

Aktive Dämpfung der Lastschwingungen bei Containerkränen

Vom Promotionsausschuss der
Technischen Universität Hamburg-Harburg
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor-Ingenieur

genehmigte Dissertation

von
Christian Rapp

aus
Staaken (jetzt Berlin)

2012

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Edwin Kreuzer
Prof. Dr. Herbert Werner

Prüfungsvorsitzender: Prof. Dr.-Ing. Alexander Düster

Tag der mündlichen Prüfung: 04. April 2012

Danksagung

Meine Tätigkeit am Institut für Mechanik und Meerestechnik ist von vielen aktiv begleitet worden. Allen gebührt mein aufrichtiger Dank für die tatkräftige Unterstützung, die anregenden Diskussionen, die moralische Unterstützung und die hin und wieder notwendige geistige Ablenkung.

Ganz besonders danke ich meinem betreuenden Professor Herr Kreuzer für die ausnahmslose Unterstützung meiner wissenschaftlichen Arbeit und für die Begutachtung. Ein weiterer Begleiter meiner Arbeit ist Prof. Namachchivaya, der seit seinem Gastaufenthalt am Institut im Frühjahr 2010 aktiv an den Untersuchungen mitgewirkt hat, wofür ich unendlich dankbar bin. Ebenso bedanke ich mich bei meinem Zweitgutachter Prof. Werner für die äußerst produktive Zusammenarbeit und die Diskussionen während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter. Prof. Düster danke ich für den Vorsitz des Prüfungsausschusses.

Einen sehr wesentlichen Anteil am Gelingen der Versuche haben der Oberingenieur des Instituts Marc-André Pick sowie das *technische Team* Wolfgang Brennecke, Riza Demir und Norbert Borngräber-Sander. Sie haben die Versuche erst möglich gemacht und Ihnen bin ich zu tiefem Dank verpflichtet.

An die Zeit mit den ehemaligen wissenschaftlichen Kollegen Axel Hackbarth, Leo Dostal, Christian Radisch, Michael Steidl, Bernhard Stingl, Arne Wenzel, Martin Withalm, Jasper Behrendt, Cornelius Weiss, Amin Chabchoub, Andreas Gaull, Katharina Hecker, Christian Hoffmann, Andreas Bockstedte und Christian Ulrich (stellvertretend für alle Stipendiaten des Graduiertenkollegs *Seehäfen für Containerschiffe zukünftiger Generationen*) werde ich mich ewig erinnern. Es war ein Traum!

Jan Oltmann, Julian Theis, Malte Modrow, Iestyn Hartbrich und Michael Hartung haben durch ihre Diplom-, Studien- und Bachelor-Arbeiten ebenfalls zum Erfolg dieser Arbeit beigetragen, genauso wie meine äußerst geduldigen Lektoren Nadine Döring und Nils Modrow.

Bei meinen Eltern Monika und Hans-Joachim Rapp bedanke ich mich für die gegebenen Möglichkeiten und bedingungslose Unterstützung während aller persönlichen Vorhaben. Ohne sie wäre ich nicht der, der ich bin. Das gilt ebenso für meinem Bruder Alexander, seine Lebensgefährtin Christin und vor allen anderen für meine Verlobte Sonja. Sie hat mich immer liebend unterstützt, hinterfragt und kritisiert.

Inhaltsverzeichnis

Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen	v
1 Einleitung	1
1.1 Containerumschlag im Hafen	1
1.2 Aufbau der Arbeit	2
1.3 Stand der Technik	3
2 Strukturschwingungen bei Containerkranen	5
2.1 Containerkrane	5
2.2 Modellierung	8
2.2.1 Finite-Elemente-Methode	8
2.2.2 Containerkranmodell	11
2.3 Verifikation	13
2.3.1 Modalanalyse	13
2.3.2 Bewegte Last	16
2.4 Strukturanalyse	22
2.4.1 Lösungsmethoden	22
2.4.2 Ergebnisse	23
2.4.3 Kaikollektive	30
2.5 Strukturmodifikation	36
2.5.1 Anfangsbedingungen	37
2.5.2 Optimierung	38
2.5.3 Ergebnisse	40
2.6 Fazit der Strukturschwingungen bei Containerkranen	42
3 Struktur-Last-Kopplung	45
3.1 Nichtlineares Modell	46
3.1.1 Kinematik	47
3.1.2 Bewegungsgleichungen	50
3.2 Reduziertes nichtlineares Modell	52
3.2.1 Kinematik	52
3.2.2 Bewegungsgleichungen	53
3.2.3 Zwangskräfte	55
3.2.4 Vergleich und Linearisierung	56
3.3 Schwerependel mit elastischem Faden	58
3.3.1 Schwerependel mit parametrischer Fadenlänge	58
3.3.2 Energiebetrachtung	59

3.3.3	Stabilitätsbetrachtung	60
3.3.4	Koppelschwingungen	62
3.4	Modell der Reduzierten Normalform	66
3.4.1	Normalform	66
3.4.2	Reduzierte Normalform	70
3.4.3	Reduzierte Normalform des Raupendels	73
3.5	Fazit der Struktur-Last-Kopplung	80
4	Lastschwingungsdämpfung bei Containerkranen	83
4.1	Grundlagen	83
4.1.1	Regelungsansatz	84
4.1.2	Einfluss des Lastpendelns auf Strukturschwingungen	86
4.2	Containerbrückenversuchsstand	86
4.2.1	Mechanischer Aufbau	87
4.2.2	Steuerung	88
4.3	Servo-parametrische Regelung	89
4.3.1	Design	90
4.3.2	Ergebnisse	94
4.4	Zustandsbeobachter	98
4.4.1	Design	98
4.4.2	Unscented Kalman-Filter	100
4.4.3	Validierung	104
4.5	Normalform-Regelung	109
4.5.1	Design	109
4.5.2	Analyse	113
4.5.3	Ergebnisse	119
4.6	Fazit der Lastschwingungsdämpfung bei Containerkranen	124
5	Zusammenfassung	127
A	Strukturschwingungen	129
A.1	Verifikation	129
A.2	Strukturanalyse	130
A.3	Strukturmodifikation	132
B	Struktur-Last-Kopplung	135
	Modell der reduzierten Normalform	135
C	Lastschwingungsdämpfung	139
C.1	Servo-parametrische Regelung	139
C.2	Zustandsbeobachtung	139
C.3	Normalform-Regelung	141
	Literaturverzeichnis	143

Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen

Die aufgeführten Größen und Funktionen werden im Text beim erstmaligen Auftreten erklärt. Sie können mittelbar oder unmittelbar von der Zeit abhängen. Dieser Zusammenhang wird in der folgenden Aufstellung vorausgesetzt und nicht explizit aufgeführt, sondern aus der Verwendung der Größen bzw. Funktionen ersichtlich. Vereinzelt ist zur Klärung eine Abhängigkeit gekennzeichnet.

Kleine lateinische Symbole

$a_{C,L}$	geometrische Ausdehnung des Containers bzw. der Laufkatze in x -Richtung
a_i	Koeffizienten des Raumpendels
$\mathbf{a}$	Vektor der Beschleunigung
$\bar{\mathbf{a}}$	Vektor der Führungsbeschleunigung
b	Breite innerhalb des rechteckigen Kastenprofils
$b_{C,L}$	geometrische Ausdehnung des Containers bzw. der Laufkatze in y -Richtung
b_i	Koeffizienten des Raumpendels
$b(t)$	Zeitverlauf einer Böe
$\mathbf{b}, \hat{\mathbf{b}}$	Vektor der analytischen Funktionen
$\mathbf{b}$	Vektor der Normalform-Nichtlinearitäten
c	Federkonstante
$c_{C,L}$	geometrische Ausdehnung des Containers bzw. der Laufkatze in z -Richtung
$c_i, \tilde{c}_i$	Koeffizient der LJAPUNOV-Funktion
d	Dämpferkonstante
$\mathbf{d}$	Element-Dämpfungsmatrix
$\mathbf{d}_i$	Vektor vom Containermittel- zum Seilanknüpfungspunkt
$e_{2,3}$	Kopplungsverstärkung der quadratischen bzw. kubischen Monome
$\mathbf{e}$	Einheitsrichtungsvektor
f	Anzahl der globalen Freiheitsgrade
f_i	Frequenz der Eigenschwingung
$\mathbf{f}$	Vektor der Systemdynamik
	Vektor der analytischen Funktionen der nicht steuerbaren Systemteile
$\mathbf{f}_i$	Vektor der Seilkraft
$\mathbf{f}^e$	Vektor der eingprägten Kräfte
$\mathbf{f}^z$	Vektor der Zwangskräfte
$\mathbf{f}$	Vektor der Normalform-Nichtlinearitäten der nicht steuerbaren Systemteile
g	Erdbeschleunigung

$\mathbf{g}$	Vektor der analytischen Funktionen der steuerbaren Systemteile Vektor der Reaktionskräfte
$\mathbf{g}$	Vektor der Normalform-Nichtlinearitäten der steuerbaren Systemteile
h	Höhe über Geländenullniveau Höhe innerhalb des rechteckigen Kastenprofils
$\mathbf{h}$	Vektor der Messdynamik Normalformtransformation der nicht steuerbaren Systemteile
h_i	Formfunktion
i	imaginäre Zahl
k	Polynomgrad
k_G	Schubkorrekturfaktor
$\mathbf{k}$	Element-Steifigkeitsmatrix Vektor der Koeffizienten der Zustandsrückführung
$\mathbf{k}, \mathbf{k}^e$	Vektor der Steifigkeits- und Dämpfungskräfte
l	normierte relative Länge
l_i	Seillänge
$\mathbf{l}^e$	Vektor der eingprägten Momente
m	Masse
m_j	verallgemeinerte Masse
m_k	konzentrierte Masse
m_L	Masse der Laufkatze
m_ϕ	schwingende Masse
$\mathbf{m}$	Element-Massenmatrix Vektor der Monomexponenten der nicht steuerbaren Systemteile
n	Dimension des Zustandsraums
p	Anzahl der Starrkörper
p_i	periodischer Koeffizient
$p(\lambda)$	charakteristisches Polynom
$\mathbf{p}$	Vektor der Optimierungsparameter
q	Winddruck
$\mathbf{q}$	Vektor der Monomexponenten der steuerbaren Systemteile
$\mathbf{q}, \mathbf{q}^e$	Vektor der eingprägten Kräfte und Momente
r	Anzahl der Zwangsbedingungen
$\mathbf{r}$	Vektor der lokalen äußeren Kräfte
$\mathbf{r}_{C,L}$	Lagevektor des Containers bzw. der Laufkatze
s	Position der Laufkatze
$\mathbf{s}$	Vektor der Drehbewegung
t	Zeit
u, u'	Eingangsgröße
u_i	lokale Verschiebung
u_A	Schwingungsamplitude
$\mathbf{u}$	Vektor der lokalen Verschiebung Vektor der Eingangsgrößen
$v, \tilde{v}$	(Wind-)Geschwindigkeit
$\mathbf{v}$	Vektor der translatorischen Geschwindigkeit Vektor der Eingangsgrößen
$\bar{\mathbf{v}}$	Vektor der Führungsgeschwindigkeit

$\mathbf{v}$	Vektor des Messrauschens
$\mathbf{w}^m$	Vektor der Gewichtungsfaktoren
$\mathbf{w}$	Vektor des Prozessrauschens
x	Koordinatenrichtung
$\mathbf{x}$	Zustandsvektor
$\tilde{\mathbf{x}}$	Eigenvektor im Zustandsraum
$\hat{\mathbf{x}}$	Vektor der Mittelwerte
y	Koordinatenrichtung
$\mathbf{y}$	Vektor der globalen Verschiebung
	Normalformvektor
$\tilde{\mathbf{y}}$	globaler Eigenvektor
z	Koordinatenrichtung
$\mathbf{z}$	Vektor der Messgrößen

Große lateinische Symbole

A	Fläche
$\mathbf{A}$	Systemmatrix
$\mathbf{A}^*$	Systemmatrix des geschlossenen Regelkreises
$\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{A}}$	Matrix des nicht steuerbaren Systemteils
B	Breite
$\mathbf{B}$	Elastizitätsmatrix
$\mathbf{B}, \tilde{\mathbf{B}}$	Matrix der Eingangsgrößen des steuerbaren Systemteils
$\mathbf{C}, \tilde{\mathbf{C}}$	Matrix des steuerbaren Systemteils
C_i	Integrationskonstante
D	LEHRsches Dämpfungsmaß
$\mathbf{D}, \overline{\mathbf{D}}$	Dämpfungsmatrix
DA	visko-elastischer Proportionalitätsfaktor
E	Elastizitätsmodul
	Energie
$\mathbf{E}$	Einheitsmatrix
EA	Dehnsteifigkeit
F	Kraft
$\mathbf{F}$	Kraftvektor
$\mathbf{F}, \tilde{\mathbf{F}}$	TAYLOR-entwickelte Matrix der linearen Systemdynamik
$\mathbf{F}_D$	Vektor der Dämpfungskräfte
$\mathbf{F}_E$	Vektor der Elastizitätskräfte
$\mathbf{F}_I$	Vektor der Trägheitskräfte
G	Schubmodul
$\mathbf{G}, \tilde{\mathbf{G}}$	TAYLOR-entwickelte Matrix der Eingangsgrößen
H	Höhe
$\mathbf{H}$	Element-Interpolationsmatrix
I	Flächenträgheitsmoment
$\mathbf{I}$	Massenträgheitstensor
$\mathbf{J}_T, \mathbf{J}_R,$	JACOBI-Matrizen der Translation und Rotation
$\mathbf{K}, \overline{\mathbf{K}}$	Steifigkeitsmatrix

$\mathbf{K}_k$	Matrix der KALMAN-Verstärkung
$\mathbf{K}_T, \mathbf{K}_R$	Koeffizientenmatrizen der Translation und Rotation
L	Länge
$\mathbf{M}, \overline{\mathbf{M}}$	Massenmatrix
N	Knotenanzahl
N_i	Ansatzfunktion
$\mathcal{N}(\cdot)$	Normalverteilung
P	periodischer Koeffizient der HILLSchen Gleichung
$\mathbf{P}$	Kovarianzmatrix
$\mathbf{Q}$	Kovarianzmatrix des Prozessrauschens
$\overline{\mathbf{Q}}$	globale Verteilungsmatrix der Reaktionskräfte
$\mathbf{R}$	Kovarianzmatrix des Messrauschens
	Vektor der globalen äußeren Kräfte
$\mathbf{S}$	Drehungsmatrix
$\mathbf{S}_B$	Beobachtbarkeitsmatrix
$\mathbf{S}_S$	Steuerbarkeitsmatrix
$\mathbf{T}$	Zustandsübergangsmatrix
V	Volumen
	LJAPUNOV-Funktion
W	Gewichtungsfaktor eines Sigma-Punkts
W^c, W^m	Gewichtungsfaktoren für Kovarianz- und Mittelwerttransformation
$\mathbf{W}$	Gewichtungsmatrix für Transformation der Sigma-Punkte
$\mathcal{X}$	Matrix der Sigma-Punkte im Urbildraum
$\mathbf{Y}$	Matrix der globalen Eigenvektoren
$\mathcal{Y}$	Matrix der transformierten Sigma-Punkte im Bildraum

Kleine griechische Symbole

α	KARDAN-Winkel der Nickbewegung
	Sigma-Punkt-Parameter
α_R	massenproportionaler Koeffizient der RAYLEIGH-Dämpfung
α_S	Stabilitätsparameter
α_W	Windgeschwindigkeitsexponent
$\boldsymbol{\alpha}$	Vektor der Freiheitsgrade des Systemeingangs
$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$	Vektor der Störungskompensation
β	KARDAN-Winkel der Rollbewegung
	Sigma-Punkt-Parameter
β_R	steifigkeitsproportionaler Koeffizient der RAYLEIGH-Dämpfung
$\boldsymbol{\beta}$	Vektor der Freiheitsgrade des Systemeingangs
δ	Dirac-Impuls
δ_j	Realteil des Eigenwertes
$\boldsymbol{\epsilon}$	Vektor der Verzerrungen
ϕ	Pendelwinkel
ϕ_A	Amplitude der Pendelauslenkung
φ	Normalformtransformation der steuerbaren Systemteile
γ	KARDAN-Winkel Gierbewegung

	Koeffizient der MATHIEUSchen Gleichung
γ	Vektor der Eigenwerte des steuerbaren Systemteils
η	Güte der Resonanzkopplung
$\boldsymbol{\eta}$	Normalformvektor der steuerbaren Systemteile
λ	Eigenwert
	Koeffizient der MATHIEUSchen Gleichung
$\boldsymbol{\lambda}$	Vektor der Eigenwerte des nicht steuerbaren Systemteils
μ	Massenverteilung
μ_i	charakteristischer Exponent
μ_R	Reibkoeffizient
$\boldsymbol{\mu}$	Vektor der analytischen Funktionen des nicht steuerbaren Systemteils
$\bar{\boldsymbol{\mu}}$	zusätzlicher Vektor der analyt. Fkt. des nicht steuerbaren Systemteils
ν	Optimierungsinkrement
$\boldsymbol{\nu}$	Vektor der analytischen Funktionen des steuerbaren Systemteils
$\bar{\boldsymbol{\nu}}$	zusätzlicher Vektor der analyt. Fkt. des steuerbaren Systemteils
θ	Pendelwinkel
ρ	Dichte
σ	Standardabweichung
$\boldsymbol{\sigma}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}$	Vektor der analytischen Funktionen
$\bar{\boldsymbol{\sigma}}$	Normalformdarstellung der Freiheitsgrade des Systemeingangs
τ	dimensionslose Zeit
$\boldsymbol{\tau}$	Vektor der Spannungen
ω	Kreisfrequenz
ω_b	Balkenkreisfrequenz
ω_j	Kreisfrequenz der Eigenschwingung
	Imaginärteil des Eigenwerts
$\boldsymbol{\omega}$	Vektor der Winkelgeschwindigkeit
$\boldsymbol{\xi}$	Normalformvektor der nicht steuerbaren Systemteile
ψ	Phase
ζ	längennormierte Verschiebung

Große griechische Symbole

Δ	Differenz
Φ	Transformation der Normalform
Γ	Matrix der Gleichgewichtsbedingungen der Seilkräfte
Ω	Kreisfrequenz
Ω_s	Stabilitätsbereich

Nachgestellte Indizes

B	Böe
c	steuerbar (<i>controllable</i>)
C	Container
H	Heben
i	Zählvariable

I	Initial
j	Zählvariable
k	diskreter Zeitschritt
$[k]$	Polynomgrad
kam	Kamera
kin	kinetisch
L	Laufkatze
m	bewegte Last
(m,q)	Polynomgrad der nicht steuerbaren (m) und steuerbaren (q) Monomteile
max	maximal
opt	optimiert
p	stochastischer Prozess
pot	potentiell
ref	Referenz
s	Element
$soll$	Sollvorgabe
S	Senken
	Schwerpunkt
u	nicht steuerbar (<i>uncontrollable</i>)
W	Wind
x, y, z	Koordinatenrichtung
$ -$	<i>a priori</i>
$ +$	<i>a posteriori</i>

Sonstige Symbole

$\times$	Vektorprodukt
D	Differentialoperator
∂	partieller Differentialoperator
∇	Gradient
$(\cdot)^T$	transponierte Größe
$\ \cdot\ $	euklidische Vektornorm
$\text{rang}(\cdot)$	Rang einer Matrix
$[\cdot, \cdot]$	LIE-Klammer
$\text{ad}^k(\cdot)$	wiederholte LIE-Klammer
$L^i(\cdot)$	LIE-Ableitung

Schreibweisen

x	skalare Größe
$\tilde{x}$	Nachbarbewegung
x^*	Grundzustand
$\mathbf{x}$	vektorielle Größe
$\tilde{\mathbf{x}}$	schiefsymmetrischer Tensor zu einem (3×1) -Vektor
$\mathbf{X}$	Matrix

Kapitel 1

Einleitung

Die vorliegende Arbeit leistet einen Beitrag zur aktiven Dämpfung von Lastschwingungen bei Containerkränen. Die Untersuchungen wurden im Rahmen eines Teilprojekts des DFG-Graduiertenkollegs *Seehäfen für Containerschiffe zukünftiger Generationen* durchgeführt, das sich mit den Herausforderungen beim Hafen-, Kran- und Schiffbau auseinandersetzt.

Für die norddeutschen Häfen werden in Zusammenarbeit mit den Hafenbehörden, Betreibergesellschaften und den Herstellern Richtlinien und Methoden für die Anforderungen der Containerschiffe zukünftiger Generationen entwickelt. Das Bindeglied von Containerschiff und Hafen ist der Containerkran. Der Kran diktiert die Rahmenbedingungen für die Effizienz beim Transport der Container vom Schiff aufs Land und umgekehrt. Zwei unterschiedliche Strukturen moderner Containerkrane in Hamburg und Bremerhaven werden untersucht. Problematisch beim Containerumschlag sind Schwingungen der Struktur, die sich störend auf den Kranführer auswirken, und Lastschwingungen, die den Umschlagbetrieb verzögern. Diese Arbeit analysiert die Schwingungsprobleme und erarbeitet Methoden zur Dämpfung der Schwingungen.

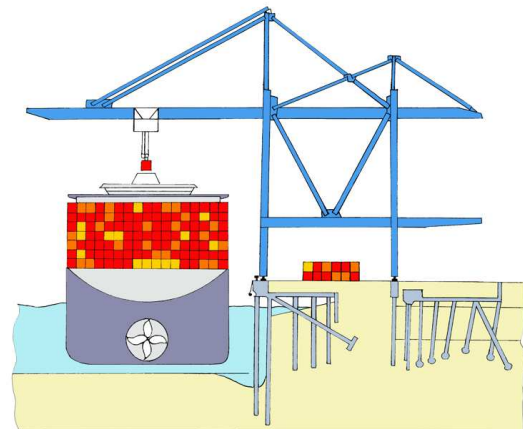


Bild 1.1: Containerschiff, Kran, Kaianlage

1.1 Containerumschlag im Hafen

Im Jahr 2010 sind im Hamburger Hafen 96,8% aller Stückgüter in Containern umgeschlagen worden. Insgesamt wurden ca. 8 Mio. TEU¹ vom Land aufs Schiff oder umgekehrt transportiert. Das entspricht einem Zugewinn von 1 Mio. TEU gegenüber dem Jahr der Weltwirtschaftskrise 2009. Im weltweiten Vergleich lag der Hafen Hamburg 2010 auf Position 15. Lediglich zwei europäische Häfen lagen in dieser Statistik ([26]) vor Hamburg (Rotterdam und Antwerpen). Alle übrigen Häfen sind in Asien angesiedelt, angeführt

¹TEU steht im Englischen für *twenty foot equivalent unit* und bezeichnet einen Standardcontainer.

von Shanghai (ca. 30 Mio. TEU in 2010). Eine Prognose des Umschlagpotentials für den Hamburger Hafen aus dem Jahr 2010 schätzt den jährlichen Zuwachs bis 2025 auf 4,4 bis 7,6% ([33]). Dies resultiert in einem Umschlagvolumen von 14,1 bis 22,8 Mio. TEU für das Jahr 2025. In einem Basisszenario werden für die Jahre 2015 11,1 Mio. TEU, 2020 14,1 Mio. TEU und 2025 18,7 Mio. TEU prognostiziert (6,3% mittleres jährliches Wachstum).

Die genannten Umschlagzahlen können nur erzielt werden, wenn die technischen und logistischen Randbedingungen erfüllt sind. Für den Containerkran hat dies zur Folge, dass die Dimensionen der Kranhöhe und der Kranauslegerlänge die Abmaße der Containerschiffe überspannen müssen. Große Krane bedingen Strukturverformungen, die als Strukturschwingungen vom Kranführer wahrgenommen werden. Strukturschwingungen mit signifikanten Amplituden und Frequenzen unterhalb von 1Hz sind außerordentlich unangenehm für den Kranführer, der in einer Kabine operiert, angeschlossen an die Laufkatze am Auslegerbalken. Die detaillierte Untersuchung von modernen charakteristischen Kranstrukturen ist für die Erforschung der Schwingungsursachen erforderlich. Anschließend sollen Maßnahmen zur Reduzierung der Strukturschwingungen erarbeitet werden.

Die Höhe des Auslegerbalkens hat direkten Einfluss auf das Schwingungsverhalten der Last. Idealisiert betrachtet, repräsentiert die angehängte Last ein überdimensionales Pendel, dessen Schwingungsdauer sich proportional zur Wurzel der Seillänge verhält. Eine erhöhte Schwingungsdauer verzögert den Umschlagbetrieb. Bei pendelnder Last (bzw. Lastaufnahmemittel) ist kein Aufnehmen oder Absetzen der Container möglich. Durch aktive Dämpfung müssen die Lastschwingungen auf ein tolerierbares Maß herabgesetzt werden. Während des Umschlagbetriebs können Lastpendelbewegungen in der senkrechten Ebene unterhalb des Auslegerbalkens, in anderen senkrechten Ebenen sowie räumliche Auslenkungen u. U. auftreten. Regelungsentwürfe für die Reduzierung der Auslenkung müssen in der Lage sein, alle theoretisch möglichen Lastschwingungen zu behandeln. Der Kranführer darf durch den Eingriff der Regelung in das Steuersystem des Krans in der Ausübung seiner Tätigkeit nicht beeinträchtigt werden.

1.2 Aufbau der Arbeit

Der Aufbau der Arbeit greift die Kernprobleme der Struktur- und Lastschwingungen auf. In Kapitel 2 werden die Strukturschwingungen bei Containerkränen untersucht. Nach der einleitenden Beschreibung von Containerkränen (Abschnitt 2.1) folgt in Abschnitt 2.2 die Finite-Elemente-Modellierung von zwei unterschiedlichen modernen Hafenkränen. Die erarbeiteten Modelle werden mit den Daten der Hersteller, den Eigenschwingungen und einem bewegte-Last-Modell verifiziert (Abschnitt 2.3), um in der anschließenden Analyse der Strukturen realistische Ergebnisse für die Ursachenerforschung der Strukturschwingungen zu erzielen, Abschnitt 2.4. Abschließend werden in Abschnitt 2.5 die Erkenntnisse der Analyse für die Modifikation der Kranstrukturen herangezogen.

Das dritte Kapitel stellt die Struktur-Last-Kopplung dar, die das dynamische Verhalten der Lastschwingungen wiedergibt. Die Bewegungen des Containers, der mit vier

Seilen unterhalb der Laufkatze aufgehängt ist, werden in Abschnitt 3.1 modelliert. Die NEWTON-EULER-Formulierung der Bewegungsgleichungen verwendet die maximale Anzahl verallgemeinerter Koordinaten eines Starrkörpers. Visko-elastische Seile werden in Abschnitt 3.2 durch längssteife Seile ersetzt und ergeben ein reduziertes nichtlineares Modell zur Beschreibung der Lastdynamik. Die Betrachtung des Schwerependels (Abschnitt 3.3) mit veränderlicher (periodischer) Fadenlänge legt das Resonanzphänomen der nichtlinearen Kopplung dar. Das Systemverhalten mit innerer Resonanz wird durch die nichtlineare Normalformtransformation der Modellgleichungen untersucht, Abschnitt 3.4. Am Ende von Kapitel 3 steht die reduzierte Normalform des Hubmechanismus.

Kapitel 4 behandelt Maßnahmen zur aktiven Dämpfung der Lastschwingungen und Abschnitt 4.1 erläutert den Regelungsansatz. Für die Untersuchung der Regelungsentwürfe wird der Containerbrückenversuchsstand beschrieben (Abschnitt 4.2). Der Entwurf der servo-parametrischen Regelung ist in Abschnitt 4.3 aufgegriffen und am Versuchsstand untersucht. Ein nichtlinearer Zustandsbeobachter, dokumentiert in Abschnitt 4.4, erweitert die Funktionalität des Versuchsstands um die geschätzten Zustände der Pendelwinkel und Winkelgeschwindigkeiten. Darauf aufbauend wird die Normalform-Regelung entworfen, Abschnitt 4.5. Die Versuchsergebnisse bestätigen die aktive Dämpfung der Lastschwingungen.

1.3 Stand der Technik

Die historische Entwicklung von Containerkränen und die Evolution des vorherrschenden Designs ist von Zrnić und Hoffmann [97] dargestellt. Weiterhin beschreiben Zrnić u. a. [98, 99, 100] den Stand der Technik, Laufkatzkonfigurationen, Umwelteinflüsse und die Entwicklung der Containerkranindustrie. Die Analyse von Strukturen mit bewegten Lasten ist in den Ausführungen von Fryba [23], Olsson [71] sowie Wu [95, 96] behandelt. Alle Autoren formulieren Methoden zur Ermittlung der Strukturschwingungen, hervorgerufen durch bewegte Lasten. Weiterhin befassen sich Dinevski und Oblak [18] mit der experimentellen und numerischen Analyse der Dynamik von Containerkränen. Dinevski und Oblak [19] untersuchen die Optimierung der Containerkranstruktur.

Die Modellierung von angehängten Kranlasten wird von Bockstedte [8] für schwebende Krane ausgeführt. Lee [52] schlägt eine alternative Wahl der verallgemeinerten Koordinaten für das Lastschwingungsmodell vor. Zahlreiche Bücher und Artikel über nichtlineare Dynamik behandeln die Auswirkungen von resonanter Kopplung in unteraktuierten Systemen. Beispielhaft sind Mettler [62] sowie Nayfeh und Mook [67] aufgeführt, bei denen dargestellt ist, wie linear unabhängige Bewegungsformen indirekt durch resonante Kopplung interagieren. Sethna [82] stellt umfangreiche Untersuchungen zu periodisch erregten autoparametrischen Systemen an. Die Methode der Normalform ist ein gängiges Verfahren zur vereinfachten Darstellung von nichtlinearen Systemen mit Resonanzen und wird u. a. bei Arnold [2], Guckenheimer und Holmes [24] sowie Wiggins [93] behandelt. Krener u. a. [45] untersuchen nichtlineare resonante Systeme mit einer Stellgröße. Das System wird dafür linear entkoppelt und mit der klassischen Normalformmethode behandelt.

Masoud und Nayfeh [59] entwerfen eine Totzeit-behaftete Rückführregelung für die Position der Laufkatze zur Dämpfung von Lastschwingungen. Sawodny [79] bezieht in den Regelungsentwurf die Veränderungen der Seillänge im Hubsystem während des Lastumschlags ein. Der resultierende Regler kombiniert Trajektorien-basierte Vorsteuerung der Laufkatze mit Zustandsrückführung durch Polzuweisung. Flachheitsbasierte Regelungen werden bei Heyden und Woernle [29] sowie Blajer und Kołodziejczyk [6, 7] favorisiert. Heyden und Woernle entwerfen ebenfalls eine kombinierte Vorsteuerung und Rückführregelung zur Laufkatzenpositionierung. Blajer und Kołodziejczyk erweitern den Formalismus von Heyden und Woernle um differential-algebraische Gleichungen für die Navigation der Last in schwer zugänglichen Umgebungen. Abdel-Rahman u. a. [1] stellen einen umfangreichen Überblick über weitere Regelmechanismen zur Laufkatzenpositionierung mit dem Ziel der Lastschwingungsdämpfung vor. Der Entwurf von Regelungsmechanismen ohne die Verwendung der Laufkatze als Aktuator ist bei Khajepour und Golnaraghi [38] nachzulesen. Ausgehend von einer inneren Resonanz wird zunächst die Dynamik des Systems mit der klassischen Normalformmethode untersucht (Khajepour u. a. [39]) und im Anschluss eine nichtlineare Regelung zur Schwingungsdämpfung entworfen (Khajepour u. a. [40]). Bockstedte und Kreuzer [9] greifen diesen Ansatz auf. Sie entwerfen eine Regelung, basierend auf einer inneren Resonanz, die das Verhalten eines gedämpften Feder-Masse-Schwingers erzeugt, um den Eingriff in linear nicht steuerbare Bewegungsformen am unteraktuierten Kransystem zu ermöglichen.

Kapitel 2

Strukturschwingungen bei Containerkranen

Für die Strukturschwingungsdämpfung wird zunächst auf den allgemeinen Aufbau von Containerkranen und deren Modellierung eingegangen. Die gewählte Modellierungsmethode wird anschließend verifiziert und hinsichtlich auftretender Lasten während eines Referenz-Containerumschlag-Manövers analysiert. In der Untersuchung werden sowohl die dynamischen strukturellen Verformungen der Krane als auch deren Einfluss auf die Kaianlage herausgearbeitet. Die Ergebnisse der Strukturanalyse leiten zur Optimierung der Krankonstruktion über und neue Resultate werden diskutiert. Den Abschluss des Kapitels bildet ein Zwischenfazit der strukturellen Untersuchungen.

2.1 Containerkrane

Containerkrane unterstützen seit mehr als 50 Jahren den Containerumschlag im Hafen. Im Jahr 1956 verkehrte das erste Containerschiff zwischen den USA und Puerto Rico. Bis dahin sind Waren vornehmlich als Stückgüter transportiert worden, was einen hohen Aufwand bedeutete und viel Zeit beim Umschlag kostete. Mit dem zunehmenden weltweiten Transportvolumen von Waren folgte die Standardisierung von Transportboxen und es entstand die noch heute gültige A-förmige Grundstruktur der Containerkrane. Im amerikanischen Bundesstaat Kalifornien ist 1959 der weltweit erste Containerkran in Betrieb genommen worden. Mit diesem speziellen Gerät können ausschließlich Standardcontainer umgeschlagen werden. Die Vorteile sind die Vereinheitlichung des Transports der Container vom Schiff aufs Land und umgekehrt sowie die drastische Verkürzung der Umschlagzeit pro Ware. In den folgenden Jahrzehnten des wirtschaftlichen Aufschwungs nahm der weltweite Containertransport kontinuierlich zu, weshalb die Containerschiffe bis zum Beginn des 21. Jahrhunderts stetige Kapazitätserweiterungen erfuhren. Die einhergehende Zunahme der Schiffsdimensionen bedeutete gleichermaßen eine Größenanpassung der Containerkrane. Die grundlegende Struktur der Krane ist jedoch in diesem Zeitraum nur marginal verändert worden und entspricht nach wie vor den Entwürfen der Firma PACECO aus dem Jahr 1958. Der Containertransport dominiert zu Beginn des 21. Jahrhunderts annähernd den gesamten Warentransport. Heutzutage werden ca. 97% der weltweit umgeschlagenen Waren in Containern abgefertigt.

Ein aktueller Hafenquerschnitt mit Containerschiff und Containerkran ist in Bild 2.1 skizziert. In der Darstellung sind die A-Grundform des Krans sowie das signifikante Klassifizierungsmerkmal der wasserseitigen Kranausladung deutlich zu erkennen. Die maximal wasserseitig vom Ausleger erreichbaren Container charakterisieren die Krangröße. So werden diese Bauwerke entsprechend der umschlagbaren Schiffsklasse eingeordnet. Zurzeit befinden sich vornehmlich Containerkrane der Panamax-, Post-Panamax sowie Suezmax-Klasse weltweit im Betrieb.

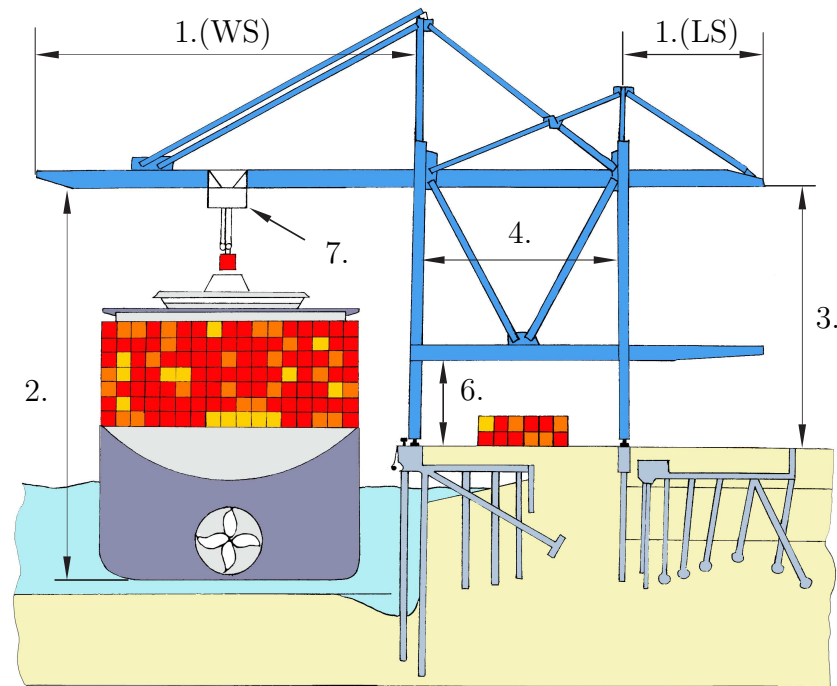


Bild 2.1: Skizze Containerkran im Hafen

Die Krane können hinsichtlich folgender Struktureigenschaften spezifiziert werden (Nummern entsprechen den Bezeichnern in Bild 2.1):

1. wasserseitige (WS) und landseitige (LS) Ausladung,
2. Hubhöhe insgesamt,
3. Hubhöhe über Oberkante Kranschiene (OKS),
4. Portalspurweite,
5. Freiraum zwischen Portalstützen (entlang der Kranbahn, nicht dargestellt),
6. Durchfahrhöhe zwischen Portalstützen,
7. Laufkatze.

Die Merkmale für den Betrieb der Containerkrane werden als maximale Geschwindigkeit der Laufkatze, des Hub- und Senkvorgangs mit bzw. ohne zulässige Last sowie für das Kranfahrwerk angegeben.

Umgebungs- und betriebsbedingte Merkmale haben die Weiterentwicklung der Krane maßgebend dominiert. So sind Containerkrane im Einzugsgebiet von Flughäfen besonders flach ausgeführt und verzichten auf das Zugbandsystem oberhalb des Auslegers. Das Maschinenhaus, welches die Winden der Hubvorrichtung und den Katzantrieb bereithält, kann direkt auf der Laufkatze oder dezentral im Portalbereich¹ untergebracht sein. Bei der dezentralen Lösung wird die Laufkatze mithilfe von Stahlseilen entlang des Auslegers positioniert. Der Ausleger weist typischerweise eine von zwei möglichen Bauformen auf: Monobox-Ausleger oder Twinbox-Ausleger. Letzterer verfügt über zwei parallel geführte Kragarmausleger mit Boxquerschnitt, in dessen Zwischenraum die Laufkatze operiert. Typischerweise verfügt jeder Containerkran über eine Laufkatze für den Umschlag der Container vom Schiff zum Land und umgekehrt. Es existieren jedoch vereinzelt auch Krane mit einer Laufkatze auf der Wasserseite und einer weiteren auf der Landseite, wobei die LS u. U. sogar vollautomatisch betrieben wird. Allgegenwärtig sind adaptive Spreader (engl. für Lastaufnahmemittel) für den Transport von ein, zwei bzw. vier Standardcontainern. Weitere allgemeine Informationen zur Entwicklung und zum Design von Containerkränen können bei Bhimani und Jordan [5], Zrnić und Hoffmann [97], sowie Zrnić u. a. [99, 100] nachgeschlagen werden.

Im Rahmen dieser Arbeit ist jeweils ein Kran am Containerterminal Burchardkai (CTB) in Hamburg und am Containerterminal 4 (CT4) in Bremerhaven näher untersucht worden. Der Containerkran in Hamburg stammt von KOCKS KRANE und kann der Post-Panamax-Klasse zugeordnet werden. Der Kran in Bremerhaven ist der Suezmax-Klasse zugehörig und wurde von ZPMC hergestellt. Anhand der Kenndaten in Tabelle 2.1 wird der Dimensionsunterschied deutlich.

Tabelle 2.1: Kenndaten

Merkmal	CTB	CT4
Ausladung WS	49,5m	62,5m
Ausladung LS	19,0m	25,0m
Hubhöhe insgesamt	56,0m	66,5m
Hubhöhe über OKS	36,0m	43,0m
Portalspurweite	18,0m	30,5m
Maximalhöhe	70,0m	80,0m
Anz. Räder je Fahrwerk	32	32
Gesamtmasse	1230t	1810t
Tragfähigkeit der Hubseile	72t	72t

Der CT4-Kran überragt in fast jeder Kategorie den CTB-Kran, abgesehen von der Anzahl der Räder je Fahrwerk (32) und der Tragfähigkeit der Seile (72t). Der signifikante Unterschied der Gesamtmasse bei gleicher Tragfähigkeit ist u. a. der breiteren Spur, der höheren Bauform sowie der größeren wasserseitigen Ausladung des Containerkrans am CT4 geschuldet. Darüber hinaus verdeutlicht Bild 2.2 die unterschiedlichen Varianten der Auslegerform (Monobox-Ausleger/CTB, Twinbox-Ausleger/CT4). Diese Auslegerformen

¹Das Portal befindet sich zwischen den Stützen auf Höhe des Auslegers.

begünstigen jeweils die Verwendung einer Maschinenhauskatze für den KOCKS-Kran bzw. einer seilgeführten Laufkatze auf dem ZPMC-Kran. Eine erhöhte Laschplattform in der Nähe des wasserseitigen Fahrwerks ist Teil des Krans in Bremerhaven, wodurch die Sicherheit des Personals bei der Abfertigung der Container erhöht wird. Beide Containerkrane werden als Anwendungsbeispiele für die folgenden Untersuchungen herangezogen.

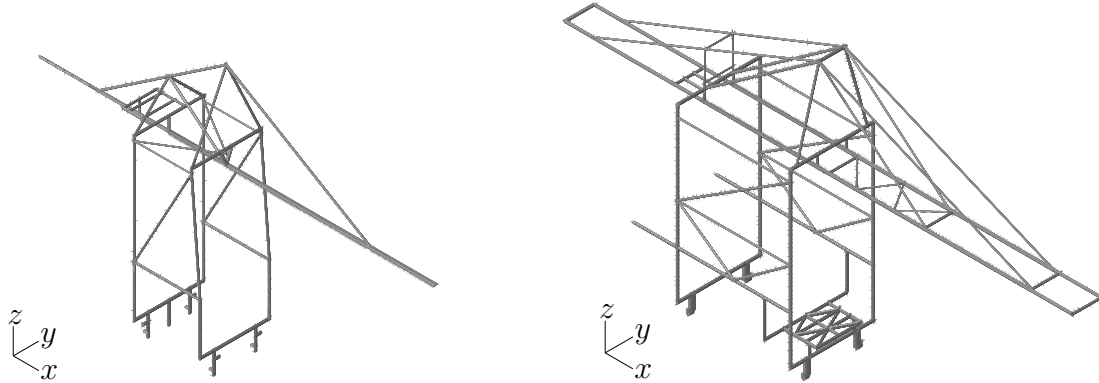


Bild 2.2: Schematische Darstellung der Containerkrane am CTB (links) und CT4 (rechts)

2.2 Modellierung

Die Modellierung mechanischer Strukturen wird von der gewählten Formulierung für das idealisierte System bestimmt. Ein mathematisches Ersatzmodell wird angestrebt, das die grundlegenden Eigenschaften der mechanischen Struktur widerspiegelt. Für die Untersuchung des Bewegungsverhaltens eines Ersatzmodells kommen das Mehrkörpersystem, das Finite-Elemente-System sowie das Kontinuierliche System in Frage. Das Modell führt auf Bewegungsgleichungen, für die eine numerische Lösung bestimmt wird. Das komplexe mechanische Konstrukt von Containerkranen wird nachfolgend mit der Finite-Elemente-Methode in ein mathematisches Modell überführt und durch zwei Beispiele verdeutlicht.

2.2.1 Finite-Elemente-Methode

Finite Elemente (FE) sind u. a. von Bathe [3] ausführlich vorgestellt und für die Formulierung einer Methode zur Beschreibung technischer Systeme herangezogen worden. Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen bildet die Grundlage der Finite-Elemente-Methode. Für einen beliebigen dreidimensionalen Körper im Gleichgewicht und mit beliebig kleinen virtuellen Verschiebungen entspricht die innere virtuelle Arbeit der gleichzeitig anfallenden äußeren virtuellen Arbeit. Die kinetische Gleichgewichtsbedingung (Bewegungsgleichung) für N Knoten lautet:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{R}. \quad (2.1)$$

Die globalen Verschiebungsgrößen werden im $(3N \times 1)$ -Vektor der Knotenverschiebungen $\mathbf{y} = [x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N]^T = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N]^T$ zusammengefasst. Die $(3N \times 3N)$ -Gesamtmassenmatrix $\mathbf{M}$ wird aus den Elementmassenmatrizen $\mathbf{M}^{(s)}$ auf der Ba-

sis des Volumenintegrals über der Multiplikation von Dichte und $(h \times 3N)$ -Element-Interpolationsmatrix $\mathbf{H}^{(s)}$ abgebildet:

$$\mathbf{M} = \sum_s \underbrace{\int_{V^{(s)}} \rho^{(s)} \mathbf{H}^{(s)T} \mathbf{H}^{(s)} dV^{(s)}}_{\mathbf{M}^{(s)}}. \quad (2.2)$$

Die Interpolationsmatrix $\mathbf{H}^{(s)}$ stellt den Zusammenhang von den h lokalen Elementfreiheitsgraden zu den $3N$ globalen Verschiebungen her:

$$\mathbf{u}^{(s)}(x_s, y_s, z_s) = \mathbf{H}^{(s)}(x_s, y_s, z_s) \mathbf{y}. \quad (2.3)$$

Die $(3N \times 3N)$ -Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$ beruht auf den $(h \times 3N)$ -Element-Verzerrungs-Verschiebungsmatrizen $\mathbf{B}^{(s)}$ sowie den $(h \times h)$ -Elastizitätsmatrizen der Elemente $\mathbf{C}^{(s)}$:

$$\mathbf{K} = \sum_s \underbrace{\int_{V^{(s)}} \mathbf{B}^{(s)T} \mathbf{C}^{(s)} \mathbf{B}^{(s)} dV^{(s)}}_{\mathbf{K}^{(s)}}. \quad (2.4)$$

Ein Zusammenhang vom $(h \times 1)$ -Vektor der Verzerrungen zu den globalen Verschiebungen wird analog zu (2.3) ermittelt:

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(s)}(x_s, y_s, z_s) = \mathbf{B}^{(s)}(x_s, y_s, z_s) \mathbf{y}. \quad (2.5)$$

Die Element-Elastizitätsmatrix $\mathbf{C}^{(s)}$ bezeichnet das Verhältnis vom $(h \times 1)$ -Vektor der Spannungen $\boldsymbol{\tau}^{(s)}$ zum Verzerrungsvektor $\boldsymbol{\epsilon}^{(s)}$ eines Elements (Anfangsspannungen $\boldsymbol{\tau}^{I(s)}$)

$$\boldsymbol{\tau}^{(s)}(x_s, y_s, z_s) = \mathbf{C}^{(s)}(x_s, y_s, z_s) \boldsymbol{\epsilon}^{(s)} + \boldsymbol{\tau}^{I(s)}. \quad (2.6)$$

Mit

$$\mathbf{D} = \sum_s \int_{V^{(s)}} \kappa^{(s)} \mathbf{H}^{(s)T} \mathbf{H}^{(s)} dV^{(s)}, \quad (2.7)$$

$$= \sum_s \underbrace{\left(\alpha_R \mathbf{M}^{(s)} + \beta_R \mathbf{K}^{(s)} \right)}_{\mathbf{D}^{(s)}} \quad (2.8)$$

wird die $(3N \times 3N)$ -Dämpfungsmatrix formuliert. In der Anwendung ist es häufig nicht möglich, eine praktikable Dämpfungskonstante $\kappa^{(s)}$ zu benennen. Die Beziehung (2.7) wird daher durch (2.8) ersetzt, welche als RAYLEIGH-Dämpfung bekannt ist. Die Koeffizienten der Massen- bzw. Steifigkeitsmatrix α_R und β_R werden experimentell ermittelt. Der erste Summand aus (2.8) dämpft vorwiegend niederfrequente Verschiebungen, wohingegen $\beta_R \mathbf{K}^{(s)}$ die hochfrequenten Bewegungsanteile reduziert. Die rechte Seite des inhomogenen Gleichungssystems (2.1) berücksichtigt den $(3N \times 1)$ -Vektor der aufgebrachten Lasten $\mathbf{R}$. Diese resultieren aus Volumenkräften $\mathbf{R}_B$, Oberflächenkräften $\mathbf{R}_S$, Kräften aus Anfangsspannungen $\mathbf{R}_I$ und den Einzellasten $\mathbf{R}_C$:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_B + \mathbf{R}_S + \mathbf{R}_I + \mathbf{R}_C. \quad (2.9)$$

Die Berechnungsvorschriften für die aufgebrachten Lasten können z. B. Bathe [3] entnommen werden. Die Differentialgleichung (2.1) zur Beschreibung eines mit finiten

Elementen diskretisierten Systems ist damit in Kürze dargestellt worden. Zuletzt werden die bekannten Randbedingungen aufgebracht.

Bisher sind verallgemeinerte Koordinaten $\mathbf{u}^{(s)}$ zur Herleitung der Elementmatrizen verwendet worden. Diese werden nun durch Linearkombinationen der Elementknotenpunktverschiebungen ersetzt, welche als Interpolations- bzw. Formfunktionen gelten. Die Interpolation der Element- und Verschiebungskoordinaten durch die Formfunktionen bildet die Grundlage für die *isoparametrische* Formulierung der Elementmatrizen. Eine derartige Formulierung ist besonders geeignet für die Implementierung auf Digitalrechnern. Isoparametrische Elementmatrizen geben darüber hinaus die Elementverschiebungen direkt wieder, ohne eine Zwischentransformation über verallgemeinerte Koordinaten.

Beispielhaft werden die Elementmatrizen eines isoparametrischen zweidimensionalen geraden Balkenelements hergeleitet. Der Balken hat einen konstanten rechteckigen Querschnitt mit der Höhe h und der Breite b . Die Länge beträgt L und die neutrale Faser verläuft entlang der horizontalen x -Achse. In der diskreten Form hat der Balken jeweils einen Knoten am Anfang ($i = I$) und am Ende ($i = II$). Jeder Knoten verfügt über eine translatorische $u_{1,2}^{(s)}$ sowie eine rotatorische Verschiebungsgröße $u_{3,4}^{(s)}$. Darüber hinaus ist der Balken mit einer vertikalen Kraft f und einem Moment l beaufschlagt. In der Literatur findet man die Formfunktionen h_i eines ebenen Balkenelements mit zwei Knoten als Funktion der Variable $r \in [-1, 1]$:

$$h_I = \frac{1}{2}(1 - r), \quad h_{II} = \frac{1}{2}(1 + r). \quad (2.10)$$

Auf der Basis der Verschiebungsgrößen

$$\mathbf{y}^{(s)} = [u_1^{(s)}, u_2^{(s)}, u_3^{(s)}, u_4^{(s)}]^T,$$

$$u_{1,2}^{(s)} = h_I u_1^{(s)} + h_{II} u_2^{(s)}, \quad u_{3,4}^{(s)} = h_I u_3^{(s)} + h_{II} u_4^{(s)},$$

sowie der Interpolationsmatrizen

$$\mathbf{H}_{1,2} = [h_I \ h_{II} \ 0 \ 0], \quad \mathbf{H}_{3,4} = [0 \ 0 \ h_I \ h_{II}],$$

$$\frac{\partial u_{1,2}^{(s)}}{\partial x} = \mathbf{B}_{1,2} \mathbf{y}, \quad \frac{\partial u_{3,4}^{(s)}}{\partial x} = \mathbf{B}_{3,4} \mathbf{y},$$

$$\mathbf{B}_{1,2} = J^{-1} \left[\frac{\partial h_I}{\partial r} \ \frac{\partial h_{II}}{\partial r} \ 0 \ 0 \right], \quad \mathbf{B}_{3,4} = J^{-1} \left[0 \ 0 \ \frac{\partial h_I}{\partial r} \ \frac{\partial h_{II}}{\partial r} \right],$$

ermittelt man mit $J = (\partial x)/(\partial r)$ und $\det J = 1$ die Elementmatrizen

$$\mathbf{M} = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1,2} \\ \mathbf{H}_{3,4} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \rho b h & 0 \\ 0 & \frac{\rho b h^3}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1,2} \\ \mathbf{H}_{3,4} \end{bmatrix} \det J dr, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{K} = EI \int_{-1}^1 \mathbf{B}_{3,4}^T \mathbf{B}_{3,4} \det J dr + G A k_G \int_{-1}^1 (\mathbf{B}_{1,2} - \mathbf{H}_{3,4})^T (\mathbf{B}_{1,2} - \mathbf{H}_{3,4}) \det J dr, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{R} = \int_{-1}^1 \mathbf{H}_{1,2}^T f \det J dr + \int_{-1}^1 \mathbf{H}_{3,4}^T l \det J dr. \quad (2.13)$$

Bisher nicht erwähnte geometrische und mechanische Balkenparameter sind der Elastizitätsmodul E , das Flächenträgheitsmoment I , der Schubmodul G , die Querschnittsfläche A , der Schubkorrekturfaktor k_G und die Dichte ρ . Die Dämpfungsmatrix $\mathbf{D}$ (2.8) wird hinsichtlich experimenteller Daten bestimmt. Eine Erweiterung dieser Formulierung auf dreidimensionale isoparametrische Balkenelemente wird analog vorgenommen und kann in der Literatur nachgeschlagen werden. Ein weiterer Vorteil isoparametrischer Elemente ist die Berücksichtigung von Schubverformungen. Verformte Querschnittsflächen und eine veränderte Orientierung bezüglich der neutralen Balkenfaser werden nicht vernachlässigt und ermöglichen eine ganzheitliche Verformungs- und Verschiebungsanalyse nach Timoshenko (vgl. Crandall u. a. [16]).

Treten bei der Analyse der Gleichgewichtsbedingungen große Verschiebungen, Dehnungen und Verzerrungen auf, verhält sich das Spannungs-Verzerrungs-Verhältnis nichtlinear. Bisher basieren alle angegebenen Gleichungen auf Herleitungen für lineare Finite-Elemente-Systeme. Diese bilden jedoch gleichzeitig die Grundlage für nichtlineare Bewegungsgleichungen derartiger Modelle. Die Interpolationsfunktionen wie auch die Berechnungen gelten für lineare und nichtlineare Gleichgewichtsbedingungen. Lediglich die Lösung der nichtlinearen Gleichungen fordert die Kenntnis aller Freiheitsgrade bis zum aktuellen Zeitpunkt t . Damit kann anschließend nach allen unbekannten Variablen für $t + \Delta t$ im Gleichgewicht aufgelöst werden.

2.2.2 Containerkranmodell

Die Modellierung eines Containerkrans mithilfe eines Finite-Elemente-Modells erfordert zunächst die Eingabe der Kranstruktur in eine Computerumgebung. Es bietet sich an, die Geometrie in einer CAE²-Umgebung abzubilden, wie in Bild 2.2 dargestellt. Dem geometrischen Modell werden anschließend die physikalischen und mechanischen Eigenschaften des Materials sowie der Krankomponenten zugeordnet. Einige Beispiele für diese Eigenschaften sind Dichte, Elastizitäts- und Schubmodul der verwendeten Materialien sowie Querschnittsflächen, Flächenträgheitsmomente und konzentrierte Massen der Komponenten. Im nächsten Schritt werden die vorliegenden Randbedingungen aufgebracht, welche Lagerungen abbilden. Feste Einspannungen sind am Containerkran vor allem im Bereich des Fahrwerks und der Gelenke oberhalb des Auslegers an den Zugbändern wiederzufinden. Auch die Verbindung des Portals mit dem wasserseitigen Ausleger ist als Gelenk ausgeführt, um den Ausleger in die vertikale Position überführen zu können, wenn der Betrieb unterbrochen ist. Nachfolgend wird die Diskretisierung der Struktur durchgeführt. Aktuell verfügbare Modellierungs- und Analyseprogramme wie z. B. ABAQUS verfügen als Teil der Modellierungsumgebung über Netzgenerierungsprogramme, die in der Lage sind, vollautomatisch Finite-Elemente-Gitter von mechanischen Strukturen zu erzeugen. Wesentliche Grundlage der Netzerstellung ist die Wahl des Elementtyps für die Diskretisierung des Containerkrans und der Diskretisierungsgrad. Letzterer gibt die Auflösung der Gesamtstruktur vor, die wiederum Einfluss auf die Genauigkeit der Lösungen des Gleichungssystems (2.1) hat.

Als Elementtyp für die mathematische Modellierung des Containerkrans werden dreidi-

²CAE steht im Englischen für *computer-aided engineering*.

mensionale Balkenelemente gewählt, da die Gesamtstruktur aus zusammengefügtten Balken unterschiedlicher Dimensionen und Querschnitte besteht. Die Unterschiede spiegeln sich in den physikalischen und mechanischen Eigenschaften der modellierten Elemente wider, die jedem Element eindeutig zugeordnet werden. Im Vergleich zu einer detaillierten Modellierung mit Schalenelementen ergeben sich durch die Balkenmodellierung u. a. folgende Vorteile:

- realitätsnahe Abbildung der Kranstruktur mit Balkenelementen,
- die mechanischen Balkeneigenschaften (Querschnittsfläche, Flächenträgheitsmomente) liegen explizit vor³,
- reduzierter Rechenaufwand für Balkenelemente durch geringere Anzahl der Freiheitsgrade.

Im Abschnitt 2.3 wird gezeigt, dass eine eindimensionale Abbildung (Balken) für dreidimensionale Kontinua (Kran) ohne Einschränkungen möglich ist und damit ein erhöhter Modellierungsaufwand durch Schalenelemente nicht gerechtfertigt ist. Für die anschließende Diskretisierung wird in ABAQUS das Balkenelement *B31H* gewählt. Es wird durch die dreidimensionale lineare (31) Formulierung auf der Basis der Verformungshypothese von Timoshenko charakterisiert, welche Schubverformungen berücksichtigt. Darüber hinaus folgt dieser Elementtyp einer *hybriden* (*H*) Beschreibung, die eine Strukturanalyse bei nichtlinearen Verformungen mit z. T. großen Rotationen von sehr steifen Elementen ermöglicht. Alle aufgelisteten Elementcharakteristika entsprechen exakt den Anforderungen, die an die Modellierung von Containerkränen gestellt werden müssen, um realistische dynamische Verformungsanalysen durchführen zu können.

In Bild 2.3 sind die Containerkrane am CTB und CT4 diskret dargestellt. Alle Knoten der finiten Elemente sind als solche gekennzeichnet, zusammen mit den Balkenelementen. Auch die geometrische Struktur ist eindeutig ersichtlich.

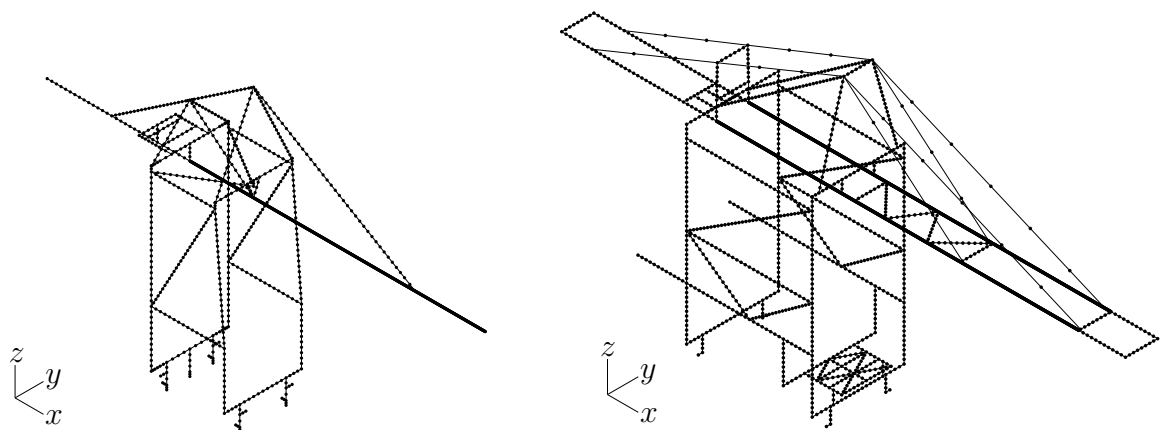


Bild 2.3: Diskrete Darstellung der Containerkrane am CTB (links) und CT4 (rechts) mit finiten Elementen

³Für beide Kranstrukturen liegen exakte Statikmodelle vor, aus denen die Eigenschaften entnommen werden.

Auffällig ist die sehr aufwendige Diskretisierung des Kranauslegers, welche die Grundlage für die spätere Implementierung von zeit- und ortsveränderlichen Lasten darstellt. Dafür ist es erforderlich, den Ausleger entsprechend der gewählten diskreten Zeitschritte anzupassen. Lasten können in Finite-Elemente-Gittern nur an Knoten aufgebracht werden, so dass bei großen Knotenabständen sprunghafte Lastverschiebungen starke Auswirkungen auf die Strukturdynamik haben. Ist der Abstand der Knoten ausreichend klein gewählt, so verhält sich eine bewegte Last quasi-kontinuierlich und so auch die Strukturantwort. Der Grad der Diskretisierung des Auslegers ist hoch, wohingegen alle weiteren Komponenten des Krans weniger fein diskretisiert sind. Vergleicht man die Modellierung der Zugbandsysteme beider Krane, erkennt man, dass bei der CT4-Struktur sehr grob unterteilt wurde, im Gegensatz zur CTB-Struktur. Das beruht auf den Erkenntnissen, welche aus der zunächst stattgefundenen Modellierung des Containerkrans am Burchardkai stammen. Die Untersuchungen (Abschnitt 2.4) werden zeigen, dass eine weniger detaillierte Abbildung der Zugbänder keine negativen Auswirkungen auf die Ergebnisse hat. Des Weiteren erkennt man die für beide Modelle ähnliche Modellierung des Containerkranfahrwerks, welches den Kran auf den Kranbahnen parallel zu Kaikante positioniert. Das Kranfahrwerk ist für beide Kranbahnen (WS und LS) als zwei bzw. drei Stützen ausgeführt, mit orthogonal angeordneten Anschlüssen für die Einspannung in Festlagern. Der Diskretisierungsgrad ist entsprechend der restlichen Struktur gewählt.

2.3 Verifikation

Die Verifikation der Containerkranmodelle ist maßgebend für die umfangreiche Analyse der Kranstruktur. Nur eine zutreffende Abbildung der mechanischen Eigenschaften der Struktur wird realistische Schlüsse über die dynamischen Verformungen der Krane zulassen. Für Containerkrane eignet sich sowohl die Verifikation mittels Eigenschwingungen und Schwingungsformen, als auch der theoretische Ansatz einer bewegten Last auf einem Balken. Letzterer konzentriert die Untersuchungen auf den wasserseitigen Ausleger des Containerkrans, welcher für den Containerumschlag von besonderer Bedeutung ist. Beide Verfahren werden in diesem Abschnitt vorgestellt und angewendet.

2.3.1 Modalanalyse

Eine Modalanalyse liefert die Eigenschwingungen und Schwingungsformen von dynamischen Systemen und charakterisiert das Bewegungsverhalten des Systems. Für die Berechnung werden keine äußeren Anregungen durch aufgebrachte Kräfte berücksichtigt. Lediglich Lagerungen (beschränkte Freiheitsgrade) beeinflussen die Systemdynamik. Die Amplitude der Schwingungsform, mathematisch dargestellt durch den Eigenvektor, nimmt üblicherweise in schwingungsfähigen Systemen, so auch für Krane, mit zunehmender Eigenfrequenz ab. Der Anteil der hohen Eigenfrequenzen am Gesamtverhalten ist folglich gering.

Zur Bestimmung der Eigenfrequenzen und -formen wird das System (2.1) zunächst in die Zustandsraumdarstellung ($\mathbf{x}$) überführt:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{y}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^f, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n=2f}. \quad (2.14)$$

Die Lagegrößen y_j ($j = 1, \dots, f$) werden dafür zusammen mit den zeitlichen Ableitungen $\dot{y}_j$ in den Zustandsvektor $\mathbf{x}$ integriert. Wie bereits erwähnt, finden äußere Kräfte keine Berücksichtigung bei der Modalanalyse ($\mathbf{R} = \mathbf{0}$), womit das System durch

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x} \quad (2.15)$$

wiedergegeben wird. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von (2.15) ergeben gleichzeitig die Eigenwerte (λ_j) der Systemmatrix $\mathbf{A}$

$$p(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}), \quad (2.16)$$

$$= \frac{1}{\det \mathbf{M}} \det(\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{D}\lambda + \mathbf{K}). \quad (2.17)$$

Das homogene schwach gedämpfte mechanische System (2.15) hat Eigenwerte der Form

$$\lambda_k = \delta_j \pm i\omega_j, \quad \delta_j < 0, \quad \omega_j \neq 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.18)$$

mit einem negativen Realteil und einem Imaginärteil ungleich Null. Containerkrane sind im Allgemeinen strukturell sehr schwach gedämpft, wodurch eine Vernachlässigung der Dämpfung im Rahmen der Modalanalyse zulässig erscheint. Generell ist bekannt, dass die Materialdämpfung keinen wesentlichen Einfluss auf die charakteristischen Bewegungen der Struktur hat. Zusätzliche Dämpfungselemente (wie z. B. Tilger) sind auf den untersuchten Containerkranen nicht im Einsatz. Das konservative mechanische System ($\mathbf{D} = \mathbf{0}$) wird durch rein imaginäre Eigenwerte charakterisiert:

$$\lambda_k = \pm i\omega_j, \quad \omega_j > 0. \quad (2.19)$$

Der Imaginärteil ist positiv und die Frequenz der Eigenschwingung lässt sich ableiten durch

$$f_j = \frac{\omega_j}{2\pi}. \quad (2.20)$$

Mithilfe der Eigenwerte können die Eigenvektoren $\tilde{\mathbf{x}}_j = [\tilde{\mathbf{y}}_j, \lambda_j \tilde{\mathbf{y}}_j]^T$ aus der charakteristischen Gleichung ($\mathbf{D} \neq 0$)

$$0 = (\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}) \tilde{\mathbf{x}}, \quad (2.21)$$

$$= \frac{1}{\mathbf{M}} (\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{D}\lambda + \mathbf{K}) \tilde{\mathbf{y}} \quad (2.22)$$

ermittelt werden. Beschreibt die Eigenschwingung das zeitliche charakteristische Verhalten, so vermittelt der Eigenvektor die örtliche Verschiebung der mechanischen Struktur.

Die niedrigsten drei Eigenfrequenzen der Containerkrane am CTB und CT4 sind exemplarisch in der Tab. 2.2 dargestellt, zusammen mit den zugehörigen *verallgemeinerten* Massen (m_j). Diese beschreiben die bewegte Masse der zugehörigen Eigenform und bestimmt sich mittels

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{Y} = \text{diag}\{m_j\}, \quad \mathbf{Y} = [\tilde{\mathbf{y}}_1 \quad \tilde{\mathbf{y}}_2 \quad \dots \quad \tilde{\mathbf{y}}_{f-1} \quad \tilde{\mathbf{y}}_f]. \quad (2.23)$$

Aufgebrachte äußere Lasten führen zu Verformungen und Bewegungen der Struktur, die näherungsweise als Überlagerung der niedrigen Eigenformen dargestellt werden können. Die Betrachtung der niedrigen Eigenschwingungen mit den zugehörigen Schwingungsformen ist folglich maßgebend für die Analyse der Strukturdynamik.

Tabelle 2.2: Eigenfrequenzen und verallgemeinerte Massen der Containerkrane

CTB	f [Hz]	m_j [10^3kg]	CT4	f [Hz]	m_j [10^3kg]
1	0,33	92,194	1	0,33	13,949
2	0,37	211,310	2	0,45	18,810
3	0,50	482,090	3	0,81	54,233

Die erste und zweite Schwingungsform beider Krane (Zeile 1 und 2 in Tab. 2.2, Bild 2.4) charakterisiert die Strukturbewegungen in y -Richtung, entlang der Kaikante. Anregungen in dieser Verformungsrichtung resultieren vornehmlich aus dem Positioniervorgang des Containerkrans auf den Kranbahnen.



Bild 2.4: Eigenformen der Containerkrane in Richtung der Kranbahn

Verformungen der Krane hinsichtlich der dritten Schwingungsform verlaufen entlang der x -Achse, in Richtung des Kranauslegers (Zeile 3 in Tab. 2.2, Bild 2.5). Angeregt durch bspw. die Beschleunigung der Laufkatze neigt sich die Struktur abwechselnd zum Wasser hin und wieder weg, entsprechend der Schwingungsdauer, welche aus der Eigenfrequenz f_j resultiert. Diese Schwingungsform wird insbesondere durch den Kranführer wahrgenommen, der sich im Führerhaus auf der Laufkatze befindet. In Extremfällen führt das zu einem unangenehmen Empfinden des Kranführers und zur Einschränkung der Arbeitsfähigkeit.

Ein Abgleich der ermittelten Eigenschwingungen und Schwingungsformen aus ABAQUS fand mit Ergebnissen aus statischen Modellen in KRASTA⁴ statt. Die statischen Kranmodelle sind vom Kranhersteller KOCKS KRANE (CTB) und vom Containerterminalbetreiber EUROGATE⁵ (CT4) zur Verfügung gestellt worden. Die Abweichungen der Eigenschwingungen der Krane in KRASTA und ABAQUS (Tab. 2.2) sind kleiner als 2% und damit akzeptabel.

⁴KRASTA ist eine Modellierungs- und Berechnungsumgebung zur statischen Analyse von Kranen.

