48 | April 1958

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Georg Weinblum

Wellenwiderstand von Rotationskörpern

TUHH
Technische Universität Hamburg-Harburg

SCHIFFSTECHNIK

FORSCHUNGSHEFTE FÜR SCHIFFBAU UND SCHIFFSMASCHINENBAU

Heft 26, April 1958 (5. Band)

Wellenwiderstand von Rotationskörpern

Von Georg Weinblum, Institut für Schiffbau, Hamburg

Die vorliegende Arbeit stellt eine gekürzte und leicht modifizierte Fassung des Berichts 758 des David Taylor Model Basin (DTMB) vor, der in beschränkter Auflage erschienen war. Dem Direktor des DTMB, Captain Wright, dankt der Verfasser für die Genehmigung, den Bericht, insbesondere das Tabellenmaterial, zu veröffentlichen.

Einleitung

In einigen früheren Arbeiten hat sich der Verfasser mit dem Wellenwiderstand von Rotationskörpern befaßt, die sich in völlig getauchtem Zustand geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit parallel zu der ungestörten Oberfläche in idealer Flüssigkeit bewegen [1, 2, 3]. Die Untersuchungen basieren auf Lösungen von Havelock, aus denen durch Spezialisierung die uns interessierenden Resultate gewonnen werden können [4]. Die Ergebnisse haben 1) sowohl theoretisches wie 2) unmittelbares, praktisches Interesse.

Zu 1) sei z. B. ausgeführt, daß bei dem völlig getauchten Körper einige charkteristische Zusammenhänge zwischen Form und Widerstand ausgeprägter in Erscheinung treten als bei dem „normalen" Schiff; dies bezieht sich besonders auf die Abhängigkeit vom Schärfegrad φ. Es ist wohlbekannt, daß Verdrängungsschiffe, die im Bereich des Anstiegs zum ersten Buckel der Wellenwiderstandskurve operieren, als Optimum einen mäßig hohen Schärfegrad φ von ca. 0,65 aufweisen müssen; bei voll getauchten Körpern liegt das Optimum von φ noch wesentlich höher — über 0,8. Ferner ist bemerkenswert, daß das absolute Maximum des Wellenwiderstandes für das Unterwasserfahrzeug bei niedrigeren Froudezahlen auftritt als für das übliche Schiff.

Der Gültigkeitsbereich der Theorie ist u. a. durch die Forderung bedingt, daß das Verhältnis der Tauchtiefe der Achse f zum Durchmesser d nicht zu klein sein soll. Eine Schranke für die Größe f/d ist nicht leicht festzulegen, doch sollte $f/d \geqq 1$ einen brauchbaren Anhalt geben. Für langgestreckte Drehkörper ist sonst das Verhältnis $f^* = f/L$ ein geeigneterer Parameter als f/d. Es sind verschiedentlich Vergleiche zwischen Resultaten der Rechnung und des Experimentes angestellt worden; sie haben eine gute Übereinstimmung hinsichtlich des Charakters der Widerstandskurven gezeitigt [2], doch befriedigen die Ergebnisse der neuesten Untersuchungen von Amtsberg quantitativ nicht in allen Fällen [5].

Bei geringer Tauchtiefe f und hohen Froudezahlen ist gelegentlich beim Schleppen eines Ellipsoids folgender Effekt beobachtet worden: vor dem Körper, vermutlich ausgehend von dem vorderen Staupunkt, durchbrach ein scharf gebündelter Spritzer die Oberfläche. Es handelt sich hier um einen Effekt, der mit den Hilfsmitteln der linearisierten Wellentheorie offenkundig nicht erfaßt werden kann; er gibt Anlaß, ganz allgemein bei hohen Froudezahlen solchen Erscheinungen unsere Aufmerksamkeit zuzuwenden.

Der Zweck des vorliegenden Berichtes ist, ein früher beschränkt veröffentlichtes Auswerteverfahren allgemeiner zugänglich zu machen [3]. Ähnlich wie für Oberflächenschiffe sind seinerzeit in einer Gemeinschaftsarbeit zwischen dem DTMB und dem Bureau of Standards in Washington Tabellen von Integralen berechnet worden, mit deren Hilfe man den Widerstand einer den meisten praktischen Erfordernissen genügenden Klasse von Drehkörpern ohne besonderen Aufwand berechnen kann. Die den Körper erzeugende Dipolverteilung wird als Polynom angesetzt; der Widerstand R für eine vorgegebene Froudezahl F erscheint dann als eine Funktion zweiten Grades in den Beiwerten dieses Polynoms, deren Koeffizienten aus den tabellierten Integralen bestimmt werden.

Inhalt dieses Heftes:

Gegenüber der ersten Abhandlung [1], die schon die entscheidenden grundsätzlichen Gedanken enthält, ist eine wesentliche Vereinfachung der numerischen Arbeit erzielt und damit die Möglichkeit gegeben, das ganze Gebiet systematisch zu beackern.

Im ersten Kapitel erörtern wir den Zusammenhang zwischen erzeugenden Singularitäten und der resultierenden Körperform. Das zweite Kapitel bringt eine Wiedergabe des Integrals für den Wellenwiderstand, das dritte das Schema des Auswerteverfahrens nebst einigen Beispielen, und das vierte be- ... Verteilungen geringsten Wellenwiderstandes. teilungen und Körperformen werden wir in Heft 27 dieser Zeitschrift bringen.

I. Singularitäten und Körperform

Wir unterscheiden zwischen den Größen, welche die hydrodynamische Singularitäten v e r t e i l u n g und den erzeugten Drehkörper charakterisieren (s. Liste der Bezeichnungen). Für den letzteren gelten die Symbole $L = 2a$, b, φ, für die Dipolverteilung $L' = 2a'$, φ'.

Ferner bedeuten:

$A(x)$ = die Spantflächenkurve des Körpers
$q(x)$ = Ergiebigkeit der Linienquellen
$m(x)$ = Liniendipolmoment
M = Gesamtes Dipolmoment

$$q(x) = 4\pi\sigma(x)$$
$$m(x) = 4\pi\mu(x)$$
$$\frac{dm(x)}{dx} = q(x) .$$

Wir spalten einen Dimensionsfaktor ab

$$m_0 = 4\pi\mu_0 = C\pi b^2 U_0$$
$$q_0 = 4\pi\sigma_0 = C\pi \frac{b^2}{a} U_0$$

und führen die dimensionslosen Verteilungen $\mu^*(\xi)$ und $\sigma^*(\xi)$ ein

$$\mu(x) = \mu_0\,\mu^*(\xi) \quad \text{mit} \quad \xi = \frac{x}{a'}$$
$$\sigma(x) = \sigma_0\,\sigma^*(\xi) \qquad \frac{d\mu^*(\xi)}{d\xi} = \sigma^*(\xi) .$$

Für die Berechnung des Wellenwiderstandes ist es ferner nützlich, die zum Mittelschnitt symmetrischen und antimetrischen Teile (Indices s und a) zu unterscheiden.

$$\mu^*(\xi) = \mu_s^*(\xi) + \mu_a^*(\xi)$$
$$\sigma^*(\xi) = \sigma_a^*(\xi) + \sigma_s^*(\xi) .$$

In der Dipoldarstellung ist der symmetrische Term $\mu_s^*(\xi)$, in der Quellsenkendarstellung der antimetrische $\sigma_a^*(\xi)$ der Hauptteil.

Es gilt ferner

$$\varphi = \frac{V}{\pi b^2 L} \qquad\qquad \varphi' = \frac{\int_{-a'}^{+a'} m(x)\,dx}{m_0 L'}$$

Das indirekte Verfahren, aus gegebenen Singularitäten, die über ein Stück der Achse verteilt sind, Körper zu erzeugen, gehört zum eisernen Bestand der Strömungslehre. Die Verteilung der Geschwindigkeit um diese Körper ergibt sich unmittelbar oder mit geringer Mühe aus dem Rechenvorgang [5].

Weniger verbreitet ist die Kenntnis der ebenfalls gut ausgearbeiteten direkten Methode, mit deren Hilfe man aus einer vorgegebenen Körperkontur die erzeugenden Singularitäten ermitteln kann [6, 7].

Beide genannten Verfahren gelten für ein allseitig unbegrenztes Medium. Hat man, wie in unserem Falle, das Verhalten eines Körpers in der Nähe einer freien Oberfläche zu untersuchen, so treten erhebliche Schwierigkeiten auf. Bei einem vorgegebenen Singularitätensystem ergibt sich eine Verzerrung der Körperform gegenüber dem Fall einer allseitig ausgedehnten Flüssigkeit. Letztere wirkt sich besonders wesentlich aus bei der Berechnung von Trimm-Momenten, die ein geradlinig parallel zur ungestörten Wasseroberfläche fortschreitender Körper erfährt (die tatsächliche Geschwindigkeit setzen wir immer als konstant an, ohne es weiter zu erwähnen). Hierauf hat H. Pond hingewiesen [8]. Er hat jedoch gezeigt ... flußt bleibt. Wir können daher für ... struktion der Körperform im allseitig unbeschränkten Medium beibehalten. Will man einen Schritt weiter gehen, so kann man im Bereich kleinerer Froudezahlen (vielleicht bis $F \leq 0{,}3$) die freie Oberfläche durch eine feste Wand ersetzen und ein Spiegelungsverfahren durchführen. Für das Rotationsellipsoid liegt eine einschlägige Untersuchung von Eisenberg vor [9].

Die Berechnung des Wellenwiderstandes basiert auf der S i n g u l a r i t ä t e n v e r t e i l u n g. Es ist daher naheliegend, letztere als Ausgangspunkt der Widerstandsrechnung anzusehen und sich daneben ein Bild von der Form des Körpers zu verschaffen. Wir beabsichtigen, allmählich einen Katalog von Verteilungen und den erzeugten Konturen anzulegen, mit

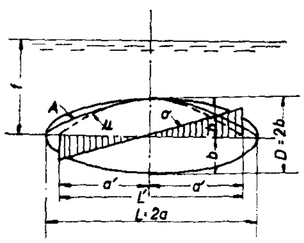


Bild 1 Rotationsellipsoid. Bezogene Spantflächenkurve $A^*(\xi)$, Dipol- und Quellsenkenverteilungen $\mu^*(\xi)$ bzw. $\sigma^*(\xi)$

dessen Hilfe man gegebenenfalls angenähert interpolieren kann, was für Zwecke der Praxis oft ausreichen wird. Inzwischen begnügt man sich mit den jetzt schon zahlreichen bekannten Ergebnissen, z. B. [5, 12], und der Hypothese von Munk-Weinig [10, 11], derzufolge die Spantflächenkurve der Dipolverteilung affin ist.

$$m(x) \approx A(x)\,U_0 . \qquad (1)$$

Diese Regel läßt sich noch etwas verbessern.

Offenkundige Abweichungen von der Munkschen Hypothese bedeuten:

1) die Vergrößerung der Körperlänge $L = 2a$ gegenüber der Verteilungslänge L' und

2) die Verringerung der tatsächlichen Hauptspantfläche gegenüber dem Wert nach Ansatz (1).

