

133 | 1964

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Dr.-Ing. Maria Kirsch

**Ein Beitrag zur Abschätzung des
Einflusses der beschränkten
Wassertiefe auf den Widerstand**

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

IfS - Bericht Nr. 133

Ein Beitrag zur Abschätzung des Einflusses der beschränkten
Wassertiefe auf den Widerstand

von

Dr.-Ing. Maria Kirsch

Hamburg, 1964

EIN BEITRAG ZUR ABSCHÄTZUNG DES EINFLUSSES DER BESCHRÄNKTEN
=====

WASSERTIEFE AUF DEN WIDERSTAND
=====

Von Dr.-Ing. Maria Kirsch

Institut für Schiffbau der Universität Hamburg

Inhalt:	Seite
1) Problemstellung	2
2) Theoretische Grundlagen	4
3) Aufstellung der Gleichungen für die Geschwindigkeit	6
4) Die Aufstellung der Beispiele	10
5) Die Ergebnisse der Rechnung	13
6) Der Einfluß der Deformierung der Körper auf die Ergebnisse	14
7) Der Reibungswiderstand von Rotationskörpern in unbegrenzter Flüssigkeit	17
8) Der Reibungswiderstand von Rotationskörpern im Flachwasser	21
a) Der Mittelwert der Geschwindigkeit für das Ovoid und die Erhöhung des Reibungswiderstandes im Flachwasser	23
b) Der Mittelwert der Geschwindigkeit für das Rotations- ellipsoid und die anderen Körper und die Erhöhung des Reibungsbeiwertes	25
Diskussion der Ergebnisse	26
Vergleich mit anderen Arbeiten	27
9) Die Ausdehnung der Ergebnisse auf konkrete Schiffskörper	32
Schlußbemerkung	34
Literaturverzeichnis	36
Abbildungen 1 - 11	
Tabellen 1 - 12	

1) Problemstellung.

Der Zweck der vorliegenden schiffstheoretischen Untersuchung ist es, Grundlagen für die Bestimmung des Widerstandes bei Probefahrtsmessungen zu schaffen. Die gestellte Aufgabe besteht darin, die Erhöhung des Reibungswiderstandes auf Grund des Flachwassereinflusses zu ermitteln. Dieses Problem besitzt einige Aktualität. In der Praxis ist es zwar üblich, die Erhöhung des Wellenwiderstandes auf beschränkter Wassertiefe zu berechnen, - grundlegende Untersuchungen auf diesem Gebiet stammen von Schuster [1], - jedoch die Erhöhung des Reibungswiderstandes wird meist nicht berücksichtigt. Hinsichtlich des Wellenwiderstandes stützt man sich auf die Feststellung, daß kein Flachwassereinfluß vorliegt, solange die Ungleichung gilt

$$v_h < 0,5 \sqrt{gh} ;$$

h = Wassertiefe

v_h = Geschwindigkeit des Schiffes

g = Erdbeschleunigung.

Damit werden für weite Bereiche der Geschwindigkeit verschiedene Gebiete des Meeres und auch Versuchstanks zu Gebieten mit unbegrenzter Wassertiefe dazugerechnet, ohne zu berücksichtigen, daß der Reibungswiderstand eine Erhöhung erfährt auch bei solchen Wassertiefen, die den Wellenwiderstand nicht beeinflussen. Es bedarf einer eingehenden Untersuchung, um diesen Sachverhalt genügend zu klären.

Bekanntlich hängt der Reibungswiderstand von der Form des Schiffes ab. Diese Abhängigkeit ist von Amtsberg am Beispiel einiger Rotationskörper in unbegrenzter Flüssigkeit theoretisch und experimentell untersucht worden [2]. Graff hingegen befaßt sich mit dem Einfluß beschränkter Wassertiefe auf den Reibungswiderstand [3].

Doch während Graff die Erhöhung des Reibungswiderstandes experimentell durch eine Reihe von Modellversuchen ermittelt, soll in der vorliegenden Arbeit auf theoretischem Wege an die Lösung des Problems herangegangen werden. Es ergibt sich hierbei die Notwendigkeit, gewisse Einschränkungen und Vereinfachungen zu treffen, um die gestellte Aufgabe der theoretischen Behandlung zugänglich zu machen.