⁵EUROGATE Container Terminal Bremerhaven GmbH

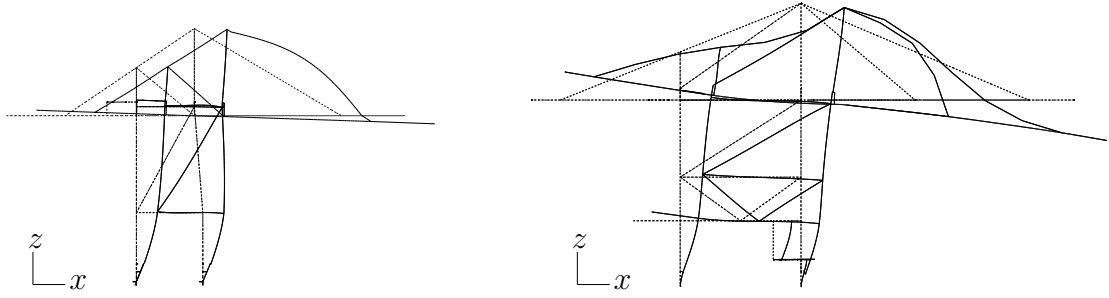


Bild 2.5: Eigenformen der Containerkrane in Richtung des Kranauslegers

2.3.2 Bewegte Last

Eine weitere Möglichkeit zur Verifikation der Modellierung in Abschnitt 2.2 stellt der Abgleich mit einem theoretischen Modell dar. Das Gesamtsystem wird auf den Auslegerbalken mit zulässigen Randbedingungen reduziert, welcher von der Laufkatze als zeitveränderliche bewegte Last traversiert wird. Das Modell wird durch eine partielle Differentialgleichung wiedergegeben und mit ausgewählten Anfangs- sowie Randbedingungen gelöst. Bereits 1849 formulierte Willis [94] eine analytische Lösung für eine große Last entlang eines dünnen Balkens (Güterzug auf Brücke). Timoshenko [91] widersprach der Annahme, dass die Gewichtskraft des Balkens viel kleiner als die bewegte Last ist und löste die neue Problemformulierung. Im Jahr 1972 veröffentlichte Frýba [23] eine Sammlung von analytischen Lösungen für unterschiedlich gelagerte Balken mit traversierenden Lasten (konstant, harmonisch, kontinuierlich). Das klassische Zug-Brücke-Beispiel wurde von Popp [75] um die Dynamik von Fahrweg-Strukturen im Hinblick auf die Magnetschwebbahn ergänzt. Bis dahin lieferte die analytische Lösung die Strukturbewegungen bezüglich der wandernden Last. Als Alternative wandte Olsson [71] die Methode der finiten Elemente auf die Strukturmodellierung des Balkens an. Die Lösung konnte fortan, unterstützt durch automatisierte Lösungsroutinen, numerisch ermittelt werden.

Im Rahmen der Untersuchungen am Containerkran wird ein bewegte-Last-Modell für den Kranausleger und die daran aufgehängte Laufkatze erstellt. Die Bewegungen der Struktur im Bereich des Auslegers sind charakteristisch für derartige Krane und beeinflussen den Kranführer sowie den Umschlagbetrieb gleichermaßen. Eine partielle Differentialgleichung für die dynamische transversale Balkenverformung (z) für eine ortsveränderliche (x) Last (F) wird in [23] mit

$$EI \frac{\partial^4 z(x,t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial t^2} + 2\mu\omega_b \frac{\partial z(x,t)}{\partial t} = \delta(x - vt)F \quad (2.24)$$

und den zugehörigen Rand- sowie Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} z(0,t) = z(L,t) = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=0,L} &= 0, \\ z(x,0) = \left. \frac{\partial z(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} &= 0 \end{aligned}$$

angegeben. Die Konstanten repräsentieren den Elastizitätsmodul E , das Flächenträgheitsmoment I , die Massenverteilung μ und die Kreisfrequenz ω_b des Balkens. Die kon-

zentrierte Last F wird mittels Dirac-Funktion δ und in Abhängigkeit der translatorischen Geschwindigkeit v aufgeprägt. Für eine analytische Lösung der partiellen Differentialgleichung (2.24) ist auf [23] verwiesen. Die Annahmen für die analytische, wie auch für die numerische Formulierung sind:

- die Balkenstruktur hat keine Einwirkung auf die Lastbewegung,
- Last und Balken sind zu jedem Zeitpunkt fest verbunden,
- es liegt eine zeit- und betragsveränderliche wandernde Last vor und
- die Trajektorie der Last ist bekannt.

Im Folgenden wird der numerische Ansatz basierend auf der Finite-Elemente-Formulierung herangezogen (vgl. Abschnitt 2.2.1). Neben Olsson [71] verwendet auch Wu [95, 96] diese Methode zur Untersuchung eines belasteten Balkens. Wu spezifiziert die Annahmen weiter: die zeit- und betragsveränderliche Last ist immer exakt einem finiten Element zugeordnet. Die Zuordnung variiert mit der Zeit und führt zu zeitvarianten Systemmatrizen.

Das Modell der bewegten Last auf dem Kranausleger eines Containerkrans ist in Bild 2.6 skizziert. Ein Fest- sowie ein verschiebbares Lager bilden die Randbedingungen für die Verknüpfung des Auslegers mit der Kranstruktur. Das linke Festlager spiegelt die Verbindung zum Kranportal wider, wohingegen das rechte Loslager die Verbindung mit dem Zugband gewährleistet. Das Pendel symbolisiert die schwingende angehängte Last, welche über die Laufkatze mit dem Balken verknüpft ist. Eine Geschwindigkeit v verändert kontinuierlich die Position der Last (linearer Verlauf: $x_m = v t$).

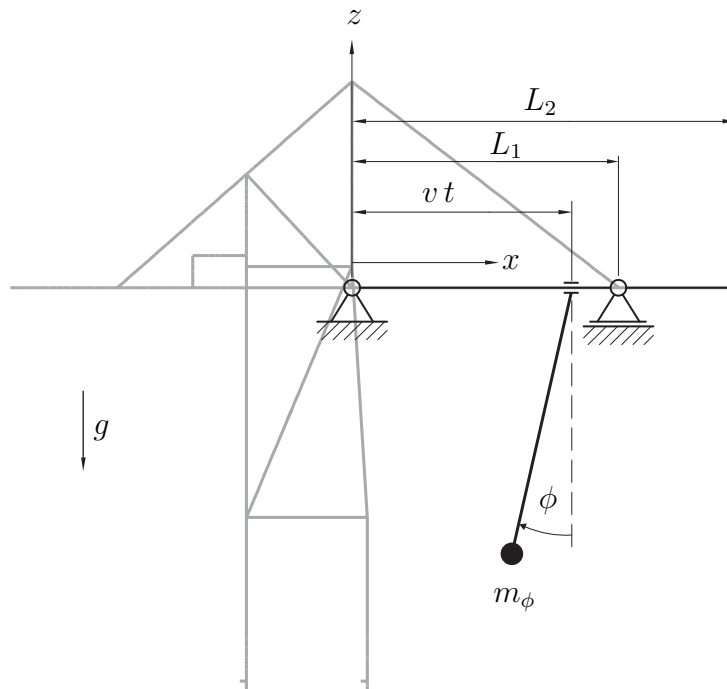


Bild 2.6: Bewegte Last am Containerkranausleger

Für die weitere Untersuchung wird die schwingende Last m_ϕ entsprechend der Auslenkung ϕ mit der Masse der Laufkatze m_L zur äquivalenten bewegten konzentrierten Masse m_k zusammengefasst:

$$m_k = m_L + m_\phi \cos^2(\phi), \quad (2.25)$$

$$\phi = \phi_A \cos(\omega t). \quad (2.26)$$

Eine vorgegebene maximale Auslenkung ϕ_A und die natürliche Pendelfrequenz $\omega = \sqrt{g/L_p}$ bestimmen den Verlauf der schwingenden Last. Es wird angenommen, dass $\phi_A < 20^\circ$, wodurch Beschleunigungsanteile, die vom Drehpunkt weg orientiert sind (Zentrifugalkraft), vernachlässigt werden können. Gleichzeitig wirkt die Trägheit der Last in transversaler und longitudinaler Richtung auf die Verbindung von Last und Balken. Unter den getroffenen Restriktionen wird der Balken mit finiten Elementen diskretisiert, wobei einem Element die äquivalente Last zugeordnet wird. Bild 2.7 veranschaulicht den diskreten Containerkran ausleger, der mit finiten Elementen der Länge l modelliert wird.

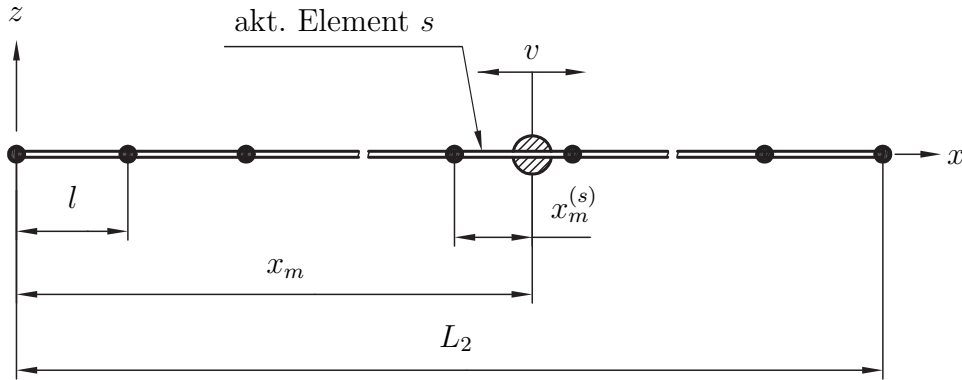
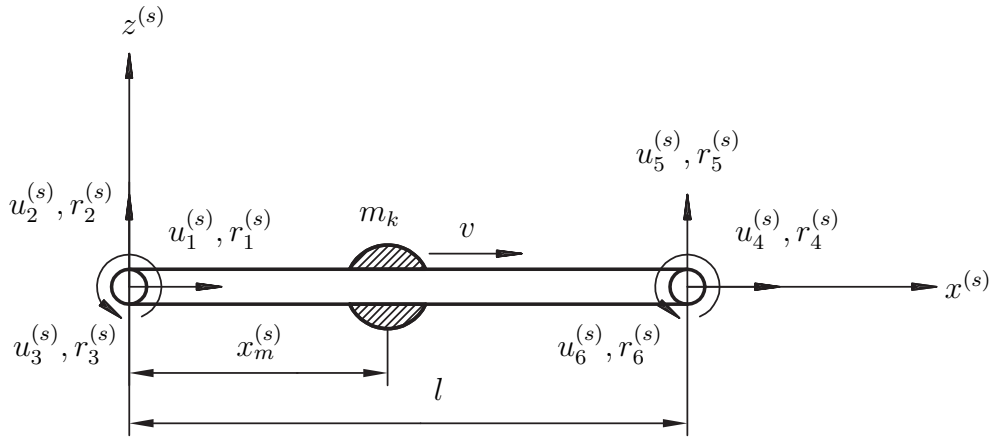


Bild 2.7: Diskreter Containerkran ausleger mit konzentrierter Last

Die aktuelle Position der äquivalenten Last m_k ist mit x_m gegeben. Der Bereich der Last ist in Bild 2.8 vergrößert dargestellt. Im lokalen Koordinatensystem $(x^{(s)}, z^{(s)})$ des Elements s der ebenen Formulierung hat jedes Element zwei Knoten, welchen wiederum zwei translatorische und eine rotatorische Verschiebungsgrößen zugeordnet sind (lokale Kräfte $r_i^{(s)}$). Ein Element hat sechs lokale Freiheitsgrade.

Für die Strukturbewegungen zwischen zwei benachbarten Knoten werden Interpolationsfunktionen herangezogen, wie z. B. in [14] angegeben. Lineare Funktionen werden für die Verschiebungsgrößen entlang des Balkens verwendet (Index 1 und 4), wohingegen hermitesche Polynome für die verbleibenden Verschiebungsgrößen (Index 2, 3, 5 und 6) Anwendung finden. Die relative axiale Koordinate ζ und die Ansatzfunktionen werden wie folgt formuliert:

$$\begin{aligned} \zeta(t) &= \frac{x_m^{(s)}(t)}{l}, \\ N_1 &= 1 - \zeta(t), \\ N_2 &= 1 - 3\zeta^2(t) + 2\zeta^3(t), \\ N_3 &= [\zeta(t) - 2\zeta^2(t) + \zeta^3(t)] l, \\ N_4 &= \zeta(t), \\ N_5 &= 3\zeta^2(t) - 2\zeta^3(t), \\ N_6 &= [-\zeta^2(t) + \zeta^3(t)] l. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Bild 2.8: Aktuelles Balkenelement s mit konzentrierter Last

Die Matrizen des aktuellen finiten Elements für die Masse $\mathbf{m}$, Dämpfung $\mathbf{d}$ und Steifigkeit $\mathbf{k}$ können mit (2.27) und

$$N'_i = \frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{1}{l} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta}, \quad (2.28)$$

$$N''_i = \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} = \frac{\partial N'_i}{\partial x} = \frac{1}{l} \frac{\partial N'_i}{\partial \zeta} \quad (2.29)$$

aufgestellt werden:

$$\mathbf{m} = m_k \begin{bmatrix} N_1^2 & 0 & 0 & N_1 N_4 & 0 & 0 \\ & N_2^2 & N_2 N_3 & 0 & N_2 N_5 & N_2 N_6 \\ & & N_3^2 & 0 & N_3 N_5 & N_3 N_6 \\ & & & N_4^2 & 0 & 0 \\ & & & & N_5^2 & N_5 N_6 \\ sym & & & & & N_6^2 \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

$$\mathbf{d} = 2m_k v \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 N'_2 & N_2 N'_3 & 0 & N_2 N'_5 & N_2 N'_6 \\ 0 & N_3 N'_2 & N_3 N'_3 & 0 & N_3 N'_5 & N_3 N'_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_5 N'_2 & N_5 N'_3 & 0 & N_5 N'_5 & N_5 N'_6 \\ 0 & N_6 N'_2 & N_6 N'_3 & 0 & N_6 N'_5 & N_6 N'_6 \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

$$\mathbf{k} = m_k v^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 N''_2 & N_2 N''_3 & 0 & N_2 N''_5 & N_2 N''_6 \\ 0 & N_3 N''_2 & N_3 N''_3 & 0 & N_3 N''_5 & N_3 N''_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_5 N''_2 & N_5 N''_3 & 0 & N_5 N''_5 & N_5 N''_6 \\ 0 & N_6 N''_2 & N_6 N''_3 & 0 & N_6 N''_5 & N_6 N''_6 \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

Die Lösung des lokalen Gleichungssystems

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{y}}^{(s)} + \mathbf{d} \dot{\mathbf{y}}^{(s)} + \mathbf{k} \mathbf{y}^{(s)} = \mathbf{r}, \quad (2.33)$$

$$\mathbf{r} = [r_1^{(s)}, r_2^{(s)}, r_3^{(s)}, r_4^{(s)}, r_5^{(s)}, r_6^{(s)}]^T \quad (2.34)$$

ergibt die Elementverschiebungen $\mathbf{y}^{(s)} = [u_1^{(s)}, u_2^{(s)}, u_3^{(s)}, u_4^{(s)}, u_5^{(s)}, u_6^{(s)}]^T$. Die Kräfte, durch die bewegte Last am aktuellen Element aufgebracht, werden direkt aus (2.25) und den trigonometrischen Beziehungen hergeleitet:

$$\begin{aligned} r_1^{(s)} &= -N_1 m_\phi g \sin(\phi) \cos(\phi), \\ r_2^{(s)} &= -N_2 m_k g, \\ r_3^{(s)} &= -N_3 m_k g, \\ r_4^{(s)} &= -N_4 m_\phi g \sin(\phi) \cos(\phi), \\ r_5^{(s)} &= -N_5 m_k g, \\ r_6^{(s)} &= -N_6 m_k g. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Damit sind alle Information zum Einfluss der bewegten Last auf die angrenzenden Knoten des aktuellen Elements s in (2.33) zusammengefasst. Der globale Verschiebungsvektor $\mathbf{y}$ lautet:

$$\mathbf{y} = [u_1, u_2, \dots, u_{f-1}, u_f]^T. \quad (2.36)$$

Weiterhin werden die globalen Systemmatrizen des unbelasteten Balkens $\overline{\mathbf{M}}$ und $\overline{\mathbf{K}}$ z. B. mit der Methode nach Bathe ([3], vgl. Unterabschnitt 2.2.1) zunächst für den gesamten Kranausleger ohne äquivalente Last aufgestellt. Die lokalen Elementmatrizen $(\mathbf{m}, \mathbf{k})$ werden in die globalen Matrizen an der Stelle des aktuellen Elements s integriert. Dabei gilt es zu beachten, dass die lokalen Eigenschaften (Zeilen- i_s und Spaltenindex j_s) in die zugehörigen Zeilen i und Spalten j der Gesamtmatrizen eingebracht werden, entsprechend der Freiheitsgrade des aktuellen Elements s auf dem sich die äquivalente Last befindet ($i_s = i - 3(s - 1)$, j_s analog):

$$\mathbf{M}_{i,j} = \begin{cases} \overline{\mathbf{M}}_{i,j} + \mathbf{m}_{i_s,j_s} & : 3(s-1) < (i,j) \leq 3(s+1), \\ \overline{\mathbf{M}}_{i,j} & : \text{sonst}, \end{cases} \quad (2.37)$$

$$\mathbf{K}_{i,j} = \begin{cases} \overline{\mathbf{K}}_{i,j} + \mathbf{k}_{i_s,j_s} & : 3(s-1) < (i,j) \leq 3(s+1), \\ \overline{\mathbf{K}}_{i,j} & : \text{sonst}, \end{cases} \quad (2.38)$$

$(i,j) = 1, \dots, f.$

Für Einzelheiten zur Umsetzung dieser Formulierung wird z. B. auf [28] verwiesen. Die globalen Dämpfungseigenschaften $\overline{\mathbf{D}}$ (2.8) werden aus den Anteilen der nieder- und hochfrequenten RAYLEIGH-Dämpfung gewonnen. Analog zu (2.37) und (2.38) wird

$$\mathbf{D}_{i,j} = \begin{cases} \overline{\mathbf{D}}_{i,j} + \mathbf{d}_{i_s,j_s} & : 3(s-1) < (i,j) \leq 3(s+1), \\ \overline{\mathbf{D}}_{i,j} & : \text{sonst}, \end{cases} \quad (2.39)$$

$(i,j) = 1, \dots, f,$

bestimmt. Der globale Lastvektor $\mathbf{R}$ enthält neben den lokalen Kräften (2.35) in den Einträgen des belasteten Elements keine weiteren, von Null verschiedenen Werte:

$$\mathbf{R}_i = \begin{cases} \overline{\mathbf{R}}_i + \mathbf{r}_{i_s} & : 3(s-1) < i \leq 3(s+1), \\ \overline{\mathbf{R}}_i & : \text{sonst}, \end{cases} \quad (2.40)$$

mit $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{0}^{f \times 1}, \quad i = 1, \dots, f.$

Im Anschluss werden die Zwangsbedingungen aufgebracht, welche aus dem Fest- und Loslager resultieren. Die gesperrten Freiheitsgrade werden mitsamt den zugehörigen Matrixeinträgen aus dem globalen Gleichungssystem gestrichen.

Damit stehen alle notwendigen Informationen für die Verformungsanalyse des Auslegers mittels bewegter Last zur Verfügung. Das Gleichungssystem (2.1) kann z. B. mit der direkten Methode nach Newmark gelöst werden. Die Implementierung der Lösungsroutine muss jedoch in der Lage sein, die zeitvarianten Systemmatrizen vor jedem iterativen Aufruf zu aktualisieren, entsprechend der aktuellen Position der bewegten Last. Die Lösung entspricht den longitudinalen (Balkenlängsrichtung), transversalen (orthogonal zur Balkenlängsrichtung) und Rotationsfreiheitsgraden der einzelnen Knoten entlang des Containerkranauslegers. Für die Verformungen zwischen den Knoten werden, wie bereits erläutert, die Interpolationsfunktionen (2.27) verwendet. Eine Implementierung des Verifikationsmodells mit bewegter Last ist in MATLAB vorgenommen und durch die Ergebnisse in [13] sowie [96] bestätigt worden.

Zunächst soll das Verformungsverhalten des Containerkranauslegers hinsichtlich einer traversierenden Laufkatze mit angehängter Last mit dem bewegte-Last-Modell verglichen werden. Dafür wird der Containerkran am Burchardkai in Hamburg herangezogen (Bild 2.2). Es werden identische Randbedingungen am Kran aufgebracht wie für das Modell der bewegten Last, vgl. Bild 2.6. Die physikalischen und geometrischen Eigenschaften werden ebenfalls vom Kranmodell auf das Verifikationsmodell übertragen. Alle Parameter für die numerische Untersuchung sind in Tabelle A.1 aufgelistet. Beide Systemformulierungen werden unabhängig voneinander gelöst. Das Modell der bewegten Last wird mithilfe von MATLAB und der modifizierte CTB-Containerkran in ABAQUS untersucht.

Ein Vergleich der Ergebnisse der transversalen Balkenverformung in der Mitte zwischen den Lagerungen ist in Bild 2.9 dargestellt. Dabei wird die Laufkatze, respektive die bewegte Last, vom Festlager startend auf die Geschwindigkeit v beschleunigt (Beschleunigung a), entlang des Auslegers verfahren und zum Zeitpunkt $t = 20,5\text{s}$ am rechten losen Ende nach einem Bremsvorgang ($-a$) gestoppt. Die Last schwingt währenddessen gemäß (2.25) unterhalb des Balkens. Zu Beginn ist die Durchbiegung der dargestellten Balkenlängsposition $z(x = L_1/2, t = 0)$ lediglich durch die statische Verformung, resultierend aus den Gewichtskräften, gekennzeichnet. Mit zunehmender Entfernung der Last vom Startpunkt nimmt die negative Verformung zu, bis diese bei $t = 7,5\text{s}$ das Minimum erreicht. Zur Zeit $t \approx 13,3\text{s}$ passiert die Laufkatze das rechte Loslager und die transversale Koordinate ist gleich Null. Am Ende des Positioniervorgangs nimmt die Verformung des Balkenmittelpunkts zwischen den Lagern zu, da die Last rechts vom Loslager ein Biegemoment auf alle links davon angeordneten Elemente ausübt. Vergleichend kann festgestellt werden, dass beide Modelle annähernd identische Ergebnisse liefern. Das bewegte-Last-Modell wird deshalb nachfolgend für die idealisierte Untersuchung des Containerkranauslegers während des Containerumschlags verwendet, da der numerische Aufwand für das Modell deutlich geringer ist. Die übereinstimmenden Resultate beider Modelle bestätigen die Idealisierung des Auslegers durch das bewegte-Last-Modell und verifizieren die Modellierung in Abschnitt 2.2.

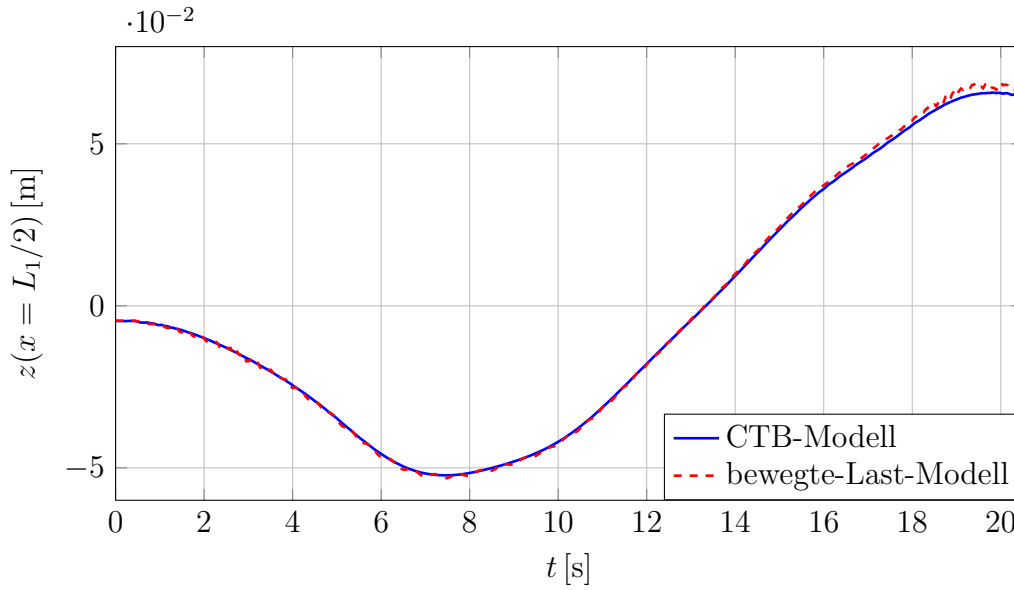


Bild 2.9: Transversale Verformung des Kranauslegerpunkts $x = L_1/2$ bei überfahrender Last

2.4 Strukturanalyse

Zunächst wird in diesem Abschnitt auf die Lösungsmethoden für die Ermittlung der Strukturverformungen eingegangen. Im Anschluss werden die Resultate der Strukturantwort bzgl. des Referenz-Lastumschlagzyklus vorgestellt und bewertet, gefolgt vom Lastabtrag des Krans auf die Kranbahn, welcher unter dem Begriff der Kaikollektive aufgeführt ist. Kaikollektive sind gleichbedeutend mit den Reaktionskräften in der Kaianlage, hervorgerufen durch die Containerkrane. Die Ergebnisse kommen für die Bemessung der Kaianlage zum Einsatz und sind hier zunächst nur angegeben, aber nicht ausgewertet. Eine Beurteilung der auftretenden Reaktionskräfte kann anhand der Empfehlungen des Arbeitsausschusses für „Ufereinfassungen“ Häfen und Wasserstraßen [21] vorgenommen werden.

2.4.1 Lösungsmethoden

Für das vollständige Verständnis der Strukturanalyse wird das verwendete Integrationschema zum Lösen der Systemgleichung kurz vorgestellt. Die Ausführungen sind an [3] angelehnt und können dort, wie auch bei Voß [92], detailliert nachgelesen werden.

Die hergeleitete Bewegungsgleichung (2.1)

$$\underbrace{M\ddot{y}}_{F_I} + \underbrace{D\dot{y}}_{F_D} + \underbrace{Ky}_{F_E} = R.$$

zur Beschreibung der Systemdynamik wird folglich gelöst. Sie stellt das Gleichgewicht von Trägheitskräften F_I , Dämpfungskräften F_D , elastischen Kräften F_E und angreifenden Kräften R dar. In der ursprünglichen Darstellung (2.1) liegen die einzelnen Kräfte ohne Darstellung der Zeitabhängigkeit vor. Allgemein betrachtet sind die jeweiligen Komponenten jedoch Veränderliche der Zeit und werden zum Zeitpunkt t ausgewertet. Im statischen

Fall verschwinden die geschwindigkeits- und beschleunigungsabhängigen Terme und es bleibt:

$$\mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{R}. \quad (2.41)$$

Die in (2.41) beschriebenen Gleichgewichtsbedingungen kommen vor allem bei statischen Belastungsnachweisen für Krane zum Einsatz. Da Strukturschwingungen jedoch in der Vergangenheit vermehrt zu Problemen beim Containerumschlag, wie auch bei der Langzeitfestigkeit von Containerkranen geführt haben, ist eine Untersuchung der Struktur unter Berücksichtigung der Trägheits- und Dämpfungskräfte unerlässlich. Generell bieten sich dafür Verfahren mit Modenüberlagerung und die direkte Integration der Bewegungsgleichungen an. *Direkt* weist darauf hin, dass für die Integration und Lösung des Problems keine Transformation der Gleichungen vorgenommen wird. Es wird direkt nach den Knotenfreiheitsgraden $\mathbf{y}$ gelöst. Liegt ein Gleichungssystem in der vorgestellten Form vor, wird üblicherweise ein Standardverfahren zur Lösung verwendet ([15]). Bei Systemen mit Matrizen hoher Bandbreite können angepasste Methoden verwendet werden, welche die Topologie der Matrizen ausnutzen, um eine effizientere Lösung zu erhalten. Dieses Verfahren wird als direkte Integration bezeichnet, welches weiterhin in *explizit* und *implizit* differenziert wird. Explizit gibt an, dass eine Annäherung der Lösung vorgenommen wird, die u. U. zu Problemen der Lösungsstabilität führt. Ein implizites Verfahren löst die Gleichgewichtsbedingungen eindeutig und findet deshalb Anwendung bei der Strukturuntersuchung an Containerkranen. Der erhöhte Aufwand der impliziten Rechnung wird durch die geringe auszuwertende Zeitspanne der Simulationen sowie durch eine geringe Bandbreite der Systemmatrizen (Modellierung mit Balkenelementen, vgl. Unterabschnitt 2.2.2) kompensiert.

Das NEWMARKSche Integrationsschema ist eine implizite Methode, die in ABAQUS zur dynamischen Strukturanalyse bereitsteht, [69]. Die Strukturanalyse der Containerkrane durch Modenüberlagerung ist ebenso möglich. Weiterhin besteht die Möglichkeit, das Gleichungssystem (2.1) in die Zustandsraumdarstellung zu überführen, wie in (2.15) angegeben. Diese Transformation bewirkt zunächst eine Verdopplung der Systemordnung von $\mathcal{O}(f)$ zu $\mathcal{O}(2f = n)$. Gleichzeitig findet jedoch ein Übergang vom Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung auf ein System erster Ordnung statt. Dieses wiederum muss nur noch einmal integriert werden, um die Lösung der Zustandsvariablen zu erhalten. Der Algorithmus von Runge und Kutta [20] oder auch das BDF-Verfahren⁶ [83] sind mögliche Lösungsmethoden. Im Unterabschnitt 2.3.2 ist das Modell der bewegten Last zur Verifikation der Modellierung beschrieben, welches in MATLAB als Differentialgleichungssystem erster Ordnung implementiert ist. Es wird durch das BDF-Verfahren ausgewertet, welches den expliziten direkten Integrationsverfahren zuzuordnen ist.

2.4.2 Ergebnisse

Die Ergebnisse der Strukturanalyse stellen die Verformung der Krane während des Containerumschlags dar. Zunächst werden die Finite-Elemente-Modelle der CTB- und CT4-Krane mittels eines Referenz-Umschlagzyklus analysiert und bewertet, gefolgt von Resultaten des bewegte-Last-Modells für unterschiedliche Variationen der Lastparameter.

⁶BDF steht im Englischen für *backward differentiation formulas*.

Containerkrane

Die Containerkrane werden nach dynamischen Gesichtspunkten analysiert. Ein Referenz-Lastumschlagzyklus repräsentiert die Anregung der Struktur während des Containerumschlags. Für zutreffende Aussagen ist ein realitätsnaher Zyklus mit realen kinetischen Randbedingungen zu verwenden. Die implementierte orts- und zeitveränderliche Last spiegelt einen gemittelten Umschlagprozess am modernen Containerkran wider. Der Ablauf gliedert sich wie folgt (der Index von Zeitpunkt t_i korrespondiert mit dem Index der dargestellten Position P_i in Bild 2.10):

- $t < t_0$: vor Beginn des Lastumschlags,
- $t_0 \leq t < t_1$: Hubwerk hebt das Lastaufnahmemittel (Spreader) von Startposition P_0 mittig im Portal bis P_1 an (halbe Hubhöhe),
- $t_1 \leq t < t_2$: Laufkatze verfährt bis zur halben wasserseitigen Ausladung P_2 ,
- $t_2 \leq t < t_3$: Spreader wird bis zum Container (P_3) herabgesetzt,
- $t_3 \leq t < t_4$: Anheben des Containers mit Spreader bis P_4 ,
- $t_4 \leq t < t_5$: Container wird durch Laufkatze bis P_5 transportiert,
- $t_5 \leq t \leq t_6$: Absenken des Containers bis zur Zielposition P_6 .

Bild 2.10 ist eine beispielhafte Darstellung des Umschlagzyklus am CT4-Containerkran, welche qualitativ auf den CTB-Kran übertragbar ist.

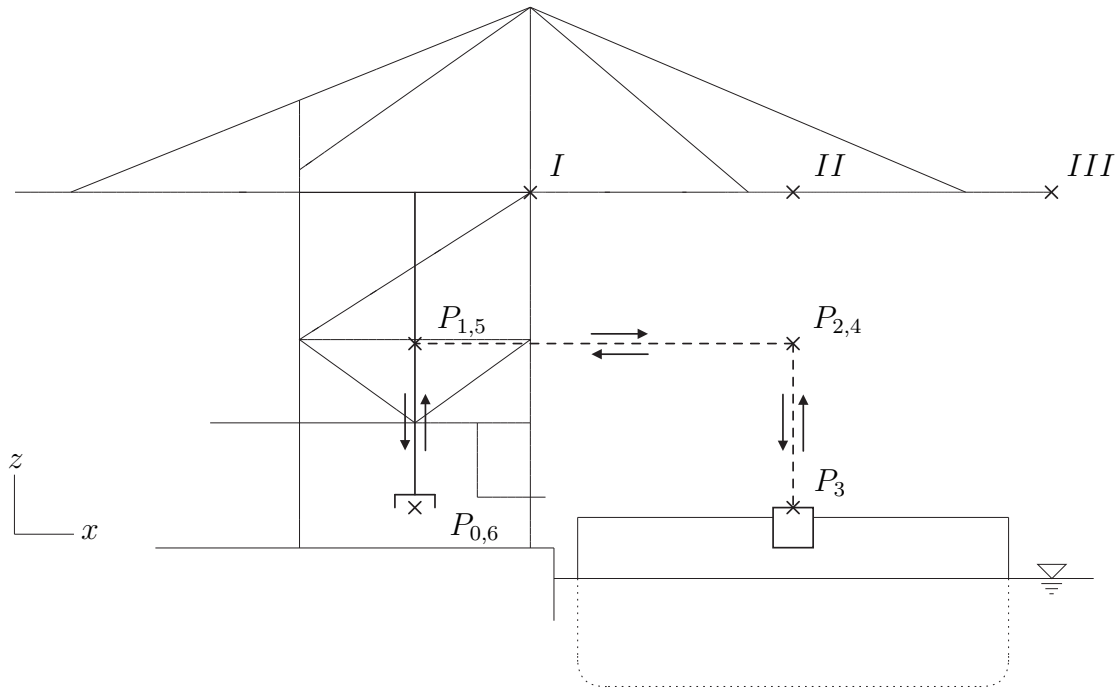


Bild 2.10: Referenz-Umschlagzyklus

Die Anregung der Kranstruktur durch die Laufkatze und angehängte Last stellt die äußere Kraft dar. Am finiten Element s , auf dem sich die Laufkatze aktuell befindet, wird die Kraft $\mathbf{R}^{(s)}$ eingeleitet. Der Kraftvektor wird in die beteiligten Raumrichtungen aufgeteilt. Die Komponente in y -Richtung hat keinen Anteil an der Anregung, da für diese Untersuchung zunächst nur Kräfte in der Ebene aus Kranausleger und Erdbeschleunigungsvektor

berücksichtigt werden (im Unterabschnitt 2.4.3 werden zudem Lasten in y -Raumrichtung aufgebracht):

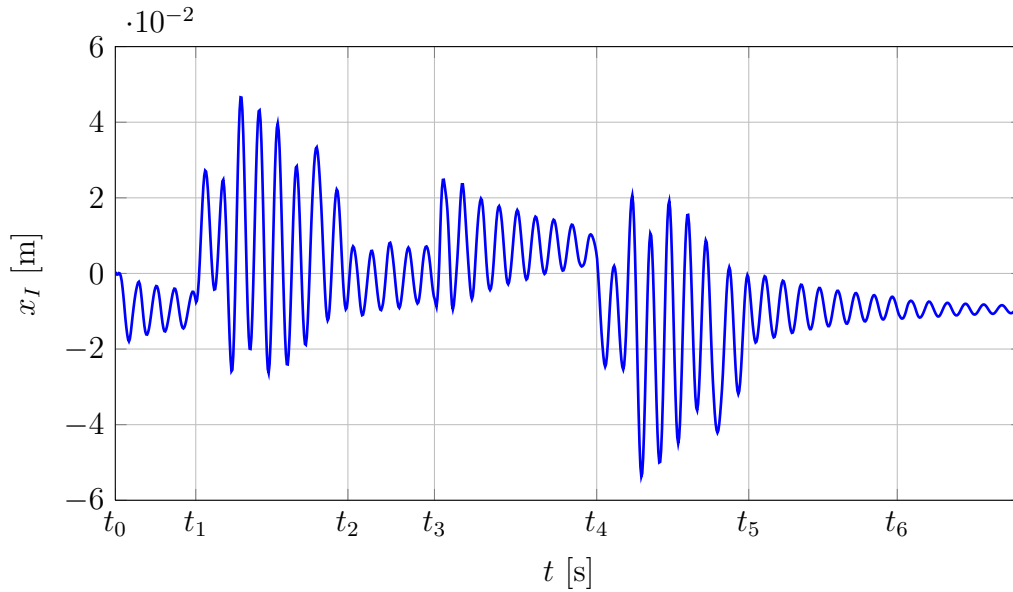
$$\mathbf{R}^{(s)} = [R_x^{(s)} R_y^{(s)} R_z^{(s)}]^T, \quad (2.42)$$

$$= \begin{cases} \begin{bmatrix} m_L (\mu_R g + \ddot{x}_m) \\ 0 \\ -m_L g \end{bmatrix} & : t_0 \leq t < t_3, \\ \begin{bmatrix} m_L (\mu_R g + \ddot{x}_m) - m_\phi g \sin(\phi) \cos(\phi) \\ 0 \\ -[m_L + m_\phi \cos^2(\phi)] g \end{bmatrix} & : t_3 \leq t \leq t_6. \end{cases} \quad (2.43)$$

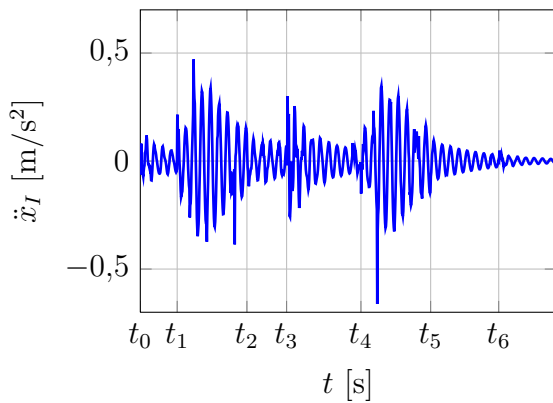
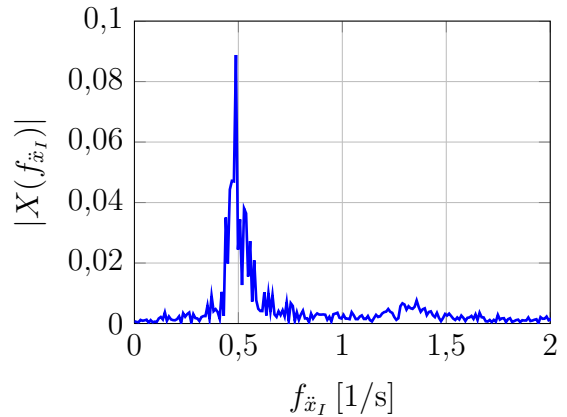
Gleichung (2.43) verdeutlicht, dass für alle Zeiten kleiner als t_3 nur die Laufkatze auf die Struktur wirkt. Beim Positionieren des Lastaufnahmemittels vom Startpunkt P_0 zum Aufnahmepunkt des Containers P_3 wird der Spreader vernachlässigt. Nach der Containeraufnahme bewirkt dessen Masse zusammen mit der zeitvarianten Auslenkung der Last, siehe (2.26), eine Anpassung der äußeren Kräfte der Kranstruktur. Weiterhin wird angenommen, dass das Abrollen der Räder der Laufkatze auf dem Ausleger durch eine Reibpaarung mit dem Koeffizienten μ_R wiedergegeben wird. Die Beschleunigung der Laufkatze ist mit $\ddot{x}_m$ angegeben. Für die Hubachsen ist ebenfalls ein Beschleunigungsprofil hinterlegt. Qualitativ entspricht es dem Profil der Laufkatze, unterscheidet sich allerdings in den maximal zulässigen Werten für Hub- und Senkvorgänge. Die Werte können den Spezifikationen von Kränen oder z. B. der Übersicht von Ioannou u. a. [31] entnommen werden. Die in der vorliegenden Untersuchung verwendeten Werte der Parameter sind zusammen mit der Trajektorie der Laufkatze im Anhang hinterlegt (Abschnitt A.2, Bild A.1 und Tab. A.2). Aufgrund der unterschiedlichen Konfigurationen und Geometrien der untersuchten Krane sind die Massen der Laufkatze sowie die Distanzen der Laufkatze während eines Lastumschlags verschieden, die kinetischen Limitierungen jedoch identisch.

In Bild 2.10 sind die Testpunkte *I*, *II* und *III* entlang des Auslegers platziert. Die Punkte *I* und *III* repräsentieren den Anfang bzw. das Ende des Auslegers, wobei *II* in der Mitte angeordnet ist. Für den Containerumschlag sind die ausgewählten Positionen von Bedeutung, da sie Aussagen über die Verformungen der Kranstruktur in der Nähe der Laufkatze zulassen, auf der sich der Kranführer befindet. Bei der Betrachtung der Bewegungen entlang des Auslegerbalkens (CTB-Kran, x -Richtung, Bild 2.11, Testpunkt *I*) ist es hinreichend, einen der drei Testpunkte zu untersuchen, da diese durch die Konstruktion bedingt gleiche Ergebnisse liefern. Die Darstellung ist in die einzelnen Lastumschlagphasen unterteilt und man erkennt, dass die betragsmäßig größten Schwingungen aus der Anregung der Laufkatze auf die Struktur entstammen. Bei der Fahrt zur Wasserseite ($t_1 \leq t < t_2$) bzw. zurück zur Landseite ($t_4 \leq t < t_5$) treten Amplituden von maximal $\pm 0,035\text{m}$ auf. Zwischen den Fahrmanövern werden die Strukturschwingungen durch die Materialdämpfung verringert, bis eine erneute Anregung stattfindet.

Für die Bestimmung der Frequenzanteile der Strukturbewegungen werden die Beschleunigungen am Testpunkt *I* betrachtet, Bild 2.12. Angelehnt an Dinevski und Oblak [18] wird die diskrete Fourier-Transformation von den Daten in Bild 2.12 ermittelt, um die signifikanten Frequenzen zu identifizieren. Anhand des Amplitudenspektrums der Beschleunigungen am Testpunkt *I* $|X(f_{\ddot{x}_I})|$ in Bild 2.13 ist zu erkennen, dass die Struktur vornehm-

Bild 2.11: Horizontalverschiebung am Testpunkt *I* des CTB-Krans

lich mit einer Frequenz von 0,5Hz schwingt. Mit der Modalanalyse ist diese Frequenz als Eigenschwingung entlang des Auslegers identifiziert worden (Tab. 2.2), die in dieser Untersuchung wiederzufinden ist. Höhere Frequenzen spielen keine Rolle. Weiterhin lässt sich feststellen, dass aufgrund der korrelierenden Ergebnisse aller Testpunkte der Ursprung der Strukturschwingungen im unteren Bereich der Portalstützen zu finden ist, wie in [65] detailliert beschrieben und im Rahmen der Strukturmodifikation (Abschnitt 2.5) belegt wird.

Bild 2.12: Beschleunigung $\ddot{x}_I$ (CTB-Kran)Bild 2.13: Amplitudenspektrum $|X(f_{\ddot{x}_I})|$ der Beschleunigung $\ddot{x}_I$ (CTB-Kran)

Vertikale Verschiebungen der Kranstruktur (z -Richtung) beeinflussen den Containerumschlag und den Kranführer gleichermaßen. Die Dynamik an allen Testpunkten entlang der Erdbeschleunigung spiegelt den Lastzyklus wider, siehe Bild 2.14. Eine Positionierung der Laufkatze auf dem wasserseitigen Ausleger bewirkt ein signifikantes Absinken der Testpunkte *II* und *III*, überlagert von Schwingungen. Zum Zeitpunkt t_3 wird die Last aufgenommen und damit eine zusätzliche Bewegung mit Oszillationen in Richtung der z -Achse

ausgelöst. Das Rückfahrmanöver ($t > t_4$) kompensiert die Verschiebungen wiederum und die Auslenkungen an den Testpunkten kehren zurück in die statische Gleichgewichtslage.

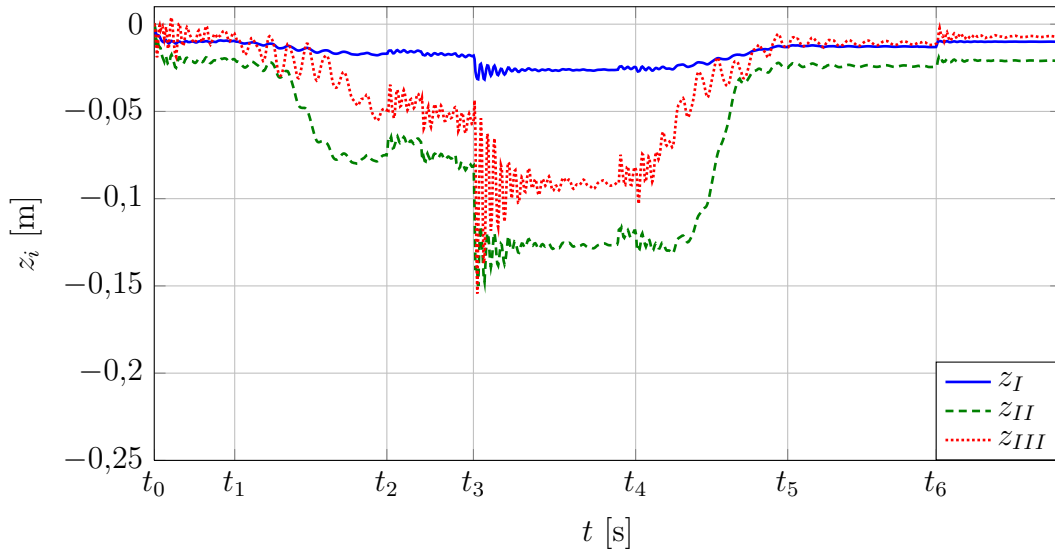


Bild 2.14: Vertikalverschiebungen aller Testpunkte des CTB-Krans

Die maximalen Schwingungsamplituden treten am Ende des Auslegers, am Testpunkt *III*, mit $\pm 0,06\text{m}$ auf. Dem entgegen ist die maximale Strukturverschiebung am Testpunkt *II* zu beobachten, was auf die Position der Laufkatze während der Containeraufnahme hinweist. Eine Betrachtung der beteiligten Frequenzen in dieser Richtung weist vornehmlich Schwingungsfrequenzen größer als 1Hz auf (vgl. [65]). Die Entkopplung der Fahrmanöver von den übrigen Teilprozessen eliminiert die Anregungsanteile der Laufkatze auf die Struktur, welche für die vertikale Strukturverformung verschwindend gering sind. Die Lastaufnahme und das Absetzen der Container führt zu großen Verformungen und höherfrequenten Schwingungen. Die Oszillationen sind stark gedämpft, da sie oberhalb von 1Hz stattfinden und somit wenig Masse bewegen.

Analog zur Untersuchung des Containerkrans am Terminal Burchardkai wird auch der Kran am CT4 analysiert. Im Abschnitt 2.1 ist auf die Konstruktionsunterschiede beider Krane eingegangen worden. Welche Auswirkungen diese auf die dynamische Strukturantwort haben, wird nachfolgend beschrieben. In Bild 2.15 erkennt man, dass die maximalen Schwingungsamplituden am Testpunkt *I* und in x -Richtung lediglich $\pm 0,01\text{m}$ betragen. Demnach schwingt die Struktur, angeregt durch die Laufkatzbewegung, kaum und die maximale Strukturantwort wird durch die Lastaufnahme erzielt, anders als beim CTB-Kran durch die Laufkatze. Das Amplitudenspektrum (Bild 2.16) unterstreicht die reduzierten Schwingungen und weist auf einen Frequenzbereich unmittelbar unterhalb der 1Hz -Grenze hin. Der CT4-Kran hat nach Tab. 2.2 eine Eigenschwingung bei $0,81\text{Hz}$, die auch aus Bild 2.16 abgeschätzt werden kann.

Die Verformung der Struktur an den Testpunkten *I* – *III* in vertikaler Richtung verläuft ähnlich zum CTB-Kran, vgl. Bilder 2.17 und 2.14. Zunächst stellt sich zu Beginn der Simulation die statische Gleichgewichtslage ein, gefolgt vom Verfahren der Laufkatze zur

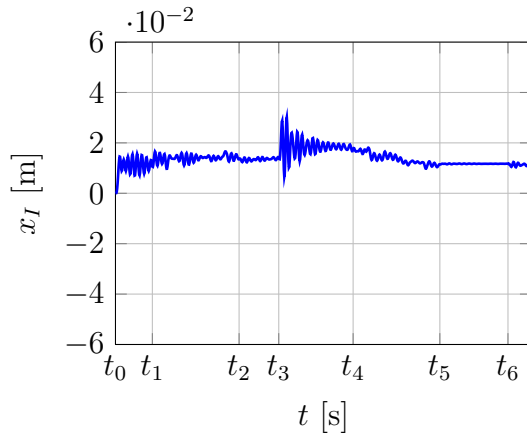


Bild 2.15: Horizontalverschiebung am Testpunkt I des CT4-Krans

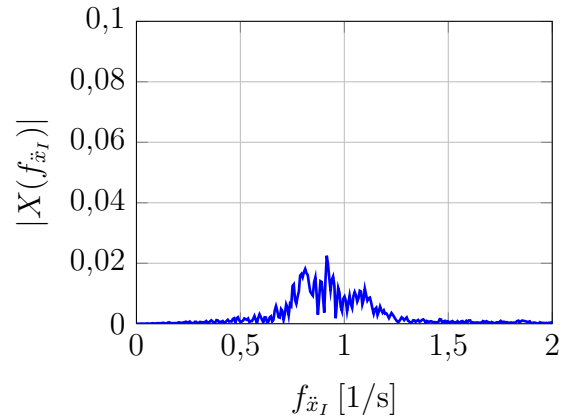


Bild 2.16: Amplitudenspektrum $|X(f_{\ddot{x}_I})|$ der Beschleunigung $\ddot{x}_I$ (CT4-Kran)

Wasserseite. Der Ausleger senkt sich an allen Testpunkten ab. Zum Zeitpunkt t_3 wird der Container angehoben und mit zunehmendem Abstand der Testpunkte vom Portal nimmt die Durchsenkung durch die angehängte Last zu. Abschließend transportiert die Laufkatze den Container ins Portal und die vertikale Verformung erreicht erneut die statische Gleichgewichtslage.

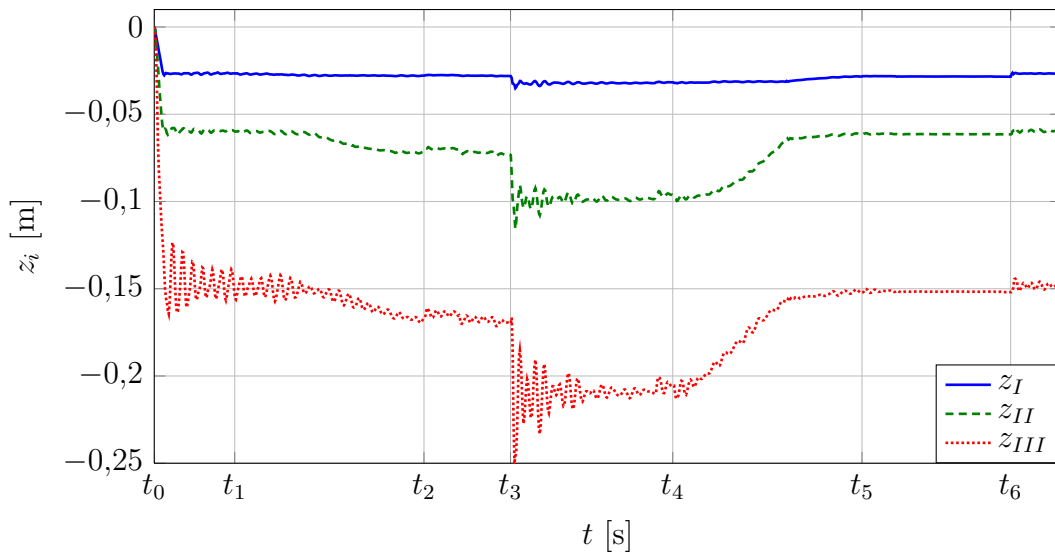


Bild 2.17: Vertikalverschiebungen aller Testpunkte des CT4-Krans

Die Strukturschwingungen im Bereich des Kranauslegers finden bei der Steuer- und Regelungstechnik der Laufkatze Berücksichtigung, da sie auf die Positionierung von Laufkatze und Spreader einwirken. Gleichzeitig dürfen die Schwingungen den Komfort für den Kranführer auf der Laufkatze nicht beeinträchtigen, siehe Hucho [30]. Das menschliche Empfinden entscheidet über das Maß der Annehmlichkeit am Arbeitsplatz. Nimmt man harmonische Strukturbewegungen an, dann bestimmt die Beschleunigungs- $\ddot{u}_A$ bzw. die Schwingungsamplitude u_A bei vorherrschender Frequenz f den Komfort der anwesenden

Personen. Die Schwingungsamplitude wird approximiert durch

$$u_A = \frac{\ddot{u}_A}{(2\pi f)^2} \quad (2.44)$$

und in Bild 2.18 für ausgewählte Anteile der Erdbeschleunigung logarithmisch dargestellt.

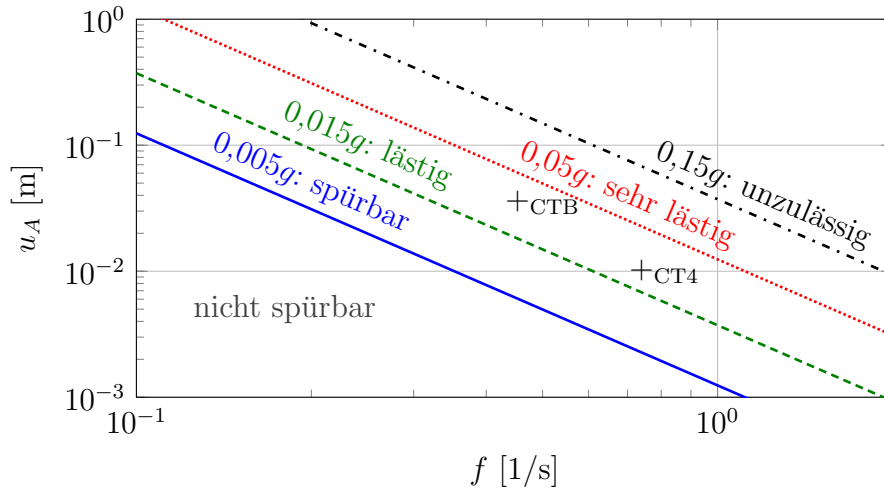


Bild 2.18: Menschliches Empfinden von Schwingungen, aus Chang [11]

Aus den Simulationsergebnissen der Containerkrane während des Lastumschlags sind entlang des Auslegers Schwingungsamplituden von 0,035m (CTB, $f = 0,5\text{Hz}$) und 0,01m (CT4, $f = 0,81\text{Hz}$) ersichtlich. In Bild 2.18 werden diese Kenndaten oberhalb der 0,015g-Linie lokalisiert. Die Schwingungen werden vom Kranführer als *lästig* empfunden. Das Empfinden auf dem Containerkran am Burchardkai ist *lästiger* als in Bremerhaven, so dass erschwerte Arbeitsbedingungen die Folge sind. Eine Reduzierung der Schwingungsamplitude und gleichzeitige Erhöhung der Schwingungsdauer verbessert den Komfort, was jedoch mit zusätzlichem konstruktivem oder regelungstechnischem Aufwand verbunden ist.

Bewegte Last

Das bewegte-Last-Modell bildet den Positioniervorgang der Laufkatze auf dem Auslegerbalken ab (Unterabschnitt 2.3.2). Die Analyse des Modells dient zur weiterführenden Charakterisierung der Struktur. Die Variation der schwingenden Last m_ϕ und der maximalen Schwingungsamplitude ϕ_A wird untersucht. Die Kenndaten der Simulationen können in Tab. A.1 nachgeschlagen werden. Für die nachfolgenden Resultate wird das Lastprofil verwendet, das bereits bei der Verifikation mittels bewegter Last benutzt wurde. Eine normierte Darstellung der Verformung des Auslegers an der aktuellen Position der konzentrierten Masse spiegelt Bild 2.19 wider. Die vertikale Verformung verschwindet an den Lagern (Fest- und Loslager) und strebt gegen ein negatives Maximum am wasserseitigen Ende des Auslegerbalkens. In der Mitte zwischen den Lagerungen beträgt die Verformung ca. $z = -0,05\text{m}$. Die Analyse der horizontalen Verformung des Balkens (x -Richtung) an der Stelle des Loslagers $x(x_0 = L_1)$ (Bild 2.20) ergibt hochfrequente Normalschwingungen

durch die Beschleunigung der Laufkatze sowie niederfrequente Schwingungen, hervorgerufen durch die schwingende Last (2.25). Weiterhin sind die Auslenkungen entlang des Auslegers marginal im Vergleich zu den Vertikalverschiebungen.

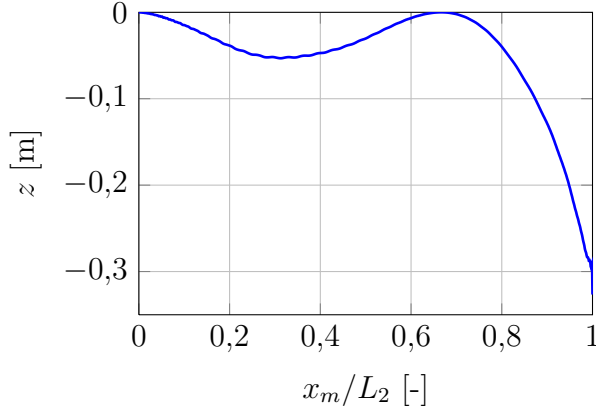


Bild 2.19: Vertikalverschiebung durch bewegte Last

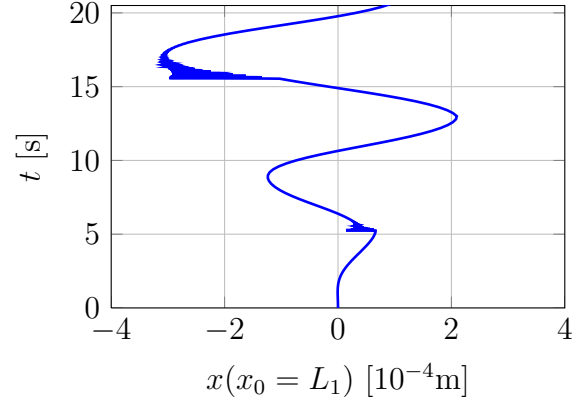


Bild 2.20: Horizontalverschiebung am Loslager

Im Rahmen der Variation der schwingenden Last, Bild 2.21, werden drei Fälle betrachtet: keine angehängte Last ($m_\phi = 0\text{kg}$), halbe zulässige Last ($m_\phi = 35 \cdot 10^3\text{kg}$) sowie maximal zulässige Last ($m_\phi = 70 \cdot 10^3\text{kg}$). Zur Verdeutlichung der Ergebnisse der Variation ist nur der Ausschnitt zwischen den Lagerungen dargestellt. Wie zu erwarten, nimmt die Durchbiegung mit zunehmender schwingender Last zu. Ohne Container beträgt die Verformung an der Position der konzentrierten Last $z = -0,03\text{m}$, hervorgerufen durch die Masse der Laufkatze. Bei maximaler Zuladung $m_\phi = 70 \cdot 10^3\text{kg}$ erreicht die vertikale Position $z = -0,05\text{m}$ und ein linearer Zusammenhang zwischen angehängter Last und Durchbiegung ist erkennbar. Der Einfluss von veränderter maximaler Lastauslenkung $\phi_A \in [0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 20^\circ]$ ist dagegen verschwindend. Die vertikale Verformung wird durch die angehängte Last dominiert und lediglich die Maximalauslenkung ($\phi_A = 20^\circ$) bewirkt geringe Veränderungen im Verlauf der Verschiebung.

In [49] sind weitere Untersuchungen am bewegte-Last-Modell dokumentiert. Die Variation der Geschwindigkeit der traversierenden Last sowie die Modifikation der Randbedingungen veranschaulichen zusätzliche Effekte, sind jedoch in diesem Kontext nicht von Bedeutung. Die dargestellten Ergebnisse der bewegte-Last-Betrachtung sind vor allem qualitativ zu interpretieren, denn sie vernachlässigen den Einfluss der angeschlossenen Kranstruktur auf die Dynamik am Ausleger.

2.4.3 Kaikollektive

Bisher wurde das dynamische Kranverhalten während des Containerumschlags analysiert. Im Folgenden werden die daraus resultierenden Reaktionskräfte in der Kaianlage untersucht. Die durch die Positionierung der Laufkatze und den Container aufgebrachten Lasten treten am Kranausleger auf und werden über das Portal in den Kaiunterbau abgeleitet. Belastungen dieser Art sind durch die maximale Tragfähigkeit der Laufkatze begrenzt und kontinuierlich wiederkehrend. Der Kran ist für diese Belastungen dauerhaft ausgelegt. Betrachtet man dagegen zufällig auftretende Belastungen,

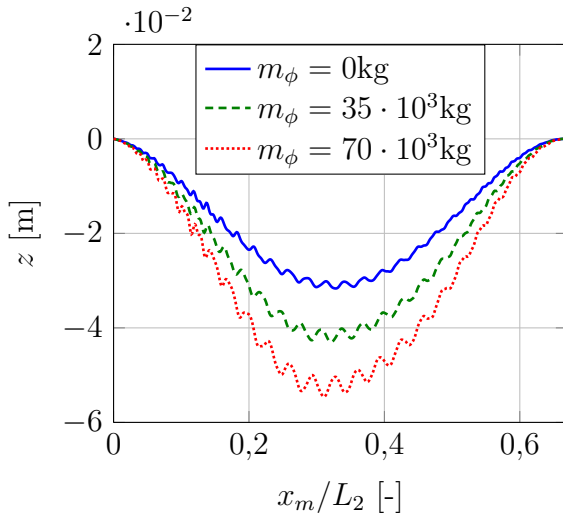


Bild 2.21: Vertikalverschiebung durch bewegte Lasten

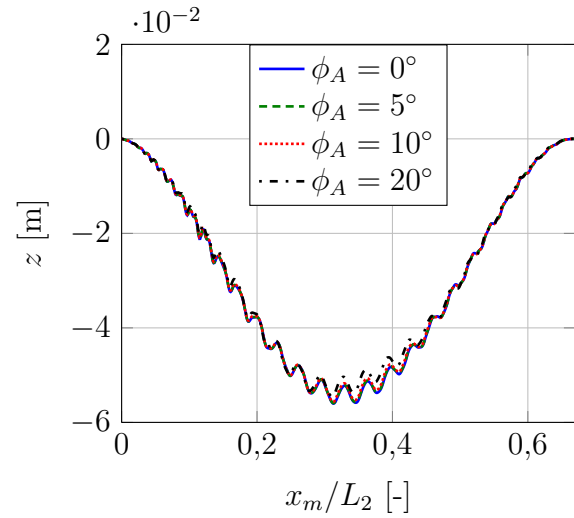


Bild 2.22: Vertikalverschiebung durch bewegte Last für unterschiedliche Amplituden der Lastauslenkung

wie z. B. Wind, so sind Richtung und Amplitude nicht vorhersehbar. Vor allem die Amplitude der Windkräfte variiert je nach Wetterlage und Umgebungsbedingungen stark.

Die dynamischen Windlasten, die auf die Kaianlage übertragen werden (Kaikollektive), sind in diesem Unterabschnitt Gegenstand der Untersuchung. Das Windprofil und die verwendeten Parameter sind der DIN-Norm 1055-4 [17] entnommen. Eine Windlastnorm vereinfacht die Realität, um eine Anwendung für Nachweise zu ermöglichen, vernachlässigt zugleich aber die Abbildung der Physik in den Berechnungen. Der Regelfall für nicht schwingungsfähige Bauwerke⁷ in küstennahem Gebiet (Windzone IV) gibt für die mittlere Windgeschwindigkeit für $4\text{m} < h < 50\text{m}$ das nachfolgend beschriebene Profil an. Die Geschwindigkeit v ist abhängig von der Höhe h der angeströmten Kranstrukturen. Das Profil berücksichtigt eine Referenz-Windgeschwindigkeit $v_{ref} = 30\text{m/s}$, eine normierende Höhe $h_0 = 10\text{m}$, die aktuelle Höhe h und einen Windgeschwindigkeitsexponenten $\alpha_W = 0,165$. Der verwendete Wert von v_{ref} ($> 100\text{km/h}$) wird bei orkanartigen Stürmen verzeichnet und charakterisiert sich durch entwurzelte Bäume sowie verbreitete Sturmschäden. Daran wird deutlich, welchen Belastungen die Kranstruktur unter diesen Bedingungen standhält. Weiterhin ist das Windprofil zu einem Zeitpunkt t_B mit einer Böe $b(t)$ der Form einer halben Sinuswelle überlagert, um zeitlich begrenzt eine Maximallast wiederzugeben. Die Windgeschwindigkeit v wird als Flächenlast q auf die Struktur aufgebracht (Dichte der Luft $\rho = 1,25\text{kg/m}^3$):

⁷Hucho [30] beschreibt die Klassifizierung der Schwingungsanfälligkeit von Bauwerken in der DIN-Norm 1055-4. In den vorliegenden Berechnungen wird vereinfacht vom nicht schwingungsfähigen Fall ausgegangen.

$$v(h,t) = b(t) \tilde{v}(h), \quad (2.45)$$

$$= 1,1 \cdot b(t) v_{ref} \left(\frac{h}{h_0} \right)_W^\alpha, \quad (2.46)$$

$$q(h,t) = \frac{\rho}{2} v^2(h,t). \quad (2.47)$$

Das Windprofil $\tilde{v}$ in (2.45) vernachlässigt Schwingungsanregung durch Wirbel und zunächst auch durch Böen. Der transiente Verlauf der nachträglich hinzugefügten Böe ist in Bild 2.23 dargestellt. Nach linearem Auftragen der regulären Windlast $\tilde{v}$ wird zum Zeitpunkt t_B die Überhöhung durch die Böe vorgenommen. Die Dauer der Erhöhung ist der Schwingungsdauer $T_B/2$ der Krane entlang der Kranbahn entsprechend ausgewählt. Die Verstärkung ist den in der Windnorm angesetzten Böengeschwindigkeiten für den betrachteten Fall angepasst. Bei der Referenzhöhe h_0 ist die Böe um 33% überdimensioniert, was sich mit zunehmender Höhe bis $h = 70\text{m}$ der Referenz-Windgeschwindigkeit $\tilde{v}$ angleicht. Bild 2.24 deklariert die Notation für die Auswertung der Reaktionskräfte aus den dynamischen Belastungen der Krane. Es sind exemplarisch die Reaktionskräfte (F_x , F_y , F_z) an einer Portalstütze gezeigt, neben der örtlichen Unterteilung in Wasserseite (WS) und Landseite (LS) sowie links bzw. rechts am Kran, vom Wasser aus betrachtet.

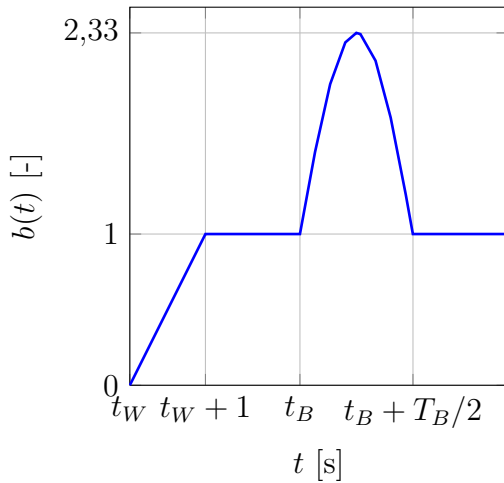


Bild 2.23: Verstärkung der Windlast

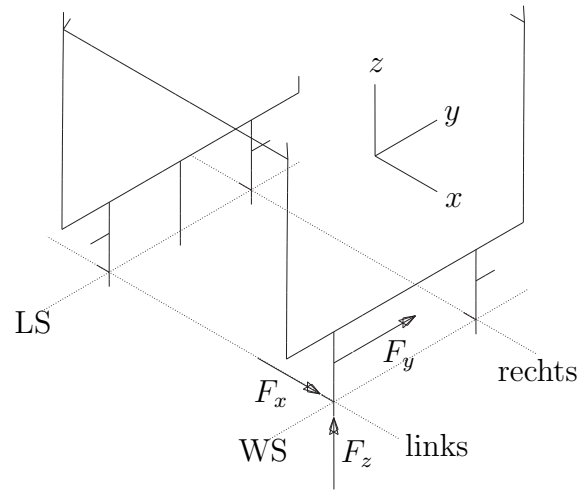


Bild 2.24: Notation für Kaikollektive

Für die Analyse der Kaikollektive am CTB-Kran wird die Windlast in positiver y -Richtung aufgebracht. Betrachtet man zunächst die Summe aller Reaktionskräfte in den Raumrichtungen in Bild 2.25, so bildet $F_z = 12 \cdot 10^6\text{N}$ die Gewichtskraft der Containerbrücke ab, welche bis zur Simulationszeit $t = 1\text{s}$ linear bis zum Maximum aufgebracht wird. In y -Richtung wird die aufgebrachte Windlast abgetragen, die erst nach $t_W = 10\text{s}$ linear (weitere 1s) auf den Sollwert aus (2.47) ansteigt. Die Böe tritt zum Zeitpunkt $t_B = 15,9\text{s}$ auf. Die Dauer ist entsprechend einer Struktureigenform in y -Richtung mit $T_B = (1/(2 \cdot 0,37))\text{s}$ gewählt (Hucho [30] schlägt diese Art der Anregung nach Rausch [77] vor). Nach Abklingen der Böe herrscht erneut die Flächenlast q mit $\tilde{v}$ vor. Die Kraft F_y folgt den Strukturverschiebungen des Krans. Jeweils die Hälfte dieser Belastung fällt an der WS und an der LS an (phasengleich, siehe Bild 2.26). Die Räder des Fahrwerks verteilen die wasser- bzw. landseitige Last gleichmäßig auf der Kranbahn.