Zu 1) Beim Rotationsellipsoid beträgt die Differenz

$$\Delta L = L - L' = 2(a - a')$$

bekanntlich $2(a - e) = 2(a - \sqrt{a^2 - b^2}) \approx b^2/a$

oder $\Delta L / L \approx \frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}$.

Für Körper, deren Form an den Enden nicht zu sehr von der des Rotationsellipsoids abweicht, ist damit eine brauchbare Abschätzung gewonnen.

Weist die Dipolkurve am Bug (oder Heck) eine horizontale Tangente auf (nimmt die Quellsenkenlinie dort den Wert Null an), so ist der Betrag $\Delta L / L$ geringfügig [1, 13].

Für weitere völlige (nahezu rechteckige) Verteilungen gibt das Rankinesche Ovoid einen Anhalt über die Größe $\Delta L/L$.

Eingehende Untersuchungen hierüber stammen von Landweber [13].

Zu 2) Amtsberg hat die Gleichung (1) durch Einführen eines Korrektur-Koeffizienten C, der sich jeweilig durch die exakte Konstruktion des Körpers ermitteln läßt, verbessert

$$m(x) \approx C\,A(x)\,U_0 \tag{2}$$

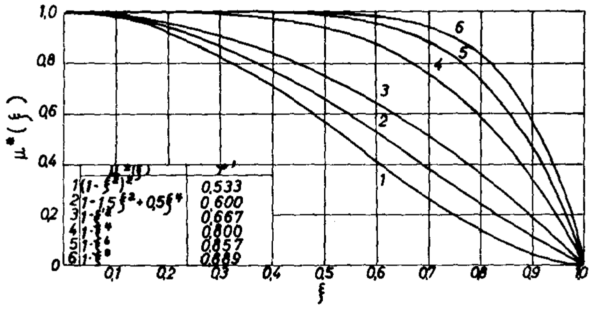


Bild 2 Einfache dimensionslose Dipolverteilungen $\mu^*(\xi)$, symmetrisch zum Mittelspant. Die Kurven können angenähert als Spantflächenkurven $A^*(\xi)$ gedeutet werden, wenn das Achsenverhältnis a/b groß ist

Die physikalische Bedeutung dieser Korrektur ergibt sich unmittelbar wie folgt: die Hypothese von Munk und Weinig setzt voraus, daß die mittlere achsiale Geschwindigkeit der inneren Strömung im Körper gleich der Anströmgeschwindigkeit U_0 ist. Eine bessere Annäherung ergibt sich, wenn wir $U = U_0\,(1 + \Delta U / U_0)$ setzen, worin ΔU die Übergeschwindigkeit im Hauptspant bedeutet. Die Brauchbarkeit des hieraus resultierenden Ansatzes wollen wir am Rotationsellipsoid und an zwei weiteren Verteilungen prüfen, die Amtsberg durchgerechnet hat [5].

Die erzeugende Dipolterteilung des Ellipsoids läßt sich wie folgt ausdrücken [14]

$$m_F(x, z) = 2\,(1 + K_x)\,\frac{abc\,U_0}{e_1\,e_2}\sqrt{1 - \frac{x^2}{e_1^2} - \frac{z^2}{e_2^2}} \tag{3}$$

wobei K_x den Koeffizient der hydrodynamischen Masse

$$e_1 = \sqrt{a^2 - b^2} \qquad e_2 = \sqrt{c^2 - b^2} \quad \text{mit} \quad a > c > b$$

bedeutet. Über die Umströmung des Ellipsoids unterrichtet uns (soweit es sich um translatorische Bewegungen handelt) in sehr vollständiger Weise die Abhandlung von Maruhn [15]. Sie enthält u. a. Kurven für die Größen

$$1 + K_x \quad 1 + K_y$$

wobei der Zusammenhang mit dem wichtigen Parameter α_0 durch $\frac{2}{2 - \alpha_0} = 1 + K_x$ bzw. $\alpha_0 = \frac{2\,K_x}{1 + K_x}$ gegeben ist.

Für das Hauptspant ($x = 0$) gilt

$$m_F(0, -z) = 2\,(1 + K_x)\,\frac{abc\,U_0}{e_1\,e_2}\sqrt{1 - \frac{z^2}{e_1^2}} \tag{4}$$

und der ganze Fluß durch den Querschnitt beträgt

$$m(0) = \int_{-e_2}^{+e_2} m_F(0, z)\,dz =$$

$$= (1 + K_x)\,\pi\,bc\,\frac{a}{e_1}\,U_0 = A_0\,\frac{1 + K_x}{\varepsilon_1} = A_0\,\frac{U_0 + \Delta U}{\varepsilon_1} \tag{5}$$

mit $\varepsilon_1 = \frac{e\,l_1}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \approx 1 - \frac{1}{2}\,\frac{b^2}{a^2}$, A_0 — Hauptspantfläche und mit der bekannten Beziehung $U_0 + \Delta U = (1 + K_x)\,U_0$ für die Geschwindigkeit im Hauptspant des Ellipsoids.

In diesem Spezialfall bestätigt sich unsere Vermutung über den Zusammenhang zwischen Dipolstärke und Übergeschwindigkeit sehr anschaulich. Wie anzunehmen war, ist der Effekt noch etwas stärker als der Einfachheit halber vorausgesagt, da

$1/\varepsilon_1$ etwas größer als 1 ist

z. B. beträgt für $b/a = 0{,}1$ $1/\varepsilon_1$ 1,005

$b/a = 1/8$ $1/\varepsilon_1$ 1,008

Der Arbeit von Amtsberg [5] können wir entnehmen, daß die von uns vorgeschlagene Abschätzung der Korrektur $C \approx 1 + \frac{\Delta U}{U_0}$ auch für andere Körperformen sinnvoll bleibt.

Kennzeichnende Werte zeigt folgende Tabelle 1 für ein Verhältnis $L/D = 8$:

Tabelle 1

Körper	$1 + K_x$	$\frac{1 + K_x}{\varepsilon_1}$	$\frac{U}{U_0} = 1 + \frac{\Delta U}{U_0}$	Schärfegrade φ Körper	φ' Verteil.
Rot Ellipsoid	1,029	1,036	1,029	2/3	2/3
völliger Körper; Amtsberg 1257	ca. 1,037	1,0124	1,012	0,80	0,82
scharfer Körper; Amtsberg 1242	ca. 1,035	1,060	1,044	0,546	0,533

Hierzu ist zu bemerken:

1. Die Werte $1 + K_x$ für den völligen Körper 1257 sind wahrscheinlich etwas zu hoch geschätzt, da, ebenso wie für den scharfen Körper 1242, die Körperlänge gleich der Verteilungslänge gesetzt worden ist.

Es sei in diesem Zusammenhang auf zwei Arbeiten von Landweber hingewiesen. In der ersten [7] wird eine auf zahlreichen Berechnungen fußende Interpolationsformel für die Berechnung von $1 + K_x$ angegeben, die zweite befaßt sich mit der Abschätzung der Länge des durch eine gegebene Dipolverteilung erzeugten Körpers.

2. Die Tabelle illustriert die wichtige Feststellung von F. Weinig, derzufolge für eine Klasse üblicher Drehkörper die Völligkeit der Verteilungskurve φ' größer ist als der Schärfegrad des Körper φ, wenn $\varphi' > 2/3$ wird $\varphi' < \varphi$. Das Rotationsellipsoid mit $\varphi' = \varphi = 2/3$ bildet die Grenze.

3. Für „normale" Drehkörper gibt das Verhältnis $\frac{U_0 + \Delta U}{U_0}$ anscheinend eine brauchbare untere Grenze für den Korrekturfaktor C, den man an das Ergebnis der Munk-Weinig'schen Hypothese anzubringen hat, um eine bessere Annäherung an eine vorgeschriebene Hauptspantgröße zu erzielen.

Der Korrekturfaktor C läßt sich wie folgt in anderer Weise abschätzen:

Es gilt nach dem Satz von G. I. Taylor

$$M = \int_{-a'}^{+a'} m(x)\,dx = (1 + K_x)\;V\,U_0 = C\,\pi\,b^2\,2_{a'\varphi'}\,U_0$$

$$= (1 + K_x)\,\pi b^2\,2a\varphi\,U_0$$

$$\text{hieraus } C = (1 + K_x)\;\frac{a}{a'}\,\frac{\varphi'}{\varphi} \tag{6}$$

Solange die Form des Körpers nicht bekannt ist, fehlen uns genaue Angaben über $1 + K_x$, a und φ. Nehmen wir aber an, $1 + K_x$ und a/a' ließen sich nach dem Rotationsellipsoid schätzen und benutzen wir die obengenannten Ungleichungen für φ und φ', so läßt sich der Verlauf der Korrekturwerte C in Tabelle 1 mühelos erklären. $C \approx (1 + \Delta U/U_0)$ erweist sich, wie vermutet, als eine sinnvolle Abschätzung.

Man kann diese Überlegung benutzen, um allgemein eine qualitative Aussage über die Abweichung des Verlaufs der Spantflächenkurve von der Dipolverteilung m (x) zu machen, wenn wir eine angenäherte Kenntnis der Geschwindigkeitsverteilung um den Körper besitzen. So muß in den Endbereichen, in denen Untergeschwindigkeiten herrschen, die „bezogene" Spantflächenkurve $A^*(\xi) = \frac{A(x)}{A_0}$ über der bezogenen Dipolverteilungskurve $\frac{m(x)}{m_0}$ liegen. Allein die Tatsache der Verlängerung des Körpers L über die Verteilungslänge L′ hinaus, die wir z. B. am Ellipsoid exemplifiziert haben, weist auf die Richtigkeit der vorstehenden Überlegung hin. Allgemein gibt die Beziehung $m(x) = A\,U(x)$ mit $U(x)$ der

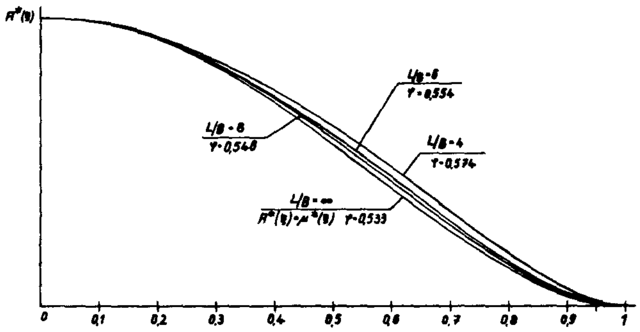


Bild 3 Bezogene Spantflächenkurven $A^*(\xi)$ von Drehkörpern, die aus der dimensionslosen Dipolverteilung $\mu^*(\xi) = (1-\xi^2)^2$ bei verschiedenen Intensitäten μ_0 (verschiedenen Achsenverhältnissen b/a) erzeugt worden sind

x-Komponente der Tangentialgeschwindigkeit in einem Punkt der Meridianlinie eine bessere Annäherung als (1), worauf auch Cummins kürzlich hingewiesen hat [10].