Die erste Vereinfachung besteht darin, an Stelle von Schiffen oder Schiffsmoellen Rotationskörper zu untersuchen, da letztere leichter mathematisch zu erfassen sind. Die für die Rotationskörper gewonnenen Ergebnisse werden auf Schiffe übertragen unter Verwendung bestimmter Formparameter, z.B. des Schärfegrades φ und der Verhältnisse L/B , B/T , T/h , wobei L die Länge, B die Breite, T den Tiefgang des Schiffes, bzw. des Vergleichskörpers bezeichnen und h die Wassertiefe. Auch ein Vergleich der Spantflächenkurven kann sehr nützlich sein.

Als zweiter Punkt ist zu erwähnen, daß in der vorliegenden Arbeit nicht der Reibungswiderstand berechnet wird sondern die Geschwindigkeit am Körper. Auf Grund der Annahme, daß der Reibungswiderstand dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist [4,5,6], wird dann die prozentuale Erhöhung des Reibungswiderstandes bei verschiedenen Wassertiefen h gegenüber unbegrenzter Flüssigkeit festgestellt.

Als dritter, sehr wichtiger Punkt sei vermerkt, daß die Wasseroberfläche als Ebene angesehen wird, d.h. der Einfluß der Wellenbildung wird vernachlässigt. Die Gültigkeit der Ergebnisse erstreckt sich demnach über denjenigen Geschwindigkeitsbereich, in welchem der Wellenwiderstand oder zumindest seine Erhöhung infolge des Flachwassereinflusses unwesentlich sind.

Es wird angenommen, daß der Rotationskörper, der in einer Flüssigkeit der Tiefe h bis zur Hälfte getaucht ist, von der Flüssigkeit in Richtung seiner Längsachse mit der Translationsgeschwindigkeit u_0 angeströmt wird. Die Geschwindigkeit am Körper, die örtlich verschieden ist, setzt sich additiv zusammen aus der Translationsgeschwindigkeit u_0 und der Zusatzgeschwindigkeit Δu_h , die sowohl eine Funktion des Ortes als auch der Wassertiefe ist. Die Zusatzgeschwindigkeit Δu_h gilt es zu ermitteln. Dies geschieht auf der Grundlage der Potentialtheorie mit Hilfe des Spiegelungsprinzips. G.I. Taylor hat nach dieser Methode die Geschwindigkeit und den Druck am Boden einer Flüssigkeit bestimmt, in der sich ein Körper bekannter Form befindet.

Die erwähnte Arbeit ist von Gawn in einer Untersuchung als Appendix II veröffentlicht worden [7]. In der vorliegenden Veröffentlichung wird in der gleichen Weise die Geschwindigkeit nicht am Boden der Flüssigkeit sondern direkt am Körper bestimmt. Die Hauptaufgabe besteht also in der Ermittlung der Zusatzgeschwindigkeiten an verschiedenen Rotationskörpern, aus denen sich dann die Erhöhung des Reibungswiderstandes ergibt. Es wird versucht, die Ergebnisse auf konkrete Schiffsformen anzuwenden. Die Bestimmung der Zusatzgeschwindigkeiten erfolgte mit Hilfe der elektronischen Rechenanlage IBM 650.

2) Theoretische Grundlagen

Vorausgesetzt wird eine inkompressible, ideale Flüssigkeit, die in ihrer horizontalen Ausdehnung unbegrenzt ist und in vertikaler Richtung die Tiefe h hat. Es handelt sich demnach um Potentialströmungen. Zur Ermittlung der Geschwindigkeit in den einzelnen Punkten der Flüssigkeit ist es notwendig, das Geschwindigkeitspotential der Strömung zu kennen.

