Wellenzahlen für den vertikalen Zylinder
$\Lambda_{nij}^l$	Integrale der vertikalen Funktionen für $Y_{Cj}$
$\psi_{0m}$	$m$ -te Fourierkomponente von $\phi_0$
$\psi_{jm}$	$m$ -te Fourierkomponente von $\phi_j^{(0)}$
$\bar{\psi}$	Fourierkomponente von $\bar{\phi}$ für $m = 1$
$\Psi_m$	$m$ -te Fourierkomponente von $\phi_p$

## 1 Einleitung

In vielen Meeresgebieten herrschen oft nicht nur eine durch den Wind erzeugte Wellenbewegung des Wassers vor, sondern auch signifikante Meeres- oder Gezeitenströmungen. Offshorebauwerke, die in solchen Gebieten installiert sind, werden demzufolge nicht nur Wellen-, sondern auch kombinierten Wellen- und Strömungseffekten ausgesetzt. Ein analoger Fall ist das langsame Schleppen einer Struktur, wie z.B. bei einer Offshore-Installation. In beiden Fällen kann die der Wellenströmung überlagerte Parallelströmung die auftretenden Wellenkräfte entscheidend beeinflussen. Ziel dieser Arbeit ist, die durch eine Strömung erzeugten Veränderungen der linearen Wellendiffraktionskräfte für eine Klasse von Offshore-Strukturen zu erfassen. Der Begriff *Strömung* bezieht sich hier auf eine translatorische Bewegung des Wassers infolge Meeres- oder anderen Arten von Parallelströmungen, im Gegensatz zu der rotatorischen Wasserbewegung der Schwerewellen.

Für die lineare hydrodynamische Analyse ohne Strömung sind in den letzten Jahrzehnten mehrere potentialtheoretische Verfahren entwickelt worden. Es werden am häufigsten Singularitätenverfahren bzw. Panel-Verfahren verwendet. Bei rotationssymmetrischen Körpern mit vertikaler Achse, zu denen eine Vielzahl von Offshore-Strukturen gehören, können spezielle Verfahren angewandt werden, die diese Geometrie ausnutzen. Eine dieser Methoden ist die sogenannte Makroelementmethode, die von Kokkinowrachos et al. (1980), (1986) entwickelt wurde.

Bei der Bestimmung der linearen Wellenkräfte auf stationäre Strukturen wird die Wellensteilheit als klein angenommen und das Problem bezüglich der Wellenamplitude linearisiert. Die erste Approximation der Effekte der Strömung besteht darin, die zeitstationäre Umströmung des Körpers ohne Wellen zu berechnen, und diese der ohne Strömung berechneten Wellenströmung zu überlagern. Diese Methode ergibt aber nicht zufriedenstellende Ergebnisse, denn die Wechselwirkung der zwei Strömungsformen ist nicht vernachlässigbar. Aus dieser Wechselwirkung resultieren für das kombinierte Wellen-/Strömungsproblem kompliziertere Randbedingungen auf der Wasseroberfläche gegenüber dem Fall ohne Strömung.

Die konsistente Lösung des Wellen-/Strömungsproblems geht von den exakten Randbedingungen für das gesamte Geschwindigkeitspotential aus. Aus der Linearisierung nach der Wellenamplitude  $A$  resultiert ein in der Strömungsgeschwindigkeit nichtlineares Randwertproblem. Die Lösung dieses Randwertproblems erfolgt dann durch die Aufteilung der Strömung in einen stationären Anteil infolge der Parallelströmung und einen zeitharmonischen Anteil infolge der Wellenerregung. Unter der Annahme einer kleinen Strömungsgeschwindigkeit  $U$  werden dann beide Probleme nach der Strömungsgeschwindigkeit linearisiert. Für die stationäre Strömung folgt dann die schon erwähnte Umströmung des Körpers ohne Wellen. Für den zeitharmonischen Anteil erscheinen zusätzliche Terme der Ordnung  $O(AU)$  in den Randbedingungen gegenüber dem Fall ohne Strömung. Die Wechselwirkung zwischen Wellen und Strömungen ist von Peregrine (1976) ausführlich behandelt, und die Aufstellung der in  $U$  nichtlinearen Randbedingungen ist von Newman (1978) beschrieben worden.

In den letzten Jahren sind im Hinblick auf das Verhalten von langsam fahrenden Schiffen von einigen Autoren Panel-Verfahren für das Wellen-/Strömungsproblem entwickelt worden. Diese Verfahren basieren auf der Greenschen Funktion für eine pulsierende Quelle in Translation bzw. ihrer asymptotischen Form für kleine Geschwindigkeiten, deren Anwendung von Grekas (1981) und Huijsmans und Hermans (1985) untersucht worden ist. Da diese Greensche Funktion die Randbedingung an der Wasseroberfläche nur im Fernfeld erfüllt, d.h. ohne die Störung der Parallelströmung durch die Präsenz des Körpers zu berücksichtigen, müssen sowohl die Körperoberfläche als auch die Wasseroberfläche als Randelemente diskretisiert werden.

Zhao et.al. (1988) und Zhao und Faltinsen (1988, 1989) entwickelten eine Hybrid-Methode, wobei im Nahfeld ein Randelementverfahren und im Fernfeld eine Multipolexpansion der Greenschen Funktion verwendet wurde.

Ein Perturbationsverfahren wurde von Nossen et al. (1989a,b) und Grue und Palm (1991a,b) präsentiert. Sie verwendeten eine Perturbationsexpansion der Greenschen Funktion und des Diffraktionspotentials um die Sströmungsgeschwindigkeit und erhielten daraus Randwertprobleme nullter und erster Ordnung. Hierdurch wird die Notwendigkeit einer Idealisierung der Wasseroberfläche als Randelement umgangen. Für das Problem erster Ordnung muß aber die Lösung nullter Ordnung über die Wasseroberfläche integriert werden.

Eine volle Elimination der Wasseroberfläche von dem Randwertproblem schlug Slavounous (1989) vor. Er verwendet ebenfalls eine Perturbationsexpansion des Geschwindigkeitspotentials um die Vorwärtsgeschwindigkeit. Anhand der Lösung nullter Ordnung und der Lösung für die zeitstationäre Strömung werden Greensche Funktionen formuliert, die die Randbedingung an der Wasseroberfläche im ganzen Fluidbereich erfüllen.

Eine andere Methode, in der die Rankine-Quellen verwendet werden, ist von Takagi (1991) präsentiert worden. Die Wasseroberflächen- und Abstrahlungsbedingungen werden hier numerisch erfüllt.

Weitere Arbeiten auf diesem Gebiet sind von Wang (1988) für die Berechnung des Wellenbildes langsam fahrender Schiffe sowie von Wu und Eatock Taylor (1990) für die Bestimmung der Reaktionskräfte auf oszillierende horizontale Zylinder mit kleinen Vorwärtsgeschwindigkeiten veröffentlicht worden.

In der vorliegende Arbeit wird das Wellen-/Strömungsproblem für rotationssymmetrische Körper mit vertikaler Achse behandelt und eine Erweiterung des Makroelementverfahrens vorgestellt. Durch die Ausnutzung der Geometrieigenschaften dieser Körper läßt sich das dreidimensionale Problem auf zweidimensionale Probleme reduzieren, für deren Lösungen eine Eigenfunktionsmethode verwendet wird. Dies bedeutet gegenüber den Panel-Verfahren einen Vorteil, da die rechnerisch aufwendigen Greenschen Funktionen nicht benötigt werden. Die Makroelementmethode ist von Thanos (1989) für die Bestimmung von Wellenkräften zweiter Ordnung und von Zibell (1989) für Mehrkörpersysteme erfolgreich eingesetzt worden.

Im folgenden Abschnitt 2 wird das Randwertproblem für beliebige Körper ausführlich hergeleitet und beschrieben. Zunächst wird das exakte Problem aufgestellt und dann bezüglich der Wellenamplitude und der Strömungsgeschwindigkeit linearisiert. Zur Lösung des Randwertproblems kommt eine Perturbationsexpansion des Diffraktionspotentials zum Einsatz. Aus dieser Expansion resultiert ein Diffraktionsproblem ohne Strömung und eine Randwertaufgabe für ein Perturbationspotential.

Im dritten Abschnitt wird die Berechnung der harmonischen Wellenkräfte beschrieben. Mit Hilfe des Greenschen Satzes und fiktiver Abstrahlungspotentiale wird die volle Lösung des Perturbationspotentials umgangen. Die ermittelten Ausdrücke für die harmonischen Wellenkräfte hängen nur von der Lösung ohne Strömung und von der Fernfeldlösung für das Perturbationspotential ab.

In Abschnitt 4 erfolgt eine Konkretisierung der beschriebenen Lösungsmethodik mittels einer Fourierexpansion auf rotationssymmetrische Körper. Dabei wird kein Bezug auf eine bestimmte numerische Methode zur Lösung der dabei entstehenden zweidimensionalen Probleme genommen. Die Randwertprobleme für die einzelnen Fourierkomponenten und die Ausdrücke für die Wellenkräfte auf rotationssymmetrische Körper werden aufgestellt.

Im Abschnitt 5 werden einige allgemeine Lösungen für die Fourierkomponenten dargestellt. Die für die Makroelementmethode benötigten Eigenfunktionsexpansionen werden kurz formuliert und die Fernfeldlösungen für die Perturbationskomponente ausführlich hergeleitet.

Eine analytische Lösung für einen sich vom Meeresboden bis zur Wasseroberfläche erstreckenden vertikalen Zylinder befindet sich im Abschnitt 6.

In Abschnitt 7 wird die Anwendung des Makroelementverfahrens zur Berechnung der Fourierkomponenten für beliebige rotationssymmetrische Körper beschrieben. Zuerst werden die für

das Verfahren verwendeten Eigenfunktionsansätze angegeben und die Anwendung eines Galerkinverfahrens zur Bestimmung der Lösungskoeffizienten demonstriert. Die Formeln für die Bestimmung der harmonischen Wellenkräfte werden aufgestellt.

Numerische Ergebnisse für den vertikalen Zylinder und einige typische Offshore-Strukturen werden im Abschnitt 8 dargestellt. Berechnungen für eine schwimmende Halbkugel werden den Ergebnissen anderer Methoden gegenübergestellt.

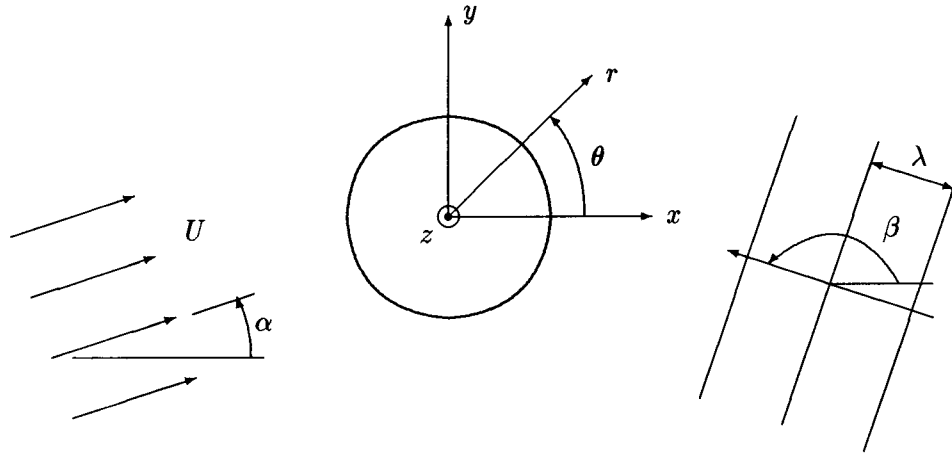


Bild 1: Definitionsskizze, Ansicht von oben

## 2 Formulierung des Randwertproblems

Für die Formulierung des Randwertproblems wird ein großer, festgehaltenener, rotationssymmetrischer Körper in flachem Wasser betrachtet, wie in den Bildern 1 und 2 dargestellt. Dieser Körper wird einer harmonischen Welle der Amplitude  $A$  und Wellenlänge  $\lambda$  und einer parallelen Strömung der Geschwindigkeit  $U$  ausgesetzt. Der Winkel  $\beta$  bezeichnet die Fortpflanzungsrichtung der harmonischen Welle bezüglich der positiven  $x$ -Achse. Die Richtung der Parallelströmung wird analog mit dem Winkel  $\alpha$  festgelegt. Die Wassertiefe wird als konstant angenommen und mit  $h$  bezeichnet. Die Geschwindigkeit der Strömung wird als konstant über die Wassertiefe angenommen. Sowohl die dimensionslose Strömungsgeschwindigkeit  $U/\sqrt{g\lambda}$  auch die Wellensteilheit werden als klein angenommen, d.h.  $\ll 1$ .

Es werden zwei ortsfeste Koordinatensysteme  $(x, y, z)$  und  $(r, \theta, z)$  gewählt, deren Ursprünge in Höhe des Meeresbodens auf der Symmetrieachse des Körpers liegen. Die  $z$ -Achse zeigt positiv nach oben. Die Transformation zwischen dem kartesischen Koordinatensystem  $(x, y, z)$  und dem zylindrischen Koordinatensystem  $(r, \theta, z)$  ist gegeben durch

$$x = r \cos \theta \quad \text{und} \quad y = r \sin \theta. \quad (2.1)$$

Es wäre ohne Verlust der Allgemeingültigkeit möglich, entweder die Wellenrichtung  $\beta$  oder die Strömungsrichtung  $\alpha$  zu Null zu setzen. Beide werden hier aber beibehalten, damit man dann für rotationssymmetrische Körper nur die Kräfte bzw. Momente in der  $y = 0$  Ebene herleiten muß, d.h. die Kräfte in  $x$ - und  $z$ -Richtungen und das Moment um die  $y$ -Achse.

Die ungestörte Wasseroberfläche wird mit  $z = h$  definiert und als  $S_F$  bezeichnet. Die Wellenerhebung der freien Oberfläche wird mit  $\zeta(x, y, t)$  bezeichnet. Die Gleichung der gestörten freien Oberfläche lautet also  $z = h + \zeta$ .

Das Wasser wird als inkompressibel, wirbelfrei und reibungslos angenommen, d.h. es herrscht eine ideale, potentialtheoretisch beschreibbare Strömung. Das gesamte Geschwindigkeitspotential  $\Phi(x, y, z, t)$ , das auch die Parallelströmung umfaßt, muß die Laplace-Gleichung

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (2.2)$$

im gesamten Flüssigkeitsbereich erfüllen.

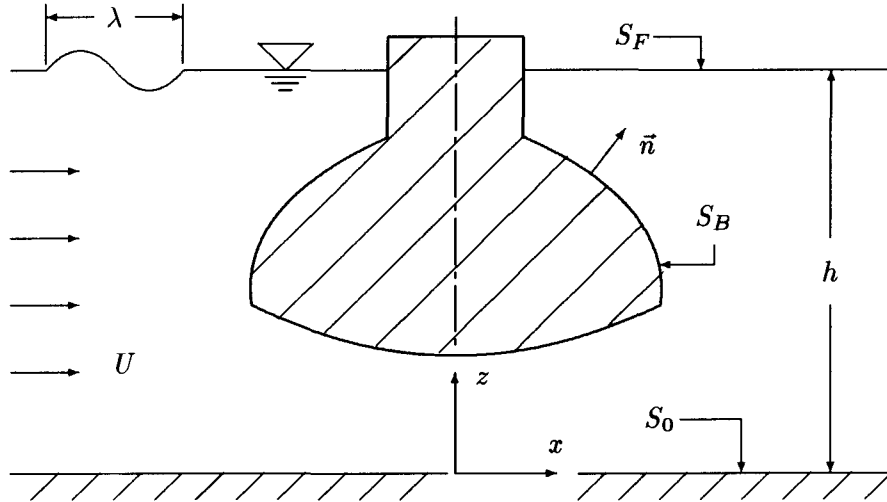


Bild 2: Definitionsskizze, Schnitt bei  $y = 0$  für  $\alpha = \beta = 0$

Das Randwertproblem wird in diesem Abschnitt zuerst in kartesischen Koordinaten für beliebige Körper hergeleitet und dann linearisiert. Die Anwendung auf rotationssymmetrische Körper erfolgt danach in Zylinderkoordinaten.

## 2.1 Allgemeine Randbedingungen

Die Bedingung von konstantem Druck auf der Wasseroberfläche ergibt aus der Bernoulli-Gleichung die dynamische Randbedingung für die Wellenerhebung  $\zeta$  und das Geschwindigkeitspotential  $\Phi$ :

$$\zeta = -\frac{1}{g} \left\{ \Phi_t + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi - \frac{1}{2} U^2 \right\} \quad \text{auf } z = h + \zeta. \quad (2.3)$$

Hier bezeichnet  $\Phi_t$  die partielle Ableitung von  $\Phi$  nach der Zeit  $t$ . Wo nicht anders bemerkt, bezeichnet auch im folgenden eine unabhängige Variable als Subskript eine partielle Ableitung nach dieser Variable. Für die kinematischen Randbedingungen an den Rändern wird zuerst eine allgemeine Fläche  $S$  betrachtet, die durch die Gleichung  $F(x, y, z, t) = 0$  beschrieben wird. Die Einheitsnormale  $\vec{n}$  zu dieser Fläche ist dann

$$\vec{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}, \quad (2.4)$$

und die Geschwindigkeit der Fläche in Richtung von  $\vec{n}$

$$V_n = \frac{-F_t}{|\nabla F|}. \quad (2.5)$$

Damit  $S$  tatsächlich eine Grenzfläche der Flüssigkeit beschreibt, muß die physikalische Bedingung erfüllt werden, daß es keinen Durchfluß durch  $S$  gibt. Mathematisch wird die Normalgeschwindigkeit der umgebenden Flüssigkeit gleich der der Fläche gesetzt:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = V_n \quad \text{auf } S, \quad (2.6)$$

wobei  $\vec{v}$  die Geschwindigkeit der Flüssigkeit ist und die Lage von  $S$  als zeitabhängig angenommen wird. Ersetzt man  $\vec{n}$  und  $V_n$ , so resultiert die Bedingung, daß die substantielle Ableitung  $DF/Dt$  Null sein muß:

$$\vec{v} \cdot \nabla F + F_t = \frac{DF}{Dt} = 0 \quad \text{auf } S. \quad (2.7)$$

Unter Verwendung des Geschwindigkeitspotentials ergibt sich die allgemeine kinematische Randbedingung für eine Oberfläche:

$$\nabla\Phi \cdot \nabla F + F_t = 0 \quad \text{auf } S. \quad (2.8)$$

Die kinematische Randbedingung an der freien Wasseroberfläche erhält man durch das Einsetzen von  $F = z - h - \zeta$ :

$$\frac{D\zeta(x, y, t)}{Dt} = \Phi_z \quad \text{auf } z = h + \zeta. \quad (2.9)$$

Die kinematische und die dynamische Randbedingung an der freien Wasseroberfläche kann man kombinieren, indem man  $\zeta$  aus (2.3) heranzieht und die substantielle Ableitung auswertet. Es folgt dann die kombinierte nichtlineare Randbedingung für  $\Phi$ :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \nabla\Phi \cdot \nabla \right)^2 \Phi + g\Phi_z = 0 \quad \text{auf } z = h + \zeta, \quad (2.10)$$

bzw. ausgeschrieben:

$$\Phi_{tt} + 2\nabla\Phi_t \cdot \nabla\Phi + \frac{1}{2}\nabla\Phi \cdot \nabla(\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi) + g\Phi_z = 0 \quad \text{auf } z = h + \zeta. \quad (2.11)$$

Diese Bedingung erhält man auch, wenn man die substantielle Ableitung des Druckes an der freien Oberfläche zu Null setzt.

Der Körper wird als feststehend angenommen, also ist für die benetzte Körperoberfläche  $S_B$  die Normalgeschwindigkeit Null. Man erhält dann aus (2.6) für die Randbedingung am Körper

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = \nabla\Phi \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{auf } S_B. \quad (2.12)$$

Nach Einführung der Normalableitung

$$\frac{\partial}{\partial n} = \vec{n} \cdot \nabla \quad (2.13)$$

kann die Körperoberfläche aufgestellt werden als

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } S_B. \quad (2.14)$$

Die Annahme konstanter Wassertiefe ergibt auf ähnliche Weise die Randbedingung am Boden:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{auf } z = 0. \quad (2.15)$$

Ferner muß für  $\Phi$  eine geeignete Strahlungsbedingung festgelegt werden, die das richtige Verhalten des Geschwindigkeitspotentials weit vom Körper sichert, d.h. daß die Diffraktionswellen vom Körper weglaufen und weit vom Körper verschwinden. Auf diese Bedingung wird später näher eingegangen.

## 2.2 Linearisierung des Randwertproblems

Für die Linearisierung des Problems ist das Geschwindigkeitspotential  $\Phi$  in zwei Teile aufzuspalten, und zwar in einen zeitkonstanten Anteil, der aus der Umströmung des Körpers durch die Parallelströmung resultiert, und einen zeitabhängigen Anteil infolge der Wellenerregung. Auf Grund dieses Umstandes ergibt sich folgende Schreibweise:

$$\Phi = U\bar{\varphi}(x, y, z) + \varphi(x, y, z, t). \quad (2.16)$$

Das zeitstationäre Potential  $U\bar{\varphi}$  beschreibt die weit vom Körper herrschende Parallelströmung und deren Störung durch die Präsenz des Körpers. Entsprechend wird auch  $\bar{\varphi}$  aufgeteilt:

$$\bar{\varphi}(x, y, z) = \bar{\phi}(x, y, z) + x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad (2.17)$$

wobei das Störpotential  $\bar{\phi}$  dipolartig ist und weit vom Körper verschwindet. Obwohl  $\bar{\varphi}$  und  $\bar{\phi}$  mit der Parallelgeschwindigkeit  $U$  normalisiert werden, also die Dimension einer Länge haben, werden sie der Einfachheit halber auch als das stationäre Potential bzw. Störpotential bezeichnet. Um die Notation in einigen Fällen zu vereinfachen, werden sowohl  $\bar{\varphi}$  als auch  $\bar{\phi}$  in der folgende Analyse verwendet.

Das zeitabhängige Potential  $\varphi(x, y, z, t)$  beschreibt das freie Wellensystem, das weit vom Körper herrscht, sowie die Diffraktion der einlaufenden Wellen durch die Präsenz des Körpers und der zeitstationären Strömung. Die Größenordnung von  $\varphi$  ist durch die Wellenamplitude  $A$  bestimmt, die als klein angenommen wird. Um das Randwertproblem zu linearisieren, verwendet man die Zerlegung (2.16) in der nichtlinearen Randbedingung (2.11) auf der freien Oberfläche und vernachlässigt zuerst die Terme, die mindestens der Ordnung  $A^2$  sind. Somit resultiert aus (2.11)

$$\begin{aligned} \varphi_{tt} + g(\varphi_z + U\bar{\varphi}_z) + 2U\nabla\varphi_t \cdot \nabla\bar{\varphi} + \frac{U^2}{2}\nabla\varphi \cdot \nabla(\nabla\bar{\varphi})^2 + U^2\nabla\bar{\varphi} \cdot \nabla(\nabla\varphi \cdot \nabla\bar{\varphi}) \\ + \frac{U^3}{2}\nabla\bar{\varphi} \cdot \nabla(\nabla\bar{\varphi})^2 = 0 + O(A^2) \quad \text{auf } z = h + \zeta. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Die Erhebung der Wasseroberfläche ergibt sich zu derselben Ordnung aus der impliziten Gleichung der dynamischen Randbedingung:

$$\zeta = -\frac{1}{g} \left\{ \varphi_t + U\nabla\bar{\varphi} \cdot \nabla\varphi + \frac{U^2}{2}(\nabla^2\bar{\varphi} - 1) \right\} + O(A^2) \quad \text{auf } z = h + \zeta. \quad (2.19)$$

Die Aufteilung in ein zeitstationäres und ein zeitabhängiges Problem erlaubt es, die Lösung des zeitstationären Potentials  $\bar{\varphi}$  getrennt zu bestimmen. Mit dem bekannten zeitstationären Potential stellt (2.18) eine lineare Differentialgleichung mit veränderlichen Koeffizienten für  $\varphi$  dar. Die Wasseroberflächenbedingung für  $\bar{\varphi}$  erhält man aus (2.18), indem  $\varphi$  zu Null gesetzt wird:

$$\frac{U^2}{2}\nabla\bar{\varphi} \cdot \nabla(\nabla^2\bar{\varphi}) + g\bar{\varphi}_z = 0 \quad \text{auf } z = h + \bar{\zeta}. \quad (2.20)$$

Setzt man  $\alpha = -\pi$ , d.h. eine Parallelströmung in der negativen  $x$ -Richtung, so stellt (2.20) die übliche nichtlineare Randbedingung für ein mit der Geschwindigkeit  $U$  fahrendes Schiff im glatten Wasser dar.

Die Wellenerhebung infolge der zeitkonstanten Strömung ist hier mit  $\bar{\zeta}$  bezeichnet und durch die implizite Gleichung

$$\bar{\zeta} = -\frac{U^2}{g} \left\{ \left( \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y} \right) \bar{\phi} + \frac{1}{2}(\nabla\bar{\phi})^2 \right\} \quad \text{auf } z = h + \bar{\zeta} \quad (2.21)$$

gegeben. Die Randbedingungen für  $\varphi$  werden nun um die zeitstationäre Wasseroberfläche  $z = h + \bar{\zeta}$  entwickelt. Hierfür wird die Taylor-Expansion

$$[f]_{z=h+\zeta} = \left[ f + (\zeta - \bar{\zeta}) \frac{\partial f}{\partial z} \right]_{z=h+\bar{\zeta}} + O(A^2) \quad (2.22)$$

auf die Terme in (2.18) und (2.19) angewandt, die nur von dem stationären Potential abhängen. Durch diese Taylor-Expansion und die Anwendung der Wasseroberflächenbedingungen für  $\bar{\zeta}$

und  $\bar{\varphi}$  (siehe Newman (1978)) erhält man für die Wellenerhebung infolge der instationären Strömung die explizite Formel

$$\zeta - \bar{\zeta} = -\frac{\varphi_t + U \nabla \bar{\varphi} \cdot \nabla \varphi}{g + U^2 \nabla \bar{\varphi} \cdot \nabla \bar{\varphi}_z} \quad \text{auf } z = h + \bar{\zeta}. \quad (2.23)$$

Die kombinierte Wasseroberflächenbedingung für  $\varphi$  wird zu

$$\begin{aligned} & \varphi_{tt} + g\varphi_z + 2U \nabla \varphi_t \cdot \nabla \bar{\varphi} + \frac{U^2}{2} \nabla \varphi \cdot \nabla (\nabla \bar{\varphi})^2 + U^2 \nabla \bar{\varphi} \cdot \nabla (\nabla \varphi \cdot \nabla \bar{\varphi}) \\ & - \frac{\varphi_t + U \nabla \bar{\varphi} \cdot \nabla \varphi}{g + U^2 \nabla \bar{\varphi} \cdot \nabla \bar{\varphi}_z} \left\{ U g \bar{\varphi}_{zz} + \frac{U^3}{2} \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \bar{\varphi} \cdot \nabla (\nabla \bar{\varphi})^2) \right\} = 0 \quad \text{auf } z = h + \bar{\zeta}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Weit vom Körper hat man  $\bar{\phi} = \bar{\zeta} = 0$ , und es gilt für die Wellenerhebung

$$\zeta = \frac{1}{g} \left[ \varphi_t + U \cos \alpha \varphi_x + U \sin \alpha \varphi_y \right]_{z=h} \quad \text{für } r \rightarrow \infty \quad (2.25)$$

und für die Wasseroberflächenbedingung entsprechend (2.10)

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + U \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \varphi + g\varphi_z = 0 \quad \text{auf } z = h, r \rightarrow \infty. \quad (2.26)$$

Wenn das stationäre Störpotential  $\bar{\phi}$  auf der freien Oberfläche vernachlässigt werden kann, gelten diese Bedingungen im ganzen Fluidbereich, wie zum Beispiel im Falle eines tiefgetauchten Körpers, wie von Grue und Palm (1985) betrachtet.