Wir beschränken uns, die Abhängigkeit des Wellenwiderstandes von einer vorgegebenen Singularitätenverteilung zu untersuchen. Der weitere Schritt zur Berechnung der tatsächlichen Körperform läßt sich z. B. nach den Tabellen von Amtsberg erledigen, falls die Verteilung in Polynomform gegeben ist, was man für die in Frage kommende Klasse von Drehkörpern praktisch stets erreichen kann, oder nach Vorschlägen von Landweber.

Im Rahmen der beschränkten Genauigkeit der Theorie des Wellenwiderstandes erscheint es angebracht, einen expliziten Zusammenhang zwischen Dipolstärke m (o) und $A(o) \equiv A_0$ der Spantfläche in Mitte Körper mit Hilfe des Korrekturfaktors C nach $m(o) = A(o)\,U_0\,C$ einzuführen. Den Unterschied zwischen Körperlänge L und Verteilungslänge L′ wollen wir im folgenden nicht berücksichtigen.

II. Die Berechnung des Wellenwiderstandes

Der Wellenwiderstand einer linienförmigen Verteilung, die als Erzeugende eines Rotationskörpers gedacht ist kann durch Spezialisierung einer Lösung von Havelock durch folgende Ausdrücke berechnet werden [4]:

1. Doppelquellbelegung

$$R = 16\pi\varrho K_0^4 \int_0^{\pi/2} \{I_m^2 + J_m^2\} \sec^5\Theta\, d\Theta =$$

$$= 16\pi\varrho K_0^4 \int_0^{\pi/2} \{i_m^2 + j_m^2\} \exp(-2K_0 f \sec^2\Theta) \sec^5\Theta\, d\Theta$$

mit

$$i_m = \int_{-a}^{+a} \mu(x) \cos(K_0 x \sec\Theta)\, dx$$

$$j_m = \int_{-a}^{+a} \mu(x) \sin(K_0 x \sec\Theta)\, dx \tag{7}$$

2. Quellsenkenbelegung

$$R = 16\pi\varrho K_0^4 \int_0^{\pi/2} \{I^2 + J^2\} \sec^5\Theta\, d\Theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} (i^2 + j^2) \exp(-2K_0 f \sec^2\Theta)\, d\Theta$$

$$i = \int_{-a}^{+a} \sigma(x) \cos(K_0 x \sec\Theta)\, dx$$

$$j = \int_{-a}^{+a} \sigma(x) \sin(K_0 x \sec\Theta)\, dx \tag{8}$$

Wir gehen jetzt zu dimensionslosen Werten über und setzen

$$\sigma(x) = \sigma_0 \sigma^*(\xi) = \frac{C}{4}\frac{b^2}{a} U_0 [\sigma^*_a(\xi) + \sigma_s^*(\xi)]$$

in (8) ein.

$$R = 4C^2\pi pg \frac{b^4}{a} \gamma_0 \int_0^{\pi/2} \left(j^{*2} + i^{*2}\right) \exp\left(-\frac{4f}{L}\gamma_0 \sec^2\Theta\right) \sec^3\Theta\, d\Theta$$

mit $j^* = \int_0^1 \sigma_a^*(\xi) \sin(\gamma_0 \xi \sec\Theta)\, d\xi$ als Hauptbeitrag,

$$i^* = \int_0^1 \sigma^*_s(\xi) \cos(\gamma_0 \xi \sec\Theta)\, d\xi \tag{9}$$

Für die summarische Auswertung ist in Anlehnung an das Integral von Michell noch eine andere Form gewählt worden, obgleich die Gl. (9) ebenfalls geeignet erscheint. Durch die Substitution $\gamma = \gamma_0 \sec\Theta$ schreibt sich (9) um

$$R = 4C^2\pi\varrho g \frac{b^4}{a} \int_{\gamma_0}^{\infty} \exp\left(-\frac{4f}{L}\frac{\gamma^2}{\gamma_0}\right) \frac{(\gamma/\gamma_0)^2}{\sqrt{(\gamma/\gamma_0)^2 - 1}} (i^{*2} + j^{*2})\, d\gamma \tag{10}$$

Wir beschränken uns jetzt auf Polynomdarstellungen:

$$\mu^*(\xi) = \mu_s^*(\xi) + \mu_a^*(\xi) = 1 - \Sigma a_{2m} \xi^{2m} + \Sigma b_{2r+1} \xi^{2r+1} \tag{11}$$

worin K = 2m eine gerade

2r + 1 eine ungerade Zahl ist

Die Quellsenkenverteilung lautet:

$$\sigma^*(\xi) = \frac{d\mu^*(\xi)}{d\xi}$$

$$= \sigma_a^*(\xi) + \sigma_s^*(\xi) = -\Sigma 2m a_{2m} \xi^{2m-1} + \Sigma(2r+1)\, b_{2r+1} \xi^{2r} \tag{12}$$

Der dimensionslose Anteil des Wellenwiderstands R* wird mit

$$R = 4C^2\pi\varrho g \frac{b^4}{a} R^*$$

$$R^* = \sum_{mn} \varepsilon_{mn}\, 2m\, 2n\, a_{2m} a_{2n}\, \mathfrak{M}_{2m-1,\,2n-1} [f^*, \gamma_0] +$$

$$\sum_{rs} \varepsilon_{rs} (2r+1)(2s+1)\, b_{2r+1}\, b_{2s+1}\, \mathfrak{M}'_{2r\,2s} [f^*, \gamma_0] \tag{13}$$

wobei m, n, r, s positive Zahlen bedeuten;

$\varepsilon_{mn} = 1$ für $m = n$, $\varepsilon_{rs} = 1$ für $r = s$; $\varepsilon_{mn} = 2$ für $m \neq n$; $\varepsilon_{rs} = 2$ für $r \neq s$; $f^* = f/L$

Die in Tabelle 2 tabulierten Funktionen $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ sind wie folgt definiert

$$\int_{\gamma_0}^{\infty} \exp\left(-4f^* \frac{\gamma^2}{\gamma_0}\right) f(\gamma)\, M_{2m-1}(\gamma)\, M_{2n-1}(\gamma)\, d\gamma = \mathfrak{M}_{2m-1,\,2n-1} (f^*, \gamma_0) \tag{14}$$

$$\int_{\gamma_0}^{\infty} \exp\left(-4f^* \frac{\gamma^2}{\gamma_0}\right)(\gamma)\, M'_{2s}(\gamma)\, d\gamma = \mathfrak{M}'_{2r,2s}(f^*, \gamma_0)\, f(\gamma)\, M'_{2r} \tag{15}$$

$$\text{mit} \quad M_{2m-1}(\gamma) = \int_0^1 \xi^{2m-1} \sin \gamma\, \xi\, d\xi \qquad f(\gamma) = \frac{(\gamma/\gamma_0)^2}{\sqrt{(\gamma/\gamma_0)^2 - 1}}$$

$$M'_{2r}(\gamma) = \int_0^1 \xi^{2r} \cos \gamma\, \xi\, d\xi \tag{15a}$$

Die Berechnung des Wellenwiderstands erledigt sich nach einem einfachen Schema, das wir an einem Beispiel erläutern und das weitgehend mit einem für Überwasserschiffe gegebenen Verfahren übereinstimmt [20]: Es sei

$$\mu^*(\xi) = \mu_s^*(\xi) + \mu_a^*(\xi) =$$
$$= 1 - \xi^6 - a_2(\xi^2 - \xi^6) - a_4(\xi^4 - \xi^6) + b(\xi^3 - \xi^5) \tag{16}$$
$$\sigma^*(\xi) = \sigma_a^*(\xi) + \sigma_s^*(\xi) = -6\,\xi^5 - a_2(2\,\xi^1 - 6\,\xi^5) -$$
$$- a_4(4\,\xi^3 - 6\,\xi^5) + b(3\,\xi^2 - 5\,\xi^4)\,. \tag{17}$$

Wir bilden die Quadrate getrennt für den ungeraden und geraden Teil in folgender Form

$$\sigma_a^{*2}(\xi) = 36\,\xi^5\xi^5 + a_2^2(4\,\xi^1\xi^1 - 24\,\xi^1\xi^5 + 36\,\xi^5\xi^5)$$
$$+ a_4^2(16\,\xi^3\xi^3 - 48\,\xi^3\xi^5 + 36\,\xi^5\xi^5)$$
$$+ 2\,a_2(12\,\xi^1\xi^5 - 36\,\xi^5\xi^5) + 2\,a_4(24\,\xi^3\xi^5 - 36\,\xi^5\xi^5)$$
$$+ 2\,a_2 a_4(8\,\xi^1\xi^3 - 12\,\xi^1\xi^5) - 24\,\xi^3\xi^5 + 36\,\xi^5\xi^5) \tag{18}$$
$$\sigma_s^{*2}(\xi) = b^2(9\,\xi^2\xi^2 - 30\,\xi^2\xi^4 + 25\,\xi^4\xi^4)\,.$$

Der Widerstand läßt sich dann in evidenter Weise wie folgt ausdrücken:

$$R^*(\gamma_0) = 36\,\mathfrak{M}_{55} + a_2^2(4\,\mathfrak{M}_{11} - 24\,\mathfrak{M}_{15} + 36\,\mathfrak{M}_{55})$$
$$+ a_4^2(16\,\mathfrak{M}_{33} - 48\,\mathfrak{M}_{35} + 36\,\mathfrak{M}_{55})$$
$$+ 2\,a_2(12\,\mathfrak{M}_{15} - 36\,\mathfrak{M}_{55}) + 2\,a_4(24\,\mathfrak{M}_{35} - 36\,\mathfrak{M}_{55})$$
$$+ 2\,a_2 a_4(8\,\mathfrak{M}_{13} - 12\,\mathfrak{M}_{15} - 24\,\mathfrak{M}_{35} + 36\,\mathfrak{M}_{55})$$
$$+ b^2(9\,\mathfrak{M}'_{22} - 30\,\mathfrak{M}'_{24} + 25\,\mathfrak{M}'_{44}) \tag{19}$$

worin $\mathfrak{M}_{mn}$ für $\mathfrak{M}_{mn}(f^*, \gamma_0)$ steht.

III. Beispiele von Auswertungen

Wir haben den Ausdruck für den Wellenwiderstand in der Form $R = 4\,C^2 \pi \varrho g \frac{b^4}{a} R^*$ angesetzt. Obgleich die ganze Rechnung auf den **Verteilungen** basiert und man dementsprechend den Dimensionsfaktor $C_0 = 4\,C^2 \pi \varrho g \frac{b^4}{a}$ aus Größen aufbauen sollte, die unmittelbar die Verteilungen charakterisieren, hielten wir es für angebracht, gleich die Körpergrößen b und a (d und L) einzuführen und die Unsicherheit, die in der Schätzung des Korrekturfaktors C liegt, in den Kauf zu nehmen. Sowohl die praktischen Erfordernisse wie der Näherungscharakter der Theorie — zwei Dinge, die sich im gegebenen Falle nicht widersprechen — erlauben uns die Beschränkung auf angenäherte quantitative Abschätzungen. Im Rahmen der uns hier interessierenden Körper machen wir, wie erwähnt, keinen Unterschied zwischen Körper- und Verteilungslänge — ein Vorgehen, das bei Gebilden wie das Rankinesche Ovoid unzulässig wird.