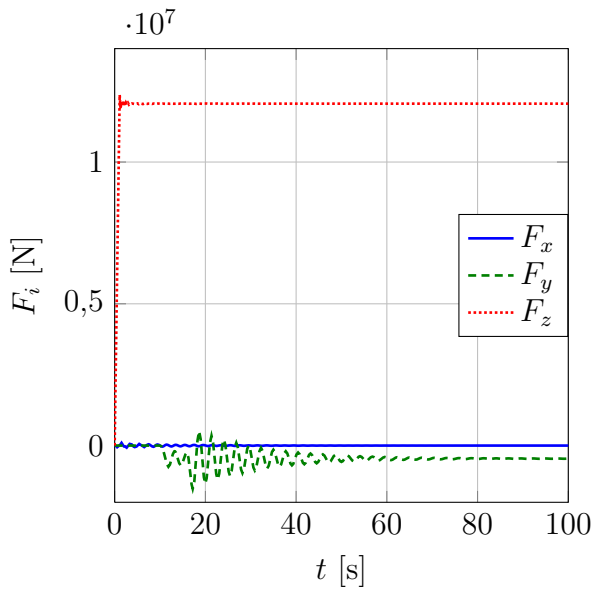


Bild 2.25: Summe der Kaikollektive durch Windlast (CTB)

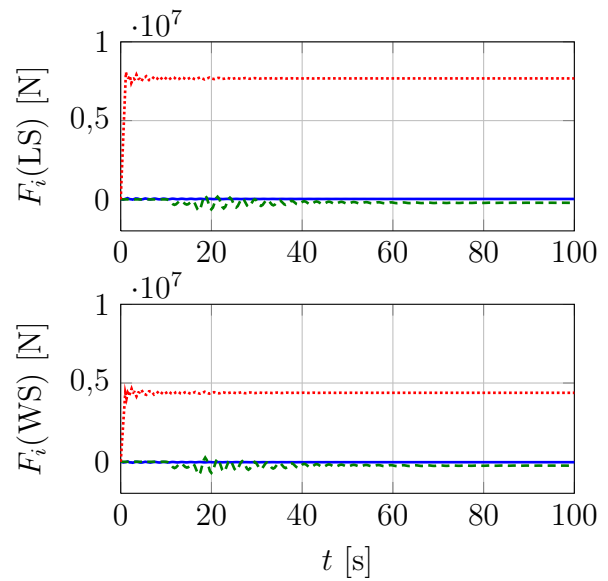


Bild 2.26: Kaikollektive LS/WS durch Windlast (CTB)

Ein Blick auf die Reaktionskräfte der einzelnen Portalstützen (Bild 2.27) führt zu weiteren Erkenntnissen.

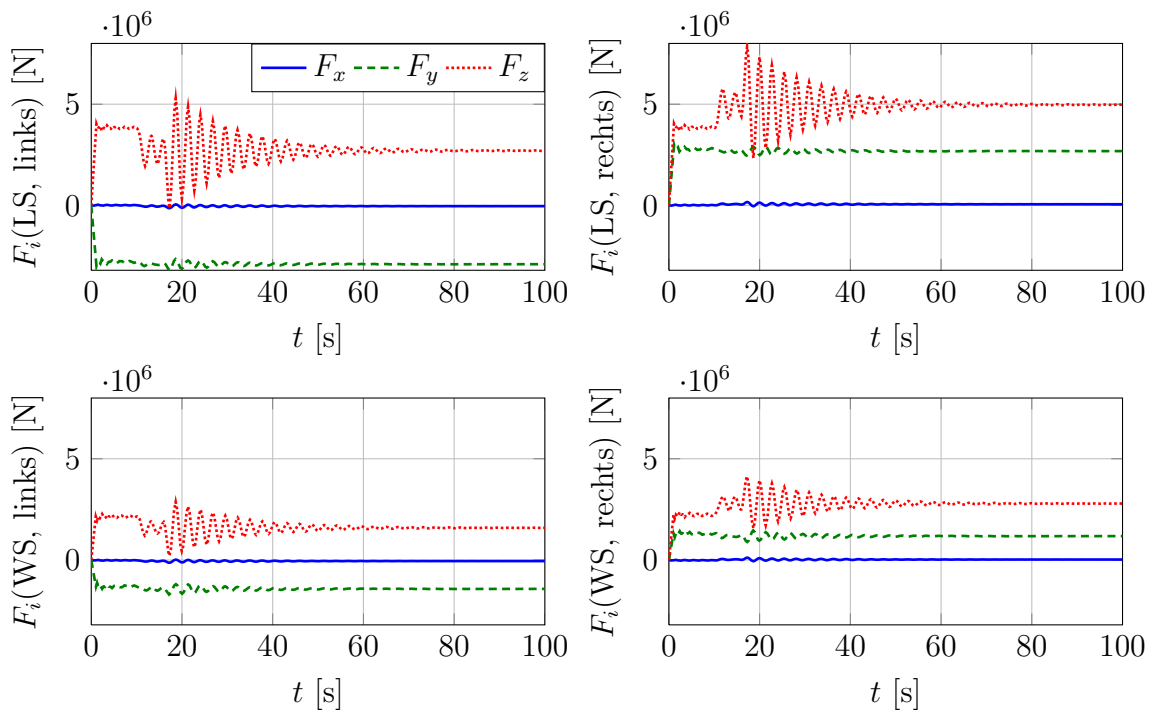


Bild 2.27: Einzel-Kaikollektive durch Windlast (CTB)

Die Kräfte in z -Richtung variieren am stärksten auf der LS, wobei rechts $F_{z,max}(\text{LS, rechts}) = 8 \cdot 10^6$ N und links $F_{z,min}(\text{LS, links}) = -0,1 \cdot 10^6$ N abzulesen sind. Der negative Wert suggeriert ein kurzzeitiges Abheben dieses Portalbeins. Anhand der Maximalformulierung der Windlast wird an der untersuchten Containerbrücke dieser Fall aller

Voraussicht nach jedoch nicht eintreten.

Im kombinierten Lastfall aus Windlast und Containerumschlag (Lastzyklus nach Unterabschnitt 2.4.2) überlagern sich die Effekte der Windlast in y -Richtung und der dynamischen Last der Laufkatze in der x - z -Ebene. Beide Belastungen werden analog zu den vorangegangenen Untersuchungen mit anfänglichen Verzögerungen veranschlagt. Die Ergebnisse der Kaikollektive durch Windlast während des Containerumschlags zeigt Bild 2.28. Detailliertere Betrachtungen können dem angehängten Abschnitt A.2, Bilder A.2 und A.3, entnommen werden.

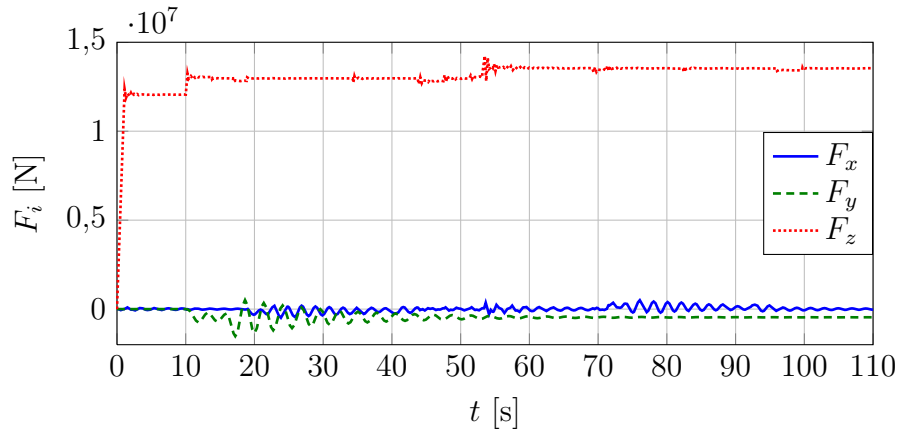


Bild 2.28: Summe der Kaikollektive durch Windlast und Containerumschlag (CTB)

In den beschriebenen Lastfällen bei angreifenden Windlasten fällt auf, dass die Reaktionskraft eines Portalbeins kurzzeitig entgegengesetzt der Erdbeschleunigung wirkt. Damit besteht die Gefahr, dass eine Containerbrücke während des Stillstands (kein Umschlagbetrieb bei orkanartigem Wind) an einem oder mehreren Portalstützen angehoben wird und muss aus diesem Grund gegen Kippen gesichert werden. Es bieten sich Sicherungsmaßnahmen am Fahrwerk an, welche z. B. einseitig unter die Kranbahn greifen (McCarthy und Vazifdar [61]).

In den Simulationen des CT4-Containerkrans mit Windbelastung wird die Anströmrichtung variiert. Die Windlast wird von 0° bis 180° in 45° -Schritten in Bezug auf die vertikale z -Achse⁸ geändert. Der Anfangszustand, 0° -Anströmrichtung, repräsentiert die Windrichtung entlang der positiven x -Achse, wohingegen ein 180° -Anströmwinkel Wind entgegengesetzt zur positiven x -Achse abbildet. Der Mittelwert 90° entspricht folglich der Windrichtung parallel zur y -Achse (vgl. Ergebnisse der CTB-Simulation). In den Bildern 2.29 bis 2.31 ist die Kraft in z -Richtung für alle Anströmwinkel identisch. Der Betrag der Reaktionskraft entgegen der Erdbeschleunigung entspricht in allen Untersuchungen ca. $18 \cdot 10^6 \text{ N}$ und impliziert ein Gesamtgewicht des Krans von ca. $1,8 \cdot 10^6 \text{ kg}$. Das Kaikollektiv in y -Richtung (parallel zur Kaikante, $t_W = 0 \text{ s}$, $t_B = 6 \text{ s}$) verschwindet jeweils bei 0° und 180° . Dies bedeutet, dass bei diesen Anströmwinkeln keine Last in y -Richtung wirkt. Demgegenüber ist die Kraft F_y bei einem Anströmwinkel von 90° maximal. Der Absolutwert kann mit $3 \cdot 10^6 \text{ N}$ entnommen werden und entspricht $1/6$ der Gewichtskraft. Entlang des

⁸Die Symmetrie der Krane bzgl. der x - z -Ebene begünstigt eine einseitige Untersuchung bei Windbelastung.

Kranauslegers (x) sind die Kaikollektive bei Anströmwinden 0° und 180° betragsmäßig gleich mit unterschiedlichen Vorzeichen. Die Reaktionskraft F_x bei 0° hat ein Betragsmaximum von $1,4 \cdot 10^6 \text{ N}$. Dreht die Windanströmrichtung, so bewirkt dies ein Absinken der Kraft, bis F_x bei 90° fast verschwunden ist. Die geringe Reaktionskraft in x -Richtung resultiert aus der strukturellen Asymmetrie bzgl. der y -Achse.

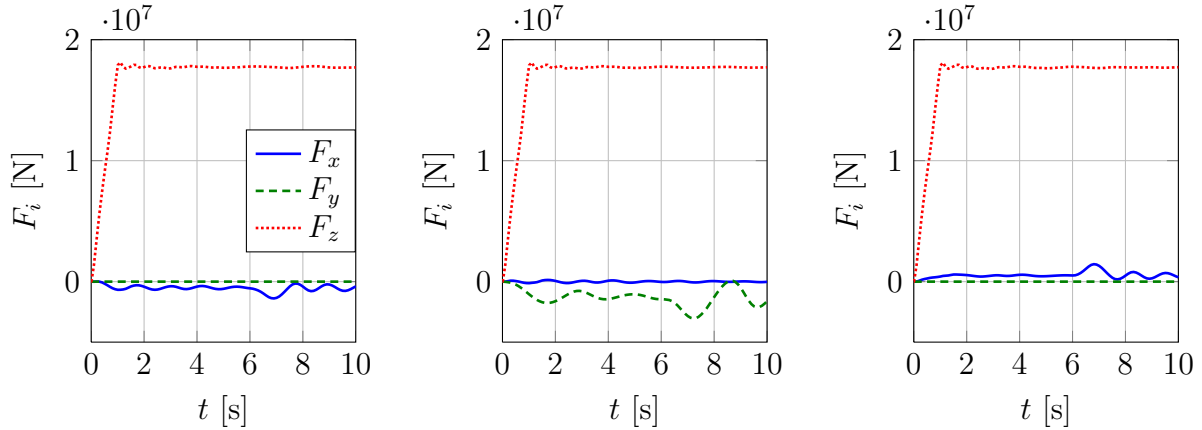


Bild 2.29: 0° -Wind (CT4) Bild 2.30: 90° -Wind (CT4) Bild 2.31: 180° -Wind (CT4)

Bild 2.32 illustriert die Reaktionskräfte der einzelnen Einspannungen des Containerkrans auf der Kaje. Die Summe aller Reaktionskräfte führt wiederum zu Bild 2.30 für eine Windlast entlang der negativen y -Achse (90°). Es fällt auf, dass F_z links geringer ist als rechts, bedingt durch die Windanströmrichtung. Des Weiteren ist an der Portalstütze auf der linken Landseite während der Böe kurzzeitig eine negative F_z -Reaktionskraft zu beobachten. Eine negative Reaktionskraft in vertikaler Richtung impliziert ein abhebendes Portalbein.

Die CT4-Kranstruktur im Vergleich zu dem Containerkran am CTB ist resistenter gegenüber Schwingungsanregung. Die negative Reaktionskraft der Kaje am linken landseitigen Portalbein ist im Betrieb bisher nicht beobachtet worden. Ein möglicher Grund ist die getrennte Modellierung jeder Portalstütze, welche am realen Kran als landseitiges und wasserseitiges Fahrwerk ausgeführt sind. Addiert man die Reaktionskräfte beider z. B. landseitiger Portalstützen, so hebt sich der negative Anteil mit dem größeren positiven Anteil von F_z rechts auf. Darüber hinaus ist die Böe, wie beschrieben überdimensioniert und auch die Referenz-Windgeschwindigkeit aus der DIN-Norm ist maximal angesetzt. Derartige Windgeschwindigkeiten haben üblicherweise schwerwiegende Schäden zur Folge und dienen in der Simulation zur Einordnung der maximalen Kaikollektive. Letztlich ist der CT4-Containerkran gegenüber der Windlast weitestgehend robust.

Auf die Auswertung der Kaikollektive mit Windlast beim Containerumschlag wird an dieser Stelle verzichtet. Die Ergebnisse des Containerkrans am Burchardkai haben die Überlagerungseffekte verdeutlicht. Zudem trägt die geringere Masse der Laufkatze beim CT4-Kran ($m_L = 34 \cdot 10^3 \text{ kg}$) dazu bei, dass die Reaktionskräfte in x - und z -Richtung im Vergleich zum CTB-Kran abnehmen. Auch auf die Bewertung der Ergebnisse hinsichtlich des Kranunterbaus wird verzichtet, da sich die Untersuchungen auf den Kran und das Umschlagverhalten der Last konzentriert. In den Empfehlungen des Arbeitsausschusses „Ufereinfassungen“ Häfen und Seestraßen [21] werden Methoden zur Bemessung

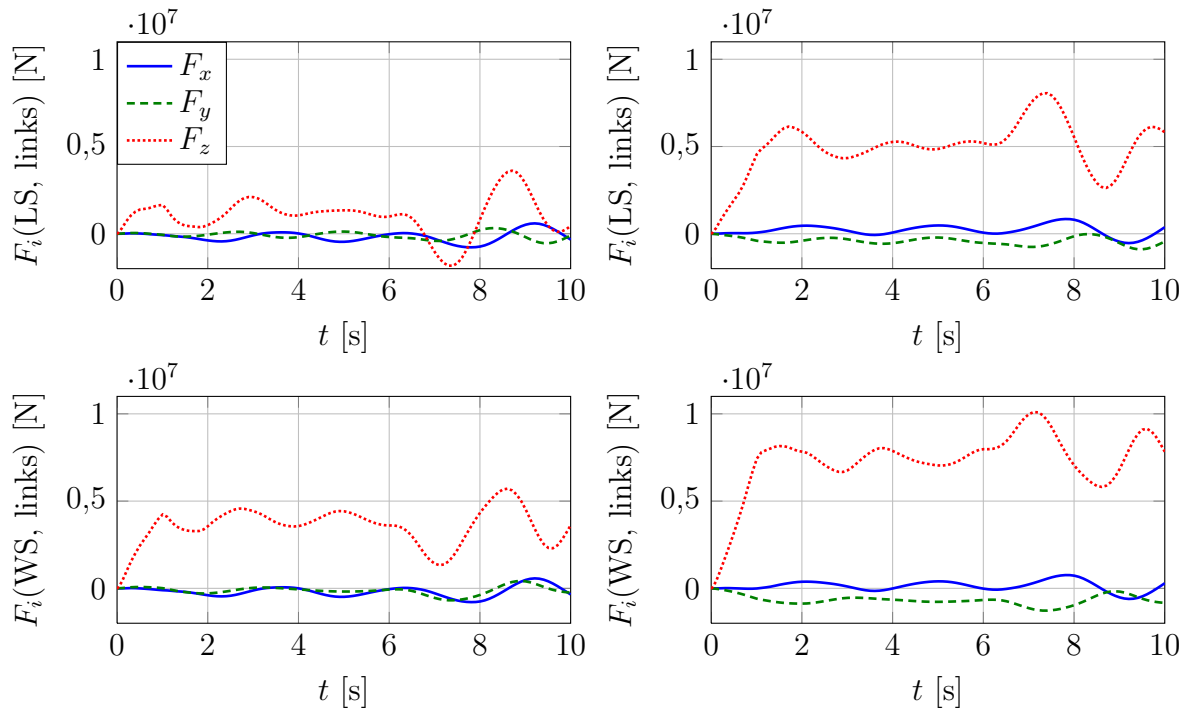


Bild 2.32: Einzel-Kaikollektive durch 90°-Wind (CT4)

von Kaianlagen dargelegt, welche u. a. auf den statischen Maximalbelastungen der Kaje während des Containerumschlags beruhen. Dynamische Reaktionskräfte in der Kaianlage finden in der EAU (noch) keine Verwendung. Die ermittelten Kaikollektive am CT4 finden z. B. Anwendung bei Müller [64] für den Nachweis des Tragverhaltens eines optimierten Hamburger Kaianlagenquerschnitts.

2.5 Strukturmodifikation

Die Ergebnisse der Strukturanalyse haben die Qualität und Quantität der dynamischen Verformung aufgezeigt. In der anschließenden Diskussion wurde dargelegt, dass u. U. eine Beeinträchtigung des Containerumschlags stattfindet. Entsprechend der Ursache der Strukturverformungen müssen Gegenmaßnahmen getroffen werden, um einen reibungslosen Lastumschlag zu gewährleisten. Eine Maßnahme gegen die Strukturanregung durch die Laufkatze ist eine Anpassung der Beschleunigungstrajektorie an die Struktureigenschaften. Wird die Beschleunigungsdauer als die halbe Eigenschwingungsdauer der Struktur⁹ plus Vielfache gewählt, so wird die Last am Ende des Manövers annähernd schwingungsfrei sein, vorausgesetzt es treten keine Störungen auf (vgl. [98]). Gleichmaßen führt ein Beschneiden der Beschleunigungsamplituden der Laufkatze zu einer verminderten Strukturanregung, beschränkt jedoch ebenso den Umschlagprozess und ist somit nicht tolerierbar. Aus diesen Gründen ist es erforderlich, mittels Ursachenanalyse gezielte strukturelle Modifikationen zu erarbeiten, um die Strukturantwort zu verringern. Herausgearbeitete Maßnahmen sind teilweise nicht ohne zusätzliche Untersuchungen anwendbar. Abhilfe schafft die Anwendung eines Optimierungsverfahrens. Ein deterministisches Suchverfah-

⁹Die höchste Eigenschwingungsdauer tritt in Richtung der Bewegung der Laufkatze (x) auf.

ren wird im Verlauf der Optimierung vorgestellt und die erzielten Ergebnisse werden im Kontext der Ausgangssituation beleuchtet.

2.5.1 Anfangsbedingungen

Die Anfangsbedingungen für die Strukturmodifikation sind nochmals zusammengefasst aufgelistet. Zunächst werden Beobachtungen angeführt.

- Eine geringe Eigenschwingungsfrequenz entlang des Auslegers (x) und weniger in vertikaler Verschiebungsrichtung (z) beeinträchtigt den Kranführer und somit den Umschlag.
- Höhere Schwingungsfrequenzen verringern die Strukturantwort, Dinevski und Oblak [19].
- Die Strukturverformungen während des Containerumschlags folgen der korrespondierenden Eigenform (siehe Bild 2.5) und den Verformungen, welche aus den Verschiebungen des unteren Portals in der Nähe des Kranfahrwerks resultieren.

Abgeleitet aus den Beobachtungen, werden Modifikationen im Bereich der unteren Portalstützen formuliert (Bild 2.33):

1. Aussteifungen zwischen vertikalen und horizontalen Balken (im Abstand e vom Schnittpunkt der Balken) einfügen,
2. Querschnitt der Portalstützen erhöhen (Flächenträgheitsmoment $I_{y^{(s)},z^{(s)}}$, Balkenquerschnitt mit Breiten- b und Höhenabmaß h innerhalb des rechteckigen Kastenprofils sowie außerhalb B und H),

$$I_{y^{(s)}} = \frac{H^3 B - h^3 b}{12}, \quad I_{z^{(s)}} = \frac{H B^3 - h b^3}{12}. \quad (2.48)$$

Weitere Modifikationen entstammen der Gegenüberstellung von CTB- und CT4-Kran. Grundlegend sind am Kran in Bremerhaven geringere Strukturschwingungen zu verzeichnen. Signifikante strukturelle Unterschiede beider Krane sind: Spurbreite, seitliche Portalversteifungen, Anzahl der Zugbänder und Mono- bzw. Twinbox-Ausleger. Im Rahmen der Strukturmodifikation werden die Spurbreite und die Auslegerkonfiguration (Mono-, Twinbox) als unveränderlich betrachtet. Der konstruktive Aufwand für eine Veränderung entspricht in keinem Maß der reduzierten Strukturantwort. Zusätzliche realisierbare Veränderungen der Struktur sind seitliche Aussteifungen und Zugbänder (vgl. CTB- mit CT4-Kran im Bild 2.3):

3. Kreuzversteifung im seitlichen Portal des CTB-Krans (vgl. [19]),
4. zusätzliche Strebe im Zugbandsystem (Bild 2.33).

Alle Veränderungen müssen darüber hinaus den Randbedingungen des Umschlagbetriebs genügen. Für Modifikationen im unteren Portalbereich bedeutet dies, dass die Höhe des Durchfahrbereichs für Stelzenkrane¹⁰ erhalten bleiben muss. Die optimalen Parameterwerte für den Querschnitt der Portalstützen (b , B , h , H) und die Position der Aussteifungen

¹⁰Stelzenkrane (engl.: *gantry cranes*) bewerkstelligen den An- bzw. Abtransport der Container zum bzw. vom Containerkran.

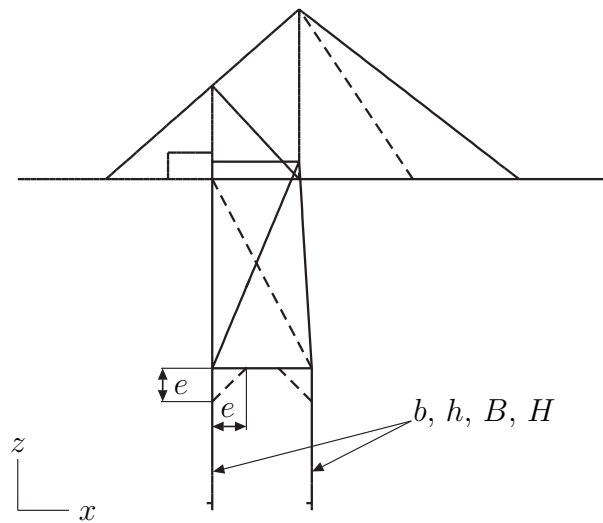


Bild 2.33: Strukturmodifikationen am Containerkran (bspw. am CTB-Kran)

im unteren Portal (e) werden durch ein Optimierungsverfahren ermittelt. Die Position der zusätzlichen seitlichen Aussteifung und des Zugbands (nur CTB) sind konstruktiv vorgegeben.

2.5.2 Optimierung

Für die Ermittlung der bestmöglichen Parameter stehen die mathematischen Methoden der Optimierung zur Verfügung. Ein Gütefunktional formuliert das angestrebte Optimum, welches aus der qualitativen Strukturanalyse abgeleitet wird. Weiterhin wertet eine Empfindlichkeitsanalyse das Funktional und dessen Gradienten (1. Ableitung und Hesse-Matrix) im Hinblick auf die Optimierungsparameter aus. Letztlich schließt sich eine allgemeine (nichtlineare) Optimierung der ausgewählten Parameter an. Das beschriebene Vorgehen zur Optimierung mechanischer Strukturen folgt den Ausführungen von Bestle [4].

Man unterscheidet allgemein zwischen Such- und Gradientenstrategien. Die heuristischen Suchverfahren werden weiterhin in deterministisch und stochastisch unterschieden, wobei anzumerken ist, dass zufällige Algorithmen nicht zielorientiert sind. Es kann somit keine vorangehende Abschätzung für den Aufwand dieser Optimierungsmethoden gemacht werden. Deterministische Verfahren dagegen sind zielorientiert und mit der Auswertung des Zielfunktionalis ist die Richtung zum (lokalen) Optimum vorgegeben. Die Gradientenstrategien beziehen die erste und zweite Ableitung des Funktionalis in die Optimumsfindung ein. Damit berücksichtigen sie zusätzliche Informationen zur Beschleunigung der Konvergenz, was den Aufwand jedoch erhöht.

Es folgt eine generelle Darstellung der Optimierungsmethodik für mechanische Systeme und die Einordnung der Strukturoptimierung an Containerkranen. Zunächst wird die Aufgabe formuliert, welche eine umfangreiche Charakterisierung der Dynamik der Struktur voraussetzt. Das Optimierungsziel - als Gütefunktional bezeichnet - sowie die Nebenbedingungen werden hergeleitet. Für ein skalares nichtlineares Optimierungsproblem muss

das Gütefunktional f hinsichtlich der zulässigen Parameter $\mathbf{p}$ minimiert werden (Nebenbedingungen $\mathbf{g}$ und $\mathbf{h}$):

$$\min f = f(\mathbf{p}), \quad \mathbf{p} \in \mathcal{P} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^h \mid \mathbf{g}(\mathbf{p}) = 0, \mathbf{h}(\mathbf{p}) \leq 0, p_k^u \leq p_k \leq p_k^o\}. \quad (2.49)$$

Im Anwendungsfall kommen ausschließlich explizite Nebenbedingungen zum Einsatz, welche die geometrischen Randbedingungen für die Optimierung vorgeben. Somit werden untere (p_k^u) und obere Intervallgrenzen (p_k^o) für den zulässigen Parameterbereich (p_k) der konstruktiven oder physikalischen Grenzen festgesetzt.

Eine Optimierung ist immer auch ein iterativer Prozess, der aus zwei wiederkehrenden Operationen besteht:

1. Systemanalyse,
2. Parameterschätzung.

Die Systemanalyse charakterisiert das dynamische Mehrkörpersystem-Verhalten für den aktuellen Parametersatz $\mathbf{p}$ und die Parameterschätzung postuliert die zukünftige Wahl der Parameter, bis ein Abbruchkriterium erfüllt ist.

Für die Minimierung eines Gütefunktional mit Nebenbedingungen steht eine Auswahl von Optimierungsverfahren zur Verfügung. Sie sind der realen Problemstellung angepasst und differenzieren sich durch die Verfahrensordnung (maximaler Grad der Ableitungen) sowie die Modellordnung (Konvergenzgrad). Beim ausgewählten Algorithmus nach Nelder und Mead [68] wird die Konvergenz durch gezielte geometrische Operationen gewährleistet. Die Methode gehört zu der Gruppe der Suchstrategien, welche auf deterministischem Pfad zum Optimum gelangt. Der auch als Simplex-Verfahren bezeichnete Algorithmus hat den strikten lokalen Minimierer $\mathbf{p}^*$ in der offenen Umgebung $\mathcal{U}$, womit gilt

$$f(\mathbf{p}^*) < f(\mathbf{p}) \quad \forall \mathbf{p} \in \mathcal{U} \setminus \{\mathbf{p}^*\}. \quad (2.50)$$

Durch die Wahl beliebiger Anfangswerte $\mathbf{p}$ im Entwurfsraum wird sichergestellt, dass $\mathbf{p}^*$ gleichzeitig das globale Minimum der Optimierung darstellt. Das formelle Vorgehen der Simplex-Optimierung kann bei Nelder und Mead [68] nachgeschlagen werden. Wesentliche Bestandteile sind wiederum die Wahl des Gütefunktional, die Auswertung der Systemdynamik und der iterative Optimierungsvorgang.

Nachfolgend wird eine kurze Übersicht zur Anwendung der Simplex-Optimierung zur Strukturverbesserung bei Containerkranen gegeben. Das Gütefunktional entspricht der niedrigsten Eigenschwingung entlang des Auslegerbalkens

$$f(\mathbf{p}) = f_{x,min} \quad (2.51)$$

und wird mit (2.16) sowie (2.20) bestimmt. Eine vorangegangene Systemanalyse und die Diskussion der Anfangsbedingungen haben die zugehörige Schwingungsform als einen Ursprung der Strukturverformungen identifiziert. Das Gütefunktional f ist eine Funktion des Parametervektors $\mathbf{p} = [e, b, h, B, H]^T$ mit der relativen Position (e) der Portalversteifungen und den Kennwerten des Balkenquerschnitts (b, h, B, H), aber auch abhängig

von der Systemdynamik, welche die maximale Verformung bedingt. Das gewählte Optimierungsverfahren basiert auf einem Simplex, bestehend aus $(n + 1)$ Ecken¹¹, welches gezielt im aufgespannten Raum positioniert wird. Nach mehreren Iterationen und damit verbundenen Modifikationen des Simplex wird ein Abbruchkriterium erfüllt, wodurch eine (lokale) Optimallösung $\mathbf{p}^*$ gefunden ist. Eine Ecke des finalen Simplex spiegelt die optimale Lösung des Zielfunktionalis wider. Die expliziten Nebenbedingungen sind abgewandelt als vorangestellte Fehlerbehandlung in die Iteration integriert, um die Gültigkeit des Entwurfsraums für jeden neuen Parametersatz $\mathbf{p}^{(\nu)}$ zu validieren. Sollte sich ein Parameterentwurf nicht im Gültigkeitsbereich des Entwurfsraums befinden, wird ein Alternativentwurf

$$\mathbf{p}^{(\nu+1)} = \mathbf{p}^{(\nu)} + \alpha_s \mathbf{s}^{(\nu)}, \quad (2.52)$$

mit dem zuletzt zulässigen Entwurf $\mathbf{p}^{(\nu)}$, der Suchrichtung $\mathbf{s}^{(\nu)}$ und dem Steuerparameter α_s vorgenommen. Der Steuerparameter wird kontinuierlich angepasst, bis ein zulässiger Entwurf gefunden ist. Verschiedene Operationen kommen während der Simplex-Optimierung zum Einsatz, z. B. Expansion, Spiegelung, Kontraktion oder vollständige Kontraktion. Sie sind in [4], [68] oder angewendet bei Struck [84] beschrieben. Für die Strukturverbesserung bei Containerkränen ist der implementierte Algorithmus bei Modrow [65] hinterlegt. Dort ist auch das verwendete Abbruchkriterium formuliert, welches auf der bekannten maximalen Strukturversteifung bei maximalen Optimierungsparametern $\mathbf{p}^*$ basiert. Der Verlauf des Gütefunktionalis in der Umgebung von $\mathbf{p}^*$ hat bei der geometrischen Optimierung eine logarithmische Gestalt. Konstante Änderungen der Parameter bedingen die asymptotische Annäherung zum Optimum. Dies führt zur Annahme, dass ein Parametersatz $\mathbf{p}^{**} \approx \mathbf{p}^*$ existiert, der den Materialeinsatz (Ausschöpfung der zulässigen Parameterbereiche) wesentlich reduziert. Das Ziel ist nunmehr

$$f(\mathbf{p}^{**}) = cf(\mathbf{p}^*), \text{ mit } c = 0,99. \quad (2.53)$$

Der Parametersatz $\mathbf{p}^{**}$ charakterisiert 99% des optimalen Strukturverhaltes des Containerkrans.

2.5.3 Ergebnisse

Die Ergebnisse des Optimierungsverfahrens fließen in die Strukturanalyse beider Containerkrane ein. Eine endgültige Konfiguration der untersuchten Containerkrane in Hamburg und Bremerhaven ist in Bild 2.34 ersichtlich.

Beim CTB-Kran in Hamburg kann die charakteristische Eigenschwingung auf $f_3 = 0,8\text{Hz}$ erhöht werden, vgl. Tab. 2.2. Die verallgemeinerte Masse dieser Schwingungsform ist nach der Optimierung auf $m_3 = 123 \cdot 10^3\text{kg}$ abgesenkt (25% vom Wert vor der Optimierung). Der Optimierungsparameter der Position der Portalversteifung e beträgt gleichzeitig 82% des zulässigen Maximums und führt zu 99% des Optimums der Gütefunktion (2.51). Am Kran in Bremerhaven (CT4) hat die Optimierung zu einer Eigenschwingung entlang des Auslegerbalkens von $f_3 = 1,1\text{Hz}$ geführt, bei 93% des e -Parameters und einem Portalstielquerschnitt von $A = BH - bh = 0,215\text{m}^2$ (von maximal $0,22\text{m}^2$). Die verallgemeinerte Masse der Eigenschwingung beträgt nach der Optimierung $21 \cdot 10^3\text{kg}$ (39%).

¹¹Die Dimension des Optimierungsraums wird mit n angegeben.

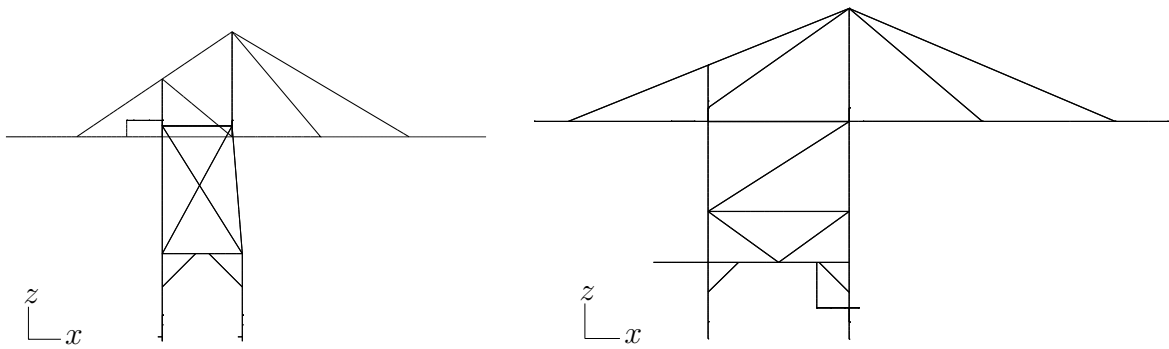
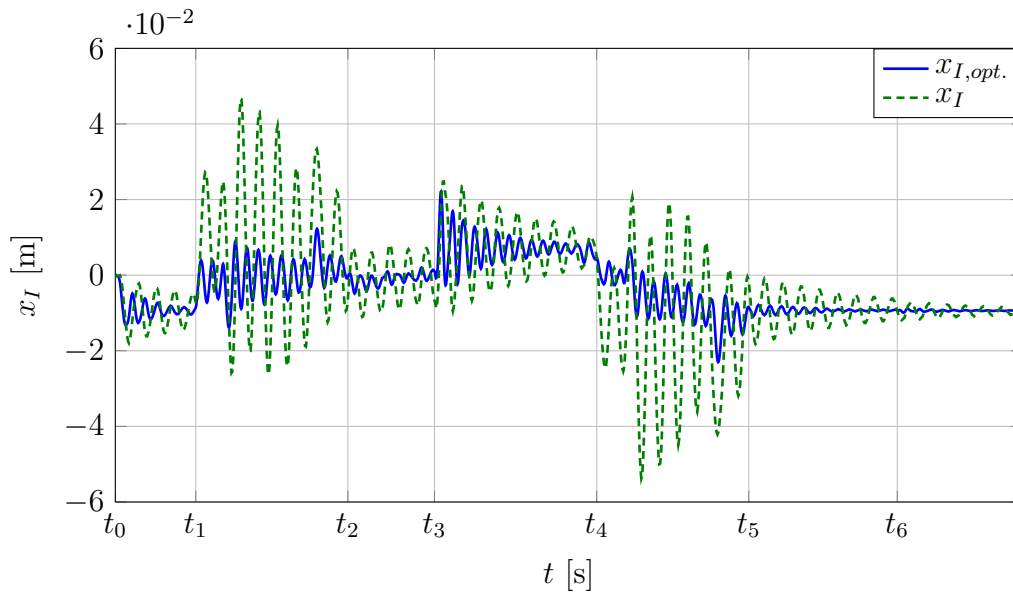


Bild 2.34: Optimierte Kranstrukturen (links CTB, rechts CT4)

Am Burchardkai-Kran sind die zusätzlichen Verstrebungen am Ausleger und im seitlichen Portal als fixe konstruktive Verbesserungen ebenfalls eingefügt. Beim CT4-Kran sind diese bereits vor der Optimierung vorhanden. Der Hamburger Containerkran birgt durch die schmale Portalspurweite (18m) deutlich mehr Potential als der CT4-Kran mit der 30,5m-Spurbreite. Im Unterabschnitt 2.4.2 sind die Diagramme der Strukturverformung hinsichtlich eines Referenz-Umschlagzyklus vor der Modifikation zu finden. Durch die Optimierung wird die maximale Auslenkung entlang des Auslegers am CTB-Kran signifikant reduziert. Gleichzeitig nimmt die Eigenschwingungsfrequenz zu. Die Bewertung von Amplitude und Frequenz nach Hucho [30] führt zu einer verbleibenden *spürbaren* Beeinträchtigung des Kranführers auf der Laufkatze. Die Arbeitsbedingungen haben sich durch die getroffenen Maßnahmen verbessert, vgl. Bild 2.18. Ein schnelleres Abklingen der Strukturschwingungen wird darüber hinaus durch Bild 2.35 belegt.

Bild 2.35: Horizontalverschiebung am CTB-Kran vor (x_I) und nach Optimierung ($x_{I,opt.}$)

Die vertikale Verformung am Ausleger entspricht nun qualitativ der des Auslegers am CT4-Kran vor der Optimierung. Die Verschiebung der Testpunkte nimmt proportional zur Entfernung vom Portal zu, siehe Bild 2.17. Quantitativ sind die Auswirkungen der Optimierung auf die Verschiebungen der CT4-Struktur geringer als beim Containerkran

am Burchardkai. Die vertikale Verformung während des Umschlagbetriebs wird marginal reduziert, denn im oberen Portalbereich und am Ausleger werden im Rahmen der Optimierung keine Veränderungen vorgenommen. Weitere Ergebnisse sind im angehängten Abschnitt A.3, Bilder A.4 und A.5, nachzuschlagen.

Die Resultate des Simplex-Algorithmus sind somit dargestellt. Es muss kritisch angemerkt werden, dass die strukturellen Modifikationen im unteren Portalbereich (Versteifung) nur beschränkt praktikabel sind. Durch den Eingriff in den Arbeitsraum der Stelzenkrane wird diese Maßnahme von Konstrukteuren generell abgelehnt. Alternativ müssen Ersatzmaßnahmen ausgewählt werden (bspw. äußere Verstärkung des unteren Portalbereichs, passive oder aktive Tilgung der Strukturbewegungen auf Höhe des Auslegers), um vergleichbare Ergebnisse erzielen zu können.

2.6 Fazit der Strukturschwingungen bei Containerkranen

Die einleitende Betrachtung der Charakteristik von Containerkranen stellt die strukturelle Konfiguration von modernen Kranen zum Be- und Entladen von Containerschiffen vor. Während der vergangenen 50 Jahre ist die Struktur der Krane kontinuierlich gewachsen und den Anforderungen des Containerumschlags angepasst worden, so dass eine nahezu einheitliche konstruktive Form entwickelt wurde. Unterscheidungsmerkmale drücken sich in punktuellen Alternativlösungen und unterschiedlichen Dimensionen aus, wie z. B. die Portalspurweite, die Auslegerkonfiguration oder auch der Laufkatztyp. Zwei moderne Containerkrane sind mit ihren Kenndaten hinterlegt und werden im Verlauf der Arbeit wiederkehrend als Anwendungsbeispiele herangezogen. Die Krane gehören der Post-Panamax- bzw. der Suezmax-Klasse an und werden in norddeutschen Häfen betrieben (Hamburg und Bremerhaven).

Zur vollständigen Beschreibung der Systemdynamik der mechanischen Strukturen benötigt man zunächst ein zutreffendes Modell. Dieses wird auf der Basis von finiten Elementen für die kontinuierliche Darstellung der Verschiebungen und Verformungen hergeleitet. Balkenelemente repräsentieren die konstruktiven Elemente der Krane. Eine Verformungshypothese nach Timoshenko wird angewendet, welche Schubverformungen innerhalb der Balken berücksichtigt. Weitere verformungsrelevante Elemente (Kranfahrwerk, Drehgelenke an den Zugbändern, Gegengewichte am Kranfahrwerk und im oberen Portal, usw.) sind entsprechend ihrer dynamischen Wirkung im Modell eingefügt. Materialdämpfung wird nach RAYLEIGH implementiert und ist realen Schwingungsdaten vom Kran in Hamburg entnommen. Die gesammelten Informationen resultieren in einem System von Bewegungsgleichungen.

Realistische Strukturverformungen können erst nach erfolgreicher Verifikation des Modells garantiert werden. Für die Verifikation der Modellgleichungen werden die Modalanalyse und das bewegte-Last-Modell herangezogen. Zusätzlich zu den Konstruktionsdaten der Containerkrane liegen statische Modelle der Hersteller als KRASTA-Modelle vor, welche die Abbildung von Eigenschwingungen und Schwingungsformen ermöglichen. Ein Abgleich mit den ermittelten Strukturschwingungen der Finite-Elemente-Modelle bestätigt

die Gültigkeit der Modellierung. Weiterhin unterstreicht eine Verformungsanalyse des Kranauslegers mit bewegter Last die realistische Abbildung der Systemdynamik.

Folglich kann die Strukturanalyse zur Ermittlung der charakteristischen Verformung der Krane während des Containerumschlags durchgeführt werden. Als äußere Last wird ein Referenz-Umschlagzyklus für einen Standardcontainer implementiert, der einen Verlaudezyklus wiedergibt. Resultate der Strukturdynamik sind für maßgebende Positionen am Kran abgebildet. Es fällt auf, dass vor allem die horizontalen Strukturschwingungen in Richtung des Auslegerbalkens zu Beeinträchtigungen beim Umschlag führen können. Vertikalverschiebungen sind nicht störend für den Betrieb. Die Variationen der Lastparameter liefern Aussagen zur Auswirkung auf die veränderte Strukturbelastung. Das bewegte-Last-Modell dient als Grundlage. Zusätzlich können den Simulationsergebnissen der Strukturanalyse Informationen über die Belastung der Kaje entnommen werden. Die Kajakollektive für Betriebslasten beim Containerumschlag und bei auftretenden Windlasten erlauben Rückschlüsse auf die eingeleiteten Kräfte durch die Krane. Verwendung finden die Daten bei der Belastbarkeitsabschätzung von bestehenden Kajan sowie bei der Dimensionierung zukünftiger Kajanlagen.

Ausgewählte Ergebnisse der Strukturuntersuchung bestätigen die Notwendigkeit von Maßnahmen zur Schwingungsreduzierung. Ausgehend von der Strukturanalyse werden Modifikationen der Krane betrachtet. Für einen Teil der Modifikationen kommt das Optimierungsverfahren der Simplex-Methode zum Einsatz, welche die optimalen Parameterwerte ermittelt. Es kann gezeigt werden, dass insbesondere am CTB-Kran eine signifikante Strukturschwingungsdämpfung erzielt wird, wohingegen die Struktur des Containerkrans in Bremerhaven nur minimal modifiziert wird und demnach marginale Schwingungsreduktion zur Folge hat. Aufgrund der Randbedingungen des Containerumschlags sind nicht alle untersuchten Modifikation ohne Einschränkungen umsetzbar.

Kapitel 3

Struktur-Last-Kopplung

Im Anschluss an die strukturelle Untersuchung von Containerkränen folgt die eingehende mathematische und mechanische Betrachtung der Kopplung von Struktur und Last. Für den Referenz-Umschlagzyklus im Unterabschnitt 2.4.2 ist die angehängte Last vereinfacht als äußere Kraft am Kranausleger dargestellt worden. Die dynamischen Einflüsse der Lastbewegung wurden vernachlässigt. Im Folgenden wird der Einfluss von Lastschwingungen auf die Strukturmechanik untersucht und es werden damit die Voraussetzungen für die Unterdrückung von Lastschwingungen geschaffen.

Das Kopplungsmodell der Struktur und der Last stellt zum einen den Aufbau am realen Containerkran dar und zum anderen den Containerbrückenversuchsstand des Instituts, vgl. Abschnitt 4.2. Maßgebend sind der land- und wasserseitige Containerkranausleger, die Laufkatze, die Tragseile sowie das Lastaufnahmemittel mit der angehängten Last (Bild 3.1). Die Laufkatze verfährt entlang des Auslegerbalkens und positioniert das Lastaufnahmemittel relativ zum Containeraufnahme- bzw. -ablageplatz. Wie bereits erwähnt, existieren die Varianten der Maschinenhauskatze und der seilgeführten Laufkatze, Zrnić u. a. [99]. Eine Maschinenhauskatze (CTB-Kran) belastet die Kranstruktur mit bis zu $80 \cdot 10^3 \text{ kg}$. Entsprechend viel Leistung müssen die Antriebe der Laufkatze bereitstellen. Seilgeführte Laufkatzen (CT4-Kran) führen das Hubwerk nicht mit. Es befindet sich im hinteren Portalbereich und die Laufkatze verfügt über deutlich weniger bewegte Masse ($34 \cdot 10^3 \text{ kg}$). Die Seilführung vom landseitigen Portal zum wasserseitigen Ausleger ist in diesem Fall jedoch konstruktiv und wartungstechnisch aufwendiger. Das Hubwerk weist üblicherweise zwei Seilwinden auf. Auf jeder Seilwinde ist ein Tragseil aufgewickelt, das die land- bzw. wasserseitige Verbindung mit dem Lastaufnahmemittel herstellt. Eine örtliche Trennung der vorderen und hinteren Seilwinden ermöglicht theoretisch eine separate Ansteuerung der Tragseile. Praktisch ist diese im Hafenbetrieb nicht umgesetzt. Jedes Seilende ist an einer Lastmessdose befestigt, von dort zum Lastaufnahmemittel, über eine Umlenkrolle wieder zurück zum Hubwerk und erneut zum Lastaufnahmemittel sowie zum Hubwerk geführt. Die Kraftmessung bietet die Gelegenheit, jederzeit die angehängte Last zu ermitteln, was aus sicherheitstechnischen Aspekten umgesetzt wird. Aber auch für regelungstechnische Anwendungen ist dies von Nutzen, worauf in Abschnitt 4.4 noch näher eingegangen wird. Die Tragseile bestehen aus Stahl und verfügen über eine spezielle Wicklung. Sie müssen eine besonders hohe Zugfestigkeit aufweisen und in hohem Maße ermüdungsarm sein. Das Lastaufnahmemittel ist die physische Verbindung von den Tragseilen und der Last. Es ist mit Umlenkrollen für die Seile und einem Einrastmechanismus

zum Ankoppeln der Container ausgestattet. Die entstehende Verbindung wird als starr angesehen, denn es treten keine relativen Verschiebungen und Verdrehungen zwischen Spreader und Last auf¹. Somit sind die Tragseile mechanisch über Drehgelenke mit der Last verbunden. Die angehängte Last besteht aus einem oder mehreren Standardcontainern, wobei bis zu vier TEU gleichzeitig umgeschlagen werden können, Lind u. a. [53]. Ein TEU ist mit 6,058m Länge (20ft), 2,438m Breite und 2,591m Höhe genormt. Nachfolgend werden unterschiedliche Modelle zur Abbildung der charakteristischen Dynamik für die Struktur-Last-Kopplung diskutiert.

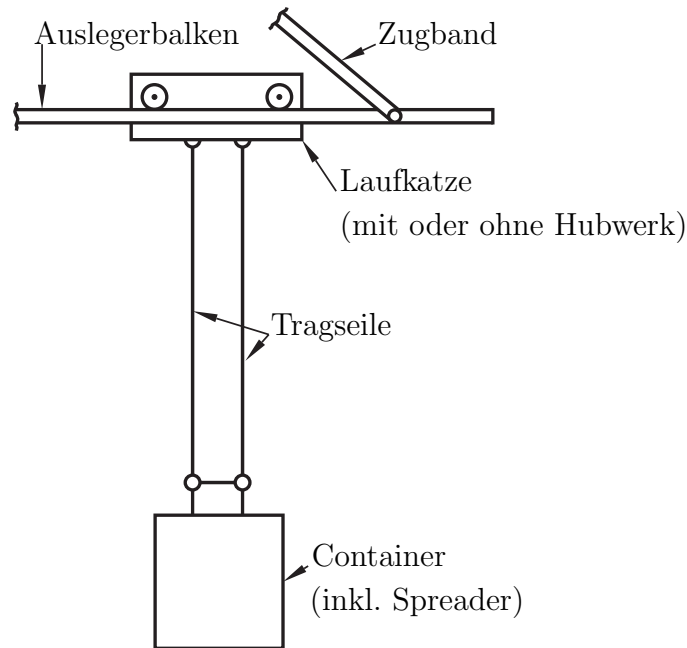


Bild 3.1: Komponenten der Struktur-Last-Kopplung

Ausgehend von der Modellierung der angehängten Last mit elastischen Seilen und gedämpfter Seildynamik (visko-elastische Seile) wird die Formulierung der nichtlinearen Gleichungen schrittweise den Anforderungen angepasst. Längssteife Seile zur Lastaufhängung werden untersucht, gefolgt von dem Schwerependel mit elastischem Faden. Anhand dieser Modellierungsmethodik wird die Stabilität der Lastschwingungen betrachtet mit dem Verweis auf mögliches instabiles Verhalten. Die weiterführende Untersuchung des Schwerependels hinsichtlich einer reduzierten Normalform der Systemdynamik legt die kritischen, die Instabilität verursachenden, Systemkomponenten offen. Eine kurze Zusammenfassung schließt das Kapitel ab.

3.1 Nichtlineares Modell

Die Modellierung orientiert sich an den Erkenntnissen von Bockstedte [8] zur Dynamik schwebender Krane. Für die Abbildung der Bewegungen von Aerostaten, welche zur Beförderung von großen Lasten eingesetzt werden sollen, wird u. a. eine Mehrkörpermodellierung auf der Basis von NEWTON-EULER-Gleichungen vorgenommen. Zur mathe-

¹Im Gegensatz dazu berücksichtigen Masoud u. a. [60] für ihrem vereinfachten Doppelpendelmodellentwurf das Lastaufnahmemittel in Form eines Drehfreiheitsgradmodells für die angeschlossene Last.

matischen Darstellung eines räumlich pendelnden Körpers am Kran eignet sich die in [8] vorgeschlagene Methodik hervorragend. Besonders die Formulierung mit visko-elastischen Seilen findet nachfolgend Anwendung. Die Grundlagen der technischen Dynamik, auf denen die Modellierung aufbaut, sind an Schiehlen [80] angelehnt. In diesem Zusammenhang wird auf Theis [88] hingewiesen, bei dem sich die Ausführungen zur nichtlinearen Modellierung in ähnlicher Form wiederfinden.

3.1.1 Kinematik

Ein mechanisches System, wie z. B. in Bild 3.1 dargestellt, muss zunächst bzgl. der Lage der einzelnen p Systemkomponenten im Betrachtungsraum eindeutig beschrieben sein. Jede Starrkörperbewegung wird mit je drei translatorischen und rotatorischen Verschiebungen charakterisiert, so dass für p freie Körper maximal $6p$ Freiheitsgrade vorhanden sind. Kinematische Einschränkungen reduzieren die Bewegungsmöglichkeiten, d. h. Bindungen durch Gelenke, Seile usw., um die Anzahl der vorliegenden Zwangsbedingungen (r). Letztlich ergeben sich

$$f = 6p - r \quad (3.1)$$

voneinander unabhängige verallgemeinerte Koordinaten, die im $(f \times 1)$ -Vektor $\mathbf{y}$ für die Beschreibung der Lage des Gesamtsystems zusammengefasst werden.

Für den pendelnden Körper am Kran wird angenommen, dass die Laufkatze und der Container durch die Tragseile verbunden sind, Bild 3.2. Wird weiterhin davon ausgegangen, dass die Trajektorie der Laufkatze vorgegeben wird und demnach die Bewegungen des Containers keinen Einfluss auf die Laufkatze haben, so folgt $p = 1$. Die Lage des Containers ist durch

$$\mathbf{r}_C = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

und die Drehungsmatrix

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_C &= \mathbf{S}_x \mathbf{S}_y \mathbf{S}_z, \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

bezüglich der KARDAN-Winkel (α, β, γ) eindeutig bestimmt ($r = 0$). Es liegen im Fall von elastischen Tragseilen $f = 6$ Freiheitsgrade vor, die im Vektor $\mathbf{y}$ der verallgemeinerten Koordinaten zusammengefasst werden:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Eine allgemeine Schreibweise für die Lage $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{y})$ und die Drehungsmatrix $\mathbf{S}_i(\mathbf{y})$ verdeutlicht den Einfluss der verallgemeinerten Koordinaten. Wird die Position der Laufkatze als gegeben vorausgesetzt, dann gilt

$$\mathbf{r}_L = \begin{bmatrix} x_L \\ y_L \\ z_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_L = \mathbf{0}^{3 \times 3}, \quad (3.5)$$

wobei die Bewegung entlang des Auslegerbalkens (x -Richtung) mit der Koordinate s beschrieben wird.

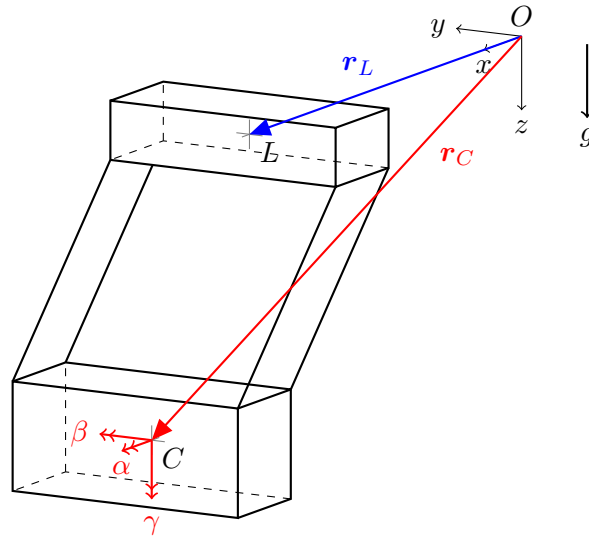


Bild 3.2: Schematische Darstellung für nichtlineares Modell

Mit dem Lagevektor der Last $\mathbf{r}_C$ und der Drehungsmatrix $\mathbf{S}_C$ erhält man die translatorische und rotatorische Geschwindigkeit des Containers:

$$\mathbf{v}_C = \dot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{J}_T \dot{\mathbf{y}}, \quad (3.6)$$

$$\boldsymbol{\omega}_C = \mathbf{J}_R \dot{\mathbf{y}}, \quad (3.7)$$

unter Verwendung der JACOBI-Matrizen der Translation $\mathbf{J}_T$ und der Rotation $\mathbf{J}_R$:

$$\mathbf{J}_T = \frac{\partial \mathbf{r}_C}{\partial \mathbf{y}}, \quad \mathbf{J}_R = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{y}}, \quad \text{mit } \frac{\partial \widetilde{\mathbf{s}}}{\partial y_j} = \frac{\partial \mathbf{S}_C}{\partial y_j} \mathbf{S}_C^T. \quad (3.8)$$

Der Zusammenhang von $\partial \mathbf{s}$ und $\widetilde{\partial \mathbf{s}}$ folgt aus einem schiefsymmetrischen (3×3) -Tensor des (3×1) -Vektors $\partial \mathbf{s}$. Die Vektoren der Beschleunigung lauten:

$$\mathbf{a}_C = \ddot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{J}_T \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}_T \dot{\mathbf{y}}, \quad (3.9)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_C = \mathbf{J}_R \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}_R \dot{\mathbf{y}}, \quad (3.10)$$

mit den zugehörigen Koeffizientenmatrizen $\mathbf{K}_{T,R}$:

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial (\mathbf{J}_T \dot{\mathbf{y}})}{\partial \mathbf{y}}, \quad \mathbf{K}_R = \frac{\partial (\mathbf{J}_R \dot{\mathbf{y}})}{\partial \mathbf{y}}. \quad (3.11)$$

Generell berücksichtigen (3.11) zusätzlich partielle Geschwindigkeiten und Beschleunigungen, welche in der aktuellen Betrachtung aufgrund fehlender Zwangsbedingungen entfallen.

Es bietet sich an, den Vektor

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_L - \mathbf{r}_C \quad (3.12)$$

für die Beschreibung der Seilgeometrie zu verwenden. Unter Berücksichtigung der Abmaße des Containers erhält man die Vektoren vom Containerschwerpunkt zu den Seilanknüpfpunkten an den Ecken der oberen Begrenzungsfläche:

$$\mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} -a_C \\ -b_C \\ -c_C \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} a_C \\ -b_C \\ -c_C \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_3 = \begin{bmatrix} a_C \\ b_C \\ -c_C \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_4 = \begin{bmatrix} -a_C \\ b_C \\ -c_C \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Kombiniert man die Vektoren aus (3.12) und (3.13) mit (3.3) sowie den Geometrien vom Schwerpunkt der Laufkatze zu den korrespondierenden Eckpunkten, so erhält man die Vektoren der Tragseile $\mathbf{r}_i$:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + \begin{bmatrix} -a_L \\ -b_L \\ c_L \end{bmatrix} - \mathbf{S}_C \mathbf{d}_1, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_0 + \begin{bmatrix} a_L \\ -b_L \\ c_L \end{bmatrix} - \mathbf{S}_C \mathbf{d}_2, \quad (3.14)$$

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_0 + \begin{bmatrix} a_L \\ b_L \\ c_L \end{bmatrix} - \mathbf{S}_C \mathbf{d}_3, \quad \mathbf{r}_4 = \mathbf{r}_0 + \begin{bmatrix} -a_L \\ b_L \\ c_L \end{bmatrix} - \mathbf{S}_C \mathbf{d}_4. \quad (3.15)$$

Bild 3.3 stellt beispielhaft den Vektor $\mathbf{r}_3$ des dritten Tragseils dar.

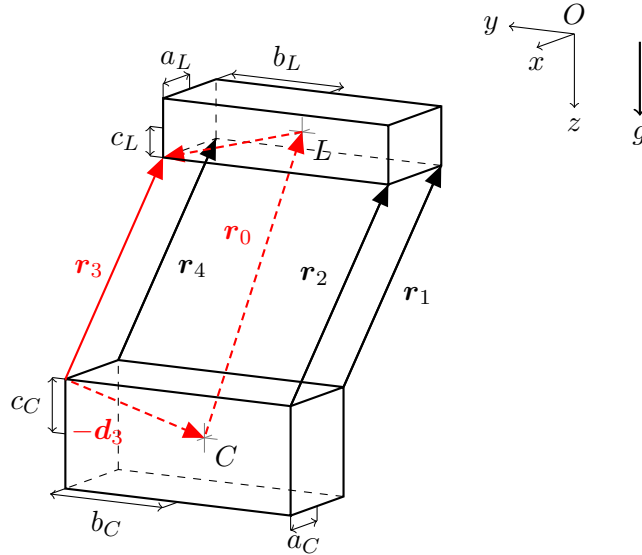


Bild 3.3: Geometrische Darstellung für nichtlineares Modell

Der Vektor der jeweiligen Seilgeschwindigkeit ist mit

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_L - \mathbf{J}_T \dot{\mathbf{y}} - (\mathbf{J}_R \dot{\mathbf{y}}) \times (\mathbf{S}_C \mathbf{d}_i), \quad i = 1 \dots 4, \quad (3.16)$$

angegeben und wird nachfolgend zur Betrachtung der dynamischen Eigenschaften der Tragseile herangezogen.

3.1.2 Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen des Systems in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinaten erhält man durch die Kombination der NEWTONschen Gleichung

$$m \mathbf{J}_T \ddot{\mathbf{y}} + m \mathbf{K}_T \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}^e \quad (3.17)$$

mit der EULERSchen Gleichung

$$\mathbf{I} \mathbf{J}_R \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{I} \mathbf{K}_R \dot{\mathbf{y}} + (\mathbf{J}_R \dot{\mathbf{y}}) \times (\mathbf{I} \mathbf{J}_R \dot{\mathbf{y}}) = \mathbf{l}^e, \quad (3.18)$$

unter Verwendung der Masse des Containers m , des Trägheitstensors $\mathbf{I}$, den Beziehungen (3.8) und (3.11) sowie den eingprägten Kräften $\mathbf{f}^e$ und eingprägten Momenten $\mathbf{l}^e$. Die NEWTON-EULERSchen Bewegungsgleichungen (3.17) und (3.18) für das betrachtete freie System lauten zusammengefasst:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{M}}(\mathbf{y}) \ddot{\mathbf{y}} + \overline{\mathbf{k}}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) &= \overline{\mathbf{q}}^e(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t), \quad \text{mit} \\ \overline{\mathbf{M}} &= \begin{bmatrix} m \mathbf{J}_T \\ \mathbf{I} \mathbf{J}_R \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} m \mathbf{K}_T \dot{\mathbf{y}} \\ \mathbf{I} \mathbf{K}_R \dot{\mathbf{y}} + (\mathbf{J}_R \dot{\mathbf{y}}) \times (\mathbf{I} \mathbf{J}_R \dot{\mathbf{y}}) \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{q}}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^e \\ \mathbf{l}^e \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Vorausgesetzt die KARDAN-Winkel (α, β, γ) beschreiben die Drehungen des Hauptachsensystems der Last mit den zugehörigen Trägheitsmomenten (I_x, I_y, I_z) , folgt daraus der Trägheitstensor bzgl. des Inertialsystems zu

$$\mathbf{I} = \mathbf{S}_C \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \mathbf{S}_C^T. \quad (3.20)$$

Die eingprägten Kräfte $\mathbf{f}^e$ ergeben sich aus der Gewichtskraft des Containers und den Kräften in den Tragseilen, welche die Verbindung zur Führung durch die Laufkatze herstellen. Eingprägte Momente $\mathbf{l}^e$ bzgl. des Schwerpunktes des Containers resultieren aus den Seilkräften mit den Hebarmen d_i (3.13) (vgl. Bild 3.3):

$$\mathbf{f}^e = m \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^4 \mathbf{f}_i, \quad (3.21)$$

$$\mathbf{l}^e = \sum_{i=1}^4 (\mathbf{S}_C \mathbf{d}_i) \times \mathbf{f}_i. \quad (3.22)$$

Bockstedte [8] formuliert die Seilkraft $\mathbf{f}_i$ mit einer elastischen und einer viskosen Komponente. Die elastische Rückstellkraft berücksichtigt die Steifigkeit von Seilen in Form der Dehnsteifigkeit EA (Elastizitätsmodul E , Querschnittsfläche A). Die Dämpfungskraft gibt das abklingende dynamische Verhalten der Seile wieder und begünstigt die numerische Stabilität beim Lösen der Bewegungsgleichungen. Mit DA wird der Proportionalitätsfaktor für den linear-viskosen Anteil bezeichnet. Theis [88] schlägt für den Dämpfungsterm vor, einen Projektionsansatz für die Darstellung des Vektors der Seillängenänderung $\dot{\mathbf{r}}_i$ auf den Seilvektor $\mathbf{r}_i$ zu verwenden. Dieses Vorgehen hat numerische Vorteile gegenüber der ursprünglichen Formulierung in [8]. Letztlich entspricht die Seilkraft $\mathbf{f}_i$ in (3.21) und (3.22)

der Multiplikation des Einheitsrichtungsvektors des jeweiligen Seils mit dem Summand aus Rückstell- und Dämpfungskraft:

$$\mathbf{f}_i = \frac{\mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r}_i\|} \left[\frac{EA}{l_i} (\|\mathbf{r}_i\| - l_i) + \frac{DA}{l_i} \left(\frac{\mathbf{r}_i^T \dot{\mathbf{r}}_i}{\|\mathbf{r}_i\|} - \dot{l}_i \right) \right], \quad i = 1, \dots, 4. \quad (3.23)$$

Die Größen l_i und $\dot{l}_i$ werden als gegeben betrachtet. Sie repräsentieren die Stellgrößen des Anwenders ähnlich der Vorgabe der Referenztrajektorie für die Laufkatze. Fasst man die transponierten JACOBI-Matrizen der Translation und Rotation (3.8) zusammen

$$\bar{\mathbf{J}}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_T^T & \mathbf{J}_R^T \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

erhält man die globale transponierte JACOBI-Matrix $\bar{\mathbf{J}}^T$. Eine Linksmultiplikation der NEWTON-EULERSchen Gleichungen (3.19) mit (3.24)

$$\bar{\mathbf{J}}^T \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{y}) \ddot{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{J}}^T \bar{\mathbf{k}}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) = \bar{\mathbf{J}}^T \bar{\mathbf{q}}^e(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t), \quad (3.25)$$

überführt in die Form eines idealen gewöhnlichen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{y}) \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{k}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) &= \mathbf{q}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t), \quad \text{mit} \\ \mathbf{M} &= \bar{\mathbf{J}}^T \bar{\mathbf{M}}, \quad \mathbf{k} = \bar{\mathbf{J}}^T \bar{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{q} = \bar{\mathbf{J}}^T \bar{\mathbf{q}}^e. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Die Bewegungsgleichungen der pendelnden Last am Kran (3.26) entsprechen einem (6×1) -Gleichungssystem gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Die Zustandsraumdarstellung ergibt sich nach (2.14) mit dem Zustandsvektor

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y & z & \alpha & \beta & \gamma & | & \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} & \dot{\alpha} & \dot{\beta} & \dot{\gamma} \end{bmatrix}^T \quad (3.27)$$

aus (3.26) zu

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}} \\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{y}) (\mathbf{q}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) - \mathbf{k}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})) \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Das Zustandsraumsystem (3.28) kann in dieser Form mit dem RUNGE-KUTTA-Algorithmus [20] gelöst werden und die Dynamik der pendelnden Last liegt folglich vor.

Die Vielseitigkeit des nichtlinearen Modells zeichnet sich vor allem durch die Einbindung beliebig orientierter Seile aus. Neben der dargestellten parallelen Seilführung (Bilder 3.2 und 3.3) sind geneigte Seilführungen bis hin zur V-förmigen Aufhängung denkbar. Die eindeutige Darstellung der Nick-, Roll- und Gierbewegung der Last durch die KARDAN-Winkel gewährleistet die zuverlässige Abbildung der Lastbewegungen bei auftretenden Verdrehungen. Nachteilig wirkt sich die als Differentialgleichung formulierte Seilkraft (3.23) aus. Die schnelle Seildynamik² führt zu annähernd sprunghaften Änderungen der Seilkraft, welche Auswirkungen auf die Lösung der Zustände (3.27) haben und damit u. U. zu falschen Ergebnissen führen. Außerdem weist die Seilkraft in diesen Fällen unrealistisch hohe oder niedrige Werte auf, die eine Verwendung z. B. zur Zustandsbeobachtung nicht zulassen.

²Die Zeitskala der Seillängsdynamik ist um Größenordnungen schneller als die Pendelschwingung der Last.

3.2 Reduziertes nichtlineares Modell

Eine eingehende Betrachtung des nichtlinearen Modells (3.26) lässt weitere vereinfachende Annahmen zur Modellreduktion erkennen. In Simulationen wurden lediglich Tragseile gleicher Länge l betrachtet, bei vollständig paralleler Führung. In der Praxis werden die Seile ebenfalls synchron betrieben. Die Position der Laufkatze s wird, wie schon in Abschnitt 3.1, als Vorgabe für die Modellierung betrachtet. Gleiches gilt nun auch für die mittlere Seillänge l . Nick- und Rollbewegungen des Containers treten in dieser Konfiguration nicht mehr auf. Eine zusätzliche Beschränkung der Gierschwingungen um die vertikale Achse führt zu der Betrachtung von längssteifen Seilen. Die Formulierung des reduzierten nichtlinearen Modells ist motiviert durch Lee [52] und wurde auch in [88] verwendet.

3.2.1 Kinematik

Entsprechend Bild 3.4 kann der (3×1) -Ortsvektor des Containerschwerpunkts $\mathbf{r}_C$ und die (3×3) -Drehungsmatrix $\mathbf{S}_C$ für die Seilorientierung durch

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_L + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_L + c_C \end{bmatrix} + \mathbf{S}_C \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

$$\mathbf{S}_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

beschrieben werden, unter Zuhilfenahme von (3.5), den halben Höhen der Laufkatze c_L und des Containers c_C sowie den Vorgaben s und l . Der Vektor vom Mittelpunkt der Unterseite der Laufkatze zum Mittelpunkt der Oberseite des Containers in der statischen Ruhelage und für $s = 0$ wird durch $[0, 0, l]^T$ beschrieben. Die Verschiebung des Containers bezüglich der Laufkatze wird exakt durch zwei ebene Drehungen wiedergegeben, bei synchronisierten Seillängen l . Der Größe ϕ beschreibt den Pendelwinkel in der x - z -Ebene, θ den Pendelwinkel in der y - z -Ebene. Beide Größen werden ausgehend von der statischen Ruhelage der Last, bzgl. der vertikalen Achse, abgetragen. Die Lage der hängenden Last mit längssteifen Seilen am Kran wird durch die verallgemeinerten Koordinaten

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

eindeutig beschrieben, bei vorliegenden Zwangsbedingungen s und l .