Es soll das Potential für eine gegebene Strömung aufgestellt werden. Diese Strömung entsteht auf folgende Art: in der Flüssigkeit herrscht zunächst eine einfache Translationsströmung, parallel zum Boden, bzw. zur Oberfläche; nun wird ein Körper in die Flüssigkeit gebracht, er soll nicht völlig getaucht sein, sondern an der Oberfläche schwimmen und in Richtung der Längsachse mit der Geschwindigkeit u_0 angeströmt werden. Durch den Körper werden die Strömung und die Strömungsgeschwindigkeit verändert. Der Körper wirkt, entsprechend seiner Form, wie eine ganz bestimmte Verteilung von Singularitäten in der Parallelströmung. Bei Vorgabe einer speziellen Singularitätenverteilung sagt man, der betreffende Körper werde durch diese Verteilung erzeugt.

Nach dem Quell-Senkenverfahren kann man für den zweidimensionalen Fall (ebenes und rotationssymmetrisches Problem) die Konturen der Körper berechnen, die durch eine bestimmte axiale Singularitätenverteilung in einer Parallelströmung in unbegrenzter Flüssigkeit erzeugt werden. Die Achse, auf der die Quellen und Senken bzw. die

Dipole angeordnet sind, soll dabei in Richtung der Parallelströmung verlaufen. Nach diesem Verfahren, das von Rankine [8,9] stammt, entwickelte Amsberg eine elegante Methode zur Bestimmung der Körperkonturen[2].

Im Falle endlicher Wassertiefe ist die Stromfunktion, vom ebenen Problem abgesehen, unbekannt. Die gleiche Singularitätenverteilung in einer Parallelströmung, die in unbegrenzter Flüssigkeit einen bestimmten Rotationskörper erzeugt, ergibt bei Begrenzung der Wassertiefe einen deformierten, nicht mehr rotationssymmetrischen Körper, der umso stärker deformiert sein wird, je geringer die Wassertiefe ist.

In der vorliegenden Arbeit werden auf einer in Richtung der Translationsströmung verlaufenden, in der Oberfläche des Flachwassers befindlichen Achse in einem bestimmten Intervall Singularitäten angeordnet, für die im Falle unbegrenzter Flüssigkeit der Körper bekannt ist, der durch sie erzeugt wird. Den Ausgangspunkt dieser Untersuchung bilden demnach bekannte Singularitätenverteilungen, nicht aber bestimmte Körper.

Zuerst soll ein rechtwinkliges, festes Koordinatensystem folgendermaßen definiert werden: die xy -Ebene entspricht der Oberfläche der Flüssigkeit, die x -Achse, auf der die Singularitäten angeordnet sind, verläuft in Richtung der Parallelströmung, der Koordinatenursprung befindet sich in der Mitte der Verteilung, und die z -Achse weist vertikal nach unten.

Symmetrisch zum Koordinatenursprung werden Quellen und Senken oder auch Dipole im Intervall $(-a; +a)$ auf der x -Achse angenommen. Dieser Verteilung entspricht in unbegrenzter Flüssigkeit ein bestimmter Rotationskörper. Wir gehen von der Näherung aus, daß wir durch diese Verteilung im Flachwasser den gleichen Körper erhalten, der hier zur Hälfte eingetaucht ist. Diesen Halbkörper mitsamt der Flüssigkeit spiegeln wir an der freien Oberfläche, so daß wir zu einem vollständigen Körper zwischen zwei Wänden gelangen, die voneinander den Abstand $2h$ haben, wenn h die Wassertiefe ist. Durch diese Spiegelung an der Oberfläche wird der Einfluß etwaiger Wellenbildung vernachlässigt. Ausgehend von der gegebenen Verteilung

bestimmen wir das Potential und die Geschwindigkeit dieser Strömung in unbegrenzter Flüssigkeit. Um den Einfluß des Flachwassers zu erfassen, spiegeln wir den Körper an den Begrenzungswänden nach beiden Seiten unendlich viele Male. Die Geschwindigkeit in x-Richtung ist damit durch eine unendlich konvergente Reihe dargestellt, die durch Summierung der Geschwindigkeiten in dem ursprünglich in unbegrenzter Flüssigkeit vorhandenen Punkt und allen seinen Spiegelpunkten entsteht; diese Punkte haben sämtlich die gleichen x- und y-Ordinaten, während die z-Ordinate den Wert $z = \pm 2nh$ hat, wobei n die n-fache Spiegelung bezeichnet. Diese Methode ist von G.I. Taylor [7] angewandt worden zur Bestimmung des Druckes am Boden einer Flüssigkeit für die Strömung um ein Rotationsellipsoid. Die Ermittlung der Geschwindigkeit in einem bestimmten Punkt für eine gegebene Singularitätenverteilung erfolgt somit durch Berechnung der entsprechenden unendlichen Reihe, deren Konvergenzverhalten von der Form des gewählten Körpers und der Wassertiefe h abhängt.