Drückt man den Dimensionsfaktor C_0 als $\varrho g\, V \frac{2C^2}{\varphi} \frac{b^2}{a^2}$ aus, so ergibt sich der wichtige Einheitswiderstand:

$$\frac{R}{\varrho g\, V} = R^* \frac{2\,C^2}{\varphi} \frac{b^2}{a^2} = R^*_1 \quad 2\,C^2 \frac{b^2}{a^2} \tag{20}$$

worin wir $R_1^* = \frac{R^*}{\varphi}$ gesetzt haben. Dieser Koeffizient R_1^* gibt uns die Möglichkeit bei **kleinen** b/a und dann in der Regel kleinen Korrekturfaktoren C die Einheitswiderstände qualitativ zu vergleichen, wobei φ nach dem Schärfegrad der Verteilung φ' geschätzt werden kann. Im allgemeinen tragen wir $R^* = \frac{R}{4\,C^2 \pi \varrho g\, b^4/a}$ als Funktion von γ_0 auf, wobei die Skalen für $F = \frac{U_0}{\sqrt{gL}}$ mit angegeben sind.

Bild 4 und 5 zeigen den Verlauf der Widerstandsbeiwerte R^* für die in Bild 2 dargestellten einfachen Verteilungen bei $f^* = f/L = 0{,}125$ und $0{,}25$. Wir erkennen die Vorzüge der völligen Formen im Bereich des Anstiegs zum großen Widerstandsbuckel sowie ihre schlechten Eigenschaften besonders im Gebiet des zweiten „hump“.

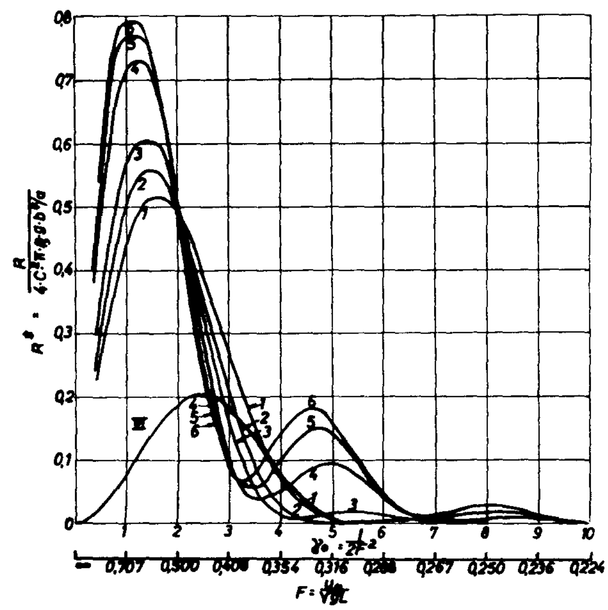


Bild 4 Beiwerte des Wellenwiderstandes $R^* = \frac{R}{4\pi C^2 \varrho g\, b^4/a}$ für die Verteilungen nach Bild 2 Tauchtiefenverhältnis der Achse $f/L = f^* = 0{,}125$

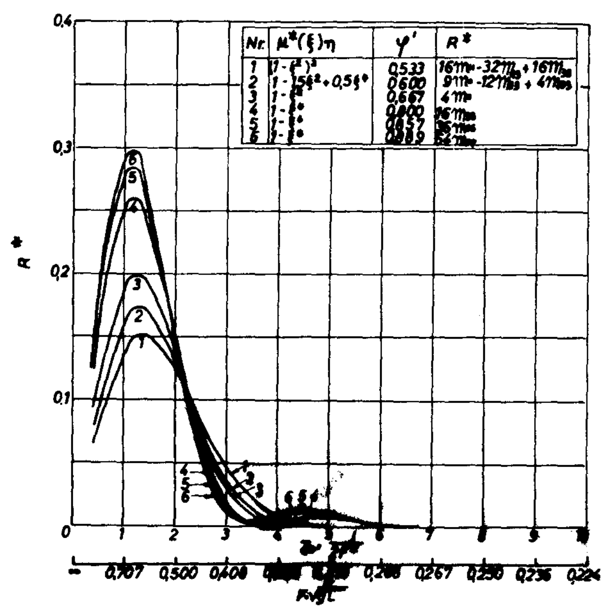


Bild 5 Beiwerte $R^* = \frac{R}{4\pi C^2 \varrho g\, b^4/a}$, Verteilungen nach Bild 2, $f^* = f/L = 0{,}25$

r_0	m_{11}		m_{33}		m_{55}		m_{77}		m_{13}		m_{15}		m_{17}		m_{35}		m_{37}		m_{57}	
															f/L = 0.125					
.5	8.88800	2	29.94400	3	14.73200	3	8.71200	3	5.15600	2	36.15200	3	27.78400	3	21.00000	3	16.14400	3	11.32800	3
1.0	14.05800	2	4.46400	2	2.12800	2	12.34600	3	7.91000	2	5.44800	2	4.14200	2	3.08200	2	2.34400	2	16.21000	3
1.5	1.51063	1	4.45189	2	2.03862	2	11.53305	3	8.17046	2	5.49720	2	4.11456	2	3.00926	2	2.25861	2	1.53330	2
2.0	1.25200	1	3.29000	2	1.41500	2	7.69900	3	6.36100	2	4.11600	2	2.99900	2	2.15100	2	1.57800	2	1.04200	2
2.5	.81200	1	1.77680	2	6.94320	3	3.57520	3	3.71200	2	2.22800	2	1.53520	2	1.10000	2	7.74800	3	4.95920	3
3.0	3.99287	2	6.65567	3	2.46546	3	1.31873	3	1.49274	2	.74270	2	4.29088	3	3.85486	3	2.56213	3	1.76209	3
3.5	1.36736	2	2.41302	3	1.62106	3	1.24679	3	3.29755	3	.61254	3	-3.16098	4	1.75248	3	1.33708	3	1.39079	3
4.0	3.23000	3	3.16300	3	2.84650	3	2.19850	3	1.00850	3	3.03300	4	2.12600	5	2.92600	3	2.50500	3	2.49050	3
4.5	2.37576	3	.51728	2	3.97560	3	2.81039	3	3.01214	3	2.45487	3	1.96914	3	.45062	2	3.75607	3	3.33611	3
5.0	.41480	2	.58040	2	3.84640	3	2.50360	3	.48000	2	3.82480	3	3.02800	3	.47080	2	3.77080	3	3.09800	3
5.5	.46614	2	.45995	2	2.65173	3	1.57802	3	.45923	2	3.42948	3	2.59210	3	3.47493	3	2.65173	3	2.03943	3
6.0	.34497	2	2.59407	3	1.27254	3	.67893	3	2.96870	3	2.01680	3	1.40253	3	1.79549	3	1.27154	3	.92057	3
6.5	1.70989	3	.98587	3	.41509	3	2.24990	4	1.27326	3	.72833	3	.41046	3	.60387	3	.37539	3	2.90315	4
7.0	.54083	3	2.82329	4	2.13246	4	2.09047	4	.34684	3	1.50907	4	.44426	4	1.98047	4	1.39450	4	1.99876	4
7.5	2.00211	4	.27177	3	.36725	3	.36485	3	1.97918	4	1.76129	4	1.47325	4	.30110	3	.28537	3	.36298	3
8.0	.32375	3	.46550	3	.51225	3	.44350	3	.37975	3	.38475	3	.34800	3	.48450	3	.44550	3	.47525	3
8.5	.46421	3	.52494	3	.47810	3	.36840	3	.49104	3	.46303	3	.40089	3	.49928	3	.43525	3	.41878	3
9.0	.42374	3	.39574	3	.30819	3	2.11734	4	.40818	3	.35641	3	.29042	3	.34797	3	.28553	3	.25464	3
9.5	.25723	3	2.01301	4	1.33373	4	.80895	4	.22629	3	1.80230	4	1.33499	4	1.62485	4	1.22448	4	1.02619	4
10.0	1.00720	4	.66340	4	.40580	4	.27920	4	.79960	4	.55660	4	.34100	4	.49500	4	.33920	4	.31520	4
															f/L = 0.25					
.5	28.78800	3	10.01200	3	5.01200	3	29.94000	4	16.97600	3	12.00800	3	9.28000	3	7.08000	3	5.47600	3	38.73200	4
1.0	4.76200	2	15.83800	3	7.73400	3	4.55000	3	2.74600	2	19.17400	3	14.70200	3	11.06600	3	8.48600	3	5.93200	3
1.5	4.71722	2	1.46130	2	6.85583	3	3.93190	3	2.62393	2	1.79462	2	1.35730	2	10.00908	3	7.57581	3	5.19054	3
2.0	3.38300	2	9.33200	3	4.08700	3	2.24000	3	1.77300	2	1.17000	2	8.63900	3	6.17100	3	4.56300	3	3.02500	3
2.5	1.83840	2	4.15280	3	1.60320	3	.80720	3	.86880	2	5.34640	3	3.75360	3	2.57360	3	1.81680	3	1.13600	3
3.0	.74204	2	1.14606	3	3.44684	4	1.49407	4	2.84614	3	1.46074	3	.87338	3	6.16031	4	3.85419	4	2.23545	4
3.5	1.99761	3	1.60792	4	.76339	4	.65140	4	4.14722	4	2.78100	5	-0.97538	4	.81082	4	4.68719	5	.66340	4
4.0	2.67600	4	1.64850	4	1.89750	4	1.61150	4	-3.19100	5	-0.87300	4	-0.95950	4	1.71550	4	1.54300	4	1.74300	4
4.5	.90791	4	3.29345	4	2.76150	4	2.03002	4	1.40608	4	1.20832	4	1.00079	4	3.00548	4	2.56641	4	2.36554	4
5.0	2.09280	4	3.42120	4	2.36480	4	1.57240	4	2.63720	4	2.16960	4	1.75480	4	2.84040	4	2.31040	4	1.92720	4
5.5	2.19869	4	2.30777	4	1.36168	4	.81701	4	2.24341	4	1.71219	4	1.31696	4	1.76964	4	1.36641	4	1.05371	4
6.0	1.37820	4	1.06589	4	.51928	4	2.68373	5	1.20821	4	.83458	4	.59027	4	.74126	4	.52761	4	.37230	4
6.5	.55201	4	.31016	4	1.09972	5	.44770	5	.41078	4	2.32744	5	1.30249	5	1.80528	5	1.04895	5	.67786	5
7.0	1.23222	5	.44169	5	1.95390	6	2.17989	6	.68368	5	1.59821	6	-0.98766	6	1.92990	6	.59597	6	1.78734	6
7.5	1.61193	6	2.45897	6	.44832	5	.50326	5	1.29216	6	.91051	6	.63715	6	.31071	5	.31204	5	.47153	5
8.0	.30625	5	.53100	5	.64200	5	.58100	5	.39550	5	.42375	5	.39600	5	.58075	5	.54875	5	.60975	5
8.5	.45950	5	.55343	5	.52377	5	.41242	5	.50258	5	.48610	5	.42866	5	.53765	5	.47551	5	.46444	5
9.0	.36641	5	.35219	5	.27886	5	1.92670	6	.35863	5	.31797	5	.26242	5	.31308	5	.25909	5	.23153	5
9.5	1.82925	6	1.43919	6	.93799	6	.54014	6	1.61917	6	1.29626	6	.96535	6	1.15817	6	.86810	6	.70854	6
10.0	.54360	6	.32760	6	1.59760	7	.76440	7	.41780	6	.27440	6	1.49780	7	.22260	6	1.30120	7	1.03040	7
															f/L = 0.5					
.5	8.04800	3	28.39600	4	14.32800	4	8.60800	4	4.78000	3	33.95600	4	26.31600	4	20.17200	4	15.63600	4	11.10800	4
1.0	10.17200	3	3.46000	3	17.10400	4	10.14000	4	5.93200	3	4.17000	3	3.21000	3	2.43200	3	18.73000	4	13.17000	4
1.5	6.86783	3	2.18928	3	10.42641	4	6.03585	4	3.87724	3	2.67460	3	2.03462	3	1.51063	3	11.49305	4	7.93314	4
2.0	3.21900	3	9.20100	4	4.10600	4	2.27600	4	1.72000	3	1.14800	3	8.54700	4	6.14500	4	4.57500	4	3.05700	4
2.5	1.12400	3	2.65600	4	1.04800	4	5.33280	5	5.45840	4	3.42080	4	2.43520	4	1.66720	4	1.18800	4	7.47280	5
3.0	2.89948	4	4.69157	5	1.38140	5	5.60161	6	1.16006	4	6.20631	5	3.86886	5	2.53413	5	1.59475	5	.87604	5
3.5	4.98432	5	2.93642	6	5.05060	7	4.24893	7	1.11594	5	1.54107	6	-1.65935	6	.79310	6	3.14270	8	3.59925	7
4.0	3.85600	6	1.01050	6	1.65000	6	1.55200	6	-1.14150	6	-1.93050	6	-1.97300	6	1.24950	6	1.18800	6	1.59650	6