Die Bedingungen (2.25) und (2.26) gelten auch im ganzen Fluidbereich für die freie einlaufende Welle und ergeben die bekannte harmonische Elementarwelle. Bezeichnet man mit  $(\bar{x}, \bar{y}, z)$  ein sich mit der Parallelströmung bewegendes Koordinatensystem, so ist die Erhebung der Elementarwelle durch

$$\bar{\zeta}_0(\bar{x}, \bar{y}, t) = A \cos(k_0 \bar{x} \cos \beta + k_0 \bar{y} \sin \beta - \omega_0 t) \quad (2.27)$$

gegeben. Hier ist  $\omega_0$  die Wellenkreisfrequenz und  $k_0 = 2\pi/\lambda$  die Wellenzahl. Die Wellenkreisfrequenz gilt für eine harmonische Welle ohne Strömung und erfüllt die übliche für  $U = 0$  geltende Dispersionsgleichung

$$\omega_0^2 = g k_0 \tanh(k_0 h). \quad (2.28)$$

Wird nun  $\bar{x}$  durch  $x - Ut \cos \alpha$  und  $\bar{y}$  durch  $y - Ut \sin \alpha$  ersetzt, so erhält man die Gleichung der in festen Koordinaten beschriebenen Wellenerhebung:

$$\zeta_0(x, y, t) = A \cos(k_0 x \cos \beta + k_0 y \sin \beta - \omega t), \quad (2.29)$$

wobei  $\omega$  die Begegnungsfrequenz der Welle ist. Es gilt per Definition, daß  $\gamma$  der Winkel zwischen den Wellen- und Strömungsrichtungen ist, d.h.

$$\gamma = \beta - \alpha, \quad (2.30)$$

und somit lautet die Beziehung zwischen der Wellenfrequenz  $\omega_0$  und der Wellenbegegnungsfrequenz  $\omega$

$$\omega = \omega_0 + U k_0 \cos \gamma. \quad (2.31)$$

Die Überlagerung der Welle mit der Parallelströmung wirkt sich also nur auf die Begegnungsfrequenz aus. Das die Elementarwelle beschreibende Geschwindigkeitspotential ergibt sich aus den Randbedingungen zu

$$\varphi_0 = \frac{Ag}{\omega_0} \frac{\cosh(k_0 z)}{\cosh(k_0 h)} \sin(k_0 x \cos \beta + k_0 y \sin \beta - \omega t). \quad (2.32)$$

Man setzt nun für das Potential  $\varphi$  die gleiche harmonischen Zeitabhängigkeit wie für die Elementarwelle an. Hierfür dient die komplexe Schreibweise

$$\varphi(x, y, z, t) = \text{Re} \{ \phi(x, y, z) e^{-i\omega t} \},$$

wobei  $\phi$  die komplexe Amplitude von  $\varphi$  ist. Somit folgt für die Bedingung (2.26)

$$\left( -i\nu + \tau \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \tau \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \phi + \nu \phi_z = 0 \quad \text{für } z = 0, \tau \rightarrow \infty, \quad (2.33)$$

wobei

$$\nu = \frac{\omega^2}{g} \quad \text{und} \quad \tau = \frac{U\omega}{g}. \quad (2.34)$$

Die vom Körper erzeugten Wellen müssen diese Bedingung weit vom Körper erfüllen, sowie die Bedingung, daß sie vom Körper weglafen und im Unendlichen verschwinden. Solche Wellensysteme sind von Eggers (1957) und Becker (1958) beschrieben worden, und Lösungenen für pulsierende Quellen sind bei Wehausen und Laitone (1960) zu finden. Die Fernfeldbetrachtungen zeigen, daß für größere Strömungsgeschwindigkeiten  $U$ , genau genommen für  $\tau > \frac{1}{4}$ , nur zwei Wellensysteme existieren, die sich stromabwärts von der Störung fortpflanzen. Für  $\tau < \frac{1}{4}$  existieren zwei zusätzliche Wellensysteme, wovon eines sich stromaufwärts fortpflanzt<sup>1</sup>. Die kompliziertere Strahlungsbedingung tritt also für kleinere Strömungsgeschwindigkeiten auf; sie verhindert, daß Berechnungsmethoden, die z.B. für schnell fahrende Schiffe entwickelt worden sind, auch im Bereich kleinerer Froudezahlen einsetzbar sind.

Die Froudezahl wird hier mit  $F_n = U/\sqrt{ga}$  definiert, wobei als charakteristische Länge der maximale Durchmesser  $a$  des Körpers genommen wird. Für sehr kleine Froudezahlen, d.h.  $F_n \ll 1$  bzw.  $\tau \ll \frac{1}{4}$ , die zum Beispiel bei Meeresströmungen oder langsam fahrenden Schiffen auftreten, kann man die komplizierte Randbedingung an der freien Wasseroberfläche erheblich vereinfachen, indem Terme proportional zu  $U^2$  vernachlässigt werden. Diese Annahme ergibt für das stationäre Strömungspotential anstatt (2.20) die Wasseroberflächenbedingung

$$\bar{\phi}_z = 0 \quad \text{auf } z = h. \quad (2.35)$$

Da  $U$  nur quadratisch in den Wasseroberflächenbedingungen für  $\bar{\phi}$  und  $\bar{\zeta}$  vorkommt, reduziert sich die stationäre Strömung auf die sogenannte Doppelkörperströmung, d.h. die freie Oberfläche wird durch eine feste Wand ersetzt oder, anders gesehen, der Raum  $z < h$  wird um die ungestörte Wasseroberfläche gespiegelt; daher der Begriff Doppelkörper.

Die Linearisierung nach der Strömungsgeschwindigkeit ergibt für das zeitabhängige Potential die wesentlich vereinfachte Randbedingung an der freien Oberfläche

$$\varphi_{tt} + g\varphi_z + 2U\nabla_1\varphi_t \cdot \nabla_1\bar{\varphi} - U\varphi_t\bar{\varphi}_{zz} + O(U^2) = 0 \quad \text{auf } z = h, \quad (2.36)$$

wobei die Randbedingung (2.35) verwendet wurde und  $\nabla_1 = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j}$  der Nabla-Operator in der horizontalen Ebene ist. Durch Einführung der Zeitabhängigkeit von  $\varphi$  erhält man die frequenzabhängige Randbedingung

$$-\nu\phi + \phi_z - 2i\tau\nabla_1\phi \cdot \nabla_1\bar{\varphi} + \tau\phi\bar{\varphi}_{zz} = 0 \quad \text{auf } z = h. \quad (2.37)$$

Diese Vereinfachung hat als Konsequenz, daß die Wasseroberflächenbedingung nun statt zu vier nur zu einem sich in alle Richtungen fortpflanzenden Wellensystem im Fernfeld führt, wie z.B. von Wang (1988) gezeigt. Das Fernfeldverhalten wird im nächsten Abschnitt näher behandelt.

<sup>1</sup>Für  $\tau = \frac{1}{4}$  existiert in den Lösungen eine Singularität; hier ist  $U$  gleich der Gruppengeschwindigkeit der abgestrahlten Wellen.

Man setzt nun für  $\phi$  die Summe des Elementarwellenpotentials und eines Diffraktionspotentials ein, also

$$\phi = A(\phi_0 + \phi_7), \quad (2.38)$$

wobei  $\phi_7$  das Diffraktionspotential infolge einer Elementarwelle der Amplitude Eins ist. Für  $\phi_7$  folgen dann die Randbedingung am Körper

$$\frac{\partial \phi_7}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_0}{\partial n} \quad \text{auf } S_B \quad (2.39)$$

und die Wasseroberflächenbedingung

$$\left(-\nu + \frac{\partial}{\partial z}\right) \phi_7 - 2i\tau \left(\cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y}\right) \phi_7 + i\tau \left(\bar{\phi}_{zz} - 2\bar{\phi}_x \frac{\partial}{\partial x} - 2\bar{\phi}_y \frac{\partial}{\partial y}\right) (\phi_0 + \phi_7) = 0 \quad \text{auf } z = h. \quad (2.40)$$

Nur die ersten zwei Terme in (2.40) tragen zu der Bedingung im Fernfeld bei. Die Begegnungsfrequenz kann man laut (2.31) durch  $\omega_0$  ersetzen, und es folgt bis zur selben Ordnung

$$\begin{aligned} \left(-\nu_0 + \frac{\partial}{\partial z}\right) \phi_7 + 2i\tau_0 \left(ik_0 \cos \gamma - \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} - \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y}\right) \phi_7 \\ + i\tau_0 \left(\bar{\phi}_{zz} - 2\bar{\phi}_x \frac{\partial}{\partial x} - 2\bar{\phi}_y \frac{\partial}{\partial y}\right) (\phi_0 + \phi_7) = 0 \quad \text{auf } z = h. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Per Definition gilt

$$\nu_0 = \frac{\omega_0^2}{g} \quad \text{und} \quad \tau_0 = \frac{U\omega_0}{g}. \quad (2.42)$$

Der erste Term in (2.41) stellt nun die übliche Randbedingung ohne Strömung dar, und alle Effekte infolge der Strömung sind in den übrigen enthalten. Weit entfernt vom Körper lautet die nach der Strömungsgeschwindigkeit linearisierte Wasseroberflächenbedingung (vgl. (2.40))

$$\left(-\nu + \frac{\partial}{\partial z}\right) \phi_7 - 2i\tau \left(\cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y}\right) \phi_7 = 0 \quad \text{auf } z = h, r \rightarrow \infty, \quad (2.43)$$

bzw. mit  $\tau_0$  (vgl. (2.41))

$$\left(-\nu_0 + \frac{\partial}{\partial z}\right) \phi_7 + 2i\tau_0 \left(ik_0 \phi \cos \gamma - \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} - \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y}\right) \phi_7 = 0 \quad \text{auf } z = h, r \rightarrow \infty. \quad (2.44)$$

Außerdem muß das Potential  $\phi_7$  neben der Bodenbedingung

$$\frac{\partial \phi_7}{\partial z} = 0 \quad \text{auf } z = 0 \quad (2.45)$$

auch eine geeignete Strahlungsbedingung erfüllen, die sicherstellt, daß es nur vom Körper weglaufende Wellen darstellt.

### 2.3 Perturbationsexpansion

Die Form der Randbedingung an der freien Oberfläche empfiehlt eine Perturbationsexpansion des Diffraktionspotentials nach der dimensionslosen Strömungsgeschwindigkeit  $\tau$  oder  $\tau_0$  um  $U = 0$ . Methoden, die eine Expansion um  $\tau$  verwenden, sind von Grue und Palm (1991) sowie Wu und Eatock Taylor (1990) präsentiert worden. Hier wird eine Expansion nach  $\tau_0$  vorgenommen, um die Strömungs- von den Welleneffekten vollständig trennen zu können. Die Expansionsgleichung für  $\phi_7$  lautet

$$\phi_7 = \phi_7^{(0)} + i\tau_0 \phi_7^{(1)}. \quad (2.46)$$

Mit dieser Expansion werden sowohl  $\phi_7^{(0)}$  als auch  $\phi_7^{(1)}$  unabhängig von der Strömungsgeschwindigkeit  $U$ , was nicht der Fall wäre, wenn die Expansion um  $\tau$  erfolgt wäre. Auf jeden Fall ist eine solche Perturbationsexpansion nur für eine endliche Entfernung von dem Körper bzw. dem Koordinatenursprung gültig, wie später gezeigt wird. Für die harmonischen Wellenkräfte ist aber die Größe des Geschwindigkeitspotentials nur an der Körperoberfläche von Interesse. Weil im Nahkörperbereich der Unterschied zwischen  $\phi_7$  und  $\phi_7^{(0)}$  klein und von der Ordnung  $O(U)$  ist, eignet sich eine solche Perturbationsexpansion. Im folgenden wird  $\phi_7^{(0)}$  als das Diffraktions- und  $\phi_7^{(1)}$  als das Perturbationspotential bezeichnet.

Die Perturbationsexpansion (2.46) wird nun in die Randbedingungen an der freien Wasseroberfläche und an der benetzten Körperoberfläche eingesetzt, und die Terme werden nach der Ordnung von  $\tau_0$  aufgetrennt. Die Terme nullter Ordnung in  $\tau_0$  ergeben das bekannte lineare Diffraktionsproblem ohne Strömung:

$$\left(-\nu_0 + \frac{\partial}{\partial z}\right) \phi_7^{(0)} = 0 \quad \text{auf } z = h, \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial \phi_7^{(0)}}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_0}{\partial n} \quad \text{auf } S_B. \quad (2.48)$$

Die Terme erster Ordnung in  $\tau_0$  ergeben dann die Randbedingungen für das Perturbationspotential:

$$\begin{aligned} \left(-\nu_0 + \frac{\partial}{\partial z}\right) \phi_7^{(1)} &= \left(-2ik_0 \cos \gamma + 2 \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + 2 \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y}\right) \phi_7^{(0)} \\ &+ \left(-\bar{\phi}_{zz} + 2\bar{\phi}_x \frac{\partial}{\partial x} + 2\bar{\phi}_y \frac{\partial}{\partial y}\right) (\phi_0 + \phi_7^{(0)}) \quad \text{auf } z = h, \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial \phi_7^{(1)}}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } S_B. \quad (2.50)$$

Mit den bekannten Lösungen für  $\bar{\phi}$  und  $\phi_7^{(0)}$  erhält man nun für  $\phi_7^{(1)}$  eine lineare inhomogene Randbedingung an der freien Wasseroberfläche. Durch Einführung zylindrischer Koordinaten  $(r, \theta, z)$  folgt

$$\begin{aligned} \left(-\nu_0 + \frac{\partial}{\partial z}\right) \phi_7^{(1)} &= \left(-2ik_0 \cos \gamma + 2 \cos(\theta - \alpha) \frac{\partial}{\partial r} - 2 \frac{\sin(\theta - \alpha)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \phi_7^{(0)} \\ &+ \left(-\bar{\phi}_{zz} + 2\bar{\phi}_r \frac{\partial}{\partial r} + 2 \frac{\bar{\phi}_\theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}\right) (\phi_0 + \phi_7^{(0)}) \quad \text{auf } z = h. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Um das Problem zu vervollständigen, werden geeignete Strahlungsbedingungen für die Potentiale  $\phi_7^{(0)}$  und  $\phi_7^{(1)}$  benötigt. Hierfür dient die Fernfeldbedingung (2.44) für  $\phi_7$ , die in zylindrischen Koordinaten

$$\left(-\nu_0 - 2k_0\tau_0 \cos \gamma + \frac{\partial}{\partial z} - 2i\tau_0 \cos(\theta - \alpha) \frac{\partial}{\partial r}\right) \phi_7 = 0 \quad \text{für } z = h, r \rightarrow \infty \quad (2.52)$$

lautet. Um die Strahlungsbedingung herzuleiten, wird zuerst die Greensche Funktion für eine pulsierende Quelle in einer langsamen Parallelströmung betrachtet. Die asymptotische Fernfeldform wurde bis zur Ordnung  $O(U)$  für tiefes Wasser und  $\alpha = \beta = 0$  von Haskind (1946) gegeben:

$$G(r, \theta, z) = (1 - 2\tau \cos \theta) \sqrt{\frac{8\pi\nu}{r}} e^{\nu(1-2\tau \cos \theta)(z-h+i\tau)+i\pi/4} \quad \text{für } r \rightarrow \infty, \quad (2.53)$$

wobei der Aufpunkt der Quelle bei  $r = 0$  an der ungestörten Wasseroberfläche gesetzt ist. Anhand dieses Quellenverhaltens ist von Wu und Eatock Taylor (1990) eine Strahlungsbedingung für das Perturbationspotential hergeleitet worden. Für die vorliegende Arbeit muß eine

neue, erweiterte Strahlungsbedingung aufgestellt werden, und zwar für beliebige Wellen- und Strömungsrichtungen und eine begrenzte Wassertiefe. Hierfür dient ähnlich (2.53) der Ansatz für die asymptotische Form von  $\phi_7$ :

$$\phi_7 \propto [1 + i\tau_0 h_1(\theta)] \cosh(k_1(\theta)z) \frac{e^{ik_1(\theta)r}}{\sqrt{r}} \quad \text{für } r \rightarrow \infty, \quad (2.54)$$

wobei  $h_1(\theta)$  die Amplitudenverteilung für  $\tau_0 > 0$  wiedergibt und  $k_1(\theta)$  die Wellenzahlfunktion ist. Dieser Ansatz erfüllt die Bodenbedingung und stellt für  $k_1 > 0$  vom Körper weglauende Wellen dar. Aus der Bedingung (2.52) ergibt sich für die Wellenzahl  $k_1(\theta)$  die Bedingung

$$-\nu_0 - 2k_0\tau_0 \cos \gamma + 2\tau_0 k_1(\theta) \cos(\theta - \alpha) + k_1(\theta) \tanh(k_1(\theta)h) = 0. \quad (2.55)$$

Durch eine Taylor-Expansion nach  $\tau_0$  um die Wellenzahl  $k_0$  erhält man bis zur Ordnung  $O(U)$  die Lösung

$$k_1 = k_0 - \frac{2k_0\tau_0}{\sigma_0} [\cos(\theta - \alpha) - \cos \gamma]. \quad (2.56)$$

Die Tatsache, daß für  $k_1$  nur eine Lösung existiert, zeigt, daß es jetzt nur ein Wellensystem im Fernfeld gibt. Die dimensionlose Faktor  $\sigma_0$  berücksichtigt die begrenzte Wassertiefe und ist gegeben durch

$$\sigma_0 = k_0 h \operatorname{sech}^2(k_0 h) + \tanh(k_0 h). \quad (2.57)$$

Aus dem asymptotischen Verhalten von  $\phi_7$  nach (2.54) folgt die Strahlungsbedingung in der Form

$$\frac{\partial \phi_7}{\partial r} = ik_1(\theta) \phi_7 \quad \text{für } r \rightarrow \infty. \quad (2.58)$$

Die Perturbationsexpansion nach  $\tau_0$  ergibt zuerst aus (2.54) folgende asymptotische Formen:

$$\phi_7^{(0)} \propto \frac{1}{\sqrt{r}} \cosh(k_0 z) e^{ik_0 r} \quad \text{für } r \rightarrow \infty, \quad (2.59)$$

$$\phi_7^{(1)} \propto h_1 \phi_7^{(0)} + \frac{2ik_0}{\sigma_0} [\cos(\theta - \alpha) - \cos \gamma] \left[ ir \cosh(k_0 z) + z \sinh(k_0 z) \right] \frac{e^{ik_0 r}}{\sqrt{r}} \quad \text{für } r \rightarrow \infty. \quad (2.60)$$

Für  $\phi_7^{(0)}$  gilt dann die übliche Strahlungsbedingung ohne Strömung:

$$\frac{\partial \phi_7^{(0)}}{\partial r} = \left[ ik_0 - \frac{1}{2r} \right] \phi_7^{(0)} = ik_0 \phi_7^{(0)} \quad \text{für } r \rightarrow \infty, \quad (2.61)$$

wobei der Beitrag  $O(1/r)$  weit vom Körper verschwindet. Aus (2.60) resultiert als Strahlungsbedingung für  $\phi_7^{(1)}$  folgende Beziehung<sup>2</sup> zwischen  $\phi_7^{(0)}$  und  $\phi_7^{(1)}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_7^{(1)}}{\partial r} &= \left[ ik_0 - \frac{1}{2r} \right] \phi_7^{(1)} - \frac{2k_0}{\sigma_0} [\cos(\theta - \alpha) - \cos \gamma] \phi_7^{(0)} \\ &= ik_0 \phi_7^{(1)} - \frac{k_0}{\sigma_0} [\cos(\theta - \alpha) - \cos \gamma] \phi_7^{(0)} \quad \text{für } r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Wie aus (2.60) ersichtlich, wächst der Wert für  $\phi_7^{(1)}$  wie  $\sqrt{r}$  weit vom Körper— ein Resultat, das offensichtlich nicht realistisch ist. Der Grund hierfür ist, daß die Strömung die Wellenlänge der

<sup>2</sup>Bei Ihrer Radiationsanalyse vernachlässigen Wu und Eatock Taylor (1990) den Beitrag von  $r^{-1/2}$  zu der Ableitung des Perturbationspotentials. Dadurch erhält ihre (2.62) entsprechende Strahlungsbedingung einen Faktor zwei vor dem zweiten Term auf der rechte Seite. Da sie aber in ihrer weiteren Analyse ähnliche, im Fernfeld nicht zu null verschwindende Terme vernachlässigen, (vgl. (3.25)) hat dieser Fehler keine Auswirkung auf ihre Ergebnisse.

Diffractionswellen ändert, d.h. der Parameter  $\tau_0$  taucht als Faktor von  $r$  in der asymptotischen Form von  $\phi_7$  auf. Die Perturbation infolge der Meeresströmung vergrößert sich also mit  $r$  und der Unterschied zwischen  $\phi_7^{(0)}$  und  $\phi_7^{(1)}$  ist eigentlich von der Ordnung  $O(Ur)$ . Der Ausdruck  $\phi_7^{(0)} + i\tau_0\phi_7^{(1)}$  liefert also nur für kleine  $r$ -Werte, d.h. nahe am Körper, richtige Werte für  $\phi_7$ . Da man aber  $\phi_7$  nur am Körper benötigt, um den instationären Druck und die Wellenkräfte zu bestimmen, kann die Perturbationsexpansion für diesen Zweck als gültig betrachtet werden. In der Ungültigkeit der Perturbationsexpansion im Fernfeld liegt der Grund für eine als unrealistisch erscheinende Strahlungsbedingung für das Perturbationspotential  $\phi_7^{(1)}$ .

Physikalisch könnte man sich vorstellen, daß die Fernfeld- bzw. Abstrahlungswellen ohne Strömung Ringwellen darstellen. Durch die Strömung werden die Ringwellen gezerzt—stromaufwärts werden die Wellenlängen kürzer und stromabwärts länger. Der Unterschied zwischen den Ringwellen und den verzerrten Wellen wächst mit der Entfernung vom Körper. Das Perturbationspotential, das diese Differenz berücksichtigt, muß also demzufolge auch anwachsen. Zu seiner Strahlungsbedingung, d.h. die rechte Seite von (2.62), tragen nicht nur die ablaufenden Perturbationswellen bei (wie im Falle einer Ringwellensystem), sondern auch eine Korrektur proportional zu  $\phi_7^{(0)}$ , die die Verzerrung gegenüber den Ringwellen berücksichtigt. Aus diese Korrektur folgt das wachsende Verhalten von  $\phi_7^{(1)}$ .

### 3 Ermittlung der harmonischen Wellenkräfte

Die harmonischen Wellenkräfte ergeben sich, indem man den instationären, harmonischen Druckanteil über die benetzte Oberfläche des Körpers integriert. Aus der Bernoulli-Gleichung erhält man für den gesamten Druck:

$$p = -\rho\Phi_t - \frac{\rho}{2}\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi + \rho g(h - z). \quad (3.1)$$

Durch Zerlegung von  $\Phi$  in zeitharmonische und zeitstationäre Komponenten und Vernachlässigung der Terme der Ordnung  $O(A^2)$  und  $O(U^2)$  resultiert

$$p = -\rho\varphi_t - \rho U(\nabla\varphi \cdot \nabla\bar{\varphi}) - \rho g(h - z). \quad (3.2)$$

Der letzte Term stellt den hydrostatischen Druck dar, während die ersten beiden Anteile den instationären, zeitharmonischen Wellendruck wiedergeben. Nach Einführung der Zeitabhängigkeit von  $\varphi$  ergibt sich für den instationären Druck

$$p_{\text{inst}} = \text{Re} \{ \hat{p} e^{-i\omega t} \}; \quad (3.3)$$

für die komplexe Druckamplitude  $\hat{p}$  folgt

$$\hat{p} = \rho(i\omega\phi - U\nabla\phi \cdot \nabla\bar{\varphi}). \quad (3.4)$$

Durch Substituierung von  $\phi$  mit der Perturbationsexpansion nach der dimensionslosen Geschwindigkeit  $\tau_0$  erhält man für die Druckamplitude bis zur Ordnung  $O(UA)$

$$-\frac{\hat{p}}{\rho A} = -i\omega(\phi_0 + \phi_7^{(0)}) + \omega\tau_0\phi_7^{(1)} + U\nabla(\phi_0 + \phi_7^{(0)}) \cdot \nabla\bar{\varphi}. \quad (3.5)$$

Durch das Ersetzen von  $\omega$  durch  $\omega_0$  findet sich schließlich der Ausdruck für die Amplitude des harmonischen Druckes:

$$-\frac{\hat{p}}{\rho A} = (-i\omega_0 - iUk_0 \cos \gamma)(\phi_0 + \phi_7^{(0)}) + \omega_0\tau_0\phi_7^{(1)} + U\nabla(\phi_0 + \phi_7^{(0)}) \cdot \nabla\bar{\varphi}. \quad (3.6)$$

Die Amplitude des instationären Druckes setzt sich aus drei Termen zusammen. Der erste Term in (3.6) ist gleich dem Druck ohne Meeresströmung plus einer Druckänderung infolge der veränderten Begegnungsfrequenz (Doppler-Effekt). Der zweite Druckterm entsteht durch die Perturbationsströmung und der dritte ergibt sich aus einer Konvektion der Diffraktionswellen mit der Parallelströmung.

Die harmonischen Wellenkräfte ergeben sich aus dem instationären Druck folgendermaßen:

$$F_j = - \int_{S_B} p_{\text{inst}} n_j dS, \quad j = 1, \dots, 6. \quad (3.7)$$

Hierbei bezeichnen  $F_1, F_2$  und  $F_3$  die Kräfte in der  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung und  $F_4, F_5$  und  $F_6$  die die Momente um die  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achse. Entsprechend sind die verallgemeinerten Normalkomponenten durch

$$\begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \equiv \vec{n} \quad \begin{Bmatrix} n_4 \\ n_5 \\ n_6 \end{Bmatrix} \equiv \vec{r} \times \vec{n} \quad (3.8)$$

gegeben. Hier ist  $\vec{n}$  der in den Flüssigkeitsbereich hinein zeigende Normalenvektor, und  $\vec{r}$  ist der Ortsvektor vom Momentenbezugspunkt zum jeweiligen Punkt an der Körperoberfläche. Für

den Momentenbezugspunkt wird hier der Koordinatenursprung angenommen; also lauten die rotatorischen Normalkomponenten

$$\begin{aligned} n_4 &= yn_3 - zn_2, \\ n_5 &= zn_1 - xn_3, \\ n_6 &= xn_2 - yn_1. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Für die Wellenkräfte verwendet man die gleiche komplexe Schreibweise wie für den instationären Druck, also

$$F_j = \operatorname{Re} \left\{ \widehat{F}_j e^{-i\omega t} \right\}, \quad j = 1, \dots, 6, \quad (3.10)$$

wobei  $\widehat{F}_j$  die komplexe Wellenkraftamplitude in Richtung  $j$  ist. Es folgt dann:

$$\widehat{F}_j = - \int \int_{S_B} \widehat{p} n_j dS, \quad j = 1, \dots, 6. \quad (3.11)$$

Die Kraftamplituden  $\widehat{F}_j$  erscheinen im folgenden in der Form von dimensionslosen Kraftkoeffizienten  $X_j$ , definiert als

$$X_j = \frac{\widehat{F}_j}{\rho g A a^2 \delta_j}. \quad (3.12)$$

Die Kräfte sind normiert bezüglich der Wellenamplitude  $A$ , der Wichte des Wassers  $\rho g$ , dem maximalen Körperradius  $a$  und einer zusätzlichen Länge  $\delta_j$ , z.B.  $a$  oder  $h$ , die die Momentenhebelarme für  $j = 4, 5, 6$  berücksichtigt (für  $j = 1, 2, 3$  ist  $\delta_j = 1$ ).