Der Vektor (3.29) ergibt sich mit (3.30) unter Berücksichtigung der Laufkatzkoordinate s und der mittleren Seillänge l zu

$$\mathbf{r}_C = \begin{bmatrix} s + l \sin(\phi) \\ l \cos(\phi) \sin(\theta) \\ c_C + c_L + l \cos(\phi) \cos(\theta) \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Die Bedingungen für die Laufkatzkoordinate und die Seillänge sind zeitvariant ($s := s(t)$,

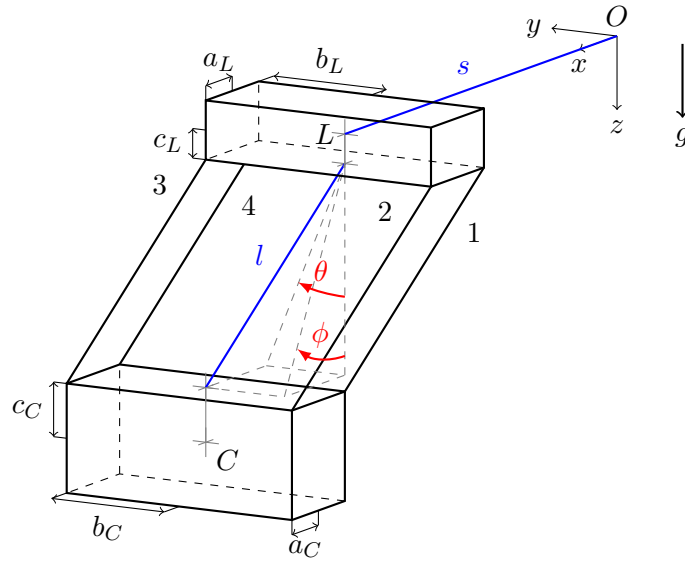


Bild 3.4: Schematische Darstellung für reduziertes nichtlineares Modell

$l := l(t)$), was sich in den zeitlichen Ableitungen des Ortsvektors $\mathbf{r}_C$ auswirkt:

$$\mathbf{v}_C = \dot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{J}_T(\mathbf{y}, t) \dot{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{v}}_C(\mathbf{y}, t), \quad (3.33)$$

$$\mathbf{a}_C = \ddot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{J}_T(\mathbf{y}, t) \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}_T(\mathbf{y}, t) \dot{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{a}}_C(\mathbf{y}, t), \quad (3.34)$$

mit der partiellen Geschwindigkeit $\bar{\mathbf{v}}_C$ und der partiellen Beschleunigung $\bar{\mathbf{a}}_C$:

$$\bar{\mathbf{v}}_C = \frac{\partial \mathbf{r}_C}{\partial t} = \begin{bmatrix} \dot{s} + \dot{l} \sin(\phi) \\ \dot{l} \cos(\phi) \sin(\theta) \\ \dot{l} \cos(\phi) \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{a}}_C = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_C}{\partial t^2} = \begin{bmatrix} \ddot{s} + \ddot{l} \sin(\phi) \\ \ddot{l} \cos(\phi) \sin(\theta) \\ \ddot{l} \cos(\phi) \cos(\theta) \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

Die JACOBI-Matrix $\mathbf{J}_T$ und die Koeffizientenmatrix $\mathbf{K}_T$ der Translation ergeben sich nach (3.8) sowie (3.11). Durch die Einschränkung der Nick-, Roll- und Gierbewegung ist die Last stets parallel zur horizontalen x - y -Ebene ausgerichtet, womit auch

$$\mathbf{J}_R = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\omega}_C = \mathbf{0} \quad (3.36)$$

gilt. Ohne rotatorische Bewegungen reduziert sich das betrachtete System auf das einer einzelnen Punktmasse. Die gesamte Last konzentriert sich im Schwerpunkt des Containers.

3.2.2 Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen beschreiben die Dynamik einer hängenden Punktmasse am Kran. Lediglich die EULERSche Gleichung

$$m \mathbf{J}_T \ddot{\mathbf{y}} + m \mathbf{K}_T \dot{\mathbf{y}} + m \bar{\mathbf{a}}_C = \mathbf{f}^e + \mathbf{f}^z \quad (3.37)$$

wird für die Beschreibung der Dynamik benötigt. Zusätzlich zu den eingprägten Kräften $\mathbf{f}^e$ treten Zwangskräfte $\mathbf{f}^z$, resultierend aus den Zwangsbedingungen, auf. Eine alternative Form der Darstellung ist mit

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{y}, t) \ddot{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{k}}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) &= \bar{\mathbf{q}}^e(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) + \bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{y}, t) \mathbf{g}, \quad \text{mit} \\ \bar{\mathbf{M}} &= m \mathbf{J}_T, \quad \bar{\mathbf{k}} = m \mathbf{K}_T \dot{\mathbf{y}} + m \bar{\mathbf{a}}_C, \quad \bar{\mathbf{q}}^e = \mathbf{f}^e, \quad \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{g} = \mathbf{f}^z, \end{aligned} \quad (3.38)$$

angegeben. Die eingepägten Kräfte $\mathbf{f}^e$ entsprechen nun ausschließlich der Gewichtskraft des Containers

$$\mathbf{f}^e = m \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

die Seilkräfte sind nun Zwangskräfte $\mathbf{f}^z$:

$$\mathbf{f}^z = \sum_{i=1}^4 \mathbf{f}_i = \sum_{i=1}^4 F_i \mathbf{e}, \quad \text{mit } \mathbf{e} = \mathbf{S}_C \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\phi) \\ -\cos(\phi) \sin(\theta) \\ -\cos(\phi) \cos(\theta) \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

Mit vier Seilen ist das System statisch überbestimmt, worauf im Unterabschnitt 3.2.3 gesondert eingegangen wird. Der Seilvektor $\mathbf{e}$ wird (3.29) entnommen, mit dem jeweiligen Betrag der Seilkraft F_i multipliziert und summiert. Die globale transponierte JACOBI-Matrix $\bar{\mathbf{J}}^T$ besteht in diesem Fall nur aus der transponierten JACOBI-Matrix der Translation (3.8):

$$\bar{\mathbf{J}}^T = \mathbf{J}_T^T. \quad (3.41)$$

Eine Linksmultiplikation von (3.41) mit (3.38)

$$\bar{\mathbf{J}}^T \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{y}, t) \ddot{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{J}}^T \bar{\mathbf{k}}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) = \bar{\mathbf{J}}^T \bar{\mathbf{q}}^e + \bar{\mathbf{J}}^T \bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{y}) g \quad (3.42)$$

ergibt:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{y}, t) \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{k}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) &= \mathbf{q}(\mathbf{y}, t), \quad \text{mit} \\ \mathbf{M} &= \bar{\mathbf{J}}^T \bar{\mathbf{M}}, \quad \mathbf{k} = \bar{\mathbf{J}}^T \bar{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{q} = \bar{\mathbf{J}}^T \bar{\mathbf{q}}^e, \quad \bar{\mathbf{J}}^T \bar{\mathbf{Q}} g = 0. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Gleichung (3.42) wendet das D'ALEMBERTSche Prinzip an, so dass die Reaktionskräfte $\mathbf{g}$ eliminiert werden. Die Terme der Bewegungsgleichung (3.43) sind:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} l^2 m & 0 \\ 0 & l^2 m \cos^2(\phi) \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} l m \left(\frac{1}{2} l \sin(2\phi) \dot{\theta}^2 + 2 \dot{\phi} \dot{l} + \ddot{s} \cos(\phi) \right) \\ 2 \dot{\theta} l m \cos(\phi) \left(\dot{l} \cos(\phi) - \dot{\phi} l \sin(\phi) \right) \end{bmatrix}, \quad (3.45)$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} -l m g \cos(\theta) \sin(\phi) \\ -l m g \cos(\phi) \sin(\theta) \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

Der $(n \times 1)$ -Zustandsvektor des Systems ergibt sich wiederum nach (2.14) zu

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \phi & \theta & | & \dot{\phi} & \dot{\theta} \end{bmatrix}^T, \quad (3.47)$$

mit $n = 2f$ und den reduzierten nichtlinearen Bewegungsgleichungen im Zustandsraum:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}} \\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{y}, t) (\mathbf{q}(\mathbf{y}, t) - \mathbf{k}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t)) \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

Es sei noch angemerkt, dass die Beträge der Seilkräfte F_i in (3.40) zunächst nicht einzeln bestimmt werden können. Zwar ist es möglich, unter Zuhilfenahme von (3.38), folgende Bedingung abzuleiten:

$$\sum_{i=1}^4 F_i = \underbrace{\mathbf{e}^T \overline{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{y}}}_0 + \mathbf{e}^T \overline{\mathbf{k}} - \mathbf{e}^T \mathbf{f}^e, \quad (3.49)$$

$$= m \left(l \dot{\phi}^2 + l \dot{\theta}^2 \cos^2(\phi) - \ddot{l} - \ddot{s} \sin(\phi) + g \cos(\theta) \cos(\phi) \right), \quad (3.50)$$

welche aber bei vier unbekannten Seilkräften F_i keine eindeutige Lösung zulässt. Zu beachten ist die Orthogonalität der Kraftrichtung $\mathbf{e}$ zur Trägheitskraft $\overline{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{y}}$ des globalen Systems.

3.2.3 Zwangskräfte

Die Zwangskräfte sind aufgrund der statischen Unbestimmtheit des reduzierten Systems unbekannt. Zur Bestimmung der Seilkräfte muss ein alternativer Lösungsweg gefunden werden, denn diese Informationen sind für den Entwurf eines Beobachters in Abschnitt 4.4 essentiell.

Mit dem Vektor $\mathbf{z} = [z_1, z_2, z_3]^T$ wird eine Transformation der vier Kräfte F_i auf einen dreidimensionalen Vektor $\mathbf{z}$ vorgenommen:

$$z_1 := F_1 + F_4, \quad z_2 := F_2 + F_3, \quad z_3 := F_1 + F_2. \quad (3.51)$$

Wendet man anschließend den Drallsatz auf den Container in Bild 3.4 bzgl. seines Schwerpunktes an, so erhält man je eine Gleichgewichtsbedingung pro Raumrichtung:

$$\sum M_x = 0 : \quad \frac{z_1 + z_2 - z_3}{z_3} = \frac{b_C \cos(\phi) \cos(\theta) - c_C \cos(\phi) \sin(\theta)}{b_C \cos(\phi) \cos(\theta) + c_C \cos(\phi) \sin(\theta)} := \Gamma_x, \quad (3.52)$$

$$\sum M_y = 0 : \quad \frac{z_2}{z_1} = \frac{a_C \cos(\phi) \cos(\theta) - c_C \sin(\phi)}{a_C \cos(\phi) \cos(\theta) + c_C \sin(\phi)} := \Gamma_y, \quad (3.53)$$

$$\sum M_z = 0 : \quad \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{a_C \cos(\phi) \sin(\theta) - b_C \sin(\phi)}{a_C \cos(\phi) \sin(\theta) + b_C \sin(\phi)} := \Gamma_z. \quad (3.54)$$

Man beachte, dass der Ausdruck Γ_z in (3.54) in der Ruhelage ($\phi = \theta = 0$) singulär wird. Eine stetige Fortsetzung in der Nähe der Singularität ist daher notwendig. Anschließend wird (3.40) mit (3.51) umformuliert:

$$\mathbf{f}^z = (z_1 + z_2) \mathbf{e} \quad \rightarrow \quad \|\mathbf{f}^z\| = z_1 + z_2. \quad (3.55)$$

Der Betrag der Zwangskräfte $\|\mathbf{f}^z\|$ ergibt eine vierte Gleichung, zusätzlich zu (3.52), (3.53) und (3.54). Zusammengefasst entspricht das dem folgenden Gleichungssystem für die transformierten Beträge der Seilkräfte:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -(1 + \Gamma_x) \\ \Gamma_y & -1 & 0 \\ 1 & -\Gamma_z & \Gamma_z - 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\mathbf{f}^z\| \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.56)$$

Für eine eindeutige Lösung muss (3.56) orthogonalisiert werden. Dies geschieht mittels Linksmultiplikation mit der transponierten Matrix $\mathbf{\Gamma}^T$

$$\mathbf{\Gamma}^T \mathbf{\Gamma} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \mathbf{\Gamma}^T \begin{bmatrix} \|\mathbf{f}^z\| \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.57)$$

Der Betrag der Zwangskraft wird abermals mit dem Term $\mathbf{e}^T (\bar{\mathbf{k}} - \mathbf{f}^e)$ substituiert und man erhält die abgewandelten Seilkräfte $\mathbf{z}$ als:

$$\mathbf{z} = (\mathbf{\Gamma}^T \mathbf{\Gamma})^{-1} \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{e}^T (\bar{\mathbf{k}} - \mathbf{f}^e). \quad (3.58)$$

Die Inverse $(\mathbf{\Gamma}^T \mathbf{\Gamma})^{-1}$ in (3.58) ist eine Operation auf einer (3×3) -Matrix, welche üblicherweise keine numerischen Probleme darstellt. Der Aufwand ist gering, unter der Bedingung, dass eine geeignete stetige Fortsetzung für (3.54) in der Umgebung der Ruhelage gefunden wird.

3.2.4 Vergleich und Linearisierung

Ein Vergleich von (3.26) mit (3.43) stellt die Leistungsfähigkeit des reduzierten nichtlinearen Modells gegenüber dem vollständigen nichtlinearen Modell heraus. Die Formulierung mit zwei verallgemeinerten Koordinaten (vier Zustandsgrößen) gegenüber sechs (12 Zustandsgrößen) verzichtet auf die Darstellung von Nick-, Roll- und Gierbewegungen der Last. Somit handelt es sich bei (3.43) um Bewegungsgleichungen mit längssteifen Seilen im Gegensatz zu visko-elastischen Seilen in (3.26). Hinsichtlich eines Referenz-Umschlagzyklus

$$s(t) = \begin{cases} 0\text{m} & t < t_{1s} = 6\text{s}, \\ \frac{3\text{m}}{10\text{s}} (t - t_{1s}) & t_{1s} \leq t \leq t_{2s} = 40\text{s}, \\ 10,2\text{m} & t > t_{2s}, \end{cases} \quad (3.59)$$

$$l(t) = \begin{cases} 8,3\text{m} & t < t_{1l} = 1\text{s}, \\ -\frac{4\text{m}}{10\text{s}} (t - t_{1l}) & t_{1l} \leq t \leq t_{2l} = 16\text{s}, \\ 2,3\text{m} & t_{2l} < t < t_{3l} = 32\text{s}, \\ \frac{4\text{m}}{10\text{s}} (t - t_{3l}) & t_{3l} \leq t \leq t_{4l} = 47\text{s}, \\ 8,3\text{m} & t > t_{4l}, \end{cases} \quad (3.60)$$

führen beide Formulierungen auf identische Ergebnisse, Bild 3.5. Der simulierte Containerumschlag transportiert eine angehängte Last von der Start- zur Zielposition. Die kartesischen Koordinaten der Last sind jeweils für das vollständige $(x-s, z)$ und reduzierte nichtlineare Modell (x_{red-s}, z_{red}) abgebildet. Die Koordinaten des Containers werden von beiden Modellierungen mit annähernd identischen Werten ermittelt. Demnach bildet auch die reduzierte Formulierung die Lastdynamik eindeutig ab. Die Verwendung von (3.43) zur weiteren Betrachtung und Analyse ist vorteilhaft, da u. a. der numerische Aufwand gering und die Implementierbarkeit am Versuchsstand gewährleistet sind.

Weiterhin soll die Betrachtung der linearisierten Dynamik des reduzierten Modells zum ganzheitlichen Systemverständnis beitragen. Dazu untersucht man die geringen Abweichungen $\hat{\mathbf{y}}$ der Istbewegung des Systems $\mathbf{y}$ von der Sollbewegung $\mathbf{y}_{soll}$:

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_{soll} + \hat{\mathbf{y}}, \text{ mit } \hat{\mathbf{y}} \ll 1. \quad (3.61)$$

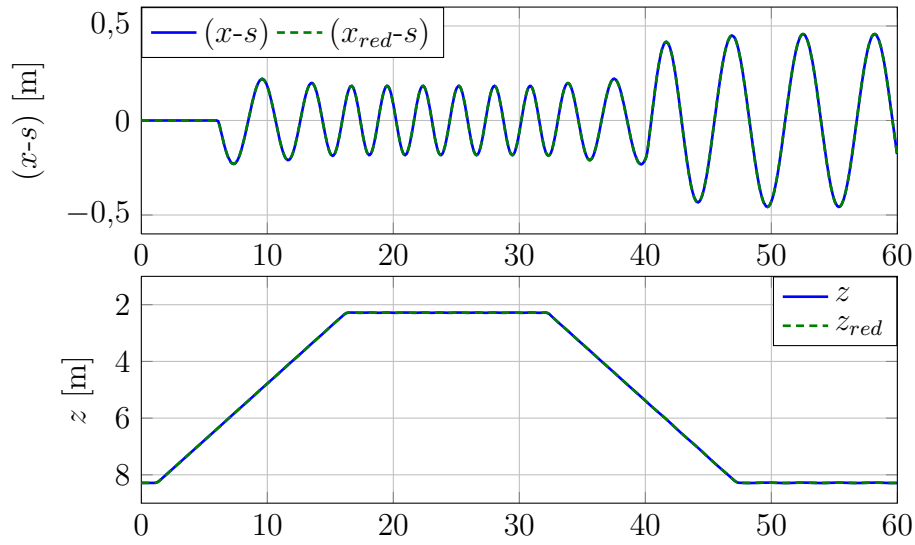


Bild 3.5: Vergleich der numerischen Ergebnisse des vollständigen und reduzierten nichtlinearen Modells

Setzt man (3.61) in (3.43) ein, führt anschließend eine TAYLORSche Reihenentwicklung bezüglich der abweichenden Dynamik ($\hat{\mathbf{y}}$) durch und vernachlässigt alle nichtlinearen Terme, erhält man die linearisierten Bewegungsgleichungen zu (3.43). Bild 3.6 stellt die nichtlineare sowie die linearisierte Dynamik zu (3.43) dar. Die Trajektorien für Laufkatze und Seillänge entsprechen (3.59) bzw. (3.60).

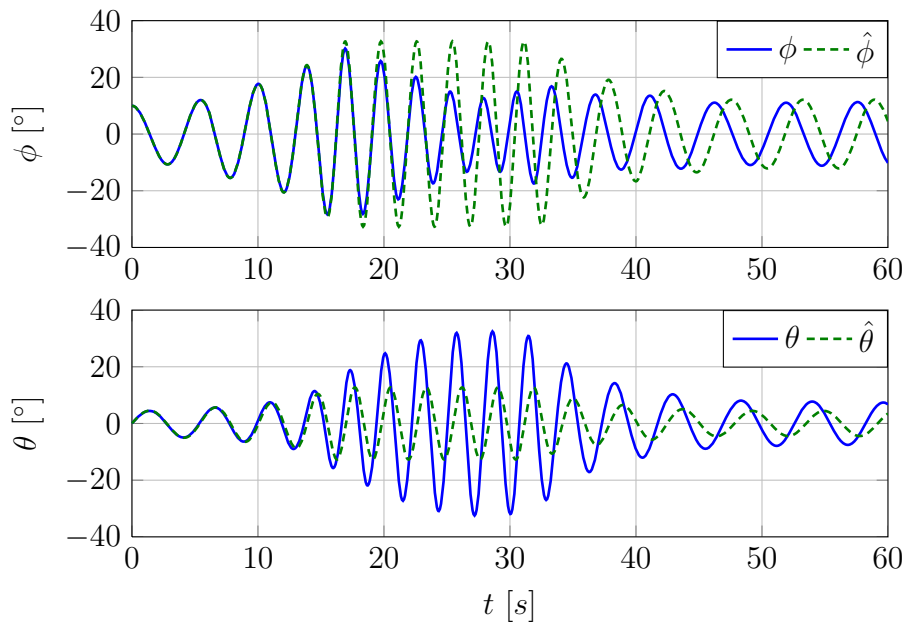


Bild 3.6: Nichtlineare und linearisierte Systemdynamik ($\phi_0 = 10^\circ$, $\dot{\theta}_0 = 5^\circ/\text{s}$)

Das Vergleichsergebnis zeigt dramatische Differenzen zwischen Lösungen der reduzierten nichtlinearen und linearisierten Bewegungsgleichungen. Bereits nach wenigen Sekunden divergieren die Lösungen beider verallgemeinerten Koordinaten (ϕ , θ) und der Linearisierungsfehler setzt sich in der Folge fort. Eine linearisierte Darstellung der Modellgleichungen

chungen ist demnach nicht geeignet, die Dynamik der angehängten Last am Kran wiederzugeben. Zum gleichen Schluss gelangt man für die linearisierte Darstellung der transformierten Zwangskräfte (3.58). Eine Multiplikation der pseudo-inversen Matrix $(\mathbf{\Gamma}^T \mathbf{\Gamma})^{-1}$ mit $\mathbf{\Gamma}^T$ und der Summe der Seilkräfte entlang des Seilvektors $\mathbf{e}$ enthält nichtlineare trigonometrische Terme. Die Entwicklung dieses Ausdrucks in einer TAYLOR-Reihe und die Vernachlässigung nichtlinearer Terme wird zu inkonsistenten Zwangskräften führen. Implizit steckt das bereits in den linearisierten Bewegungsgleichungen, welche in der Form (3.37) die Zwangskräfte berücksichtigen.

3.3 Schwerependel mit elastischem Faden

Ausgehend von der Untersuchung der angehängten Last in Form einer konzentrierten Masse an einem längssteifen Seil, vgl. Abschnitt 3.2, wird die Analyse auf das Schwerependel mit einem elastischen Faden erweitert. Bei Magnus und Popp [58] finden sich einige Ausführungen zu dieser Thematik. Das Pendelmodell für die angehängte Last am Kran birgt vielschichtige dynamische Eigenarten, die durch minimale Veränderung der Modellgleichung in Erscheinung treten.

Ausgehend vom Schwerependel mit parametrischer Fadenlänge $L(t)$ wird eine Energiebetrachtung des Systems vorgenommen, um den Energieeintrag durch die variierende Fadenlänge bemessen zu können. Die Stabilität dieses schwingenden Systems wird anschließend untersucht, wobei die Dynamik auf die MATHIEUSche Differentialgleichung zurückgeführt werden kann. Eine Formulierung mit elastischem Faden ergibt eine weitere Differentialgleichung. Letztlich liegen zwei gekoppelte Differentialgleichungen vor, die den Koppelschwinger des Schwerependels mit elastischem Faden charakterisieren.

3.3.1 Schwerependel mit parametrischer Fadenlänge

Die Länge eines Pendels sei als zeitabhängige Funktion $L := L(t)$ definiert. Ist die Zeitabhängigkeit zudem periodischer Gestalt und wirkt sie als Anregung auf das schwingungsfähige System (z. B. Pendel), so spricht man von parametererregten Schwingungen. Die Erregung findet als Folge zeitabhängiger Parameter Eingang in die Bewegungsgleichung. Mit der periodischen Anregung zeigen sich die Zusammenhänge von verschiedenen Schwingungen und periodischen (schwingenden) Parametern, wobei die Anregungsperiode im Allgemeinen ein Vielfaches der Periode der Eigenschwingung des Systems ist. Das prominenteste Anwendungsbeispiel ist die Schaukel. Von dieser ist bekannt, dass sich eine parametrische Anregung in der Ruhelage (kein Schaukeln) nicht auswirkt. Eine minimale Störung der Ruhelage und gleichzeitige parametrische Anregung kann zum Anfachen der Schwingungen führen. Die Ruhelage ist demnach instabil. Jedoch handelt es sich bei dieser Schaukel keinesfalls um eine erzwungene, sondern um eine rheonome³ (parametrische) Schwingung.

Ermittelt man für das System in Bild 3.7 die zeitliche Änderung des Dralls, so entspricht dies dem resultierendem äußeren Moment aus Gewichtskraft und Hebelarm (bzgl. des

³Rheonome Schwingungen beschreiben in der technischen Mechanik Systeme mit zeitveränderlichen Zwangsbedingungen.

Fixpunktes der Aufhängung):

$$\frac{d}{dt} (mL^2 \dot{\phi}) = 2mL\dot{L}\dot{\phi} + mL^2\ddot{\phi} = -mgL \sin(\phi). \quad (3.62)$$

Teilt man (3.62) durch den Faktor mL^2 , erhält man die Pendelgleichung

$$\ddot{\phi} + 2\frac{\dot{L}}{L}\dot{\phi} + \frac{g}{L} \sin(\phi) = 0, \quad (3.63)$$

in der mit $\dot{L}(t)/L(t)$ ein periodischer, parametrisch anregender, Term enthalten ist.

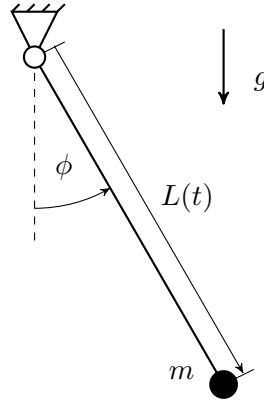


Bild 3.7: Schwerependel mit parametrischer Fadenlänge

3.3.2 Energiebetrachtung

Die Energie im System (3.63) wird mittels Energiesatz für das allgemeine nicht dissipative Pendel ermittelt:

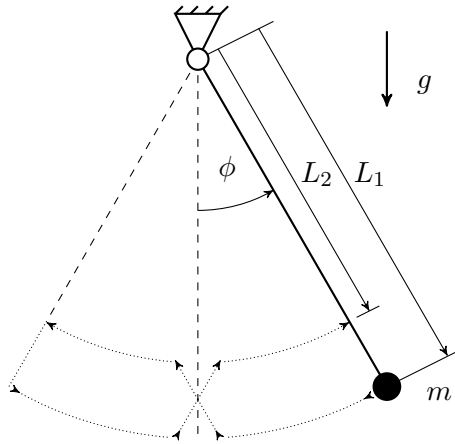
$$\frac{1}{2}mv^2 + mgL(1 - \cos(\phi)) = mgL(1 - \cos(\phi_0)). \quad (3.64)$$

Dieser setzt den aktuellen Energiezustand mit der translatorischen Geschwindigkeit v und der Auslenkung ϕ ins Verhältnis zur Anfangsenergie hinsichtlich der Anfangsauslenkung ϕ_0 . Nun wird die Schwingungsperiode unterteilt. Zum einen bewegt sich die Punktmasse in Richtung der Ruhelage $\phi = 0$ mit der maximalen Fadenlänge L_1 und zum anderen entfernt sich die Last von der Ruhelage mit minimaler Länge L_2 , bis zur maximalen Auslenkung. Von dort schwingt das Pendel wiederum mit L_1 zur Ruhelage hin und nach dem Passieren der Ruhelage weiter mit L_2 zur maximalen Auslenkung. Der Verlauf ist in Bild 3.8 schematisch dargestellt.

Der Energieeintrag E_H durch das Anheben der Last von L_1 auf L_2 in einer Viertelschwingung ergibt beim Durchqueren der Ruhelage $\phi = 0$:

$$E_H = mgh + \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2), \quad (3.65)$$

$$= mg \left\{ h + L_1(1 - \cos(\phi_{01})) \left[\left(\frac{L_1}{L_2} \right)^2 - 1 \right] \right\}, \quad (3.66)$$

Bild 3.8: Schwerependel mit variierender Fadenlänge $L_{1,2}$

unter Verwendung von $v_i = L_i \dot{\phi}_i$ ($i \in [1,2]$) und $h = L_1 - L_2$. Es wird angenommen, dass die Last aus einer Anfangsauslenkung ϕ_{01} losgelassen wird. Zu Beginn wird die Energie im System demnach komplett durch die potentielle Energie repräsentiert. Energieverlust tritt beim Absenken der Last in den Umkehrpunkten um die Differenz der Längen h auf

$$E_S = mgh \cos(\phi_{02}) \quad (3.67)$$

und orientiert sich an der *nächsten* Anfangsauslenkung ϕ_{02} nach einer halben Schwingungsperiode.

Die Differenz von zugeführter (3.66) und abgeführter Energie (3.67) einer Halbschwingung mit je einem Hub- sowie Senkvorgang

$$\Delta E = E_H - E_S, \quad (3.68)$$

$$= \underbrace{\frac{h(L_1^2 + L_1 L_2 + L_2^2)}{L_2^3}}_k \underbrace{mg L_1 (1 - \cos(\phi_{01}))}_{E_{01}} \quad (3.69)$$

ist in der Form (3.69) nur von den geometrischen Größen der Bewegung $L_{1,2}$ und der Anfangsauslenkung ϕ_{01} abhängig. Der Energiezuwachs durch eine Halbschwingung führt zum Energiezustand E_{02} und gleichermaßen zur Energie E_{0n} nach n Halbschwingungen:

$$E_{02} = E_{01} + \Delta E, \quad (3.70)$$

$$= E_{01} (1 + k), \quad (3.71)$$

$$E_{0n} = E_{01} (1 + k)^{n-1}. \quad (3.72)$$

Der beschriebene parametrische Wechsel der Fadenlänge L_i mit der doppelten Schwingungsfrequenz des Pendels resultiert in einem kontinuierlichen Energieeintrag in das System. Ein Schwerependel mit parametrischer Fadenlänge und dem beschriebenen Bewegungsverhalten ist instabil.

3.3.3 Stabilitätsbetrachtung

In der Stabilitätsbetrachtung wird das System (3.63) in seiner allgemeinen Form untersucht, vgl. Magnus und Popp [58]. Man nähert sich der Systemcharakteristik über die

Differentialgleichung zweiter Ordnung eines 1-Freiheitsgrad-Schwingers:

$$\ddot{x} + p_1(t) \dot{x} + p_2(t) x = 0. \quad (3.73)$$

Die Transformation

$$x = y \exp \left(-\frac{1}{2} \int p_1(t) dt \right) \quad (3.74)$$

überführt (3.73) in die Form der HILLSchen Differentialgleichung

$$\ddot{y} + P(t) y = 0, \quad P(t) = p_2(t) - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} p_1(t) - \frac{1}{4} p_1^2(t), \quad (3.75)$$

mit den periodischen Koeffizienten p_1 , p_2 und P . Eine bekannte Lösung von (3.75) ist

$$y(t) = C_1 e^{\mu_1 t} y_1(t) + C_2 e^{\mu_2 t} y_2(t). \quad (3.76)$$

Neben den periodischen Funktionen $y_{1,2}$ und den Konstanten $C_{1,2}$, sind die charakteristischen Exponenten $\mu_{1,2}$ maßgebend für die Stabilität der Lösung. Für die in der Schwingungslehre interessanten Fälle verfügt der charakteristische Exponent über einen reellen und einen imaginären Anteil. Ist nur ein Realteil positiv, so ist die Lösung (3.76) instabil. Stabiles Verhalten wird erzielt, wenn alle Realteile kleiner gleich Null sind und mindestens einer kleiner Null ist. Im Rahmen der Stabilitätsuntersuchung ist besonders der Übergang von stabil zu instabil entscheidend, so dass periodische (grenzstabile) Lösungen mit verschwindenden Realteilen $\mu_{1,2} = 0$ untersucht werden.

Einige periodische Koeffizienten P in der HILLSchen Differentialgleichung (3.75) sind eindringender untersucht worden, wobei die spezielle Form

$$P(t) = P_0 + \Delta P \cos(\Omega t) \quad (3.77)$$

auf die MATHIEUSche Differentialgleichung führt. Eine weitere Transformation $\tau = \Omega t$ erzielt die Normalform der Differentialgleichung in der MATHIEUSchen Form:

$$y'' + (\lambda + \gamma \cos(\tau)) y = 0, \quad \text{mit } \lambda = \frac{P_0}{\Omega^2} \text{ und } \gamma = \frac{\Delta P}{\Omega^2}. \quad (3.78)$$

Da es sich um eine Transformation der Zeit handelt, wird die zeitliche Ableitung $d/dt = (\dot{})$ durch das Differential $d/d\tau = ()'$ nach der dimensionslosen Zeit τ ersetzt. Strutt und van der Pol [85] haben den Spezialfall (3.77) für (3.75) hinsichtlich der stabilen und instabilen Parameterbereiche untersucht. Die Ergebnisse fanden Eingang in das INCE-STRUTT-Diagramm in Bild 3.9.

Die Abszisse (λ) beschreibt nach (3.78) die Änderung der Frequenz Ω und die Ordinate (γ) die Variation der Amplitude ΔP . Das Diagramm ist symmetrisch bzgl. der Abszisse und deshalb nur für positive γ -Werte abgebildet. Durchgezogene Linien im Diagramm repräsentieren den Übergang von stabilem zu instabilem Verhalten (grenzstabil). Die Realteile der charakteristischen Exponenten verschwinden auf den Linien. Schraffierte Regionen symbolisieren instabiles Lösungsverhalten der MATHIEUSchen Differentialgleichung,

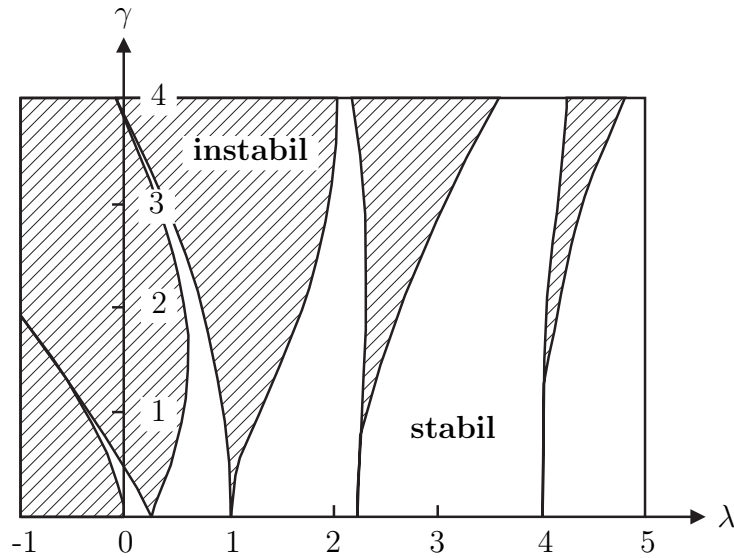


Bild 3.9: Stabilitätskarte nach INCE und STRUTT

unschraffierte Regionen stabile Konfigurationen. Instabile Lösungen entlang der Abszisse ($\gamma = 0$) treten bei

$$\lambda = \left(\frac{n}{2}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.79)$$

auf. Mit der Stabilitätskarte nach INCE und STRUTT werden die Auswirkungen der Variation von λ und γ verdeutlicht. Diese entsprechen nach (3.76) einer Anpassung der charakteristischen Exponenten $\mu_{1,2}$ in der Nähe des grenzstabilen Systemverhaltens.

Zunächst betrachtet man die Stabilität entlang der λ -Achse ($\gamma = 0$). Mit Ausnahme von (3.79) ist das System entlang der positiven λ -Achse stabil, für negative λ instabil. Bei konstantem γ ($\neq 0$) und der Variation der Frequenz Ω wechseln sich stabile und instabile Regionen ab. Beginnt die Lösung von (3.78) bspw. in einer instabilen Konfiguration ($\lambda = 1, \gamma = 1$) und erhöht oder verringert man die Frequenz der parametrischen Anregung ($\lambda \uparrow / \downarrow$), so wird das Verhalten der Lösung u. U. stabil. Im INCE-STRUTT-Diagramm hat sich ein Wechsel aus einem instabilen in einen stabilen Bereich vollzogen. Gleiches lässt sich für die Variation der normierten Anregungsamplitude γ bei konstantem λ erkennen. Der Übergang von stabilem zu instabilem Verhalten (oder anders herum) ist in dem gewählten Parameterbereich für γ jedoch beschränkter. Generell ist ersichtlich, dass durch Anpassung der Koeffizienten der parametrischen Anregung eine zunächst instabile Konfiguration stabilisiert werden kann. Für das Beispiel des Schwerependels mit parametrischer Fadenlänge bedeutet dies, dass eine Stabilisierung der Lastschwingung durch eine geeignete Wahl der Parameter λ und γ nach Bild 3.9 möglich ist. Klotter [42] hat darüber hinaus gezeigt, dass die instabilen Regionen der Stabilitätskarte durch die Berücksichtigung von Dämpfung reduziert werden können.

3.3.4 Koppelschwingungen

Der Einfluss der parametrischen Koeffizienten in einer Schwingungsgleichung wie z. B. in (3.63) oder (3.78) kann allgemein auch als gekoppelte Schwingungen bezeichnet werden.

Bei den bisher betrachteten Schwingern ist dies eine einseitige Kopplung. Die periodische Parameteranregung wirkt sich auf die schwingende Dynamik des Freiheitsgrades aus. Als Erweiterung werden sich gegenseitig beeinflussende Schwingungen betrachtet, eigentliche Koppelschwingungen. Die Stärke der Kopplung bestimmt den Beeinflussungsgrad der Schwingungen untereinander. Generell können die Phänomene von Koppelschwingern durch Untersuchungen an reduzierten Schwingern (einperiodische Schwingung mit einem Freiheitsgrad), welche untereinander gekoppelt sind, beleuchtet werden. Mettler [62] hat u. a. gekoppelte Differentialgleichungen angegeben und untersucht.

Das Schwerependel mit elastischem Faden ist ein solcher Koppelschwinger, Bild 3.10.

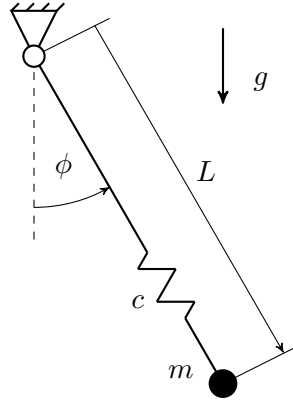


Bild 3.10: Schwerependel mit elastischem Faden

Elastisches Federverhalten wird über die Steifigkeit c angegeben. Unter Verwendung der Länge L_0 für das Schwerependel in Ruhe können die kinetische und potentielle Energie ermittelt werden:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m \left(L^2 \dot{\phi}^2 + \dot{L}^2 \right), \quad (3.80)$$

$$E_{pot} = mgL(1 - \cos(\phi)) + \frac{1}{2}c(L - L_0)^2. \quad (3.81)$$

Alternativ zur Anwendung des Drallsatzes in (3.62) für die Auslenkung ϕ und des Impulssatzes für die Fadenlänge L kann man mit den LAGRANGESchen Gleichungen zweiter Art mit (3.80) und (3.81) zu den Bewegungsgleichungen gelangen, siehe Magnus und Müller [57]. Die vorliegende Pendelgleichung (3.63) wird durch eine differentielle Gleichung entlang des Fadens ergänzt:

$$m\ddot{L} + c(L - L_0) - mL\dot{\phi}^2 + mg(1 - \cos(\phi)) = 0. \quad (3.82)$$

Mit der Transformation der Fadenlänge L auf die relative Auslenkung l bzgl. der Länge in Ruhe L_0

$$L = L_0(1 + l), \quad (3.83)$$

der Beschränkung $l \ll 1$, sowie den Konstanten

$$\omega_L^2 = \frac{c}{m}, \quad \omega_\phi^2 = \frac{g}{L_0}, \quad (3.84)$$

erhält man die transformierten gekoppelten Differentialgleichungen

$$\ddot{\phi} + 2\frac{\dot{l}}{1+l}\dot{\phi} + \frac{\omega_\phi^2}{1+l}\sin(\phi) = 0, \quad (3.85)$$

$$\ddot{l} + \omega_L^2 l - (1+l)\dot{\phi}^2 + \omega_\phi^2(1-\cos(\phi)) = 0. \quad (3.86)$$

Beide nichtlineare Bewegungsgleichungen (3.85) und (3.86) enthalten jeweils die verallgemeinerte Koordinate der anderen Gleichung. Der gegenseitige Einfluss der Schwingungen ist in Bild 3.11 ersichtlich.

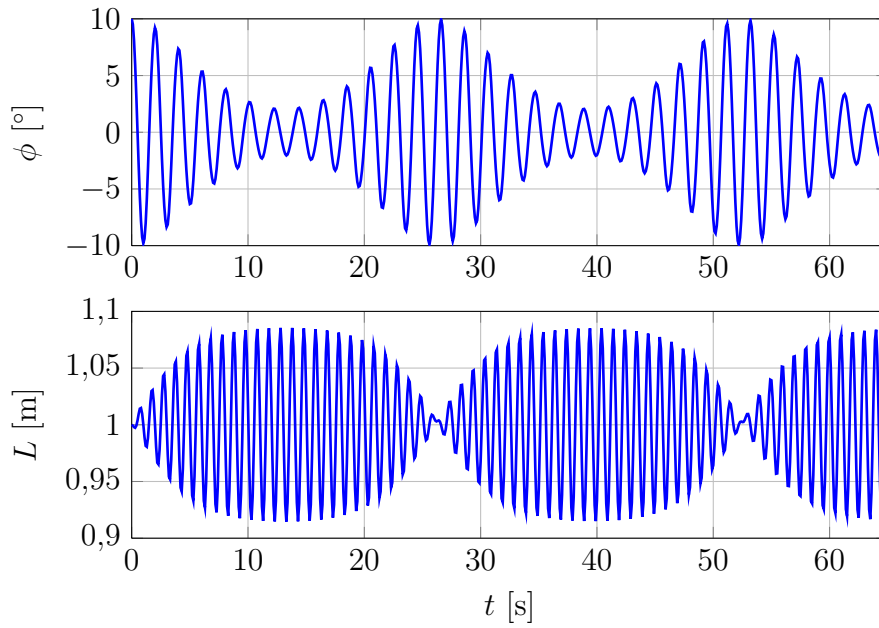


Bild 3.11: Simulation der gekoppelten nichtlinearen Bewegungsgleichungen (3.63) und (3.82)

Eine Linearisierung unter Voraussetzung von $\phi \ll 1$, der bereits getroffenen Annahme $l \ll 1 \rightarrow (1+l) \approx 1$ sowie der einhergehenden Vernachlässigung von nichtlinearen Termen führt zu vollständig entkoppelten Gleichungen

$$\ddot{\phi} + \omega_\phi^2 \phi = 0, \quad (3.87)$$

$$\ddot{l} + \omega_L^2 l = 0. \quad (3.88)$$

Da sich das System nach Bild 3.9 insbesondere bei minimal gestörter Ruhelage instabil verhält, geben die linearen entkoppelten Gleichungen (3.87) und (3.88) die Dynamik des Schwerependels mit elastischem Faden nicht zuverlässig wieder. Die Kopplung ist durch die Linearisierung verloren gegangen. Um die Kopplung dennoch zu verdeutlichen, betrachtet man die Nachbarbewegungen zum Grundzustand

$$\phi = \phi^* + \tilde{\phi}, \quad l = l^* + \tilde{l} \quad (3.89)$$

und linearisiert hinsichtlich der Nachbarbewegungen $(\tilde{\phi}, \tilde{l})$, welche signifikant kleiner ausfallen, als die Grundbewegungen (ϕ^*, l^*) . Das Ergebnis sind eine gekoppelte sowie eine

entkoppelte Gleichung:

$$\ddot{\tilde{\phi}} + 2\frac{\dot{l}^*}{1+l^*}\dot{\tilde{\phi}} + \frac{\omega_\phi^2}{1+l^*}\tilde{\phi} = 0, \quad (3.90)$$

$$\ddot{\tilde{l}} + \omega_L^2\tilde{l} = 0. \quad (3.91)$$

In der Nachbarbewegung der Auslenkung $\tilde{\phi}$ bleibt die Kopplung erhalten, wohingegen bei der Abweichung $\tilde{l}$ der Einfluss der Auslenkung verschwindet. Beruft man sich auf die ursprüngliche Form des parametrisch erregten Schwingers (3.73), erkennt man die gemeinsame Struktur der Gleichung mit (3.90). Die Koeffizienten der $\tilde{\phi}$ - und $\dot{\tilde{\phi}}$ -Terme in (3.90) sind periodische Parameter mit der Frequenz der Fadenlänge ω_L . Mit der partikulären Lösung für die Grundbewegung des Fadens $l = l^*$ nach (3.88) ($\phi = \phi^* = 0$)

$$l = l^* = \hat{l} \cos(\omega_L t - \psi) \quad (3.92)$$

können die parametrischen Koeffizienten $p_{1,2}(t)$ von (3.90) bestimmt werden:

$$\ddot{\tilde{\phi}} + p_1(t)\dot{\tilde{\phi}} + p_2(t)\tilde{\phi} = 0, \quad (3.93)$$

$$p_1(t) = -\frac{2\hat{l}\omega_L \sin(\omega_L t - \psi)}{1 + \hat{l} \cos(\omega_L t - \psi)}, \quad p_2(t) = \frac{\omega_\phi^2}{1 + \hat{l} \cos(\omega_L t - \psi)}. \quad (3.94)$$

Die Transformation (3.74) überführt die Differentialgleichung (3.93) in die HILLSche Form. Mit der Bestimmung des periodischen Parameters $P(t)$ (3.75) erlangt man einen Ausdruck analog zu (3.77), welcher zur MATHIEUSchen Differentialgleichung überleitet. Instabilitäten treten für ganzzahlige Vielfache der koppelnden Eigenfrequenzen auf, vgl. (3.79):

$$\lambda = \left(\frac{\omega_\phi}{\omega_L}\right)^2 \leftrightarrow \omega_L = \frac{2\omega_\phi}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.95)$$

Der Beeinflussungsgrad der Koppelschwingungen ist für $n = 1$ maximal, d. h. $\omega_L = 2\omega_\phi$, und die instabile Region in der Nähe von $\lambda = 1$ nimmt für steigende Amplituden der Anregung $\hat{l}$ zu (Bild 3.9). Durch die Kopplung der Schwingungen wird die Auslenkung ϕ mittels Anregung L angefacht. Es findet ein Energieaustausch von der Längsrichtung des Fadens in die Richtung des Pendelwinkels (die Gesamtenergie des konservativen Systems bleibt erhalten) und in umgekehrter Richtung statt. Einmal angestoßen, wird dieser Hin- und Rücktransport der Energie ohne dissipative Einflüsse nie zum Erliegen kommen (Bild 3.11). Wie durch die linearisierten Bewegungsgleichungen (3.87), (3.88) dargelegt, ist die Koppeldynamik nicht mit dem gängigen Verfahren der Betrachtung von kleinen Bewegungen abzubilden, weshalb im folgenden Abschnitt komplexere Analysemethoden betrachtet werden sollen⁴. Mit den hier getroffenen Annahmen ist das dynamische Verhalten des Schwerependels mit elastischem Faden vereinfacht durch die Stabilitätskarte in Bild 3.9 erklärt. Die gekoppelten Differentialgleichungen sind auf eine Differentialgleichung mit parametrischer Anregung reduziert worden. Die Stabilitätskarte spiegelt das Verhalten der Pendelbewegung unabhängig von den Anfangsbedingungen wider.

⁴Bei der Dynamik des vorliegenden gekoppelten Schwingers handelt es sich nicht um die Überlagerung von Hauptschwingungen. Vielmehr spielen komplexere Vorgänge der gegenseitigen Beeinflussung eine Rolle.

3.4 Modell der Reduzierten Normalform

Die reduzierte Normalform des Schwerependels soll die Kopplung der Differentialgleichungen (3.63) und (3.82) unter Berücksichtigung der inneren Resonanz ohne die Einschränkungen aus Abschnitt 3.3 beleuchten. Die Gesamtheit der Koppelgleichungen wird betrachtet. Ziel der Untersuchung ist die Identifikation der Systemteile, welche für den Energieaustausch zwischen den beteiligten Bewegungsformen (Moden) verantwortlich sind. Eine Transformation der Systemgleichungen auf die Normalform ermöglicht nach Arnold [2], Wiggins [93] oder Guckenheimer und Holmes [24] eine alternative Darstellung der Dynamik, in der die Kopplungsterme direkt ersichtlich sind.

Die Methodik zur Ermittlung der Normalform wird allgemein dargestellt und anschließend auf die Systemdynamik des Raumpendels (räumliches Schwerependel) angewendet. Abgeleitet von der Struktur der Bewegungsgleichungen wird eine Trennung von aktuierten und unteraktuierten⁵ Moden vorgenommen. Dies verringert den Aufwand der analytischen Operationen und liefert die reduzierte Normalform. Die nachfolgenden Ausführungen sind hauptsächlich in [76] veröffentlicht und mit Ergänzungen in [47] sowie [46] wiederzufinden. Hier wird der Sachverhalt ganzheitlich, inklusive ergänzender Zwischenergebnisse, dargelegt.

3.4.1 Normalform

Das Lösungsverhalten von nichtlinearen Differentialgleichungen in der Umgebung von Fixpunkten oder Grenzyklen kann durch die Transformation der Gleichungen in eine reduzierte Form abgebildet werden, in der die essentiellen dynamischen Systemeigenschaften explizit vorliegen. Diese reduzierte Form wird als Normalform und das Verfahren zur Ermittlung dieser Darstellung als Normalformmethode bezeichnet. Basierend auf der Definition eines linearen Operators und dem inneren Produkt im Raum der homogenen Polynome im $\mathbb{R}^n$ wird die Normalform ermittelt. In der reduzierten Darstellung finden sich ausschließlich resonante Terme wieder, welche den Kern eines bestimmten adjungierten linearen Operators im Raum der homogenen Polynome im $\mathbb{R}^n$ aufspannen. Eine ausführliche Darstellung findet sich in den vormalig angegebenen Referenzen ([2], [93], [24]) oder auch bei Olfati-Saber [70], der sich mit der allgemeinen Normalform von unteraktuierten Systemen befasst.

Betrachtet wird ein autonomes geregeltes nichtlineares System der Form

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{b}(\mathbf{x}(t)) + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}(t))\mathbf{u}(t), \quad (3.96)$$

mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ ($p < n$) und den analytischen Funktionen $\mathbf{b}$, $\boldsymbol{\sigma}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit stellt die Ruhelage $\mathbf{b}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ den nominellen Betriebspunkt ohne Eingriff dar. Der Ausgangspunkt der Normalformmethode ist ein glattes autonomes System in $\mathbb{R}^n$ mit der Ruhelage im Ursprung, welches nach einer TAYLOR-Reihenentwicklung

⁵Eine Bewegung wird als unteraktuiert bezeichnet, wenn kein direkter Stelleingriff (Aktor) vorhanden ist.

von (3.96) der folgenden Form entspricht:

$$\dot{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{u} + \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) + \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) \mathbf{u}, \quad (3.97)$$

$$\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}^{[2]}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}^{[3]}(\mathbf{x}) + \dots, \quad (3.98)$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}^{[1]}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\sigma}^{[2]}(\mathbf{x}) + \dots. \quad (3.99)$$

Der hochgestellte Index k in $\mathbf{b}^{[k]}$ mit $k \geq 2$ gibt die Potenz des nichtlinearen homogenen Polynoms, abhängig von $\mathbf{x}$, an. Ein linearer Anteil $\mathbf{b}^{[1]}$ ist bereits durch $\tilde{\mathbf{F}} \mathbf{x}$ berücksichtigt. Die entwickelte Systemgleichung (3.97) unterscheidet zwischen linearen $\tilde{\mathbf{F}} \mathbf{x}$, $\tilde{\mathbf{G}} \mathbf{u}$ und nichtlinearen Termen $\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{x})$, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) \mathbf{u}$. Ein Vektorfeld $\mathbf{b}^{[k]}$ in $\mathbb{R}^n$ enthält lediglich Terme der Ordnung k

$$\mathbf{b}^{[k]} = \sum_{i=1}^n \sum_{|\mathbf{m}|=k} b_{j,m_1 m_2 \dots m_n}^{[k]} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n} \mathbf{e}_i, \quad (3.100)$$

mit dem Einheitsrichtungsvektor $\mathbf{e}_i$. Der Ausdruck (3.100) wird als homogenes Vektorpolynom vom Grad k und der Vektorraum aller homogenen Vektorpolynome vom Grad k mit n Variablen als H_n^k angegeben.

Der Grundgedanke der Normalformmethode basiert auf einem Wechsel der Variablen von $\mathbf{x}$ zu $\mathbf{y}$ durch die Transformation

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{y}) = \mathbf{y} + \Phi^{[2]}(\mathbf{y}) + \Phi^{[3]}(\mathbf{y}) + \dots, \quad (3.101)$$

mit $\Phi^{[k]}(\mathbf{y}) \in H_n^k$. Das sich ergebende System in $\mathbf{y} \in \Psi$ befindet sich in der Umgebung des Ursprungs in $\mathbb{R}^n$ und ist in seiner Darstellung einfacher als (3.97), wodurch die essentiellen dynamischen Eigenschaften besser zu erkennen sind. In der Mathematik wird (3.101) als bijektive und stetig differenzierbare Abbildung (Diffeomorphismus) bezeichnet, deren Umkehrabbildung ebenso stetig differenzierbar ist. Angenommen die Normalformreduktion hat bereits bis zur Ordnung $k-1$ stattgefunden, dann ergibt sich durch Einsetzen von (3.101) in (3.97)

$$\dot{\mathbf{y}} = \left[\mathbf{E} + \mathbf{D}\Phi^{[k]}(\mathbf{y}) \right]^{-1} \left[\mathbf{F} \mathbf{y} + \mathbf{F} \Phi^{[k]}(\mathbf{y}) + \mathbf{G} \mathbf{u} + \hat{\mathbf{b}}(\Phi(\mathbf{y})) + \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\Phi(\mathbf{y})) \mathbf{u} \right]. \quad (3.102)$$

Als Vereinfachung wird für die Untersuchung von $\mathbf{y}$ in der Nähe der Ruhelage

$$\left[\mathbf{E} + \mathbf{D}\Phi^{[k]}(\mathbf{y}) \right]^{-1} = \mathbf{E} - \mathbf{D}\Phi^{[k]}(\mathbf{y}) + \mathcal{O}(|\mathbf{y}|^{2k-2}) \quad (3.103)$$

als zulässig erachtet, unter Verwendung der n -dimensionalen Einheitsmatrix $\mathbf{E}$ und des Differentialoperators $\mathbf{D}$ auf einem Vektorfeld, vgl. (B.1) und (B.2). Das Einsetzen von (3.103) in (3.102) und Ausdrücken von $\hat{\mathbf{b}}$ sowie $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ in formalen Potenzreihen analog zu (3.98), (3.99) resultiert in:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} = & \mathbf{F} \mathbf{y} + \mathbf{G} \mathbf{u} + \mathbf{b}^{[2]}(\mathbf{y}) + \dots + \mathbf{b}^{[k-1]}(\mathbf{y}) + \boldsymbol{\sigma}^{[1]}(\mathbf{y}) \mathbf{u} + \dots + \boldsymbol{\sigma}^{[k-2]}(\mathbf{y}) \mathbf{u} \\ & + \left(\mathbf{b}^{[k]}(\mathbf{y}) + \mathbf{F} \Phi^{[k]}(\mathbf{y}) - \mathbf{D}\Phi^{[k]}(\mathbf{y}) \mathbf{F} \mathbf{y} \right) + \left(\boldsymbol{\sigma}^{[k-1]}(\mathbf{y}) \mathbf{u} - \mathbf{D}\Phi^{[k]}(\mathbf{y}) \mathbf{G} \mathbf{u} \right) \\ & + \mathcal{O}(|\mathbf{y}, \mathbf{u}|^{k+1}). \end{aligned} \quad (3.104)$$

Eine kompaktere Schreibweise von (3.104) wird mithilfe der LIE-Klammer $[\cdot, \cdot]$ erzielt (siehe (B.3)):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} = & \mathbf{F} \mathbf{y} + \mathbf{G} \mathbf{u} + \mathbf{b}^{[2]}(\mathbf{y}) + \dots + \mathbf{b}^{[k-1]}(\mathbf{y}) + \boldsymbol{\sigma}^{[1]}(\mathbf{y}) \mathbf{u} + \dots + \boldsymbol{\sigma}^{[k-2]}(\mathbf{y}) \mathbf{u} \\ & + \left(\mathbf{b}^{[k]}(\mathbf{y}) + [\Phi^{[k]}(\mathbf{y}), \mathbf{F} \mathbf{y}] \right) + \left(\boldsymbol{\sigma}^{[k-1]}(\mathbf{y}) \mathbf{u} + [\Phi^{[k]}(\mathbf{y}), \mathbf{G} \mathbf{u}] \right) \\ & + \mathcal{O}(|\mathbf{y}, \mathbf{u}|^{k+1}) \end{aligned} \quad (3.105)$$

und das Einbringen von zusätzlichen Freiheitsgraden in (3.105) durch den Systemeingang

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}^{[k]}(\mathbf{y}) + \boldsymbol{\beta}^{[k-1]}(\mathbf{y}) \mathbf{v} + \mathbf{v} \quad (3.106)$$

führt zur Normalformdarstellung der ursprünglichen Systemdynamik aus (3.97):

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{F} \mathbf{y} + \mathbf{G} \mathbf{v} + \mathbf{b}(\mathbf{y}) + \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{y}) \mathbf{v}. \quad (3.107)$$

Darin enthalten sind die Potenzreihen der resonanten Nichtlinearitäten $\mathbf{b}(\mathbf{y})$ und des Reglereinflusses $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{y}) \mathbf{v}$

$$\mathbf{b}(\mathbf{y}) = \mathbf{b}^{[2]}(\mathbf{y}) + \mathbf{b}^{[3]}(\mathbf{y}) + \dots, \quad (3.108)$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{y}) \mathbf{v} = (\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{[1]}(\mathbf{y}) + \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{[2]}(\mathbf{y}) + \dots) \mathbf{v}. \quad (3.109)$$

Mit der anfänglichen Annahme, dass die Methode der Normalform bereits bis zum Grad $k-1$ durchgeführt worden ist, können folglich die Gleichungen der Ordnung k angegeben werden:

$$[\Phi^{[k]}(\mathbf{y}), \mathbf{F} \mathbf{y}] + \mathbf{b}^{[k]}(\mathbf{y}) + \mathbf{G} \boldsymbol{\alpha}^{[k]}(\mathbf{y}) = \mathbf{b}^{[k]}(\mathbf{y}), \quad (3.110)$$

$$[\Phi^{[k]}(\mathbf{y}), \mathbf{G} \mathbf{v}] + \boldsymbol{\sigma}^{[k-1]}(\mathbf{y}) \mathbf{v} + \mathbf{G} \boldsymbol{\beta}^{[k-1]}(\mathbf{y}) \mathbf{v} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{[k-1]}(\mathbf{y}) \mathbf{v}. \quad (3.111)$$

Die Bedingungen (3.110) und (3.111) werden in der Literatur als homologische Gleichungen bezeichnet. Sie sind zuerst bei Krener und Kang [44], Talwar und Namachchivaya [86], sowie Talwar u. a. [87] angegeben worden. Mit den homologischen Gleichungen ist es möglich, die Transformation $\Phi(\mathbf{y})$ (3.101) und den Reglereingang $\mathbf{u}$ (3.106) so zu bestimmen, dass möglichst viele Nichtlinearitäten in der Normalform (3.107) verschwinden. Die Koeffizienten der Monome vom Grad k werden mit der Lösungsbedingung nach Elphick u. a. [22] in H_n^k ermittelt. Hauptaufgabe ist die Bestimmung der folgenden Ausdrücke:

- Ähnlichkeitstransformation $\Phi(\mathbf{y})$,
- nichtlineare Normalformterme $\mathbf{b}^{[k]}(\mathbf{y})$ und Reglereinfluss $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{[k-1]}(\mathbf{y}) \mathbf{v}$,
- Reglerparameter $\boldsymbol{\alpha}^{[k]}(\mathbf{y})$ und $\boldsymbol{\beta}^{[k-1]}(\mathbf{y})$.

Zum systematischen Lösen der Bewegungsgleichungen (3.110) und (3.111) wird ein linearer Vektorraum ausgewählt, zusammen mit einem zugehörigen Operator auf der Mannigfaltigkeit. Nähere Ausführungen befinden sich in Anhang B. Im bezeichneten linearen Vektorraum können die homologischen Gleichungen vereinfacht mittels Operationen der linearen Algebra in einem höherdimensionalen Raum gelöst werden. Gleichzeitig

wird eine Reduzierung der Problemdimension erzielt. Damit ist das Lösungsverfahren umrissen. Vor der Anwendung eines weiteren Reduktionsschrittes auf die Normalformmethode und der anschließenden Betrachtung des Raumpendels werden zunächst noch einige Annahmen getroffen.

Für eine Reihe technischer Systeme ist eine, vor allem in der Regelungstechnik häufig verwendete (siehe z. B. Lunze [55]), Trennung von steuerbaren und nicht steuerbaren Teilsystemen zulässig. In der Mechanik spricht man von unteraktuierten Systemen, bei denen mindestens eine verallgemeinerte Koordinate nicht direkt von einem Aktor angesteuert wird. Um auch transparentere Ausdrücke für die Normalform zu erzielen, wird der Originalzustand $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ in nicht steuerbare $\mathbf{x}_u \in \mathbb{R}^{n_u}$ und steuerbare Koordinaten $\mathbf{x}_c \in \mathbb{R}^{n_c}$ unterteilt ($n_u + n_c = n$). Die Vektoren in (3.96) werden entsprechend mit

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_c \end{bmatrix}, \quad (3.112)$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_c) \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_c) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_c) \\ \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_c) \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

wiedergegeben und die Anteile einer TAYLOR-Reihe in (3.97) mit

$$\tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}} & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{C}} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}, \quad \tilde{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}, \quad \tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\mathbf{B}} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{n_c \times p}. \quad (3.114)$$

Das reihenentwickelte Originalsystem (3.97) erscheint mit (3.112), (3.113), (3.114) als

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_u \\ \dot{\mathbf{x}}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}} & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_c) \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_c) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_c) \\ \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_c) \end{bmatrix} \mathbf{u}. \quad (3.115)$$

In gleicher Weise werden die transformierten Größen getrennt dargestellt. Die transformierten Variablen in separierter Form $\mathbf{y} = [\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}]^T$ enthalten die kritischen linear nicht steuerbaren $\boldsymbol{\xi}$ sowie die linear steuerbaren Variablen $\boldsymbol{\eta}$. Gleichung (3.101) entspricht nun

$$\mathbf{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{h}^{[k]}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \\ \boldsymbol{\varphi}^{[k]}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Phi}^{[k]}(\mathbf{y})}, \quad \text{mit } \mathbf{h}^{[k]} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_u}, \quad \boldsymbol{\varphi}^{[k]} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_c}, \quad (3.116)$$

worin $\mathbf{h}^{[k]}$ der nichtlinearen Transformation der nicht steuerbaren Variablen vom Grad k und $\boldsymbol{\varphi}^{[k]}$ der nichtlinearen Transformation der steuerbaren Variablen entsprechen. Bei Hamzi u. a. [27] findet man eine ähnliche Unterteilung eines geregelten nichtlinearen Systems mit exakt zwei nicht steuerbaren Moden auf der imaginären Achse. Daher ist die Untersuchung in [27] auf die Regelung der Bifurkation im Gesamtkontext der HOPF-Verzweigungen fokussiert und unterscheidet sie folglich von der vorliegenden allgemeinen Betrachtung.

Substituiert man (3.116) nach (3.110), erhält man durch die Trennung der nicht steuer-

baren und steuerbaren Variablen zwei Gleichungen:

$$\mathbf{A} \mathbf{h}^{[k]}(\xi, \eta) - \frac{\partial \mathbf{h}^{[k]}}{\partial \xi}(\xi, \eta) \mathbf{A} \xi - \frac{\partial \mathbf{h}^{[k]}}{\partial \eta}(\xi, \eta) \mathbf{C} \eta + \mathbf{f}^{[k]}(\xi, \eta) = \mathbf{f}^{[k]}(\xi, \eta), \quad (3.117)$$

$$\mathbf{C} \varphi^{[k]}(\xi, \eta) - \frac{\partial \varphi^{[k]}}{\partial \xi}(\xi, \eta) \mathbf{A} \xi - \frac{\partial \varphi^{[k]}}{\partial \eta}(\xi, \eta) \mathbf{C} \eta + \mathbf{g}^{[k]}(\xi, \eta) + \mathbf{B} \alpha^{[k]}(\xi, \eta) = \mathbf{g}^{[k]}(\xi, \eta). \quad (3.118)$$

Die nichtlinearen Ausdrücke $\mathbf{f}^{[k]}$ der Normalform können direkt mittels Operationen der linearen Algebra und basierend auf den Nichtlinearitäten $\mathbf{f}^{[k]}$ des Originalsystems sowie der Transformation $\mathbf{h}^{[k]}$ bestimmt werden. Analog erhält man die Normalform-Nichtlinearitäten $\mathbf{g}^{[k]}$ in den steuerbaren Moden, mit der zusätzlichen Flexibilität durch die Wahl von $\alpha^{[k]}$, das als Parameter des Regeleingriffs $\mathbf{u}$ eingeführt wurde. Weitere zwei Gleichungen folgen aus der zweiten homologischen Gleichung (3.111) mit (3.116):

$$- \frac{\partial \mathbf{h}^{[k]}}{\partial \eta}(\xi, \eta) \mathbf{B} \mathbf{v} + \nu^{[k-1]}(\xi, \eta) \mathbf{v} = \bar{\nu}^{[k-1]}(\xi, \eta) \mathbf{v}, \quad (3.119)$$

$$- \frac{\partial \varphi^{[k]}}{\partial \eta}(\xi, \eta) \mathbf{B} \mathbf{v} + \mathbf{B} \beta^{[k-1]}(\xi, \eta) \mathbf{v} + \mu^{[k-1]}(\xi, \eta) \mathbf{v} = \bar{\mu}^{[k-1]}(\xi, \eta) \mathbf{v}. \quad (3.120)$$

In Abhängigkeit der nichtlinearen Transformation $\mathbf{h}^{[k]}$ des nicht steuerbaren Teilsystems, des Reglerparameters $\mathbf{v}$ und des ursprünglichen bilinearen Terms der Eingangsgröße $\nu^{[k-1]}$ wird der transformierte Term der bilinearen Eingangsgröße $\bar{\nu}^{[k-1]}$ in (3.119) bestimmt. Der transformierte bilineare Eingangsterm der steuerbaren Variablen $\bar{\mu}^{[k-1]}$ wird in analoger Weise wie $\bar{\nu}^{[k-1]}$ erwirkt, mit dem zusätzlichen Steuerparameter $\beta^{[k-1]}$. Durch eine geeignete Wahl von $\beta^{[k-1]}$ kann z. B. sichergestellt werden, dass nach (3.120) keine bilinearen Eingangsterme im steuerbaren Teilsystem entstehen ($\bar{\mu}^{[k-1]} = 0$).

Die neuen homologischen Gleichungen der unterteilten Systemdynamik (3.117) bis (3.120) dienen als Ausgangspunkt für die nachstehenden Berechnungen.