Tabelle 2a

γ_0	$\mathfrak{M}'_{00}$	n	$\mathfrak{M}'_{22}$	n	$\mathfrak{M}'_{44}$	n	$\mathfrak{M}'_{02}$	n	$\mathfrak{M}'_{04}$	n	$\mathfrak{M}'_{24}$	n
$f/_L = 0{,}125$												
.5	8.06000	1	7.03600	2	23.04000	3	23.56000	2	13.31200	2	4.01600	2
1.0	4.92000	1	3.12600	2	9.45600	3	11.56800	2	5.76800	2	16.87000	3
1.5	2.35461	1	11.05706	3	4.44122	3	3.24392	2	8.53045	3	6.38917	3
2.0	8.17700	2	1.00000	2	6.85500	3	-2.83200	3	-8.72600	3	7.95400	3
2.5	1.82000	2	1.83040	2	1.15360	2	-3.74240	3	-4.76400	3	1.44000	2
3.0	6.48232	3	2.48279	2	1.36073	2	.77404	2	5.03825	3	1.82876	2
3.5	1.13937	2	2.40617	2	1.15594	2	1.57078	2	1.04966	2	1.65877	2
4.0	1.41000	2	1.72850	2	.71300	2	1.53800	2	.95700	2	1.09950	2
4.5	1.09811	2	.90746	2	3.05569	3	.98701	2	.53728	2	.51195	2
5.0	.56440	2	3.24320	3	.95720	3	.41720	2	1.67600	3	1.50960	3
5.5	1.82818	3	.86464	3	.73411	3	1.07117	3	1.70674	4	.51231	3
6.0	.56561	3	.81758	3	1.29787	3	.51395	3	.39363	3	.95657	3
6.5	.82310	3	1.38948	3	1.63754	3	1.02937	3	1.05700	3	1.49388	3
7.0	1.23108	3	1.53935	3	1.41736	3	1.36536	3	1.28708	3	1.46992	3
7.5	1.15348	3	1.13668	3	.85664	3	1.13961	3	.97479	3	.98172	3
8.0	.71075	3	.56450	3	.34750	3	.62900	3	.47775	3	.43700	3
8.5	.28107	3	1.80834	4	1.03035	4	2.19228	4	1.38274	4	1.26386	4
9.0	.81459	4	.73282	4	.90635	4	.67549	4	.49062	4	.73170	4
9.5	.81590	4	1.21606	4	1.58296	4	.96156	4	1.02956	4	1.36657	4
10.0	1.38840	4	1.72780	4	1.85140	4	1.53900	4	1.57120	4	1.78160	4
$f/_L = 0{,}25$												
.5	4.22800	1	4.00800	2	13.47200	3	12.98800	2	7.51200	2	23.22000	3
1.0	2.26600	1	15.33400	3	4.42600	3	5.80600	2	3.05200	2	8.20000	3
1.5	9.09844	2	2.98659	3	7.07316	4	1.45196	2	4.93454	3	13.29833	4
2.0	2.57000	2	9.39100	4	8.53700	4	-9.17000	4	-2.71300	3	8.13600	4
2.5	4.02160	3	2.54880	3	1.84800	3	-1.93040	3	-1.86800	3	2.15760	3
3.0	4.69423	4	3.55551	3	2.08277	3	4.97158	4	3.26883	4	2.71614	3
3.5	1.12337	3	3.05928	3	1.53192	3	1.78391	3	1.24165	3	2.16161	3
4.0	1.37500	3	1.85050	3	.78250	3	1.58200	3	1.01700	3	1.20050	3
4.5	.92080	3	.79459	3	2.60996	4	.85103	3	.47773	3	.45151	3
5.0	3.86520	4	2.18600	4	.45360	4	2.87800	4	1.15800	4	.93000	4
5.5	.92027	4	2.92407	5	1.48749	5	.47159	4	-0.38360	5	.66539	5
6.0	1.08056	5	1.57784	5	.36330	4	.60361	5	.94624	6	2.17345	5
6.5	1.56404	5	.33816	4	.44678	4	2.22159	5	2.44837	5	.38555	4
7.0	2.54416	5	.34455	4	.33255	4	.29456	4	.28684	4	.33770	4
7.5	2.10240	5	2.14720	5	1.65194	5	2.12000	5	1.84796	5	1.87970	5
8.0	1.06975	5	.85750	5	.51575	5	.95500	5	.73175	5	.66175	5
8.5	.32415	5	1.89874	6	.79895	6	.24505	5	1.43853	6	1.17347	6
9.0	.46306	6	.27042	6	.37041	6	.27997	6	.81525	7	.23909	6
9.5	.28733	6	.55025	6	.83674	6	.37953	6	.43784	6	.66960	6
10.0	.60040	6	.80940	6	.91460	6	.69440	6	.73200	6	.85840	6
$f/_L = 0{,}5$												
.5	17.06800	2	16.93600	3	5.80400	3	5.37200	2	31.44000	3	9.91200	3
1.0	6.03600	2	4.42400	3	13.07600	4	16.28800	3	8.81600	3	2.40200	3
1.5	1.56129	2	5.32253	4	9.68242	5	2.80793	3	11.05972	4	2.21328	4
2.0	2.83000	3	2.44100	5	3.53000	5	-2.34500	5	-2.36000	4	2.14000	5
2.5	2.78080	4	1.02080	4	.84240	4	-1.43040	4	-1.36160	4	.92400	4
3.0	6.37099	6	1.10872	4	.68337	4	-2.22811	6	-2.46479	6	.86938	4
3.5	1.81134	5	.64225	4	3.33298	5	3.33698	5	2.38845	5	4.62548	5
4.0	1.71000	5	2.52200	5	1.10250	5	2.06900	5	1.36300	5	1.66650	5

Tabelle 2b

Hilfsintegrale $\mathfrak{M}$ ($f/_L$, γ_0); $\mathfrak{M}'$ (f_L, γ_0) berechnet von Mr. J. Blum, National Bureau of Standards. Die Zahlen n = 1, 2, 3 ... hinter den Funktionswerten geben an, daß letztere mit 10^{-n} zu multiplizieren sind, z. B. bedeutet 8,0600|1| → 0,8060

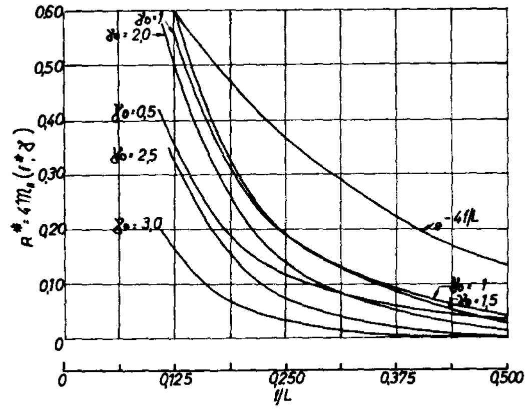


Bild 6 Abnahme des Beiwerts R* mit zunehmendem Tauchtiefenverhältnis $f^* = f/L$ · Kurvenparameter sind die Geschwindigkeitsgrade $\gamma_0 = \frac{1}{2F^2}$

Bild 6 versinnbildlicht die schnelle Abnahme des Wellenwiderstandes mit wachsendem f* bei allen Geschwindigkeitsgraden selbst im Bereich des ersten Buckels. Der Abfall ist schneller als der der Exponentialkurve exp (— 4 f/L), die gern als Abschätzung benutzt wird.

Als Ordinate in Bild 7 ist der vorher erwähnte Beiwert $R_1^* = R^*/\varphi$ aufgetragen, der dem Einheitswiderstand $R/\varrho g V$ ungefähr proportional ist. Die Darstellung bringt die Vorzüge der völligen Formen in einem weiteren Geschwindigkeitsgebiet klar zum Ausdruck.

Bild 8 und 9 unterrichten uns über den Einfluß der Unsymmetrie zum Mittelschnitt. Es handelt sich dabei um sehr beträchtliche Abweichungen von der symmetrischen Form, wie sie in der Praxis kaum auftreten werden.

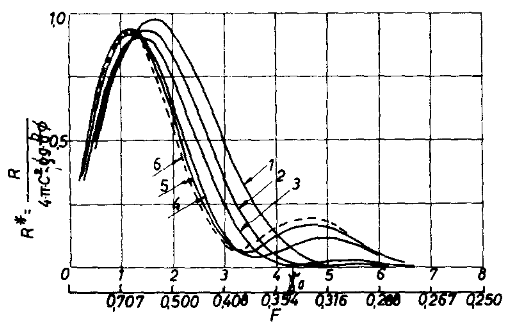


Bild 7 Wellenwiderstandsbeiwerte $R_1^* = R^*/\varphi = \frac{R}{\varrho g \Delta} \cdot \frac{a^2}{2 C^2 b^2}$
Diese Beiwerte sind im Falle sehr schlanker Körper den Widerständen je Tonne Verdrängung bei festen a/b proportional

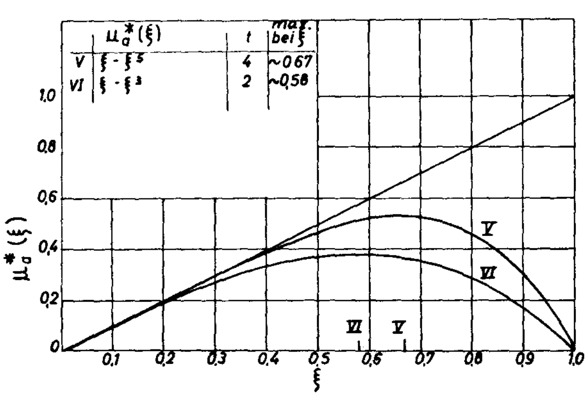


Bild 8 Unsymmetrische Verteilungen

Dagegen vermitteln uns Bild 10 und 11 Unterlagen, die in den Bereich üblicher Ausführungen gehören. Die Formen sind aus einer systematischen Serie des DTMB herausgegriffen, die Gertler und Landweber untersucht haben [12].