Die Kräfte teilen sich entsprechend der Perturbationsexpansion in Kräfte nullter und erster Ordnung bezüglich  $\tau_0$  auf:

$$X_j = X_j^{(0)} + \tau_0 X_j^{(1)}. \quad (3.13)$$

Für die Kräfte ohne Meeresströmung  $X_j^{(0)}$  erhält man nach dem Einsetzen der komplexen Druckamplitude die bekannte Formel

$$X_j^{(0)} = \frac{-i\omega_0}{a^2 g \delta_j} \int \int_{S_B} [\phi_0 + \phi_7^{(0)}] n_j dS. \quad (3.14)$$

Analog zu den drei Komponenten der komplexen Druckamplitude erfolgt die Aufteilung von  $X_j^{(1)}$  in drei Kraftkomponenten:

$$X_j^{(1)} = \frac{k_0 \cos \gamma}{\nu_0} X_j^{(0)} + X_{Pj} + X_{Cj}. \quad (3.15)$$

Der erste Anteil enthält den Doppler-Effekt, der nur von  $X_j^{(0)}$  abhängt. Die Perturbationskraftkoeffizienten  $X_{Pj}$  und die Konvektionskraftkoeffizienten  $X_{Cj}$  lauten

$$X_{Pj} = \frac{\omega_0}{a^2 g \delta_j} \int \int_{S_B} \phi_7^{(1)} n_j dS, \quad (3.16)$$

$$X_{Cj} = \frac{1}{a^2 \omega_0 \delta_j} \int \int_{S_B} [\nabla(\phi_0 + \phi_7^{(0)}) \cdot \nabla \bar{\varphi}] n_j dS. \quad (3.17)$$

Die Potentiale  $\phi_0$ ,  $\phi_7^{(0)}$ , und  $\bar{\varphi}$ , die für die Komponenten  $X_j^{(0)}$  und  $X_{Cj}$  benötigt werden, weisen bei ihrer Berechnung keine großen numerischen Probleme auf. Das Perturbationspotential aber, das für  $X_{Pj}$  benötigt wird, bereitet Schwierigkeiten wegen der komplizierten, nichthomogenen

Randbedingung an der freien Oberfläche. Deshalb wird hier so vorgegangen, daß das Perturbationspotential  $\phi_7^{(1)}$  aus den Integralen (3.16) eliminiert wird. Dies geschieht mit Hilfe von fiktiven Radiationspotentialen, die ohne Schwierigkeit zu berechnen sind. Die Radiationspotentiale werden mit  $\phi_j^{(0)}$  für  $j = 1, \dots, 6$  bezeichnet, wobei die hochgestellte Null darauf hinweist, das sie die üblichen Radiationspotentiale ohne Meeresströmung darstellen. Das Radiationsproblem im glatten Wasser beim Vorhandensein einer kleinen Parallelströmung wurde von Wu und Eatock Taylor (1990) mit einer ähnlichen Methode behandelt. Die hier vorgestellte Anwendung auf die Diffraktionskräfte in flachem Wasser ist neu.

Bewegt sich ein Körper harmonisch in Richtung  $j$ , und zwar mit einer Geschwindigkeitsamplitude  $U_j$  und der Frequenz  $\omega_0$ , so wird das Geschwindigkeitspotential der abgestrahlten Wellen durch

$$\varphi_j = \operatorname{Re} \left\{ U_j \phi_j^{(0)} e^{-i\omega_0 t} \right\} \quad (3.18)$$

beschrieben. Die komplexen Amplituden der fiktiven Radiationspotentiale  $\phi_j^{(0)}$  (die der Einfachheit halber auch als Potentiale bezeichnet werden, obwohl sie mit  $U_j$  normiert werden) müssen die gleichen Wasseroberflächen-, Boden-, und Strahlungsbedingungen wie das Diffraktionspotential  $\phi_7^{(0)}$  erfüllen. Für die Körperbedingung wird die Normalgeschwindigkeit der Körperoberfläche für harmonische Bewegung in Richtung  $j$  gesetzt:

$$V_{nj} = U_j n_j \cos(\omega_0 t) = \operatorname{Re} \left\{ n_j e^{-i\omega_0 t} \right\}. \quad (3.19)$$

Die Randbedingungen für die Radiationspotentiale lauten dann

$$\frac{\partial \phi_j^{(0)}}{\partial n} = n_j \quad \text{auf } S_B, \quad (3.20a)$$

$$\left( -\nu_0 + \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi_j^{(0)} = 0 \quad \text{auf } S_F, \quad (3.20b)$$

$$\frac{\partial \phi_j^{(0)}}{\partial z} = 0 \quad \text{auf } S_0, \quad (3.20c)$$

$$\frac{\partial \phi_j^{(0)}}{\partial r} = \left[ ik_0 - \frac{1}{2r} \right] \phi_j^{(0)} = ik_0 \phi_j^{(0)} \quad \text{für } r \rightarrow \infty. \quad (3.20d)$$

Die Randbedingung auf der Körperoberfläche  $S_B$  erlaubt es, die Normalkomponenten  $n_j$  in (3.16) mit der Normalableitung von  $\phi_j^{(0)}$  zu ersetzen. Auf das resultierende Integral kommt dann der Greensche Satz zur Anwendung. Weil  $\phi_7^{(1)}$  und  $\phi_j^{(0)}$  die Laplace-Gleichung erfüllen, folgt aus dem Greenschen Satz für eine geschlossene Fläche  $S$  folgende Integralgleichung:

$$\iint_S \left\{ \phi_7^{(1)} \frac{\partial \phi_j^{(0)}}{\partial n} - \phi_j^{(0)} \frac{\partial \phi_7^{(1)}}{\partial n} \right\} dS = 0. \quad (3.21)$$

Die Fläche  $S$  teilt sich in die Körperoberfläche  $S_B$ , die freie Oberfläche  $S_F$ , den Boden  $S_0$  und eine zylindrische Kontrollfläche weit vom Körper  $S_\infty$  auf. Es folgt dann für das für  $X_{Pj}$  benötigte Integral:

$$\iint_{S_B} \phi_7^{(1)} n_j dS = \iint_{S_B} \phi_j^{(0)} \frac{\partial \phi_7^{(1)}}{\partial n} dS + \iint_{S_0 + S_F + S_\infty} \left[ \phi_j^{(0)} \frac{\partial \phi_7^{(1)}}{\partial n} - \phi_7^{(1)} \frac{\partial \phi_j^{(0)}}{\partial n} \right] dS. \quad (3.22)$$

Wegen der Körperrandbedingung für  $\phi_7^{(1)}$  ist das erste Integral auf der rechten Seite Null, und infolge der Bodenbedingung verschwindet ebenfalls das Integral über  $S_0$ . Auf der freien Wasseroberfläche wird die inhomogene Randbedingung für  $\phi_7^{(1)}$  zuerst als

$$-\nu_0 \phi_7^{(1)} + \frac{\partial \phi_7^{(1)}}{\partial z} = \mathcal{F} \quad \text{auf } z = h \quad (3.23)$$

geschrieben, wobei die Funktion  $\mathcal{F}(r, \theta)$  sich aus der rechten Seite von (2.51) ergibt. Mit  $\partial/\partial n = -\partial/\partial z$  wird der Integrand auf  $S_F$  zu

$$\phi_j^{(0)} \frac{\partial \phi_7^{(1)}}{\partial n} - \phi_7^{(1)} \frac{\partial \phi_j^{(0)}}{\partial n} = \phi_j^{(0)} (-\nu_0 \phi_7^{(1)} - \mathcal{F}) + \nu_0 \phi_7^{(1)} \phi_j^{(0)} = -\mathcal{F} \phi_j^{(0)} \quad \text{auf } S_F. \quad (3.24)$$

Auf der Kontrollfläche  $S_\infty$  ist  $\partial/\partial n = -\partial/\partial r$  und es kommen in ähnlicher Weise die Strahlungsbedingungen für  $\phi_j^{(0)}$  und  $\phi_7^{(1)}$  zur Anwendung. Hier muß man aber vorsichtig sein, denn bei der Strahlungsbedingung (3.20d) für  $\phi_j^{(0)}$  wurde ein Term  $O(1/r)$  vernachlässigt, der durch Multiplikation mit  $\phi_7^{(1)}$  einen endlichen Beitrag liefert. Berücksichtigt man diesen Term, so erhält man:

$$\begin{aligned} \phi_j^{(0)} \frac{\partial \phi_7^{(1)}}{\partial n} - \phi_7^{(1)} \frac{\partial \phi_j^{(0)}}{\partial n} &= \phi_j^{(0)} \left( -ik_0 \phi_7^{(1)} + \frac{2k_0}{\sigma_0} f \phi_7^{(0)} \right) + \left[ ik_0 - \frac{1}{2r} \right] \phi_j^{(0)} \phi_7^{(1)} \\ &= \frac{2k_0}{\sigma_0} f \phi_j^{(0)} \phi_7^{(0)} \quad \text{auf } S_\infty, \end{aligned} \quad (3.25)$$

wobei

$$f(\theta) = \cos(\theta - \alpha) - \cos \gamma. \quad (3.26)$$

Nach Einsetzen der Integranden in (3.22) folgt

$$\int \int_{S_B} \phi_7^{(1)} n_j dS = - \int \int_{S_F} \mathcal{F} \phi_j^{(0)} dS + \int \int_{S_\infty} \frac{2k_0}{\sigma_0} f \phi_j^{(0)} \phi_7^{(0)} dS. \quad (3.27)$$

Die rechte Seite dieses Ausdruckes hängt nur noch von dem zeitstationären Potential  $\bar{\varphi}$  und den Potentialen  $\phi_1^{(0)} \dots \phi_7^{(0)}$  ab, wobei  $\bar{\varphi}$  in der Funktion  $\mathcal{F}$  enthalten ist.

Für das Integral über  $S_\infty$  verwendet man die asymptotische Form von  $\phi_j^{(0)}$ , um die Integration über die Wassertiefe ausführen zu können. Wie für die freie harmonische Welle gilt für den Verlauf in der  $z$ -Richtung weit vom Körper

$$\phi_j^{(0)}(x, y, z) = \phi_j^{(0)}(x, y, h) \frac{\cosh(k_0 z)}{\cosh(k_0 h)} \quad \text{für } r \rightarrow \infty. \quad (3.28)$$

Mit dem Resultat

$$\int_0^h \left( \frac{\cosh(k_0 z)}{\cosh(k_0 h)} \right)^2 dz = \frac{\sigma_0}{2k_0}$$

folgt für das Perturbationsintegral

$$\int \int_{S_B} \phi_7^{(1)} n_j dS = - \int \int_{S_F} \mathcal{F} \phi_j^{(0)} dS + \oint_{C_\infty} f \phi_j^{(0)} \phi_7^{(0)} dl. \quad (3.29)$$

Hier ist  $C_\infty$  die Schnittkurve zwischen  $S_F$  und  $S_\infty$ . Auf den ersten Blick scheinen die unendlichen Integrale auf der rechten Seite von (3.29) nicht zu konvergieren, da die Integranden nur wie  $1/r$  abklingen und mit  $r$  oszillieren. Daß aber die rechte Seite insgesamt konvergiert, kann gezeigt werden, indem zuerst die Fernfeldform der Funktion  $\mathcal{F}$  betrachtet wird. Durch Vernachlässigung der schnell abklingenden Lokalanteile infolge  $\bar{\varphi}$  erhält man aus (2.51)

$$\mathcal{F}(r, \theta) = 2 \left( -ik_0 \cos \gamma + \cos(\theta - \alpha) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin(\theta - \alpha)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \phi_7^{(0)}(r, \theta, h) \quad \text{für } r \rightarrow \infty. \quad (3.30)$$

Verwendet man nun die asymptotische Fernfeldform für  $\phi_7^{(0)}$ , so ergibt sich

$$\mathcal{F} = \left[ 2ik_0 f(\theta) - \frac{\cos(\theta - \alpha)}{r} \right] \phi_7^{(0)} + O(1/r^2) \quad \text{für } r \rightarrow \infty. \quad (3.31)$$



erfüllen, aber keine Randbedingung am Körper. Die komplementäre Lösung  $\phi_c$  erfüllt dann die Randbedingungen

$$\frac{-\omega_0^2}{g}\phi_c + \frac{\partial\phi_c}{\partial z} = \mathcal{F}^L \quad \text{auf } S_F, \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial\phi_c}{\partial z} = 0 \quad \text{auf } S_0, \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial\phi_c}{\partial n} = -\frac{\partial\phi_p}{\partial n} \quad \text{auf } S_B \quad (3.41)$$

sowie die homogene Strahlungsbedingung

$$\frac{\partial\phi_c}{\partial r} = ik_0\phi_c \quad \text{für } r \rightarrow \infty. \quad (3.42)$$

Wegen der einfacheren Randbedingung auf der freien Oberfläche bereitet die Lösung von  $\phi_p$  wenig Schwierigkeiten. Es ist daher ausreichend, den Greenschen Satz nur auf den komplementären Teil  $\phi_c$  anzuwenden. Hierfür bezieht man sich wieder auf die zylindrische Kontrollfläche  $S_I$  mit dem Radius  $r_I$  (Bild 3). In dem Flüssigkeitsbereich innerhalb von  $S_I$  wendet man wie zuvor den Greenschen Satz auf die volle Funktion  $\phi_7^{(1)}$  an:

$$\iint_{S_B} \phi_7^{(1)} \frac{\partial\phi_j^{(0)}}{\partial n} dS = - \iint_{S_{F1}} \mathcal{F}\phi_j^{(0)} dS - \iint_{S_I} \left[ \phi_j^{(0)} \frac{\partial\phi_7^{(1)}}{\partial n} - \phi_7^{(1)} \frac{\partial\phi_j^{(0)}}{\partial n} \right] dS. \quad (3.43)$$

Für den Bereich außerhalb von  $S_I$  ergibt der Greensche Satz für  $\phi_c$  und  $\phi_j^{(0)}$

$$\iint_{S_I} \left[ \phi_j^{(0)} \frac{\partial\phi_c}{\partial n} - \phi_c \frac{\partial\phi_j^{(0)}}{\partial n} \right] dS = \iint_{S_{F2}} \mathcal{F}^L \phi_j^{(0)} dS. \quad (3.44)$$

Hier zeigt die Normale auf  $S_I$  in beiden Fällen weg vom Körper. Zusammen resultiert dann für die Perturbationskräfte

$$X_{Pj} = \frac{-\omega_0}{a^2 g \delta_j} \left\{ \iint_{S_{F1}} \mathcal{F}\phi_j^{(0)} dS + \iint_{S_I} \left[ \phi_j^{(0)} \frac{\partial\phi_p}{\partial n} - \phi_p \frac{\partial\phi_j^{(0)}}{\partial n} \right] dS + \iint_{S_{F2}} \mathcal{F}^L \phi_j^{(0)} dS \right\}. \quad (3.45)$$

Das Integral über die unendliche Fläche  $S_{F2}$  klingt nun sehr schnell ab und ist wesentlich leichter zu berechnen als das volle Wasseroberflächenintegral in (3.29). Obwohl für  $S_I$  eine zylindrische Fläche angenommen wurde, gilt dieser Ausdruck auch für eine beliebige Fläche  $S_I$ . Wird  $S_I$  gleich der Körperoberfläche gesetzt, so entfällt das Integral über  $S_{F1}$ , und man erhält die alternative Form

$$X_{Pj} = \frac{-\omega_0}{a^2 g \delta_j} \left\{ \iint_{S_B} \left[ \phi_j^{(0)} \frac{\partial\phi_p}{\partial n} - \phi_p n_j \right] dS + \iint_{S_F} \mathcal{F}^L(r) \phi_j^{(0)} dS \right\}. \quad (3.46)$$

Im folgenden wird  $S_I$  als eine zylindrische Fläche gewählt, deren Radius gleich dem maximalen Radius des Körpers ist. Für einen vom Meeresboden bis zur Wasseroberfläche sich erstreckenden vertikalen Zylinder ergibt dies exakt die Gleichung (3.46).

## 4 Anwendung auf rotationssymmetrische Körper

Die vorangehende Analyse, die für einen Körper beliebiger Geometrie gilt, wird jetzt auf den speziellen Fall eines rotationssymmetrischen Körpers mit vertikaler Achse angewandt. Für einen solchen Körper sind die generalisierten Normalkomponenten der benetzten Körperoberfläche

$$n_j = \left\{ \begin{array}{c} n_r \cos \theta \\ n_r \sin \theta \\ n_z \\ \left( r n_z - z n_r \right) \sin \theta \\ \left( z n_r - r n_z \right) \cos \theta \\ 0 \end{array} \right\}, \quad (4.1)$$

wobei  $n_r$  und  $n_z$  die Normalkomponenten in radialer bzw. vertikaler Richtung sind. Damit wird die Normalableitung an der Körperoberfläche

$$\frac{\partial}{\partial n} = \vec{n} \cdot \nabla = n_r \frac{\partial}{\partial r} + n_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (4.2)$$

Als erste Konsequenz dieser speziellen Geometrie entfallen die Kräfte  $X_2$ ,  $X_4$  und  $X_6$ . Die ersten zwei sind mit geeigneter Wahl von  $\alpha$  und  $\beta$  aus  $X_1$  und  $X_5$  zu berechnen, und  $X_6$  ist natürlich Null. Es müssen also nur die Radiationspotentiale für die Bewegungen in der Ebene  $y = 0$  berechnet werden, d.h.  $\phi_1$ ,  $\phi_3$  und  $\phi_5$ .

Diese Geometrie läßt sich auch weiter gut ausnutzen, da sich die zwei antreibenden Größen, nämlich die anlaufende harmonische Welle und die Parallelströmung, ebenfalls wie die Körpernormale in Funktionen von  $(r, z)$  und Fourier-Komponenten in  $\theta$  auftrennen lassen. Für das Potential der Parallelströmung erhält man sofort in Zylinderkoordinaten

$$U(x \cos \alpha + y \sin \beta) = U r \cos(\theta - \alpha). \quad (4.3)$$

Die Potentialamplitude  $\phi_0$  der harmonischen Elementarwelle ergibt sich in Zylinderkoordinaten zu

$$\phi_0 = \frac{-ig \cosh k_0 z}{\omega_0 \cosh k_0 h} e^{ik_0 r \cos(\theta - \beta)}. \quad (4.4)$$

Mit Hilfe einer generierenden Funktion (Abowitz und Stegun (1953)) läßt sich  $\phi_0$  zur folgenden unendlichen Fourierreihe umformen:

$$\phi_0(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{0m}(r, z) \cos m(\theta - \beta). \quad (4.5)$$

Die partiellen Potentiale  $\psi_{0m}$  sind dann

$$\psi_{0m} = A_{0m} \frac{\cosh k_0 z}{\cosh k_0 h} J_m(k_0 r) \quad (4.6)$$

mit den Koeffizienten

$$A_{0m} = \frac{-ig}{\omega_0} \epsilon_m i^m. \quad (4.7)$$

Per Definition gilt  $\epsilon_m = 1$  für  $m = 0$ , sonst  $\epsilon_m = 2$ , und  $J_m(x)$  ist die Besselsche Funktion erster Art der Ordnung  $m$ . Wie sich im folgenden herausstellt, werden für die harmonischen Kräfte nur die ersten drei Summanden von (4.5) benötigt.

Ebenso wie die inhomogenen Randbedingungen lassen sich auch die Potentialamplituden  $\phi_j^{(0)}$  und  $\phi_p$  sowie  $\bar{\varphi}$  in entsprechenden Fourierreihen über  $\theta$  entwickeln. Hierfür betrachtet man

zuerst im allgemeinen die Expansion der Laplace-Gleichung mittels der Methode der Variablentrennung. In Zylinderkoordinaten lautet die Laplace-Gleichung für das Geschwindigkeitspotential  $\Phi$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (4.8)$$

Als eine allgemeine Lösungsansatz für  $\Phi$ , die die Laplace-Gleichung erfüllt, läßt sich folgende Fourierreihe in  $\theta$  verwenden:

$$\Phi(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m(r, z) \cos(m\theta) + \psi_{-m}(r, z) \sin(m\theta). \quad (4.9)$$

Die Teilpotentiale  $\psi_{\pm m}(r, z)$  müssen dann die Laplace-Gleichung in der Form

$$\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_m}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial z^2} - \frac{m^2}{r^2} \psi_m = 0 \quad (4.10)$$

erfüllen.

Man verwendet nun als Lösungsansätze für die Potentiale diejenigen Fourierkomponenten, die in den jeweiligen inhomogenen Randbedingungen vorkommen. Durch einen Koeffizientenvergleich kann dann für jede Fourierkomponente  $\psi_{\pm m}$  ein getrenntes Problem in den Koordinaten  $(r, z)$  aufgestellt werden. Somit wird ein dreidimensionales Problem auf eine Serie zweidimensionaler Probleme reduziert. Es werden nun für jedes Potential die Fourierexpansionen und deren Randbedingungen aufgestellt. Anschließend werden die Formeln für die Kräfte, die auf einen rotationssymmetrischen Körper wirken, hergeleitet. Die Analyse für die Diffraktions- und Radiationspotentiale ohne Meeresströmung ist mehrfach in der Literatur zu finden (z.B. Garret (1971), Mavrakos (1981), u.a.). Die Anwendung auf das vorliegende Wellen-/Strömungsproblem erfolgt hier zum ersten Mal.

#### 4.1 Stationäres Potential

Für das stationäre Potential muß lediglich die Parallelströmung im Fernfeld als eine inhomogene Randbedingung betrachtet werden; also lautet der Ansatz für  $\bar{\varphi}$

$$\bar{\varphi} = \left[ \bar{\psi}(r, z) + r \right] \cos(\theta - \alpha), \quad (4.11)$$

bzw. für das Störpotential  $\bar{\phi}$  infolge der Präsenz des Körpers

$$\bar{\phi} = \bar{\psi}(r, z) \cos(\theta - \alpha). \quad (4.12)$$

Neben der Laplace-Gleichung (4.10) für  $m = 1$  muß  $\bar{\psi}$  die Randbedingungen

$$n_r \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial r} + n_z \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} = -n_r \quad \text{auf } S_B, \quad (4.13a)$$

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} = 0 \quad \text{auf } S_F, S_0 \quad (4.13b)$$

und die Fernfeldbedingung

$$\bar{\psi} \propto r^{-1/2} \quad \text{für } r \rightarrow \infty \quad (4.13c)$$

genügen.

## 4.2 Diffraktionspotential ohne Strömung

Für das Potential  $\phi_7^{(0)}$  setzt man die gleiche Fourierentwicklung wie für das harmonische Wellenpotential  $\phi_0$  an, also

$$\phi_7^{(0)} = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{7m} \cos m(\theta - \beta), \quad (4.14)$$

und schreibt für das gesamte Diffraktionspotential ohne Meeresströmung

$$\phi_0 + \phi_7^{(0)} = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{dm} \cos m(\theta - \beta). \quad (4.15)$$

Die Verwendung von sowohl  $\psi_{7m}$  als auch  $\psi_{dm}$ , wobei  $\psi_{dm} = \psi_{0m} + \psi_{7m}$ , ist bezüglich der Notation vorteilhaft. Die Rand- und Strahlungsbedingungen für die partiellen Potentiale  $\psi_{7m}$  werden nun zu

$$n_r \frac{\partial \psi_{7m}}{\partial r} + n_z \frac{\partial \psi_{7m}}{\partial z} = -n_r \frac{\partial \psi_{0m}}{\partial r} - n_z \frac{\partial \psi_{0m}}{\partial z} \quad \text{auf } S_B, \quad (4.16a)$$

$$\left(-\nu_0 + \frac{\partial}{\partial z}\right) \psi_{7m} = 0 \quad \text{auf } S_F, \quad (4.16b)$$

$$\frac{\partial \psi_{7m}}{\partial z} = 0 \quad \text{auf } S_0, \quad (4.16c)$$

$$\frac{\partial \psi_{7m}}{\partial r} = ik_0 \psi_{7m} \quad \text{für } r \rightarrow \infty. \quad (4.16d)$$

Die Gleichungen (4.16) stellen eine Serie von zweidimensionalen Problemen dar, wovon, wie oben bemerkt, nur die Lösungen  $\psi_{70}$ ,  $\psi_{71}$  und  $\psi_{72}$  für die harmonischen Kräfte benötigt werden.

## 4.3 Fiktive Radiationspotentiale

Entsprechend den Normalkomponenten in (4.1) erhält man für die drei benötigten Radiationspotentiale folgende Ansätze:

$$\phi_j^{(0)} = \begin{cases} \psi_{11} \cos \theta & j = 1 \\ \psi_{30} & j = 3 \\ \psi_{51} \cos \theta & j = 5 \end{cases}. \quad (4.17)$$

Obwohl jeweils nur ein Reihenterm für jedes Potential benötigt wird, wird die Doppelindizierung mit  $j$  und  $m$  beibehalten. Dies erfolgt erstens, um eine gleichbleibende Notation gegenüber  $\psi_{7m}$  zu haben, und zweitens, weil sowohl  $j$  als auch  $m$  für die Lösungen von Bedeutung sind.