3.4.2 Reduzierte Normalform

Ein weitere Reduzierung der Systemdynamik in Normalform (3.107) wird durch die Trennung der nichtlinearen Transformationen $\mathbf{h}^{[k]}$, $\varphi^{[k]}$ in der Umgebung der Ruhelage durchgeführt. Es wird zwischen Monomen mit nicht steuerbaren, steuerbaren und gemischten Variablen unterschieden ($|\mathbf{m}| + |\mathbf{q}| = k$):

$$\mathbf{h}^{[k]}(\xi, \eta) = \mathbf{h}^{(m,0)}(\xi) + \mathbf{h}^{(m,q)}(\xi, \eta) + \mathbf{h}^{(0,q)}(\eta), \quad (3.121)$$

$$\varphi^{[k]}(\xi, \eta) = \varphi^{(m,0)}(\xi) + \varphi^{(m,q)}(\xi, \eta) + \varphi^{(0,q)}(\eta). \quad (3.122)$$

Die allgemeine Form von $\mathbf{h}$ und φ für ein nichtlineares Polynom k -ten Grades entspricht:

$$\mathbf{h}^{(m,q)}(\xi, \eta) = \sum_k \sum_i^{n_u} h_{i:m_1 \dots m_{n_u} q_1 \dots q_{n_u}}^{(m,q)} \xi_1^{m_1} \dots \xi_{n_u}^{m_{n_u}} \eta_1^{q_1} \dots \eta_{n_c}^{q_{n_c}} \mathbf{e}_i, \quad (3.123)$$

$$\varphi^{(m,q)}(\xi, \eta) = \sum_k \sum_i^{n_c} h_{i:m_1 \dots m_{n_u} q_1 \dots q_{n_u}}^{(m,q)} \xi_1^{m_1} \dots \xi_{n_u}^{m_{n_u}} \eta_1^{q_1} \dots \eta_{n_c}^{q_{n_c}} \mathbf{e}_i. \quad (3.124)$$

Zusätzliches Sortieren der Nichtlinearitäten $\mathbf{f}^{[k]}$, $\mathbf{f}^{[k]}$, $\mathbf{g}^{[k]}$, $\mathbf{g}^{[k]}$ in nicht steuerbare, steuerbare und gemischte Anteile sowie die anschließende Substitution zusammen mit (3.121), (3.122) in die neuen homologischen Gleichungen (3.117) bis (3.120) führt zu vier zunächst unübersichtlich erscheinenden Gleichungen (im Anhang sind beispielhaft zwei der vier Gleichungen hinterlegt, (B.10) und (B.11)). Vergleicht man jedoch die gemeinsamen Ausdrücke der jeweiligen Variablen, so findet man 10 vereinfachte Bedingungen, die unabhängig voneinander betrachtet werden sollen. Für die Gleichungen, welche lediglich nicht steuerbare Variablen $\boldsymbol{\xi}$ berücksichtigen, erhält man:

$$\frac{\partial \mathbf{h}^{(m,0)}}{\partial \boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{A} \boldsymbol{\xi} - \mathbf{A} \mathbf{h}^{(m,0)}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{f}^{(m,0)}(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{f}^{(m,0)}(\boldsymbol{\xi}), \quad (3.125)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^{(m,0)}}{\partial \boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{A} \boldsymbol{\xi} - \mathbf{C} \boldsymbol{\varphi}^{(m,0)}(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{B} \boldsymbol{\alpha}^{(m,0)}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{g}^{(m,0)}(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{g}^{(m,0)}(\boldsymbol{\xi}). \quad (3.126)$$

Diese werden mit den Standardmethoden der Normalform gelöst. Im einfachsten Fall hat $\mathbf{F}$ Diagonalgestalt im Raum der komplexen Zahlen. Somit sind $\mathbf{A} = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_{n_u}\}$, $\mathbf{C} = \text{diag}\{\gamma_1, \dots, \gamma_{n_c}\}$ und die allgemeinen Resonanzbedingungen können angegeben werden. Die Resonanzbedingungen geben den Polynomgrad $m = |\mathbf{m}|$ der Normalform-Nichtlinearitäten direkt an und legen dadurch die resonanten Terme in den ursprünglichen Nichtlinearitäten offen. Basierend auf den Resonanzbedingungen mit dem Skalarprodukt aus zwei Vektoren $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und den ursprünglichen Nichtlinearitäten $\mathbf{f}^{(m,0)}$, $\mathbf{g}^{(m,0)}$ ermittelt man die nichtlinearen Normalformen $\mathbf{f}^{(m,0)}$, $\mathbf{g}^{(m,0)}$ sowie die Koeffizienten der Transformationen

$$\langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{m} \rangle - \lambda_s = 0 \quad \text{und} \quad h_{s:m_1 \dots m_{n_u} 0 \dots 0}^{(m,0)} = \frac{f_{s:m_1 \dots m_{n_u} 0 \dots 0}^{(m,0)}}{\langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{m} \rangle - \lambda_s}, \quad s = 1, 2, \dots, n_u, \quad (3.127)$$

$$\langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{m} \rangle - \gamma_s = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_{s:m_1 \dots m_{n_u} 0 \dots 0}^{(m,0)} = \frac{g_{s:m_1 \dots m_{n_u} 0 \dots 0}^{(m,0)}}{\langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{m} \rangle - \gamma_s}, \quad s = 1, 2, \dots, n_c. \quad (3.128)$$

Die Transformationen $\mathbf{h}^{(m,0)}$, $\boldsymbol{\varphi}^{(m,0)}$ haben keinen Einfluss auf die Regelung. Im Gegensatz dazu kann der Reglerparameter $\boldsymbol{\alpha}^{(m,0)}$ für die Kompensation der Normalform-Nichtlinearitäten in den steuerbaren Moden $\boldsymbol{\eta}$ zum Einsatz kommen, vgl. (3.126). Die übrigen Anteile der Transformation $\mathbf{h}^{(m,q)}$, $\mathbf{h}^{(0,q)}$, $\boldsymbol{\varphi}^{(m,q)}$, $\boldsymbol{\varphi}^{(0,q)}$ der nicht steuerbaren und steuerbaren Teilsysteme enthalten die steuerbare Variable $\boldsymbol{\eta}$ und erfüllen weitere Lösungsbedingungen. Betrachtet man zunächst die Anteile der Transformation der nicht steuerbaren Moden mit ausschließlich steuerbaren Variablen $\mathbf{h}^{(0,q)}$ so findet man

$$\frac{\partial \mathbf{h}^{(0,q)}}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{C} \boldsymbol{\eta} - \mathbf{A} \mathbf{h}^{(0,q)}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{f}^{(0,q)}(\boldsymbol{\eta}) - \mathbf{f}^{(0,q)}(\boldsymbol{\eta}), \quad (3.129)$$

worin die Normalform und die Koeffizienten der Transformation wiederum mittels Resonanzbedingung und ursprünglichen Nichtlinearitäten zu ermitteln sind:

$$\langle \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{q} \rangle - \lambda_s = 0 \quad \text{und} \quad h_{s:0 \dots 0 q_1 \dots q_{n_c}}^{(0,q)} = \frac{f_{s:0 \dots 0 q_1 \dots q_{n_c}}^{(0,q)}}{\langle \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{q} \rangle - \lambda_s}, \quad s = 1, 2, \dots, n_c. \quad (3.130)$$

Weiterhin soll $\mathbf{h}^{(0,q)}$ die Bedingung

$$\frac{\partial \mathbf{h}^{(0,q)}}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{B} = \boldsymbol{\nu}^{(0,q-1)}(\boldsymbol{\eta}) - \bar{\boldsymbol{\nu}}^{(0,q-1)}(\boldsymbol{\eta}) \quad (3.131)$$

erfüllen, die verschiedene Anteile der Eingangsgrößen berücksichtigt. Für die Transformation der nicht steuerbaren Moden mit gemischten Variablen $\mathbf{h}^{(m,q)}$ extrahiert man aus (B.10)

$$\frac{\partial \mathbf{h}^{(m,q)}}{\partial \boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \mathbf{A} \boldsymbol{\xi} + \frac{\partial \mathbf{h}^{(m,q)}}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \mathbf{C} \boldsymbol{\eta} - \mathbf{A} \mathbf{h}^{(m,q)}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{f}^{(m,q)}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) - \mathbf{f}^{(m,q)}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}), \quad (3.132)$$

mit den zugehörigen Gleichungen

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{m} \rangle + \langle \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{q} \rangle - \lambda_s &= 0 \quad \text{und} \\ h_{s:m_1 \dots m_{n_u} q_1 \dots q_{n_c}}^{(m,q)} &= \frac{f_{s:m_1 \dots m_{n_u} q_1 \dots q_{n_c}}^{(m,q)}}{\langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{m} \rangle + \langle \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{q} \rangle - \lambda_s}, \quad s = 1, 2, \dots, n_u. \end{aligned} \quad (3.133)$$

Eine weitere Bedingung hinsichtlich des Eingangs ist:

$$\frac{\partial \mathbf{h}^{(m,q)}}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \mathbf{B} = \boldsymbol{\nu}^{(m,q-1)}(\boldsymbol{\xi}) - \bar{\boldsymbol{\nu}}^{(m,q-1)}(\boldsymbol{\xi}). \quad (3.134)$$

Gleichmaßen werden die Transformation der steuerbaren Moden mit steuerbaren und gemischten Variablen hergeleitet:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^{(0,q)}}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{C} \boldsymbol{\eta} - \mathbf{C} \boldsymbol{\varphi}^{(0,q)}(\boldsymbol{\eta}) - \mathbf{B} \boldsymbol{\alpha}^{(0,q)}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{g}^{(0,q)}(\boldsymbol{\eta}) - \mathbf{g}^{(0,q)}(\boldsymbol{\eta}), \quad (3.135)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^{(m,q)}}{\partial \boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \mathbf{A} \boldsymbol{\xi} + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^{(m,q)}}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \mathbf{C} \boldsymbol{\eta} - \mathbf{C} \boldsymbol{\varphi}^{(m,q)}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) - \mathbf{B} \boldsymbol{\alpha}^{(m,q)}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \\ = \mathbf{g}^{(m,q)}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) - \mathbf{g}^{(m,q)}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}). \end{aligned} \quad (3.136)$$

Wie zuvor werden die gesuchten Größen ermittelt:

$$\langle \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{q} \rangle - \gamma_s = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_{s:0 \dots 0 q_1 \dots q_{n_c}}^{(0,q)} = \frac{g_{s:0 \dots 0 q_1 \dots q_{n_c}}^{(0,q)}}{\langle \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{q} \rangle - \gamma_s}, \quad s = 1, 2, \dots, n_c, \quad (3.137)$$

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{m} \rangle + \langle \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{q} \rangle - \gamma_s &= 0 \quad \text{und} \\ \varphi_{s:m_1 \dots m_{n_u} q_1 \dots q_{n_c}}^{(m,q)} &= \frac{g_{s:m_1 \dots m_{n_u} q_1 \dots q_{n_c}}^{(m,q)}}{\langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{m} \rangle + \langle \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{q} \rangle - \gamma_s}, \quad s = 1, 2, \dots, n_c. \end{aligned} \quad (3.138)$$

Die verbleibenden zwei Gleichungen (von zehn) sind Eingangsbedingungen an die Transformationsterme der steuerbaren Moden $\boldsymbol{\varphi}^{(0,q)}$, $\boldsymbol{\varphi}^{(m,q)}$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^{(0,q)}}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{B} - \mathbf{B} \boldsymbol{\beta}^{(0,q-1)}(\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\mu}^{(0,q-1)}(\boldsymbol{\eta}) - \bar{\boldsymbol{\mu}}^{(0,q-1)}(\boldsymbol{\eta}), \quad (3.139)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}^{(m,q)}}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \mathbf{B} - \mathbf{B} \boldsymbol{\beta}^{(m,q-1)}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\mu}^{(m,q-1)}(\boldsymbol{\xi}) - \bar{\boldsymbol{\mu}}^{(m,q-1)}(\boldsymbol{\xi}). \quad (3.140)$$

Der Reglerparameter $\boldsymbol{\beta}^{(0,q-1)}$ bzw. $\boldsymbol{\beta}^{(m,q-1)}$ bietet eine Eingriffsmöglichkeit in die Gleichungen der Transformationen in den steuerbaren Variablen $\boldsymbol{\eta}$. Als Ziel eines Eingriffs kann die Unterdrückung von neuen bilinearen Eingangsgrößen $\bar{\boldsymbol{\mu}}^{(0,q-1)}$, $\bar{\boldsymbol{\mu}}^{(m,q-1)}$

ausgewiesen werden.

Mit den zehn in diesem Abschnitt hergeleiteten Gleichungen, resultierend aus (3.117) bis (3.120) und den sortierten Variablen, wird die Normalform für ein autonomes geregeltes nichtlineares System aus gekoppelten Differentialgleichungen anhand von linearer Algebra ermittelt. In den häufigsten Fällen führt eine Auswahl aus den zehn Gleichungen bereits zu den Normalform-transformierten Gleichungen, so dass der Aufwand für die reduzierte Normalform im Vergleich zur allgemeinen Methode der Normalform drastisch abnimmt. Ebenso ermöglichen die reduzierten Normalformberechnungen eine separate Transformation von nicht steuerbarem oder steuerbarem Systemteil, um z. B. nur die Charakteristik eines Teils des Gesamtsystems zu erhalten. Chen und Della-Dora [12] stellen ebenfalls Berechnungen zur reduzierten Normalform an. Deren Reduktionsmethode unterscheidet sich jedoch grundlegend von der hier vorgestellten Methode.

3.4.3 Reduzierte Normalform des Raumpendels

Den Ausgangspunkt für die Bestimmung der reduzierten Normalform des Raumpendels bilden die Differentialgleichungen des räumlichen Schwingers. Im Anschluss folgt die Transformation der Gleichungen gemäß den Ausführungen des vorangehenden Abschnitts.

Raumpendel

Die Bewegungsgleichungen des Schwebpendels (3.63) und (3.82) werden um den zusätzlichen Freiheitsgrad des Pendelwinkels θ ergänzt. Er beschreibt die Pendelbewegung der Last in der y - z -Ebene hinsichtlich der stabilen Ruhelage des Pendels. Der ursprüngliche Pendelwinkel ϕ innerhalb der x - z -Ebene verläuft orthogonal zu θ . Die verallgemeinerten Koordinaten des Raumpendels sind $\mathbf{y} = [\phi, \theta, L]^T$, wie in Bild 3.12 dargestellt.

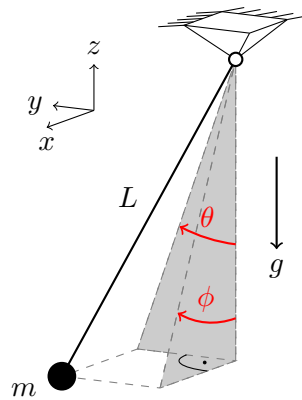


Bild 3.12: Schematische Darstellung des Raumpendels

Mithilfe der LAGRANGESchen Gleichungen zweiter Art ermittelt man die gekoppelten

Differentialgleichungen zu

$$\ddot{\phi} + 2 \frac{\dot{L}}{L} \dot{\phi} + \dot{\theta}^2 \sin(\phi) \cos(\phi) + \frac{g}{L} \sin(\phi) \cos(\theta) = 0, \quad (3.141)$$

$$\ddot{\theta} + 2 \frac{\dot{L}}{L} \dot{\theta} - 2 \dot{\phi} \dot{\theta} \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} + \frac{g \sin(\theta)}{L \cos(\phi)} = 0, \quad (3.142)$$

$$\ddot{L} - L \dot{\phi}^2 - L \dot{\theta}^2 \cos^2(\phi) - g \cos(\phi) \cos(\theta) = -\frac{F}{m}, \quad (3.143)$$

unter Berücksichtigung der Kraft F im Seil. Die Seillänge der statischen Ruhelage ist L_0 . Nimmt man die nachfolgenden Substitutionen in (3.141) bis (3.143) vor

$$\begin{aligned} L &= L_0(1 + l), \quad \frac{1}{L} \approx \frac{1}{L_0}(1 - l), \\ \omega_\phi^2 &= \omega_\theta^2 = \frac{g}{L_0}, \\ \frac{F}{m} &= L_0 \omega_L^2 l + g, \\ \sin(\phi) &\approx \phi - \frac{\phi^3}{6}, \quad \cos(\phi) \approx 1 - \frac{\phi^2}{2}, \quad \frac{1}{\cos(\phi)} \approx 1 + \frac{\phi^2}{2} \end{aligned}$$

und wendet die Zustandsraumtransformation

$$\phi = \omega_\phi x_1, \quad \dot{\phi} = \omega_\phi^2 x_2, \quad \theta = \omega_\theta x_3, \quad \dot{\theta} = \omega_\theta^2 x_4, \quad l = \omega_L x_5, \quad \dot{l} = \omega_L^2 x_6 \quad (3.144)$$

an, so erhält man die dynamischen Systemgleichungen wie angegeben (Koeffizienten $a_{1...11}$ im Anhang, (B.12)):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & \omega_\phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_\phi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_L & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ a_1 x_1 x_5 + a_2 x_2 x_6 \\ 0 \\ a_1 x_3 x_5 + a_2 x_4 x_6 \\ 0 \\ a_9(x_2^2 + x_4^2) + a_{10}(x_1^2 + x_3^2) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ a_3 x_1^3 + a_4 x_1 x_3^2 + a_5 x_1 x_4^2 + a_6 x_2 x_5 x_6 \\ 0 \\ a_3 x_3^3 + a_7 x_1^2 x_3 + a_8 x_1 x_2 x_4 + a_6 x_4 x_5 x_6 \\ 0 \\ a_{11}(x_2^2 x_5 + x_4^2 x_5) \end{bmatrix} + \mathcal{O}(|\mathbf{x}| \geq |\mathbf{x}|^{k+1}), \quad (3.145) \\ &= \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{x} + \mathbf{b}^{[2]}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}^{[3]}(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(|\mathbf{x}| \geq |\mathbf{x}|^{k+1}). \quad (3.146) \end{aligned}$$

Ein Reglereingang $\mathbf{u}$ ist bisher nicht betrachtet worden. Erweitert man (3.146) um die Eingangsgrößen $u_{1,2}$ in den Gleichungen des Seils ($\dot{x}_5, \dot{x}_6$), so erhält man (bei gleichzeitiger Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung $k > 3$):

$$\dot{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{x} + \mathbf{b}^{[2]}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}^{[3]}(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{u}, \quad (3.147)$$

$$\text{mit } \tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{B}} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Beide Eingänge wirken auf das Seil, wodurch dieser Teil des Systems aktuiert wird. Der erste Eingang u_1 hat Auswirkungen auf die normierte relative Seilgeschwindigkeit $\dot{x}_5$ und u_2 auf die normierte relative Beschleunigung im Seil $\dot{x}_6$. Anhand von Methoden der linearen Regelungstechnik ist aus (3.147) zusammen mit (3.114) ersichtlich, dass es sich bei $(\tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{0})$ um ein nicht steuerbares und $(\tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{B}})$ ein steuerbares Teilsystem handelt. Für eine allgemeine Betrachtung des Raumpendels ist der Eingangsvektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{p=2}$ zulässig. Am realen System sind Vorgaben für Geschwindigkeit und Beschleunigung in einer Bewegungsrichtung im Allgemeinen nicht realisierbar.

Das Gleichungssystem (3.147) ist der Ausgangspunkt der reduzierten Normalformuntersuchungen am Raumpendel. Es hat die Ordnung $n = 6$ und den Reglereingang $\mathbf{u}$. Vergleicht man die kompakte Schreibweise (3.147) mit (3.97), erkennt man die reihenentwickelte Struktur bis zur Ordnung $k = 3$. Es liegen lineare Terme $\tilde{\mathbf{F}}$ und nichtlineare Terme $\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{x})$ vor. Bei der linearen Systemmatrix $\tilde{\mathbf{F}}$ fällt sofort die symmetrische Struktur auf. Guckenheimer und Holmes [24] schlagen aufgrund dieser Symmetrie einen Koordinatenwechsel aus dem reellen in den komplexen Zustandsraum vor. Die komplexe Darstellung birgt den Vorteil, dass die konjugiert komplexen Bewegungsgleichungen direkt aus der Konjugierung der komplexen Bewegungsgleichungen hervorgehen und somit zu unterdrücken sind. Der rechnerische Aufwand halbiert sich. Mit dem naheliegenden Koordinatenwechsel

$$\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_{u_1} \\ \bar{z}_{u_1} \\ z_{u_2} \\ \bar{z}_{u_2} \\ z_c \\ \bar{z}_c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n,$$

$$z_{u_1} = x_1 + \mathrm{i} x_2, \quad z_{u_2} = x_3 + \mathrm{i} x_4, \quad z_c = x_5 + \mathrm{i} x_6, \quad (3.148)$$

und unter Berücksichtigung der konjugiert komplexen Größen erhält man

$$\dot{z}_{u_1} = -\mathrm{i} \omega_\phi z_{u_1} + f_1^{[2]}(\mathbf{z}) + f_1^{[3]}(\mathbf{z}), \quad (3.149)$$

$$\dot{z}_{u_2} = -\mathrm{i} \omega_\theta z_{u_2} + f_2^{[2]}(\mathbf{z}) + f_2^{[3]}(\mathbf{z}), \quad (3.150)$$

$$\dot{z}_c = -\mathrm{i} \omega_L z_c + g_1^{[2]}(\mathbf{z}) + g_1^{[3]}(\mathbf{z}) + u_1 + \mathrm{i} u_2, \quad (3.151)$$

$$\begin{aligned} &= -\mathrm{i} \omega_L z_c + \mathrm{i} b_1 (z_{u_1}^2 + z_{u_2}^2 + \bar{z}_{u_1}^2 + \bar{z}_{u_2}^2) + \mathrm{i} b_2 (z_{u_1} \bar{z}_{u_1} + z_{u_2} \bar{z}_{u_2}) \\ &\quad + \mathrm{i} b_3 (z_c + \bar{z}_c) (z_{u_1}^2 + z_{u_2}^2 + \bar{z}_{u_1}^2 + \bar{z}_{u_2}^2) + \mathrm{i} b_4 (z_c + \bar{z}_c) (z_{u_1} \bar{z}_{u_1} + z_{u_2} \bar{z}_{u_2}) \\ &\quad + u_1 + \mathrm{i} u_2. \end{aligned} \quad (3.152)$$

Die Koeffizienten in (3.152) lauten:

$$b_1 = \frac{a_{10} - a_9}{4}, \quad b_2 = \frac{a_9 + a_{10}}{2}, \quad b_3 = -\frac{a_{11}}{8}, \quad \text{und} \quad b_4 = \frac{a_{11}}{4}.$$

Ein Rückblick auf die Herleitung der reduzierten Normalform ruft die Trennung der nicht steuerbaren und steuerbaren Moden ins Gedächtnis. Diese ist in den komplexen Bewegungsgleichungen des Systems (3.149) bis (3.151) bereits inbegriffen. Die komplexen Variablen der Auslenkung sind dem nicht steuerbaren Teilsystem zuzuordnen $\mathbf{z}_u = [z_{u_1}, \bar{z}_{u_1}, z_{u_2}, \bar{z}_{u_2}]^T$, wohingegen $\mathbf{z}_c = [z_c, \bar{z}_c]^T$ die steuerbaren Größen darstellt. Der

lineare Teil des Systems hat eine Diagonalisierung erfahren und das komplexe Gesamtsystem liegt in Anlehnung an (3.115) wie folgt vor:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{bmatrix} \dot{z}_u \\ \dot{z}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{[2]}(z) + \mathbf{f}^{[3]}(z) \\ \mathbf{g}^{[2]}(z) + \mathbf{g}^{[3]}(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} u, \\ \text{mit } \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix}, \quad \nu = \mu = \mathbf{0}, \\ \mathbf{A}_1 &= \text{diag} \{-i\omega_\phi, i\omega_\phi\}, \quad \mathbf{A}_2 = \text{diag} \{-i\omega_\theta, i\omega_\theta\}, \quad \mathbf{C} = \text{diag} \{-i\omega_L, i\omega_L\}. \end{aligned} \quad (3.153)$$

Die Ausführungen zum Schwebependel mit elastischem Faden (Abschnitt 3.3) haben gezeigt, dass eine innere Resonanz im ebenen Schwinger vorliegt. Für einen Beeinflussungsgrad von $n = 1$ in (3.95) ergibt sich eine 1:2-Resonanz der Auslenkungen des Pendels mit den longitudinalen Schwingungen des Fadens:

$$\omega_L = 2\omega_\phi.$$

Das Modell des Raumpendels weist nach Bild 3.12 zwei orthogonale Koordinaten der Auslenkung auf. Beide verfügen über die innere 1:2-Kopplung mit der Fadenlänge. Die Bewegungsgleichungen beider Winkel ϕ und θ in (3.141), (3.142) legen eine weitere innere Kopplung nahe, denn bei beiden findet sich die natürliche Kreisfrequenz des Pendels $\omega_\phi = \omega_\theta$ wieder. Somit sind die Pendelwinkel zusätzlich durch eine 1:1-Resonanz verknüpft. Im Gesamtsystem des Raumpendels ist letztlich eine 1:1:2 ($\omega_\phi : \omega_\theta : \omega_L$) innere Resonanz vorhanden, welche die Schwingungsfrequenzen der Moden nach $\omega_\phi = \omega_\theta = \omega$ und $\omega_L = 2\omega$ koppelt.

Transformation

Die Transformation des Originalsystems auf die reduzierte Normalform wird exemplarisch am steuerbaren Teilsystem durchgeführt. Dies verdeutlicht den Vorteil der getrennt transformierbaren Moden, ohne Beschränkung der allgemeinen Gültigkeit der Bewegungsgleichungen. Eine reduzierte Form der Transformation (3.116) wird auf die komplexe Darstellung der Differentialgleichungen des Raumpendels (3.153) angewendet:

$$\begin{aligned} x \longrightarrow z &= \Phi(y) = y + \Phi^{[k]}(y) = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \varphi^{[k]}(\xi, \eta) \end{bmatrix}, \\ \text{mit } \xi &= \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \bar{\xi}_1 \\ \xi_2 \\ \bar{\xi}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_u=4}, \quad \eta = \begin{bmatrix} \eta \\ \bar{\eta} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_c=2}. \end{aligned} \quad (3.154)$$

In der Komponente der nicht steuerbaren Moden ξ gilt für die nichtlineare Transformation $\mathbf{h}^{[k]} = \mathbf{0}$. Für die Berechnung der transformierten Raumpendelgleichungen betrachtet man den komplexen Raum der homogenen Polynome in $\mathbb{C}^{n=n_u+n_c=6}$ mit den Monomen $\xi_1^{m_1} \dots \xi_{n_u}^{m_{n_u}} \eta_1^{q_1} \dots \eta_{n_c}^{q_{n_c}} = \xi_1^{m_1} \bar{\xi}_1^{m_2} \xi_2^{m_3} \bar{\xi}_2^{m_4} \eta^{q_1} \bar{\eta}^{q_2}$.

Bei Nayfeh und Mook [67] ist im Bezug auf innere Resonanzkopplungen nachzulesen, dass die dominanten Polynome bei 1:2-Kopplung quadratische und bei 1:1-Kopplung kubische Ordnung haben. Daher behandelt die reduzierte Normalformtransformation des

Raumpendels mit 1:1:2 innerer Resonanz Nichtlinearitäten bis zur Ordnung $k = 3$. Das ursprüngliche Bewegungsverhalten des Systems liegt in (3.153) bereits mit quadratischen und kubischen nichtlinearen Polynomen vor. Terme höherer Ordnung wirken nicht maßgebend auf die Systemdynamik in der Umgebung der Ruhelage des Raumpendels. Die nichtlineare Transformation der steuerbaren Systemdynamik verfügt ebenfalls über quadratische und kubische Anteile:

$$\varphi^{[k]}(\xi, \eta) = \varphi^{[2]}(\xi, \eta) + \varphi^{[3]}(\xi, \eta). \quad (3.155)$$

Beginnt man an dieser Stelle mit der Transformation durch Einsetzen von (3.154) in (3.153), erhält man neben linearen Anteilen abermals quadratische und kubische Monome. Die quadratischen Nichtlinearitäten ($k = 2$) des steuerbaren Teilsystems enthalten lediglich nicht steuerbare Koordinaten

$$g^{[2]}(\xi, \eta) = g^{(2,0)}(\xi) \quad (3.156)$$

und ein Sortieren der Nichtlinearitäten in nicht steuerbare, steuerbare und gemischte Monome, analog zu (3.121) und (3.122), entfällt. Aus den zehn Lösungsbedingungen, welche aus den ursprünglichen homologischen Gleichungen abgeleitet worden sind, gilt es exakt eine Bedingung zu erfüllen. Für den Fall einer nichtlinearen Transformation des steuerbaren Subsystems mit nicht steuerbaren quadratischen Variablen kommen (3.126) mit $m = |\mathbf{m}| = 2$ und (3.128) zum Einsatz ($n_u = 4$, $n_c = 2$):

$$\frac{\partial \varphi^{(2,0)}}{\partial \xi}(\xi) \mathbf{A} \xi - \mathbf{C} \varphi^{(2,0)}(\xi) - \mathbf{B} \alpha^{(2,0)}(\xi) = g^{(2,0)}(\xi) - \mathbf{g}^{(2,0)}(\xi), \quad (3.157)$$

$$\langle \lambda, \mathbf{m} \rangle - \gamma_s = 0 \quad \text{und} \quad (3.158)$$

$$\varphi_{s:m_1 \dots m_{n_u} 0 \dots 0}^{(2,0)} = \frac{g_{s:m_1 \dots m_{n_u} 0 \dots 0}^{(2,0)}}{\langle \lambda, \mathbf{m} \rangle - \gamma_s}, \quad s = 1, 2. \quad (3.159)$$

Wählt man den Reglerparameter $\alpha^{(2,0)}$ zu Null, lässt sich (3.157) mit der bekannten Methodik für die allgemeine Normalform lösen. Die Normalform-Nichtlinearitäten $\mathbf{g}^{(2,0)}$ erhält man mit den Eigenwerten der linearen nicht steuerbaren und steuerbaren Teilsysteme

$$\lambda = \begin{bmatrix} -i\omega_\phi \\ i\omega_\phi \\ -i\omega_\theta \\ i\omega_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\omega \\ i\omega \\ -i\omega \\ i\omega \end{bmatrix}, \quad (3.160)$$

$$\gamma = \begin{bmatrix} -i\omega_L \\ i\omega_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2i\omega \\ 2i\omega \end{bmatrix}, \quad (3.161)$$

aus der Resonanzbedingung (3.158), vgl. die Diagonalgestalt von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{C}$ in (3.153). Für $s = 1$ ist

$$\begin{aligned} \langle \lambda, \mathbf{m} \rangle - \gamma_1 = 0 & \leftrightarrow i\omega(2 - m_1 + m_2 - m_3 + m_4) = 0, \\ & \leftrightarrow m_{1 \wedge 3} = 2, \quad m_{2,4} = 0, \quad (q_{1,2} = 0), \\ & \rightarrow \xi_1^{m_1} \bar{\xi}_1^{m_2} \xi_2^{m_3} \bar{\xi}_2^{m_4} \eta^{q_1} \bar{\eta}^{q_2} = \xi_1^2 \wedge \xi_2^2. \end{aligned}$$

Die Bedingung ist für alle $\mathbf{m}$ erfüllt, welche resonante Monome der Ordnung $m = 2$ ergeben. Anders ausgedrückt sind alle Monome der ursprünglichen Nichtlinearitäten auch resonante Normalform-Monome, deren Exponentialordnung die Resonanzbedingung erfüllt. Alle übrigen ursprünglichen Nichtlinearitäten sind nicht resonant und verschwinden durch die Normalformtransformation. Sie haben keinen signifikanten Einfluss auf die Systemdynamik. Die Gleichung zur Ermittlung der Koeffizienten (3.159) der Normalformtransformation benutzt die Koeffizienten der nicht resonanten Monome. Bezogen auf das Raumpendel erhält man für die koppelnden Monome

$$\mathbf{g}_1^{(2,0)}(\boldsymbol{\xi}) = i b_1 (\xi_1^2 + \xi_2^2), \quad (3.162)$$

$$\mathbf{g}_2^{(2,0)}(\boldsymbol{\xi}) = \overline{\mathbf{g}_1^{(2,0)}(\boldsymbol{\xi})} = -i b_1 (\bar{\xi}_1^2 + \bar{\xi}_2^2) \quad (3.163)$$

und

$$\varphi_1^{(2,0)}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{b_1}{4\omega} (\bar{\xi}_1^2 + \bar{\xi}_2^2) + \frac{b_2}{2\omega} (\xi_1 \bar{\xi}_1 + \xi_2 \bar{\xi}_2), \quad (3.164)$$

$$\varphi_2^{(2,0)}(\boldsymbol{\xi}) = \overline{\varphi_1^{(2,0)}(\boldsymbol{\xi})} = \frac{b_1}{4\omega} (\xi_1^2 + \xi_2^2) + \frac{b_2}{2\omega} (\xi_1 \bar{\xi}_1 + \xi_2 \bar{\xi}_2) \quad (3.165)$$

für die Einträge der Normalformtransformation der steuerbaren Moden.

Die Untersuchung der komplexen Bewegungsgleichung (3.152) hinsichtlich kubischer Nichtlinearitäten ($k = 3$) ergibt gemischte Monome mit $m = 2$ und $q = 1$, welche auch in der Darstellung in Normalformkoordinaten $\mathbf{y}$ vorkommen:

$$\mathbf{g}^{[3]}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{g}^{(2,1)}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}). \quad (3.166)$$

Mit (3.166) kommen die Bedingungen (3.136) sowie (3.140) zur Ermittlung von den kubischen resonanten Monomen und deren Transformation zum Einsatz:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varphi^{(2,1)}}{\partial \boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \mathbf{A} \boldsymbol{\xi} + \frac{\partial \varphi^{(2,1)}}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \mathbf{C} \boldsymbol{\eta} - \mathbf{C} \varphi^{(2,1)}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) - \mathbf{B} \boldsymbol{\alpha}^{(2,1)}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \\ &= \mathbf{g}^{(2,1)}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) - \mathbf{g}^{(2,1)}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}), \end{aligned} \quad (3.167)$$

$$\frac{\partial \varphi^{(2,1)}}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \mathbf{B} - \mathbf{B} \boldsymbol{\beta}^{(2,0)}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\mu}^{(2,0)}(\boldsymbol{\xi}) - \bar{\boldsymbol{\mu}}^{(2,0)}(\boldsymbol{\xi}). \quad (3.168)$$

Die neue Resonanzbedingung und die Gleichung für die Koeffizienten der kubischen Transformation der steuerbaren Moden werden aus (3.167) für $\boldsymbol{\alpha}^{(2,1)} = \mathbf{0}$ ermittelt

$$\langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{m} \rangle + \langle \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{q} \rangle - \gamma_s = 0 \quad \text{und} \quad (3.169)$$

$$\varphi_{s:m_1 \dots m_{n_u} q_1 \dots q_{n_c}}^{(2,1)} = \frac{g_{s:m_1 \dots m_{n_u} q_1 \dots q_{n_c}}^{(2,1)}}{\langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{m} \rangle + \langle \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{q} \rangle - \gamma_s}, \quad s = 1, 2. \quad (3.170)$$

Sie führen in gleicher Art und Weise wie bei den quadratischen Termen zu den resonanten kubischen Monomen

$$\mathbf{g}_1^{(2,1)}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = i b_4 (\xi_1 \bar{\xi}_1 \eta + \xi_2 \bar{\xi}_2 \eta), \quad (3.171)$$

$$\mathbf{g}_2^{(2,1)}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \overline{\mathbf{g}_1^{(2,1)}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})} = -i b_4 (\xi_1 \bar{\xi}_1 \bar{\eta} + \xi_2 \bar{\xi}_2 \bar{\eta}) \quad (3.172)$$

sowie den kubischen Transformationstermen

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(2,1)}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = & \eta \left[\frac{b_3}{2\omega} (\bar{\xi}_1^2 + \bar{\xi}_2^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2) \right] \\ & + \bar{\eta} \left[\frac{b_3}{2\omega} \left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \frac{\bar{\xi}_1^2}{3} + \frac{\bar{\xi}_2^2}{3} \right) + \frac{b_4}{4\omega} (\xi_1 \bar{\xi}_1 + \xi_2 \bar{\xi}_2) \right], \end{aligned} \quad (3.173)$$

$$\varphi_2^{(2,1)}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \overline{\varphi_1^{(2,1)}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})}. \quad (3.174)$$

In der Eingangsbedingung (3.168) wird der freie Reglerparameter $\boldsymbol{\beta}^{(2,0)}$ für die Unterdrückung von neuen bilinearen Eingangstermen $\bar{\boldsymbol{\mu}}^{(2,0)}$ verwendet, denn ursprüngliche bilineare Eingangsmonome $\boldsymbol{\mu}^{(2,0)}(\boldsymbol{\xi})$ treten gemäß (3.152) nicht auf. Somit folgt eine Berechnungsvorschrift für den Reglerparameter

$$\frac{\partial \varphi^{(2,1)}}{\partial \eta}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \mathbf{B} - \mathbf{B} \boldsymbol{\beta}^{(2,0)}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0} \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{\beta}^{(2,0)}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{B}^{-1} \frac{\partial \varphi^{(2,1)}}{\partial \eta}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \mathbf{B}, \quad (3.175)$$

mit der komplexen Eingangsmatrix $\mathbf{B}$ aus (3.153).

Es bleibt zusammengefasst festzuhalten, dass die nicht steuerbare Systemdynamik unverändert erhalten geblieben ist

$$\dot{\xi}_1 = -i\omega \xi_1 + f_1^{[2]}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + f_1^{[3]}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}), \quad (3.176)$$

$$\dot{\xi}_2 = -i\omega \xi_2 + f_2^{[2]}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + f_2^{[3]}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \quad (3.177)$$

und die reduzierte Normalform des steuerbaren Teilsystems in der Form

$$\dot{\eta} = -2i\omega \eta + \mathbf{g}_1^{[2]}(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{g}_1^{[3]}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + v_1 + i v_2 \quad (3.178)$$

aus den ursprünglichen Systemgleichungen (3.149) bis (3.151) und der reduzierten Normalformtransformation

$$\Phi(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\varphi}^{(2,0)}(\boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{\varphi}^{(2,1)}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \end{bmatrix} \quad (3.179)$$

hervorgegangen ist. Aus lediglich drei Bedingungen (3.157), (3.167) sowie (3.168) können die resonanten Nichtlinearitäten $\mathbf{g}^{[2,3]}$, die Transformationsterme $\boldsymbol{\varphi}^{[2,3]}$ und die Bedingung an den allgemeinen Reglerparameter $\boldsymbol{\beta}^{(2,0)}$ (3.175) des Raumpendels bestimmt werden. Anhand der resonanten Monome in (3.178) kann der Einfluss der koppelnden Koordinatenrichtungen in der Hubbewegung direkt angegeben werden. Es ist gelungen, den steuerbaren Teil des Raumpendels in eine Systembeschreibung zu überführen, welche die innere Resonanz mit den verknüpften Bewegungen berücksichtigt. Durch ähnliches Vorgehen sind die nicht steuerbaren Bewegungen gleichermaßen auf die reduzierte Normalform transformierbar. Das jedoch spielt im Kontext des Regler-Entwurfs in Kap. 4 keine Rolle und wird an dieser Stelle übergangen.

Zur Verifikation der ermittelten reduzierten Normalform in (3.178) wird eine Rücktransformation aus der komplexen Normalformdarstellung $\mathbf{y}$ in den Zustandsraum $\mathbf{x}$ vorgenommen. Die inverse Transformation wird gemäß dem Satz der impliziten Funktionen durchgeführt, nachzulesen u. a. bei Kuznetsov [51]. Anschließend wird

das rücktransformierte System (ohne Reglereingang: $\mathbf{u} = 0$) der reduzierten Normalform mit der ursprünglichen Dynamik der normierten relativen Seilbewegung verglichen. Bild 3.13 stellt die untransformierten Pendelwinkel ϕ und θ (oben) zusammen mit der Seilbewegung für das originale und Normalform-transformierte Teilsystem dar (unten). Beide Kurven der relativen Seillänge sind annähernd identisch. Die Abweichungen sind vernachlässigbar und haben ihren Ursprung in der Normalformberechnung bis zur Ordnung $k = 3$. Nichtlinearitäten höherer Ordnung werden abgeschnitten. Man spricht auch von identischen steuerbaren Teilsystemen vor und nach der Normalformtransformation (3.179). Durch die abgeschnittenen Nichtlinearitäten höherer Ordnung als $k = 3$ wird die Normalform streng betrachtet zu $\hat{\mathbf{y}}$, welches minimal von $\mathbf{y}$ abweicht. Murdock [66] vermutet, dass für die Existenz von $\epsilon_0 > 0$, $c > 0$ sowie $T > 0$, so dass $0 < \epsilon < \epsilon_0$ gilt, jede Lösung $\hat{\mathbf{y}}(t)$ mit $\|\hat{\mathbf{y}}(0)\| \leq \epsilon$ sich in der Umgebung von $\mathbf{y}(t)$ befindet. Die Differenz $\|\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)\| \leq c\epsilon^k$ ist verschwindend gering, so lange $\|\hat{\mathbf{y}}(t)\| \leq 2\epsilon$ und $0 \leq t \leq T/\epsilon$ erfüllt sind. Weiterführende Fehlerbetrachtungen sind bei Krener [43] zu finden. Die numerischen Ergebnisse in Bild 3.13 bestätigen diese Ausführungen zur Bestimmung der reduzierten Normalform der steuerbaren Bewegung des Raumpendels. Umfangreiche Betrachtungen zum Raumpendel mit elastischem Faden hat u. a. Lynch [56] angestellt.

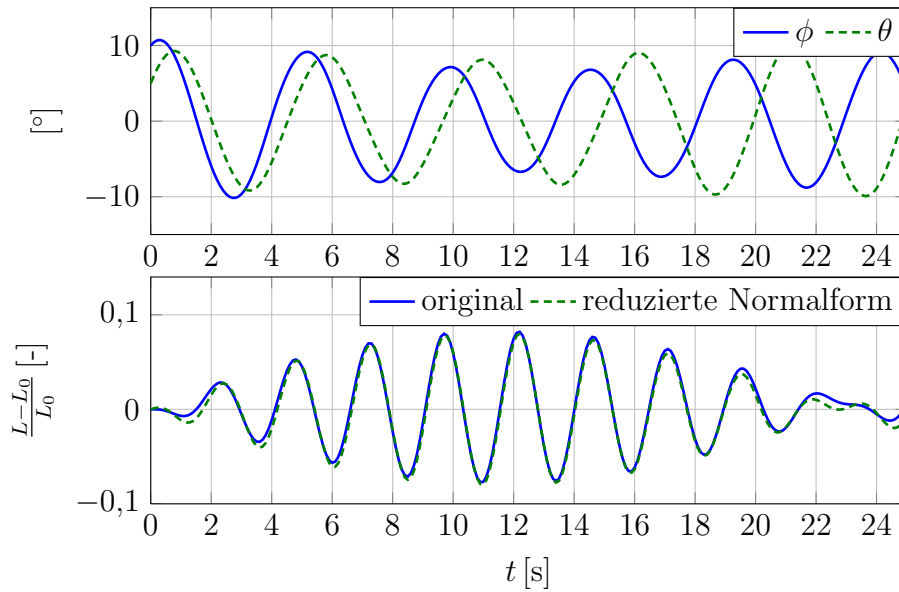


Bild 3.13: Oben: Pendelwinkel; unten: normierte relative Seillängskoordinate (Originalsystem vs. reduzierte Normalform); Parameter: $L_0 = 6\text{m}$, $\phi_0 = 10^\circ$, $\dot{\phi}_0 = 5^\circ/\text{s}$, $\theta_0 = 5^\circ$, $\dot{\theta}_0 = 10^\circ/\text{s}$

3.5 Fazit der Struktur-Last-Kopplung

In diesem Kapitel liegt der Schwerpunkt auf der mechanischen Kopplung von Containerkranstruktur und angehängter Last. Die Modellierung der Laufkatze am Kranausleger, des umgeschlagenen Containers und der Tragseile stehen im Zentrum der Untersuchungen. Das Ziel ist die Charakterisierung des dynamischen Einflusses der angehängten Last auf die Strukturdynamik von Kranen sowie die Erarbeitung von umfangreichem

Systemverständnis für die gezielte Dämpfung der Lastschwingungen im nachfolgenden Kapitel.

Ein nichtlineares Modell mit sechs verallgemeinerten Koordinaten, basierend auf translatorischen Freiheitsgraden (x, y, z) und KARDAN-Winkeln (α, β, γ) , beschreibt die Dynamik der Last ohne Einschränkungen. Mittels NEWTON-EULER-Gleichungen werden aus den kinematischen Beziehungen des Mehrkörpermodells die Bewegungsgleichungen für die Lastbewegung hergeleitet. Hervorzuheben ist die Formulierung der eingepprägten Kräfte der Tragseile. Sie beruht auf der visko-elastischen Beschreibung der Seildynamik, welche im Regelfall für den zeitlichen Verlauf zügig abklingt, gleichzeitig aber auch zu unstetigen Seilkräften in Extremsituationen führt. Ein Vorteil der Modellierung ist die Flexibilität der Tragseilführung. Es können beliebige Konfigurationen eingestellt werden und die Bewegungsgleichungen geben in jedem Fall die Dynamik zuverlässig wieder.

Die Untersuchungen des nichtlinearen Modells mit visko-elastischen Seilen haben lediglich geringe Nick- und Rollbewegungen während eines Referenz-Umschlagzyklus erkennen lassen. Die Beschränkung dieser Freiheitsgrade, zusammen mit der Vernachlässigung von Gierbewegungen, führt zu parallelen längssteifen Seilen. Werden weiterhin die mittlere Seillänge und die Position der Laufkatze als Eingaben für das Modell betrachtet, ist die Bewegung des angehängten Containers eindeutig durch zwei orthogonale Auslenkungen erfasst. Die Anzahl der verallgemeinerten Koordinaten des reduzierten nichtlinearen Modells ist von sechs auf zwei reduziert und die numerischen Probleme der visko-elastischen Seile sind behoben worden. Abermals werden die nichtlinearen Bewegungsgleichungen mit der NEWTON-EULER-Methode hergeleitet, welche konkret die Dynamik einer konzentrierten Masse des Containers aufgehängt an einem mittleren Tragseil abbildet. Für die Ermittlung der Zwangskräfte wird eine Transformation der Seilkräfte in einen dreidimensionalen Unterraum vorgenommen. Eine direkte Bestimmung aus den Bewegungsgleichungen ist aufgrund der überbestimmten Gleichungen nicht möglich. Im numerischen Vergleich des reduzierten nichtlinearen und eines linearisierten Modells wird deutlich, dass die lineare Systembeschreibung nicht in der Lage ist, die Lastdynamik exakt wiederzugeben.

Das Schwerependel mit elastischem Faden führt die Analyse der konzentrierten ausgelenkten Last fort. Der Schwerpunkt liegt zunächst auf ebenen Bewegungen mit veränderlicher Länge des mittleren Tragseils. Eine Betrachtung mit parametrischer Fadenlänge beschreibt eine periodische Anregung der Pendelbewegung, gefolgt von einer Energiebetrachtung, mit dem Resultat des kontinuierlichen Energieeintrags in das schwingende System. Die Auslenkung der Last nimmt fortlaufend zu. Das Systemverhalten ist instabil. Eine Überführung der Pendelgleichung in die Form der MATHIEUSchen Differentialgleichung vermittelt einen Einblick in das Übergangsverhalten von stabiler zu instabiler Dynamik. Die kopplungsstärkste Instabilität der Lastschwingung tritt bei doppelter Anregungsfrequenz der parametrischen Fadenlänge im Vergleich zur Schwingungsperiode auf. Eine Analyse beider gekoppelter Differentialgleichungen (Pendel und Faden) ist nicht ohne Weiteres möglich. Die geschickte Wahl von Annahmen führt wiederum zu einer Bewegungsgleichung der pendelnden Last mit periodischen Koeffizienten in Abhängigkeit der Fadenlänge.

Für die Charakterisierung der Kopplung von mehreren Differentialgleichungen wird die reduzierte Normalformmethode eingesetzt. Ausgehend von der bekannten Methodik der Normalform für autonome geregelte nichtlineare Systeme transformiert man das aktuierte Teilsystem des Tragseils eines Raumpendels auf die reduzierte Normalform. Diese identifiziert die maßgebenden quadratischen und kubischen Nichtlinearitäten der Koordinatenkopplung in den Gleichungen als resonante Monome. Das reduzierte Normalform-Verfahren eignet sich in besonderem Maße für die Betrachtung von unteraktuierten Systemen und die Trennung der Transformation in linear steuerbare sowie linear nicht steuerbare Subsysteme verletzt die allgemeine Gültigkeit nicht. Unter Berücksichtigung der inneren 1:1:2-Resonanz des Raumpendels ist der Einfluss der Pendelwinkel in der Fadengleichung durch die reduzierte Normalform direkt angegeben.

Das abgeschlossene Kapitel vermittelt ausgehend von der umfangreichen nichtlinearen Modellierung des Mehrkörpermodells und der anschließenden schrittweisen Vereinfachung des Systems eine ganzheitliche Veranschaulichung der Dynamik sowie der vorliegenden Resonanz-Phänomene.

Kapitel 4

Lastschwingungsdämpfung bei Containerkranen

Die Lastschwingungsdämpfung bei Containerkranen beruht auf inneren Resonanzen des unteraktuierten Kopplungsmodells der Struktur mit der Last. Auf die Ansteuerung der Laufkatze wird verzichtet. Im Grundlagen-Abschnitt wird zunächst die innere Resonanz mit der Hubbewegung der Last für den Regelungsansatz motiviert, gefolgt vom Ausschluss der Strukturanregungen durch den Eingriff in die Seillänge. Der Containerbrückenversuchsstand am Institut für Mechanik und Meerestechnik bietet die Plattform zur Validierung. Es werden Aufbau und Systemkomponenten ansatzweise beschrieben, um im Anschluss den Entwurf der servo-parametrischen Regelung am Versuchsstand zu untersuchen. Die Erweiterung des Versuchsaufbaus wird durch einen Zustandsbeobachter erzielt. Dieser basiert auf dem reduzierten nichtlinearen Modell aus Abschnitt 3.2 in einer stochastischen Form und folgt dem Formalismus des *Unscented* KALMAN-Filter. Die zusätzlich gewonnenen Informationen der Lastauslenkung dienen einer neuen Regelung, entworfen mit den Erkenntnissen der reduzierten Normalform. Alle dokumentierten Regelungsentwürfe werden am Containerbrückenversuchsstand validiert. Die Ergebnisse werden dargestellt und diskutiert.

4.1 Grundlagen

Eine Dämpfung der Lastschwingungen bei konstanter Position der Laufkatze, d. h. der Fixpunkt der pendelnden Last verändert seine Position entlang des Auslegers während des Regeleingriffs nicht, muss das Hubwerk als Aktuator verwenden. Auf Mechanismen zur Lastpendeldämpfung durch die gezielte Positionierung der Laufkatze ist im Rahmen der Darstellung des Stands der Technik hingewiesen worden, vgl. Abschnitt 1.3. Das betrachtete unteraktuierte System stellt keinen direkten Eingriff in den Koordinaten der Lastauslenkung zur Verfügung. Aus den Untersuchungen der MATHIEUSchen Differentialgleichung, der Koppelschwingungen und der reduzierten Normalform des Raumpendels ist jedoch hervorgegangen, dass innere Resonanzen eine Kopplung von Fadenlänge mit den Auslenkungen erzeugen. Durch Ausnutzen dieser Instabilitäten im Bereich der Resonanz wird die Seillänge gezielt periodisch verändert, um über die Kopplung Energie aus der Pendel- in die Hubbewegung zu transformieren. Dieser Ansatz der indirekten Regelung wird im Anschluss verdeutlicht. Besinnt man sich auf die wesentliche Strukturdynamik der

Containerkrane in Abschnitt 2.4, so stellt sich die Frage nach dem Einfluss des Lastpendels auf die Strukturschwingungen. Dieser Fragestellung wird ansatzweise nachgegangen.

4.1.1 Regelungsansatz

Der Regelungsansatz greift auf die Energiebetrachtung des Schwerependels mit elastischem Faden im Unterabschnitt 3.3.2 zurück. Der Unterschied besteht in der Umkehrung der Pendelbewegung. Auf eine maximale Anfangsauslenkung ϕ_{01} mit der Fadenlänge L_2 folgt beim Durchschreiten der Ruhelage $\phi = 0$ das Absenken der Last auf die Länge L_1 und das Fortsetzen der Bewegung bis zur erneuten Auslenkung ϕ_{02} . Nach einer Halbschwingung folgt das Anheben der Last um $h = L_1 - L_2$ und nach einer weiteren Viertelschwingung ein erneutes Absenken. Die Bewegung ist in Bild 4.1 hinterlegt und entspricht dem entgegengesetzten Verlauf von Bild 3.8.

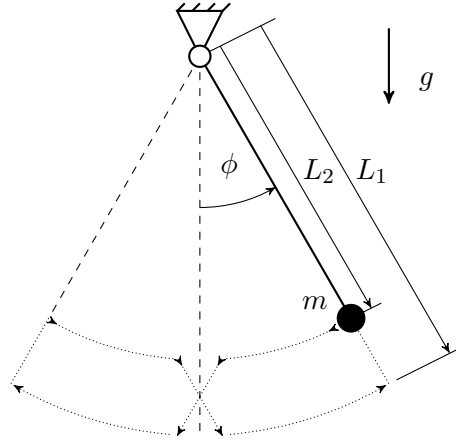


Bild 4.1: Schwerependel mit invers variierender Fadenlänge $L_{1,2}$

Entsprechend den Betrachtungen der Energiezunahme im System, wird mit den Gleichungen der quadrierten Winkelgeschwindigkeiten

$$\dot{\phi}_2^2 = \frac{2g}{L_2} (1 - \cos(\phi_{01})), \quad (4.1)$$

$$\dot{\phi}_1^2 = \frac{2g}{L_1} (1 - \cos(\phi_{02})), \quad (4.2)$$

unter Verwendung von $v_i = L_i \dot{\phi}_i$, dem Drallsatz bzgl. der Ruhelage und (4.1), (4.2)

$$m L_1^2 \dot{\phi}_1 = m L_2^2 \dot{\phi}_2 \quad \leftrightarrow \quad L_1^3 (1 - \cos(\phi_{02})) = L_2^3 (1 - \cos(\phi_{01})), \quad (4.3)$$

ein Ausdruck für den Betrag der Energie beim Absenken der Last in der Umgebung der Ruhelage ermittelt:

$$E_S = mgh + \frac{1}{2}m (v_2^2 - v_1^2), \quad (4.4)$$

$$= mg \left\{ h + L_2 (1 - \cos(\phi_{01})) \left[\left(1 - \frac{L_2}{L_1} \right)^2 \right] \right\}. \quad (4.5)$$

Beim Anheben der Last in der Maximalauslenkung ϕ_{02} nach einer Halbschwingung entfallen die Winkelgeschwindigkeiten ($\dot{\phi}_1 = \dot{\phi}_2 = 0$) und der Energieausdruck beim Heben ergibt sich zu:

$$E_H = mgh \cos(\phi_{02}). \quad (4.6)$$

Die Energiedifferenz vom Hub- und Senkvorgang wird mit (3.68) als

$$\Delta E = - \underbrace{\frac{h(L_1^2 + L_1 L_2 + L_2^2)}{L_1^3}}_{\hat{k}} \underbrace{mgL_2(1 - \cos(\phi_{01}))}_{\hat{E}_{01}} \quad (4.7)$$

bestimmt. Das negative Produkt aus geometrischem Faktor $\hat{k}$ und Anfangsenergie $\hat{E}_{01}$ verdeutlicht eine negative Bilanz der Systemenergie während einer Halbschwingung. Die Gesamtenergie des Schwerependels mit elastischem Faden nach einer halben Schwingungsperiode, gemäß (3.70), und n Halbschwingungen ergibt:

$$\hat{E}_{02} = \hat{E}_{01} (1 - \hat{k}), \quad (4.8)$$

$$\hat{E}_{0n} = \hat{E}_{01} (1 - \hat{k})^{n-1}. \quad (4.9)$$

Nach (4.9) nimmt die Energie im System ab, die Lastschwingungen des Containers sind gedämpft, obwohl es sich um ein konservatives Modell handelt. Die innere Kopplung der Auslenkung mit der parametrischen Fadenlänge führt bei entsprechender Einstellung zur Verringerung der Lastschwingungen. Khajepour und Golnaraghi [38] sowie Khajepour u. a. [40] stellen am Beispiel eines belasteten Kragbalkens und unter Nutzung einer inneren Resonanz dar, wie die ortsveränderliche Belastung in der Nähe des freien Balkenendes zur Dämpfung der Vertikalschwingungen des Gesamtsystems beiträgt. Auch dabei findet ein Energietransfer von einer unteraktuierten zu einer aktuierten Koordinate statt.

Eine alternative Betrachtung ist anhand der Pendelgleichung (3.63) möglich. Zur Veranschaulichung ist diese erneut angegeben:

$$\ddot{\phi} + 2\frac{\dot{L}}{L}\dot{\phi} + \frac{g}{L}\sin(\phi) = 0.$$

Als parametrische Anregung ist der Koeffizient $2\dot{L}/L$ der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$ identifiziert worden, der generell als Dämpfung gekennzeichnet ist. In der Umgebung von maximalen Auslenkungen ϕ_{0n} kehrt sich die Bewegungsrichtung der Last um, die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$ ist demnach Null. Die parametrische Anregung hat somit keinen Einfluss auf die Pendelgleichung und die Fadenlänge kann ohne koppelnden Einfluss von L_1 zu L_2 verkürzt werden (vgl. Bild 4.1). Beim Durchschreiten der Ruhelage ist die Geschwindigkeit wiederum maximal, die Fadenlängenänderung koppelt in die Auslenkung ein, so dass ein Absenken der Last maximal positiv dämpft, wie auch in Bild 4.1 dargestellt. Diese Argumentation wird durch die obige Energiebetrachtung bestätigt.

Falls es möglich ist, eine Regelung zu entwerfen, die das beschriebene Verhalten der Fadenlänge nachbildet, so kann die Lastschwingung gedämpft werden. Zwei ausgewählte Regelungen verwenden innere Resonanzen zur Dämpfung von Lastbewegungen, siehe Abschnitte 4.3 und 4.5.

4.1.2 Einfluss des Lastpendelns auf Strukturschwingungen

Nimmt man eine parallele und längssteife Seilaufhängung der Last an, so kann der Einfluss des Lastpendelns auf die Strukturschwingungen bewertet werden. Ein Vergleich der strukturellen Eigenschwingung ω_z in vertikaler Richtung mit der Kreisfrequenz der schwingenden Last ω_ϕ gibt an, ob u. U. eine Resonanzkopplung $\omega_z = 2\eta\omega_\phi$ stattfindet. Der Bewertungsindex η ist in [8] eingeführt worden und stellt die Güte der Resonanzkopplung in der Umgebung von $\eta = 1$ beim maximalen Energietransport dar. Zur Bestimmung der strukturellen Eigenschwingungen wird das Finite-Elemente-Modell des Containerkrans am Burchardkai aus Unterabschnitt 2.2.2 durch eine angehängte Last am land- bzw. wasserseitigen Ausleger an der Position x_m ergänzt (vergleichbar mit Bild 2.6) und eine Modalanalyse durchgeführt (vgl. Unterabschnitt 2.3.1). Die Strukturbewegungen während des Containerumschlags resultieren aus den Hauptschwingungen der jeweiligen Kranstruktur. Bild 4.2 vermittelt einen Eindruck über die Veränderung der ersten Schwingungsfrequenzen der CTB-Kranstruktur für veränderte Positionen x_m der angehängten Last am Ausleger. Weitere Variationen der Parameter des angehängten Pendels (Masse der Last, Steifigkeit der Aufhängung) führten zu vergleichbar geringen Veränderungen der Frequenzen, weshalb auf die Darstellung verzichtet wird. Die geringste Eigenschwingung in vertikaler Richtung wird mit $\omega_z = 2\pi f_z$ bezeichnet und die korrespondierende Eigenschwingung bedingt strukturelle Verformungen bei vorhandenen Lastschwingungen, welche die Resonanzbedingung ($\omega_z = 2\eta\omega_\phi$) erfüllen. Eine Untersuchung der Kopplung hinsichtlich der Seillänge im Resonanzfall ergibt:

$$2\pi f_z = 2\eta\omega_\phi, \quad \omega_\phi^2 = \frac{g}{L} \quad \leftrightarrow \quad L = \frac{\eta^2 g}{\pi^2 f_z^2}. \quad (4.10)$$

Mit den Werten der veränderlichen Schwingungsfrequenz f_z aus Bild 4.2 ist die resonante Länge der Lastaufhängung (4.10) in Bild 4.3 angegeben. Für drei unterschiedliche Güten η fällt auf, dass L in keinem Fall den Wert 1,5m überschreitet. Diese Länge im Vergleich zur Hubhöhe realer Containerkrane von über 50m (Tab. 2.1) wird als sehr gering eingestuft und kommt im regulären Umschlagbetrieb nicht vor. Eine Anregung der Strukturdynamik durch resonante Lastschwingungen ist demnach auszuschließen. Der Gebrauch der inneren Kopplung von Hub- und Lastbewegung wird durch keine strukturdynamischen Effekte beschränkt, weshalb mit dem vorgestellten Regelungsansatz fortgefahren werden kann (siehe auch [48]).

4.2 Containerbrückenversuchsstand

Der Containerbrückenversuchsstand ist speziell für die Untersuchungen zur aktiven Dämpfung von Lastschwingungen bei Containerkranen entwickelt und installiert worden. Einige Ausführungen zum mechanischen Aufbau und der Steuerung verdeutlichen die Funktionalität sowie das Anwendungsfeld der Versuchseinrichtung. Vertiefende Beschreibungen des Aufbaus, elektronischer Komponenten sowie programmiertechnischer Aspekte

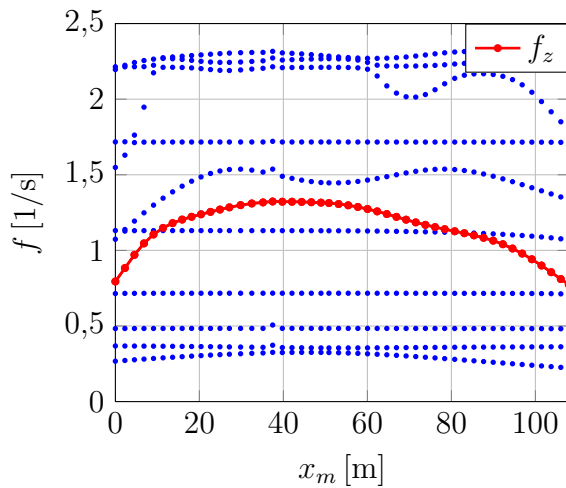


Bild 4.2: Eigenschwingung f am CTB-Kran für Variation der Lastposition x_m

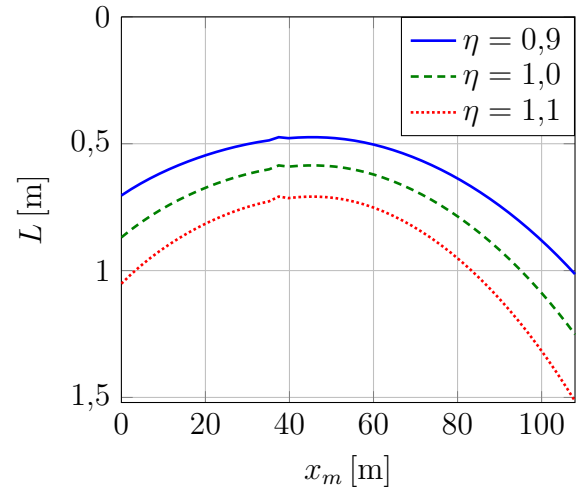


Bild 4.3: Pendellänge L im Resonanzfall $\omega_z = 2\eta\omega_\phi$ für diverse Lastpositionen x_m

zur Inbetriebnahme des Containerbrückenversuchsstands können bei Borrmann [10] entnommen werden.

4.2.1 Mechanischer Aufbau

Der mechanische Aufbau des Containerbrückenversuchsstands am Institut für Mechanik und Meerestechnik ist in Bild 4.4 wiedergegeben. Zwei parallele Führungsschienen für die Laufkatze sind an der Hallendecke montiert. Die verbleibende Höhe von 11m stellt die maximale Hubhöhe des Versuchsstands dar, bei einer Länge der Führungsschienen von 15m. Aufgrund eines weiteren Deckenkranes beträgt der Verfahrweg im Betrieb 13m. Der angehängte Modellcontainer wiegt ca. 30kg, wobei der Versuchsstand für 150kg Maximallast ausgelegt worden ist.

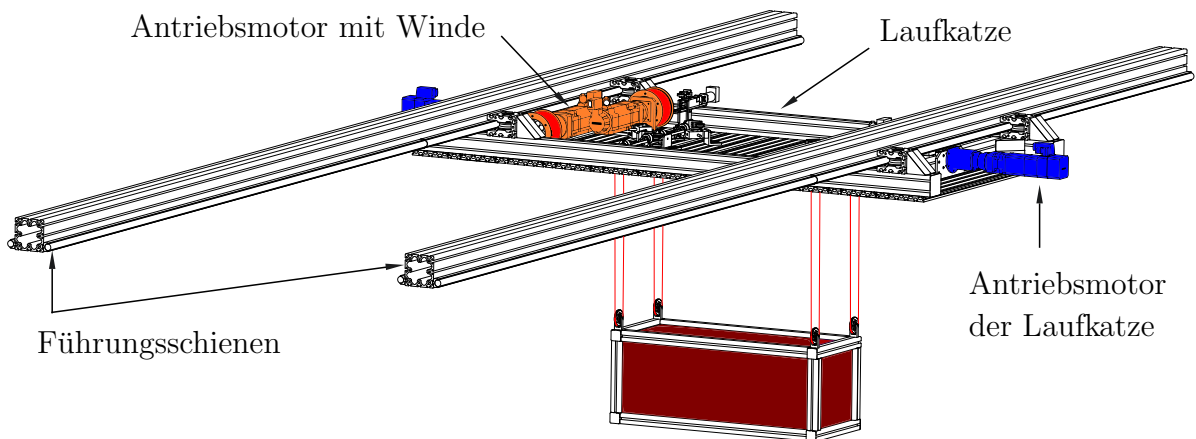


Bild 4.4: Schematische Darstellung des Containerbrückenversuchsstands

Die Laufkatze wird von zwei permanent-erregten Synchronservomotoren mit Raupenantrieb bewegt. Ein vorgespannter Zahnriemen greift direkt in die Zahnstangen ein, wel-

che auf der Gesamtlänge der Führungsschienen angebracht sind. Die Leistung je Antrieb ist mit 0,88kW (1,4Nm bei 6000U/min) angegeben. Für bestmöglichen Gleichlauf werden beide Motoren im Synchronbetrieb angesteuert. Es wird eine Beschleunigung von 4m/s^2 erreicht, bei 30kg angehängter Last sowie 270kg Laufkatzen-Gewicht. Die Höchstgeschwindigkeit beträgt 3m/s. Moderne Laufkatzen auf Containerkranen erzielen maximal 4m/s. Reale Hubwerke verfügen, wie bereits erwähnt, über zwei (gelegentlich vier) Winden zum Anheben und Absenken der Container, wohingegen am Containerbrückenversuchsstand je eine Winde pro Hubseil existiert, so dass weitere vier Synchronservomotoren verbaut worden sind. Dieser Aufbau ermöglicht eine getrennte Ansteuerung der Seile für maximale Flexibilität bei der Lastpendeldämpfung. Die Winden schließen direkt am Getriebe der Servomotoren an, die eine leistungsstärkere Variante der Laufkatzantriebe sind (1,41kW bzw. 3Nm bei 6000U/min). Alle Motoren sind mit angeschlossenen Planetenradgetrieben zur Drehzahlanpassung sowie Absolutgeber und Haltebremse ausgestattet. An den Ecken der Oberfläche des Modellcontainers befindet sich je eine Umlenkrolle. Jedes Hubseil wird von der Winde kommend über zwei Rollen der Seilführung auf der Laufkatze nach unten geführt, dort umgelenkt und wiederum nach oben geleitet, über zwei weitere Rollen, um an einem Kraftsensor fest angeknüpft zu enden. Jeder Kraftsensor verfügt über einen Messbereich bis 100N, einen Festanschlag und einen angeschlossenen Messverstärker mit Analog-digital-Wandler. Durch die gewählte Seilkonfiguration entspricht die Ausführung im Labor der Seilführung bei realen Containerkranen. Die inneren Neigungsrollen für die vertikale Seilführung wurden auf einem gemeinsamen Rahmen montiert und sind drehbar gelagert. Die Neigung der Rollen folgt der Auslenkung des Seils durch die Bewegung der Last, besonders bei Lastbewegungen außerhalb der Halbebene unterhalb der Führungsschienen. Das Seil verharrt in allen Betriebssituationen auf den Rollen. Die Geschwindigkeit beim Anheben und Absenken des Containers beträgt bis zu 3m/s, exakt wie bei Kranen im Hafen.

4.2.2 Steuerung

Die Steuerung der Einrichtung wird gemäß Bild 4.5 über Mehrachssteuereinheit, Echtzeit-Industriecomputer, Benutzercomputer und Messverstärker der Sensoren vorgenommen.

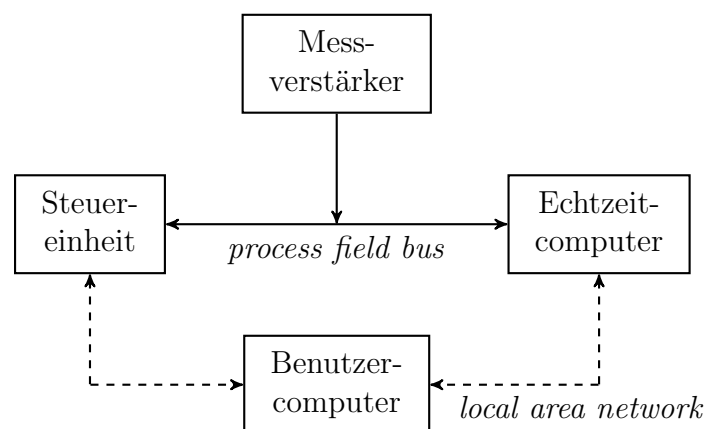


Bild 4.5: Komponenten und Kommunikation der Steuerung

Der Benutzer ist im Netzwerk (*local area network*, Abk.: LAN) mit dem Echtzeit-

Computer und der Steuereinheit verbunden. Die Kommunikation im Betrieb zwischen der Steuereinheit und dem Echtzeitcomputer findet nach dem offenem Feldbusstandard *process field bus* (Abk.: PROFIBUS) statt. Die Messwerte der Kraftsensoren sowie aller Motoren und die Stellsignale werden ausgetauscht. Alle Motoren des Hubwerks und der Laufkatze werden von einer SIEMENS SIMOTION D435 Steuereinheit betrieben, in Kombination mit SIEMENS SINAMICS S120 Leistungselektronikkomponenten. Die SIMOTION D435 ist das Kernstück des Versuchsstands und speziell für Mehrachs-anwendungen konzipiert. Diese Kombination aus Steuerung und Antrieb enthält die Prozessoreinheit (*control unit*), die Einspeiseeinheit, das Leistungsteil, Netzfilter sowie die Synchronservomotoren. In der Prozessoreinheit werden die definierten Funktionalitäten verwaltet und die Steuerbefehle verarbeitet. Mit STRUCTURED TEXT (SC) entwickelte Technologieobjekte werden ähnlich wie bei der Programmiersprache PASCAL für die SPS¹ übersetzt und von den angesteuerten Komponenten ausgeführt.

Die Benutzervorgaben, die Verarbeitung von Messsignalen und Reglervorgaben an das System werden über ein zentralisiertes Programm gesteuert, entwickelt mit NATIONAL INSTRUMENTS LABVIEW. Implementiert auf einem Echtzeit-Industriecomputer können vielschichtige Reglerstrukturen am Containerbrückenversuchsstand getestet werden. Der Programmablauf während des geregelten Betriebs wird ausschließlich vom Echtzeitcomputer vorgegeben. Der vorgelagerte Regelungsentwurf findet üblicherweise auf dem Benutzercomputer statt, unterteilt in drei Phasen:

1. Entwurf und Simulation z. B. mit MATLAB von MATHWORKS,
2. Übersetzen der MATLAB-Skripte in C-Code und Kompilieren der Regelung zu einer dynamischen Bibliothek (*dynamic link library*, Abk.: dll),
3. Bibliothek in LABVIEW-Schnittstelle einbinden.