Schließlich soll Bild 12 uns die Möglichkeit geben, die Größenordnung des Wellenwiderstands der in Bild 10 gezeigten Körper gegenüber dem des entsprechenden Reibungswiderstandes abzuwägen. Das Achsenverhältnis b/a ist 1/7.

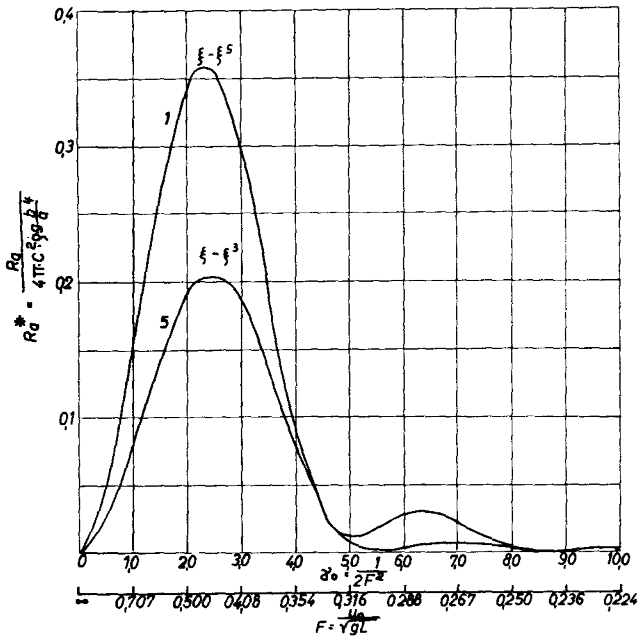


Bild 9 Beiwerte des Wellenwiderstands, der durch Unsymmetrie der Verteilungen zum Mittelspant verursacht ist, $R_a^* = \frac{R_a}{4\pi C^2 \varrho g b^2/a}$ für Formen nach Bild 8 $f^* = f/L = 0,125$

Bei einem Reibungsbeiwert der Großausführung $\zeta_r \approx 0,002$ erreicht der hier gewählte Koeffizient $c_w = \frac{R}{\varrho/2\, U_0^2\, S}$ im Maximum den 4- bis 5fachen Wert von ζ_r (im flachgetauchten Zustand $f^* = 1/8$, dem ein Verhältnis $f/d = 7/8$ entspricht). Obgleich demnach der Rücken des Drehkörpers im Ruhezustand noch eine Wasserschicht von 3/4 b oder 3/8 d über sich hat, ist der Wellenwiderstand bei $\mathfrak{F}$ ca. 0,5 gewaltig. Dies illustriert die vom Verfasser häufig betonte Tatsache, daß es nicht genügt, den Körper unter der Oberfläche zu verstecken, um große Wellenwiderstände zu vermeiden — eine Erkenntnis, die von Erfindern oft nicht beachtet worden ist.

Die Dinge liegen hier noch ungünstiger als bei einem Zerstörer, weil das Verhältnis $\pi b^2/L^2$ wesentlich höher als das vergleichbare $\beta B T/L^2$ des Schiffes ist. Bei den erörterten großen Froudezahlen variiert aber der Wellenwiderstand ceteris paribus fast mit dem Quadrat der Hauptspantfläche.

Auch im Bereich der zweiten Buckels kommt man noch zu ungünstigen Verhältnissen, wenn der Schärfegrad φ zu hoch gewählt ist.

Für die Klasse der Drehkörper, deren Verteilungen durch Polynome dargestellt werden können, lassen sich leicht zwei asymptomatische Gesetze aufstellen. Halten wir die Länge L fest, so ist für sehr große F ($F \to \infty$) $R \sim A_0^2$ und $R \sim \varphi^2$ oder allgemeiner $R \sim V^2$. Diese Regel gilt aber noch **nicht** im wichtigen Bereich des Maximums der Widerstandskurve, sondern erst im absteigenden Ast derselben.

Bild 10/I

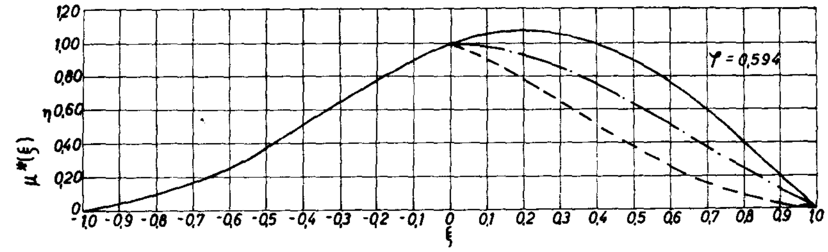


Bild 10/II

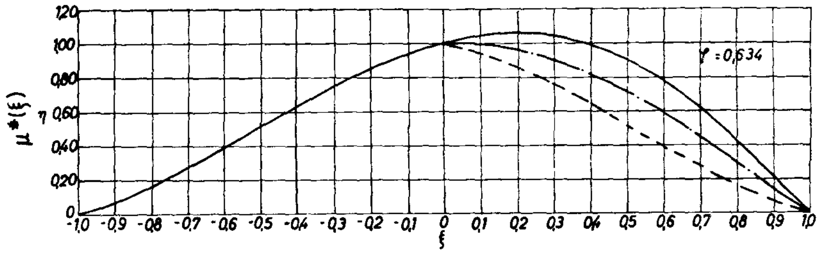


Bild 10/III

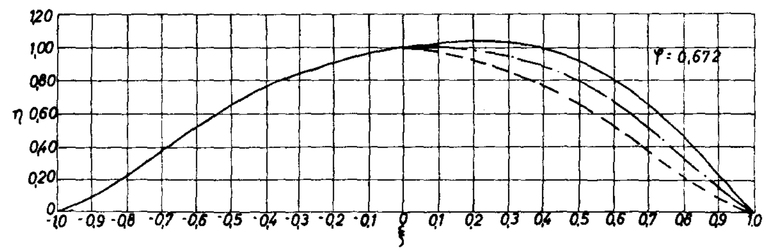


Bild 10/IV

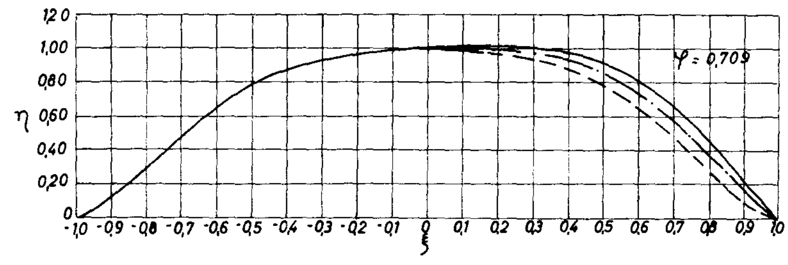
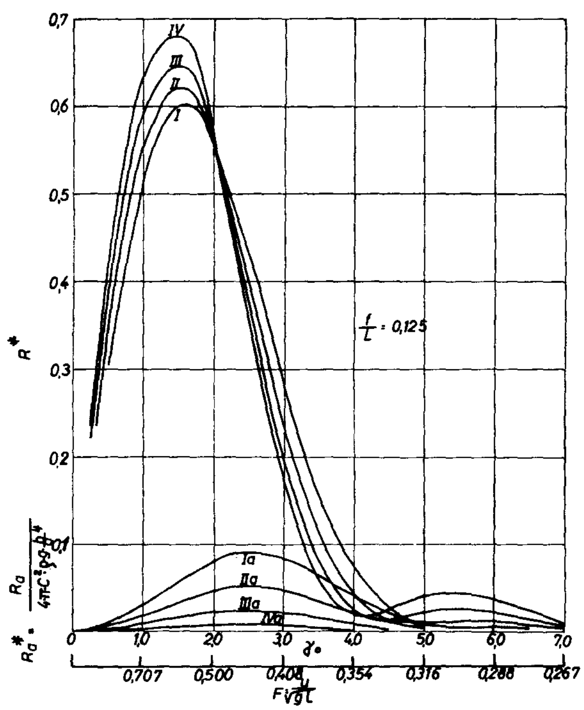


Bild 10 Vier unsymmetrische Rotationskörper der TMB-Serie



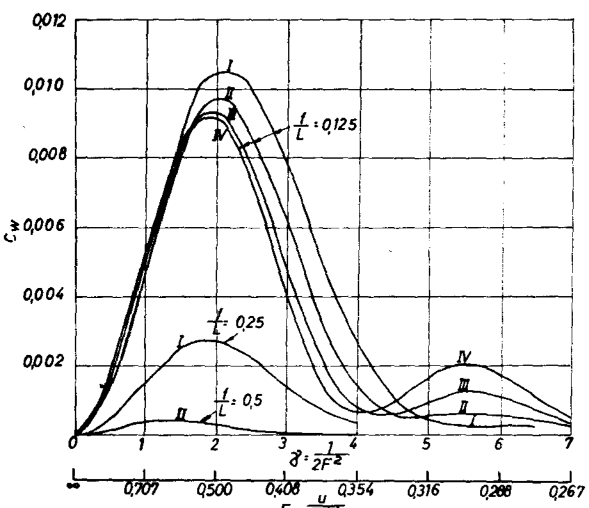


Bild 12 Beiwerte des Wellenwiderstandes $C_W \dfrac{R}{\varrho/2\, U_0^2\, O}$ der vier TMB-Modelle nach Bild 10 bezogen auf die benetzte Oberfläche O, $f^* = 0{,}125$. Die Kurven für $f^* = 0{,}25$, $f^* = 0{,}50$ sind jeweilig nur für ein Modell gezeigt, um die Größenordnung anzugeben

Bild 11 Beiwerte des Gesamtwellenwiderstands R* und des „antimetrischen Widerstands" R_a^* für die vier Modelle nach Bild 10 $f^* = 0{,}125$

Der Beweis läßt sich am leichtesten über die Form des Integrals für die Doppelquellverteilung andeuten (Gl. 7). Wegen des Konvergenzfaktors exp. $(-4\, f^* \gamma_0 \sec^2 \Theta)$ tragen zum Integral $i_m{}^*$ wesentlich nur die Gebiete bei, für die $\cos(\gamma_0\, \xi \sec \Theta) \approx 1$ gesetzt werden kann. Damit wird aber $i^* \approx \varphi$ und $R \sim \varphi^2$.