Die Rand- und Strahlungsbedingungen für  $\psi_{11}$ ,  $\psi_{30}$  und  $\psi_{51}$  werden nun zu

$$n_r \frac{\partial \psi_{jm}}{\partial r} + n_z \frac{\partial \psi_{jm}}{\partial z} = \begin{cases} n_r & j = 1 \\ n_z & j = 3 \\ (zn_r - rn_z) & j = 5 \end{cases} \quad \text{auf } S_B, \quad (4.18a)$$

$$\left(\frac{-\omega_0^2}{g} + \frac{\partial}{\partial z}\right) \psi_{jm} = 0 \quad \text{auf } S_F, \quad (4.18b)$$

$$\frac{\partial \psi_{jm}}{\partial z} = 0 \quad \text{auf } S_0, \quad (4.18c)$$

$$\frac{\partial \psi_{jm}}{\partial r} = ik_0 \psi_{jm} \quad \text{für } r \rightarrow \infty. \quad (4.18d)$$

#### 4.4 Perturbationspotential

Es werden nun die Ansätze (4.5), (4.12) und (4.14) für  $\phi_0$ ,  $\bar{\phi}$  und  $\phi_7^{(0)}$  in die Bedingung (2.51) für  $\phi_7^{(1)}$  an der freien Wasseroberfläche eingesetzt. Daraus ergibt sich für die inhomogene Wasseroberflächenbedingung folgender Ausdruck:

$$\left(\frac{-\omega_0^2}{g} + \frac{\partial}{\partial z}\right) \phi_7^{(1)} = \sum_{m=0}^{\infty} f_m \cos \gamma \cos m(\theta - \beta) + 2g_m \cos(\theta - \alpha) \cos m(\theta - \beta) + 2h_m \sin(\theta - \alpha) \sin m(\theta - \beta) \quad \text{auf } S_F. \quad (4.19)$$

Die Hilfsfunktionen  $f_m$ ,  $g_m$  und  $h_m$  ergeben sich aus folgenden auf der freien Oberfläche berechneten Ausdrücken:

$$f_m = -2ik_0 \psi_{7m} \quad \text{auf } S_F, \quad (4.20a)$$

$$g_m = \psi_{7m,r} + \left(-\frac{1}{2} \bar{\psi}_{zz} + \bar{\psi}_r \frac{\partial}{\partial r}\right) (\psi_{0m} + \psi_{7m}) \quad \text{auf } S_F, \quad (4.20b)$$

$$h_m = \frac{m}{r} \psi_{7m} + \frac{m}{r^2} \bar{\psi} (\psi_{0m} + \psi_{7m}) \quad \text{auf } S_F. \quad (4.20c)$$

Hier bezeichnet  $\psi_{7m,r}$  die partielle Ableitung von  $\psi_{7m}$  nach  $r$ . Mit Hilfe der trigonometrischen Identitäten

$$2 \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} (\theta - \alpha) \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} m(\theta - \beta) = \cos \gamma \left\{ \cos [(m-1)(\theta - \beta)] \pm \cos [(m+1)(\theta - \beta)] \right\} + \sin \gamma \left\{ \sin [(m-1)(\theta - \beta)] \mp \sin [(m+1)(\theta - \beta)] \right\} \quad (4.21)$$

läßt sich die rechte Seite der Wasseroberflächenbedingung zu folgender Fourierreihe umformulieren:

$$\mathcal{F}(r, \theta) = \cos \gamma \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{F}_m(r) \cos [m(\theta - \beta)] + \sin \gamma \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{F}_{-m}(r) \sin [m(\theta - \beta)]. \quad (4.22)$$

Die einzelnen Fourierkomponenten sind durch

$$\mathcal{F}_m = \begin{cases} f_0 + (g + h)_1 & m = 0 \\ f_1 + (g + h)_2 + 2g_0 & m = 1 \\ (g + h)_2 - 2g_0 & m = -1 \\ f_m + (g + h)_{m+1} + (g - h)_{m-1} & m > 1 \\ (g + h)_{m+1} - (g - h)_{m-1} & m < -1 \end{cases} \quad (4.23)$$

gegeben. Bei der Strahlungsbedingung (2.62) für  $\phi_7^{(1)}$  wird ebenso vorgegangen. Nach Einsetzen der Fourierexpansion für  $\phi_7^{(0)}$  wird diese Bedingung zu

$$\left(ik_0 - \frac{\partial}{\partial r}\right) \phi_7^{(1)} = \frac{k_0}{\sigma_0} \sum_{m=0}^{\infty} [\cos(\theta - \alpha) - \cos \gamma] \psi_{7m} \cos m(\theta - \beta) \quad \text{für } r \rightarrow \infty. \quad (4.24)$$

Eine ähnliche Umformung der trigonometrischen Funktionen wie oben ergibt dann das analoge Resultat

$$\left(ik_0 - \frac{\partial}{\partial r}\right) \phi_7^{(1)} = \cos \gamma \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{G}_m(r, z) \cos [m(\theta - \beta)] + \sin \gamma \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{G}_{-m}(r, z) \sin [m(\theta - \beta)], \quad (4.25)$$

wobei die Funktionen  $\mathcal{G}_m$  durch folgende Formeln gegeben sind:

$$\mathcal{G}_m = \frac{k_0}{\sigma_0} \left\{ \begin{array}{ll} -2\psi_{70} + \psi_{71} & m = 0 \\ -2\psi_{71} + \psi_{72} + 2\psi_{70} & m = 1 \\ \psi_{72} - 2\psi_{70} & m = -1 \\ -2\psi_{7m} + \psi_{7,m+1} + \psi_{7,m-1} & m > 1 \\ \psi_{7,m+1} - \psi_{7,m-1} & m < 1 \end{array} \right\} \quad \text{für } r \rightarrow \infty. \quad (4.26)$$

Für die partikuläre Lösung  $\phi_p$ , die die Fernfeldbedingungen erfüllt, wird jetzt als Ansatz die gleiche Fourierexpansion wie in (4.22) und (4.25) angenommen, also

$$\phi_p = \cos \gamma \sum_{m=0}^{\infty} \Psi_m \cos [m(\theta - \beta)] + \sin \gamma \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_{-m} \sin [m(\theta - \beta)]. \quad (4.27)$$

Durch einen Koeffizientenvergleich erhält man dann folgende Rand- und Strahlungsbedingungen für die partiellen Potentiale  $\Psi_m$ :

$$\left( -\nu_0 + \frac{\partial}{\partial z} \right) \Psi_m = \mathcal{F}_m \quad \text{auf } S_F, \quad (4.28a)$$

$$\frac{\partial \Psi_m}{\partial z} = 0 \quad \text{auf } S_0 \quad (4.28b)$$

$$\left( ik_0 - \frac{\partial}{\partial r} \right) \Psi_m = \mathcal{G}_m \quad \text{für } r \rightarrow \infty. \quad (4.28c)$$

Da die komplementäre Lösung  $\phi_C$  durch den Greenschen Satz eliminiert wird und nicht bestimmt werden muß, wird sie hier nicht weiter behandelt.

#### 4.5 Wellenkräfte

Für die spezielle Geometrie eines vertikalen rotationssymmetrischen Körpers lassen sich die Ausdrücke für die Wellenkraftkomponenten erheblich vereinfachen. Für das Flächenintegral einer beliebigen Funktion  $F$  über den rotationssymmetrischen Körper gilt im allgemeinen

$$\iint_{S_B} F dS = \int_{C_B} r \int_0^{2\pi} F d\theta ds, \quad (4.29)$$

wobei  $C_B$  die Meridianlinie des Körpers und  $s$  seine Bogenkoordinate ist (Bild 4). Der Körperradius an der Stillwasserlinie wird mit  $a_B$  bezeichnet, und der Radius  $r_I$  (siehe Bild 3) wird gleich dem maximalen Körperradius  $a$  gesetzt. Die Ausdrücke (3.14), (3.17) und (3.45) für die Kraftkomponenten erhalten dann in Zylinderkoordinaten folgende Form:

$$X_j^{(0)} = \frac{-i\omega_0}{a^2 g \delta_j} \int_{C_B} r \int_0^{2\pi} [\phi_0 + \phi_7^{(0)}] n_j d\theta ds, \quad (4.30)$$

$$X_{Cj} = \frac{1}{a^2 \omega_0 \delta_j} \int_{C_B} r \int_0^{2\pi} [\nabla(\phi_0 + \phi_7^{(0)}) \cdot \nabla \bar{\varphi}] n_j d\theta ds, \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} X_{Pj} = & \frac{\omega_0}{a^2 g \delta_j} \int_0^h a \int_0^{2\pi} \left( \phi_p \frac{\partial \phi_j^{(0)}}{\partial n} - \phi_j^{(0)} \frac{\partial \phi_p}{\partial n} \right) d\theta dz \\ & - \frac{\omega_0}{a^2 g \delta_j} \int_0^{2\pi} \left[ \int_{a_B}^a r \mathcal{F}(r, \theta) \phi_j^{(0)} dr + \int_a^\infty r \mathcal{F}^L(r, \theta) \phi_j^{(0)} dr \right] d\theta. \end{aligned} \quad (4.32)$$

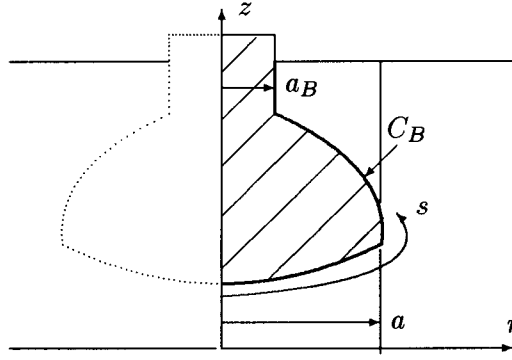


Bild 4: Integrationskonvention für einen rotationssymmetrischen Körper

Wenn nun die Fourierentwicklungen für  $\phi_0^{(0)}$ ,  $\phi_7^{(0)}$  und  $\mathcal{F}$  sowie die Ansätze für  $n_j$ ,  $\phi_j^{(0)}$  und  $\bar{\varphi}$  eingesetzt werden, kann unter Berücksichtigung der Orthogonalität der trigonometrischen Funktionen die Integration in der Umfangsrichtung ausgeführt werden. Die Kräfte ohne Mee-  
reströmung erhält man sofort als

$$X_j^{(0)} = \frac{-i\omega_0\pi}{a^2 g \delta_j} \begin{cases} \cos \beta \int_{C_B} r \psi_{d1} n_r ds & j = 1 \\ 2 \int_{C_B} r \psi_{d0} n_z ds & j = 3 \\ \cos \beta \int_{C_B} r \psi_{d1} (z n_r - r n_z) ds & j = 5 \end{cases} \quad (4.33)$$

Für die Konvektionskomponenten wird zuerst der Integrand umformuliert zu

$$\begin{aligned} \nabla \phi_d \cdot \nabla \bar{\varphi} &= \frac{\partial \phi_d}{\partial r} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi_d}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi_d}{\partial z} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \mathcal{H}_m \cos \gamma \cos m(\theta - \beta) + \mathcal{H}_{-m} \sin \gamma \sin m(\theta - \beta) \right], \end{aligned} \quad (4.34)$$

wobei die Hilfsfunktionen  $\mathcal{H}_m$  wie folgt lauten:

$$\mathcal{H}_0 = \left\{ \frac{\bar{\psi} + r}{r^2} + (\bar{\psi}_r + 1) \frac{\partial}{\partial r} + \bar{\psi}_z \frac{\partial}{\partial z} \right\} \psi_{d1}, \quad (4.35a)$$

$$\mathcal{H}_{\pm 1} = \frac{2}{r^2} (\bar{\psi} + r) \psi_{d2} + \left\{ (\bar{\psi}_r + 1) \frac{\partial}{\partial r} + \bar{\psi}_z \frac{\partial}{\partial z} \right\} (\psi_{d2} \pm 2\psi_{d0}), \quad (4.35b)$$

$$\mathcal{H}_{\pm m} = \left\{ \frac{(\bar{\psi} + r)}{r^2} + (\bar{\psi}_r + 1) \frac{\partial}{\partial r} + \bar{\psi}_z \frac{\partial}{\partial z} \right\} \left\{ (m+1) \psi_{d,m+1} \pm (m-1) \psi_{d,m-1} \right\}, \quad |m| \geq 2. \quad (4.35c)$$

Die Auswertung der Integrale über  $\theta$  ergibt dann für die Konvektionskomponenten die Ausdrücke

$$X_{C1} = \frac{\pi \cos \gamma \cos \beta}{2a^2 \omega_0} \int_{C_B} r \mathcal{H}_1 n_r ds - \frac{\pi \sin \gamma \sin \beta}{2a^2 \omega_0} \int_{C_B} r \mathcal{H}_{-1} n_r ds, \quad (4.36)$$

$$X_{C3} = \frac{\pi \cos \gamma}{a^2 \omega_0} \int_{C_B} r \mathcal{H}_0 n_z ds, \quad (4.37)$$

$$X_{C5} = \frac{\pi \cos \gamma \cos \beta}{2a^2 \delta_5 \omega_0} \int_{C_B} r(zn_r - rn_z) \mathcal{H}_1 ds - \frac{\pi \sin \gamma \sin \beta}{2a^2 \delta_5 \omega_0} \int_{C_B} r(zn_r - rn_z) \mathcal{H}_{-1} ds. \quad (4.38)$$

Um die Notation für die Perturbationskomponente zu vereinfachen, definiert man zuerst die Wasseroberflächenfunktion  $\mathcal{F}^*$  als

$$\mathcal{F}^*(r) = \begin{cases} \mathcal{F}(r) & r \leq a \\ \mathcal{F}^L(r) & r > a \end{cases} \quad (4.39)$$

und den Operator  $\mathbf{G}(\psi, \phi)$  als

$$\mathbf{G}(\psi, \phi) = \psi \frac{\partial \phi}{\partial r} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (4.40)$$

Damit folgt der vereinfachte Ausdruck für  $X_{Pj}$

$$X_{Pj} = \frac{\omega_0}{ag\delta_j} \int_0^h \int_0^{2\pi} \mathbf{G}(\phi_p, \phi_j^{(0)}) d\theta dz - \frac{\omega_0}{a^2 g \delta_j} \int_{a_B}^\infty r \int_0^{2\pi} \mathcal{F}^* \phi_j^{(0)} d\theta dr. \quad (4.41)$$

Durch Einführung der Fourieransätze (4.17) und (4.27) für  $\phi_j^{(0)}$  und  $\phi_p$  und Ausführung der Integration über  $\theta$  ergeben sich die Resultate

$$\begin{aligned} X_{Pj} = & \frac{\omega_0 \pi \cos \gamma \cos \beta}{a^2 \delta_j g} \left\{ a \int_0^h \mathbf{G}(\Psi_1, \psi_{j1}) dz - \int_{a_B}^\infty r \mathcal{F}_1^* \psi_{j1} dr \right\} \\ & - \frac{\omega_0 \pi \sin \gamma \sin \beta}{a^2 \delta_j g} \left\{ a \int_0^h \mathbf{G}(\Psi_{-1}, \psi_{j1}) dz - \int_{a_B}^\infty r \mathcal{F}_{-1}^* \psi_{j1} dr \right\} \quad j = 1, 5 \end{aligned} \quad (4.42)$$

und

$$X_{P3} = \frac{2\omega_0 \pi \cos \gamma}{a^2 g} \left\{ a \int_0^h \mathbf{G}(\Psi_0, \psi_{30}) dz - \int_{a_B}^\infty r \mathcal{F}_0^* \psi_{30} dr \right\}. \quad (4.43)$$

Die Winkel der Wellen- und Strömungsrichtungen lassen sich aus den obigen Gleichungen herausziehen. Es ergeben sich daraus winkelunabhängige Kraftkoeffizienten, die mit  $Y_j^{(0)}$  und  $Y_j^{(1)}$  bezeichnet werden. Somit resultieren für die Wellenerregungskräfte ohne Strömung die Ausdrücke

$$X_j^{(0)} = \begin{cases} Y_j^{(0)} \cos \beta & j = 1, 5 \\ Y_3^{(0)} & j = 3 \end{cases}, \quad (4.44)$$

und für die Perturbationskorrekturen erhält man

$$X_j^{(1)} = \begin{cases} Y_1^{(1)} \cos \gamma \cos \beta - Y_2^{(1)} \sin \gamma \sin \beta & j = 1 \\ Y_3^{(1)} \cos \gamma & j = 3 \\ Y_5^{(1)} \cos \gamma \cos \beta - Y_4^{(1)} \sin \gamma \sin \beta & j = 5 \end{cases}. \quad (4.45)$$

Die Kraftkoeffizienten  $Y_j^{(1)}$  setzen sich entsprechend (3.15) aus folgende Anteilen zusammen:

$$Y_j^{(1)} = \begin{cases} \frac{k_0}{\nu_0} Y_j^{(0)} + Y_{Cj} + Y_{Pj} & j = 1, 3, 5 \\ Y_{Cj} + Y_{Pj} & j = 2, 4 \end{cases}. \quad (4.46)$$

Die winkelunabhängigen Kraftkoeffizienten  $Y_j^{(0)}$ ,  $Y_{Cj}$  und  $Y_{Pj}$  folgen direkt aus den obigen Gleichungen, werden aber hier der Vollständigkeit halber angegeben.

Diffractionskraftkoeffizienten ohne Meeresströmung:

$$Y_1^{(0)} = \frac{-i\omega_0\pi}{a^2g} \int_{C_B} r\psi_{d1}n_r ds, \quad (4.47a)$$

$$Y_3^{(0)} = \frac{-2i\omega_0\pi}{a^2g} \int_{C_B} r\psi_{d0}n_z ds, \quad (4.47b)$$

$$Y_5^{(0)} = \frac{-2i\omega_0\pi}{a^2g\delta_5} \int_{C_B} r\psi_{d1}(zn_r - rn_z) ds. \quad (4.47c)$$

Konvektionskraftkoeffizienten:

$$Y_{C2} = \frac{\pi}{2a^2\omega_0} \int_{C_B} r\mathcal{H}_{\pm 1}n_r ds, \quad (4.48a)$$

$$Y_{C3} = \frac{\pi}{a^2\omega_0} \int_{C_B} r\mathcal{H}_0n_z ds, \quad (4.48b)$$

$$Y_{C4} = \frac{\pi}{2a^2\omega_0\delta_5} \int_{C_B} r(zn_r - rn_z)\mathcal{H}_{\pm 1} ds. \quad (4.48c)$$

Perturbationskraftkoeffizienten:

$$Y_{P2} = \frac{\omega_0\pi}{a^2g} \left\{ a \int_0^h \mathbf{G}(\Psi_{\pm 1}, \psi_{11}) dz - \int_{a_B}^a r\mathcal{F}_{\pm 1}\psi_{11} dr - \int_a^\infty r\mathcal{F}_{\pm 1}^L\psi_{11} dr \right\}, \quad (4.49a)$$

$$Y_{P3} = \frac{2\omega_0\pi}{a^2g} \left\{ a \int_0^h \mathbf{G}(\Psi_0, \psi_{30}) dz - \int_{a_B}^a r\mathcal{F}_0\psi_{30} dr - \int_a^\infty r\mathcal{F}_0^L\psi_{30} dr \right\}, \quad (4.49b)$$

$$Y_{P4} = \frac{\omega_0\pi}{a^2g\delta_5} \left\{ a \int_0^h \mathbf{G}(\Psi_{\pm 1}, \psi_{51}) dz - \int_{a_B}^a r\mathcal{F}_{\pm 1}\psi_{51} dr - \int_a^\infty r\mathcal{F}_{\pm 1}^L\psi_{51} dr \right\}. \quad (4.49c)$$

## 5 Allgemeine Lösungen

### 5.1 Lösungen mittels einer Eigenfunktionsexpansion

Es sollen an dieser Stelle allgemeine Lösungen für eine beliebige Fourierkomponente  $\psi_m(r, z)$ , die durch eine Eigenfunktionsexpansion der Laplace-Gleichung erzielt werden kann, entwickelt werden. Solche Expansionen sind von mehreren Autoren für die Lösung von strömungsmechanischen Probleme verwendet worden, z.B. von Kagimoto und Yue (1985) für das hydrodynamische Verhalten von Mehrkörpersystemen. Da sie auch hier die Basis der eingesetzten numerischen Methode bilden, wird deren Herleitung kurz behandelt.

Durch eine weitere Anwendung der Methode der Variablentrennung erhält man als allgemeinen Lösungsansatz für die Funktion  $\psi_m(r, z)$  die unendliche Reihe

$$\psi_m = \sum_{i=0}^{\infty} R_{mi}(r) Z_i(z). \quad (5.1)$$

Die Radialfunktionen  $R_{mi}(r)$  und die Vertikalfunktionen  $Z_i(z)$  müssen dann die aus der Laplace-Gleichung resultierende Differentialgleichungen

$$Z_i''(z) = \pm \alpha_i^2 Z_i(z) \quad (5.2)$$

und

$$r^2 R_{mi}'' + r R_{mi}' + (\pm \alpha_i^2 r^2 - m^2) R_{mi} = 0 \quad (5.3)$$

erfüllen. Hier ist  $\alpha_i \geq 0$  eine beliebige reelle Zahl. Für  $\pm \alpha_i^2 \neq 0$  ist (5.3) die Besselsche bzw. modifizierte Besselsche Differentialgleichung. Abhängig von der rechten Seite von (5.2), d.h. mit  $+\alpha_i^2$ ,  $-\alpha_i^2$  oder  $\alpha_i = 0$ , existieren jeweils zwei mögliche Lösungsformen für  $R_{mi}$  und  $Z_i$ . Ein allgemeiner Lösungsansatz für  $\psi_m$  läßt sich also als eine Linearkombination folgender Eigenfunktionen darstellen:

$$\text{Für } +\alpha_i^2 : \quad Z_i(z) = \begin{cases} \cosh(\alpha_i z) \\ \sinh(\alpha_i z) \end{cases} \quad R_{mi}(r) = \begin{cases} J_m(\alpha_i r) \\ Y_m(\alpha_i r) \end{cases}, \quad (5.4a)$$

$$\text{für } -\alpha_i^2 : \quad Z_i(z) = \begin{cases} \cos(\alpha_i z) \\ \sin(\alpha_i z) \end{cases} \quad R_{mi}(r) = \begin{cases} I_m(\alpha_i r) \\ K_m(\alpha_i r) \end{cases}, \quad (5.4b)$$

$$\text{für } \alpha_i = 0 : \quad Z_i(z) = \begin{cases} 1 \\ z \end{cases} \quad R_{mi}(r) = \begin{cases} r^m \\ r^{-m} \\ \log(r) \end{cases} \quad \begin{matrix} m > 0 \\ m > 0 \\ m = 0 \end{matrix}. \quad (5.4c)$$

In (5.4a) ist  $Y_m(r)$  die Besselsche Funktion zweiter Art; in (5.4b) sind  $I_m(r)$  und  $K_m(r)$  die modifizierten Besselschen Funktionen erster und zweiter Art der Ordnung  $m$ . Von allen Radialfunktionen sind nur die Funktionen  $J_m(r)$  für die zwei Grenzwerte  $r \rightarrow 0$  und  $r \rightarrow \infty$  endlich. Die Funktionen  $Y_m(r)$  werden negativ unendlich für  $r$  gegen Null und die Funktionen  $I_m(r)$  und  $K_m(r)$  verhalten sich ähnlich wie  $e^r$  und  $e^{-r}$ . Für die Lösungen (5.4b) und (5.4c) ist also jeweils nur eine der Radialfunktionen zulässig für  $r$  gegen Null oder Unendlich.

Die Gewichtungen der in (5.4) angegebenen Lösungsformen und deren Wellenzahlen  $\alpha$  ergeben sich aus den jeweiligen Randbedingungen. Es werden nun zwei Fälle betrachtet, bei denen homogene Randbedingungen auf zwei horizontalen Flächen vorgegeben sind, wie in Bild 5 dargestellt. Die horizontalen Flächen werden mit  $z = d_1$  und  $z = d_2$  bezeichnet, wobei  $d_2 > d_1$  ist. Fall *i*) entspricht einem Wellenproblem ohne Strömung mit einer Bodenbedingung bei  $z = d_1$  und der linearen Wellenbedingung bei  $z = d_2$ . Im Fall *ii*) existiert eine Bodenbedingung



Bild 5: Randbedingungen auf den horizontalen Flächen

auf beiden Flächen, was z.B. den Randbedingungen für die stationäre Strömung außerhalb des maximalen Körperradius entspricht.

Im ersten Fall müssen die Lösungen für  $Z_i(z)$  die Differentialgleichungen

$$\left(-\nu_0 Z_i + \frac{\partial Z_i}{\partial z}\right)_{z=d_2} = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial Z_i}{\partial z}\right)_{z=d_1} = 0 \quad (5.5)$$

erfüllen. Es existiert hierfür eine einzige Lösung der Form (5.4a), als  $Z_0(z)$  bezeichnet, und unendlich viele der Form (5.4b), die als  $Z_i(z)$  mit  $i > 0$  bezeichnet werden. Aus den Randbedingungen folgt

$$Z_0(z) = \cosh \alpha_0(z - d_1) \quad \text{und} \quad Z_{i>0}(z) = \cos \alpha_i(z - d_1) \quad , \quad (5.6)$$

wobei sich die Wellenzahlen  $\alpha_i$  sich aus den impliziten Gleichungen

$$\nu_0 = \begin{cases} \alpha_0 \tanh[\alpha_0(d_2 - d_1)] & i = 0 \\ -\alpha_i \tan[\alpha_i(d_2 - d_1)] & i > 0 \end{cases} \quad (5.7)$$

ergeben. Für  $d_1 = 0$  und  $d_2 = h$  ist  $\alpha_0$  gleich der Wellenzahl  $k_0$ . Die Funktionen  $Z_i$  sind über die Wassertiefe  $(d_1, d_2)$  orthogonal zueinander, d.h.

$$\int_{d_1}^{d_2} Z_i(z) Z_j(z) dz = \delta_{ij} \int_{d_1}^{d_2} (Z_i(z))^2 dz, \quad (5.8)$$

wobei  $\delta_{ij}$  das Kronecker-Symbol ist. Mit der Notation  $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$  für eine beliebige Linearkombination von zwei Funktionen  $f$  und  $g$  läßt sich die allgemeine Lösung für Fall i) wie folgt schreiben:

$$\psi_m = \begin{pmatrix} J_m(\alpha_0 r) \\ Y_m(\alpha_0 r) \end{pmatrix} \cosh[\alpha_0(z - d_1)] + \sum_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} I_m(\alpha_i r) \\ K_m(\alpha_i r) \end{pmatrix} \cos[\alpha_i(z - d_1)], \quad (5.9)$$

wobei die  $\alpha_i$  durch (5.7) gegeben sind.

Im Fall ii) entsprechen die möglichen  $Z$ -Lösungen einer Cosinus-Fourierreihe, d.h.

$$Z_i(z) = \cos \frac{i\pi(z - d_1)}{d_2 - d_1} \quad i = 0, 1, \dots \quad (5.10)$$

Es gilt also eine Lösung der Form (5.4c) für  $i = 0$  und wieder unendlich viele der Form (5.4b). Die Orthogonalität dieser Funktionen lautet

$$\int_{d_1}^{d_2} Z_i(z) Z_j(z) dz = \delta_{ij} \frac{\pi}{\epsilon_j}. \quad (5.11)$$

Die Eigenfunktionsexpansion in diesem Fall wird dann

$$\psi_0 = \left( \frac{1}{\log(r)} \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{I_0(\alpha_i r)}{K_0(\alpha_i r)} \right) \cos[\alpha_i(z-d_1)], \quad (5.12a)$$

$$\psi_m = \left( \frac{r^m}{r^{-m}} \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{I_m(\alpha_i r)}{K_m(\alpha_i r)} \right) \cos[\alpha_i(z-d_1)] \quad m > 0 \quad (5.12b)$$

mit den Wellenzahlen

$$\alpha_i = \frac{i\pi(z-d_1)}{d_2-d_1}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (5.13)$$

Die zwei oben angegebenen Lösungsansätze (5.9) und (5.12) werden im folgenden herangezogen, um die zeitstationären und zeitharmonischen Potentiale zu bestimmen. Die Wichtung der einzelnen Lösungsglieder ergibt sich aus den Randbedingungen an der Körperoberfläche und den Fernfeldbedingungen. Wegen der Orthogonalität der Vertikalfunktionen eignen sich solche Ansätze ideal für die Erfüllung von Randbedingungen an vertikalen Rändern.

## 5.2 Fernfeldlösungen

Es werden nun die asymptotische Fernfeldform für die Fourierkomponente  $\psi_{jm}$ , die die Rand- und Strahlungsbedingungen weit vom Körper erfüllt, sowie Lösungen für die Perturbationskomponenten  $\Psi_m$  betrachtet. Das allgemein bekannte asymptotische Verhalten für  $\psi_{jm}$  wird zuerst anhand der im letzten Abschnitt angegebenen Lösungen kurz dargestellt. Die Herleitung der für die Perturbationskräfte benötigten Komponenten  $\Psi_m$  wird dann in Detail ausgeführt.

Für  $\psi_{jm}$  gilt aus dem allgemeinen Lösungsansatz (5.9) nur der erste Term im Fernfeld. Die Radialfunktionen mit  $K_m(r)$  klingen sehr schnell ab, gelten also nur im Nahbereich. Die mit  $r$  wachsenden Funktionen  $I_m(r)$  erfüllen die Fernfeldbedingung nicht, sind also nicht zulässig. Die verbleibenden Besselfunktionen  $J_m(k_0 r)$  und  $Y_m(k_0 r)$  haben die asymptotischen Formen

$$\begin{aligned} J_m(k_0 r) &= \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} \cos(k_0 r - m\pi/2 - \pi/4) \\ Y_m(k_0 r) &= \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} \sin(k_0 r - m\pi/2 - \pi/4) \end{aligned} \quad \text{für } r \rightarrow \infty. \quad (5.14)$$

Daraus folgt, daß die Strahlungsbedingung sich erfüllen läßt, wenn als Radialfunktion die komplexe Hankelfunktion erster Art  $H_m(k_0 r)$  verwendet wird:<sup>3</sup>

$$H_m(k_0 r) = J_m(k_0 r) + iY_m(k_0 r). \quad (5.15)$$

Die asymptotische Form für  $\psi_{jm}$  erhält damit die bekannte Form

$$\psi_{jm} = A_{jm} H_m(k_0 r) \frac{\cosh(k_0 z)}{\cosh(k_0 h)} \quad \text{für } r \rightarrow \infty, \quad (5.16)$$

wobei  $A_{jm}$  komplexe Konstanten sind.