Auf diese Art sind die Geschwindigkeiten ermittelt, die in verschiedenen Punkten einer gegebenen Strömung herrschen. Diese Punkte stellen jedoch nur näherungsweise die Kontur des Körpers dar, der durch diese Strömung in Flachwasser tatsächlich erzeugt wird. Hierin liegt zunächst eine gewisse Einschränkung des Wertes der Ergebnisse; aber im Laufe der Arbeit wird gezeigt, daß gerade hinsichtlich der Zusatzgeschwindigkeit der tatsächlich im Flachwasser erzeugte Körper durch den entsprechenden Körper in unbegrenzter Flüssigkeit meistens ersetzt werden darf.

3) Aufstellung der Gleichungen für die Geschwindigkeit

Es sollen nun die Ausdrücke für die Geschwindigkeit gebildet werden, die zur rechnerischen Erfassung dieser Größe notwendig sind. Dabei werden zwei Fälle unterschieden, entsprechend der Verschiedenartigkeit der Singularitätenverteilung: erstens der Fall punktförmiger Verteilung von Quellen und Senken auf der x-Achse und zweitens der Fall kontinuierlicher Verteilung.

Im ersten Fall geht man speziell von den einzelnen Quellen und Senken aus, im zweiten Fall, bei analytischer Darstellung der Verteilung, von einer allgemeinen Integraldarstellung.

Als Beispiel für die punktförmige Verteilung von Quellen und Senken nehmen wir den Fall einer Quelle und einer Senke gleicher Intensität, die sich auf der x-Achse in den Punkten $\pm a$ befinden. In der Parallelströmung einer unbegrenzten Flüssigkeit wird durch diese Verteilung ein Ovoid erzeugt, ein eiförmiger Rotationskörper, der von Rankine [8,9] behandelt wurde und durch folgende Gleichung für die Ordinaten des Mittellängsschnittes definiert ist:

$$(1) \quad \frac{b^2}{4} \sqrt{1 + \frac{1}{(a/b)^2}} \left(\frac{X+a}{[(X+a)^2 + Z^2]^{3/2}} - \frac{X-a}{[(X-a)^2 + Z^2]^{3/2}} \right) - \frac{1}{2} Z^2 = 0$$

$\pm a$ sind die Ordinaten der Quelle und Senke auf der Abszissenachse, und b ist die halbe Breite des Ovoids.

Das Geschwindigkeitspotential ϕ der entsprechenden Strömung setzt sich zusammen aus dem Potential der Translationsströmung φ_0 und dem Potential der Quell-Senkenströmung φ .

$$(2) \quad \phi = \varphi_0 + \varphi$$

mit

$$(3) \quad \varphi_0 = u_0 X$$

und

$$(4) \quad \varphi = \frac{Q}{4\pi r_I} - \frac{Q}{4\pi r_{II}}$$

Q bedeutet die Intensität der Quelle, bzw. der Senke, und es ist

$$r_{I/II} = \left[(X \mp a)^2 + Y^2 + Z^2 \right]^{1/2}$$

Durch die Größe Q ist die Breite $2b$ des Ovoids bestimmt. Es besteht folgende Beziehung:

$$(5) \quad Q = u_0 \pi b^2 \sqrt{1 + \frac{1}{(a/b)^2}}$$

Da in der vorliegenden Arbeit verschiedene a/b -Verhältnisse zugrundegelegt werden sollen, wird Q in Gl. (4) durch den Ausdruck (5) ersetzt.