Im Bereich $F \rightarrow 0$ $(\gamma_0 \rightarrow \infty)$ gilt $R \sim t^2$.

Dieses asymptotische Gesetz machen wir plausibel, ausgehend von der Darstellung des Widerstandsintegrals in der Quellsenkenform (8).

Das Zwischenintegral

$$j^* = \int_0^1 \sigma^*(\xi) \sin \gamma\, \xi d\xi = \Sigma\, n a_n\, M_{n-1}(\gamma)$$

reduziert sich für große γ_0 auf

$$j^* \approx \frac{\cos \gamma}{\gamma}\, \Sigma\, n a_n$$

da für die in Frage kommenden n

$$M_{n-1} \approx -\frac{\cos \gamma}{\gamma} \text{ gilt.}$$

$\Sigma\, n a_n$ ist aber gleich t.

Damit wird $R \sim t^2$.

Auch hier ist zu prüfen, wann die Froudezahlen als sehr klein angesehen werden können.

Obgleich wir im letzten Kapitel uns mit der Auswahl der optimalen Verteilungen befassen wollen, erschien es angebracht, eine Familie etwa im Bereich normaler Formen systematisch zu studieren, da die Formen geringsten Wellenwiderstands z. T. weit von den praktisch wünschenswerten abweichen. Wir wählen dafür Gl (16).

Der Wellenwiderstand ist durch Gl (19) dargestellt, oder für unsere Zwecke einfacher als

$$R = 4\,(a_2{}^2\, \mathfrak{M}_{11} + 4\, a_4{}^2\, \mathfrak{M}_{33} + 9\, a_6{}^2\, \mathfrak{M}_{55} + 4\, a_2 a_4\, \mathfrak{M}_{13} + 6\, a_2 a_6\, \mathfrak{M}_{15} + 12\, a_4 a_6\, \mathfrak{M}_{35})\,. \tag{16a}$$

Die Parameter $a_2\, a_4\, a_6$ sind mit den Werten φ, t durch die Gleichungen verknüpft:

$$a_2 = 9 - \frac{105}{8}\varphi + {}^3/_8\, t$$

$$a_4 = -15 + \frac{105}{4}\varphi - {}^5/_4\, t$$

$$a_6 = 1 - a_2 - a_6\,. \tag{21}$$

Den Charakter der Ergebnisse demonstrieren wir an den Bildern 13—15.

Wir greifen zunächst ein festes t heraus, z. B. t = 2, das dem Rotationsellipsoid entspricht, und variieren die φ-Werte in Intervallen von $\Delta\varphi = 0{,}04$ Bild 13. Die Ergebnisse bestätigen unsere früheren Feststellungen.

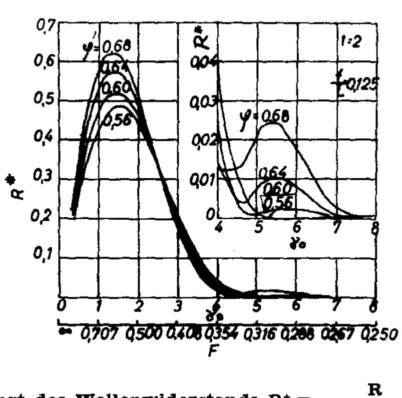


Bild 13 Beiwert des Wellenwiderstands $R^* = \frac{R}{4\pi C^2 \varrho g b^4/a}$ **symmetrischer Drehkörper aus der Familie [2, 4, 6] für verschiedene** φ'; $t = 2$, $f^* = 0{,}125$

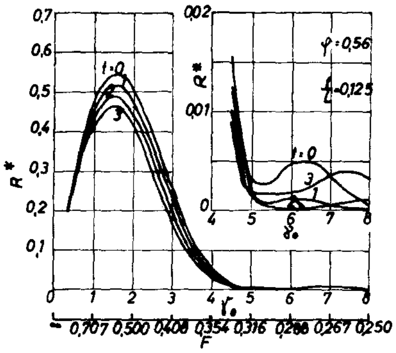


Bild 14 Beiwerte des Wellenwiderstands R* symmetrischer Drehkörper aus der Familie [2, 4, 6] für verschiedene t: $\varphi' = 0{,}56$, $f^* = 0{,}125$

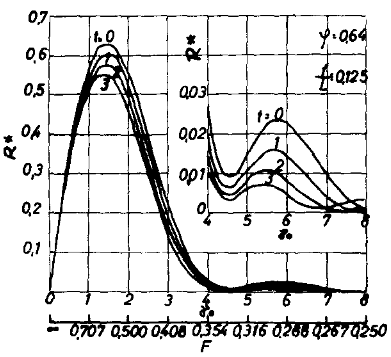


Bild 15 Wie Bild 14, jedoch $\varphi = 0{,}64$

Wir nehmen weiter $\varphi = 0{,}56$ (Bild 14) und $\varphi = 0{,}64$ (Bild 15) und ändern t von 0 bis 3. Unabhängig vom Schärfegrad ergeben sich die Vorzüge der hohen t-Werte im Bereich des großen Widerstandsbuckels. In der Gegend des Maximums erbringt die Erhöhung von t = 0 auf t = 3 einen Gewinn von ca. 15 %. Im Gebiet des zweiten Buckels stellen wir eine außerordentliche Formempfindlichkeit fest. Bei einem Schärfegrad $\varphi = 0{,}56$ liegt das optimale t bei ungefähr 2. während für $\varphi = 0{,}64$ die günstigste der untersuchten Varianten t = 3 aufweist.

IV. Verteilungen geringsten Wellenwiderstandes

In einer früheren Arbeit hatten wir uns die Aufgabe gestellt. Verteilungen $\mu(\xi)$ zu finden, die für eine vorgegebene Froudezahl F und Tauchtiefenverhältnis f^* Drehkörper geringsten Wellenwiderstandes erzeugen [1]. Hier ist es wesentlich, den Unterschied von Verteilungen und den Spantflächenkurven der jeweiligen Körperformen zu betonen, da bei den sich häufig ergebenden ausgefallenen Formen der Munksche Satz [11] nur mit Vorsicht anzuwenden ist.

Formal handelt es sich um die Aufgabe, die Funktion

$$\sigma^*(\xi) = \frac{d\mu^*(\xi)}{d\xi}$$

zu finden, die das Integral R^* zu einem Minimum macht. d. h. es gilt $\delta R = 0$. (22)

Möglicherweise treten bei der exakten Lösung des vorliegenden Variationsproblems ähnliche Schwierigkeiten auf wie bei der entsprechenden für „normale" Schiffe. Wir schalten sie aus, indem wir uns auf den symmetrischen Teil der Polynomfamilie nach Gl (16) und (7) mit zwei willkürlichen Parametern beschränken, d. h.

$$\sigma^*(\xi) = -6\,\xi^5 - 2\,a_2\,(\xi - 3\,\xi^5) - 2\,a_4\,(2\,\xi^3 - 3\,\xi^5)\,.$$

R^* ist in Formel (19) durch die tabellierten $\mathfrak{M}$-Werte als quadratische Funktion in den Parametern $a_2\, a_4$ ausgedrückt. Schreiben wir (16) kompakter mit evidenten Bezeichnungen:

$$R^*(\gamma) = 36\, \mathfrak{M}_{55} + 4\, B_{11}\, a_2{}^2 + 4\, B_{33}\, a_4{}^2 + 8\, B_{13}\, a_2 a_4 + 2\, B_1\, a_2 + 2\, B_3\, a_4\,.$$

(22) führt zu den Minimumbedingungen:

$$\frac{\partial R^*}{\partial a_2} = 0 \qquad \frac{\partial R^*}{\partial a_4} = 0 \tag{22 a}$$

letztere ergeben die Lösungen

$$a_2 = -\frac{3\,(B_1 B_{33} - B_3 B_{13})}{B_{11} B_{33} - B_{13}^2}$$

$$a_4 = -\frac{3\,(B_3 B_{11} - B_1 B_{13})}{B_{11} B_{33} - B_{13}^2} \tag{23}$$

Die $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(f^*, \gamma_0)$ und deshalb die $B = B(f^*, \gamma_0)$ sind Funktionen von $f^* = f/L$ und γ_0.

Im Falle hoher Froudezahlen ergeben sich häufig praktisch unbrauchbare Lösungen mit negativen Ordinaten der Verteilungskurven.

Beispiele „vernünftiger" Resultate sind in Bild 16 und 17 gezeigt.

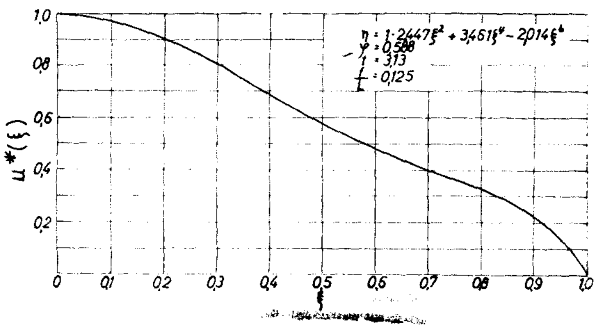


Bild 16 Optimale Dipolverteilung für F = 0,316, (γ_0 = 5): f* = 0,125

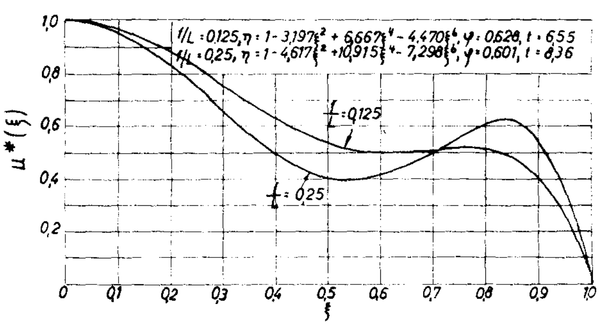


Bild 17 Optimale Dipolverteilung (zweiparametriger Ansatz) für F = 0,354 (γ_0 = 4): f* = 0,125; f* = 0,25

In vielen Fällen ist es sinnvoll, zusätzliche Bedingungen einzuführen, womit wir zu isoperimetrischen Problemen gelangen.

Am zweckmäßigsten erscheint es, den Schärfegrad φ' der Verteilung vorzuschreiben. Numerische Berechnungen sind für die genannte Familie $\langle 2, 4, 6 \rangle$ durchgeführt worden, wobei also nur ein Parameter, z. B. t frei blieb [1]. Nehmen wir $\varphi = {}^2/_3$ (den Schärfegrad des Ellipsoids), so ergibt sich folgendes Bild 18*) mit den kennzeichnenden Schwanenhälsen für hohe F.

Weniger wichtig ist der Ansatz t = to = const.

Immerhin erzielt man damit interessante Resultate wie z. B. in Bild 19 dargestellt. Wir beachten wieder die Vorzüge der großen Völligkeitsgrade im Anstieg zum I Widerstandsbuckel und die großen Unterschiede in den Optimalformen für die zwei Tauchtiefen $f^* = 0.125$ und 0.25.