<sup>3</sup>Üblicherweise wird die Hankelfunktion erster Art mit  $H_m^{(1)}$  bezeichnet. Auf die Hochstellung (1) wird aber hier verzichtet, da diese für die Perturbationsgrößen verwendet wird.

Aus dem bekannten Fernfeldverhalten von  $\psi_{7m}$  müssen nun die partikulären Fernfeldlösungen  $\Psi_m$  für die Perturbationskomponente infolge der Meeresströmung gefunden werden. Hierfür setzt man die asymptotische Form für  $\psi_{7m}$  in die inhomogene Randbedingung an der freien Oberfläche ein und vernachlässigt die mit  $\bar{\psi}$  schnell abklingende Lokalanteile. Die Fernfeldformen der Hilfsfunktionen nach (4.20) werden damit zu

$$\begin{aligned} f_m &= -2ik_0 A_{7m} H_m(k_0 r) \\ g_m &= k_0 A_{7m} H'_m(k_0 r) \\ h_m &= A_{7m} \frac{m}{r} H_m(k_0 r) \end{aligned} \quad \text{für } r \rightarrow \infty. \quad (5.17)$$

Mit Hilfe der Rekursionsformel für die Besselschen Funktionen

$$\frac{m}{k_0 r} C_m(k_0 r) \pm C'_m(k_0 r) = C_{m \mp 1}(k_0 r), \quad (5.18)$$

wobei  $C_m(x)$  entweder  $J_m(x)$  oder  $H_m(x)$  ist, folgt für die Wasseroberflächenfunktionen im Fernfeld

$$\mathcal{F}_{\pm m}^F = k_0 \tilde{A}_{\pm m} H_m(k_0 r). \quad (5.19)$$

Die Koeffizienten  $\tilde{A}_{\pm m}$  ergeben sich aus  $A_{7m}$  folgendermaßen:

$$\tilde{A}_m = \begin{cases} A_{7,|m|+1} + A_{7,|m|-1} & m \leq -1 \\ A_{72} + 2A_{70} & m = -1 \\ -2iA_{70} + A_{71} & m = 0 \\ -2iA_{71} + A_{72} - 2A_{70} & m = 1 \\ -2iA_{7m} + A_{7,m+1} - A_{7,m-1} & m \geq 1 \end{cases}. \quad (5.20)$$

Die inhomogene Bedingung für  $\Psi_m$  an der freien Oberfläche wird damit zu

$$\left(-\nu_0 + \frac{\partial}{\partial z}\right) \Psi_{\pm m} = k_0 \tilde{A}_{\pm m} H_m(k_0 r) \quad \text{auf } z = h. \quad (5.21)$$

Definitionsgemäß erfüllt die partikuläre Lösung  $\phi_p$  den Fernfeldanteil der inhomogenen Wasseroberflächenbedingung im Flüssigkeitsbereich außerhalb des maximalen Körperradius; also gilt (5.21) für  $\Psi_m$  in demselben Bereich und nicht nur für  $r \rightarrow \infty$ .

Für die Strahlungsbedingung erhält man aus (4.25) den ähnlichen Ausdruck

$$\left[ ik_0 \Psi_m - \frac{\partial \Psi_m}{\partial r} \right]_{r \rightarrow \infty} = \frac{-ik_0}{2\sigma_0} \tilde{A}_m H_{|m|}(k_0 r) \frac{\cosh(k_0 z)}{\cosh(k_0 h)}. \quad (5.22)$$

Eine durch Trennung der Variablen erzielte Lösung für  $\Psi_m$ , z.B.  $\cosh(kz)H_m(kr)$ , kann die Randbedingungen am Boden und an der freien Oberfläche nicht erfüllen. Die Wellenzahl  $k = k_0$  ergibt die homogene Lösung von (5.21), d.h. ohne Meeresströmung. Andere Werte für  $k$  sind nicht zulässig. Eine geeignete Lösung läßt sich aber aus folgendem Resultat des Residuensatzes herleiten:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{H_m(kr)}{k - k_0} dk = H_m(k_0 r). \quad (5.23)$$

Der Integrationsweg in der komplexen Ebene schließt die Singularität  $k = k_0$ , nicht aber  $k = 0$  ein, wie in Bild 6 gezeigt. Hieraus findet sich eine Formulierung für  $\Psi$ , die die Boden- und Wasseroberflächenbedingungen weit vom Körper erfüllt:

$$\Psi_{\pm m} = \frac{k_0 \tilde{A}_{\pm m}}{2\pi i} \oint_C \frac{H_m(kr) \cosh(kz)}{(k - k_0)(k \sinh(kh) - \nu_0 \cosh(kh))} dk. \quad (5.24)$$

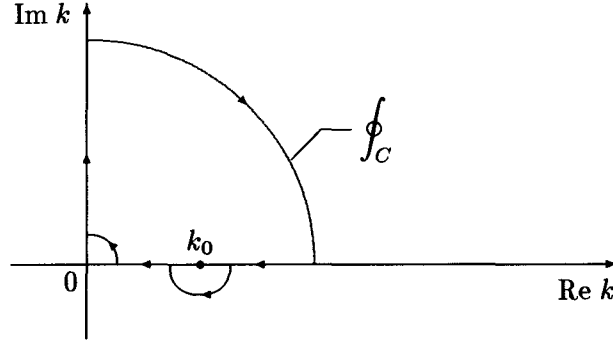


Bild 6: Integrationsweg für Gleichung (5.23)

Eine Doppelsingularität existiert bei  $k = k_0$ , die auswertbar wird, indem man zuerst  $u = k - k_0$  setzt und dann Neumann's Theorem (Abromowitz und Stegun (1972)) anwendet. Daraus folgt

$$\Psi_{\pm m} = \frac{k_0 \tilde{A}_{\pm m}}{2\pi i} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} H_{m-n}(k_0 r) I_n(r, z) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n H_{m+n}(k_0 r) I_n(r, z) \right\}, \quad (5.25)$$

wobei die Integrale  $I_n$  mit

$$I_n = \oint_C \frac{J_n(ur) \cosh(k_0 z + uz) du}{u[(k_0 + u) \sinh(k_0 h + uh) - \nu_0 \cosh(k_0 h + uh)]} \quad (5.26)$$

gegeben sind. Durch die Entwicklung der Integrandterme in Laurentreihen und nochmalige Anwendung des Residuensatzes erhält man

$$I_n = \frac{\pi i}{\sigma_0 \cosh(k_0 h)} \begin{cases} z \sinh(k_0 z) - \frac{h}{\sigma_0} \cosh(k_0 z) & n = 0 \\ r \cosh(k_0 z) & n = 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases} \quad (5.27)$$

Durch die Vernachlässigung der in  $I_0$  erhaltenen homogenen Lösung und der Verwendung einer Besselschen Rekursionsformel ergibt sich schließlich folgende Lösung für  $\Psi_{\pm m}$ :

$$\Psi_{\pm m} = \frac{k_0 \tilde{A}_{\pm m}}{\sigma_0} \left\{ z \frac{\sinh(k_0 z)}{\cosh(k_0 h)} H_m(k_0 r) + r \frac{\cosh(k_0 z)}{\cosh(k_0 h)} H_m'(k_0 r) \right\}. \quad (5.28)$$

Diese Lösung läßt sich auch als

$$\Psi_{\pm m} = \frac{k_0 \tilde{A}_{\pm m}}{\sigma_0 \cosh(k_0 h)} \frac{\partial}{\partial k_0} \{ \cosh(k_0 z) H_m(k_0 r) \} \quad (5.29)$$

darstellen, also als eine Ableitung der asymptotischen Form von  $\psi_{jm}$  nach  $k_0$ . Diese Beziehung läßt sich auch aus den Strahlungsbedingungen herleiten, und durch Einsetzen von (5.28) in (5.22) zeigt sich, daß die Formulierung (5.28) die Strahlungsbedingungen erfüllt.

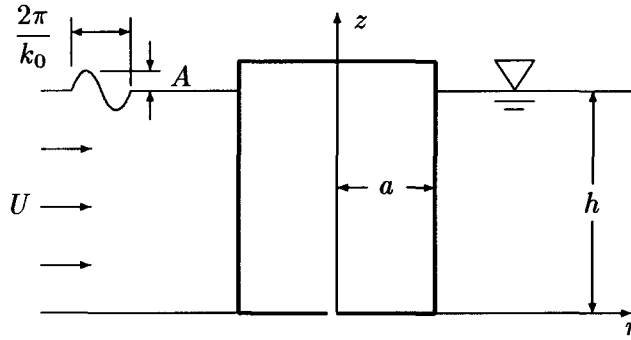


Bild 7: Geometrie für den vertikalen Zylinder

## 6 Analytische Lösung für einen vertikalen Zylinder

Der einfachste Fall eines rotationssymmetrischen Körpers ist ein vertikaler Zylinder, der sich vom Boden bis über die Wasseroberfläche erstreckt (Bild 7). Für die linearen Wellendiffraktionskräfte ohne Meeresströmung existieren für diese Geometrie exakte Lösungen (MacCamy und Fuchs (1954)), sowie für die Diffraktionskräfte zweiter Ordnung (Thanos (1989)). Eine analytische Lösung für das hier betrachtete Wellen-/Strömungsproblem wird nun vorgestellt. Im folgenden werden zuerst die Lösungen für jede der notwendigen Strömungskomponenten und dann die Ausdrücke für die Wellenkräfte aufgestellt. Wie in dem vorangehenden Abschnitt sind die Lösungen ohne Meeresströmung bekannt und die für die Perturbationskomponente infolge der Meeresströmung neu. Der Vollständigkeit halber werden beide im Detail behandelt.

### 6.1 Potentialausdrücke

Für den vertikalen Zylinder wird die Körperwandbedingung für  $\bar{\psi}$  zu

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial r} = 0 \quad \text{für } r = a, 0 \leq z \leq h, \quad (6.1)$$

und die zeitinstationäre Strömung wird unabhängig von der  $z$ -Koordinate. Die Lösung für  $\bar{\psi}$  ist die der zweidimensionalen Umströmung eines Kreises mit dem Radius  $a$ :

$$\bar{\psi} = \frac{a^2}{r}. \quad (6.2)$$

Diese Lösung vereinfacht erheblich die Wasseroberflächenbedingung und die Kraftausdrücke, da alle Ableitungen von  $\bar{\psi}$  nach  $z$  entfallen. Durch die vereinfachte Körperform folgen auch für die Komponenten  $\psi_{7m}$  direkte Lösungen, und zwar sind diese gleich den asymptotischen Fernfeldlösungen:

$$\psi_{7m} = A_{7m} H_m(k_0 r) \frac{\cosh(k_0 z)}{\cosh(k_0 h)}. \quad (6.3)$$

Aus der Körperwandbedingung

$$\frac{\partial \psi_{7m}}{\partial r} = -\frac{\partial \psi_{0m}}{\partial r} \quad \text{für } r = a, 0 \leq z \leq h \quad (6.4)$$

ergeben sich die Koeffizienten  $A_{7m}$  zu

$$A_{7m} = -A_{0m} \frac{J'_m(k_0 a)}{H'_m(k_0 a)}. \quad (6.5)$$

Da die Körperoberfläche des Zylinders keine vertikalen Normalkomponente besitzt, tritt keine Vertikalkraft auf, und das Diffraktionspotential für Tauchbewegung entfällt. Mit  $n_r = 1$  auf  $S_B$  werden die Randbedingungen für  $\psi_{11}$  und  $\psi_{51}$  am Körper

$$\frac{\partial \psi_{11}}{\partial r} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \psi_{51}}{\partial r} = z \quad \text{für } r = a, 0 \leq z \leq h. \quad (6.6)$$

Als Lösungsansätze für  $\psi_{11}$  und  $\psi_{51}$  kommen gemäß der allgemeinen Lösung (5.9) und der Fernfeldlösung folgende Eigenfunktionsexpansionen zum Tragen:

$$\psi_{j1} = \sum_{i=0}^{\infty} B_{ji} R_{1i}(r) Z_i(z) \quad j = 1, 5, \quad (6.7)$$

wobei

$$Z_i(r) = \begin{cases} \frac{\cosh(k_0 z)}{\cosh(k_0 h)} \\ \cos(\alpha_i z) \end{cases} \quad R_{mi}(r) = \begin{cases} H_m(k_0 r) & i = 0 \\ \frac{K_m(\alpha_i r)}{K_m(\alpha_i a)} & i > 0 \end{cases}. \quad (6.8)$$

Die modifizierte Besselsche Funktion  $K_1(\alpha_i r)$  wird aus numerischen Gründen mit ihrem Wert auf  $r = a$  normalisiert. Nach (5.7) sind die Wellenzahlen  $\alpha_{i>0}$  durch die impliziten Dispersionsgleichungen

$$\nu_0 \cos(\alpha_i h) + \alpha_i \sin(\alpha_i h) = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (6.9)$$

gegeben. Die Konstanten  $B_{1i}$  und  $B_{5i}$  ergeben sich aus der Erfüllung der Randbedingung am vertikalen Rand  $r = a$ . Zur Bestimmung derselben wird ein Galerkin-Verfahren verwendet, wobei als Gewichtsfunktionen für die Randbedingungsfehler die orthogonalen Vertikalfunktionen  $Z_i(z)$  verwendet werden. Die Anwendung des Galerkin-Verfahrens ergibt z.B. für  $\psi_{11}$  das Gleichungssystem:

$$\int_0^h \left( \frac{\partial \psi_{j1}}{\partial r} - 1 \right)_{r=a} Z_l(z) dz = 0 \quad l = 0, 1, \dots, \infty. \quad (6.10)$$

Die Orthogonalität der  $Z$ -Funktionen ergibt dann einen Satz entkoppelter Gleichungen für die Koeffizienten  $B_{1i}$  bzw.  $B_{5i}$ :

$$B_{10} = \frac{2}{k_0 H_1'(k_0 a)} \frac{\sinh(k_0 h)}{2k_0 h + \sinh(2k_0 h)}, \quad (6.11)$$

$$B_{1i} = \frac{4K_1(\alpha_i a)}{\alpha_i K_1'(\alpha_i a)} \frac{\sin(\alpha_i h)}{2\alpha_i h + \sin(2\alpha_i h)}, \quad i > 1, \quad (6.12)$$

$$B_{50} = \frac{4 \cosh(k_0 h)}{k_0^2 H_1'(k_0 a)} \frac{1 + (\nu_0 h - 1) \cosh(k_0 h)}{2k_0 h + \sinh(2k_0 h)}, \quad (6.13)$$

$$B_{5i} = \frac{-4K_1(\alpha_i a)}{\alpha_i^2 K_1'(\alpha_i a)} \frac{1 + (\nu_0 h - 1) \cos(\alpha_i h)}{2\alpha_i h + \sin(2\alpha_i h)}, \quad i > 1. \quad (6.14)$$

Die partikuläre Lösung für das Perturbationspotential ist durch Gleichung (5.28) gegeben. Mit Bezug auf die Bezeichnungen für die Radiationspotentiale lassen sich die partikulären Lösungen als

$$\Psi_{\pm m} = \frac{k_0 \tilde{A}_{\pm m}}{\sigma_0} \left\{ R_{m0}(r) \tilde{Z}(z) + \tilde{R}_m(r) Z_0(z) \right\} \quad (6.15)$$

formulieren. Die Koeffizienten  $\tilde{A}_{\pm m}$  werden durch (5.20) gegeben, und es gilt per Definition

$$\tilde{Z}(z) = z \frac{\sinh(k_0 z)}{\cosh(k_0 h)} \quad \text{und} \quad \tilde{R}_m = r H_m'(k_0 r). \quad (6.16)$$

Da die Potentiale  $\psi_{7m}$  nur die Fernfeldlösungen enthalten und  $\bar{\psi}$  einer zweidimensionalen Dipolströmung gleicht, vereinfachen sich die Funktionen  $\mathcal{F}_m^L$  erheblich. Diese werden für die benötigten Komponenten  $m = \pm 1$  zu

$$\mathcal{F}_{\pm 1}^L = \frac{a^2}{r^2} \left\{ \left( \frac{2}{r} - \frac{\partial}{\partial r} \right) (\psi_{02} + \psi_{72}) \mp 2 \frac{\partial}{\partial r} (\psi_{00} + \psi_{70}) \right\}_{z=h}. \quad (6.17)$$

Mit Hilfe der Rekursionsformel für die Besselfunktionen erhält man nach dem Einsetzen der Lösungen für  $\psi_{00}$  und  $\psi_{70}$

$$\mathcal{F}_{\pm 1}^L = k_0 \frac{a^2}{r^2} \{ \mathcal{R}_{23} \pm 2\mathcal{R}_{01} \}, \quad (6.18)$$

wobei die Funktion  $\mathcal{R}_{mn}(r)$  wie folgt definiert wird:

$$\mathcal{R}_{mn}(r) = A_{0m} J_n(k_0 r) + A_{7m} H_n(k_0 r). \quad (6.19)$$

## 6.2 Wellenkräfte

Die Diffraktionskräfte ohne Meeresströmung folgen aus der Lösung für  $\psi_{0m}$  und  $\psi_{7m}$  zu

$$\begin{aligned} Y_1^{(0)} &= \frac{-i\omega_0\pi}{ag} \int_0^h [\psi_{01}(a, z) + \psi_{71}(a, z)] dz \\ &= \frac{-2\pi i}{k_0 a} \tanh(k_0 h) \left[ J_1(k_0 a) - \frac{J_1'(k_0 a)}{H_1'(k_0 a)} H_1(k_0 a) \right] \end{aligned} \quad (6.20)$$

und

$$\begin{aligned} Y_5^{(0)} &= \frac{-i\omega_0\pi}{agh} \int_0^h z [\psi_{01}(a, z) + \psi_{71}(a, z)] dz \\ &= \frac{-2\pi i}{k_0^2 a h} \left[ \nu_0 h - 1 + \operatorname{sech}(k_0 h) \right] \left[ J_1(k_0 a) - \frac{J_1'(k_0 a)}{H_1'(k_0 a)} H_1(k_0 a) \right]. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Das Wellenmoment wird hier bezüglich der Wassertiefe normalisiert. Für die Konvektionskraftkoeffizienten  $Y_{Cj}$  werden die Hilfsfunktionen  $\mathcal{H}_{\pm 1}$  benötigt, die sich für den vertikalen Zylinder zu

$$\mathcal{H}_{\pm 1} = \frac{4}{a} \{ \psi_{02}(a, z) + \psi_{72}(a, z) \} \quad (6.22)$$

vereinfachen. Es ergeben sich dann die Formeln

$$\begin{aligned} Y_{C1} = Y_{C2} &= \frac{2\pi}{\omega_0 a^2} \int_0^h [\psi_{02}(a, z) + \psi_{72}(a, z)] dz \\ &= \frac{4\pi i}{k_0^2 a^2} \left[ J_2(k_0 a) - \frac{J_2'(k_0 a)}{H_2'(k_0 a)} H_2(k_0 a) \right] \end{aligned} \quad (6.23)$$

und

$$\begin{aligned} Y_{C4} = Y_{C5} &= \frac{2\pi}{\omega_0 a^2 h} \int_0^h z [\psi_{02}(a, z) + \psi_{72}(a, z)] dz \\ &= \frac{4\pi i}{k_0^2 \nu_0 a^2 h} \left[ \nu_0 h - 1 + \operatorname{sech}(k_0 h) \right] \left[ J_2(k_0 a) - \frac{J_2'(k_0 a)}{H_2'(k_0 a)} H_2(k_0 a) \right]. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Mit  $a_B = a$  entfällt für die Perturbationskräfte das Integral über die lokale Wasseroberfläche  $S_{F1}$ . Die Perturbationskraftkoeffizienten werden dann für die Zylindergeometrie zu

$$Y_{P_2^1} = \frac{\omega_0 \pi}{ag} \int_0^h \left[ \Psi_{\pm 1} - \psi_{11} \frac{\partial \Psi_{\pm 1}}{\partial r} \right]_{r=a} dz - \frac{\omega_0 \pi}{a^2 g} \int_a^\infty r \mathcal{F}_{\pm 1}^L \psi_{11}(r, h) dr, \quad (6.25)$$

$$Y_{P_4^5} = \frac{\omega_0 \pi}{agh} \int_0^h \left[ z \Psi_{\pm 1} - \psi_{51} \frac{\partial \Psi_{\pm 1}}{\partial r} \right]_{r=a} dz - \frac{\omega_0 \pi}{a^2 gh} \int_a^\infty r \mathcal{F}_{\pm 1}^L \psi_{51}(r, h) dr. \quad (6.26)$$

Die Integrale über die Körperoberfläche können aus den Lösungen für  $\psi_{11}$ ,  $\psi_{51}$ , und  $\Psi_{\pm 1}$  direkt ausgewertet werden, während für die unendlichen Wasseroberflächenintegrale eine numerische Methode benötigt wird. Für die Integrale über die Wassertiefe am Außenrand  $r = a$  folgt für die Horizontalkraft

$$\begin{aligned} \int_0^h \left[ \Psi_{\pm 1} - \psi_{11} \frac{\partial \Psi_{\pm 1}}{\partial r} \right]_{r=a} dz = & \tilde{A}_{\pm 1} \left\{ \frac{R_{10}}{k_0 \sigma_0} \left( k_0 h - \frac{\nu_0}{k_0} \right) + \tilde{R}_1 \frac{\nu_0}{k_0 \sigma_0} - \frac{1}{2} B_{10} R_{10} \frac{\partial \tilde{R}_1}{\partial r} \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} B_{10} R_{10} \frac{\partial R_{10}}{\partial r} \left[ k_0 h + \frac{\nu_0}{k_0} (\nu_0 h - 1) \right] - k_0 \frac{\partial R_{10}}{\partial r} \sum_{i=1}^{\infty} B_{1i} \frac{\cos(\alpha_i h)}{\alpha_i^2 + k_0^2} \right\}_{r=a}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Ein ähnlicher Ausdruck resultiert für das Kragmoment. Für die Integrale über die Wasseroberfläche ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_a^\infty r \psi_{j1} \mathcal{F}_{\pm 1}^L dr = & a^2 k_0 B_{j0} \int_a^\infty \frac{H_1(k_0 r) (\mathcal{R}_{23} \pm \mathcal{R}_{01})}{r} dr \\ & + a^2 k_0 \sum_{i=1}^{\infty} B_{ji} \cos(\alpha_i h) \int_a^\infty \frac{K_1(\alpha_i r) (\mathcal{R}_{23} \pm \mathcal{R}_{01})}{r} dr. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Nur für das erste Integral auf der rechten Seite von (6.28), das nur die Funktionen  $J_m(k_0 r)$  und  $H_m(k_0 r)$  enthält, existiert eine analytische Lösung. Für die Summationsintegrale, die exponentiell abklingen, wird die Koordinatentransformation

$$\int_a^\infty f(r) dr = \int_0^{\frac{1}{a}} f\left(\frac{1}{u}\right) \frac{1}{u^2} du$$

zusammen mit einer Romberg-Trapez-Methode verwendet.

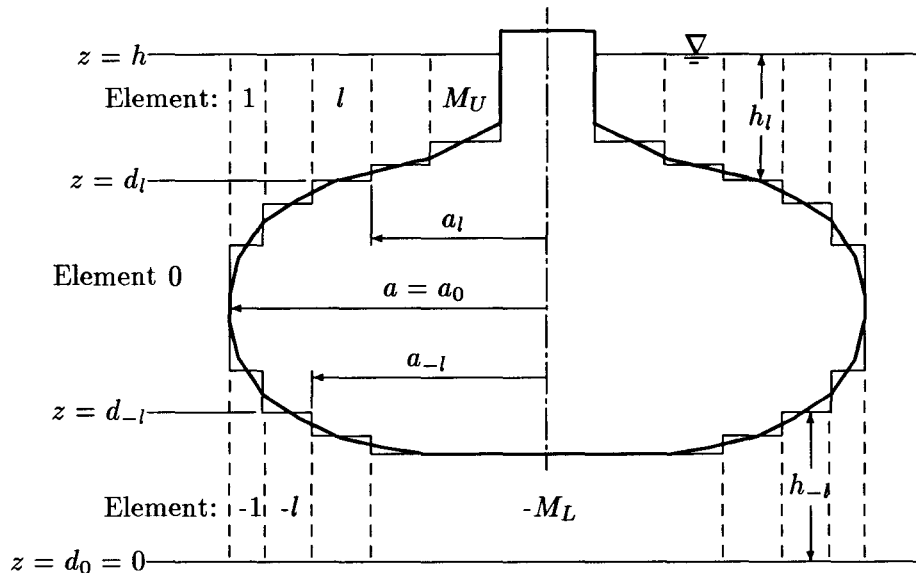


Bild 8: Definitionsskizze für die Idealisierung der Meridianlinie eines Rotationskörpers und die Unterteilung des Fluidbereiches

## 7 Verfahren für beliebige rotationssymmetrische Körper mit vertikaler Achse

### 7.1 Allgemeine Beschreibung

Das hier angewandte Verfahren basiert auf dem Ersatz der Meridianlinie des Körpers durch eine Treppenkurve und einer entsprechenden Unterteilung des Fluidbereichs in Unterbereiche oder Elemente, wie in Bild 8 gezeigt. Diese sogenannte Makroelementmethode ist von Kokkinowrachos et al. (1980), (1986) für die Bestimmung der linearen Diffraktions- und Radiationskräfte, von Thanos (1989) für die Bestimmung der Wellenkräfte zweiter Ordnung und von Zibell (1989) für Mehrkörpersysteme erfolgreich eingesetzt worden. Die Berechnung der Fourierkomponente  $\psi_{jm}$  ist für jedes dieser Probleme gleich, und auch hier kommt dieselbe Methode zum Einsatz. Für diese Arbeit wurden die numerische Methode komplett neu programmiert (in FORTRAN) und die Aufstellung und Lösung des resultierenden Gleichungssystems bezüglich Speicherplatz und Rechenzeit optimiert. Zur Bestimmung des stationären Störpotentials  $\bar{\psi}$  mußte die numerische Methode etwas modifiziert werden. Die Berechnung der Perturbationskorrekturen für die harmonischen Wellenkräfte stellt eine Erweiterung der numerischen Methode dar.

Wie für den vertikalen Zylinder wird der Vollständigkeit halber neben der Bestimmung der Perturbationskräfte sowohl die numerische Methode als auch die Ermittlung der Kräfte ohne Strömung behandelt.

Durch die Körperidealisation entstehen Fluidbereiche, die nur durch horizontale und vertikale Ränder begrenzt sind. Die zugrunde liegende Idee ist, in jedem Fluidbereich Lösungsansätze für die benötigten Strömungspotentiale zu verwenden, die die Randbedingungen an den jeweiligen horizontalen Rändern *a priori* erfüllen. Hierfür dienen die im Abschnitt 5.1 angegebenen Eigenfunktionsexpansionen. Die Erfüllung der Randbedingungen auf den vertikalen Körperändern sowie der Kompatibilitätsbedingungen zwischen benachbarten Elementen erfolgt dann durch ein Galerkin-Verfahren.

Drei Typen von Fluidbereichen bzw. Elementen entstehen:

i) ein infinites äußeres Element, hier als Element 0 bezeichnet, das sich vom Meeresboden  $z = 0$  bis zu der freien Oberfläche  $z = h$  erstreckt, äquivalent dem Fluidbereich für den im letzten Abschnitt behandelten vertikalen Zylinder,

ii)  $M_U$  obere Elemente, die sich von dem Körpertrand  $z = d_l$  bis zur Wasseroberfläche  $z = h$  erstrecken und mit positiven Indizierungen bezeichnet werden, und

iii)  $M_L$  untere Elemente, die sich vom Boden  $z = 0$  bis zum Körpertrand  $z = d_{-l}$  erstrecken und mit negativen Indizierungen bezeichnet werden.