Uns interessiert die durch die Singularitätenverteilung hervorgerufene Zusatzgeschwindigkeit. Ihre x-Komponente ergibt sich aus Gl. (4) durch partielle Differentiation nach X,

$$(6) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial X} = -\frac{Q}{4\pi} \left\{ \frac{X-a}{[(X-a)^2 + Y^2 + Z^2]^{3/2}} - \frac{X+a}{[(X+a)^2 + Y^2 + Z^2]^{3/2}} \right\}$$

In Gl. (6) wird der Ausdruck für Q aus Gl. (5) eingesetzt; die Gleichung wird durch u_0 dividiert, und folgende Substitutionen werden gemacht:

$$x = \frac{X}{a}; \quad y = \frac{Y}{b}; \quad z = \frac{Z}{b}$$

Damit erhält man

$$(6a) \quad \frac{\Delta u_x}{u_0} = \frac{1}{u_0} \frac{\partial \varphi}{\partial X} = \frac{1}{4(a/b)^2} \left[1 + \frac{1}{(a/b)^2} \right]^{1/2} \left\{ \frac{x-1}{[(x-1)^2 + (\frac{y}{a/b})^2 + (\frac{z}{a/b})^2]^{3/2}} - \frac{x+1}{[(x+1)^2 + (\frac{y}{a/b})^2 + (\frac{z}{a/b})^2]^{3/2}} \right\}$$

Durch (6a) ist in dimensionsloser normierter Form der Ausdruck für die Zusatzgeschwindigkeit in unbegrenzter Flüssigkeit gegeben. Gesucht ist die Geschwindigkeit bei begrenzter Wassertiefe. Zu diesem Zweck spiegeln wir das Ovoid zwischen zwei Wänden im Abstand $2h$ von diesen Wänden aus unendlich viele Male, wie im vorhergehenden Abschnitt beschrieben. Dadurch erhalten wir für die Zusatzgeschwindigkeit folgende unendliche Reihe:

$$(7) \quad \frac{\Delta u_x}{u_0} = \frac{1}{4(a/b)^2} \left[1 + \frac{1}{(a/b)^2} \right]^{1/2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{x-1}{[(x-1)^2 + (\frac{y}{a/b})^2 + (\frac{z-2nh/b}{a/b})^2]^{3/2}} - \frac{x+1}{[(x+1)^2 + (\frac{y}{a/b})^2 + (\frac{z-2nh/b}{a/b})^2]^{3/2}} \right\}$$

a/b ist das Verhältnis des Quell- bzw. Senkenabstandes vom Koordinatenursprung zur halben Breite des Ovoids, h/b das Verhältnis der Wassertiefe zum Tiefgang des Ovoids.

Zwecks Programmierung für den Rechenautomaten wird diese Reihe in zwei Reihen aufgeteilt:

$$(7a) \quad \frac{\Delta u_x}{u_0} = -\frac{1}{4(a/b)^2} \left[1 + \frac{1}{(a/b)^2} \right]^{1/2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{x-1}{[(x-1)^2 + (\frac{y}{a/b})^2 + (\frac{z+2nh/b}{a/b})^2]^{3/2}} - \frac{x+1}{[(x+1)^2 + (\frac{y}{a/b})^2 + (\frac{z+2nh/b}{a/b})^2]^{3/2}} \right\} \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{x-1}{[(x-1)^2 + (\frac{y}{a/b})^2 + (\frac{z-2nh/b}{a/b})^2]^{3/2}} - \frac{x+1}{[(x+1)^2 + (\frac{y}{a/b})^2 + (\frac{z-2nh/b}{a/b})^2]^{3/2}} \right\} \right]$$