*) *Entnommen dem Ingenieurarchiv VII. Band (1936) S. 115*

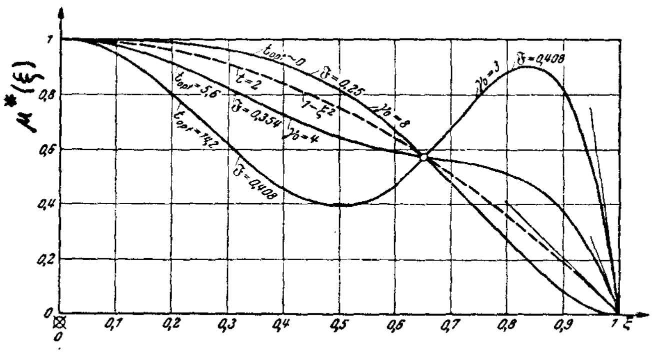


Bild 18 Optimale Dipolverteilung (vorgeschrieben $\varphi' = {}^2/_3$, einparametrige Form) für verschiedene Froudezahlen f* = 0,125

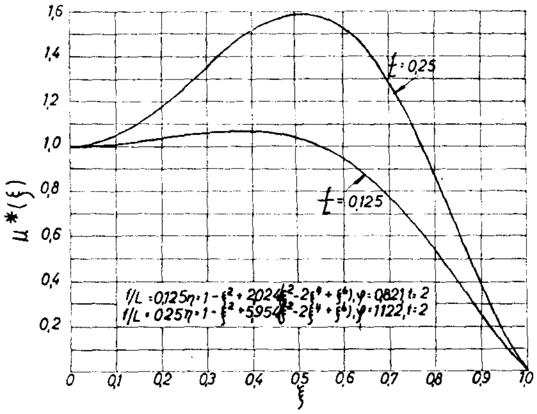


Bild 19 Optimale Dipolverteilungen (einparametrige Form mit vorgeschriebenem t = 2) für F = 0,408 (γ_0 = 3) und f* = 0,125, 0,25

Die beigefügten Tabellen, deren Anwendung keine weitere Erläuterung erfordert, hat Mr. J. Blum vom National Bureau of Standards nach einem Verfahren ermittelt, das sich bei der Auswertung des Integrals von Michell bewährt hat. Aus einer Arbeit von Pond läßt sich jedoch folgern, daß die Ergebnisse einfacher aus der Formel von Gauss-Christoffel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} C_0(x)\,dx = \sum_i \lambda_i C_0(x_i)$$

zu gewinnen sind [8].

Die Tabellen von Amtsberg [6] gestatten ohne Mühe die Körperformen zu bestimmen, die aus einer in Polynomform gegebenen Verteilung resultieren. Wir haben die Tabellen ergänzt und untersuchen systematisch eine Reihe von Optimalverteilungen bis zum sechsten Grade. Die Ergebnisse werden, wie gesagt, in Heft 27 dieser Zeitschrift mitgeteilt werden.

Wellenwiderstand auf flachem Wasser

Es war schon eingangs betont worden, daß Versuche die rechnerischen Ergebnisse qualitativ recht befriedigend bestätigen, neuere Experimente von Amtsberg jedoch quantitativ keinen eindeutigen Zusammenhang der Abweichungen zwischen Theorie und Messung erkennen lassen [5]. Trotz allen Kautelen hinsichtlich der Versuchsgenauigkeit, die Herr Amtsberg anführt, erscheint es erwünscht zu prüfen, ob der Tankeffekt eine Rolle spielt. Ohne größeren Arbeitsaufwand ist es möglich zwei Abschätzungen anzugeben: 1. für den Tankeinfluß und 2. den Flachwassereffekt bei unbeschränkter Breite. Unsere Ausführungen zu letzterem Problem besitzen ein Interesse, das weit über den Anlaß zu der gegenwärtigen Untersuchung hinausgeht.

I. C. Wigley [18] hat den Wellenwiderstand eines Rankineschen Ovoid in einem rechteckigen Kanal berechnet; auf

Grund seiner Untersuchung könnte man in den Bereich des I Widerstandsbuckels, den Amtsberg untersucht hat, eine leichte Erhöhung der theoretischen Werte erwarten, die eine Vergrößerung der festgestellten Diskrepanz bedeuten.

2. M. Haskind hat in Analogie zu Sretensky's Integral für den Wellenwiderstand von „Michellschen" Schiffen auf flachem, seitlich unbeschränkten Wasser einen Ausdruck für völlig getauchte Rotationskörper gegeben [19]. Im Falle des Rotationsellipsoid setzen wir ihn wie folgt an

$$R_h = C_h R_h^* = \int_{w_0}^{\infty} \frac{\mathfrak{Cof}^2 [w(1 - f/h)]}{\mathfrak{Cof}^2 w} \cdot \frac{\left\{M_1\left(\frac{a}{h\,\mathfrak{F}_h} \sqrt{w\,\mathfrak{Tg}\,w}\right)\right\}^2}{\sqrt{w^2 - w\,\mathfrak{Tg}\,w/\mathfrak{F}_h^2}}\, w\,dw \qquad (24)$$

hierin bedeuten:

h	die Wassertiefe
$\mathfrak{F}_h = \frac{U_0}{\sqrt{gh}}$	die Tiefen-Froudezahl
$w_0 = w_0(\mathfrak{F}_h^2)$	die Wurzel der Gleichung
$\mathfrak{F}_h^2\, w = \mathfrak{Tg}\, w$	
M_1	unsere Hilfsfunktion nach Gl 15a
C_h	die Konstante $8\pi\varrho g \frac{b^4}{h} C^2$,
	mit C wie früher (25)

Den Integralfaktor R_h^* in (24) hat Miss Stegun vom National Bureau of Standards nach meinen Angaben für

$\frac{2a}{h} = 1$ und f/h 0,125 0,25 0,50 berechnet.

Da im gegebenen Fall mit $h = 2a$ der Dimensionsfaktor $C_h = C_0 = 4\pi\varrho g \frac{b^4}{a} C^2$ wird, können wir R^* und R_h^* unmittelbar vergleichen; die Ergebnisse zeigt Bild 20. Bei der geringsten Tauchtiefe erscheint der Flachwassereinfluß im Gesamtverlauf der Kurve unwesentlich, bei der größten Tauchtiefe jedoch schon prozentual bedeutsamer. Immerhin kann von einem größeren Flachwassereffekt bei der relativ beträchtlichen Wassertiefe h = L nicht die Rede sein, insbesondere zeichnen sich keine kritischen Zustände ab.

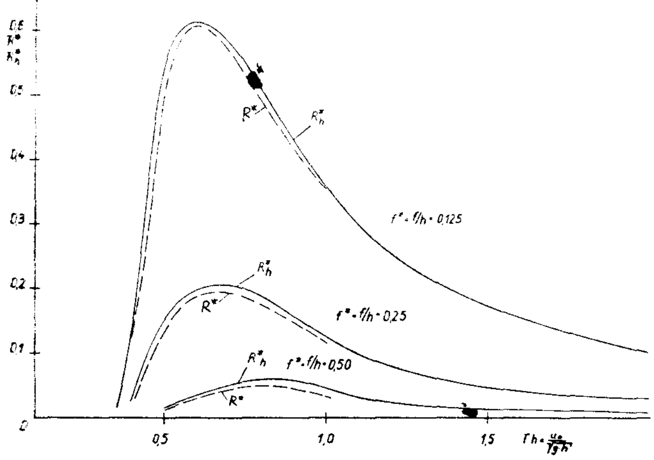


Bild 20 Beiwerte des Wellenwiderstands eines Ellipsoids auf tiefem Wasser R^* ---- und flachem Wasser R_h^* ——

(Eingegangen am 28. Februar 1958)

Schrifttum

[1] G. Weinblum: Ingenieurarchiv (1936).
[2] G. Weinblum, H. Amtsberg, W. Bock: Schiffbau (1937).
[3] G. Weinblum: TMB Report 758.
[4] T. H. Havelock: Proc. Royal Soc. A Vol. 131/1931.
[5] H. Amtsberg: Schiffstechnik (1956).
[6] H. Amtsberg: JSTG 1937.
[7] L. Landweber: TMB Report 761.
[8] H. Pond: TMB Report 795.
[9] Ph. Eisenberg: Journal of Applied Mechanics Vol. 17 (1950).
[10] F. Weinig: Zeitschrift für Technische Physik (1928).
[11] M. Munk: in Durand Avodynamics Vol. 1, Springer (1934).
[12] L. Landweber und Gertler: TMB Report 719.
[13] L. Landweber: Schiffstechnik (1956).
[14] T. H. Havelock: Roc. Royal Soc. A Vol. 132 (1932).
[15] Maruhn: Jahrb. der Luftfahrtforschung (1941).
[16] F. Weinig: J. STG (1937).
[17] W. Cummins: Ship and Waves (1954).
[18] C. Wigly: Bulletins de l'Association Technique Maritime (1949).
[19] M. Haskind: Prikladnaja Matematika / Mekanika, Band IX (1945).
[20] G. Weinblum, Schiffstechnik 1956.

Bezeichnungen

$A(x)$	Spantflächenkurve
$A(0) = A_0$	Flächeninhalt des Mittelschnitts
$A^*(\xi) = A^*\left\{x\right\} = \frac{A(x)}{A(0)}$	dimensionslose Spantflächenkurve
C	Korrekturkoeffizient für den Mittelschnitt
C_0	Dimensionsfaktor
$C_s = \frac{S}{\pi DL}$	Beiwert des Flächeninhalts der Oberfläche eines Drehkörpers
$D = 2b$	Durchmesser
$F = \frac{U_0}{\sqrt{gL}}$	Längen-Froudezahl
I.J.	Zwischenintegrale
$L = 2a$	Körperlänge
$L' = 2a'$	Verteilungslänge
R	gerechneter Wellenwiderstand
$R^* = \frac{R}{4\pi C^2 \varrho g b^4 a}$	Beiwert des Wellenwiderstands
S	benetzte Oberfläche
U_0	Konstante Fahrt-(Anström-) Geschwindigkeit
$U = U_0 + \Delta U$	x-Komponente der Geschwindigkeit am Körper
$\gamma_0 = 1/2\, F^2$	
$\gamma = \gamma_0 \sec \Theta$	Integrationsvariante
$\zeta = \frac{R}{\varrho/2\, U_0^2\, S}$	
η	Polynom in ξ
φ	Schärfegrad
φ'	Völligkeitsgrad der Dipolverteilung
$\mu = m/4\pi$	Liniendipolstärke
$\sigma = q/4\pi$	Linienquellstärke
Θ	Integrationsvariable (Winkel)
$a = L/2$	
$a' = L'/2$	
b	Radius des Körpers im Mittelschnitt
c	mittlere Achse des allgemeinen Ellipsoids
e	lineare Exzentrizität
f	Tauchtiefe der Achse
g	Erdbeschleunigung
r, s, m, n	Indices, Exponenten
s	als Index, Symmetrie
K_x	Beiwert der Hydrodynamischen Maße in der x-Richtung
$m(x)$	Liniendipolmoment