An den Benutzercomputer werden fortlaufend die angeforderten Ausgaben übermittelt. Debugging-Funktionalitäten sind ebenso verfügbar. Die Taktrate der Regelungen ist mit 200Hz begrenzt, bedingt durch die PROFIBUS-Kommunikation der Hardware. Die Übertragung der Kraftmesswerte, Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung aller sechs Motoren verläuft via PROFIBUS an das Hauptprogramm auf dem Echtzeitcomputer, das die Steuerbefehle gleichfalls über das PROFIBUS-Protokoll an die Motoren absetzt. Der digitale Signalverstärker der Kraftmessungen verknüpft alle vier Sensorwerte und versendet diese gebündelt.

Der beschriebene Aufbau verfügt über keine Sensorik zur Erfassung der Containerauslenkung aus der Ruhelage. Regelmechanismen können ohne eine Erweiterung des bestehenden Messsystems, durch z. B. eine rechnergestützte Beobachtung von Zuständen, lediglich auf die Kraftmessungen zur qualitativen Bestimmung der Auslenkung zurückgreifen.

4.3 Servo-parametrische Regelung

Die servo-parametrische Regelung ist in [8], motiviert durch den Entwurf des *Modal Coupling Control* in [39, 40], hergeleitet worden. Die Validierung an einer aufgehängten Kugel,

¹SPS ist die Abkürzung von Speicherprogrammierbare Steuerung.

dessen Seillänge mittels Hubmodulation variierte, wurde von Hackbarth [25] vorgenommen. Die Grundzüge der servo-parametrischen Regelung werden erneut aufgegriffen, um das Design mit einer alternativen formellen Herangehensweise zu bestätigen. Ergebnisse am Containerbrückenversuchsstand validieren die alternative Entwurfsmethode und liefern grundlegende Informationen zum geregelten Systemverhalten. Im Hinblick auf komplexere Regelungsentwürfe eignet sich der Entwurf hervorragend zur anschaulichen Darstellung der Grundeigenschaften des geregelten Schwerependels mit elastischem Faden.

4.3.1 Design

Das Design der Regelung basiert auf der Erfüllung der Resonanzbedingung zwischen den gekoppelten Bewegungen. Energie wird von der ausgelenkten Last zur Hubbewegung transferiert und eine aktive Dissipation in Richtung des Reglereingriffs führt zum gedämpften Verhalten der Lastbewegung. Bockstedte fundiert den Entwurf der Regelung auf der Kraft F im Seil, um Rückschlüsse auf die Auslenkung der Last, des linear nicht steuerbaren Teilsystems, zu ziehen. Es wird nachfolgend gezeigt, dass ein Entwurf mit der Seilgleichung (3.82) genauso zielführend ist. Die Dynamik des Seils am Schwerependel ist erneut angegeben:

$$m\ddot{L} + c(L - L_0) - mL\dot{\phi}^2 + mg(1 - \cos(\phi)) = 0.$$

Normiert man die Seilgleichung mit der Last m , substituiert die normierte Steifigkeit mit der quadrierten Schwingungsfrequenz des Seils $c/m = \omega_L^2$ und transformiert das Resultat in die Zustandsraumdarstellung, so ergibt sich:

$$\dot{\mathbf{x}}_T = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_L^2 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_T} \mathbf{x}_T + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_T} \underbrace{\left[L\dot{\phi}^2 + g(\cos(\phi) - 1) \right]}_{u'}, \quad (4.11)$$

$$\text{mit } \mathbf{x}_T = \begin{bmatrix} L - L_0 \\ \dot{L} - \dot{L}_{ref} \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Das System in (4.11) liegt bereits in der Regelungsnormalform vor, mit der Systemmatrix $\mathbf{A}_T$, dem Eingangsvektor $\mathbf{B}_T$ sowie dem Eingang u' . Ist dies nicht der Fall, so muss das allgemeine System im Zustandsraum mit einer Transformation $\mathbf{x} = \mathbf{T} \mathbf{x}_T$ in die Regelungsnormalform überführt werden (hier: $\mathbf{T} = \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}_T$).

Eine gezielte Polzuweisung in einem Regelkreis verändert die Eigenwerte des Gesamtsystems (z. B. Lunze [55]). Da die Eigenwerte maßgebend für die Dynamik des Gesamtsystems sind, kann durch die Anpassung der Reglerparameter stabiles Verhalten erzwungen werden. Die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises sollen sich in der linken Halbebene der komplexen Ebene befinden. Ausgehend von der linearen Regelstrecke $\mathbf{A}_T \mathbf{x}$ wird für das vorliegende System (4.11) ein dominantes Polpaar in der linken Halbebene angestrebt. Es ist zu beachten, dass nicht jede numerische Variante des Polpaares zu realisierbaren Größen der Systemdynamik führt. Begrenzungen der Stellgrößen limitieren bspw. die Auswahl. Zusätzlich ist erforderlich, dass alle Zustände bekannt sind. Am Containerbrückenversuchsstand trifft das am linear steuerbaren Teilsystem des Seils zu. Die Pole werden durch gezieltes Verändern der Eigenwerte platziert. Der Eingang u' wird mit

$$u = u' - \mathbf{k}^T \mathbf{x}_T \quad (4.13)$$

in (4.11) ersetzt und führt mit $\mathbf{k} = [k_0, k_1]^T$ zu

$$\dot{\mathbf{x}}_T = (\mathbf{A}_T - \mathbf{B}_T \mathbf{k}^T) \mathbf{x}_T + \mathbf{B}_T u', \quad (4.14)$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 - k_0 & -a_1 - k_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}^*} \mathbf{x}_T + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u'. \quad (4.15)$$

Die Parameter a_i entstammen der Systemmatrix $\mathbf{A}_T$ und lauten $a_0 = \omega_L^2$ sowie $a_1 = 0$. Für den geschlossenen Regelkreis ist mit (4.14) bzw. (4.15) die Zustandsraumdarstellung bestimmt. Das charakteristische Polynom der veränderten Systemmatrix $\mathbf{A}^*$ stellt die neuen Eigenwerte des komplexen Polpaares dar:

$$p(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}_T + \mathbf{B}_T \mathbf{k}^T) = 0, \quad (4.16)$$

welche dem Verhalten eines gedämpften Feder-Masse-Schwingers mit einem Freiheitsgrad (Bild 4.6) gerecht werden sollen.

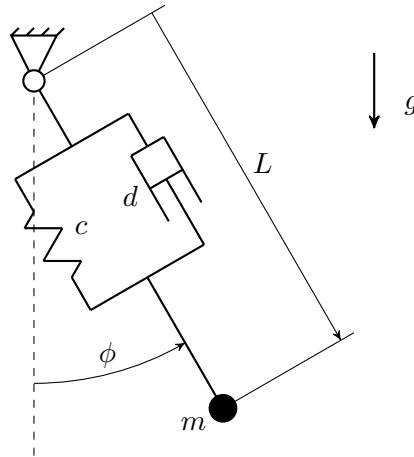


Bild 4.6: Gedämpftes Schwebpendel mit elastischem Faden

Ein solcher Schwinger mit der Federsteifigkeit c und der Dämpferkonstante d wird mit den Umformungen in [57] durch ein konjugiert komplexes Polpaar $\delta_1 \pm i\omega_1$ im charakteristischen Polynom beschrieben:

$$p(\lambda) = (\lambda - \delta_1 - i\omega_1)(\lambda - \delta_1 + i\omega_1). \quad (4.17)$$

Der Koeffizientenvergleich von (4.17) mit (4.16) ergibt die benötigte Zustandsrückführung

$$-\mathbf{k}^T \mathbf{x}_T = - \begin{bmatrix} \delta_1^2 + \omega_1^2 - \omega_L^2 \\ -2\delta_1 \end{bmatrix}^T \mathbf{x}_T \quad (4.18)$$

und letztlich die Repräsentation des angestrebten geschlossenen Regelkreises:

$$\dot{\mathbf{x}}_T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\delta_1^2 + \omega_1^2) & 2\delta_1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_T + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u'. \quad (4.19)$$

Die Schwingungsfrequenz des (schwach) gedämpften Feder-Masse-Schwingers ist mit $\omega_L = \sqrt{\delta_1^2 + \omega_1^2}$ angegeben und muss die Resonanzbedingung $\omega_L = 2\omega_\phi$ erfüllen ($\omega_\phi = \sqrt{g/L_0}$). Bockstedte [8] hat unter Verwendung des LEHRschen Dämpfungsmaßes

$$D = \frac{-\delta_1}{\sqrt{\delta_1^2 + \omega_1^2}} \quad (4.20)$$

die Parameter δ_1 und ω_1 für den geschlossenen Regelkreis

$$\delta_1 = -2\sqrt{\frac{g D^2}{L_0 (1 - 2 D^2)}}, \quad \omega_1 = 2\sqrt{\frac{g (1 - D^2)}{L_0 (1 - 2 D^2)}} \quad (4.21)$$

ermittelt. Der Real- und Imaginärteil (4.21) des konjugiert komplexen Polpaares sind von der Dämpfung D und der Referenzseillänge L_0 abhängig. Während des Containerumschlags wird die Referenzseillänge L_0 für $t = 0$ durch eine Referenzgeschwindigkeit $\dot{L}_{ref}$ gemäß $L_0(t) = \dot{L}_{ref} t + L_0$ angepasst. Weiterhin findet man in [8] einen realen Pol δ_2 mit $\delta_2 < 0/s$ und $|\delta_2| \gg \sqrt{\delta_1^2 + \omega_1^2}$, der links des Polpaares in der komplexen Halbebene wiederzufinden ist. Dieser gewährleistet die asymptotische Stabilität des Schwingers im realen gestörten Regelkreis des Versuchsstands. Das modifizierte charakteristische Polynom in Anlehnung an (4.17) entspricht:

$$p(\lambda) = (\lambda - \delta_1 - i\omega_1)(\lambda - \delta_1 + i\omega_1)(\lambda - \delta_2). \quad (4.22)$$

Der Koeffizientenvergleich von (4.22) mit der erweiterten Zustandsraumdarstellung von (4.15) für $\mathbf{x}_T \in \mathbb{R}^3$ ergibt das Zustandsraummodell des geschlossenen Regelkreises

$$\dot{\mathbf{x}}_T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \delta_2(\delta_1^2 + \omega_1^2) & -(\delta_1^2 + \omega_1^2 + 2\delta_1\delta_2) & 2\delta_1 + \delta_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_T, \quad (4.23)$$

$$\text{mit } \mathbf{x}_T = \begin{bmatrix} L - L_0 \\ \dot{L} - \dot{L}_{ref} \\ \ddot{L} - u' \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Zusätzlich wird ein Korrekturfaktor κ eingeführt, der in die Resonanzbedingung

$$\omega_L = 2\kappa\omega_\phi \quad (4.25)$$

eingeht. Die ursprüngliche 1:2-Abstimmung der gekoppelten Schwingungen ist hinsichtlich der linearisierten Schwingungsformen ausgerichtet worden. Mit dem Korrekturfaktor κ wird die Resonanzbedingung für den nichtlinearen leicht gedämpften Feder-Masse-Schwinger angeglichen. Bild 4.7 stellt das numerische Ergebnis als x - z -Trajektorie des geregelten Schwerependels mit elastischem Faden dar. Ausgehend vom Anfangszustand $[\phi_0, \dot{\phi}_0, L_0, \dot{L}_0]^T = [0\text{rad}, 0,45\text{rad/s}, 5\text{m}, 0\text{m/s}]^T$ wird das ausgelenkte Schwerependel durch die Resonanzbedingung (4.25), die Dämpfung D (4.20), den realen Pol δ_2 und den Korrekturfaktor κ auf der angegebenen Trajektorie in der Ebene bewegt. Die servo-parametrische Regelung erzwingt durch die periodische Veränderung der Seillänge den Energietransfer von der Lastauslenkung zur Hubbewegung bei gleichzeitiger Energiedissipation. Die Lastauslenkung und die Seillängenänderung nehmen ab. Das unteraktuierte Schwerependel wird über die innere Kopplung aktiv gedämpft. Der Einfluss

der Reglerparameter D und κ ist bereits in [8, 25] untersucht worden. Zusammengefasst ist hervorzuheben, dass die Dämpfung ausreichend Dynamik der Hubbewegung zulassen soll, bei rechtzeitiger Kompensation des Aktuatoreingriffs (siehe Abschnitt C.1). Der Korrekturfaktor erweist sich für Werte leicht oberhalb von $\kappa = 1$ am wirkungsvollsten.

Die Betrachtung der Energie verdeutlicht das Maß der Lastschwingungsdämpfung. Kinetische Energie (3.80) und potentielle Energie (3.81) ergeben summiert die Gesamtenergie des Schwerependels mit elastischem Faden:

$$E = \frac{1}{2}m \left(L^2 \dot{\phi}^2 + \dot{L}^2 \right) + mgL (1 - \cos(\phi)) + \frac{1}{2}c (L - L_0)^2. \quad (4.26)$$

Mit der Substitution von $L = L_0(1 + l)$ und $c = \omega_L^2 m$ in (4.26) erhält man

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m \left[L_0^2 (1 + l)^2 \dot{\phi}^2 + L_0^2 \dot{l}^2 \right] + mgL_0 (1 + l) (1 - \cos(\phi)) + \frac{1}{2}m\omega_L^2 L_0^2 l^2, \\ &= E(\phi, \dot{\phi}, l, \dot{l}), \end{aligned} \quad (4.27)$$

unter Verwendung der normierten relativen Länge l und der Kreisfrequenz des Seils ω_L . Interessiert ausschließlich die Energie der Pendelbewegung bzw. der Hubbewegung, werden die nicht relevanten Größen in (4.27) zu Null gesetzt:

$$\bar{E}_\phi = \frac{E(\phi, \dot{\phi}, 0, 0)}{m} = \frac{1}{2}L_0^2 \dot{\phi}^2 + gL_0 (1 - \cos(\phi)), \quad (4.28)$$

$$\bar{E}_l = \frac{E(0, 0, l, \dot{l})}{m} = \frac{1}{2}L_0^2 \dot{l}^2 + \frac{1}{2}\omega_L^2 L_0^2 l^2. \quad (4.29)$$

Weiterhin sind die Ausdrücke (4.28) und (4.29) hinsichtlich der angehängten Last m normiert. In Bild 4.8 sind $\bar{E}_\phi$ und $\bar{E}_l$ für die geregelte numerische Lastbewegung aus Bild 4.7 sowie für eine unregelte numerische Lastbewegung gezeigt.

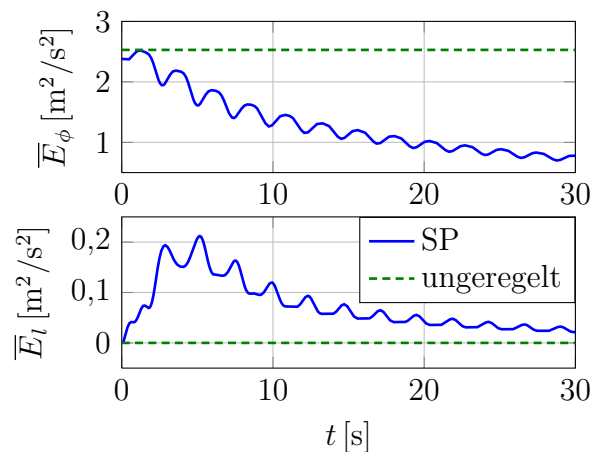
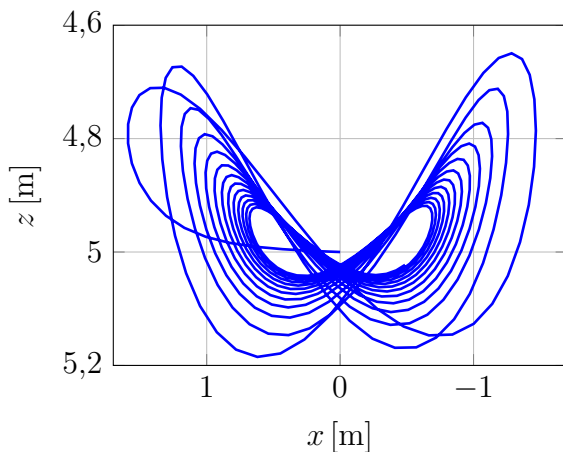


Bild 4.7: Numerisches Ergebnis als Trajektorie der geregelten Lastbewegung: $\delta_2 = 4/\text{s}$, $D = 0,15$, $\kappa = 1,025$, $L_0 = 5\text{m}$, $\dot{L}_{ref} = 0\text{m/s}$

Bild 4.8: Normierte Energien der Pendel- und Hubbewegung bei geregelter, vgl. Bild 4.7, und unregelter Lastbewegung

Die Energie der Pendelbewegung $\bar{E}_\phi$ nimmt fortlaufend ab, hervorgerufen durch die resonante Schwingung des Seils. Dafür wird zunächst Energie in die Seilbewegung eingebracht, $\bar{E}_l$ nimmt zu. Im weiteren Verlauf nimmt $\bar{E}_l$ wieder ab, die Hubbewegung ist gedämpft und die Lastschwingungen klingen beständig ab. Beim unregulierten Schwingen der Last wird in die Seilrichtung nicht eingegriffen ($\bar{E}_l = 0 \text{ m}^2/\text{s}^2$) und die Energie der Pendelbewegung $\bar{E}_\phi$ ist konstant. Die Last schwingt ungedämpft.

4.3.2 Ergebnisse

Die Ergebnisse der Untersuchungen am Containerbrückenversuchsstand stellen erstmalig das geregelte Verhalten eines ausgelenkten Containers dar, aufgehängt an vier Seilen (siehe Versuchsstandbeschreibung in Abschnitt 4.2). Bisherige experimentelle Untersuchungen beschränken sich auf eine einzeln aufgehängte Masse ([8, 25]). Nachfolgend werden verschiedene Szenarien der aktiven Dämpfung von Lastschwingungen mit und ohne Hubbewegung diskutiert.

Zunächst werden die Parameter der numerischen Untersuchung aus Bild 4.7 für die servo-parametrische Regelung am ausgelenkten Container angewendet.

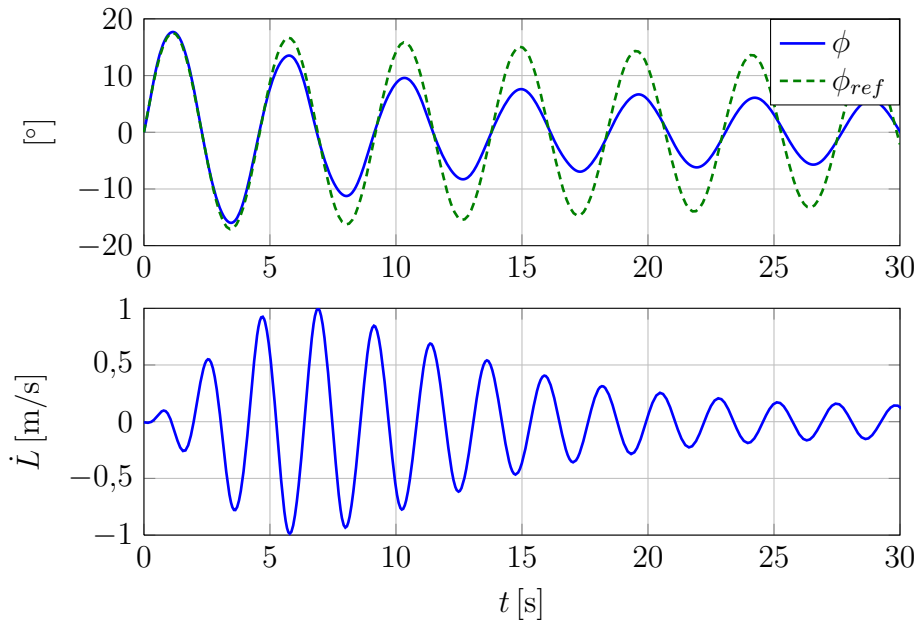


Bild 4.9: Zeitverläufe der Pendelwinkel ϕ und der Stellgröße $\dot{L}$ für geregelte Lastbewegung: $\delta_2 = 4/\text{s}$, $D = 0,15$, $\kappa = 1,025$, $L_0 = 5\text{m}$, $\dot{L}_{ref} = 0\text{m/s}$

Die Auslenkung des Containermittelpunkts ist für den geregelten (ϕ) und unregulierten (ϕ_{ref}) Vorgang zusammen mit der Seillängenänderung $\dot{L}$ wiedergegeben. Beim unregulierten Vorgang führt die Luftreibung automatisch zum Abklingen der Containerschwingung. Man beobachtet gleichmäßiges Abklingen in ϕ über der Zeit. Der Aktuator erzeugt zunächst die resonante Schwingung mit der Frequenz ω_L und entzieht durch Zunahme der Amplitude von $\dot{L}$ ein Teil der Energie der Lastschwingung. Anschließend dominiert die Dämpfung in Seilrichtung. Die Hubschwingung nimmt ab und die gekoppelte Lastschwingungsdämpfung ist weniger wirkungsvoll als zu Beginn. Vergleicht man die

Ausführungen zum Regelungsansatz (Abschnitt 4.1) mit der variierenden Fadenlänge $L_{1,2}$ (Bild 4.1), so ergeben sich Analogien zu Bild 4.9. Beim Durchschreiten der Ruhelage wird der Container abgesenkt ($\dot{L} > 0$) und in den Punkten der maximalen bzw. minimalen Auslenkung angehoben ($\dot{L} < 0$). Die Energie im gekoppelten System nimmt kontinuierlich ab, belegbar durch (4.9) und dem gedämpften Pendelwinkel ϕ in Bild 4.9.

Eine veränderte und variierende Anfangskonfiguration wird in Bild 4.10 mit modifizierten Reglerparametern angestrengt. Die Referenzlänge des Fadens beträgt $L_0 = 6\text{m}$, die Anfangsauslenkung $\phi_{0,1} = 0,2\text{rad}$ bzw. $\phi_{0,2} = 0,3\text{rad}$ und die Dämpfung $D = 0,03$. Der zusätzliche Pol $\delta_2 = 3,5/\text{s}$ unterliegt einer minimalen Veränderung. Es werden die jeweiligen Verläufe der Containerauslenkung $\phi_{1,2}$ bzgl. der Referenzbewegung sowie die Werte der Seillängenänderung gezeigt.

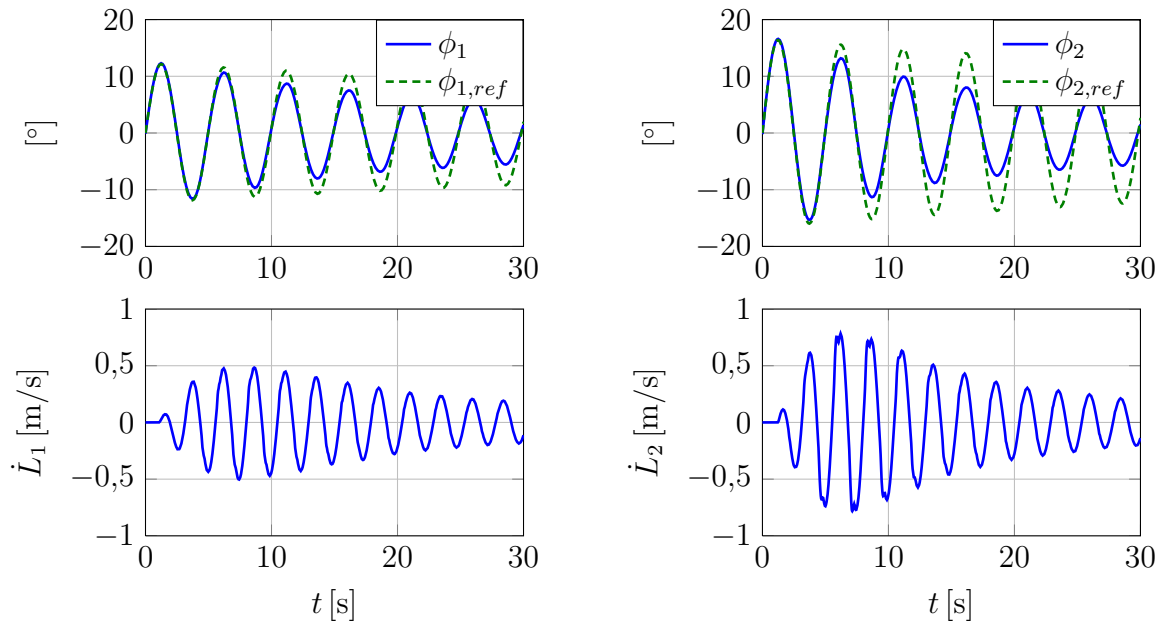


Bild 4.10: Zeitverläufe der Pendelwinkel $\phi_{1,2}$ und der Stellgröße $\dot{L}_{1,2}$ für geregelte Lastbewegung: $\delta_2 = 3,5/\text{s}$, $D = 0,03$, $\kappa = 1,025$, $L_0 = 6\text{m}$, $\dot{L}_{ref} = 0\text{m/s}$

Die servo-parametrische Regelung greift im aktuellen Szenario erst mit Erreichen der maximalen Anfangsauslenkung in das System ein. Beim Vergleich von unterschiedlichen Anfangsauslenkungen des Containers ist ersichtlich, dass eine reduzierte Dynamik gleichzeitig zu einem reduzierten Eingriff in Seilrichtung führt. Während der Stelleingriff in ϕ_1 (Bild 4.10, links) $|\dot{L}_1| = 0,5\text{m}$ nicht überschreitet und der Pendelwinkel ϕ_1 im Vergleich zur Referenz $\phi_{1,ref}$ moderat abnimmt, sind Stellgröße und Dämpfung der Containerschwingung bei ϕ_2 (Bild 4.10, rechts) größer. Das Stellsignal u' in (4.11) verdeutlicht den Unterschied. Eine höhere Anfangsauslenkung $\phi_{0,2} > \phi_{0,1}$ hat höhere Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\phi}_2$ zur Folge und resultiert in einer zunehmenden Stellgröße.

Als nächstes wird der schwingende Container mit zeitvarianter Referenzseillänge untersucht. Dies repräsentiert das Anheben bzw. Absenken der Last während des Umschlags. Zunächst wird der unregelte Vorgang mit konstanter Seillängenänderung $\dot{L}_{ref} = -0,2\text{m/s}$ beginnend bei $[\phi_0, \dot{\phi}_0, L_0, \dot{L}_0]^T = [0\text{rad}, 0,35\text{rad/s}, 7\text{m}, 0\text{m/s}]^T$ betrach-

tet. Bild 4.11, links, stellt die ebene Trajektorie des Containermittelpunkts während der Operation dar. Das positive und negative Betragsmaximum der ersten Auslenkung bzgl. des Fixpunktes der Lastaufhängung ist mit unterbrochenen Linien angedeutet und dient zur Orientierung für folgende Auslenkungsvorgänge. Der Pendelwinkel ϕ (rechts oben) nimmt kontinuierlich zu; die Hubgeschwindigkeit $\dot{L}$ (rechts unten) ist dabei nach dem Anfahren konstant.

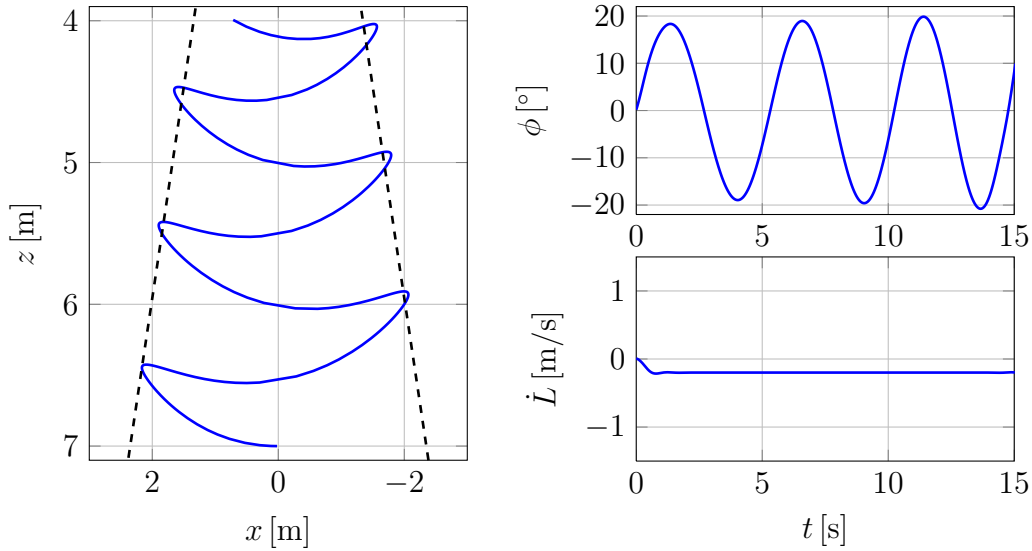


Bild 4.11: Trajektorie und Zeitverläufe des Pendelwinkels ϕ sowie der Stellgröße $\dot{L}$ für unregelte Lastbewegung mit Hub: $L_0 = 7\text{m}$, $\dot{L}_{ref} = -0,2\text{m/s}$

Die Problematik beim Anheben der Last ist offensichtlich. Während der Huboperation nimmt die Seillänge ab und die Schwingungsfrequenz ω_ϕ zu. Der Vorgang ist instabil, wie bereits anhand von (3.66) und (4.6) beim Energieeintrag durch Anheben der Last diskutiert worden ist.

Führt man die Huboperation mit servo-parametrischer Regelung aus, so stellt sich erneut oszillierendes Verhalten der Seillänge ein, Bild 4.12. Der dargestellte Vorgang ist eine Superposition der Bilder 4.9 und 4.11. Die Variation der Stellgröße (Bild 4.12, rechts unten) erzwingt das resonante Schwingen der Seillänge, welches die Energieabnahme in der Bewegung des ausgelenkten Containers zur Folge hat. Der Mittelwert von $\dot{L}$ ist negativ und der Container wird angehoben. Die Zeit zum Erreichen der $z = 4\text{m}$ -Grenze beträgt ca. 20s. Sie liegt über der benötigten Zeit bei konstantem Hub. Am Pendelwinkel (Bild 4.12, rechts oben) sind die gedämpften Lastschwingungen erkennbar, bei gleichzeitigem Anheben. Mit der servo-parametrischen Regelung wird die ausgelenkte Last indirekt aktiv gedämpft (vgl. Bild 4.11), für konstante und zeitveränderliche Referenzfadenlängen.

Beschränkend auf die Dämpfung wirken sich geringe Lastbewegungen aus, denn der Energietransfer über die innere Kopplung erfordert ein Mindestmaß an Dynamik. Dies wird durch den Vorgang in Bild 4.13 mit $\dot{L}_{ref} = -0,2\text{m/s}$ und $[\phi_0, \dot{\phi}_0, L_0, \dot{L}_0]^T = [0, 15\text{rad}, 0\text{rad/s}, 8\text{m}, 0\text{m/s}]^T$ bestätigt. Im Vergleich zu Bild 4.12 führt die geringe Anfangsauslenkung zu reduzierten Amplituden des Pendelwinkels sowie der Winkelgeschwindigkeit und folglich zur reduzierten Stellgröße (Bild 4.13, rechts

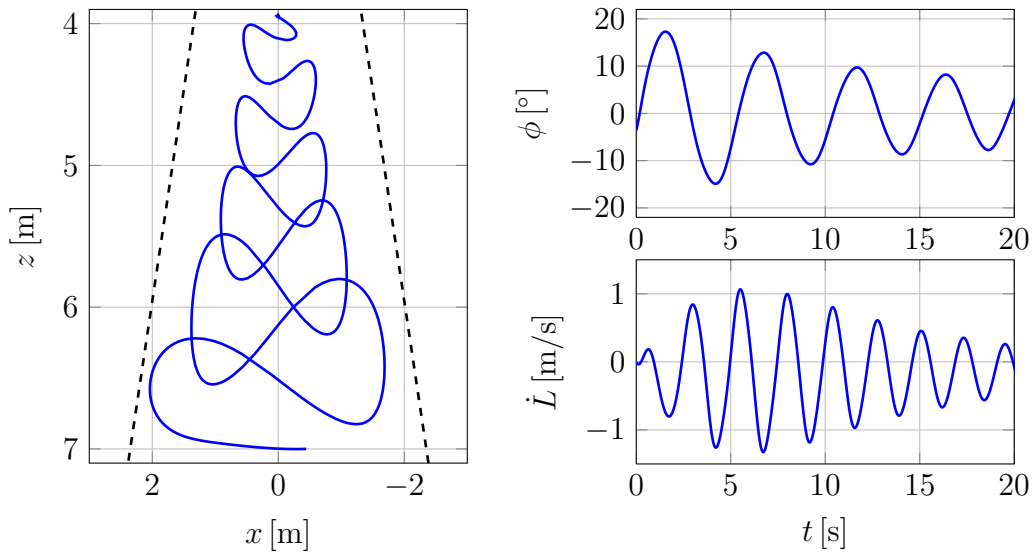


Bild 4.12: Trajektorie und Zeitverläufe des Pendelwinkels ϕ sowie der Stellgröße $\dot{L}$ für geregelte Lastbewegung mit Hub: $\delta_2 = 4/\text{s}$, $D = 0,15$, $\kappa = 1,025$, $L_0 = 7\text{m}$, $\dot{L}_{ref} = -0,2\text{m/s}$

unten), obwohl die Dämpfung $D = 0,03$ deutlich geringer ausfällt. Die unterbrochenen Begrenzungslinien belegen die konstante maximale Auslenkung des Containers während des Hubvorgangs.

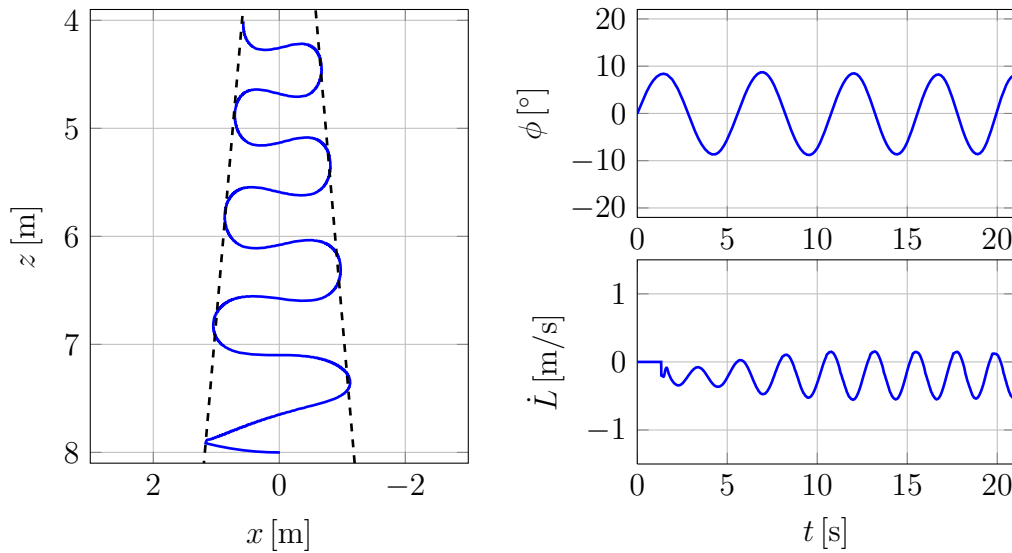


Bild 4.13: Trajektorie und Zeitverläufe des Pendelwinkels ϕ sowie der Stellgröße $\dot{L}$ für geregelte Lastbewegung mit Hub: $\delta_2 = 3,5/\text{s}$, $D = 0,03$, $\kappa = 1,025$, $L_0 = 8\text{m}$, $\dot{L}_{ref} = -0,2\text{m/s}$

Der Entwurf einer servo-parametrischen Regelung nutzt die innere Resonanz im Koppelschwinger zur indirekten Dämpfung der Lastschwingung. Ein gedämpfter Feder-Masse-Schwinger ist die Grundlage für den Regler. Lediglich die Dämpfung D steht als Parameter für die Regelung zur Verfügung, denn die Federsteifigkeit c wird für die Erfüllung der

Resonanzbedingung herangezogen. Bei geringen Pendelwinkeln reicht die innere Kopplung nicht aus, um hinreichend Energie zu übertragen. Der Vorteil des vorgestellten Entwurfs ist das Minimum an Informationen zum Schwingungsverhalten der Last. Die Größe u' spiegelt die spezifische Kraft im Seil minus der Beschleunigung wider. Somit kann der Summand der Eingangsgröße als

$$u' = L\dot{\phi}^2 + g(\cos(\phi) - 1) = \frac{F - mg}{m} + \ddot{L}, \quad (4.30)$$

unter Verwendung der bekannten Größen (vgl. Abschnitt 4.2) der Seilkraft $F = c(L - L_0) + mg$ und der Seilbeschleunigung $\ddot{L}$ (3.82), wiedergegeben werden. Sensoren zur Erfassung von ϕ und $\dot{\phi}$ sind nicht notwendig.

4.4 Zustandsbeobachter

Ein Zustandsbeobachter stellt eine Erweiterung für den Containerbrückenversuchsstand dar (Abschnitt 4.2). Die exakte Bestimmung des Systemverhaltens während des Betriebs einer realen Einrichtung ist u. U. sehr kostenintensiv (Vielzahl von Sensoren) und häufig nicht praktikabel (keine Sensorinstallation möglich). Deshalb sind Messwerte oft nur begrenzt verfügbar. Als alternative Methode zur Informationsgewinnung bietet sich die Verwendung eines Zustandsbeobachters an. Dieser verfügt über ein Modell der Regelstrecke sowie der verwendeten Sensoren. Im Beobachter wird die Systemdynamik in Abhängigkeit der vorhandenen Messungen parallel zur realen Einrichtung bestimmt. Alle berechneten Größen, die geschätzten Zustände des Systems, stehen z. B. für die Weiterbehandlung in einer Regelung zur Verfügung. Für den Beobachterentwurf wird auf die Modellierung des reduzierten nichtlinearen Modells zurückgegriffen (Abschnitt 3.2). Das Modell der Strecke ist in (3.48), das der Sensoren in (3.58) angegeben. Im Rahmen der Modellierung ist festgestellt worden, dass die Systemdynamik nichtlineares Verhalten aufweist, weshalb ein Beobachter zur nichtlinearen Zustandsschätzung herangezogen wird. Das kontinuierlich-diskrete *Unscented* KALMAN-Filter erfüllt diese Voraussetzung. Nach dem Entwurf des Zustandsbeobachters für den Containerbrückenversuchsstand wird das verwendete *Unscented* KALMAN-Filter dargestellt. Diese Ausführungen folgen den Untersuchungen von Theis [88]. Zur Validierung des implementierten Beobachters diene ein Messsystem, welches über optische Marken und eine Kamera verfügt. Die Ergebnisse werden für die Fälle der unregelmäßigen und geregelten Systemdynamik diskutiert. Für die Umsetzung am Versuchsstand wird auf Panigrahy [73] verwiesen, sowie auf Mishra [63] und [50] für die Validierung der Ergebnisse.

4.4.1 Design

Das Design des Zustandsbeobachters baut auf den Modellen des Systems und der Sensorik auf. Eine *Beobachtung* des Systems liefert die geschätzten Zustände $\hat{\mathbf{x}}$, die zu den realen Zuständen $\mathbf{x}$ konvergieren, wenn die realen Messwerte $\mathbf{z}$ von den geschätzten $\hat{\mathbf{z}}$ erreicht werden. Das Systemmodell unterliegt der Annahme, dass es das reale System abbildet. Ein Überblick über die Zusammenhänge gewährt Bild 4.14. Die Stellgröße wird auf das System und das Modell des Systems angewendet. Informationen zum Systemverhalten werden vom Sensor aufgenommen und in den Zustandsbeobachter weitergeleitet. Dort

wird die Differenz des realen und geschätzten Messwerts verstärkt und an das Systemmodell übergeben. Die geschätzten Zustände stehen nach der Auswertung der modellierten Systemdynamik zum Abgriff bereit. Eine Weiterverarbeitung der geschätzten Zustände bspw. zur Regelung des realen Systems ist nahe liegend und folgt u. a. bei der Validierung des Zustandsbeobachters. Zusätzlich ist davon auszugehen, dass reale Systeme und Sensoren Störungen ausgesetzt sind, die als Prozess- $\mathbf{w}$ und Messrauschen $\mathbf{v}$ berücksichtigt werden.

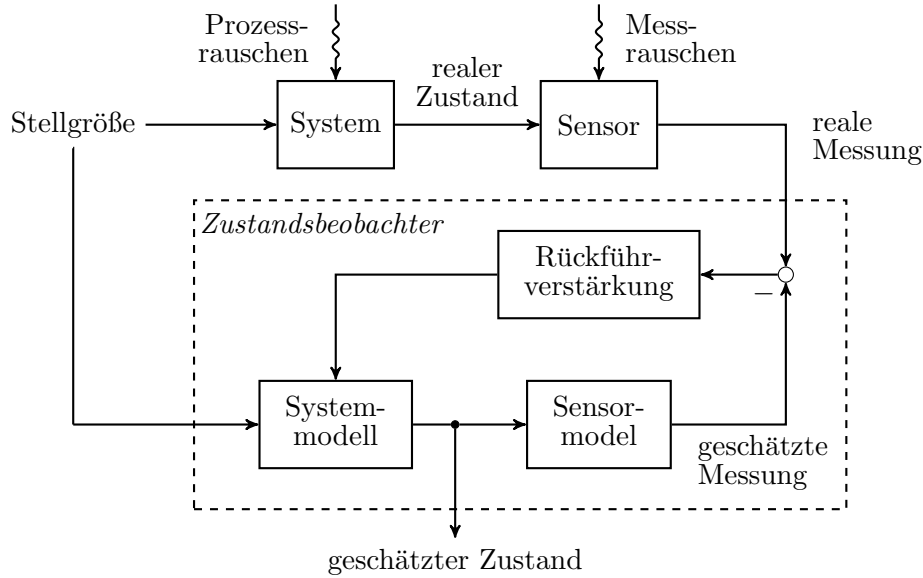


Bild 4.14: Strecke mit Zustandsbeobachter

Die allgemeinen Filtergleichungen in Anlehnung an (3.48) und (3.58) lauten:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{w}, \quad (4.31)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{v}_k. \quad (4.32)$$

Die Zustände $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (zeitdiskret: $\mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k \in \mathbb{R}^m$) in (3.47) entstammen den verallgemeinerten Koordinaten $\mathbf{y} = [\phi, \theta]^T$. Entgegen der Modellierung werden die bisher als Zwangsbedingungen betrachtete Laufratzposition s und Seillänge l als Stellgröße für das System angesehen. Dazu gehören neben den zeitvarianten Größen $s(t)$ und $l(t)$ auch deren erste und zweite Ableitung. Die Stellgröße

$$\mathbf{u} = [l, \dot{l}, \ddot{l}, s, \dot{s}, \ddot{s}]^T \quad (4.33)$$

für das allgemeine nichtlineare System (4.31), (4.32) repräsentiert die Trajektorie der Containerbewegung, vorgegeben vom Benutzer. Im Zustandsbeobachter, Bild 4.14, werden zwei Funktionen ausgeführt. Der Prädiktor schätzt kontinuierlich die Zustände des Systems und der Korrektor modifiziert die aktuelle Schätzung unter Verwendung der vorliegenden diskreten Messwerte. Für den Betrieb von Versuchseinrichtungen ist erstrebenswert, dass der Prädiktor (quasi-) kontinuierlich operiert, um zu jedem Zeitpunkt aktuelle Informationen zum Verhalten des Systems vorliegen zu haben. Messungen sind dagegen üblicherweise in diskreten Zeitabständen verfügbar, die häufig einem Vielfachen

der Berechnungsdauer der Systemdynamik entsprechen. Liegen zum aktuellen Zeitpunkt keine Messwerte vor, wird ausschließlich der Prädiktor ausgeführt. Der Korrektor wird im nächstmöglichen Durchlauf einbezogen, sobald neue Informationen vorliegen.

Die Wahl des Verfahrens zur Zustandsbeobachtung ist direkt vom Modell des Systems und der Sensorik abhängig. Besteht die Möglichkeit, das Systemmodell lokal um einen Betriebspunkt oder global zu linearisieren, favorisiert man lineare Filtermethoden, nachzuschlagen bei Kalman [37] und Luenberger [54]. Der Versuch, das reduzierte nichtlineare System- und Sensormodell zu linearisieren, ist aus den in Abschnitt 3.2 aufgeführten Gründen gescheitert, weshalb auf eine nichtlineare Beobachterstruktur zurückgegriffen wird. Die Methodik des *Unscented* KALMAN-Filters basiert auf vollständig nichtlinearen Gleichungen zum Schätzen der Zustände.

4.4.2 Unscented Kalman-Filter

Das *Unscented* KALMAN-Filter ist vor dem Hintergrund der linearen Filtermethoden von Kalman und Luenberger vergleichsweise neu. Die Schätzung der Zustände beruht auf deterministischen $(n \times 1)$ -Sigma-Punkten $\mathcal{X}_i$ ($i = 0, \dots, 2n$), angewendet auf die nichtlinearen Gleichungen der Modelle des Systems und der Sensoren. Die Sigma-Punkte bilden die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zustände ab, ähnlich zum klassischen KALMAN-Filter ([37]). Es wird zunächst die Anwendung der Sigma-Punkte auf (4.31) und (4.32) aufgezeigt, als *Unscented* Transformation bezeichnet, gefolgt von der Herleitung der Filtergleichungen zur Zustandsbeobachtung.

Unscented Transformation

Die verwendete Sigma-Punkt-Methode ist die *Scaled Unscented* Transformation, entwickelt von Julier [35]. Um einen generellen Überblick zu erhalten, überführt man (4.31) und (4.32) in einen stochastischen Prozess:

$$\dot{\mathbf{x}}_p = \mathbf{f}(\mathbf{x}_p) + \mathbf{w}, \quad (4.34)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_{p,k}) + \mathbf{v}_k. \quad (4.35)$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung des stochastischen $(n \times 1)$ -Prozesses $\mathbf{x}_p \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{P}_{xx})$ wird durch den Mittelwert $\hat{\mathbf{x}}$ und die Kovarianz $\mathbf{P}_{xx}$ beschrieben. Es wird davon ausgegangen, dass die $(p \times 1)$ -Stellgröße $\mathbf{u}$ und die $(m \times 1)$ -Messgröße $\mathbf{z}_k$ jederzeit bekannt sind. Um der Notation von Julier zu folgen ist es zulässig, den Vektor der Eingangsgrößen $\mathbf{u}$ als festen Bestandteil des Systems zu erachten und folglich in (4.34) sowie (4.35) nicht explizit anzugeben. Der Zufallsprozess $\mathbf{x}_p$ wird weiterhin als Satz aus $(2n + 1)$ Sigma-Punkten $\mathcal{X}$ ($\mathbf{x}_p \sim \mathcal{X}$) mit dem zentralen Sigma-Punkt $\mathcal{X}_0 = \hat{\mathbf{x}}$ dargestellt²:

$$\mathcal{X} = [\hat{\mathbf{x}} \quad \dots \quad \hat{\mathbf{x}}] + \sqrt{n + \lambda} [\mathbf{0} \quad \sqrt{\mathbf{P}_{xx}} \quad -\sqrt{\mathbf{P}_{xx}}]. \quad (4.36)$$

Mit der Dimension n des Zufallsprozesses und der Skalierung λ wird der Satz von Sigma-Punkten generiert, der den stochastischen Prozess beschreibt. Gleichung (4.36) verwendet

²Die Wurzel der positiv-definiten Kovarianzmatrix $\mathbf{P}_{xx}$ kann bspw. durch die CHOLESKY- oder Singulärwertzerlegung berechnet werden.

die Matrix-Schreibweise von Särkkä [78]. Die i -te Spalte der Sigma-Punkt-Matrix $\mathbf{X}$ verweist auf den i -ten Sigma-Punkt $\mathbf{X}_i$. Definiert man die Gewichtungsfaktoren

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^m &= [W_0^m \ W_1 \ \dots \ W_{2n}]^T, \quad \text{mit} \\ W_0^m &= \frac{\lambda}{n + \lambda}, \\ W_0^c &= \left(\frac{\lambda}{n + \lambda} + 1 - \alpha^2 + \beta \right), \\ W_i &= \frac{1}{2(n + \lambda)}, \quad i = 1, \dots, 2n, \end{aligned} \quad (4.37)$$

unter Zuhilfenahme der Sigma-Punkt-Parameter α und β (vgl. [35]), erhält man Ausdrücke für den Mittelwert

$$\hat{\mathbf{x}} = W_0^m \mathbf{X}_0 + \sum_{i=1}^{2n} W_i \mathbf{X}_i \quad (4.38)$$

und die Kovarianz

$$\mathbf{P}_{xx} = W_0^c (\mathbf{X}_0 - \hat{\mathbf{x}})(\mathbf{X}_0 - \hat{\mathbf{x}})^T + \sum_{i=1}^{2n} W_i (\mathbf{X}_i - \hat{\mathbf{x}})(\mathbf{X}_i - \hat{\mathbf{x}})^T. \quad (4.39)$$

Die Darstellung der Gewichtungen in einer Matrix lautet:

$$\mathbf{W} = (\mathbf{E} - [\mathbf{w}^m \ \dots \ \mathbf{w}^m]) \begin{bmatrix} W_0^c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_{2n} \end{bmatrix} (\mathbf{E} - [\mathbf{w}^m \ \dots \ \mathbf{w}^m])^T. \quad (4.40)$$

Weiterhin werden die Sigma-Punkte

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_0 \ \dots \ \mathbf{X}_{2n}] \quad (4.41)$$

mittels (nichtlinearer) Transformation $\mathbf{g}$ in den Satz $\mathbf{Y}$ überführt:

$$\mathbf{X} \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbf{Y} \quad : \quad \mathbf{Y} = [\mathbf{g}(\mathbf{X}_0) \ \dots \ \mathbf{g}(\mathbf{X}_{2n})] = [\mathbf{Y}_0 \ \dots \ \mathbf{Y}_{2n}]. \quad (4.42)$$

Die $(2n + 1)$ transformierten Sigma-Punkte $\mathbf{Y}$ werden spaltenweise transformiert. Der neue Mittelwert $\hat{\mathbf{y}}$, die Kovarianz $\mathbf{P}_{yy}$ sowie die Korrelationen $\mathbf{P}_{xy}$ und $\mathbf{P}_{yx}$ werden mit (4.40) bis (4.42) ermittelt:

$$\hat{\mathbf{y}} \approx \mathbf{Y} \mathbf{w}^m, \quad (4.43)$$

$$\mathbf{P}_{yy} \approx \mathbf{Y} \mathbf{W} \mathbf{Y}^T, \quad (4.44)$$

$$\mathbf{P}_{xy} \approx \mathbf{X} \mathbf{W} \mathbf{Y}^T, \quad (4.45)$$

$$\mathbf{P}_{yx} \approx \mathbf{Y} \mathbf{W} \mathbf{X}^T. \quad (4.46)$$

Damit ist ein kurzer Einblick in den mathematischen Formalismus der *Scaled Unscented* Transformation gewährt worden. Ausführlichere Darstellungen und Anmerkungen sind den angegebenen Referenzen zu entnehmen. Die Genauigkeit der Transformation ist von der Anzahl der Sigma-Punkte abhängig. Eine größere Anzahl ($> 2n + 1$) führt zu Ergebnissen mit erhöhter Genauigkeit, erfordert aber auch erhöhten Aufwand. Auf der Basis von $(2n + 1)$ Sigma-Punkten ist die Zustandsbeobachtung durch das *Unscented* KALMAN-Filter ausreichend genau, verglichen mit Ergebnissen des Erweiterten KALMAN-Filters³, siehe Julier und Uhlmann [36]. Eine Erhöhung der Genauigkeit wird durch die Anpassung der Skalierung λ erzielt.

Filtergleichungen

Die *Unscented* Transformation ist das Grundgerüst der Filtergleichungen. Der kontinuierlich-diskrete Filteralgorithmus verwendet die stetige Systembeschreibung (4.34) sowie das unstetige Sensormodell (4.35). Ausgehend vom aktuellen geschätzten Mittelwert $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|+}$ und den zugeordneten Sigma-Punkten

$$\mathcal{X}_1 = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|+} & \dots & \hat{\mathbf{x}}_{k-1|+} \end{bmatrix} + \sqrt{n + \lambda} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\mathbf{P}_{xx,k-1|+}} & -\sqrt{\mathbf{P}_{xx,k-1|+}} \end{bmatrix}, \quad (4.47)$$

erhält man die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathcal{X}_1$ der Systemdynamik $\mathbf{f}$

$$\mathcal{Y}_1 = \mathbf{f}(\mathcal{X}_1). \quad (4.48)$$

Die nichtlineare Näherung der Ableitungen von Mittelwert und Kovarianz werden durch

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathcal{Y}_1 \mathbf{w}^m, \quad (4.49)$$

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathcal{Y}_1 \mathbf{W} \mathcal{X}_1^T + \mathcal{X}_1 \mathbf{W} \mathcal{Y}_1^T + \mathbf{Q} \quad (4.50)$$

bestimmt, mithilfe der Kovarianz des Prozessrauschens $\mathbf{Q}$. Die Integration beider Ausdrücke (4.49) und (4.50) hinsichtlich der Zeit t_{k-1} bis t_k beginnend bei $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|+}$ bzw. $\mathbf{P}_{k-1|+}$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|-} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{\hat{\mathbf{x}}} dt \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{x}}_0 = \hat{\mathbf{x}}_{k-1|+}, \quad (4.51)$$

$$\mathbf{P}_{xx,k|-} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{\mathbf{P}} dt \quad \text{mit} \quad \mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_{k-1|+}, \quad (4.52)$$

resultiert in den geschätzten Größen des Prädiktors $\hat{\mathbf{x}}_{k|-}$ sowie $\mathbf{P}_{xx,k|-}$, auch als *a priori*-Werte bezeichnet. Diese finden wiederum Verwendung für den Sigma-Punkt-Satz

$$\mathcal{X}_2 = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k|-} & \dots & \hat{\mathbf{x}}_{k|-} \end{bmatrix} + \sqrt{n + \lambda} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\mathbf{P}_{xx,k|-}} & -\sqrt{\mathbf{P}_{xx,k|-}} \end{bmatrix}, \quad (4.53)$$

zum Abbilden des Sensormodells $\mathbf{h}_k$ als stochastische Größe:

$$\mathcal{Y}_2 = \mathbf{h}_k(\mathcal{X}_2). \quad (4.54)$$

Die KALMAN-Verstärkung, definiert durch

$$\mathbf{K}_k = \mathcal{X}_2 \mathbf{W} \mathcal{Y}_2^T (\mathcal{Y}_2 \mathbf{W} \mathcal{Y}_2^T + \mathbf{R})^{-1}, \quad (4.55)$$

³Das Erweiterte KALMAN-Filter findet häufig für nichtlineare Systemmodelle Anwendung.

berücksichtigt die *a priori* Sigma-Punkte $\mathbf{x}_2$, die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Messwerte $\mathbf{y}_2$ sowie die Kovarianz des Messrauschens $\mathbf{R}$. Der Korrektor liefert die *a posteriori*-Schätzungen des Mittelwerts sowie der Kovarianz der Zustände:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|+} = \hat{\mathbf{x}}_{k|-} + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{y}_2 \mathbf{w}^m), \quad (4.56)$$

$$\mathbf{P}_{xx,k|+} = \mathbf{P}_{xx,k|-} - \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_2 \mathbf{W} \mathbf{x}_2^T). \quad (4.57)$$

Liegt ein realer Messwert $\mathbf{z}_k$ zum Zeitpunkt t_k vor, so werden die *a priori*-Schätzungen durch (4.56) und (4.57) modifiziert und als *a posteriori*-Größen ausgegeben.

Zur Veranschaulichung der vorgestellten Filterung sind die Gleichungen für das reduzierte nichtlineare Modell des Containerbrückenversuchsstands (Abschnitt 3.2) implementiert worden. Die Mittelwerte der geschätzten Zustände $\hat{\mathbf{x}}$ repräsentieren die verallgemeinerten Koordinaten $\mathbf{y}$. Für numerische Untersuchungen wird angenommen, dass die Seilkräfte $\mathbf{z}_k$ mit einer Frequenz von 10Hz gemessen werden. Der Prädiktor wird mit einer Taktfrequenz von 100Hz ausgeführt. Beide Taktraten können unabhängig voneinander an die Anforderungen der realen Versuchseinrichtung angepasst werden. Bild 4.15 stellt die numerisch ermittelten (links) und geschätzten (rechts) Zustände der Pendelwinkel dar. Die Zustände (ϕ, θ) vermitteln den idealen Verlauf der ausgelenkten Last. Im Verlauf über den Anfangszeitraum von $t = 0\text{s}$ bis $t = 1\text{s}$ ist das Vorgehen der Zustandsbeobachtung ersichtlich. Von den Ausführungen zur *Unscented* Transformation ist bekannt, dass die Beobachtung die Mittelwerte $\hat{\mathbf{x}}$ und Kovarianzen $\mathbf{P}_{xx}$

$$\hat{\mathbf{x}} = [\hat{\phi}, \hat{\theta}, \dot{\hat{\phi}}, \dot{\hat{\theta}}]^T,$$

$$\mathbf{P}_{xx} = \begin{bmatrix} \sigma_{\phi}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\dot{\phi}}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\dot{\theta}}^2 \end{bmatrix}$$

abbildet (Standardabweichung σ).

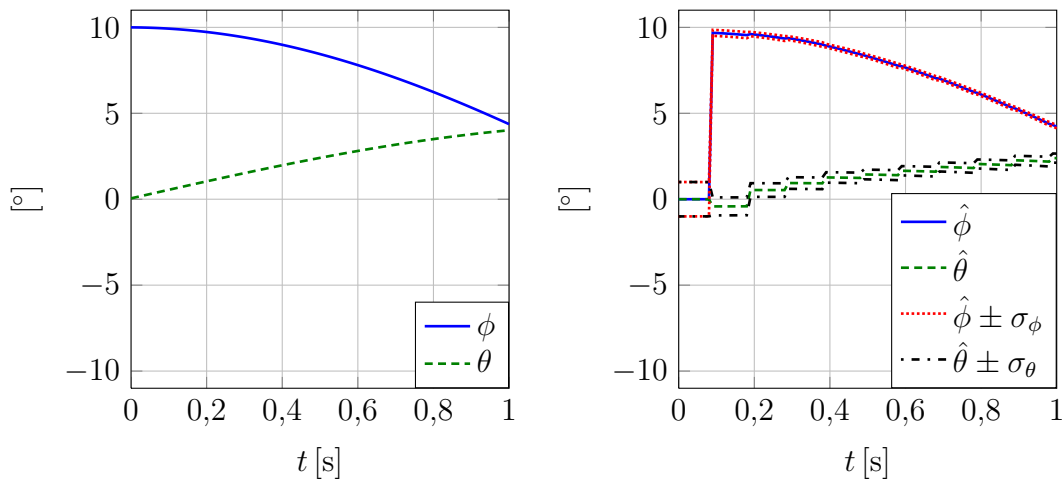


Bild 4.15: Numerischer Vergleich idealer (links) und geschätzter (rechts) Pendelwinkel

Man registriert eine eindeutige Korrelation zwischen den idealen und beobachteten Zuständen. Die Anfangsbedingungen für die numerische Untersuchung sind identisch mit

denen aus Bild 3.6, wobei die Anfangsbedingungen des Zustandsbeobachters absichtlich mit Null initiiert worden sind:

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_0 = \hat{\theta}_0 = 0^\circ, \quad \dot{\hat{\phi}}_0 = \dot{\hat{\theta}}_0 = 0^\circ/\text{s}, \\ \sigma_{\phi,0} = \sigma_{\theta,0} = \frac{1^\circ}{180^\circ}\pi, \quad \sigma_{\dot{\phi},0} = \sigma_{\dot{\theta},0} = \frac{0,5^\circ\text{s}^{-1}}{180^\circ}\pi.\end{aligned}$$

Die Werte der Beobachterparameter und der Kovarianzmatrizen des Prozess- sowie Messrauschens sind:

$$\begin{aligned}\alpha = 0,5, \quad \beta = 2, \quad \lambda = -3,25, \\ \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \left(\frac{0,1^\circ\text{s}^{-1}}{180^\circ}\pi\right)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{0,1^\circ\text{s}^{-1}}{180^\circ}\pi\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{0,1^\circ\text{s}^{-2}}{180^\circ}\pi\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{0,1^\circ\text{s}^{-2}}{180^\circ}\pi\right)^2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{R} = \begin{bmatrix} (0,2\text{N})^2 & 0 & 0 \\ 0 & (0,2\text{N})^2 & 0 \\ 0 & 0 & (0,2\text{N})^2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Zum Zeitpunkt $t_1 = 0,1\text{s}$ des ersten Messwertes $\mathbf{z}_1$ gleicht der Korrektor die bisherigen *a priori*-Schätzungen mit der KALMAN-Verstärkung (4.55) an den idealen Verlauf an. Zwischen den Stützmessungen schätzt der Prädiktor den Verlauf der Zustände, dem Systemmodell (4.49) und (4.51) entsprechend. Da es sich um eine Zustandsbeobachtung, basierend auf dem idealen simulierten Verlauf der Containerbewegung, handelt, wird der entworfene Zustandsbeobachter als nächstes am Containerbrückenversuchsstand validiert.

4.4.3 Validierung

Für die Validierung des Beobachterentwurfs ist ein zuverlässiges Referenz-Messsystem erforderlich. Die Vergleichsmessungen zu den geschätzten Zuständen $\hat{\mathbf{x}}$ müssen ausreichend genau sein, nicht aber, wie die Schätzungen, innerhalb des Zeitraums einer Auswertung vorliegen. Bei der Inbetriebnahme des Zustandsbeobachters am Containerbrückenversuchsstand werden die Referenz-Informationen der Zustände einmalig zum Einstellen der vorhandenen Beobachterparameter verwendet. Im Anschluss müssen die geschätzten Zustände mit den Vergleichsmessungen übereinstimmen, um folglich ohne Referenz-Sensorik und mit drastisch reduziertem Aufwand die Versuchseinrichtung zu betreiben. Die Validierung des Zustandsbeobachters wird mittels eines optischen Messsystems vorgenommen, bestehend aus einer Kamera (BASLER A602F, 656×491 Bildpunkte) mit Objektiv (COMPUTA, Brennweite $f = 5\text{mm}$), der elektronischen Bildauswertung sowie der Berechnung von ebenen Koordinaten ausgewählter Merkmale im Bild. Das Verfahren ist bei Pick [74] für Stereokameras dokumentiert, welches die planaren Informationen von mehreren Kameras überlagert und als Ergebnis eine bewegte Szene im Raum darstellt. Bei der Verwendung einer Kamera werden ausschließlich zweidimensionale Informationen aufgezeichnet. Für den Vergleich der geschätzten Zustände mit dem Referenzsystem dienen

ebene Bewegungen des angehängten Containers. Bild 4.16 stellt den in ϕ -Richtung ausgelenkten Container dar, zusammen mit der Ebene der Schwerpunktbewegungen sowie einer parallel verschobenen Ebene (grau schattiert). Der Verschiebungsvektor in y -Richtung lautet:

$$\mathbf{r}_{\Delta y} = [0, -b_C, 0]^T. \quad (4.58)$$

Die schattierte Fläche enthält die Trajektorien der seitlichen Begrenzungsfläche des Containers, auf der vier kugelförmige Merkmale befestigt sind. Die Merkmale verfügen jeweils über eine leistungsstarke LED⁴, deren Licht homogen von der Kugeloberfläche abstrahlt (Details zum Aufbau in [74]). Kugelförmige Merkmale haben den Vorteil, dass sie im dreidimensionalen Raum von Kameras als Kreis identifiziert werden. Eine (umgekehrt) T-förmige Anordnung, Bild 4.16, ermöglicht die eindeutige Zuordnung der Ausrichtung des Containers im Gegensatz zu gleichverteilten Marken. Die LEDs gewährleisten einen signifikanten Helligkeitsunterschied zwischen den Merkmalen und den umgebenden Elementen, so dass durch die Ermittlung der Trajektorie der Marken mittels geometrischer Operationen gleichzeitig die Bewegung des Containerschwerpunkts vorliegt.

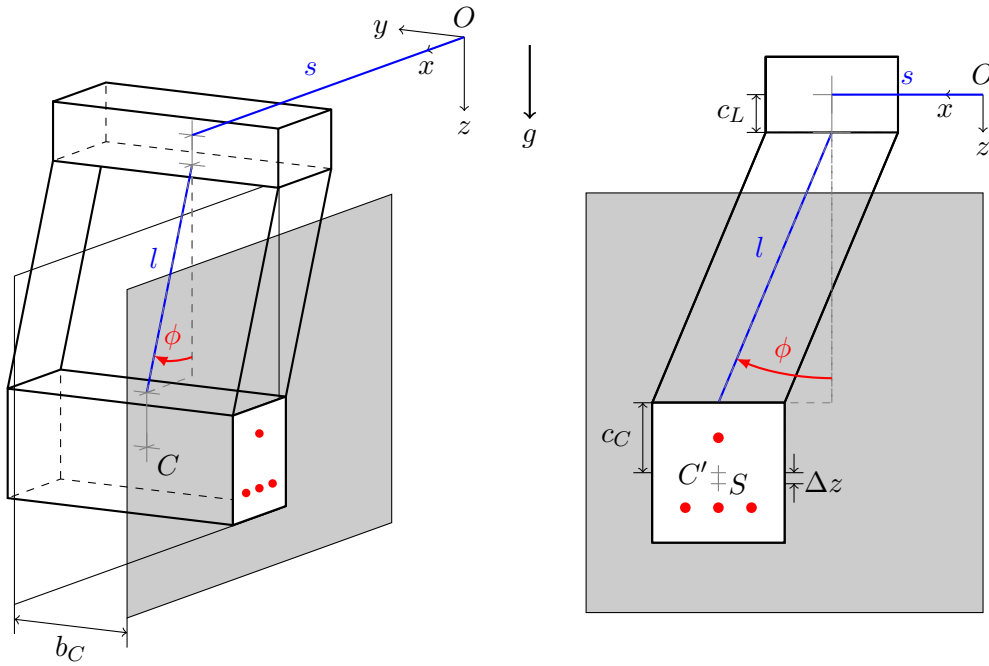


Bild 4.16: Schematische Darstellung der Kameraebene

Die identifizierten Merkmale werden durch aufeinander folgende Transformationen aus den Pixelkoordinaten⁵, in Sensorkoordinaten, weiter in Kamerakoordinaten, bis zu Weltkoordinaten in ihren Positionen erfasst ([74]). Das Weltkoordinatensystem $O(x, y, z)$ spiegelt die Bewegung der Marken innerhalb der schattierten Fläche wider. Über die bekannten Positionen der Markierungen an der seitlichen Containerbegrenzung ermittelt man letztlich den Flächenschwerpunkt S des durch die Marken aufgespannten gleichschenkligen Dreiecks. Bezeichnet Δz die Strecke vom Flächenschwerpunkt S der Marken zum Punkt

⁴LED steht im Englischen für *light-emitting diode*.

⁵Pixel entstammt dem englischen Wort *picture* und ist ein Synonym für den Bildpunkt.

C' , so erhält man mit (4.58) die räumlichen Koordinaten der Bewegung des Containerschwerpunkts

$$\mathbf{r}_C = \underbrace{\begin{bmatrix} x_S \\ -b_C \\ z_S \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}_S} - \begin{bmatrix} 0 \\ -b_C \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Delta z \end{bmatrix}. \quad (4.59)$$

In (4.59) liegt zugrunde, dass sich der Flächenschwerpunkt $\mathbf{r}_S$ unterhalb von $\mathbf{r}_C$ befindet. Die Berechnungsvorschrift für den Vergleichsmesswert ϕ_{kam} lautet:

$$\phi_{kam} = \tan^{-1} \left(\frac{x_S - s}{z_S - \Delta z - c_C - c_L} \right). \quad (4.60)$$

Der Nenner in (4.60) entspricht in der Ruhelage ($\phi_{kam} = 0$) exakt der Seillänge l . Im Zähler wird die Position der Laufkatze s von der Koordinate x_S abgezogen. Die radiale Referenzgeschwindigkeit $\dot{\phi}_{kam}$ erhält man durch numerische Differentiation von ϕ_{kam} .

Als erstes Szenario ist das kontinuierliche Pendeln des Containers untersucht worden. Der Container wird mit einer Seillänge $L_0 = 5\text{m}$ ausgelenkt. Die geschätzten Zustände ($\hat{\cdot}$) und die gemessenen Referenzgrößen (kam) sind in Bild 4.17 gegenübergestellt.