Durch die Körperidealisierung resultieren vereinfachte Randbedingungen auf den horizontalen und vertikalen Flächen der Treppenkurve, die mit  $S_H$  und  $S_V$  bezeichnet werden. Diese sind für die zeitstationäre Komponente

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} = 0 \quad \text{auf } S_H \quad \text{und} \quad \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial r} = 1 \quad \text{auf } S_V, \quad (7.1)$$

für die Diffraktionskomponente

$$\frac{\partial \psi_{7m}}{\partial z} = -\frac{\partial \psi_{0m}}{\partial z} \quad \text{auf } S_H \quad \text{und} \quad \frac{\partial \psi_{7m}}{\partial r} = -\frac{\partial \psi_{0m}}{\partial r} \quad \text{auf } S_V, \quad (7.2)$$

und für die Radiationskomponente

$$\frac{\partial \psi_{11}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \psi_{30}}{\partial z} = 1; \quad \frac{\partial \psi_{51}}{\partial z} = -r \quad \text{auf } S_H, \quad (7.3)$$

$$\frac{\partial \psi_{11}}{\partial r} = 1; \quad \frac{\partial \psi_{30}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \psi_{51}}{\partial r} = z \quad \text{auf } S_V. \quad (7.4)$$

Für einige der Strömungskomponenten  $\psi_{jm}$  existieren inhomogene Randbedingungen an den horizontalen Flächen  $S_H$ , die die Eigenfunktionsexpansionen nicht erfüllen. Diese werden durch zusätzliche partikuläre Lösungen in den oberen und unteren Elementen erfüllt. Für den Fluidbereich  $l$  gilt demnach:

$$\psi_{jm}^l = \begin{cases} Q_{jm}^l + q_{jm}^l & l \neq 0 \\ Q_{jm}^l & l = 0 \end{cases}, \quad (7.5a)$$

$$\bar{\psi}^l = \bar{Q}^l \quad l = -M_L \dots M_U. \quad (7.5b)$$

Hier sind  $Q_{jm}^l$  und  $\bar{Q}^l$  die Eigenfunktionsexpansionen, die die homogenen Randbedingungen

$$\frac{\partial Q_{jm}^l}{\partial z} = \frac{\partial \bar{Q}^l}{\partial z} = 0 \quad \text{auf } S_H \quad (7.6)$$

an den horizontalen Rändern erfüllen, und  $q_{jm}^l$  sind die partikulären, direkt bestimmbaren Lösungen für die inhomogene Randbedingung auf  $S_H$ .

Für jedes Fluidelement gilt für die Eigenfunktionsexpansion folgende Schreibweise:

$$Q_{jm}^l = \sum_{i=0}^{N_l} R_{jmi}^l(r) Z_i^l(z) \quad \text{und} \quad \bar{Q}^l = \sum_{i=0}^{N_l} \bar{R}_i^l(r) \bar{Z}_i^l(z). \quad (7.7)$$

Die Funktionen  $R_{jmi}^l$  und  $\bar{R}_i^l$  enthalten die zu bestimmenden Konstanten für die Eigenfunktionsexpansionen. Entsprechend den im Abschnitt 5.1 angegebenen Lösungen bestehen diese Funktionen im allgemeinen aus jeweils zwei Lösungsformen, die mit den Indizierungen  $A$  und  $B$  bezeichnet werden. Für das äußere Element sowie für eventuelle innere Elemente, die sich bis  $r = 0$  erstrecken, existiert nur eine Lösungsform pro Ansatzglied. Die Ansätze für die Radialfunktionen lauten also

$$\bar{R}_i^l = \begin{cases} \bar{A}_{Ai}^0 \bar{R}_{Ai}^0 \\ \bar{A}_{Bi}^l \bar{R}_{Bi}^l \\ \bar{A}_{Ai}^l \bar{R}_{Ai}^l + \bar{A}_{Bi}^l \bar{R}_{Bi}^l \end{cases}, \quad R_{jmi}^l = \begin{cases} A_{Ajmi}^0 R_{Ami}^0 & \text{für } l = 0 \\ A_{Bjmi}^l R_{Bmi}^l & \text{für } a_l = 0 \\ A_{Ajmi}^l R_{Ami}^l + A_{Bjmi}^l R_{Bmi}^l & \text{sonst} \end{cases} \quad (7.8)$$

Für die zeitabhängigen Strömungen hängen nur die Koeffizienten  $A_{Ajmk}^l$  und  $A_{Bjmk}^l$  von der Strömungsform (Index  $j$ ) ab und nicht die  $R$ -Funktionen. Dies wirkt sich günstig bei der Bestimmung der Koeffizienten aus, da nur ein Gleichungssystem pro Fourier-Komponente  $m$  gelöst werden muß, d.h.  $\psi_{30}$  und  $\psi_{70}$  können aus einem Gleichungssystem mit einer Koeffizientenmatrix und zwei verschiedenen rechten Seiten berechnet werden: entsprechendes gilt für  $\psi_{11}$ ,  $\psi_{51}$  und  $\psi_{71}$ . Die  $A$ -Koeffizienten hierfür sind alle komplex, während  $\bar{A}_{Ak}^l$  und  $\bar{A}_{Bk}^l$  reell sind.

In (7.7) bezeichnet  $N_l$  die Anzahl der Reihenglieder für ein Element  $l$ , wobei die gleiche Anzahl für jeden Elementtyp angenommen wird, d.h.  $N_L$  Glieder für die unteren Elemente,  $N_I$  für das infinite äußere Element und  $N_U$  Glieder für die oberen Elemente. Diese Grenzen müssen so gewählt werden, daß eine hinreichende Genauigkeit der Approximation erreicht wird.

Die partikuläre Fernfeldlösung  $\phi_p$  gilt nur außerhalb von  $r = a$ , d.h. nur im äußeren Element.

Im folgenden Abschnitt werden zuerst die Ansätze für die Radial- und Vertikalfunktionen sowie die erforderlichen partikulären Lösungen für jeden Elementtyp angegeben. Anschließend wird die Anwendung der Galerkinmethode zur Bestimmung der  $A$ -Koeffizienten kurz beschrieben, und schließlich werden die Gleichungen zur Ermittlung der Kraftkoeffizienten aufgestellt.

## 7.2 Lösungsansätze für die Fourierkomponenten

Für die stationäre Komponente  $\bar{\psi}$  gilt für jeden Elementtyp eine Randbedingung für eine feste Wand an der oberen und unteren horizontalen Berandung. Es gibt also für jedes Element eine Eigenfunktionsexpansion der Form (5.12). Die Vertikal- und Radialfunktionen werden wie folgt definiert:

$$\bar{Z}_i^l = \begin{cases} 1 \\ \cos(\bar{\alpha}_i^l(z - d_l)) \end{cases}, \quad \bar{R}_{Ai}^l = \begin{cases} \frac{a_k}{r} \\ \frac{K_1(\bar{\alpha}_i^l r)}{K_1(\bar{\alpha}_i^l a_l)} \end{cases}, \quad \bar{R}_{Bi}^l = \begin{cases} \frac{r}{a_i^*} & i = 0 \\ \frac{I_1(\bar{\alpha}_i^l r)}{I_1(\bar{\alpha}_i^l a_i^*)} & i > 0 \end{cases}, \quad (7.9)$$

wobei

$$\bar{\alpha}_i^l = \frac{i\pi}{h_l} \quad (7.10)$$

und  $a_i^*$  der äußere Radius des Elements  $l$  ist.

Für die Fourierkomponenten  $\psi_{jm}$  gelten für die unteren Elemente dieselben Randbedingungen wie für  $\bar{\psi}$ , während für die restlichen Elemente die lineare Wellenbedingung bei  $z = h$  und eine Festwandbedingung bei  $z = d_l$  erfüllt werden müssen. Zusätzlich gilt im äußeren Element die Strahlungsbedingung. Es folgen also verschiedene Eigenfunktionsexpansionen für die drei Elementtypen. Für das äußere infinite Element folgt eine Expansion wie (6.7) für den vertikalen Zylinder, für die oberen eine Expansion der Form (5.9) und für die unteren ebenso wie für  $\bar{\psi}$  eine der Form (5.12). Die Vertikalfunktionen lauten

$$Z_i^l = \begin{cases} 1 & i = 0, l < 0 \\ \frac{\cosh(\alpha_0^k(z - d_k))}{\cosh(\alpha_0^k(h - d_k))} & i = 0, l \geq 0 \\ \cos(\alpha_i^k(z - d_k)) & i > 0 \end{cases}, \quad (7.11)$$

wobei  $\alpha_0^0$  der Wellenzahl  $k_0$  entspricht und  $\alpha_i^l = \bar{\alpha}_i^l$  für  $l < 0$  gilt. Die sonstigen Wellenzahlen werden durch die impliziten Gleichungen

$$\nu_0 = \alpha_0^l \tanh(\alpha_0^l h_l) \quad \text{und} \quad \nu_0 = -\alpha_i^l \tan(\alpha_i^l h_l) \quad \text{für } i > 0, l \geq 0 \quad (7.12)$$

bestimmt. Die zugehörigen Radialfunktionen sind:

$$R_{Ami}^l = \begin{cases} 1 - \ln\left(\frac{r}{a_l}\right) \\ \left(\frac{a_l}{r}\right)^m \\ \frac{K_m(\alpha_i^l r)}{K_m(\alpha_i^l a_l)} \\ \frac{Y_m(\alpha_i^l r)}{\min(Y_m(\alpha_i^l a_l), -1)} \\ \frac{H_m(k_0 r)}{H_m(k_0 a)} \end{cases}, \quad R_{Bmi}^l = \begin{cases} 1 & m = 0, i = 0, l < 0 \\ \left(\frac{r}{a_i^*}\right)^m & m > 0, i = 0, l < 0 \\ \frac{I_m(\alpha_i^l r)}{I_m(\alpha_i^l a_i^*)} & i > 0 \\ J_m(\alpha_i^l r) & i = 0, l > 0 \\ - & i = 0, l = 0 \end{cases}. \quad (7.13)$$

Die Radialfunktionen werden aus numerischen Gründen auf Eins bei  $r = a_l$  oder  $r = a_i^*$  normiert. Wegen des Exponentialverhaltens von  $Y_m(r)$  bei sehr kleinen Argumenten wird hier im Gegensatz zum Vertikalzylinder auch die Hankelfunktion normiert. Weil  $Y_m(\alpha_i^l r)$  für größere Argumente um Null oszilliert, wird der zur Normalisierungsteiler auf  $-1$  begrenzt.

Für die Erfüllung der inhomogenen Randbedingungen auf den horizontalen Treppenstufen sind für  $\psi_{7m}$ ,  $\psi_{30}$  und  $\psi_{51}$  partikuläre Lösungen notwendig. Für  $\psi_{7m}$  sind diese einfach die Negativen der Elementarwellenkomponente:

$$q_{7m}^l = -\psi_{0m} = -R_{0m}(r)Z_0^0(z) \quad l \neq 0, \quad (7.14)$$

wobei  $R_{0m}(r) = A_{0m}J_m(k_0 r)$ . Es gilt also in den oberen und unteren Elementen  $\psi_{dm}^l = Q_{7m}^l$ . Für die Radiationskomponenten erfüllen folgende partikuläre Lösungen die inhomogene Randbedingungen auf  $S_H$ :

$$q_{30}^l = \begin{cases} z - h + 1/\nu_0 \\ \frac{-r^2 + 2z^2}{4d_l} \end{cases} \quad \text{und} \quad q_{51}^l = \begin{cases} -r(z - h + 1/\nu_0) & l > 0 \\ \frac{r^3 - 4rz^2}{8d_l} & l < 0 \end{cases}. \quad (7.15)$$

Die Normalisierung der Radialfunktionen hat zur Folge, daß sich die Fernfeldkoeffizienten  $A_{jm}$  zu

$$A_{jm} = \frac{A_{jmo}^0}{H_m(k_0 a)} \quad (7.16)$$

ergeben. Mit der Formel (5.28) für die Perturbationskomponenten  $\Psi_m$  ergeben sich dann die Lösungskoeffizienten  $\tilde{A}_m$  aus (5.20).

### 7.3 Anwendung eines Galerkin-Verfahrens

Hier folgt nur eine kurze Beschreibung der Bestimmung der Koeffizienten für die Eigenfunktionsexpansionen; eine detailliertere Beschreibung ist bei Kokkinowrachos et al. (1980, 1986) zu finden. Die Lösung für die Potentialkomponenten  $\psi_{jm}$  ist von Kokkinowrachos et al. (1980, 1986) beschrieben worden. Die Lösung für  $\bar{\psi}$  ist neu hier, folgt aber der Methode für  $\psi_{jm}$ .

Bei jeder vertikalen Stufe der als Approximation verwendete Treppenkurve<sup>4</sup> gilt eine Randbedingung an dem vertikalen Körperperrand. Falls die Stufe sich nicht bis  $z = 0$  oder  $z = h$  erstreckt, gelten zusätzlich Kompatibilitätsbedingungen zwischen den zwei aneinander grenzenden Fluidelementen. Als Kompatibilitätsbedingungen dienen die Gleichheit des Potentials und der Normalableitung des Potentials über den vertikalen Rand zwischen den zwei benachbarten Fluidelementen. Die Anwendung des Galerkin-Verfahrens wird hier für eine obere Stufe

<sup>4</sup>Bei einer abgestuften zylindrischen Körper wie z.B. einen schwimmenden Zylinder stellt die Treppenkurve natürlich keine Approximation dar, sondern gleicht exakt der Körperform

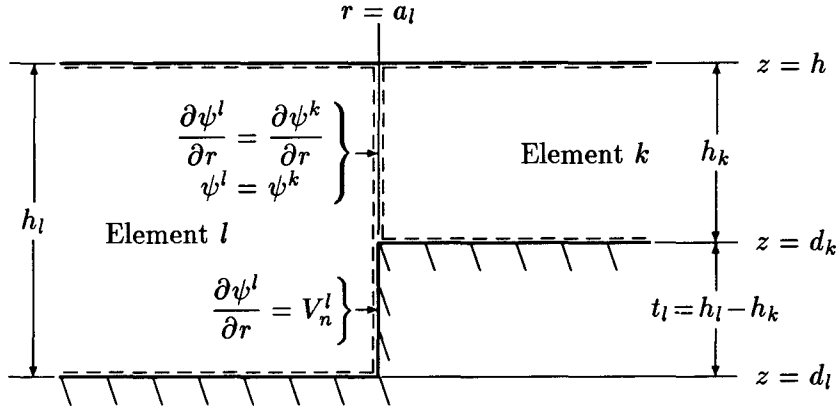


Bild 9: Rand- und Kompatibilitätsbedingungen bei einer oberen Stufe

der Treppenkurve demonstriert, und zwar für eine beliebige Potentialkomponente  $\psi$ . Die Indizierungen  $jm$  für die Strömungs- und Fourierkomponente (bzw. Überstreichungen bei  $\bar{\psi}$ ) werden in diesem Abschnitt aus Übersichtsgründen weggelassen.

Die allgemeine Situation ist in Bild 9 für die  $l$ -te Stufe bei  $r = a_l$  mit den benachbarten Elementen  $k$  und  $l$  dargestellt. Es wird angenommen, daß der Körper bezüglich  $z$  konvex ist, also liegt das Element  $l$  mit der größeren Höhe außerhalb des Elementes  $k$  und  $k = l + 1$ .<sup>5</sup> Mit  $V_n^l$  als der erforderlichen Normalableitung auf der vertikalen Treppenstufe, die von (7.1), (7.2) und (7.4) bestimmt wird, lassen sich die Rand- und Kompatibilitätsbedingungen als

$$\psi^l = \psi^k \quad d_k \leq z \leq h, \quad (7.17a)$$

$$\psi_r^l = \begin{cases} \psi_r^k & d_l \leq z \leq d_k \\ V_n^l & d_k \leq z \leq h \end{cases} \quad (7.17b)$$

aufstellen. Für das Galerkin-Verfahren dienen die Funktionen  $Z_i^k$  als Wichtungen für (7.17a) über die Höhe des Elementes  $k$  und die Funktionen  $Z_i^l$  für (7.17b) über die Höhe des Elementes  $l$ . Daraus ergeben sich folgende Sätze von Gleichungen:

$$\int_{d_k}^h (\psi^k(a_l, z) - \psi^l(a_l, z)) Z_i^k dz = 0, \quad i = 0, \dots, N_l - 1, \quad (7.18a)$$

$$\int_{d_k}^h (\psi_r^l(a_l, z) - \psi_r^m(a_l, z)) Z_i^l dz + \int_{d_l}^{d_k} (\psi_r^l(a_l, z) - V_n^l) Z_i^l dz = 0, \quad i = 0, \dots, N_l - 1. \quad (7.18b)$$

Durch das Einsetzen der Lösungsansätze für  $\psi^k$  und  $\psi^l$  folgt ein Satz von  $2N_l$  linearen Gleichungen für die Koeffizienten  $A$ . Übersichtlich lassen sich diese Gleichungen in einer Matrixschreibweise darstellen:

$$\begin{bmatrix} \delta_{ij}^{kl} R_{Aj}^{kl} & \delta_{ij}^{kl} R_{Bj}^{kl} & I_{ij}^{kl} R_{Aj}^{ll} & I_{ij}^{kl} R_{Bj}^{ll} \\ I_{ji}^{kl} D_{Aj}^{kl} & I_{ji}^{kl} D_{Bj}^{kl} & \delta_{ij}^l D_{Aj}^{ll} & \delta_{ij}^l D_{Bj}^{ll} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_{Aj}^k \\ A_{Bj}^k \\ A_{Aj}^l \\ A_{Bj}^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_i^{kl} \\ K_i^{kl} + L_i^l \end{pmatrix}, \quad (7.19)$$

$i, j = 0, \dots, N_l - 1.$

<sup>5</sup>Die Analyse bleibt trotzdem gleich für einen bezüglich  $z$  konkaven Körper, d.h.  $k = l - 1$ .

Auf der linken Gleichungsseite gilt für die Radialfunktionen

$$R_{Aj}^{kl} = R_{Aj}^k(a_l), \quad D_{Aj}^{kl} = \frac{\partial R_{Aj}^k}{\partial r} \Big|_{r=a_l}, \quad \text{u.s.w.}, \quad (7.20)$$

und für die Integration der Vertikalfunktionen

$$I_{ij}^{kl} = - \int_{h_k} Z_i^k Z_j^l dz \quad \text{und} \quad \delta_{ij}^l = \delta_{ij} \int_{h_l} (Z_i^l)^2 dz. \quad (7.21)$$

Hier bezeichnet  $\int_{h_l}$  das Integral in positiver Richtung über die Höhe des Elementes  $l$ . Für die rechte Seite müssen folgende Integrale für die jeweiligen partikulären Funktionen und Randbedingung bestimmt werden:

$$J_i^{kl} = \int_{h_k} (q^l(a_l, z) - q^k(a_l, z)) Z_i^k dz, \quad (7.22)$$

$$K_i^{kl} = \int_{h_k} (q_r^k(a_l, z) - q_r^l(a_l, z)) Z_i^l dz, \quad (7.23)$$

$$L_i^l = \int_{t_l} (V_n^l - q_r^l(a_l, z)) Z_i^l dz. \quad (7.24)$$

Ähnlich wie bei (7.21) bezeichnet  $\int_{t_l}$  das Integral in positiver Richtung über die Höhe der vertikalen Stufe bei  $r = a_l$ . Die Integrale sind analytisch leicht zu berechnen und werden hier nicht angegeben. Die Koeffizientenmatrix und die rechte Seite von (7.19) enthalten nur reelle Terme.

Im Falle  $a_k = 0$  (d.h. das Element  $k$  erstreckt sich bis zu  $r = 0$ ) oder  $h_k = 0$  (d.h. das Element  $k$  existiert nicht) sind einfach die entsprechende Gleichungssätze zu streichen. Für die unteren Treppenstufen entsteht genau dasselbe Gleichungssystem, während für die äußere Stufe bei  $r = a_0 = a$  ein ähnliches Gleichungssystem resultiert. Hier gelten die Randbedingungen

$$\psi^{-1} = \psi^0 \quad \text{für } 0 < z < d_{-1}, \quad (7.25a)$$

$$\psi^1 = \psi^0 \quad \text{für } d_1 < z < h, \quad (7.25b)$$

$$\psi_r^0 = \begin{cases} \psi_r^{-1} & \text{für } 0 < z < d_{-1} \\ V & \text{für } d_{-1} < z < d_1 \\ \psi_r^1 & \text{für } d_1 < z < h \end{cases} \quad (7.25c)$$

Als Wichtungsfunktionen dienen nun für (7.25a) die  $N_L$  Funktionen  $Z_i^{-1}$ , für (7.25b) die  $N_U$  Funktionen  $Z_i^1$  und für (7.25c) die  $N_I$  Funktionen  $Z_i^0$ . Mit der oben definierten Notation entsteht dann folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} \delta_{ij}^{-1} R_{Aj}^{-10} & \delta_{ij}^{-1} R_{Bj}^{-10} & I_{ij}^{-1} R_{Aj}^{00} & 0 & 0 \\ (N_L, N_L) & (N_L, N_L) & (N_L, N_I) & & \\ I_{ji}^{-1} D_{Aj}^{-10} & I_{ji}^{-1} D_{Bj}^{-10} & \delta_{ij}^0 D_{Aj}^{00} & I_{ji}^1 D_{Aj}^{10} & I_{ji}^1 D_{Bj}^{10} \\ (N_I, N_L) & (N_I, N_L) & (N_I, N_I) & (N_I, N_U) & (N_I, N_U) \\ 0 & 0 & I_{ij}^1 R_{Aj}^{00} & \delta_{ij}^1 R_{Aj}^{10} & \delta_{ij}^1 R_{Bj}^{10} \\ & & (N_U, N_I) & (N_U, N_U) & (N_U, N_U) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_{Aj}^{-1} \\ A_{Bj}^{-1} \\ A_{Aj}^0 \\ A_{Aj}^1 \\ A_{Bj}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_i^{-10} \\ K_i^{-10} + \\ L_i^0 + K_i^{10} \\ J_i^{10} \end{pmatrix}, \quad (7.25)$$

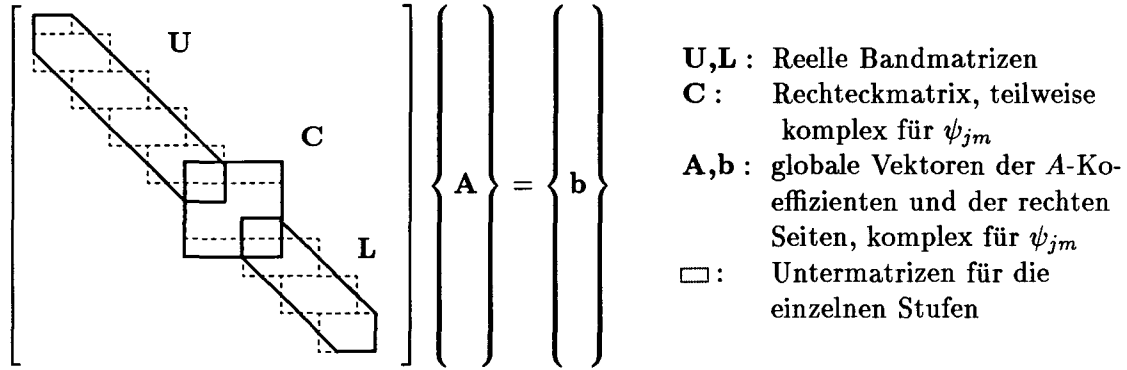


Bild 10: Aufbau des globalen Gleichungssystems und Unterteilung der Koeffizientenmatrix für die in Bild 8 dargestellte Treppenkurve ( 5 obere Stufen, 3 untere Stufen)

wobei die lokalen Grenzen für die Indizes  $i$  und  $j$  in Klammern angegeben sind. Wieder sind für  $a_{\pm 1} = 0$  oder  $h_{\pm 1} = 0$  die entsprechenden Gleichungen zu streichen. Das für den Vertikalzylinder verwendete Gleichungssystem ist aus dem mittleren Untersatz von Gleichungen zu erkennen. Für die Potentialkomponente  $\psi_{jm}$  ergibt nur der hier auftretende Term  $D_{A0}^{00}$  einen komplexen Wert. Dies läßt sich bei der Lösung des Gleichungssystems ausnutzen.

Durch die Zusammenstellung der Galerkin-Gleichungen der einzelnen Stufen entsteht ein globales Gleichungssystem zur Bestimmung der  $A$ -Koeffizienten, dessen Bandbreite von  $N_I$ ,  $N_U$ , und  $N_L$ , aber nicht von der Anzahl der Elemente abhängt. Aus diesem Grund erhöht sich der Rechenaufwand nur linear mit der Anzahl der Elemente, aber mit der Anzahl der Lösungsterme quadratisch. Bei der Lösung des Gleichungssystems erwies es sich bezüglich der Rechnerkapazität (die Berechnungen wurden auf einem DOS-PC durchgeführt) als günstig, die Koeffizientenmatrix in drei teilweise überlappende Teile aufzutrennen, wie in Bild 10 dargestellt. Diese sind zwei reelle Bandmatrizen mit den Breiten  $4N_L$  und  $4N_U$  (unabhängig von der Anzahl der Elemente) sowie eine quadratische Matrix der Größe  $2N_L + N_I + 2N_U$ , die nur in einer Spalte komplexe Werte besitzt.

Bei einem Programmlauf über mehrere Wellenfrequenzen oder -zahlen muß die untere Koeffizientenmatrix nur einmal pro Fourierzahl  $m$  berechnet und reduziert werden, da die Koeffizienten nur von der Körpergeometrie abhängen. Ferner gleicht die untere Matrix für  $\bar{\psi}$  der für  $\psi_{j1}$ . Da die rechten Seiten aber von der Wellenzahl abhängen, wird eine  $LU$ -Zerlegung der unteren Bandmatrix verwendet, um diesen Vorteil bei Körpern mit mehreren unteren Elementen ausnutzen zu können.

#### 7.4 Ausdrücke für die Kraftkoeffizienten

Aus der Körperidealisierung resultieren die folgenden Ausdrücke für die Integration einer beliebigen Funktion  $\psi$  über die Treppenkurve in der  $(r, z)$ -Ebene:

$$\int_{C_B} \psi n_r dl = \sum_{l=-L_L}^{L_U} (-1)^{|l-\lambda|} \int_{t_l} \psi^\lambda(a_l, z) dz, \quad (7.26a)$$

$$\int_{C_B} \psi n_z dl = \sum_{\substack{l=-M_L \\ l \neq 0}}^{M_U} \frac{l}{|l|} \int_{a_l}^{a_l^*} \psi^l(r, d_l) dr. \quad (7.26b)$$

Für das erste Integral wird über die vertikalen Treppenstufen summiert, weil abhängig von der Körperform ein Element auf 0, 1 oder 2 Seiten an eine vertikalen Stufe grenzen kann. Die Grenzen  $L_U$  und  $L_L$  bezeichnen die Anzahl der oberen und unteren vertikalen Stufen der Treppenkurve und  $\lambda$  das der Treppenstufe bei  $r = a_l$  angrenzende Element. Diese drei Größen können, abhängig von der Form des Körpers, unterschiedlich (bis auf  $\pm 1$ ) von  $M_L$ ,  $M_U$  und  $l$  sein. Wieder bezeichnet  $\int_{t_i}$  die Integration in der positiven  $z$ -Richtung über die Stufe bei  $r = a_l$ . Für das zweite Integral wird über die Elemente selber summiert, wobei  $a_l^*$  wieder den äußeren Radius des Elementes bezeichnet.