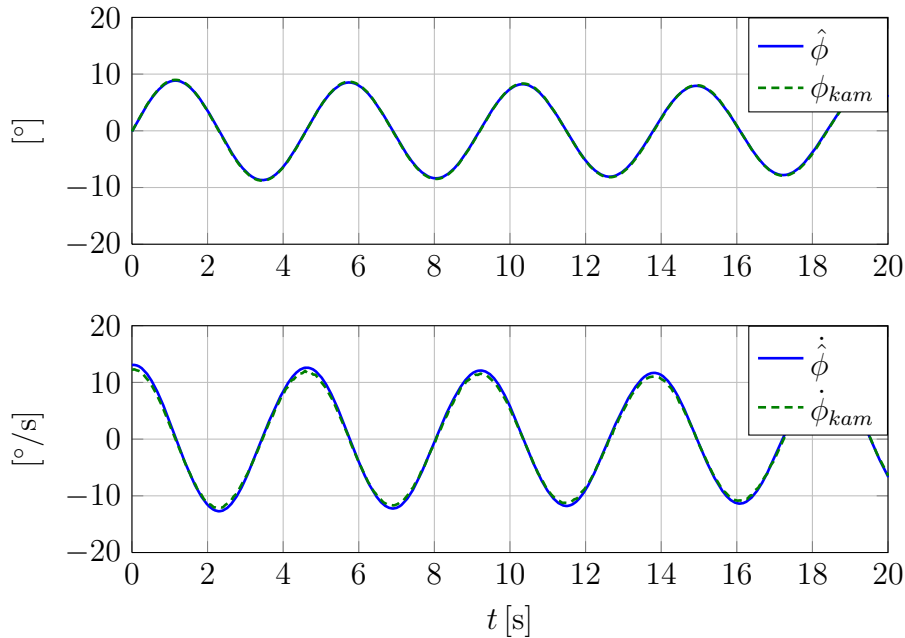


Bild 4.17: Vergleich von geschätzten und gemessenen Zuständen am pendelnden Container

Die Parameter (α, β, λ) , der Anfangszustand des Beobachters $(\hat{\phi}_0, \dot{\hat{\phi}}_0, \sigma_{\phi,0}^2, \sigma_{\dot{\phi},0}^2)$ und die Kovarianz des Messrauschens $\mathbf{R}$ sind identisch mit den Werten zu Bild 4.15. In der Kovarianzmatrix des Prozessrauschens für den Beobachterbetrieb am Versuchsstand sind leichte

Modifikationen zu verzeichnen:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \left(\frac{0,1^\circ \text{s}^{-1}}{180^\circ} \pi\right)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{0,1^\circ \text{s}^{-1}}{180^\circ} \pi\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{0,2^\circ \text{s}^{-2}}{180^\circ} \pi\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{0,2^\circ \text{s}^{-2}}{180^\circ} \pi\right)^2 \end{bmatrix}.$$

Im Verlauf der Auslenkung (Bild 4.17, oben) ist kein Unterschied zwischen der geschätzten $\hat{\phi}$ und gemessenen Größe ϕ_{kam} ersichtlich. Bei der Winkelgeschwindigkeit (Bild 4.17, unten) sind nur minimale Unterschiede in den Amplituden zu verzeichnen, die Phase ist identisch. Das pendelnde Verhalten des Containers wird somit einwandfrei vom Zustandsbeobachter wiedergegeben. In Abschnitt C.2, Bild C.2, ist außerdem die Validierung eines Referenz-Umschlagzyklus hinterlegt.

Der Containerbrückenversuchstand ist entwickelt worden, um Regelungsstrategien zur Lastschwingungsdämpfung zu testen. In der Übersicht zur Versuchsstrecke mit Zustandsbeobachter (Bild 4.14) wird zusätzlich eine Regelung an die Stellgröße angeschlossen, siehe Bild 4.18. Innerhalb der Regelung wird die Stellgröße mit einer weiteren Größe kombiniert, die auf den geschätzten Zuständen basiert.

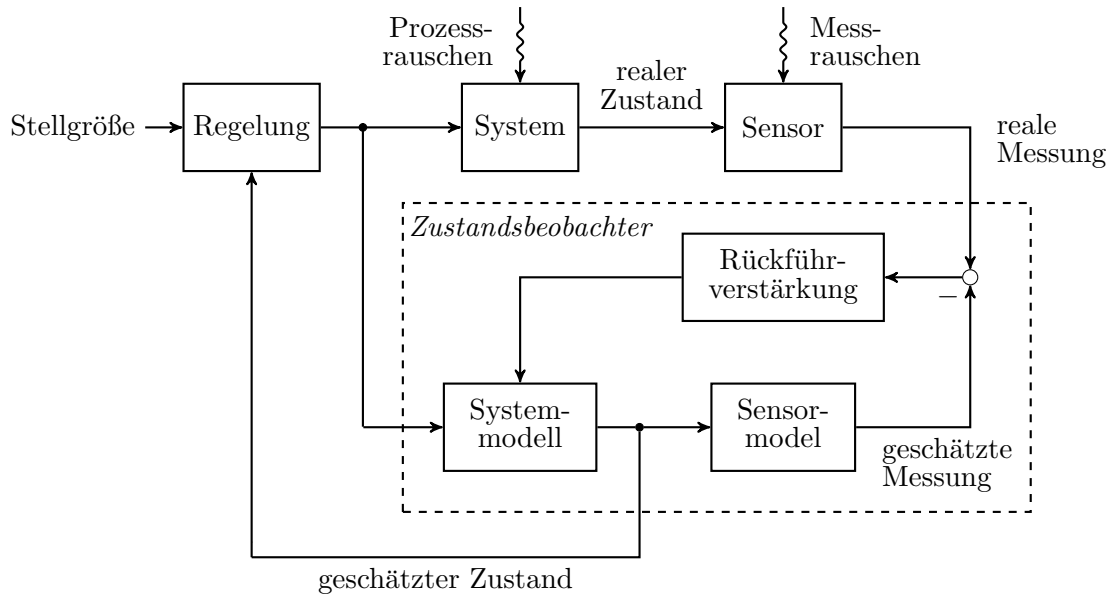


Bild 4.18: Geregelte Strecke mit Zustandsbeobachter

Eine bereits dargelegte Regelungsstrategie ist die servo-parametrische Regelung, vgl. Abschnitt 4.3. Diese verzichtet auf die Auswertung der zur Verfügung stehenden geschätzten Zustände, verwendet aber die gemessenen Seilkräfte als Indikator für die Auslenkung des Containers. Der Vorgang des pendelnden Containers mit servo-parametrischer Regelung in Bild 4.9 ist von der Kamera aufgezeichnet und im Anschluss ausgewertet worden. Der erneute Vergleich von Beobachtung und Messung in Bild 4.19 belegt, dass auch beim aktiven Eingriff in die Systemdynamik durch geregelte Seillängenänderungen ($\dot{L}$ in

Bild 4.9) die Ergebnisse des Zustandsbeobachters zutreffen.

Am Containerbrückenversuchsstand sind auch Regelungsstrategien für die Position der Laufkatze umsetzbar. Exemplarisch für zahlreiche Methoden ist der Entwurf von Sawodny [79] untersucht und am Versuchsstand umgesetzt worden. Das Achsreglermodul für die Krankatzbewegung besteht aus je einer Vorsteuerung für die Stellgröße und die COULOMBSche Reibung, einer Zustandsregelung durch Polvorgabe sowie einem Beobachter. Der ursprüngliche Beobachter ist durch das *Unscented* KALMAN-Filter ersetzt worden. Als letztes Szenario wird eine Referenz-Umschlagtrajektorie aus [63] als Vorsteuerung für die Achsregelung der Krankatzbewegung nach [79] herangezogen. In dieser Operation vereinen sich die Stellgrößen in s - und l -Richtung mit dem Stellsignal an die Laufkatze aus der Polzuweisung im Zustandsregler. Maximale Dynamik im Bewegungsablauf des Containerumschlags ist zu erwarten. Bild 4.20 belegt den erfolgreichen Einsatz der Regelung, denn minimale Containerauslenkungen sind zu verzeichnen. Die Schätzwerte des Pendelwinkels und der Winkelgeschwindigkeit weisen kaum Unterschiede zu den Messungen der Kamera auf, wodurch auch im letzten Testfall eine positive Validierung stattfindet (vgl. Abschnitt C.2, Bild C.3).

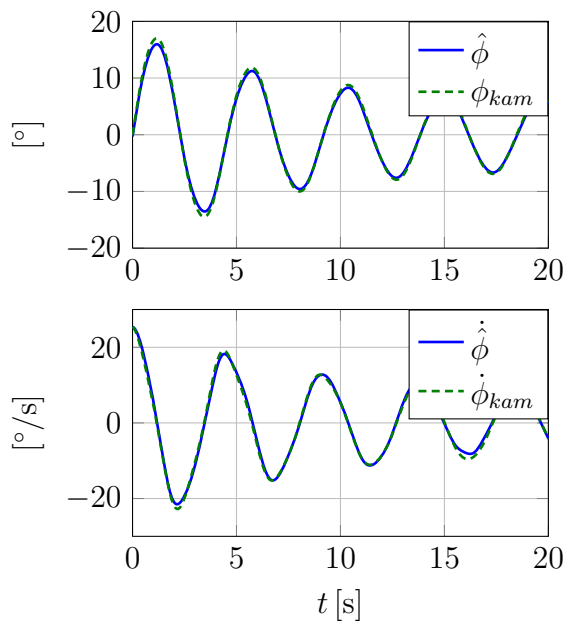


Bild 4.19: Vergleich von geschätzten und gemessenen Zuständen am ausgelenkten Container mit servo-parametrischer Regelung

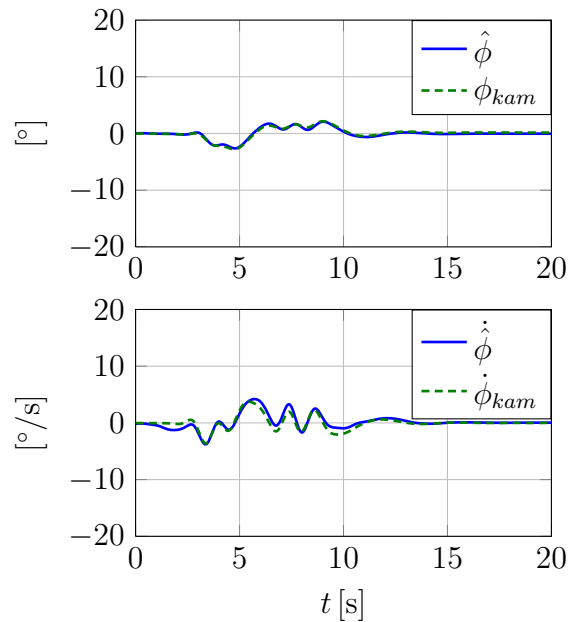


Bild 4.20: Vergleich von geschätzten und gemessenen Zuständen am umgeschlagenen Container mit Achsreglermodul für die Krankatzbewegung

Abschließend ist festzuhalten, dass die Zustandsbeobachtung am Containerbrückenversuchsstand für Lastbewegungen in der Ebene unterhalb der Laufkatze für verschiedene Testfälle erfolgreich durchgeführt worden ist. Es wird angenommen, dass der zweite Pendelwinkel des Containers θ sowie überlagerte Schwingungen in ϕ - und θ -Richtung auf gleiche Art und Weise zu validieren sind. Der Installations- und Auswertungsaufwand eines Stereokamera-Referenzsystems ist deutlich höher als für das vorgestellte System, weshalb auf die Umsetzung verzichtet worden ist. Nachfolgend

werden die geschätzten Zustände als vorliegende Messungen betrachtet und ohne ausgewiesene Kennzeichnung der Schätzung ($\hat{\cdot}$) behandelt.

4.5 Normalform-Regelung

Das Design der Normalform-Regelung greift auf die reduzierte Normalform des Hubmechanismus zurück. Die geschätzten Zustände des *Unscented* KALMAN-Filters werden als gegeben vorausgesetzt. Der Regelungsentwurf wird nachfolgend analysiert und am Containerbrückenversuchsstand umgesetzt. Ausgewählte Ergebnisse sind dargestellt und diskutiert.

4.5.1 Design

Die reduzierte Normalform des steuerbaren Systemteils $\dot{\eta}$ des Raumpendels mit elastischem Faden und Stellsignal (3.178) ist der Ausgangspunkt des Entwurfs der Normalform-Regelung:

$$\dot{\eta} = -2i\omega\eta + \mathbf{g}_1^{[2]}(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{g}_1^{[3]}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + v, \quad \text{mit } v = v_1 + i v_2. \quad (4.61)$$

Mithilfe der resonanten Kopplungsmonome $\mathbf{g}_1^{[2]}$ in (3.162) und $\mathbf{g}_1^{[3]}$ in (3.171) wird Bewegungsenergie aus den nicht steuerbaren in die steuerbare Systemkomponente übertragen und dort gedämpft. Indirekt führt dieser Vorgang zur Dämpfung der Containerschwingungen, wie bereits ansatzweise durch die servo-parametrische Regelung aufgezeigt worden ist (Abschnitt 4.3). Die begrenzte Flexibilität des servo-parametrischen Entwurfs durch die Nachbildung eines gedämpften Feder-Masse-Schwingers beschränkt das resonante Dämpfungsverhalten. Daher beschreibt der Abschnitt der Normalform-Regelung einen allgemeingültigen und einen implementierbaren Entwurf einer Regelungsstrategie, die direkt bei der inneren Resonanz in (4.61) ansetzt. Es sei angemerkt, dass (4.61) die *angestrebte* nichtlineare Differentialgleichung des Aktuators darstellt. Die ursprüngliche Bewegungsgleichung wird allerdings mit (3.152) wiedergegeben

$$\begin{aligned} \dot{z}_c = & -2i\omega z_c + i b_1 (z_{u_1}^2 + z_{u_2}^2 + \bar{z}_{u_1}^2 + \bar{z}_{u_2}^2) + i b_2 (z_{u_1} \bar{z}_{u_1} + z_{u_2} \bar{z}_{u_2}) \\ & + i b_3 (z_c + \bar{z}_c) (z_{u_1}^2 + z_{u_2}^2 + \bar{z}_{u_1}^2 + \bar{z}_{u_2}^2) + i b_4 (z_c + \bar{z}_c) (z_{u_1} \bar{z}_{u_1} + z_{u_2} \bar{z}_{u_2}) + u. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Ausgehend von der Darstellung in reduzierter Normalform wird der Reglerausgang v entworfen. Idealerweise überführt der Stelleingriff $u = u_1 + i u_2$ das steuerbare Teilsystem (4.62) in die Form (4.61), so dass ausschließlich die nichtlinearen resonanten Kopplungsmonome und die gewünschten Regelgrößen vorliegen (lineare Größen bleiben ebenfalls erhalten). Formell betrachtet steht die Normalform-Regelung in keinem Zusammenhang mit der Regelungsnormalform (siehe bspw. [55]). Vielmehr entstammt die verwendete Bezeichnung der zugrunde liegenden nichtlinearen Normalformtransformation der Differentialgleichungen des steuerbaren Systemteils.

Allgemeingültiger Entwurf

Der allgemeingültige Entwurf der Regelgröße u unterliegt keiner Beschränkung und lautet:

$$v = d\eta + i e_2 (\xi_1^2 + \xi_2^2) + i e_3 (\xi_1 \bar{\xi}_1 \eta + \xi_2 \bar{\xi}_2 \eta) + i \tilde{\alpha}^{[3]}(\mathbf{y}). \quad (4.63)$$

Das Stellsignal enthält die Dämpfung d , die Verstärkungen für quadratische e_2 und kubische Koppelterme e_3 sowie die Störungskompensationen für quadratische und kubische Nichtlinearitäten $\tilde{\alpha}^{[3]}$. Der Dämpfungsterm $d\eta$ ist für die Dissipation der Bewegungsenergie im Seil zuständig, nachdem die natürliche und zusätzlich verstärkte Kopplung ($e_{2,3}$) diese aus den nicht steuerbaren in die steuerbare Systemkomponente transferiert hat. Bei den Monomen der Verstärkungsterme findet man die resonanten Nichtlinearitäten aus (3.178) bzw. (3.162) und (3.171) wieder. Die Inverse der Transformation (3.179)

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_u \\ z_c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \varphi^{(2,0)}(z_u) + \varphi^{(2,1)}(z_u, z_c) \end{bmatrix}, \quad (4.64)$$

angewendet auf die Regelgröße (4.63) und für u in (4.62) substituiert, ergibt die Approximation des geregelten Originalsystems bis zur Ordnung $\mathcal{O}(k = 3)$. Sortiert man die vorliegenden komplexen Ausdrücke nach resonanten und nicht resonanten Termen, erhält man die Kompensationsgröße

$$\begin{aligned} i \tilde{\alpha}^{[3]}(z) = & d \left(\varphi_1^{(2,0)}(z_u) + \varphi_1^{(2,1)}(z_u, z_c) \right) - i b_1 (\bar{z}_{u1}^2 + \bar{z}_{u2}^2) \\ & - i (b_2 + b_4 \bar{z}_c) (z_{u1} \bar{z}_{u1} + z_{u2} \bar{z}_{u2}) - i b_3 (z_c + \bar{z}_c) (z_{u1}^2 + z_{u2}^2 + \bar{z}_{u1}^2 + \bar{z}_{u2}^2), \end{aligned} \quad (4.65)$$

welche die negativen nicht resonanten Nichtlinearitäten enthält. Alle Größen, die nicht zur inneren Kopplung beitragen, werden ausgelöscht. Der verbleibende steuerbare Teil des Raumpendels mit elastischem Faden lautet:

$$\dot{z}_c = (d - 2i\omega) z_c + i(b_1 + e_2) (z_{u1}^2 + z_{u2}^2) + i(b_4 + e_3) z_c (z_{u1} \bar{z}_{u1} + z_{u2} \bar{z}_{u2}). \quad (4.66)$$

Gleichung (4.66) besteht aus einem linearen Term mit zusätzlicher Dämpfung sowie resonanter Monome des ursprünglichen Systems und der Regelgröße u . Das geregelte steuerbare Teilsystem (4.66) entspricht der Zielvorgabe (4.61) in Normalformkoordinaten. Die Rücktransformation von (4.63), nach dem inversen Koordinatenwechsel (4.64), in den Zustandsraum ergibt die Stellgrößen $u_{1,2}$ für die ursprünglichen Systemgleichungen (3.147):

$$\begin{aligned} u_1 = & d x_5 + \left(\frac{a_9 - a_{10}}{2} - 2e_2 \right) (x_1 x_2 + x_3 x_4) \\ & - \left(\frac{a_{11}}{4} + e_3 \right) x_6 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2), \end{aligned} \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned} u_2 = & d x_6 + \left(e_2 - \frac{a_9 + 3a_{10}}{4} + e_3 x_5 + \frac{a_{11}}{4} x_5 \right) (x_1^2 + x_3^2) \\ & + \left(-e_2 - \frac{3a_9 + a_{10}}{4} + e_3 x_5 - \frac{3a_{11}}{4} x_5 \right) (x_2^2 + x_4^2). \end{aligned} \quad (4.68)$$

Die lineare Dämpfung ($dx_{5,6}$) ist in (4.67), (4.68) neben den Verstärkungen für die Kopplung (Summanden mit $e_{2,3}$) und den übrigen Kompensationstermen wiederzufinden.

Realisierbarer Entwurf

Der realisierbare Entwurf muss den Anforderungen des Containerbrückenversuchsstands genügen. Das bedeutet, der steuerbare Teil des Raumpendels ist die einzige Möglichkeit,

Stellgrößen in das System einzubringen. Bei nur einem Aktuator in Seilrichtung ist es unmöglich, gleichzeitig Stellgrößen für die Geschwindigkeit u_1 und die Beschleunigung u_2 vorzugeben. Im geregelten ursprünglichen System (3.147) kann folglich entweder die Seilgeschwindigkeit ($\dot{x}_5 = \dot{l}/\omega_L$) oder Seilbeschleunigung ($\dot{x}_6 = \ddot{l}/\omega_L^2$) geregelt werden. Für den Entwurf der realisierbaren Normalform-Regelung wird der Systemeingang in die normierte Beschleunigung des Seils $\dot{x}_6$ gewählt ($u_1 = 0$, $u_2 \neq 0$). Die realisierbare Stellgröße

$$v = i u_2 = \frac{d}{2} (\eta + \bar{\eta}) + i \frac{e_2}{2} (\xi_1^2 + \bar{\xi}_1^2 + \xi_2^2 + \bar{\xi}_2^2) + i \frac{e_3}{2} (\xi_1 \bar{\xi}_1 \eta + \xi_1 \bar{\xi}_1 \bar{\eta} + \xi_2 \bar{\xi}_2 \eta + \xi_2 \bar{\xi}_2 \bar{\eta}) + i \tilde{\alpha}^{[3]}(\mathbf{y}), \quad (4.69)$$

enthält ausschließlich u_2 und ausschließlich reale Ausdrücke. Wie beim allgemeingültigen Entwurf werden auch beim realisierbaren Entwurf die Dämpfung d , Kopplungsverstärkung $e_{2,3}$ und die Störkompensation $\tilde{\alpha}^{[3]}$ eingebracht. Eine Substitution der invers transformierten Regelgröße (4.69) (mit (4.64)) in (4.62) identifiziert die *realen* Störgrößen:

$$i \tilde{\alpha}^{[3]}(\mathbf{z}) = -i b_2 (z_{u1} \bar{z}_{u1} + z_{u2} \bar{z}_{u2}). \quad (4.70)$$

Die Beschränkung der realen Stellgrößen wirkt sich auch auf die Störgrößenkompensation $\tilde{\alpha}^{[k]}$ aus, so dass (4.70) deutlich weniger nicht resonante Nichtlinearitäten auslöscht als (4.65). Nicht alle störenden Größen werden kompensiert. Einige verbleiben im ursprünglichen System und werden nicht durch das Regelsignal ausgeglichen. Die realisierbare Regelung im Zustandsraum lautet:

$$u_1 = 0, \quad (4.71)$$

$$u_2 = d x_6 + \left(d \frac{a_{10} - a_9}{8\omega} - d \frac{a_{11}}{6\omega} x_5 \right) (x_1 x_2 + x_3 x_4) + \left(e_2 - \frac{a_9 + a_{10}}{2} + e_3 x_5 - d \frac{a_{11}}{48\omega} x_6 \right) (x_1^2 + x_3^2) + \left(-e_2 - \frac{a_9 + a_{10}}{2} + e_3 x_5 + 7d \frac{a_{11}}{48\omega} x_6 \right) (x_2^2 + x_4^2). \quad (4.72)$$

Numerische Simulation

Die numerischen Simulationen vermitteln einen ersten Eindruck der Auswirkungen der Normalform-Regelung auf das Raumpendel mit elastischem Faden. Für die Untersuchungen wird die TAYLOR-Reihenentwicklung des Systems (3.147) mit dem Regeleinriff (4.67), (4.68) verwendet. Zu Beginn wird eine ebene Bewegung des Raumpendels mit Auslenkung in ϕ -Richtung und $\dot{L}_{ref} = 0\text{m/s}$ betrachtet. Der zweite Pendelwinkel ist nicht angeregt ($\theta_0 = \dot{\theta}_0 = 0$). In Bild 4.21 sind die Pendelwinkel ϕ , θ zusammen mit der normierten relativen Seillänge $l = (L - L_0)/L_0$ abgebildet. Die nichtlineare Regelung in Seilrichtung reagiert auf die radiale Auslenkung und Winkelgeschwindigkeit der Last. Die resonante Kopplung der Pendel- mit der Seilbewegung überträgt Energie und der gedämpfte Aktuator dissipiert sie (Bild 4.21, oben). Die Reglerparameter $d = -1/\text{s}$ sowie $e_2 = -10/\text{s}^2$ sind willkürlich gewählt, werden im Rahmen der Analyse der Normalform-Regelung (Abschnitt 4.5.2) aber noch den Anforderungen entsprechend eingestellt. Der Verstärkungsparameter für die kubischen Nichtlinearitäten wird

vernachlässigt ($e_3 = 0/s^3$), denn durch die Beschränkung der θ -Koordinate ist das Raumpendel in die Form des Schwebpendels (3.63), (3.82) überführt worden. Die innere 1:2-Resonanz macht die Betrachtung der kubischen Systemteile hinfällig, weshalb diese in (4.67), (4.68) zu Null gesetzt werden. Ohne die Beschränkung des zweiten Pendelwinkels θ und unter Berücksichtigung von kubischen Nichtlinearitäten (1:1:2 innere Resonanz) resultiert die geregelte Systemdynamik im Verhalten in Bild 4.22. Unterschiede zum ebenen Fall sind vorhanden. Man erkennt verringertes Dämpfungsvermögen der Pendelbewegungen, denn die Oszillationen des Aktuators verschwinden für $t > 10s$ (Bild 4.22, unten). Die Ursache der unwirksamen Stellgröße liegt im konstanten Phasenversatz der Pendelwinkel (Bild 4.22, oben). Die 1:1-Kopplung der nicht steuerbaren Systemteile führt bereits nach 5s zu Kreisbewegungen der Last um die Ruhelage, wodurch sich die Terme der gekoppelten Pendelwinkel und Winkelgeschwindigkeiten in der Stellgröße gegenseitig aufheben. Die Summe der Nichtlinearitäten im geregelten System ergibt Null. Untersuchungen mit veränderten Anfangsbedingungen führen qualitativ zu gleichen Ergebnissen. Es zeigt sich die begrenzte Wirksamkeit der Normalform-Regelung durch die innere 1:1-Resonanz. Beide nicht steuerbaren Koordinaten wirken zu gleichen Anteilen auf die Stellgrößen, so dass die Dämpfung einer Auslenkung zur Anregung der anderen Auslenkung führt⁶.

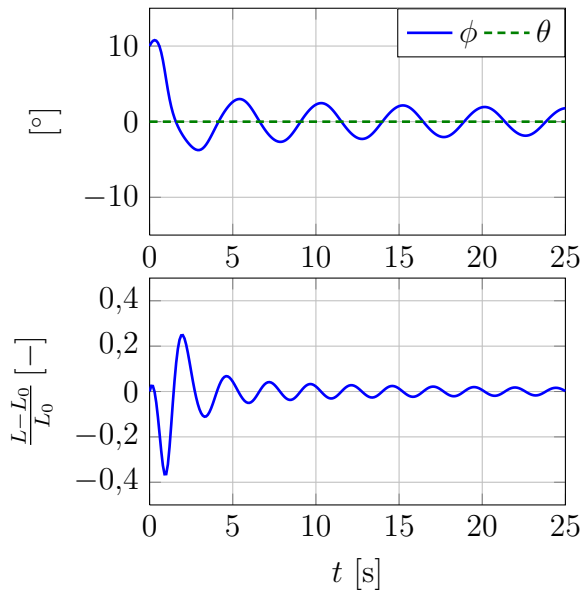


Bild 4.21: Ebene Bewegung des Raumpendels mit Normalform-Regelung: $L_0 = 6m$, $\phi_0 = 10^\circ$, $\dot{\phi}_0 = 5^\circ/s$, $d = -1/s$, $e_2 = -10/s^2$, $e_3 = 0/s^3$

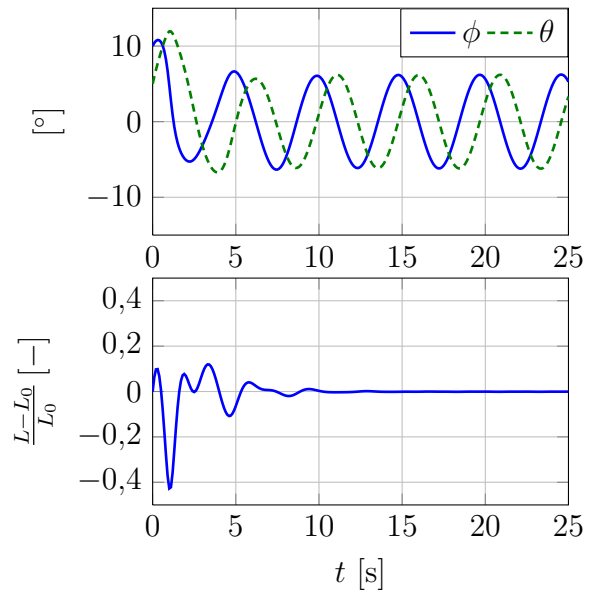


Bild 4.22: Räumliche Bewegung des Raumpendels mit Normalform-Regelung: $L_0 = 6m$, $\phi_0 = 10^\circ$, $\dot{\phi}_0 = 5^\circ/s$, $\theta_0 = 5^\circ$, $\dot{\theta}_0 = 10^\circ/s$, $d = -1/s$, $e_2 = -10/s^2$, $e_3 = -10/s^3$

Für die Analyse der Normalform-Regelung wird die geregelte ebene Bewegung des Raumpendels (Schwebpendel) mit elastischem Faden untersucht. Die wesentlichen Eigenschaften sind am reduzierten Problem direkt zugänglich und ein Vergleich mit der servoparametrischen Regelung nahe liegend. Der Containerbrückenversuchsstand ist generell für räumliche Pendelbewegungen ausgelegt. Zunächst ist ausschließlich der ebene Betrieb

⁶Liegt zwischen beiden Pendelwinkeln keine konstante Phasendifferenz ungleich Null und ungleich 180° vor, handelt es sich um eine ebene Bewegung des Raumpendels.

des Zustandsbeobachters validiert worden, weshalb die Normalform-Regelung auf diesen Bereich beschränkt wird.

4.5.2 Analyse

Als Voraussetzung für den Entwurf einer Regelung wird die Steuer- und Beobachtbarkeit des Systems dargelegt. Die Stabilitätsanalyse der Regelung des steuerbaren Systemteils schließt sich an. Für den stabilen Betrieb der Regelung müssen die Reglerparameter eingestellt werden. Parameterstudien liefern eine Vielzahl an Informationen zum geregelten Systemverhalten und sind für die Wahl der Parameterwerte herangezogen worden.

Steuer- und Beobachtbarkeit

Die Steuer- und Beobachtbarkeit müssen für den wirkungsvollen Einsatz von Reglern gegeben sein. Üblicherweise findet die Überprüfung dieser Kriterien vor dem Regelungsentwurf statt. In diesem Fall ist durch die servo-parametrische Regelung (Abschnitt 4.3) sowie durch den Zustandsbeobachter (Abschnitt 4.4) vorab belegt worden, dass das Schwere- bzw. Raumpendel mit elastischem Faden steuer- und beobachtbar ist. Für die formelle Überprüfung wird eine reduzierte Form des Raumpendels, das Schwebependel, mit elastischem Faden herangezogen. Angelehnt an den Aufbau des Versuchsstands mit Pendelwinkel ϕ und normierter relativer Seillänge $l = L/L_0 - 1$ resultieren die gekoppelten Differentialgleichungen (3.63), (3.82) im Zustandsraumsystem

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \\ \dot{l} \\ \ddot{l} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ -2\frac{\dot{l}}{1+l}\dot{\phi} - \frac{\omega_\phi^2}{1+l}\sin(\phi) \\ \dot{l} \\ (1+l)\dot{\phi}^2 - \omega_L^2 l - \omega_\phi^2(1 - \cos(\phi)) \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \quad (4.73)$$

Das Quadrat der Kreisfrequenz der Seilschwingungen folgt aus der normierten Federsteifigkeit $\omega_L^2 = c/m$ und die Stellgröße u spiegelt den realisierbaren Entwurf der Normalform-Regelung (4.72) mit Nichtlinearitäten der Ordnung $\mathcal{O}(k=2)$ wider:

$$u = d\dot{l} + 4e_2 \left(\phi^2 - \frac{\dot{\phi}^2}{\omega_\phi^2} \right) - \frac{1}{4} \left(\omega_\phi^2 \phi^2 + \dot{\phi}^2 \right) - \frac{3}{16} d\phi\dot{\phi}. \quad (4.74)$$

Die Kopplungsverstärkung e_3 und die kubischen Monome finden keine Verwendung. Das System (4.73) wird in allgemeiner Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (4.75)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (4.76)$$

und unter der Annahme, dass die normierte Seillängenänderung $y = h(\mathbf{x}) = \dot{l}$ als skalare Ausgangsgröße zur Verfügung steht, um den Arbeitspunkt $\mathbf{x}_0$ linearisiert. Das zeitinvariante lineare System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (4.77)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (4.78)$$

wird anschließend mit den Kriterien von KALMAN betrachtet (z. B. bei Lunze [55]). Verfügt die $(n \times m)$ -Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathbf{S}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{(n-1)}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

über den vollen Spaltenrang $\text{Rang}(\mathbf{S}_S) = n$ und die $(m \times n)$ -Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{S}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}^2\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}^{(n-1)}\mathbf{A} \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

über den vollen Zeilenrang $\text{Rang}(\mathbf{S}_B) = n$, ist das System linear steuer- und beobachtbar. Für (4.75), (4.76) kann gezeigt werden, dass weder die Steuerbarkeitsmatrix $\mathbf{S}_S$ noch die Beobachtbarkeitsmatrix $\mathbf{S}_B$ den vollen Rang haben. Das System ist linear nicht steuerbar und auch linear nicht beobachtbar. Eine Untersuchung nach Gilbert (vgl. Lunze [55]), bei der jedem Zustand eine Eigenform zugeordnet wird, identifiziert den linear steuer- und beobachtbaren Unterraum der Hubbewegung $(l, \dot{l})$. Dies bestätigt die in (3.113) vorweggenommene Aufteilung des Zustandsvektors in linear steuer- und nicht steuerbare Anteile. Für das vorliegende gekoppelte nichtlineare System sind die linearen Methoden der Steuer- und Beobachtbarkeit nicht hinreichend. Eine erweiterte Betrachtung für nichtlineare Systeme ist erforderlich.

Die Systembeschreibung (4.75) wird als affines System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^p \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) u_i, \quad \text{mit } p = 1 \rightarrow u_1 = u, \quad (4.81)$$

$$\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ -2\frac{i}{1+l}\dot{\phi} - \frac{\omega_\phi^2}{1+l}\sin(\phi) \\ \dot{l} \\ (1+l)\dot{\phi}^2 - \omega_L^2 l - \omega_\phi^2(1 - \cos(\phi)) \end{bmatrix},$$

umgeschrieben. Bei Isidori [32] ist angegeben, dass Steuerbarkeit für nichtlineare Systeme nur bei driftfreien ($\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$) Beschreibungen (4.81) ausgewiesen werden kann. Unter der Berücksichtigung von Drifttermen ist die lokale Erreichbarkeit als abgeschwächte Form der Steuerbarkeit nachweisbar. Die Erreichbarkeitsmatrix des nichtlinearen Systems ist definiert durch

$$\mathbf{S}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 & \dots & \mathbf{g}_2 & [\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j] & \dots & \text{ad}_{\mathbf{g}_i}^k \mathbf{g}_j & \dots & [\mathbf{f}, \mathbf{g}_i] & \dots & \text{ad}_{\mathbf{f}}^k \mathbf{g}_i & \dots \end{bmatrix}, \quad (4.82)$$

$$\text{ad}_{\mathbf{f}}^k \mathbf{g}_i = [\mathbf{f}, \text{ad}_{\mathbf{f}}^{k-1} \mathbf{g}_i], \quad \text{ad}_{\mathbf{f}}^1 \mathbf{g}_i = [\mathbf{f}, \mathbf{g}_i],$$

ausgedrückt mit (wiederholten) LIE-Klammern. Für das gegebene affine System (4.81) bestimmt man

$$\mathbf{S}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 & [\mathbf{f}, \mathbf{g}_1] & \text{ad}_{\mathbf{f}}^2 \mathbf{g}_1 & \text{ad}_{\mathbf{f}}^3 \mathbf{g}_1 \end{bmatrix}. \quad (4.83)$$

Der Rang der Erreichbarkeitsmatrix $\text{Rang}(\mathbf{S}_S) = n$ ist vollständig, bei $\phi \neq 0$, $\dot{\phi} \neq 0$. Das Schwebependel mit geregelter elastischem Faden ist bei ausgelenkter Last lokal erreichbar. Befindet sich der Container in Ruhe ($\phi = \dot{\phi} = 0$), ist $\text{Rang}(\mathbf{S}_S) = 2$ und (4.81) nicht lokal erreichbar.

Für die Analyse der lokalen Beobachtbarkeit des nichtlinearen Systems (4.75), (4.76) vernachlässigt man die Störung $\mathbf{u}$. Ist ein ungestörtes System beobachtbar, so kann auch der Nachweis für das gestörte System erbracht werden. Der skalare Ausgang beträgt abermals $h(\mathbf{x}) = \dot{l}$. Die lokale Beobachtbarkeitsmatrix in der Umgebung des Arbeitspunkts $\mathbf{x}_0$ lautet:

$$\mathbf{S}_B(\mathbf{x}_0) = \left. \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}, \quad (4.84)$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} h \\ L_f^1 h \\ L_f^2 h \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h \end{bmatrix}, \quad L_f^{n-1} h = L_f^1 L_f^{n-2} h, \quad L_f^1 h = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}.$$

Es kann gezeigt werden, dass lokale Beobachtbarkeit vorliegt ($\text{Rang}(\mathbf{S}_B) = n$), wenn der Container sich nicht im Zustand $[0, 0, l, \dot{l}]^T$ befindet. Tritt dieser Fall ein, ist ein Zustand $\mathbf{x}_0$ nicht eindeutig einer Messung $h(\mathbf{x}_0)$ zuzuordnen und das System ist nicht lokal beobachtbar.

Stabilität

Das dynamische Verhalten des geregelten Systems muss stabil sein und daher ist die Stabilitätsanalyse der Regelung unbedingt notwendig. Lineare Systeme werden durch die Position der Eigenwerte in der komplexen Ebene charakterisiert. Befinden sich alle Eigenwerte des Gesamtsystems (geregelter Strecke mit Rückführung) in der linken Halbebene, ist das Gesamtübertragungsverhalten global asymptotisch stabil. Sind die Eigenwerte konjugiert komplex und befinden sich auf der imaginären Achse (Realteile gleich Null), handelt es sich um ein grenzstabiles System. Der Stabilitätsnachweis geregelter nichtlinearer Systeme erfordert die Berücksichtigung der Nichtlinearitäten. Die direkte Methode nach LJAPUNOV bietet sich an. Existiert eine positiv-definite LJAPUNOV-Funktion $V(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ für ein autonomes nichtlineares System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ mit der Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ in einer Umgebung $\mathcal{U}$

$$V(\mathbf{0}) = 0, \quad (4.85)$$

$$V(\mathbf{x}) > 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{U} \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad (4.86)$$

welche stetig differenzierbar und negativ-definit in der ersten Ableitung ist

$$\dot{V}(\mathbf{0}) = 0, \quad (4.87)$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt} V(\mathbf{x}) = \nabla V \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (4.88)$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) < 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{U}, \quad (4.89)$$

so verhält sich $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ asymptotisch stabil. Für negativ-semidefinite Werte der abgeleiteten LJAPUNOV-Funktion ($\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$) ist das Verhalten lokal stabil. Die Eingangsgröße $\mathbf{u}$ ist im System $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ inbegriffen. Untersucht man die Zustandsraumdarstellung des Raumpendels (3.147) mit dem allgemeingültigen Reglergesetz (4.67), (4.68) und beschränkt den Zustandsvektor auf $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [\phi/\omega_\phi, \dot{\phi}/\omega_\phi^2, l/\omega_L, \dot{l}/\omega_L^2]^T$ sowie die Regelung auf die Darstellung des Schwerependels bis zur Ordnung $\mathcal{O}(2)$, erhält man

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} = & \begin{bmatrix} 0 & \omega_\phi & 0 & 0 \\ -\omega_\phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_L \\ 0 & 0 & -\omega_L & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ a_1 x_1 x_3 + a_2 x_2 x_4 \\ 0 \\ a_9 x_2^2 + a_{10} x_1^2 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d x_3 + \left(\frac{a_9 - a_{10}}{2} - 2e_2\right) x_1 x_2 \\ d x_4 + \left(e_2 - \frac{a_9 + 3a_{10}}{4}\right) x_1^2 + \left(-e_2 - \frac{3a_9 + a_{10}}{4}\right) x_2^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.90)$$

als Ausgangspunkt der Stabilitätsuntersuchung. Über das ungeregelte Schwerependel ist bekannt, dass es sich aufgrund der konservativen Systemgleichungen grenzstabil verhält. Für den Nachweis verwendet man den Ausdruck der Energie des ungeregelten Systems als LJAPUNOV-Funktion $V(\mathbf{x}) = E$. Die Ableitung erzielt $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$. Das Schwerependel mit elastischem Faden ist grenzstabil. Fügt man die Terme der Dämpfung d ($d < 0/\text{s}$) hinzu, erhält man eine positiv-definite LJAPUNOV-Funktion und eine negativ-definite Ableitung der LJAPUNOV-Funktion. Das gedämpfte Schwerependel mit elastischem Faden ist asymptotisch stabil. Bei der Betrachtung des Gesamtsystems (4.90) kann gezeigt werden, dass in der Ableitung $\dot{V}(\mathbf{x})$ neben quadratischen auch kubische Terme auftreten, die eine eindeutige Zuordnung der Vorzeichen verhindert. Bedingung (4.89) wird nicht erfüllt und der Energieansatz als LJAPUNOV-Funktion genügt nicht für den Stabilitätsnachweis zu (4.90).

Die linearen Terme in (4.90) weisen auf die Existenz eines konjugiert komplexen Polpaars ($\pm i\omega_\phi$) im linear nicht steuerbaren Teil und eines konjugiert komplexen Polpaars mit negativem Realteil ($d \pm i\omega_L$) für $d < 0/\text{s}$ im steuerbaren Teil hin. Getrennt betrachtet liegen ein grenzstabiler und ein asymptotisch stabiler Systemteil vor, ohne Berücksichtigung der Nichtlinearitäten. Bei Khalil [41] findet man einen Ansatz zur Stabilitätsbetrachtung von gekoppelten Systemen. Der Einfluss der koppelnden Nichtlinearitäten findet Eingang in die Herleitung einer LJAPUNOV-Funktion für das Stabilitätsverhalten des Gesamtsystems. Das gekoppelte System (4.90) wird durch

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i) + \mathbf{g}_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \quad (4.91)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi/\omega_\phi \\ \dot{\phi}/\omega_\phi^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l/\omega_L \\ \dot{l}/\omega_L^2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) &= \begin{bmatrix} \omega_\phi x_{12} \\ -\omega_\phi x_{11} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_2) = \begin{bmatrix} d x_{21} + \omega_L x_{22} \\ d x_{22} - \omega_L x_{21} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} 0 \\ a_1 x_{11} x_{21} + a_2 x_{12} x_{22} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \left(\frac{a_9 - a_{10}}{2} - 2e_2\right) x_{11} x_{12} \\ \left(e_2 - \frac{a_9 - a_{10}}{4}\right) x_{11}^2 + \left(-e_2 - \frac{a_{10} - a_9}{4}\right) x_{12}^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

wiedergegeben. Das umsortierte System (4.91) verfügt über eine Ruhelage im Ursprung $\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{0}) + \mathbf{g}_i(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Zunächst ignoriert man die Koppelterme $\mathbf{g}_i$ und untersucht die Stabilität in der Umgebung der Ruhelage anhand der isolierten Systeme

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i). \quad (4.92)$$

Mit der Wahl

$$V_i(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{2} \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_i \quad (4.93)$$

und der zugehörigen Ableitung $\dot{V}_i(\mathbf{x}_i)$ nach (4.88) bestimmt man eine grenzstabile LJAPUNOV-Funktion $V_1(\mathbf{x}_1)$ sowie eine asymptotisch stabile LJAPUNOV-Funktion $V_2(\mathbf{x}_2)$. Darauf aufbauend wird, unter Berücksichtigung der Kopplung, eine LJAPUNOV-Funktion

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m c_i V_i(\mathbf{x}_i), \quad m = 2, \quad (4.94)$$

für das Gesamtsystem mit positiven Konstanten c_i ermittelt. Die Ableitung entlang der Trajektorien von (4.91)

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m c_i \left[\frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial V_i}{\partial \mathbf{x}_i} \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i) + \frac{\partial V_i}{\partial \mathbf{x}_i} \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \right] \quad (4.95)$$

erfüllt für die ersten beiden Summanden die Bedingung (4.89) (negativ-semidefinit), denn die isolierten LJAPUNOV-Funktionen $V_i(\mathbf{x}_i)$ sind (grenz-)stabil. Der dritte Summand in (4.95)

$$\frac{\partial V_i}{\partial \mathbf{x}_i} \mathbf{g}_i(\mathbf{x})$$

ist nicht eindeutig festgelegt. Nimmt man an, dass dieser eine positive obere Grenze γ_{ij} nicht überschreitet und die Summe (4.95) stets negativ ausfällt, erhält man den Nachweis der asymptotischen Stabilität des geregelten Systems (4.90). Mit positiven Konstanten (α_i, β_i) und kontinuierlichen Vektoren $\boldsymbol{\chi}_i$ erhält man die Ungleichung

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -\frac{1}{2} \boldsymbol{\chi}^T (\mathbf{C}\mathbf{S} + \mathbf{S}^T \mathbf{C}) \boldsymbol{\chi} \rightarrow \mathbf{C}\mathbf{S} + \mathbf{S}^T \mathbf{C} > 0. \quad (4.96)$$

In (4.96) sind die Vektoren $\boldsymbol{\chi} = [\boldsymbol{\chi}_1, \dots, \boldsymbol{\chi}_m]^T$, die Diagonalmatrix $\mathbf{C} = \text{diag}\{c_1, \dots, c_m\}$ sowie die $(m \times m)$ -Matrix $\mathbf{S}$ mit den Elementen

$$s_{ij} = \begin{cases} \alpha_i - \beta_i \gamma_{ii}, & i = j, \\ -\beta_i \gamma_{ij}, & i \neq j \end{cases}$$

enthalten. Existiert eine positiv-definite Diagonalmatrix $\mathbf{C}$, welche die Ungleichung $\mathbf{C}\mathbf{S} + \mathbf{S}^T \mathbf{C} > 0$ erfüllt, erhält man den Stabilitätsbereich des Gesamtsystems

$$\Omega_s = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | V(\mathbf{x}) \leq s\}. \quad (4.97)$$

Für das geregelte Schwerependel mit elastischem Faden erzielt man

$$\Omega_{7/50} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid (x_{11}^2 + x_{12}^2) + \frac{25}{7} (x_{21}^2 + x_{22}^2) \leq 1s^2 \right\},$$

mit $d \in [-10, -1]/s$, $e_2 \in [-10, -1]/s^2$, $\omega_\phi = \omega = 3/s$, $\omega_L = 2\omega_\phi$.

Da der Stabilitätsbereich aus Minimum- und Maximumabschätzungen verschiedener Terme des Kandidaten der LJAPUNOV-Funktion (4.94) und seiner Ableitung hervorging, stellt er die minimale Mannigfaltigkeit der Stabilität dar. Schränkt man die zulässigen Intervalle der Reglerparameter d und e_2 ein, führt das zu einem größeren Stabilitätsbereich. Weitere Methoden für den Entwurf von LJAPUNOV-Funktionen sind bei Schultz [81] vorgestellt (Methode von Aizerman, Methode von Szego, Variable-Gradienten-Methode), von denen keine in der Lage ist, das Ergebnis der Stabilitätsuntersuchung für gekoppelte Systeme (4.91) bis (4.97) nachzubilden. In [72] ist ein numerischer Ansatz zur Ermittlung von $V(\mathbf{x})$ verfolgt worden. Eine ausreichend große Anzahl numerischer Simulationsergebnisse mit variierenden Anfangsbedingungen $\mathbf{x}_0 = [\phi_0, \dot{\phi}_0, l_0, \dot{l}_0]^T$ und Reglerparametern (d, e_2) dient als Basis für einen Optimierungsalgorithmus. Der Algorithmus strebt nach Koeffizienten $\tilde{c}_i$ in $V(\mathbf{x}) = \sum \tilde{c}_i x_1^{m_1} x_2^{m_2} x_3^{m_3} x_4^{m_4}$ ($|\mathbf{m}| = 4$), mit denen die Anforderungen (4.86) und (4.89) erfüllt werden. Eine Näherungslösung ist angegeben, die mit Ausnahme weniger Abweichungen Stabilität nachweist. Grundsätzlich wird die Aussage getroffen, dass stabiles Systemverhalten für negative Werte $d < 0/s$ und $e_2 < 0/s^2$ erreicht wird.

Reglerparameter

Die maßgebenden Parameter für den geregelten Betrieb des simulierten Systems (4.90) und am Containerbrückenversuchsstand (4.73) sind die Dämpfung d der Hubbewegung sowie die Kopplungsverstärkung e_2 . Die Kreisfrequenzen (ω_L, ω_ϕ) sind durch die natürliche Frequenz des Pendels $\omega_\phi = \sqrt{g/L_0}$ (idealisierte Annahme) und die Resonanzbedingung $\omega_L = 2\omega_\phi$ festgelegt. Zur Bestimmung von Erfolg versprechender Parameterkombinationen (d, e_2) wurden in [72] Simulationen mit (4.73) für Referenzseillängen $L_0 \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$ m und Anfangsenergien $\bar{E}_{\phi_0} \in [1, 5] \text{ m}^2/\text{s}^2$ für alle ganzzahligen Kombinationen von $d \in [-5, 0]/s$ mit $e_2 \in [-15, 0]/s^2$ ausgewertet. Die Anfangsenergie $\bar{E}_{\phi_0}$ entspricht der normierten Energie (4.28) der ausgelenkten Last bei konstanter Seillänge. Es hat sich gezeigt, dass Variationen von L_0 keine Auswirkungen haben, unterschiedliche Anfangsenergien $\bar{E}_{\phi_0}$ hingegen Einfluss auf das Systemverhalten nehmen. Hohe Anfangsenergien erfordern andere Kombinationen von d und e_2 als geringe Energiezustände zu Beginn der Simulation. Statische Parameter liefern z. B. bei kleinem $\bar{E}_{\phi_0}$ minimale Dämpfung der Pendelbewegung über die resonante Kopplung. Bei maximalem $\bar{E}_{\phi_0}$ erreicht die Hubbewegung sofort die Begrenzung der Stellgröße $\dot{L}_{max}$. Zur Behandlung dieser Problematik eignet sich die adaptive Anpassung der Kopplungsverstärkung e_2 , während die Normalform-Regelung aktiv ist. Die Dämpfung wird als konstanter negativer Wert $d = -2/s$ festgelegt. Eine Laufzeitanpassung von e_2 ermöglicht einen direkten Eingriff in die resonante Kopplung und somit in den Energietransport von der Pendelbewegung in die Hubbewegung. Die normierte Bewegungsenergie der Hubbewegung (4.29) wird für die Berücksichtigung der maximalen Stellgröße l_{max} herangezogen:

$$e_2 = e_{2,1} + (e_{2,0} - e_{2,1}) \min \left\{ 1, \frac{\bar{E}_l}{\bar{E}_l(l = l_{max}, \dot{l} = 0)} \right\}^\alpha. \quad (4.98)$$

Die Verstärkung ist ausschließlich im Intervall $e_2 \in [e_{2,0}, e_{2,1}]/s^2$ zulässig. Der Exponent α spiegelt das Anstiegsverhalten der Verstärkung e_2 , abhängig vom Energieverhältnis $\bar{E}_l/\bar{E}_l(l = l_{max}, \dot{l} = 0)$, wider. Approximiert man die Hubbewegung mit einer Sinusschwingung $l = l_{max} \sin(\omega_L t)$ und legt die maximal zulässige Stellgröße $l_{max} = 0,1$ fest, so ergeben sich mit

$$L_{max} = L_0 (1 + l_{max}), \quad \dot{L}_{max} = 2\sqrt{gL_0} l_{max}, \quad \ddot{L}_{max} = 4g l_{max},$$

die physikalischen Grenzen $\dot{L}_{max} \approx 2\text{m/s}$ und $\ddot{L}_{max} \approx 4\text{m/s}^2$. Nachfolgend werden die Reglerparameter am Containerbrückenversuchsstand getestet und bewertet.

Zur Robustheit der Regelstrecke sei angemerkt, dass Normalschwingungen der Seile durch den Zustandsbeobachter Eingang in die Regelung finden. Durch rasches Abklingen führen sie zu keinen signifikanten Störungen der Regelung. Weiterhin treten Totzeiten bei der Signalübertragung und der Auswertung der Zustandsbeobachtung auf, die bei geringer Dämpfung ($d = -1/s$) zu instabilen Hubbewegungen führen. Die gewählte Dämpfung $d = -2/s$ kompensiert diesen Störeinfluss (vgl. [72]).

4.5.3 Ergebnisse

Die Ergebnisse der Normalform-Regelung am Containerbrückenversuchsstand sind mit dem realisierbaren Entwurf (4.72) bzw. (4.74) erzielt worden. Es wurden ausschließlich ebene Lastbewegungen aufgezeichnet, um auf die validierte Zustandsbeobachtung (Abschnitt 4.4) des Pendelwinkels ϕ und der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$ zurückgreifen zu können. Zu Beginn wird der Einfluss der Reglerparameter untersucht. Die Referenzseillänge L_0 ist konstant, vertikale Stellgrößen sind nicht vorgesehen ($\dot{L}_{ref} = 0\text{m/s}$). Die Normalform-Regelung wird bei erstmaligem Erreichen der maximalen Auslenkung aktiviert ($\phi_0 \neq 0^\circ$, $\dot{\phi}_0 = 0^\circ/\text{s}$). Die Dämpfung ist mit $d = -2/s$ festgesetzt. Eine negative Verdopplung der Kopplungsverstärkung $e_2 = -1/s^2$ auf $e_2 = -2/s^2$ bewirkt eine erhöhte Stellgröße $\dot{L}$ (Bild 4.23, unten) sowie die Verstärkung der Kopplung von Last- und Hubbewegung. Dies wiederum überführt mehr Bewegungsenergie in die Hubbewegung, in der sie anschließend dissipiert wird. Mit $e_2 = -2/s^2$ wird eine erhöhte Dämpfung der Containerauslenkung erzielt (Bild 4.23, oben). Die Stellgröße $\dot{L}$ verbleibt in beiden Fällen unterhalb der Begrenzung $\dot{L}_{max} = 2\text{m/s}$. Insofern nicht anders angegeben, wird bei allen Versuchen die normierte relative Stellgrößenbeschränkung $l_{max} = 0,1$ verwendet. Neben den geregelten Szenarien ist immer die Referenzschwingung des ungeregelt schwingenden Containers dargestellt. Das abklingende Verhalten ohne Regelung wird dem Energieverlust durch den Luftwiderstand am bewegten Container zugeschrieben. Die Differenz der geregelten Schwingungsamplituden im Hinblick auf den ungeregelten Verlauf weist auf aktive Dämpfung der Lastschwingungen hin.

Ersetzt man die statische Kopplungsverstärkung e_2 mit der adaptiven Bestimmung (4.98) auf dem Intervall $e_2 \in [e_{2,0}, e_{2,1}]/s^2$, ergibt sich mit $e_{2,0} = -5/s^2$ und $e_{2,1} = 0/s^2$ der Verlauf der Lastauslenkung und Stellgröße in Bild 4.24. Gegenübergestellt sind die Ergebnisse der statischen Normalform-Regelung ($e_2 = -2/s^2$) mit der adaptiven. Die Anfangsbedingungen ($\phi_0, \dot{\phi}_0$) und die statische Verstärkung sind so gewählt, dass stabiles Gesamtverhalten mit statischer Normalform-Regelung gewährleistet wird. Im Stellsignal $\dot{L}$ ist der verstärkende Einfluss des adaptiven e_2 von Beginn an ersichtlich. Die adaptive

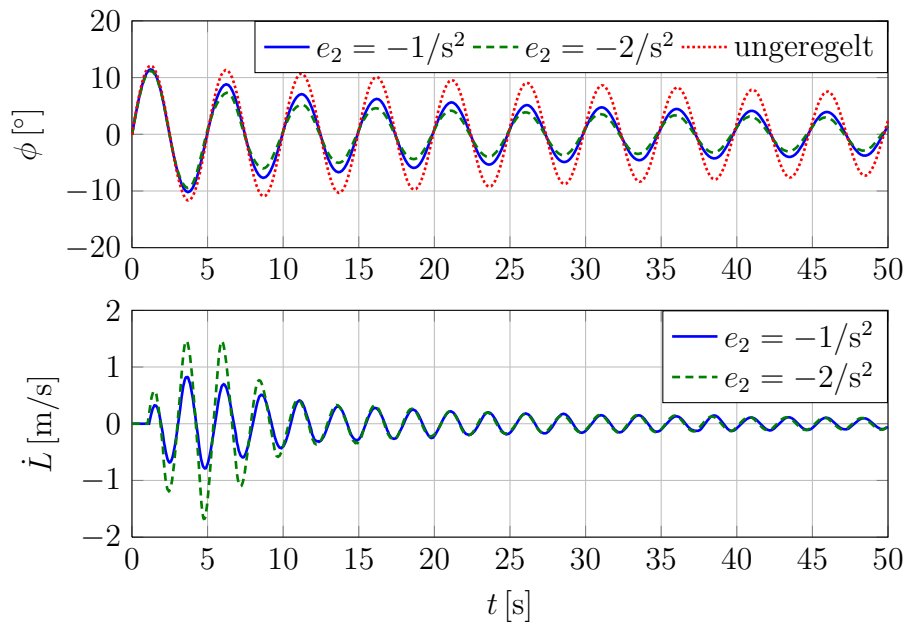


Bild 4.23: Zeitverläufe des Pendelwinkels ϕ und der Stellgröße $\dot{L}$ für verschiedene Kopplungsverstärkungen bei statischer Normalform-Regelung: $L_0 = 6\text{m}$, $\phi_0 = 0,2\text{rad} \cdot 180^\circ/\pi$, $d = -2/\text{s}$, $e_2 = [-2, -1]/\text{s}^2$

Stellgröße behält über den gesamten Zeitraum ein erhöhtes Niveau im Vergleich zur statischen Stellgröße bei (Bild 4.24, unten). Folglich wird im adaptiven Prozess mehr Energie aus der Pendelbewegung dissipiert (Bild 4.24, oben).

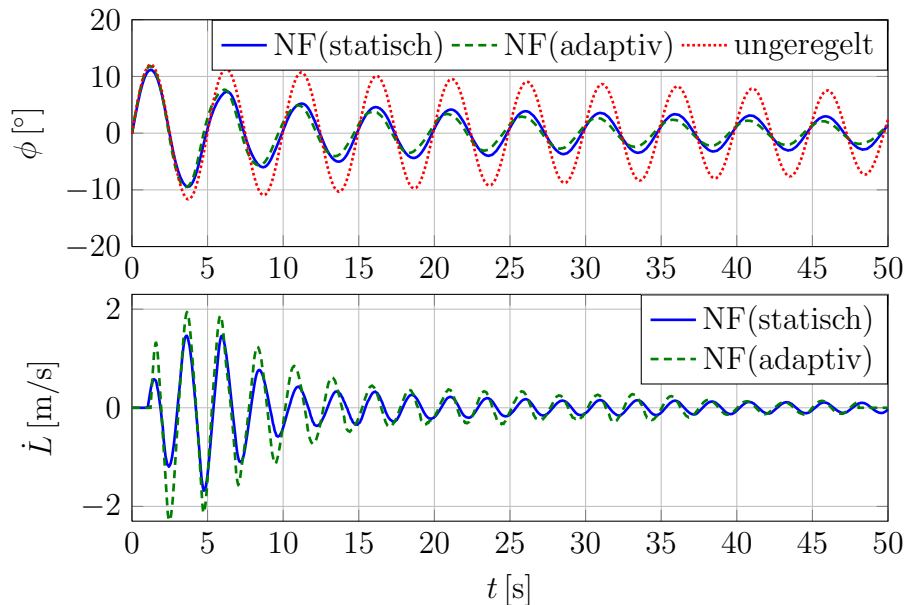


Bild 4.24: Zeitverläufe des Pendelwinkels ϕ und der Stellgröße $\dot{L}$ für statische und adaptive Normalform-Regelung: $L_0 = 6\text{m}$, $\phi_0 = 0,2\text{rad} \cdot 180^\circ/\pi$, $d = -2/\text{s}$, $e_2(\text{statisch}) = -2/\text{s}^2$, $e_2(\text{adaptiv}) \in [-5, 0]/\text{s}^2$

Die Begrenzung der Stellgröße wird kurz überschritten, ohne Auswirkungen auf die

Stabilität der Hubbewegung ($d = -2/s$). Die adaptive Normalform-Regelung ist wirkungsvoller als die statische Variante und verfügt darüber hinaus über den Vorteil der Stabilisierung der Hubbewegung, die bei statischem e_2 nicht für alle Anfangsbedingungen gewährleistet werden kann (vgl. Wahl der Reglerparameter). Der Exponent in (4.98) wird in den Versuchen als $\alpha = 4$ verwendet.

Konzentriert man sich auf den Einfluss der Dämpfung $d = [-3, -2]/s$ bei reduzierter adaptiver Kopplungsverstärkung $e_2 \in [-1, 0]/s^2$, erweist sich eine geringere Dämpfung $d = -3/s$ als nachteilig für den Energietransfer zwischen den koppelnden Bewegungen. Mit der vormals festgelegten Dämpfung $d = -2/s$ ist bei geringer Kopplungsverstärkung e_2 etwas mehr Lastschwingungsdämpfung in ϕ zu erzielen (Bild 4.25, oben). Ausschlaggebend ist die erhöhte Stellgröße, siehe Bild 4.25 (unten).

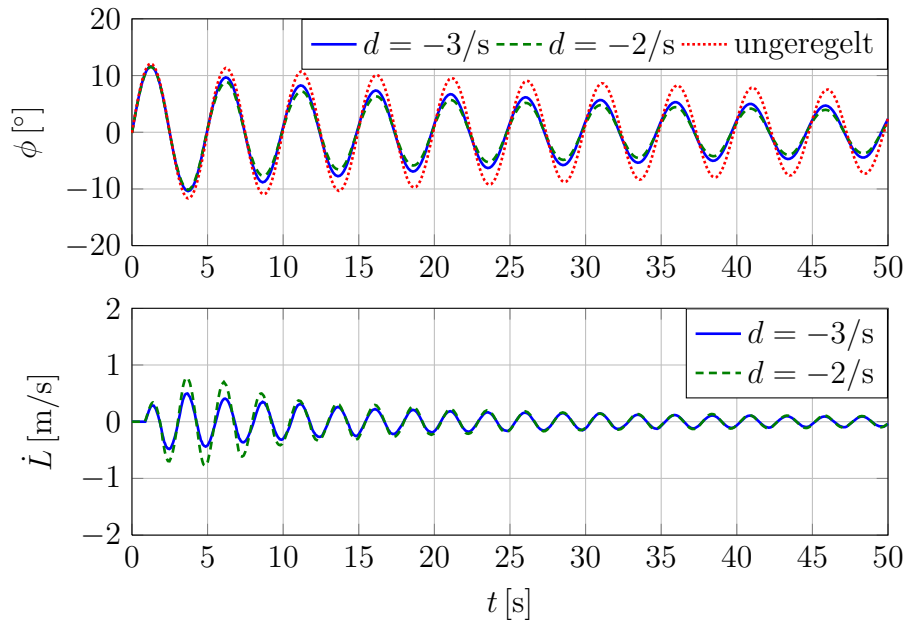


Bild 4.25: Zeitverläufe der Lastauslenkung ϕ und der Stellgröße $\dot{L}$ für verschiedene Dämpfungen bei adaptiver Normalform-Regelung: $L_0 = 6\text{m}$, $\phi_0 = 0,2\text{rad} \cdot 180^\circ/\pi$, $d = [-3, -2]/s$, $e_2 \in [-1, 0]/s^2$

Unter Einbeziehung der servo-parametrischen Regelung aus Abschnitt 4.3 erhält man die Darstellung in Bild 4.26. Dem servo-parametrischen Entwurf (SP) gelingt eine Reduzierung der Lastauslenkung im Vergleich zum unregulierten Verhalten. Durch Ausnutzen der gesamten Bandbreite der Stellgröße $\dot{L}$ (Bild 4.26, unten) erzielt die Normalform-Regelung (NF) eine nochmals herabgesetzte Auslenkung des Containers. Die Wirkung des adaptiven Verstärkungsparameters e_2 der Normalform-Regelung ist wiedergegeben. Im angehängten Abschnitt C.3 ist mit Bild C.4 ein vergleichbarer Versuch dokumentiert.

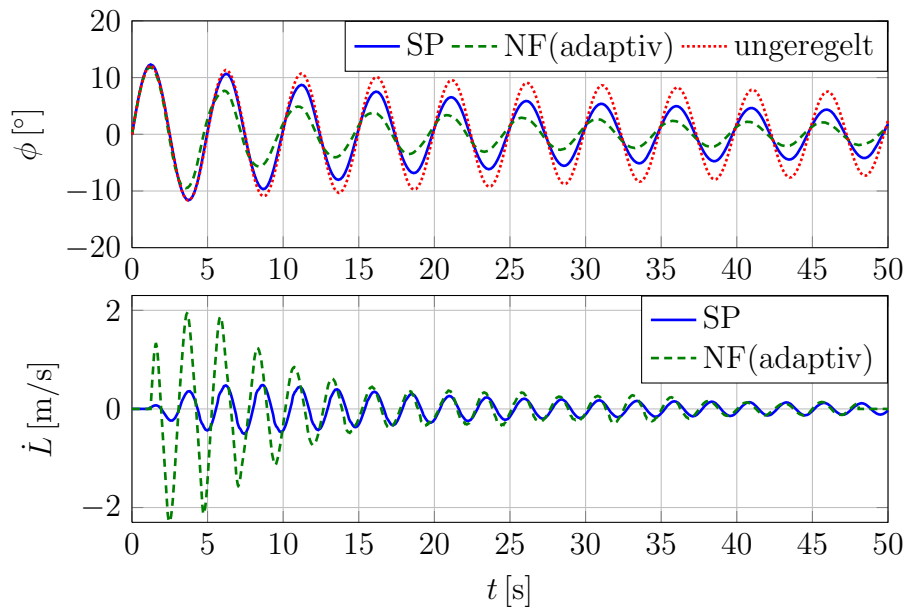


Bild 4.26: Zeitverläufe des Pendelwinkels ϕ und der Stellgröße $\dot{L}$ für servo-parametrische (SP) und adaptive Normalform-Regelung (NF): $L_0 = 6\text{m}$, $\phi_0 = 0,2\text{rad} \cdot 180^\circ/\pi$, SP: $\delta_2 = 3,5/\text{s}$, $D = 0,03$, $\kappa = 1,025$, NF: $d = -2/\text{s}$, $e_2 \in [-5,0]/\text{s}^2$

Mit der Betrachtung der Energien der Pendel- und Hubbewegung, (4.28) und (4.29), für den ungeregelten und die geregelten Vorgänge in Bild 4.26 werden die bisherigen Beobachtungen bestätigt. Die maximale Dämpfung der Pendelbewegung wird durch die Normalform-Regelung erzielt, die Energie $\bar{E}_\phi$ in Bild 4.27 ist minimal.

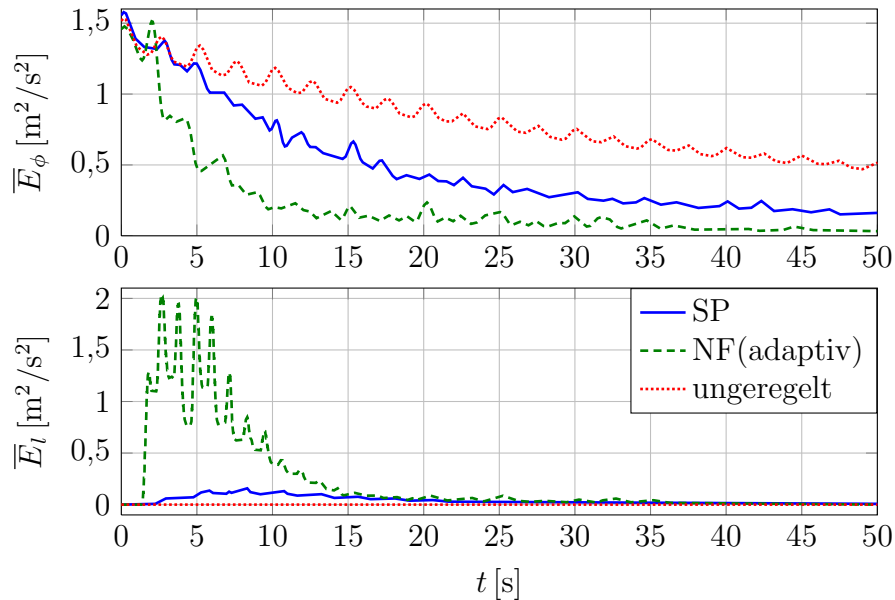


Bild 4.27: Normierte Energien der Pendel- und Hubbewegung bei geregelter (SP und NF), vgl. Bild 4.26, und ungeregelter Lastbewegung

Die ungeregelte Lastschwingung wird ausschließlich durch den Luftwiderstand gedämpft, in Seilrichtung liegt keine Bewegung vor ($\bar{E}_l = 0\text{m}^2/\text{s}^2$). Der pendelnde Container

mit servo-parametrischer Regelung wird ebenfalls gedämpft. Die zugehörige Energie der Pendelbewegung liegt zwischen dem unregulierten und dem Normalform-geregelten Ergebnis. Beim Vergleich der Energien der Hubbewegung ist der Unterschied zwischen beiden Regelungen ersichtlich. Die Normalform-Regelung bringt deutlich mehr Energie in Seilrichtung auf, dadurch wird die Kopplung mit der Pendelbewegung verstärkt und mehr Energie wird anschließend in der Hubbewegung dissipiert.

Beim Containerumschlag ist es nicht nur erforderlich, schwingende Lasten hinsichtlich einer festen Referenzseillänge L_0 zu dämpfen. Wird der pendelnde Container bspw. während des Anhebens aktiv gedämpft, kann der Umschlag ohne Rücksicht auf die Lastschwingungen fortgeführt werden. Es wird eine Referenzhubgeschwindigkeit $\dot{L}_{ref} = -0,2\text{m/s}$ vorgegeben, welche die Referenzseillänge $L_0(t) = \dot{L}_{ref}t + L_0(t=0)$ kontinuierlich anpasst. Die zeitveränderliche Größe $L_0(t)$ wird in der Resonanzbedingung $\omega_L = 2\omega_\phi$ mit $\omega_\phi = \sqrt{g/L_0(t)}$ und in beiden Regelungsentwürfen berücksichtigt. Ohne Regelung nimmt die Auslenkung ϕ über einen Zeitraum von 25s und eine Distanz von 5m zu, währenddessen die Schwingungsdauer abnimmt, vgl. Bild 4.28 (rechts oben). Mit servo-parametrischer Regelung gelingt es, die Zunahme der Containerauslenkung bei konstanter Referenzhubgeschwindigkeit zu beschränken. Die Normalform-Regelung erzielt durch einen erhöhten Stelleingriff in $\dot{L}$ (Bild 4.28, rechts unten) einen maximierten Energietransport aus der Pendel- in die Hubbewegung. Dort wird die Energie gedämpft. Das Normalform-geregelte Hubszenario weist nach 25s die geringste radiale als auch translatorische Auslenkung auf, vgl. Bild 4.28 (links).