Zusammen mit den Lösungsansätzen für die Fourierkomponente  $\psi_{7m}$  führen diese Formeln zuerst für die Diffraktionskräfte ohne Strömung zu

$$Y_1^{(0)} = \frac{-i\omega\pi}{a^2g} \sum_{l=-L_L}^{L_U} (-1)^{|l-\lambda|} a_l \sum_{i=0}^{N_l-1} R_{1i}^{\lambda l}(a_l) \int_{t_i} Z_i^\lambda dz, \quad (7.27a)$$

$$Y_3^{(0)} = \frac{-2i\omega\pi}{a^2g} \sum_{\substack{l=-M_L \\ l \neq 0}}^{M_U} \frac{l}{|l|} \sum_{i=0}^{N_l-1} Z_i^l(d_l) \int_{a_l}^{a_l^*} r R_{70i}^l dr, \quad (7.27b)$$

$$Y_5^{(0)} = \frac{-i\omega\pi}{a^2g\delta_5} \sum_{l=-L_L}^{L_U} (-1)^{|l-\lambda|} a_l \sum_{i=0}^{N_l-1} R_{1i}^{\lambda l}(a_l) \int_{t_i} z Z_i^\lambda dz \\ + \frac{i\omega\pi}{a^2g\delta_5} \sum_{\substack{l=-M_L \\ l \neq 0}}^{M_U} \frac{l}{|l|} \sum_{i=0}^{N_l-1} Z_i^l(d_l) \int_{a_l}^{a_l^*} r^2 R_{71i}^l dr. \quad (7.27c)$$

Der Beitrag der Elementarwelle für die Integration über die äußere Treppenstufe ist in

$$R_{mi}^{\lambda l} = R_{7mi}^{\lambda l}(a_l) + \delta_{l0}\delta_{i0}R_{0m}(a_l) \quad (7.28)$$

enthalten. Die in (7.27) auftretenden Integrale folgen direkt aus den Eigenfunktionsexpansionen und sind analytisch zu bestimmen. Details sind bei Kokkinowrachos et al. (1986) nachzulesen.

Für die Konvektionskraftkomponente  $Y_{Cj}$  ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$Y_{C_2^1} = \frac{\pi}{2a^2\omega_0} \sum_{l=-L_L}^{L_U} (-1)^{|l-\lambda|} a_l \sum_{i=0}^{N_l-1} \bar{R}_i^{\lambda l} \sum_{j=0}^{N_l-1} \left\{ \frac{2}{a_i^2} R_{2j}^{\lambda l} \Lambda_{0ij}^l + \left( R_{2j}^{\lambda l} \pm 2R_{0j}^{\lambda l} \right) \tilde{\Lambda}_{0ij}^l \right\}, \quad (7.29a)$$

$$Y_{C_3} = \frac{\pi}{a^2\omega_0} \sum_{\substack{l=-M_L \\ l \neq 0}}^{M_U} \frac{l}{|l|} \int_{a_l}^{a_l^*} \left\{ \frac{r + \bar{Q}^l}{r} Q_{71}^l + r(1 + \bar{Q}_r^l) Q_{71,r}^l \right\}_{z=d_l} dr, \quad (7.29b)$$

$$Y_{C_4^5} = \frac{\pi}{2a^2\omega_0\delta_5} \sum_{l=-L_L}^{L_U} (-1)^{|l-\lambda|} a_l \sum_{i=0}^{N_l-1} \bar{R}_i^{\lambda l} \sum_{j=0}^{N_l-1} \left\{ \frac{2}{a_i^2} R_{2j}^{\lambda l} \Lambda_{1ij}^l + \left( R_{2j}^{\lambda l} \pm 2R_{0j}^{\lambda l} \right) \tilde{\Lambda}_{1ij}^l \right\} \\ - \frac{\pi}{2a^2\omega_0\delta_5} \sum_{\substack{l=-M_L \\ l \neq 0}}^{M_U} \frac{l}{|l|} \int_{a_l}^{a_l^*} \left\{ 2(r + \bar{Q}^l) Q_{72}^l + r^2(1 + \bar{Q}_r^l)(Q_{72,r}^l \pm 2Q_{70,r}^l) \right\}_{z=d_l} dr. \quad (7.29c)$$

Für diese Kraftkomponenten sind nur die Integrale über die vertikalen Flächen analytisch bestimmbar. Hieraus resultieren die leicht zu bestimmenden Integrale der vertikalen Eigenfunk-

tionen:

$$\Lambda_{nij}^l = \int_{t_i} z^n \bar{Z}_i^\lambda Z_j^\lambda dz \quad \text{und} \quad \bar{\Lambda}_{nij}^l = \int_{t_i} z^n \bar{Z}_{i,z}^\lambda Z_{j,z}^\lambda dz. \quad (7.30)$$

Für die Integration über die horizontalen Ränder ist  $R_{mj}^{\lambda l}$  wie oben definiert und es gilt:

$$\bar{R}_i^{\lambda l} = \bar{R}_i^\lambda(a_l) + \delta_{i0} a_l. \quad (7.31)$$

Auf den horizontalen Flächen müssen zum größten Teil Produkte von Besselschen Funktionen integriert werden, die sich in den meisten Fällen nur numerisch auswerten lassen. Es besteht also kaum ein Vorteil darin, die Eigenfunktionen einzusetzen und die einzelnen Terme getrennt zu integrieren. Dies würde vielmehr nur den programmiertechnischen Aufwand erhöhen. Bei der Anwendung eines Romberg-Extrapolationsverfahrens zusammen mit einer Trapezmethode (Press et al. (1989)) lassen sich die Integrale sehr genau mit relativ wenigen Auswertungen der Integranden bestimmen. Da die benötigten Integranden für  $Y_{C3}$ ,  $Y_{C4}$  und  $Y_{C5}$  zum Teil die gleichen Funktionen enthalten, werden sie alle gleichzeitig bei jeder Stufe berechnet, was den Rechenaufwand erheblich reduziert.

Für die Perturbationskoeffizienten  $Y_{Pj}$  resultieren auf der Wasseroberfläche ebenfalls nur numerisch zu bestimmende Integrale. Die Ausdrücke für die Perturbationskraftkoeffizienten nehmen folgende Form an:

$$Y_{P_2^1} = \frac{\omega_0 \pi}{a^2 g} \left\{ P_{\pm 11} - \sum_{l=1}^{M_U} \int_{a_l}^{a_l^*} r \mathcal{F}_{\pm 1}^l Q_{11}^l(r, h) dr - S_{\pm 11} \right\}, \quad (7.32a)$$

$$Y_{P_3} = \frac{2\omega_0 \pi}{a^2 g} \left\{ P_{30} - \sum_{l=1}^{M_U} \int_{a_l}^{a_l^*} r \mathcal{F}_0^l (Q_{30}^l + q_{30}^l)_{z=h} dr - S_{30} \right\}, \quad (7.32b)$$

$$Y_{P_4^5} = \frac{\omega_0 \pi}{a^2 g \delta_5} \left\{ P_{\pm 51} - \sum_{l=1}^{M_U} \int_{a_l}^{a_l^*} r \mathcal{F}_{\pm 1}^l (Q_{51}^l + q_{51}^l)_{z=h} dr - S_{\pm 51} \right\}. \quad (7.32c)$$

Hier bezeichnet  $\mathcal{F}_m^l$  die Funktion  $\mathcal{F}_m$  für ein oberes Element  $l$ . Weiterhin ist

$$P_{\pm jm} = a \int_0^h \mathbf{G}(\Psi_{\pm m}, Q_{jm}^0)_{r=a} dz, \quad (7.33)$$

wobei der Operator  $\mathbf{G}$  verwendet wird, und

$$S_{\pm jm} = \int_a^\infty r \mathcal{F}_{\pm m}^L Q_{jm}^0(r, h) dr. \quad (7.34)$$

Mit den Lösungen für die Perturbationskomponenten  $\Psi_m$  und der Notation laut (6.8) und (6.16) werden die Integrale  $P_{\pm jm}$  zu

$$P_{\pm jm} = a \bar{A}_{\pm m} \left\{ \frac{\mathbf{G}(\bar{R}_m, R_{jm}^0)}{2} + \frac{\nu_0}{\sigma_0} \left( 1 + \frac{\nu_0 h}{\sinh^2(k_0 h)} \right) \sum_{i=1}^{N_I-1} \frac{\mathbf{G}(R_{m0}, R_{jmi}^0) \cos(\alpha_i h)}{\alpha_i^2 + k_0^2} \right\}_{r=a}. \quad (7.35)$$

Die Funktionen  $\mathcal{F}_m^l$  für ein oberes Element  $l$  ergeben sich aus (4.20) und (4.23) folgendermaßen:

$$\mathcal{F}_0^l = f_0^l + g_1^l, \quad \mathcal{F}_1^l = f_1^l + g_2^l + 2g_0^l, \quad \mathcal{F}_{-1}^l = g_2^l - 2g_0^l, \quad (7.36)$$

wobei

$$f_m^l = 2ik_0 R_{0m} - 2ik_0 Q_{7m}^l(r, h), \quad (7.37a)$$

$$g_m^l = -\frac{m}{r} R_{0m} + \frac{\partial R_{0m}}{\partial r} + \left[ \left( \frac{m}{r^2} (r + \bar{Q}^l) - \frac{\bar{Q}_{zz}^l}{2} \right) Q_{7m}^l + (1 + \bar{Q}_r^l) \frac{\partial Q_{7m}^l}{\partial r} \right]_{z=h}. \quad (7.37b)$$

Wie für die Kraftkomponenten  $Y_{Cj}$  entsteht kaum ein Vorteil aus der getrennten Integration der Radialfunktionen, da auf jeden Fall eine numerische Methode angewandt werden muß. Die Lösung der Integrale für die oberen Elemente verwendet dieselben Auswertungen der Radialfunktionen wie für die Lösung der Integrale für  $Y_{Cj}$ . Beide Lösungen können also gleichzeitig bestimmt werden. Dadurch läßt sich eine Verringerung des Rechenaufwands erzielen.

Für die unendlichen Integrale  $S_{\pm jm}$  existieren für einige Terme der Integranden, wie für den vertikalen Zylinder, analytische Lösungen. Da diese Terme den jeweils am langsamsten abklingenden Teil des Integranden repräsentieren, werden sie aus den Eigenfunktionsexpansionen herausgezogen und getrennt integriert. Es werden zuerst die folgenden Expansionen im äußeren Element ohne die Null- bzw. Fernfeldterme definiert:

$$Q_{jm}^L = \sum_{i=1}^{N_U} R_{jmi}^0(r) Z_i^L(z) \quad \text{und} \quad \bar{Q}^L = \sum_{i=1}^{N_i} \bar{R}_i^0(r) \bar{Z}_i^0(z). \quad (7.38)$$

Für die Funktionen  $\mathcal{F}_m^L$  im äußeren Element folgen damit die Formeln

$$\mathcal{F}_m^L = \frac{\bar{A}_0^0 k_0 a}{r^2} \mathcal{R}_m + \mathcal{F}_m^0, \quad m = 0, \pm 1, \quad (7.39)$$

wobei

$$\mathcal{R}_m = \begin{cases} \mathcal{R}_{12} \\ \mathcal{R}_{23} + 2\mathcal{R}_{01} \\ \mathcal{R}_{23} - 2\mathcal{R}_{01} \end{cases} \quad \mathcal{F}_m^0 = \begin{cases} -2ik_0 Q_{70}^L + g_1 & m = 0 \\ -2ik_0 Q_{71}^L + g_2 + 2g_0 & m = 1 \\ g_2 - 2g_0 & m = -1 \end{cases}. \quad (7.40)$$

Die Hilfsfunktionen  $g_m$  sind hier durch

$$g_m = \left[ \frac{m}{r} \left( 1 + \frac{\bar{A}_0^0 a}{r^2} \right) Q_{7m}^L + \left( 1 - \frac{\bar{A}_0^0 a}{r^2} \right) \frac{\partial Q_{7m}^L}{\partial r} + \left( \frac{m}{r^2} \bar{Q}^L - \frac{\bar{Q}_{zz}^L}{2} \right) (Q_{7m}^L + \mathcal{R}_{mm}) + \frac{\partial \bar{Q}^L}{\partial r} \left( \frac{\partial Q_{7m}^L}{\partial r} + \frac{\partial \mathcal{R}_{mm}}{\partial r} \right) \right]_{z=h} \quad (7.41)$$

gegeben, und die Radialfunktionen  $\mathcal{R}_{mn}(r)$  sind wie für den vertikalen Zylinder definiert. Man erhält dann folgende Formel für die Integrale  $S_{\pm jm}$ :

$$S_{\pm jm} = k_0 a \bar{A}_0^0 A_{jm} \int_a^\infty \frac{\mathcal{R}_{\pm m} H_m(k_0 r)}{r} dr + \int_a^\infty r \left\{ \mathcal{F}_{\pm m}^L Q_{jm}^L(r, h) + \mathcal{F}_{\pm m}^0 A_{jm} H_m(k_0 r) \right\} dr. \quad (7.42)$$

Das erste Integral auf der rechten Seite ist analytisch integrierbar, während für das zweite ein numerisches Verfahren zur Einsatz kommen muß.

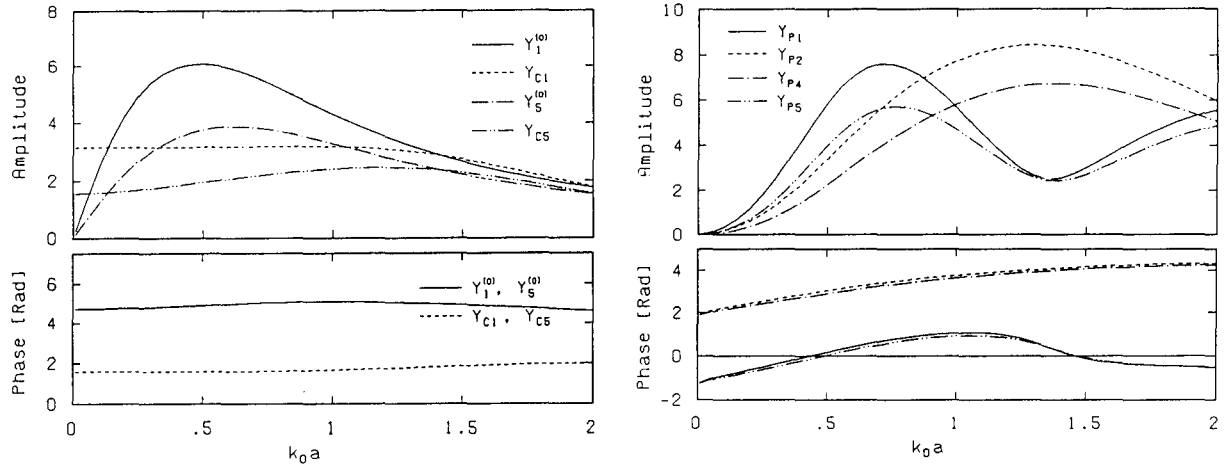


Bild 11: Winkelunabhängige Kraft- und Momentkoeffizienten  $Y_j^{(0)}$ ,  $Y_{Cj}$  und  $Y_{Pj}$  für einen vertikalen Zylinder mit  $h/a = 4.0$

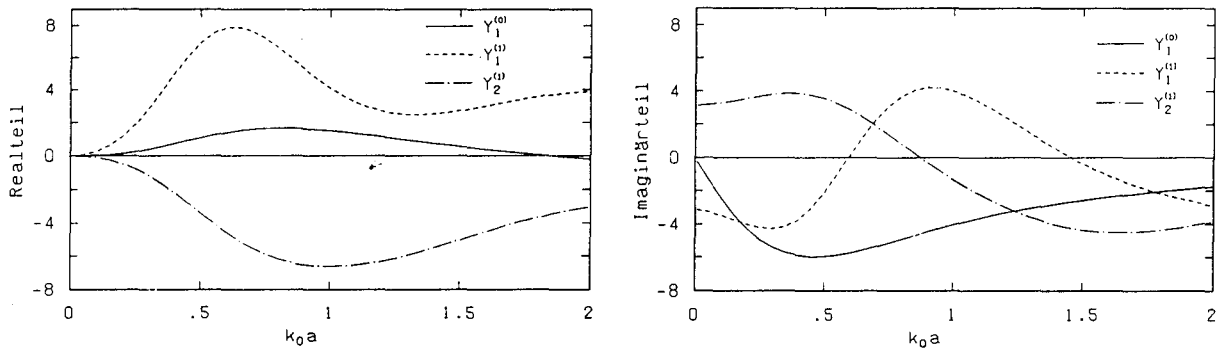


Bild 12: Real- und Imaginärteile der winkelunabhängigen Koeffizienten  $Y_1^{(0)}$ ,  $Y_1^{(1)}$  und  $Y_2^{(1)}$  für einen vertikalen Zylinder mit  $h/a = 4.0$

## 8 Numerische Ergebnisse

Zuerst wird ein sich vom Boden bis über die Wasseroberfläche erstreckender vertikaler Zylinder mit einem Tiefgang-Radius-Verhältnis von  $h/a = 4$  betrachtet. Bild 11 zeigt die von den Wellen- und Strömungsrichtungen unabhängigen Wellenkraftkoeffizienten  $Y_j^{(0)}$ ,  $Y_{Cj}$  und  $Y_{Pj}$  (laut den Gleichungen (6.20) bis (6.28)) in Abhängigkeit der normierten Wellenzahl  $k_0 a$ . Wie aus der Gleichung (6.23) ersichtlich, ist die Komponente  $Y_{Cj}$  von der Wassertiefe unabhängig und nimmt für den Grenzwert  $k_0 = 0$  den Wert  $\pi$  an. Die Perturbationskomponenten  $Y_{Pj}$  konvergieren schon nach wenigen Termen in den Summen von (6.27) und (6.28). Schon nach 10 Termen ändern sich die Werte weniger als 0.1%. Die Verläufe der Kurven für die Kraft- und Momentenkoeffizienten sind einander sehr ähnlich, so daß im folgenden nur die horizontalen Wellenkräfte betrachtet werden.

Die Real- und Imaginärteile der winkelunabhängigen Koeffizienten  $Y_1^{(0)}$ ,  $Y_1^{(1)}$  und  $Y_2^{(1)}$  für die horizontalen Kräfte nullter und erster Ordnung in der Strömungsgeschwindigkeit sind in Bild 12 für den gleichen Zylinder gezeigt.

Die Kraftkoeffizienten  $X_1^{(0)}$  und  $X_1^{(1)}$  und die Gesamtkraft  $X_1$  für eine Froudezahl von  $F_n = \pm 0.10$  sind in Bild 13a für Wellen und Strömung in positive  $x$ -Richtung ( $\alpha = \beta = 0$ ) dargestellt. Die negative Froudezahl entspricht einer Strömung mit  $\alpha = \pi$ . Die Froudezahl  $F_n = 0.1$  ergibt z.B. für  $a = 10\text{m}$  eine Strömungsgeschwindigkeit von  $U = 1\text{ m/s}$ . Die Beziehung zwischen der Froudezahl und der dimensionslosen Strömungsgeschwindigkeit  $\tau_0$  lautet

$$\tau_0 = F_n \sqrt{k_0 a \tanh(k_0 h)}. \quad (8.1)$$

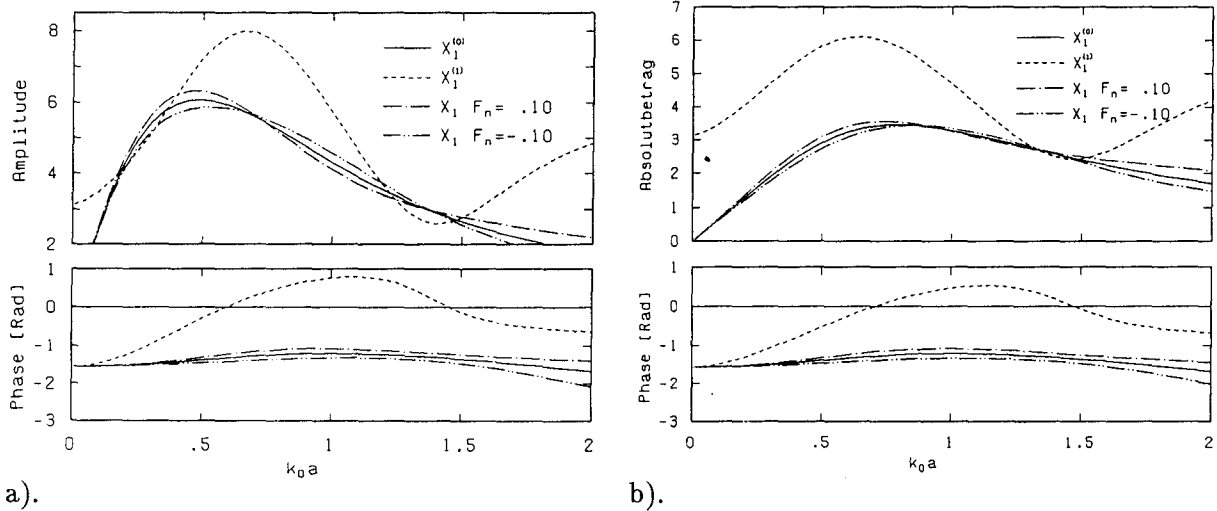


Bild 13: Kraftkoeffizienten  $X_1^{(0)}$ ,  $X_1^{(1)}$ , und  $X_1$  für die Froudezahl  $F_n = \pm 0.10$  für einen vertikalen Zylinder und  $\alpha = \beta = 0$ . a)  $h/a = 4$ , b)  $h/a = 1$ .

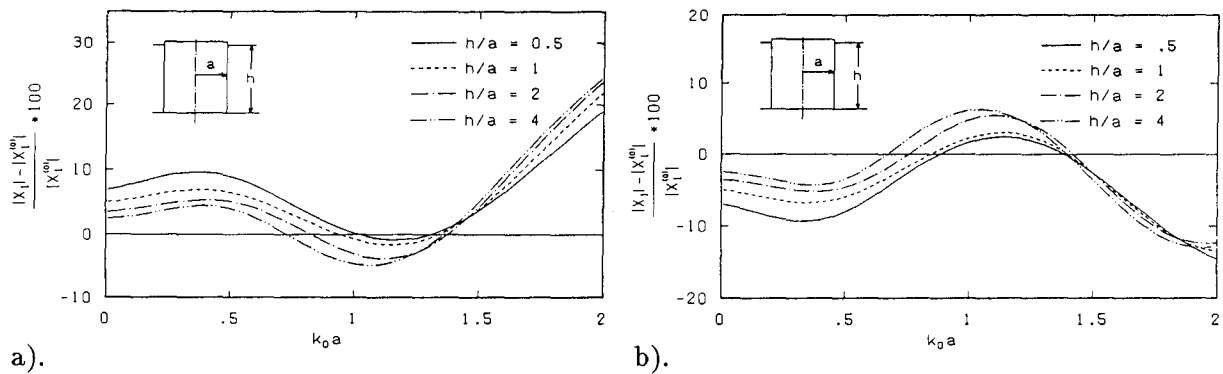


Bild 14: Relative Änderung (in Prozent) der Amplitude der Wellenkraft  $X_1$  infolge einer Parallelströmung  $F_n = 0.10$  für verschiedene Wassertiefen und  $\alpha = \beta = 0$ . a)  $\alpha = 0$ , b)  $\alpha = \pi$ .

Bei der maximal dargestellten Wellenzahl von  $k_0 a = 2.0$  ist  $\tau_0 = 0.14$  und liegt noch in dem Gültigkeitsbereich der linearisierten Randbedingungen. Zhao und Faltinsen (1991) geben eine obere Grenze von ungefähr  $\tau_0 = 0.15$  an. Da die Phase der Perturbationskraft  $X_1^{(1)}$  sich teilweise sehr von der Phase von  $X_1^{(0)}$  unterscheidet, wird die Amplitude der Gesamtkraft für bestimmte Wellenzahlen nicht erhöht, sondern gesenkt.

Die gleiche Situation ist in Bild 13b für einen vertikalen Zylinder mit einem Verhältnis von  $h/a = 1$  gezeigt.

Der Einfluß der Wassertiefe auf die horizontale Wellenkraft für den vertikalen Zylinder wird in Bild 14 gezeigt, wobei die Prozentänderungen in der Kraftamplitude infolge der Strömungen  $F_n = \pm 0.10$  aufgetragen sind. Mit abnehmender Tiefe nimmt der relative Einfluß der Parallelströmung zu. Wie erwartet, sind die Effekte infolge der zwei Froudezahlen ungefähr entgegengesetzt. Die maximale Erhöhung der Wellenkraftamplitude liegt bei circa 10% für  $h/a = 0.5$ .

Als erstes Lösungsbeispiel für beliebige rotationssymmetrische Körper wird ein schwimmender vertikaler Zylinder mit einem Tiefgang gleich der halben Wassertiefe betrachtet. Bild 15 zeigen die Amplituden der horizontalen und vertikalen Kräfte für die Froudezahlen  $F_n = 0$  (gleichbedeutend mit  $X_j^{(0)}$ ) und  $F_n = \pm 0.10$  für zwei  $h/a$ -Verhältnisse und  $\alpha = \beta = 0$ . Wieder ist

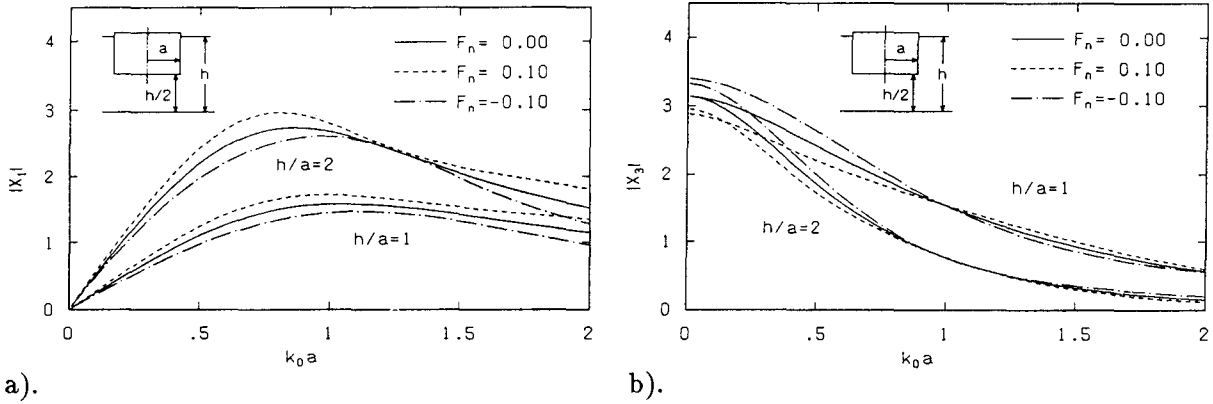
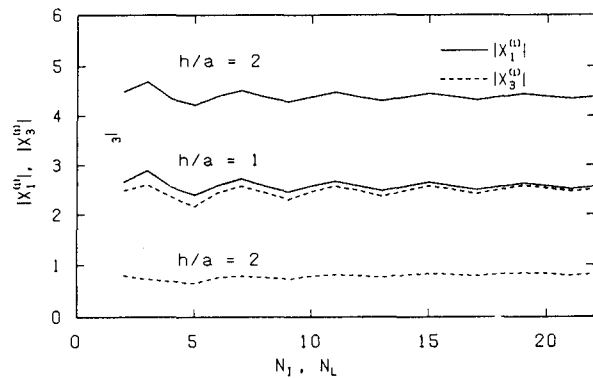


Bild 15: Amplituden der Wellenkräfte auf einen schwimmenden Zylinder mit Tiefgang  $h/2$  und Radius  $a = h$  und  $a = h/2$  für die Froudezahlen  $F_n = 0$  und  $\pm 0.10$  und  $\alpha = \beta = 0$ . a) Horizontalkraft  $X_1$ , b) Vertikalkraft  $X_3$ .