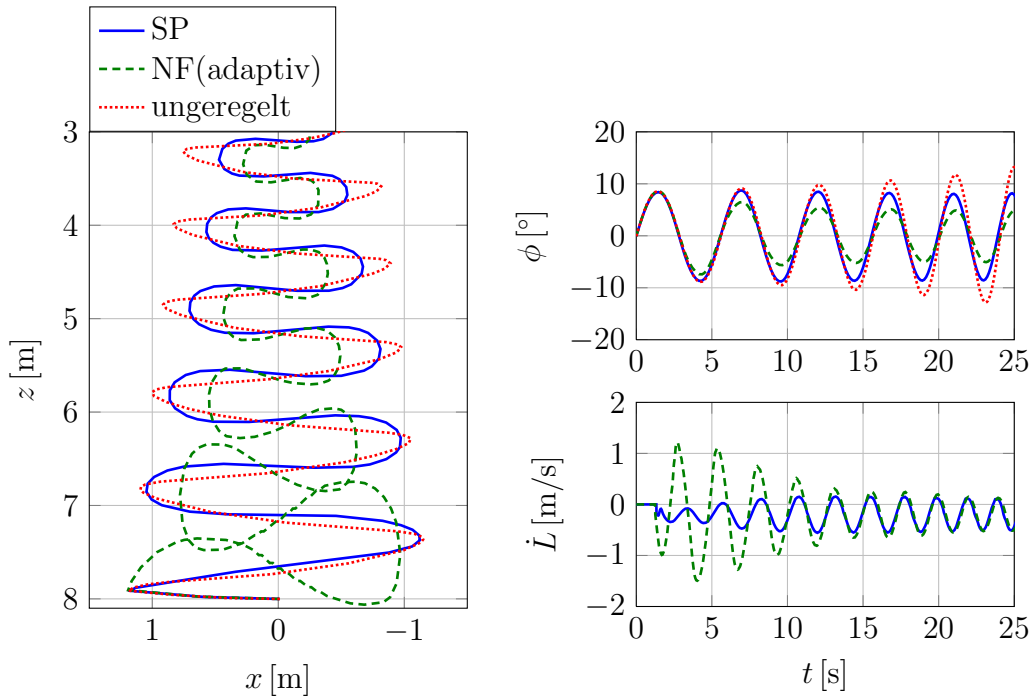


Bild 4.28: Trajektorien und Zeitverläufe des Pendelwinkels ϕ sowie der Stellgröße $\dot{L}$ für servo-parametrische (SP) und adaptive Normalform-Regelung (NF): $L_0 = 8\text{m}$, $\dot{L}_{ref} = -0,2\text{m/s}$, $\phi_0 = 0,15\text{rad} \cdot 180^\circ/\pi$, SP: $\delta_2 = 3,5/\text{s}$, $D = 0,03$, $\kappa = 1,025$, NF: $d = -2/\text{s}$, $e_2 \in [-3,0]/\text{s}^2$

4.6 Fazit der Lastschwingungsdämpfung bei Containerkranen

Motiviert durch die Stabilitätsuntersuchungen des elastischen Schwerependels anhand der MATHIEUSchen Differentialgleichung wird das Regelungskonzept entworfen. Das Ausnutzen der inneren 1:2-Resonanz des gekoppelten Schwingers bietet eine Eingriffsmöglichkeit in die linear nicht steuerbaren Lastschwingungen. Durch die Energiebetrachtung des Schwerependels mit veränderlicher Fadenlänge und invertierter Bewegungsrichtung zu Unterabschnitt 3.3.2 wird die Abnahme der Schwingungsenergie mit zunehmender Anzahl der Schwingungsperioden deutlich. Die Hubbewegung findet mit doppelter Frequenz im Vergleich zur Pendelbewegung statt. Strukturanregungen sind durch die auftretenden Hubschwingungen nicht zu erwarten, da diese ausschließlich geringere Seillängen als 1,5m voraussetzen.

Die Versuchseinrichtung für das Lastschwingungsverhalten bei Containerkranen im Institut für Mechanik und Meerestechnik ist kurz vorgestellt. Der mechanische Aufbau verdeutlicht die Abbildung des wasser- und landseitigen Auslegerbalkens mit daran befindlicher Laufkatze im Maßstab 1:6. Bei der Steuerung wurde auf Hochleistungskomponenten der Industrie zurückgegriffen. Eine Vielzahl von bereitstehenden Ein- und Ausgängen am System garantiert maximale Flexibilität beim Regelungsentwurf.

Der Entwurf des servo-parametrischen Reglers beruht auf der Nachbildung eines gedämpften Feder-Masse-Schwingers durch die Hubbewegung. Die Feder stellt das Resonanzverhältnis ein und der Dämpfer bewältigt die Dissipation der transferierten Bewegungsenergie. Bockstedte [8] formuliert einen Entwurf, der lediglich mit der Messgröße der summierten Seilkräfte operiert. Als Nachteil stellt sich die begrenzte Wirksamkeit der Regelung bei geringen Containerschwingungen heraus. Die *natürliche* innere Kopplung leitet nicht ausreichend Energie in die Hubbewegung ab.

Zusätzlich zu den vorhandenen Kraftmessungen an den Seilen der Containeraufhängung sollten weitere Systemzustände mittels Zustandsbeobachtung zur Verfügung gestellt werden. Für das unteraktuierte Kransystem ist ein *Unscented* KALMAN-Filter entworfen worden, das auf den nichtlinearen Modellen der Strecke und der Sensorik basiert. Lineare Filtermethoden finden aufgrund der nichtlinearen System- und Messdynamik keine Anwendung. Die Filtergleichungen beruhen auf einer vollständig stochastischen Systembeschreibung. Von den linearen Gleichungen des KALMAN-Filters ausgehend wird unter Verwendung der *Unscented* Transformation die Zustandsbeobachtung nichtlinearer Systeme und Sensoren umgesetzt ([88]). Der Zustandsbeobachter konnte mit unregelmäßigen und geregelten Stellgrößen am Containerbrückenversuchsstand durch ein Kamera-Messsystem validiert werden.

Die Normalform-Regelung ist an die reduzierte Normalform des linear steuerbaren Hubsystems mit resonanten Nichtlinearitäten angelehnt. Der Regelungsentwurf sieht neben der Federsteifigkeit und Dämpfung auch die Verstärkung der Kopplung mit der Pendelbewegung sowie die Kompensation von nicht koppelnden Nichtlinearitäten vor. Ein theoretischer allgemeingültiger und ein in der Praxis realisierbarer Entwurf für die aktive

räumliche Lastschwingungsdämpfung werden vorgestellt. Analysiert und validiert wurde ausschließlich der Einsatz der Normalform-Regelung auf ebene Bewegungen. Ergänzungen für den wirkungsvollen dreidimensionalen Betrieb stehen noch aus. Die präsentierten Ergebnisse der Normalform-geregelten Containerschwingungen mit und ohne Hubbewegung bestätigen den Regelungsentwurf.

Kapitel 5

Zusammenfassung

Die Untersuchungen zur aktiven Dämpfung von Lastschwingungen bei Containerkränen gliedern sich in die strukturelle Betrachtung von Containerkränen und die Lastschwingungsdämpfung auf Basis mechanischer Modelle der aufgehängten Last.

Zu Beginn wurde das Design von Kranen zum Be- und Entladen von Containerschiffen vorgestellt. Moderne Containerkrane unterscheiden sich hauptsächlich in den Merkmalen der Portalspurweite, der Auslegerkonfiguration sowie der Ausführung der Laufkatze. Beispielfhaft fanden zwei unterschiedliche Containerkrane, eingesetzt im Hamburger und Bremerhavener Hafen, im Verlauf der Strukturschwingungsuntersuchung wiederkehrend Verwendung. Die Dynamik der Krane wurde durch Balkenmodelle aus finiten Elementen abgebildet. Für die Verifikation der Modelle konnten statische Modelle der Kranbauer angewendet werden. Die Eigenschwingungen der Krane im Balkenmodell sind zur Übereinstimmung mit den Eigenschwingungen in den statischen Modellen gebracht worden. In der anschließenden Strukturanalyse konnten die Kranverformungen während des Containerumschlags bestimmt werden. Ein Referenz-Umschlagzyklus stellt die angreifenden Lasten im Kranmodell dar. Die Analyse ergab, dass besonders Strukturschwingungen entlang des Auslegerbalkens zu Beeinträchtigungen beim Containerumschlag führen können. Wiederkehrende vertikale Verschiebungen beeinflussen den Betrieb nicht. Weiterhin wurden den Analyseergebnissen dynamische Verläufe der Kaikollektive entnommen, die Rückschlüsse auf die eingeleiteten Kräfte der Krane auf die Kaianlage ermöglichen. Die Untersuchungen der Strukturschwingungen schließen mit der Modifikation der Kranstruktur, umgesetzt durch ein Optimierungsverfahren zur Reduzierung der Strukturschwingungen. Am Kran in Hamburg konnten die Strukturschwingungen signifikant reduziert werden. Der Containerkran in Bremerhaven bot weniger Ansätze zur Strukturverbesserung, weshalb die erzielten Ergebnisse gering herabgesetzte Strukturschwingungen ergaben.

Die Beschreibung der mechanischen Kopplung von der Containerkranstruktur mit angehängter Last resultiert zunächst in einem vollständig nichtlinearen Modell. Die Bewegungsgleichungen der Last wurden mit NEWTON-EULER-Gleichungen hergeleitet. Hervorzuheben ist die modifizierte visko-elastische Seilformulierung. Das reduzierte nichtlineare Modell berücksichtigt ausschließlich parallele längssteife Seile. Es beschreibt die Dynamik einer konzentrierten Containermasse, aufgehängt an einem mittleren Tragseil. Weiterhin wurde eine Beschreibung der Zwangskräfte hergeleitet, die zusammen

mit dem reduzierten nichtlinearen Modell in den Zustandsbeobachter einging. Anhand des Schwerependels mit elastischem Faden konnte eine Instabilität in der Pendelbewegung nachgewiesen werden. Die MATHIEUSche Differentialgleichung belegt das instabile Systemverhalten bei doppelter Frequenz der Fadenlängenvariation im Vergleich zur Pendelfrequenz. Für die Charakterisierung der resonanten Nichtlinearitäten in den gekoppelten Bewegungsgleichungen des Raumpendels wurde die reduzierte Normalformtransformation eingesetzt. Die nichtlineare Transformation identifiziert die resonanten quadratischen und kubischen Nichtlinearitäten bei gleichzeitig getrennter Betrachtung von linear steuerbaren und linear nicht steuerbaren Systemteilen.

Zur aktiven Dämpfung von räumlichen Lastschwingungen wurde ein Regelungsansatz entwickelt, der auf die Ansteuerung der Laufkatze verzichtet. Der Reglereingriff im Hubsystem und das Ausnutzen der inneren 1:2-Resonanz ermöglichen die indirekte Dämpfung der Lastschwingungen. Der Kranführer auf der Laufkatze wird durch die Regelung nicht gestört. Der Versuchsstand für Containerbrücken diente als Validierungsplattform. Die maßstäbliche 1:6-Nachbildung von Kranauslegerbalken und Laufkatze wurde zunächst für die Untersuchung der servo-parametrischen Regelung verwendet. Ein Zustandsbeobachter (*Unscented* KALMAN-Filter) für den Containerbrückenversuchsstand berechnet die Containerauslenkungen. Das nichtlineare Filter ist für eine vollständig stochastische Systembeschreibung entworfen worden und konnte durch ein Kamera-Messsystem validiert werden. Die gewonnenen Informationen fanden Eingang in den Entwurf der Normalform-Regelung. Die Grundlage der Regelung bildet die reduzierte Normalformdarstellung des linear steuerbaren Hubsystems. Zusätzlich zu den Reglerparametern der servo-parametrischen Regelung enthält die Normalform-Regelung die Kopplungsverstärkung und die Kompensation von nicht resonanten Nichtlinearitäten in den Systemgleichungen. Die Ergebnisse am Containerbrückenversuchsstand belegen die wirkungsvolle Dämpfung der Lastschwingungen.

Vorausblickend wird die Kombination der numerischen Strukturanalyse der Containerkrane bei gleichzeitig aktiver Lastschwingungsdämpfung angeführt. Erste Untersuchungen (Unterabschnitt 4.1.2) ergaben keine Störung der Struktur durch die Lastschwingung. Der Einfluss der Regelung ist bisher nicht betrachtet worden. Bei der Stabilitätsanalyse der Normalform-Regelung kann auf die Methoden der Bifurkationsanalyse zurückgegriffen werden und der Einfluss der inneren Resonanz muss Beachtung finden, vgl. Tien u. a. [89, 90]. Außerdem muss der Zustandsbeobachter für die Stabilitätsuntersuchung als Teil des Gesamtsystems in die Analyse einbezogen werden. Weiterhin ist hervorzuheben, dass die Validierung der Normalform-Regelung bei räumlichen Schwingungen des Containers noch aussteht. Die innere 1:1-Kopplung beider Pendelwinkel im Regelungsentwurf erschwert die effektive Reduzierung der Lastschwingungen. Eine Kombination der Normalform-Regelung mit einer Positionsregelung der Laufkatze verknüpft u. U. die Vorteile beider Strategien und erzielt maximale Dämpfung der Lastschwingungen.

Anhang A

Strukturschwingungen

A.1 Verifikation

Die Parameter der numerischen Untersuchung des bewegte-Last-Modells sind in der folgenden Tabelle A.1 mit den zugeordneten Werten und Einheiten aufgelistet.

Tabelle A.1: Parameterwerte für Verifikation mit dem Modell der bewegten Last

Beschreibung	Parameter	Wert	Einheit
Ausladung WS bis Zugband	L_1	38,0	m
Ausladung WS gesamt	L_2	57,0	m
Anzahl der Knoten	N	228	-
Masse der Laufkatze	m_L	$80 \cdot 10^3$	kg
Masse der schwingenden Last	m_ϕ	$70 \cdot 10^3$	kg
Amplitude der Auslenkung	ϕ_A	20	°
Seillänge	L_p	18,0	m
Geschwindigkeit der bewegten Last	v	3,67	m/s
Beschleunigung der bewegten Last	$ a $	0,7	m/s ²
Fläche des Balkenquerschnitts	A	0,1914	m ²
Flächenträgheitsmoment des Balkens	I	0,447033	m ⁴
Dichte des Balkenmaterials	ρ	7820	kg/m ³
Elastizitätsmodul	E	$2,068 \cdot 10^{11}$	N/m ²
kritische Dämpfung	ξ	0,005	-
Integrationszeitschrittweite	Δt	4/1000	s
Erdbeschleunigung	g	9,81	m/s ²

A.2 Strukturanalyse

Die Parameter der numerischen Strukturanalyse der Containerkrane am CTB und CT4 sind in der folgenden Tabelle A.2 mit den zugeordneten Werten und Einheiten aufgelistet.

Tabelle A.2: Parameterwerte für Strukturanalyse

Beschreibung	Parameter	Wert	Einheit
Masse der Laufkatze am CTB-Kran	m_L	$80 \cdot 10^3$	kg
Masse der Laufkatze am CT4-Kran	m_L	$34 \cdot 10^3$	kg
Max. Geschwindigkeit der Laufkatze	$\max \{ \dot{x}_m \}$	3,67	m/s
Max. Beschleunigung der Laufkatze	$\max \{ \ddot{x}_m \}$	0,7	m/s ²
Distanz der Laufkatze am CTB-Kran	Δx_m	50	m
Distanz der Laufkatze am CT4-Kran	Δx_m	65	m
Reibkoeffizient	μ_R	0,14	-

Die Beschleunigung der Laufkatze ist mit $\ddot{x}_m$ angegeben und in Bild A.1 dargestellt. Es fällt auf, dass beim Anfahren und Abbremsen kurzzeitig entgegengesetzte Beschleunigungsphasen auftreten, welche die Strukturanregung absichtlich verstärken. Motiviert durch Zrnić u. a. [98], die verschiedene Geschwindigkeitstrajektorien für die Laufkatze darstellen, mit dem Ziel die Lastschwingungen zu minimieren, wird eine schwingungsanregende Trajektorie vorgegeben. Die gezackte Geschwindigkeitsvorgabe ($\dot{x}_m$ aus Bild A.1) kann bei entsprechender Wahl der Beschleunigungszeiträume ebenso zur Verstärkung der Lastschwingungen führen, worauf die Implementierung abzielt, um eine maximale Strukturanregung zu erzeugen.

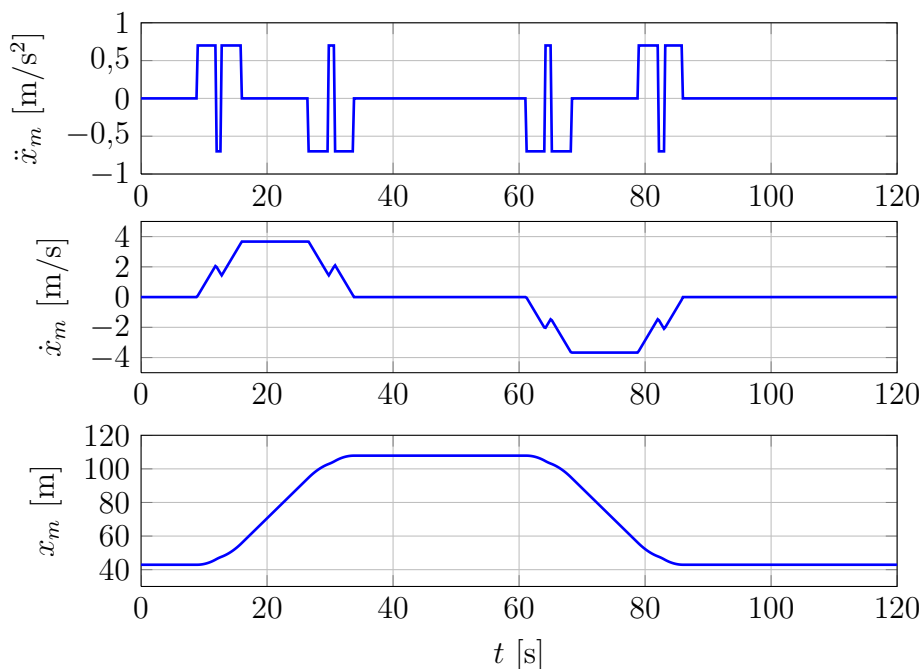


Bild A.1: Referenztrajektorie der Laufkatze auf CT4-Containerkran

Überlagerungseffekte von Wind- und Umschlaglast am CTB-Kran sind bei der Betrachtung der linken landseitigen Portalstütze erkennbar (Bild A.2, links oben). Die Kraftkomponente entlang des Erdbeschleunigungsvektors unterschreitet bei $t \approx 17\text{s}$ nicht mehr die Null (vgl. Bild 2.27), dafür zum Zeitpunkt der Containeraufnahme ($t \approx 53\text{s}$). Nach einiger Zeit ist das Unterschreiten der Nulllinie jedoch durch die Strukturdämpfung ausgeglichen. Ein Abheben der Stütze in der Realität wird wiederum aufgrund der Maximalabschätzung der Windlast angezweifelt. Die rechte Portalstütze auf der LS erfährt maximal $F_z(\text{LS, rechts}) = 8 \cdot 10^6\text{N}$ (Bild A.2, rechts oben).

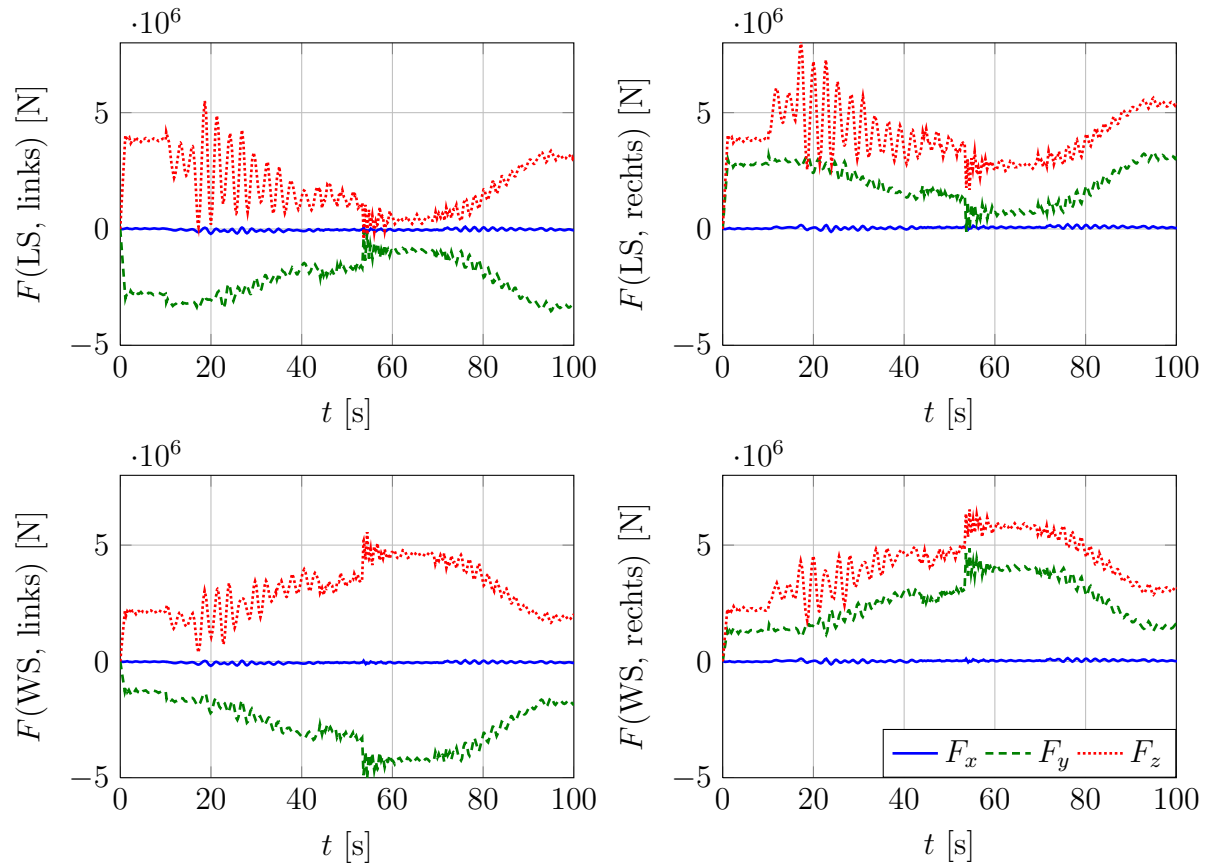


Bild A.2: Einzel-Kaikollektive durch Windlast und Containerumschlag (CTB)

Insgesamt erfährt das Fahrwerk der Containerbrücke auf der Wasserseite eine Maximalbelastung von $F_z(\text{WS}) = 12 \cdot 10^6\text{N}$ (Bild A.3, unten). Dies entspricht bei einer Radaufstandslänge von 23m einer Radaufstandslast von $0,522 \cdot 10^6\text{N/m}$ für die wasserseitige Kranschiene. Die EAU [21] gibt für Post-Panamax-Containerkrane eine maximale vertikale Radaufstandslast von $0,75 \cdot 10^6\text{N/m}$ an, die im vorliegenden Fall nicht überschritten wird.

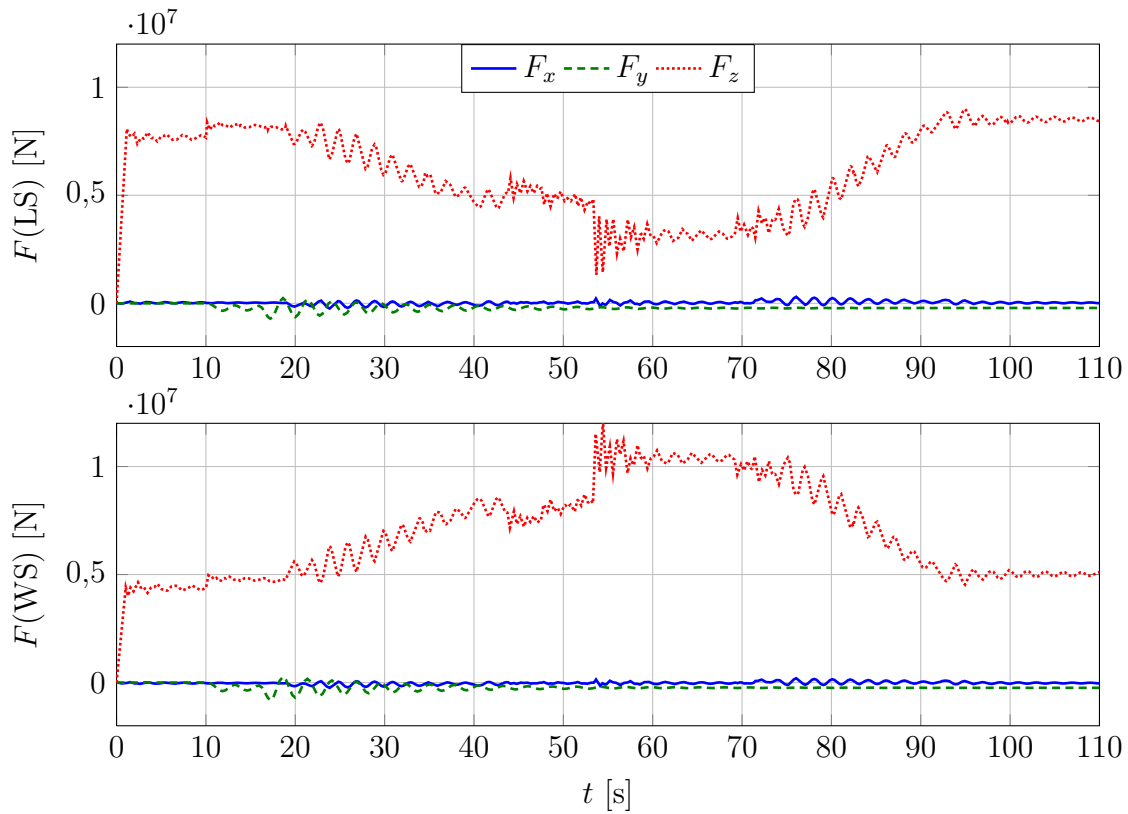
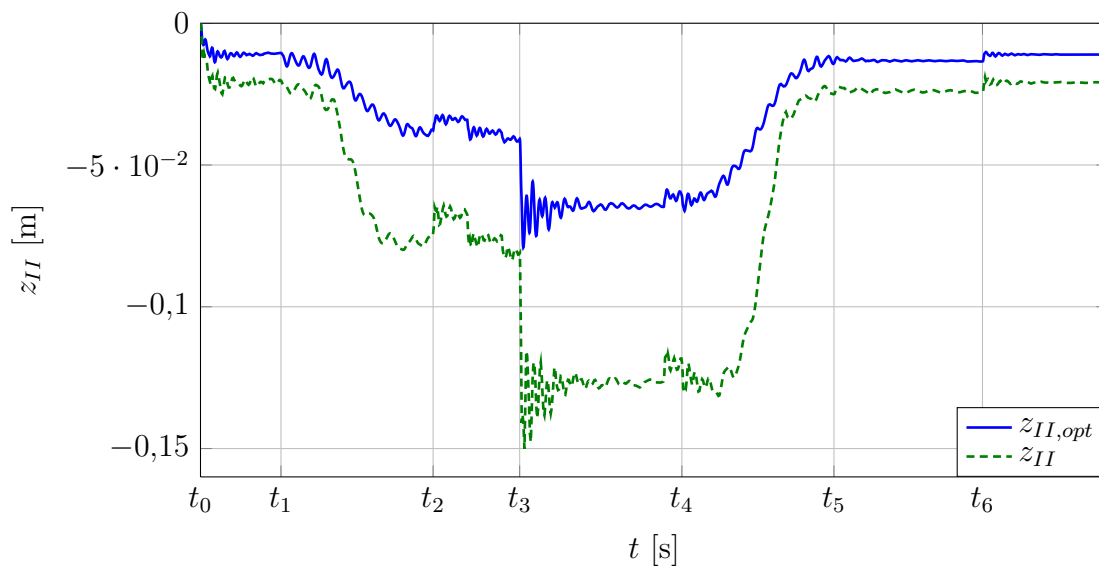


Bild A.3: Kaikollektive LS/WS durch Windlast und Containerumschlag (CTB)

A.3 Strukturmodifikation

Die Absenkung am Testpunkt *II* des CTB-Krans fällt nach der Optimierung deutlich geringer aus und wirkt positiv auf den Containerumschlag (Bild A.4).

Bild A.4: Vertikalverschiebung am CTB-Kran vor (z_{II}) und nach Optimierung ($z_{II,opt}$)

Die Strukturantwort entlang des Auslegers am Containerkran des CT4 nach der Optimierung weist im Vergleich zur ursprünglichen Kranstruktur ebenfalls eine reduzierte Schwingungsamplitude bei erhöhter Frequenz auf (Bild A.5).

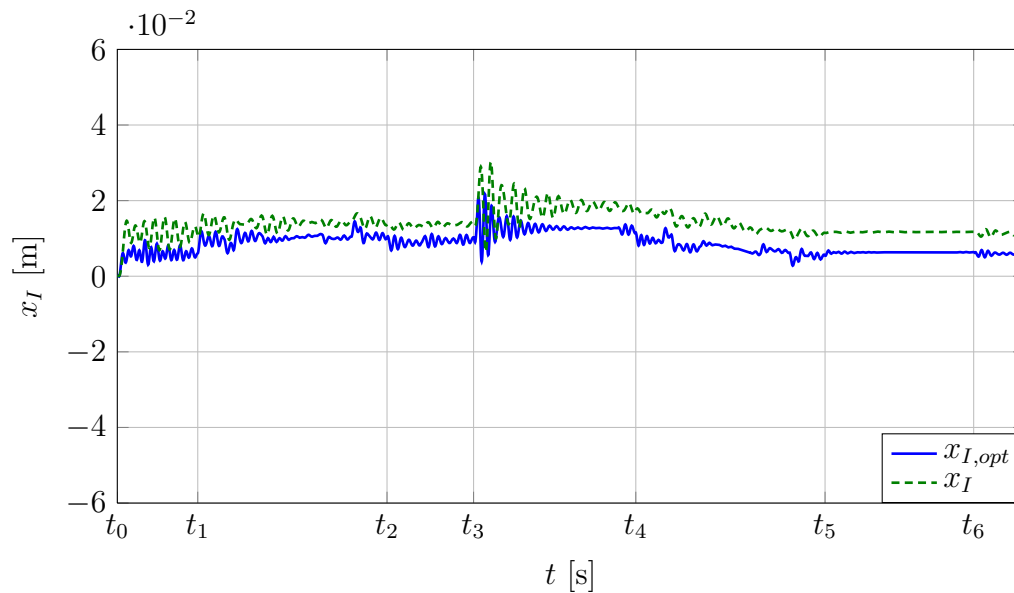


Bild A.5: Horizontalverschiebung am CT4-Kran vor (x_I) und nach Optimierung ($x_{I,opt}$)

Anhang B

Struktur-Last-Kopplung

Modell der reduzierten Normalform

Es existieren exakt zwei Operatoren für jedes Vektorfeld $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ in $\mathbb{R}^n$. Der erste ist der Differentialoperator auf $\mathbf{b}(\mathbf{x})$:

$$D_b = b_1(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + b_n(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_n}. \quad (\text{B.1})$$

Die Anwendung von D_b auf ein weiteres Vektorfeld $\mathbf{f}$ ergibt:

$$(D_b \mathbf{f})(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} (D_b f_1)(\mathbf{x}) \\ (D_b f_2)(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ (D_b f_n)(\mathbf{x}) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

Der zweite Operator auf $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ ist die Anwendung der LIE-Ableitung L_b auf das Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x})$:

$$(L_b \mathbf{f})(\mathbf{x}) = [\mathbf{b}, \mathbf{f}] = D_f \mathbf{b} - D_b \mathbf{f}, \quad (\text{B.3})$$

welche äquivalent mit der LIE-Klammer $[\mathbf{b}, \mathbf{f}]$ bzgl. $\mathbf{b}$ und $\mathbf{f}$ ausgedrückt wird.

Mit der Einführung einer indizierten Schreibweise werden partielle Differentialgleichungen, vgl. John [34], in einen linearen Vektorraum überführt. Betrachtet man neben dem Zustandsvektor $\mathbf{x}$ einen Indexvektor $\mathbf{m}$ in $\mathbb{R}^n$, mit ganzzahligen nicht negativen Einträgen m_k , so erhält man durch Anfügen eines hochgestellten Index zu $\mathbf{x}$ (Komponenten x_k)

$$|\mathbf{m}| = \sum_{i=1}^n m_i = m_1 + m_2 + \dots + m_n, \quad (\text{B.4})$$

$$\mathbf{m}! = \prod_{i=1}^n m_i! = m_1! m_2! \dots m_n!, \quad (\text{B.5})$$

$$\mathbf{x}^{\mathbf{m}} = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}. \quad (\text{B.6})$$

Ein Ordnungsschema ist gegeben durch:

$$\mathbf{m} \geq \mathbf{q} \quad \text{if} \quad m_i \geq q_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{B.7})$$

Das Schema wird auch als lexikographische Ordnung bezeichnet. Für bspw. $n = 3$ und $|\mathbf{m}| = 2$ ist die lexikographische Reihenfolge für Polynome des Vektors $\mathbf{x}$ wie folgt: $\{x_1^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2^2, x_2x_3, x_3^2\}$.

Weiterhin finden die Einheitsrichtungsvektoren $\mathbf{e}_i$ ($i = 1, \dots, n$) für die gemeinsame Darstellung mit den Monomen Verwendung. Diese sind nun Koeffizienten vom Grad k der Einheitsvektoren

$$\left(\prod_{j=1}^n x_j^{m_j} \right) \mathbf{e}_i, \quad |\mathbf{m}| = k, \quad (\text{B.8})$$

und resultieren in einem Vektormonom k -ter Ordnung, [93]. Die Ansammlung aller Vektormonome vom Grad k in $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ erzeugt einen linearen Vektorraum, mit H_n^k bezeichnet. Die Dimension von H_n^k entspricht:

$$\dim(H_n^k) = n \binom{n+k-1}{k} = n \times n_k. \quad (\text{B.9})$$

Die Reihenfolge der Monomialkoeffizienten zur Basis H_n^k entspricht der lexikographischen Ordnung.

Das Einsetzen von (3.121), (3.122) usw. in die ersten zwei homologischen Gleichungen (3.117), (3.118) ergibt erneut zwei Gleichungen, welche sortiert nach nicht steuerbaren ξ , steuerbaren η und gemischten Koordinaten ξ, η folgende Gestalt haben:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\left\{ \frac{\partial \mathbf{h}^{(m,0)}}{\partial \xi}(\xi) \mathbf{A} \xi - \mathbf{A} \mathbf{h}^{(m,0)}(\xi) \right\}}_{\xi\text{-Terme}} + \underbrace{\left\{ \frac{\partial \mathbf{h}^{(0,q)}}{\partial \eta}(\eta) \mathbf{C} \eta - \mathbf{A} \mathbf{h}^{(0,q)}(\eta) \right\}}_{\eta\text{-Terme}} \\ & + \underbrace{\left\{ \frac{\partial \mathbf{h}^{(m,q)}}{\partial \xi}(\xi, \eta) \mathbf{A} \xi + \frac{\partial \mathbf{h}^{(m,q)}}{\partial \eta}(\xi, \eta) \mathbf{C} \eta - \mathbf{A} \mathbf{h}^{(m,q)}(\xi, \eta) \right\}}_{\xi \eta\text{-Terme}} \\ & = \underbrace{\left\{ \mathbf{f}^{(m,0)}(\xi) - \mathbf{f}^{(m,0)}(\xi) \right\}}_{\xi\text{-Terme}} + \underbrace{\left\{ \mathbf{f}^{(0,q)}(\eta) - \mathbf{f}^{(0,q)}(\eta) \right\}}_{\eta\text{-Terme}} + \underbrace{\left\{ \mathbf{f}^{(m,q)}(\xi, \eta) - \mathbf{f}^{(m,q)}(\xi, \eta) \right\}}_{\xi \eta\text{-Terme}}, \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned} & \underbrace{\left\{ \frac{\partial \varphi^{(m,0)}}{\partial \xi}(\xi) \mathbf{A} \xi - \mathbf{C} \varphi^{(m,0)}(\xi) - \mathbf{B} \alpha^{(m,0)}(\xi) \right\}}_{\xi\text{-Terme}} \\ & + \underbrace{\left\{ \frac{\partial \varphi^{(0,q)}}{\partial \eta}(\eta) \mathbf{C} \eta - \mathbf{C} \varphi^{(0,q)}(\eta) - \mathbf{B} \alpha^{(0,q)}(\eta) \right\}}_{\eta\text{-Terme}} \\ & + \underbrace{\left\{ \frac{\partial \varphi^{(m,q)}}{\partial \xi}(\xi, \eta) \mathbf{A} \xi + \frac{\partial \varphi^{(m,q)}}{\partial \eta}(\xi, \eta) \mathbf{C} \eta - \mathbf{C} \varphi^{(m,q)}(\xi, \eta) - \mathbf{B} \alpha^{(m,q)}(\xi, \eta) \right\}}_{\xi \eta\text{-Terme}} \end{aligned}$$

$$= \underbrace{\{g^{(m,0)}(\xi) - \mathfrak{g}^{(m,0)}(\xi)\}}_{\xi \text{ Terme}} + \underbrace{\{g^{(0,q)}(\eta) - \mathfrak{g}^{(0,q)}(\eta)\}}_{\eta \text{-Terme}} + \underbrace{\{g^{(m,q)}(\xi, \eta) - \mathfrak{g}^{(m,q)}(\xi, \eta)\}}_{\xi \eta \text{-Terme}}. \quad (\text{B.11})$$

In gleicher Weise wird vorgegangen, um die übrigen sortierten neuen homologischen Gleichungen nach (3.119), (3.120) zu ermitteln (Ergebnis nicht angegeben).

Die Koeffizienten $a_{1\dots 11}$ von (3.145) unter Verwendung von $\omega_\phi = \omega_\theta = \omega$ und $\omega_L = 2\omega$ sind:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2\omega^2, & a_2 &= -8\omega^2, & a_3 &= \frac{\omega^3}{6}, & a_4 &= \frac{\omega^3}{2}, & a_5 &= -\omega^3, & a_6 &= 16\omega^3, \\ a_7 &= -\frac{\omega^3}{2}, & a_8 &= 2\omega^3, & a_9 &= \frac{\omega^2}{4}, & a_{10} &= -\frac{\omega^2}{8}, & a_{11} &= \frac{\omega^3}{2}. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Anhang C

Lastschwingungsdämpfung

C.1 Servo-parametrische Regelung

Ist der Aktuator nicht hinreichend gedämpft, erfährt die Auslenkung der Last eine erneute Anregung aus der Hubbewegung über die innere Kopplung, vgl. Bild C.1.

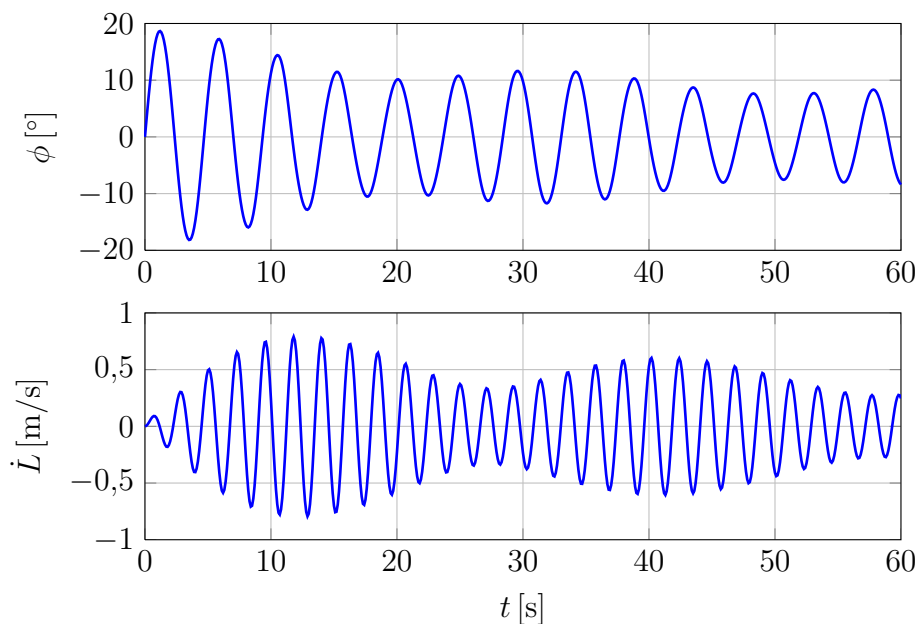


Bild C.1: Numerische Ergebnisse der Lastauslenkung und Stellgröße bei unzureichender Dämpfung des Aktuators: $\delta_2 = 0,1/\text{s}$, $D = 0,01$, $\kappa = 1,025$, $L_0 = 5\text{m}$, $\dot{L}_{ref} = 0\text{m/s}$

C.2 Zustandsbeobachtung

Während eines angepassten Referenz-Umschlagzyklus wird der Containertransport auf die Dimensionen des Versuchsstands skaliert. Der Container wird beginnend bei $L_0 = 5,5\text{m}$ für ca. 5s angehoben. Noch vor Beenden des Hubvorgangs wird zusätzlich die Laufkatze in Bewegung versetzt, über einen Zeitraum von 10s. Kurz bevor die Laufkatze die Zielposition erreicht, wird der Container abgelassen, bis die Anfangsseillänge erreicht ist. Eine detaillierte Darstellung des skalierten Containerumschlags befindet sich in [63]. Diese

Operation findet in einer Ausdehnung von $2,5\text{m} \times 5\text{m}$ statt und wird währenddessen von der Kamera aufgezeichnet. Die vergleichbaren Resultate sind in Bild C.2 hinterlegt. Die Pendelwinkel korrelieren und Winkelgeschwindigkeiten weichen gering voneinander ab.

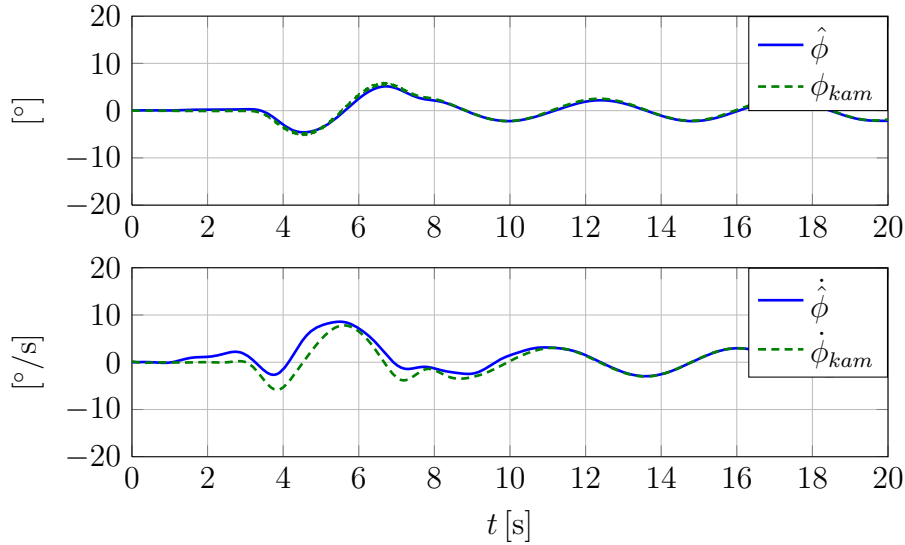


Bild C.2: Vergleich von geschätzten und gemessenen Zuständen am ausgelenkten Container bei angepasstem Referenz-Umschlagzyklus

Zur Reduzierung der Containerschwingungen unterhalb des Auslegers wird das Achsreglermodul ([79]) nach initialer Anregung der Containerauslenkung aktiviert. In Bild C.3 wird ab $t = 7,5\text{s}$ die Position der Laufkatze von der Regelung variiert, mit dem Ziel die Auslenkung der Last zu minimieren. Das Stellsignal entspricht der Anfangsposition s_0 der Laufkatze. Durch die Regelung wird die Auslenkung minimiert. Die Validierung der Beobachterergebnisse gelingt.

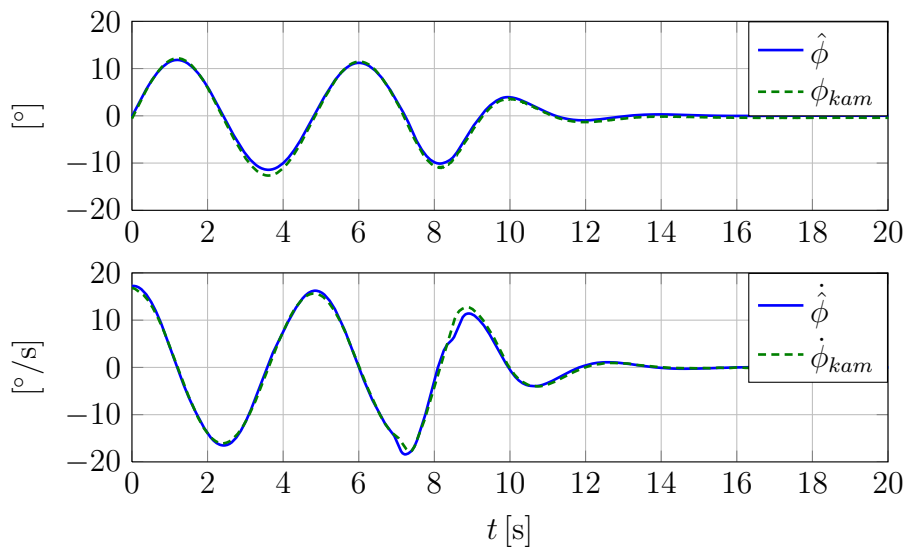


Bild C.3: Vergleich von geschätzten und gemessenen Zuständen am ausgelenkten Container mit Achsreglermodul für die Krankatzbewegung

C.3 Normalform-Regelung

Die Ergebnisse der Normalform-Regelung am Containerbrückenversuchsstand werden durch den Vergleich von servo-parametrischer und adaptiver Normalform-Regelung mit reduzierter Stellgrößenbeschränkung $l_{max} = 0,03$ ($\dot{L}_{max} \approx 0,5\text{m/s}$) ergänzt. Die Stellgröße der servo-parametrischen Regelung ist etwas höher als bei der adaptiven Normalform-Regelung (Bild C.4, unten). Es sind keine Auswirkungen auf die Schwingungsdämpfung des Containers ersichtlich, Bild C.4 (oben). Beide Regelungen sind annähernd gleichwertig.

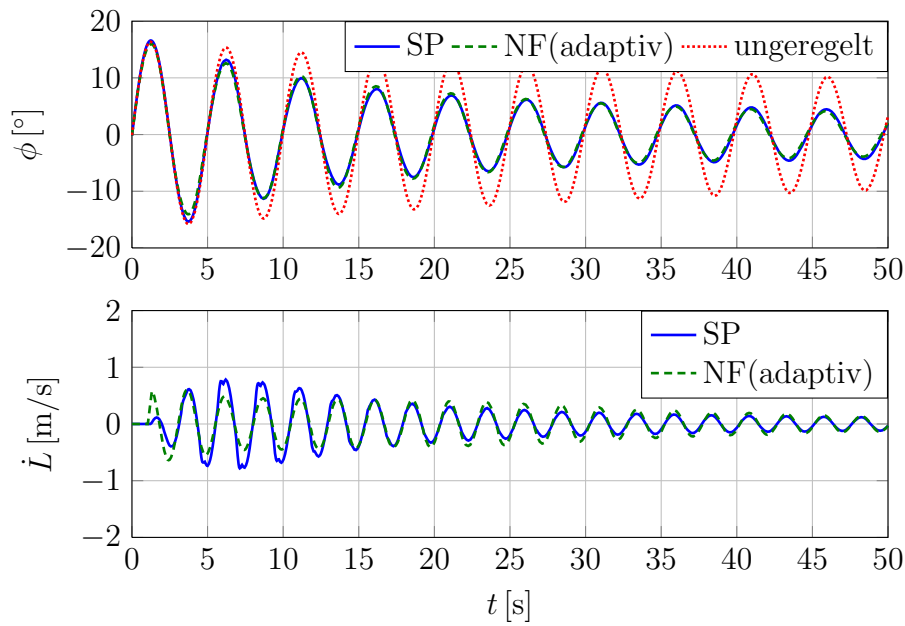


Bild C.4: Zeitverläufe des Pendelwinkels ϕ und der Stellgröße $\dot{L}$ für servo-parametrische (SP) und adaptive Normalform-Regelung (NF): $L_0 = 6\text{m}$, $\phi_0 = 0,3\text{rad} \cdot 180^\circ/\pi$, SP: $\delta_2 = 3,5/\text{s}$, $D = 0,03$, $\kappa = 1,025$, NF: $d = -1,5/\text{s}$, $e_2 \in [-1,0]/\text{s}^2$, $l_{max} = 0,03$

Literaturverzeichnis

- [1] ABDEL-RAHMAN, E. M. ; NAYFEH, A. H. ; MASOUD, Z. N.: Dynamics and Control of Cranes: A Review. In: *Journal of Vibration and Control* (2003), Nr. 9, S. 863–908
- [2] ARNOLD, V. I.: *Geometric Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. New York : Springer-Verlag, 1983
- [3] BATHE, K.-J.: *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, 1995
- [4] BESTLE, D.: *Analyse und Optimierung von Mehrkörpersystemen*. Berlin : Springer-Verlag, 1994
- [5] BHIMANI, A. ; JORDAN, M. A.: *A Few Facts about Jumbo Cranes*. 2003. – Liftech Consultants Inc.
- [6] BLAJER, W. ; KOŁODZIEJCZYK, K.: Motion planning and control of gantry cranes in cluttered work environment. In: *IET Control Theory Appl.* 1(5) (2007), S. 1370–1379
- [7] BLAJER, W. ; KOŁODZIEJCZYK, K.: Improved DAE formulation for inverse dynamics simulation of cranes. In: *Multibody Syst. Dyn.* 25 (2011), S. 131–143
- [8] BOCKSTEDTE, A.: *Dynamik schwebender Krane und Schwingungsreduktion durch Hubmodulation mit servo-parametrischer Regelung*. Aachen, Technische Universität Hamburg-Harburg, Dissertation, 2008. – Shaker-Verlag
- [9] BOCKSTEDTE, A. ; KREUZER, E.: Hoisting Manipulation by Modal Coupling Control for Underactuated Cranes. In: *Vibration Control of Nonlinear Mechanisms and Structures* 1 (2005), S. 121–130
- [10] BORRMANN, C.: *Entwurf und experimentelle Untersuchungen von Konzepten zur aktiven Dämpfung von Lastpendelschwingungen an Containerbrücken*, Technische Universität Hamburg-Harburg, Institut für Mechanik und Meerestechnik, Diplomarbeit, 2009
- [11] CHANG, F. K.: Wind and Movement in Tall Buildings. In: *Civil Engineering* (1967), S. 70–72
- [12] CHEN, G. ; DORA, J. D.: An Algorithm for Computing a New Normal Form for Dynamical Systems. In: *J. Symb. Comput.* 29(3) (2000), S. 393–418
- [13] CIFUENTES, A. O.: Dynamic response of a beam excited by a moving mass. In: *Finite Elements in Design and Analysis* (1989), Nr. 5, S. 237–246

- [14] CLOUGH, R. W. ; PENZIEN, J.: *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill, 1993
- [15] COLLATZ, L.: *The Numerical Treatment of Differential Equations*. New York : Springer, 1966
- [16] CRANDALL, S. H. ; DAHL, N. C. ; LARDNER, T. J.: *Engineering Analysis*. McGraw-Hill, 1956
- [17] DIN: *DIN 1055-4 Einwirkungen auf Tragwerke - Teil 4: Windlasten*. Deutsches Institut für Normung e.V. März 2006
- [18] DINEVSKI, D. ; OBLAK, M.: Experimental and Numerical Dynamic Analysis of a Container Crane Structure. In: *Stahlbau* (1997), Nr. 66, S. 70–77
- [19] DINEVSKI, D. ; OBLAK, M.: Dynamic Optimization of a Container Crane Structure. In: *Creative Systems in Structural and Construction Engineering* (2001), Nr. 9, S. 655–660
- [20] DORMAND, J. R. ; PRINCE, P. J.: A family of embedded Runge-Kutta formulae. In: *J. Comp. Appl. Math.* (1980), Nr. 6, S. 19–26
- [21] EAU: *Empfehlungen des Arbeitsausschusses „Ufereinfassungen“ Häfen und Wasserstraßen*. Berlin : Arbeitsausschuss „Ufereinfassungen“ der Hafenbautechnischen Gesellschaft e.V. und der Deutschen Gesellschaft für Geotechnik e.V., 2004
- [22] ELPHICK, C. ; TIRAPEQUI, E. ; BRACHET, M. E. ; COULLET, P. ; IOOSS, G: A Simple Global Characterization for Normal Forms of Singular Vector Fields. In: *Physica D* 29 (1987), S. 95–127
- [23] FRÝBA, L.: *Vibration of Solids and Structures under Moving Loads*. Groningen : Nordhoff Int. Publ., 1972
- [24] GUCKENHEIMER, J. ; HOLMES, P.: *Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. New York : Springer-Verlag, 1983
- [25] HACKBARTH, F.: *Reglerentwurf und -implementierung eines Windenantriebs mit Modal Coupling Control*, Technische Universität Hamburg-Harburg, Institut für Mechanik und Meerestechnik, Bachelor-Arbeit, 2005
- [26] HAFEN HAMBURG, Marketing e.V.: *Containerumschlag im Vergleich*. Offizielle Internetseite. Oktober 2011. – <http://www.hafen-hamburg.de/top20>
- [27] HAMZI, B. ; KANG, W. ; BARBOT, J.-P.: Analysis and Control of Hopf Bifurcations. In: *SIAM J. Control Optim.* 42(6) (2004), S. 2200–2220
- [28] HARTUNG, M.: *Theoretische Betrachtung des Moving-Load-Problems und Anwendung auf die Ausleger von großen Containerkränen*, Technische Universität Hamburg-Harburg, Institut für Mechanik und Meerestechnik, Studienarbeit, 2009
- [29] HEYDEN, T. ; WOERNLE, C.: Dynamics and flatness-based control of a kinematically undetermined cable suspension manipulator. In: *Multibody Syst. Dyn.* 16 (2006), S. 155–177

- [30] HUCHO, W.-H.: *Aerodynamik der stumpfen Körper*. Braunschweig/Wiesbaden : Vieweg, 2002
- [31] IOANNOU, P. A. ; KOSMATOPOULOS, E. B. ; JULA, H. ; COLLINGE, A. ; LIU, C.-I. ; ASEF-VAZIRI, A. ; DOUGHERTY., E.: *Cargo Handling Technologies / Center for Commercial Deployment of Transportation Technologies*. 2000. – Forschungsbericht
- [32] ISIDORI, A.: *Nonlinear Control Systems*. Berlin : Springer-Verlag, 1996
- [33] ISL ; IHS ; RAVEN: *Prognose des Umschlagpotentials des Hamburger Hafens für die Jahre 2015, 2020 und 2025*. Endbericht. Oktober 2010. – Erstellt von: Institut für Seeverkehrswirtschaft und Logistik, IHS Global Insight Deutschland GmbH, Raven Trading, Auftraggeber: Hamburg Port Authority, S12 - Hafenentwicklung
- [34] JOHN, F.: *Partial Differential Equations*. New York : Springer-Verlag, 1982
- [35] JULIER, S.: The Scaled Unscented Transformation. In: *Proceedings of the IEEE American Control Conference* (2002), S. 4555–4559
- [36] JULIER, S. ; UHLMANN, J. K.: A General Method for Approximating Nonlinear Transformations of Probability Distributions / University of Oxford, Department of Engineering Science, Robotics Research Group. 1996. – Forschungsbericht
- [37] KALMAN, R. E.: A new approach to linear filtering and prediction problems. In: *ASME Journal of Basic Engineering* 82(D) (1960), S. 35–45
- [38] KHAJEPOUR, A. ; GOLNARAGHI, M. F.: Internal Resonance Controller Design using Normal Forms. In: *Nonlinear and Stochastic Dynamics* DE 78/AMD 192 (1994), S. 143–150
- [39] KHAJEPOUR, A. ; GOLNARAGHI, M. F. ; MORRIS, K. A.: Modal Coupling Controller Design Using A Normal Form Method, Part I: Dynamics. In: *J. Sound Vib.* 205 (1997), S. 657–670
- [40] KHAJEPOUR, A. ; GOLNARAGHI, M. F. ; MORRIS, K. A.: Modal Coupling Controller Design Using Normal Form Method, Part II: Control. In: *J. Sound Vib.* 205 (1997), S. 671–688
- [41] KHALIL, H. K.: *Nonlinear Systems*. Upper Saddle River : Prentice-Hall, 1996
- [42] KLOTTER, K.: *Technische Schwingungslehre - Schwinger von mehreren Freiheitsgraden (Mehrläufige Schwinger)*. Berlin : Springer, 1960. – 2 Bde.
- [43] KRENER, A. J.: Reduced Order Modeling of Nonlinear Control Systems. In: *Analysis and Design of Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, 2008, S. 41–62
- [44] KRENER, A. J. ; KANG, W.: Extended Normal Forms of Quadratic Systems. In: *Proc. 29th IEEE Conf. on Decision and Control* (1990), S. 1223–1229
- [45] KRENER, A. J. ; KANG, W. ; CHANG, D. E.: Normal Forms of linearly Uncontrollable Nonlinear Control Systems with a Single Input. In: *Proc. IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems* (2001)

- [46] KREUZER, E. ; NAMACHCHIVAYA, N. S. ; PICK, M.-A. ; RAPP, C.: Reduced Normal Form Approach to Swing Control of Crane Systems: Theory and Experiments. In: BERNARDINI, D. (Hrsg.) ; REGA, G. (Hrsg.) ; ROMEO, F. (Hrsg.): *Proc. of the 7th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2011)*, 2011. – DOI: 10.3267/ENOC2011Rome
- [47] KREUZER, E. ; NAMACHCHIVAYA, N. S. ; RAPP, C.: Extended Swing Control of Hoisting Systems using Resonant Coupling. In: *Proc. of International Symposium on Dynamics and Control*, Hanoi, Vietnam, 2011
- [48] KREUZER, E. ; RAPP, C.: Modal Coupling for Active Damping of Load Swing of Container Cranes. In: *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* Bd. 10. Karlsruhe, 2010, S. 625–626
- [49] KREUZER, E. ; RAPP, C.: Structural Displacement Verification of Container Cranes by Moving Load Model. In: *Proceedings of the Twentieth ISOPE Conference*. Beijing, China, 2010, S. 624–631
- [50] KREUZER, E. ; RAPP, C.: Observer Design and Control of an Underactuated Crane System. In: *Tagungsband zum 2. Workshop Seehäfen für Containerschiffe zukünftiger Generationen*, Veröffentlichungen des Instituts für Geotechnik und Baubetrieb der TU Hamburg-Harburg, 2011, S. 229–241
- [51] KUZNETSOV, Y. A.: *Elements of Applied Bifurcation Theory*. New York : Springer-Verlag, 1995
- [52] LEE, H.-H.: Modeling and Control of a Three-Dimensional Overhead Crane. In: *Journal of Dynamic Systems, Control and Measurement* (1998), Nr. 120, S. 471–476
- [53] LIND, D. ; HSIEH, J. K. ; JORDAN, M. A.: Tandem-40 Dockside Container Cranes and Their Impact on Terminals. In: *PORTS 2007 - Proceedings of the eleventh triannual international conference* (2007), S. 1–9
- [54] LUENBERGER, D. G.: Observing the state of a linear system. In: *IEEE Transactions on Military Electronics* 8(2) (1964), S. 74–80
- [55] LUNZE, J.: *Regelungstechnik 2. 3*. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2005
- [56] LYNCH, P.: Resonant motions of the three-dimensional elastic pendulum. In: *International Journal of Non-Linear Mechanics* 37 (2002), S. 345–367
- [57] MAGNUS, K. ; MÜLLER, H. H.: *Grundlagen der Technischen Mechanik*. Stuttgart : B. G. Teubner, 1990. – 6. Auflage
- [58] MAGNUS, K. ; POPP, K.: *Schwingungen*. Wiesbaden : B. G. Teubner, 2005. – 7. Auflage
- [59] MASOUD, Z. N. ; NAYFEH, A. H.: Sway Reduction on Container Cranes Using Delayed Feedback Controller. In: *Nonlinear Dyn.* 34 (2003), S. 347–358

- [60] MASOUD, Z. N. ; NAYFEH, A. H. ; NAYFEH, N. A.: Sway Reduction on Quay-side Container Cranes Using Delayed Feedback Controller: Simulations and Experiments. In: *Journal of Vibration and Control* (2005), Nr. 11(8), S. 1103–1122. – contributed by D. T. Mook
- [61] MCCARTHY, P. ; VAZIFDAR, F.: Securing Cranes for Storm Wind: Uncertainties and Recommendations. In: *Proceedings of Ports Conference*, 2004
- [62] METTLER, E.: Stabilitätsfragen bei freien Schwingungen mechanischer Systeme. In: *Ing. Arch.* (1959), Nr. 28, S. 213–228
- [63] MISHRA, P.: *Trolley Control Design and Implementation for an Underactuated Crane System*, Technische Universität Hamburg-Harburg, Institut für Mechanik und Meerestechnik, Studienarbeit, 2011
- [64] MÜLLER, S.: *Statischer Nachweis des räumlichen Tragverhaltens eines optimierten Hamburger Kaianlagenquerschnitts*, Technische Universität Hamburg-Harburg, Institut für Geotechnik und Baubetrieb, Diplomarbeit, 2011
- [65] MODROW, M.: *Analyse der Strukturodynamik von großen Containerkränen und Reduzierung der Strukturbewegung durch Verbesserung der Konstruktion*, Technische Universität Hamburg-Harburg, Institut für Mechanik und Meerestechnik, Studienarbeit, 2010
- [66] MURDOCK, J.: *Normal Forms and Unfoldings for Local Dynamical Systems*. New York : Springer-Verlag, 2003
- [67] NAYFEH, A. H. ; MOOK, D. T.: *Nonlinear Oscillations*. New York : Wiley-Interscience Publication, 1979
- [68] NELDER, J. A. ; MEAD, R.: A Simplex Method for Function Minimization. In: *The Computer Journal* (1965), Nr. 7(4), S. 308–313
- [69] NEWMARK, N. M.: A Method for Computation for Structural Dynamics. In: *ASCE Journal of Engineering Mechanics Division* (1959), Nr. 58, S. 67–94
- [70] OLFATI-SABER, R.: Normal forms for underactuated mechanical systems with symmetry. In: *IEEE Trans. Autom. Control* 47(2) (2002), S. 305–308
- [71] OLSSON, M.: *Analysis of Structures Subjected to Moving Loads*. Lund : Division of Structural Engineering, Lund Institute of Technology, 1986. – Report TVSM-1003
- [72] OLTMANN, J.: *Analyse und Applikation eines neuartigen Regelkonzepts zur Lastschwingungsdämpfung am Containerkran*, Technische Universität Hamburg-Harburg, Institut für Mechanik und Meerestechnik, Diplomarbeit, 2011
- [73] PANIGRAHY, A.: *Implementation and Testing of an Unscented Kalman Filter*, Technische Universität Hamburg-Harburg, Institut für Mechanik und Meerestechnik, Studienarbeit, 2011

- [74] PICK, M.-A.: *Ein Beitrag zur numerischen und experimentellen Untersuchung extremer Schiffsbewegungen*. Düsseldorf, Technische Universität Hamburg-Harburg, Dissertation, 2009. – Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 11 Schwingungstechnik, Nr. 339, VDI-Verlag
- [75] POPP, K.: Dynamik von Fahrweg-Strukturen unter wandernden Lasten. In: *VDI-Berichte* (1981), Nr. 419, S. 153–161
- [76] RAPP, C. ; KREUZER, E. ; NAMACHCHIVAYA, N. S.: Reduced Normal Forms for Nonlinear Control of Underactuated Hoisting Systems. In: *Arch. Appl. Mech.* (2011). – DOI: 10.1007/s00419-011-0557-5
- [77] RAUSCH, E.: *Maschinenfundamente*. Düsseldorf : VDI Verlag, 1959
- [78] SÄRKKÄ, S.: On Unscented Kalman Filtering for State Estimation of Continuous-Time Nonlinear Systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 52(9) (2007), S. 1631–1641
- [79] SAWODNY, O.: *Kranautomatisierung und Großraumrobotik*. Düsseldorf : VDI Verlag, 2001
- [80] SCHIEHLEN, W.: *Technische Dynamik*. Stuttgart : B. G. Teubner, 1986
- [81] SCHULTZ, D. G.: The Generation of Liapunov Functions. In: LEONDES, C. T. (Hrsg.): *Advances in Control Systems*. New York : Academic Press, 1965
- [82] SETHNA, P. R.: Vibration of Dynamical Systems with Quadratic Nonlinearities. In: *J. Appl. Mech.-Trans. ASME* 32 (1965), S. 576–582
- [83] SHAMPINE, L. F. ; REICHEL, M. W.: The MATLAB ODE suite. In: *SIAM J. Sci. Comput.* (1997), Nr. 18, S. 1–22
- [84] STRUCK, H.: *Modellierung, Simulation und aktive Dämpfung von selbsterregten Schwingungen eines gekrümmten Torsionsstranges*. Aachen, Technische Universität Hamburg-Harburg, Dissertation, 2004. – Shaker-Verlag
- [85] STRUTT, M. J. O. ; POL, F. van der: On the stability of the solutions of Mathieu's equation. In: *Phil. Mag. J. Sci.* (1928), Nr. 5, S. 18–38
- [86] TALWAR, S. ; NAMACHCHIVAYA, N. S.: Control of Chaotic Systems: Application to the Lorenz Equation. In: *Nonlinear Vibrations* Bd. DE 50/AMD 144. Amer. Soc. of Mech. Engr., 1992, S. 47–58
- [87] TALWAR, S. ; NAMACHCHIVAYA, N. S. ; VOULGARIS, P. G.: Approximate Feedback Linearization: A Normal Form Approach. In: *J. Dyn. Syst. Meas. Control-Trans. ASME* 118 (1996), S. 201–210
- [88] THEIS, J.: *Beobachterentwurf für einen räumlich pendelnden Körper mit steuerbarer Aufhängung*, Technische Universität Hamburg-Harburg, Institut für Mechanik und Meerestechnik, Bachelor-Arbeit, 2010

- [89] TIEN, W.-M. ; NAMACHCHIVAYA, N. S. ; BAJAJ, A. K.: Non-linear dynamics of a shallow arch under periodic excitation - I. 1:2 internal resonance. In: *Int. J. Non-Linear Mechanics* 29 (3) (1994), S. 349–366
- [90] TIEN, W.-M. ; NAMACHCHIVAYA, N. S. ; MALHOTRA, N.: Non-linear dynamics of a shallow arch under periodic excitation - II. 1:1 internal resonance. In: *Int. J. Non-Linear Mechanics* 29 (3) (1994), S. 367–386
- [91] TIMOSHENKO, S. P.: Forced Vibration of Prismatic Bars/Izvestiya Kievskogo politekhnicheskogo instituta (1908)/Erzwungene Schwingungen Prismatischer Stäbe. In: *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 59 (1911), Nr. 2, S. 162–203
- [92] VOSS, H.: *Numerische Simulation*. Arbeitsbereich Mathematik, Technische Universität Hamburg-Harburg, 2005
- [93] WIGGINS, S.: *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. New York : Springer-Verlag, 1990
- [94] WILLIS, R.: Preliminary essay to the appendix B: experiments for determining the effects produced by causing weights to travel over bars with different velocities. In: GREY, G. (Hrsg.): *Report of the Commissioners Appointed to Inquire into the Application of Iron to Railway Structures*. London : W. Clowes and Sons, 1849
- [95] WU, J. J.: Dynamic responses of a three-dimensional framework due to a moving carriage hoisting a swinging object. In: *Int. J. Numer. Engng* (2004), Nr. 59, S. 1679–1702
- [96] WU, J. J.: Transverse and longitudinal vibrations of a frame structure due to a moving trolley and the hoisted object using moving finite element. In: *International Journal of Mechanical Sciences* (2008), Nr. 50, S. 613–625
- [97] ZRNIĆ, N. ; HOFFMANN, K.: Development of design of ship-to-shore container cranes: 1959 to 2004. In: *History of Machines and Mechanisms* (2004), S. 229–242
- [98] ZRNIĆ, N. ; PETKOVIĆ, Z. ; BOŠNJAK, S.: Automation of Ship-To-Shore Container Cranes: A Review of State-of-the-Art. In: *FME Transactions* (2005), Nr. 33, S. 111–121
- [99] ZRNIĆ, N. ; PETKOVIĆ, Z. ; BOŠNJAK, S.: Basic Principles in Design of Large Container Cranes (Part I): Mechanical Design of Trolley and Environmental Impact. In: *Journal of Mechanical Engineering Design* 8 (2005), Nr. 1, S. 10–23
- [100] ZRNIĆ, N. ; PETKOVIĆ, Z. ; BOŠNJAK, S.: Basic Principles in Design of Large Container Cranes (Part II): Historical Development in Design, Evolution of Container Crane Industry and Procurement Strategy. In: *Journal of Mechanical Engineering Design* 8 (2005), Nr. 2, S. 21–32

Lebenslauf

Name	Rapp
Vorname	Christian
Geburtsdatum	10.11.1982
Geburtsort, -land	Staaken (jetzt Berlin), Deutschland
1989 - 1995	Robinson Grundschule Brieselang
1995 - 2002	Lise-Meitner-Gymnasium Falkensee, Abschluss: Allgemeine Hochschulreife
2003 - 2006	Studium der Allgemeinen Ingenieurwissenschaften, Technische Universität Hamburg-Harburg, Abschluss: Bachelor of Science
2007 - 2008	Studium der Mechatronik, Technische Universität Hamburg-Harburg, Abschluss: Diplom-Ingenieur
10.2008 - 03.2012	Wissenschaftlicher Mitarbeiter, Institut für Mechanik und Meerestechnik, Technische Universität Hamburg-Harburg
07.2012 - heute	Ingenieur in der Forschung und Entwicklung, SICK AG, Hamburg