Bild 16: Konvergenz der Amplituden der horizontalen und vertikalen Perturbationskräfte  $X_1^{(1)}$  und  $X_3^{(1)}$  auf einen schwimmenden Zylinder mit Tiefgang  $h/2$  und Radius  $a$  für  $k_0 a = 0.8$  und  $\alpha = \beta = 0$ .  $N_I$  und  $N_L$  bezeichnen die Anzahl der Lösungsterme, die für den oberen und den unteren Fluidbereich verwendet wurden.



deutlich zu erkennen, daß der Einfluß der Parallelströmung mit abnehmender Tiefe zunimmt.

Die in Bild 15 dargestellten Zahlen wurden mit je 20 Lösungstermen für die Eigenfunktionsexpansionen in dem äußeren und dem unter dem Körper liegenden Fluidbereichen berechnet. Das Abklingverhalten der Lösungen mit der Anzahl der Lösungsterme ist in Bild 16 dargestellt. Hier sind die Amplituden der Perturbationskoeffizienten  $X_1^{(1)}$  und  $X_3^{(1)}$  über die Anzahl der Lösungskoeffizienten für  $k_0 a = 0.8$  aufgetragen. Während die  $X_j^{(0)}$ -Werte sehr schnell und monoton konvergieren (ab 5 Terme wären sie auf dem gleichen Bild nur als horizontale Gerade darzustellen), oszillieren die Perturbationsgrößen um ihre asymptotischen Werte und konvergieren wesentlich langsamer. Erst ab zirca 20 Termen ist die Konvergenz ausreichend. Die Perturbationsgrößen sind also sehr empfindlich gegenüber den Lösungen ohne Meeresströmung. Diese Empfindlichkeit liegt daran, daß für die Perturbationskomponente höhere Ableitungen der Fourierkomponenten gebraucht werden als für die Größen ohne Strömung.

Als nächstes Beispiel werden einige Ergebnisse für einen auf dem Meeresboden stehenden und nach oben abgestuften Zylinder gezeigt. Wieder zeigt Bild 17 die Amplituden der horizontalen und vertikalen Kräfte für die Froudezahlen  $F_n = 0, \pm 0.10$  für zwei verschiedene Wassertiefen und  $\alpha = \beta = 0$ . Hierfür wurden für jedes Fluidelement wieder 20 Lösungsterme verwendet. Das Abklingverhalten ist hier ähnlich dem für den schwimmenden Zylinder. Hier scheint die Parallelströmung einen größeren Einfluß auf die vertikale als auf die horizontale Kraft zu haben.

Ein Vergleich der hier beschriebenen Methode mit den von anderen Autoren erzielten Ergebnissen läßt sich schließlich anhand einer halbgetauchten Kugel darstellen. Es werden hier die Ableitungen der Amplituden der horizontalen und vertikalen Wellenkräfte nach der Strömungs-

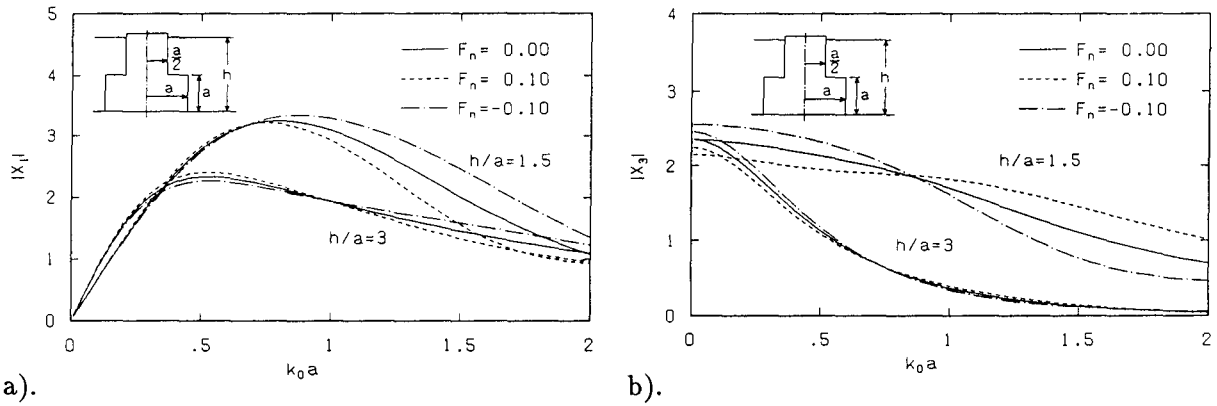


Bild 17: Amplituden der Wellenkräfte auf einen auf dem Boden stehenden abgestuften Zylinder für die Froudezahlen  $F_n = 0$  und  $\pm 0.10$  und  $\alpha = \beta = 0$ . a) Horizontalkraft  $X_1$ , b) Vertikalkraft  $X_3$ .

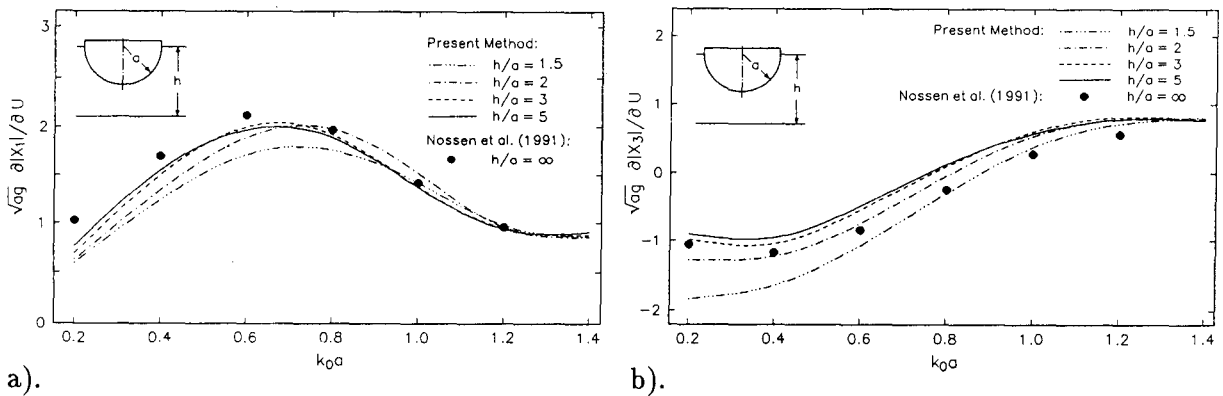


Bild 18: Ableitungen der Wellenkraftamplituden nach der Strömungsgeschwindigkeit bei  $U = 0$  für eine halbgetauchte Kugel und unterschiedliche Wassertiefen. Vergleich mit Ergebnissen für tiefes Wasser von Nossen et al. (1991). a) Horizontalkraft  $X_1$ , b) Vertikalkraft  $X_3$ .

geschwindigkeit  $U$  für  $\tau_0 = 0$  betrachtet. Die Ableitung der Amplitude von  $X_j$  nach  $U$  für  $\tau_0 = 0$  und  $X_j^{(0)} \neq 0$  läßt sich dimensionslos als

$$\sqrt{ag} \left. \frac{\partial |X_j|}{\partial U} \right|_{\tau_0=0} = \sqrt{k_0 a \tanh(k_0 h)} \frac{\operatorname{Re} \left\{ X_j^{(0)} \operatorname{conj}(X_j^{(1)}) \right\}}{|X_j^{(0)}|} \quad (8.2)$$

schreiben, wobei  $\operatorname{conj}()$  die komplexe Konjugierte bezeichnet. Die Ergebnisse für verschiedene Wassertiefen sind in Bild 18 für die horizontalen und vertikalen Kräfte aufgetragen. Es gilt hier wieder  $\alpha = \beta = 0$ . Zum Vergleich sind die Ergebnisse von Nossen et al. (1991), die mit einem Singularitätensenerfahren für tiefes Wasser erzielt wurden, aufgetragen. Für die horizontale Kraft ist die Übereinstimmung gut, und die Werte für wachsende Wassertiefe konvergieren z.B. für  $k_0 a = 0.8$  bis auf circa 6% gegen die für tiefes Wasser. Bei sehr kleinen Wellenzahlen ist der Einfluß der Wassertiefe bei  $h/a = 5$  noch signifikant, also sind die Abweichungen in diesem Bereich hiermit zu erklären.

Die Ergebnisse für die Ableitung der Amplitude der vertikalen Wellenkraft stimmen weniger gut überein mit den Tiefwasserergebnissen, zeigen aber einen sehr ähnlichen Verlauf. Bezogen auf die Spanne der Werte beträgt z.B. der Fehler circa 18% bei  $k_0 a = 0.8$ . Lediglich für sehr kleine und große Wellenzahlen ist die Abweichung ähnlich klein wie für die Horizontalkraft.

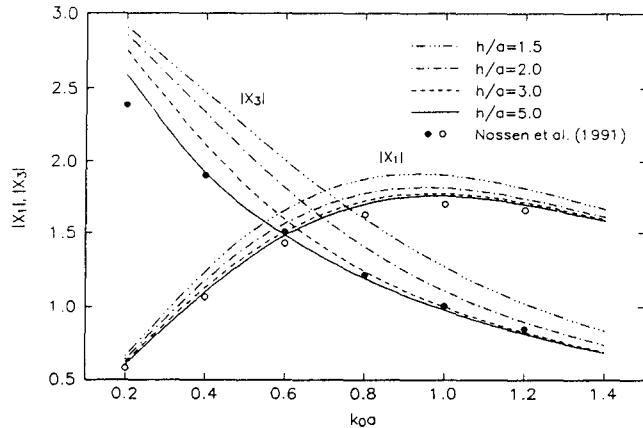


Bild 19: Vergleich der Wellenkraftamplituden ohne Strömung auf eine Halbkugel mit denen für tiefes Wasser (Nossen et al. (1991))

Für die Berechnung der in den Bildern 18 dargestellten Ergebnisse wurde die Halbkugel mit zehn Stufen idealisiert. Die Anzahl der Lösungsterme betrug  $N_I = 20$  und  $N_L = 24$ . Weder eine Verfeinerung der Körperidealisation noch eine Erhöhung der Anzahl der Lösungsterme erbrachte eine signifikante Änderung der Ergebnisse. Für die Bestimmung der stationären Strömung und die Kraftkoeffizienten für die erste Frequenz waren circa 190 Sekunden auf einem 386-33 PC-AT notwendig. Für die weiteren Frequenzen waren nur circa 35 Sekunden notwendig, da für die unteren Elemente keine volle Auflösung der Gleichungssysteme benötigt wurde.

Die Abweichungen bei den horizontalen und vertikalen Kräften lassen sich zum Teil durch die Empfindlichkeit der Perturbationsgrößen für die ohne Strömung berechneten Fourierkomponenten erklären. In Bild 19 werden die Kraftamplituden ohne Meeresströmung mit denen für tiefes Wasser verglichen. Wie auch bei Kokkinowrochos et al. (1986) gezeigt, konvergiert für Treppenstufenhöhe gegen Null und Wassertiefe gegen unendlich insbesondere die Horizontalkraft nicht genau gegen die Lösung für eine Halbkugel (bis circa 5% Fehler). Die Güte der Übereinstimmung ist also genau entgegengesetzt wie für die Perturbationsgrößen. Dies ist aber nicht ganz überraschend, denn für  $X_1^{(0)}$  und  $X_3^{(1)}$  kommt die Fourierkomponente  $\psi_{71}$  zum Tragen (bzw. deren Ableitungen); analoges gilt für  $X_3^{(0)}$  und  $X_1^{(1)}$  bezüglich der Fourierkomponente  $\psi_{70}$ . Die Konvergenz für Treppenstufe gegen Null könnte sich bei der Ableitung der Fourierkomponenten  $\psi_{7m}$  und  $\bar{\psi}$  wesentlich stärker auswirken.

Ein Grund für die bessere Übereinstimmung bei der horizontalen Perturbationskraft könnte auch in der Erfüllung der Randbedingungen liegen. Auf den horizontalen Treppenstufen werden die Randbedingungen genau erfüllt, also müssen die Geschwindigkeitskomponente zwangsläufig andere Werte als für eine schräge Wand haben. Auf der vertikalen Stufen werden dagegen die Randbedingungen numerisch erfüllt, was effektiv zu einem Abrunden der Ecken führen könnte.

Für rotationssymmetrische Körper, die besser mit einer Treppenkurve zu idealisieren sind, z.B. abgestufte Zylinder, existiert diese Problematik nicht. Hierfür ist die Makroelementmethode geeigneter und genauer. Leider sind für solchen Körper keine Vergleichswerte in der Literatur zu finden. Die hier betrachtete Halbkugel stellt für Panelmethoden, wegen des Fehlens von Kanten, ein günstiger Berechnungsfall dar, während der gleiche Körper ein sehr ungünstiger Fall für die Makroelementmethode ist. Der Ergebnissvergleich weist auf eine mögliche Grenze des Verfahrens für Körper mit schrägen Wänden hin, zeigt aber auch, daß das Makroelementverfahren in einem sehr ungünstigen Fall auch befriedigend funktioniert. Für besser geeignete Körperformen, die viele Offshore-Bauwerke besitzen, kann ein genaueres Verhalten der numerischen Methode erwartet werden.

## 9 Zusammenfassung

Kombinierte Wellen- und Strömungseffekte auf Offshorebauwerke können signifikante Veränderungen in den hydrodynamischen Kräften verursachen. In dieser Arbeit wurde, basierend auf dem Makroelementverfahren, eine Methode entwickelt, die die Strömungseinflüsse auf die linearen harmonischen Wellenkräfte auf großvolumige rotationssymmetrische Strukturen berücksichtigt. Als Sonderfall wurde auch eine analytische Lösung für einen sich vom Meeresboden bis über die Wasseroberfläche erstreckenden Zylinder präsentiert.

Für die Berechnung des Wellen-/Strömungsproblems wurde unter der Annahme einer kleinen Strömungsgeschwindigkeit die Randbedingung an der freien Oberfläche bezüglich der Strömungsgeschwindigkeit linearisiert. Aus dieser Annahme resultiert eine wesentlich einfachere Randbedingung, und sie ermöglicht die Anwendung einer Perturbationsmethode, um den Strömungseinfluß zu berechnen. Hierbei wird die Strömung aufgeteilt in *i*) eine zeitstationäre Strömung infolge der Umströmung des Körpers, *ii*) eine Wellendiffraktionsströmung infolge einer harmonischen Elementarwelle ohne Strömung und ihre Diffraktion durch den Körper und *iii*) eine Perturbationsströmung, dessen Randbedingungen von den ersten zwei Strömungsformen abhängen.

Das Randwertproblem wurde für beliebige Körper aufgestellt und anschließend mittels Fourierexpansionen in der Umfangsrichtung auf die Klasse der rotationssymmetrischen Körper mit vertikaler Achse spezialisiert. Aus dieser Entwicklung resultiert statt einem einzigen dreidimensionalen Problem eine Serie von zweidimensionalen Problemen in den Radial- und Vertikalkoordinaten für jedes der benötigten Strömungspotentiale.

Für das Potential der Perturbationsströmung wurde eine Fernfeldlösung abgeleitet, die sich analytisch aus den asymptotischen Fernfeldformen des zeitstationären Potentials und des Diffraktionspotentials bestimmen läßt. Für die Berechnung der Wellenkräfte wurden die Lokalanteile des Perturbationspotentials über den Greenschen Satz und geeignete fiktive Radiationsspotentiale eliminiert.

Für einen sich vom Meeresboden bis über die Wasseroberfläche erstreckenden Zylinder bestehen das zeitstationäre Potential und das Diffraktionspotential nur aus ihre Fernfeldformen. Da für die Radiationsspotentiale ebenfalls analytische Lösungen möglich sind, lassen sich die Wellenkräfte für das kombinierte Problem analytisch in Form von unendlichen Summen mit bekannten Koeffizienten bestimmen.

Die Diffraktions- und Radiationsströmungen werden mittels der sogenannten Makroelementmethode berechnet, wobei einige Optimierungen bzgl. Speicherplatz und Rechengeschwindigkeit vorgenommen wurden. Für die Berechnung der zeitstationären Strömung wurde eine modifizierte Makroelementmethode entwickelt. Für den Einsatz dieser Methode wird die Meridianlinie des Körpers durch eine Treppenkurve approximiert, und der Fluidbereich wird dementsprechend in Elemente unterteilt. Die Bestimmung der benötigten Fourierkomponenten in den einzelnen Elementen erfolgt durch eine Eigenfunktionsexpansion zusammen mit einer Galerkinmethode, um die Rand- und Kompatibilitätsbedingungen zu erfüllen. Aus den mit der Makroelementmethode erzielten Lösungen wurden zusammen mit der Fernfeldlösung die Ausdrücke für die Perturbationskräfte infolge der Strömung hergeleitet.

Um den Einfluß der Strömung auf die harmonischen Wellenkräfte zu bestimmen, wurden für einige typische Körperformen numerische Berechnungen durchgeführt. Es zeigte sich, daß im allgemeinen die Strömungseinflüsse signifikant sind und sich mit abnehmender Wassertiefe verstärken.

Wegen der infolge der Strömungseffekte zusätzlich benötigten Ableitungen der Strömungspotentiale ist das Konvergenzverhalten der Perturbationskräfte wesentlich schlechter als für die Diffraktionskräfte ohne Strömung. Wie aber am Beispiel eines schwimmenden Zylinders gezeigt,

ist die Konvergenz der Lösung mit wachsender Anzahl der Terme der Eigenfunktionsexpansionen trotzdem ausreichend.

Der Einfluß der Ableitungen machte sich bei dem Ergebnisvergleich für eine halbgetauchte Kugel bemerkbar. Obwohl für die Horizontalkraft gute Übereinstimmung mit publizierten Ergebnissen erzielt wurde, differieren die Ergebnisse bei der Vertikalkraft. Ein Grund hierfür ist, daß bei einer Stufenhöhe gegen Null der harmonische Druck nicht genau gegen den Druck an einem glatten Körper konvergiert. Die Anwendbarkeit der Makroelementmethode für abgerundete Körper, wie z.B. eine halbgetauchte Kugel, könnte dadurch für das hier behandelte Wellen-/Strömungsproblem begrenzt sein. Hierbei muß man aber bedenken, daß ein völlig runder Körper, wie eine halbgetauchte Kugel, sich mit Panelmethoden sehr gut berechnen läßt, für die Macroelementmethode aber einen sehr ungünstigen Fall darstellt. Von daher kann der Ergebnisvergleich als befriedigend bezeichnet werden. Für Körperformen, die besser mit einer Treppenkurve zu approximieren sind und wofür die Makroelementmethode besser geeignet und wohl genauer ist, sind in der Literatur leider keine Vergleichsergebnisse zu finden.

Zu sinnvollen Erweiterungsarbeiten gehört in erster Linie die Berechnung der Strömungseinflüsse auf die linearen Radiationskräfte. Deren Berechnung könnte, wie bei Wu und Eatock Taylor (1990) gezeigt, in der gleichen Weise wie für die Diffraktionskräfte erfolgen, und stellt also keine wesentliche Aufwand dar. Die Strömung beeinflusst aber am stärksten die mittleren Driftkräfte zweiter Ordnung (siehe z.B. Grue (1992)). Obwohl in der Amplitude kleiner als die linearen Kräfte, können die Driftkräfte wegen ihrer gleichbleibenden Richtung größere Bewegungen bei verankerten Strukturen hervorrufen. Deshalb soll eine Bestimmung der Driftkräfte als Ziel angesehen werden.

Die Berechnung der Driftkräfte würde die volle Lösung des Perturbationsproblems verlangen. Wegen des Fehlens von Orthogonalitätseigenschaften für die Eigenfunktionen in Radialrichtung wäre eine zufriedenstellende Erfüllung der inhomogenen Randbedingung an der Wasseroberfläche sehr schwierig. Für die Berechnung der Driftkräfte müßte auch eine direkte Methode verwendet werden, da die Perturbationsexpansion im Fernfeld nicht gültig ist. Dies erschwert weiter die Lösung, da für die Berechnung der Integrale der Driftkräfte nicht nur über die Glieder der Eigenfunktionsexpansion, sondern auch über die Fourierkomponenten summiert werden müßte.

Diese Schwierigkeiten bei der Berechnung der Driftkräfte, zusammen mit der vielleicht begrenzten Genauigkeit der Makroelementmethode für in der Seitenansicht abgerundete Körper, könnte deren Vorteile bezüglich der Rechenzeit und Geometrieingabe aufwiegen, besonders bei der heute verfügbaren Rechenkapazität. Diese Tatsache müßte bei der Entscheidung berücksichtigt werden, ob sich eine Erweiterung der Makroelementmethode auf diese Fälle lohnt. Eine sinnvollere Richtung wäre wohl die Koppelung einer anderen Lösungsmethode im Nahkörperbereich, z.B. einer Panel- oder FE-Methode, mit der hier formulierte Fernfeldlösung für das rotationssymmetrische Problem.

## Literatur

- Abramowitz, M. und Stegun, I.A. (1965), Handbook of Mathematical Functions, Dover, New York
- Becker, E. (1958), Das Wellenbild einer unter der Oberfläche eines Stromes schwerer Flüssigkeit pulsierenden Quelle, Z. angew. Math. Mech., Bd. 38, Nr. 9/10, S. 391-399
- Eggers, K. (1957), Über das Wellenbild einer pulsierenden Störung in Translation, Schiff und Hafen 9, S. 874-878
- Garret, C.J.R. (1971), Wave forces on a circular dock, J. Fluid Mech. 46, S. 129-139
- Grekas, A. (1981), Contribution a l'étude theorique et experimentale des efforts du second ordre et du comportement dynamic d'une structure marine sollicitée par une houle reguliere et un courant, These de Docteur Ingenieur, Ecole Nationale Superieure de Mechanique, Nantes
- Grue, J. und Palm, E. (1991a), Wave radiation and wave diffraction from a submerged body in a uniform current, J. Fluid Mech., Vol. 151, S. 257-278
- Grue, J. und Palm, E. (1991b), Currents and wave forces on ships and marine structures, in Dynamics of Marine Vehicles and Structures in Waves, Elsevier Science Publishers, S. 167-180
- Grue, G. (1992), Drift force and drift moment on ships advancing with small speed in oblique waves, Schiffstechnik, Bd. 39, S. 22-31
- Haskind, M.D. (1946), The hydrodynamical theory of the oscillation of a ship in waves, Prik. Math. Mech., Bd. 10, Nr. 1, S. 33-46, Eng. transl.: Technical Research Bulletin No. 1-12, SNAME, 1953
- Hu, C.S., Eatock Taylor, R. (1989), A small forward speed perturbation method for wave-body problems, 4th Intl. Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Øystese, S. 97-100
- Huijsmans, R.H.M., Hermans, A.J. (1985), A fast algorithm for computation of 3-D ship motions at moderate forward speed, 4th Intl. Conf. on Numerical Ship Hydrodynamics, Washington, S. 24-33
- Kagemoto, H., Yue, D.K.P. (1986), Interactions among multiple 3-D bodies in water waves; an exact algebraic method, J.Fluid Mech. 166, S. 189-209
- Kokkinowrachos, K., Asorakos, S., and Mavrakos, S. (1980), Bewegung und Belastung grossvolumiger Seebauwerke durch Wellen, Forschungsbericht des Landes Nordrhein-Westfalen, Nr. 2905
- Kokkinowrachos, K., Asorakos, S., Mavrakos, S. (1986) Behaviour of vertical bodies of revolution in waves, Ocean Engineering, Vol.13, No.6, S. 505-538
- MacCamy, R.C., Fuchs, R.A. (1954), Wave forces on piles: a diffraction theory, U.S. Army Corps of Engineers Beach Erosion Board, Tech. Mem. 69
- Mavrakos, S. (1981), Eine lineare Lösung des Oberflächenwellenproblems ausserhalb und innerhalb rotationssymmetrischer Körper mit verticaler Achse, Dissertation, RWTH Aachen

- Newman, J.N. (1978), The theory of ship motions, *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 18, S. 221-283
- Nossen, J., Palm, E., und Grue, J. (1989), The forces on arbitrary three-dimensional bodies in waves at low forward speed, 8th Intl. Conf. on Offshore Mechanics and Arctic Engg. (OMAE), The Hague, S. 435-440
- Nossen, J., Grue, J., und Palm, E. (1991), Wave forces on three dimensional floating bodies with small forward speed, *J. Fluid. Mech.*, Vol. 227, S. 135-160
- Peregrine, D.H. (1976), Interaction of water waves and currents, *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 16, S. 9-115
- Press, W., Flannery, B., Teukolsky, S., Vetterling, W.T. (1989), *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Sclavounos, P.D. (1989), The slow-drift wave damping of floating bodies, 4th Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Øystese, S. 223-226
- Takagi, K. (1991), An application of the Rankine source method to the estimation of wave-current interaction effects, *Applied Ocean Research*, Vol. 13, Nr. 5, S. 245-253
- Thanos, I. (1989), *Wellenkräfte zweiter Ordnung auf Rotationssymmetrische Körper mit verticaler Achse*, Dissertation, RWTH Aachen.
- Wehausen, J.W. und Laitone, E.V. (1960), *Surface waves*, Handbuch der Physik, Vol. IX, Springer Verlag, Berlin
- Wang, H. (1988), Approximate Calculation of Low Forward Speed Ship Radiation and Diffraction Wave Patterns, NRL Memorandum Report 6161, Washington
- Wu, G.X., Eatock Taylor, R. (1990), The hydrodynamic force on an oscillating ship with low forward speed, *J. Fluid Mech.*, Vol. 211, S. 333-353
- Zhao, R., Faltinsen, O.M., Krokstad, J.R., Aanesland, V. (1988), Wave-current interaction effects on large-volume structures, *Proceedings of the 5th Intl. Conf. on the Behaviour of Offshore Structures (BOSS)*, Trondheim, S. 623-638
- Zhao, R., Faltinsen, O.M. (1988), Wave-current interaction effects on large volume structures, 3rd Intl. Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Woods Hole, S. 187-190
- Zhao, R., Faltinsen, O.M. (1989), Interaction between current, waves and marine structures, 5th Intl. Conf. on Numerical Ship Hydrodynamics, Hiroshima, S. 373-385
- Zibell, G. (1989), *Effekte der gegenseitigen Beeinflussung bei mehreren Rotationskörpern in harmonischen Schwerwellen*, Dissertation, Institut für Schiffbau, Hamburg



## Lebenslauf

**Name:** Glenn Maxwell S. Bannister

**Persönliche Daten:**

Geboren: 16. August, 1961 in St. John's, Kanada

Staatsangehörigkeit: Kanadier

Eltern: Elizabeth Bannister, geb. Harris  
G. Fred Bannister

Familienstand: verheiratet mit Ute Bannister, geb. Heidenreich,  
1 Kind

**Schulbildung:**

1967 – 1975 Besuch der *Morris Academy* Grundschule in Mount Pearl, Kanada

1975 – 1978 Besuch der *Mount Pearl Central High School* in Mount Pearl, Kanada

**Studium:**

Sept. 1978 – April 1984: Memorial University of Newfoundland, St. John's, Kanada  
Abschluß: *Bachelor of Engineering (Shipbuilding)*

Okt. 1984 – Mai 1988: Institut für Schiffbau der Universität Hamburg  
Abschluß: Diplom-Ingenieur (Studiengang 'B')

**Berufliche Tätigkeiten:**

Sept.–Dez. 1985: Studentische Hilfskraft bei der Hamburgischen Schiffbauversuchsanstalt

Sept. 1986–Feb. 1987: Studentische Hilfskraft beim Germanischen Lloyd, Hamburg

Okt. 1986–Juli 1987: Tutor für Festkörper- und Schwingungsmechanik am Institut für Schiffbau der Universität Hamburg

Dez. 1987–Mai 1988: Studentische Hilfskraft am Arbeitsbereich Meerestechnik I der TUHH

Juni 1988–Juni 1993: Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Arbeitsbereich Meerestechnik I der TUHH