Im zweiten Fall ist die Zusatzgeschwindigkeit für eine kontinuierliche Singularitätenverteilung auf der x-Achse gesucht. Für die Quell-Senkenverteilung $\sigma(x)$ auf der x-Achse im Intervall $(-a; a)$ lautet das Potential φ der Zusatzgeschwindigkeit für den rotationssymmetrischen Fall in unbegrenzter Flüssigkeit

$$(8) \quad \varphi = \frac{1}{4\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{\sigma(\xi)}{R} d\xi$$

mit

$$R = [(X-\xi)^2 + Y^2 + Z^2]^{\frac{1}{2}}$$

Das Geschwindigkeitspotential für die Translationsströmung φ_0 ist hierin nicht enthalten, da es für die weitere Rechnung nicht von Interesse ist. Es ist der gleiche Ausdruck (3) wie im Falle der punktwisen Verteilung. Nach dem Spiegelungsprinzip erhält man das Potential für die Strömung in einer Flüssigkeit der Tiefe h in Form einer unendlichen Reihe

$$(9) \quad \varphi = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-a}^{+a} \frac{\sigma(\xi)}{R_n} d\xi$$

mit

$$R_n = [(X-a)^2 + Y^2 + (Z-2nh)^2]^{\frac{1}{2}}$$

Die Differentiation nach X ergibt die Zusatzgeschwindigkeit in x -Richtung:

$$(10) \quad \Delta u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-a}^{+a} \frac{(X-\xi)\sigma(\xi)}{R_n^3} d\xi$$

In (9) werden die Substitutionen

$$x = \frac{X}{a}; \quad y = \frac{Y}{b}; \quad z = \frac{Z}{b}; \quad \xi = \frac{\xi}{a}$$

und

$$(11) \quad \sigma(\xi) = \frac{\sigma'(\xi)}{\alpha u_0 \pi \frac{b^2}{a}}$$

eingeführt.

Der Ausdruck (11) für die Quell-Senkenverteilung ist wie folgt zu erklären. Nach Munk [10] und Weinig [11] ist die Dipolverteilung $\eta(\Xi)$ den Spantflächen des entsprechenden Rotationskörpers angenähert proportional; demnach ist η_{\max} der Hauptspantfläche proportional; es gilt $\eta_{\max} \approx \alpha u_0 \pi b^2$. Hierbei ist b die halbe Breite des Rotationskörpers und α ein Korrekturfaktor, der bewirkt, daß die Breite des Rotationskörpers in unbegrenzter Flüssigkeit gleich $2b$ wird; u_0 ist die Geschwindigkeit der Parallelströmung. Zwischen der Quell-Senken- und der Dipolverteilung besteht die Beziehung

$$(12) \quad \sigma(\Xi) = - \frac{d\eta(\Xi)}{d\Xi}$$

Mit $\eta(\xi) = \eta(\Xi)/\eta_{\max}$ ergibt sich aus (12) der Ausdruck (11) für $\sigma(\xi)$,

Mit Hilfe der genannten Substitutionen und der Formel (11) erhält man für das Verhältnis der Zusatzgeschwindigkeit zu u_0 die Gleichung

$$(10b) \quad \frac{\Delta u_x}{u_0} = - \frac{\alpha}{4} \frac{1}{(a/b)^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-1}^{+1} \frac{(x-\xi)\sigma(\xi)}{\left[(x-\xi)^2 + \left(\frac{y}{a/b}\right)^2 + \left(\frac{z-2nh/b}{a/b}\right)^2 \right]^{3/2}} d\xi$$

Zur Programmierung für die IBM 650 wird (10a) analog Gl.(7a) in zwei unendliche Reihen aufgeteilt:

$$(10b) \quad \frac{\Delta u_x}{u_0} = - \frac{\alpha}{4} \frac{1}{(a/b)^2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-1}^{+1} \frac{(x-\xi)\sigma(\xi) d\xi}{\left[(x-\xi)^2 + \left(\frac{y}{a/b}\right)^2 + \left(\frac{z-2nh/b}{a/b}\right)^2 \right]^{3/2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-1}^{+1} \frac{(x-\xi)\sigma(\xi) d\xi}{\left[(x-\xi)^2 + \left(\frac{y}{a/b}\right)^2 + \left(\frac{z+2nh/b}{a/b}\right)^2 \right]^{3/2}} \right\}$$

4) Die Aufstellung der Beispiele.

Für bestimmte Singularitätenverteilungen soll nun die Zusatzgeschwindigkeit in einigen Punkten berechnet werden.

Die gewählten Beispiele sind:

- a) Die Anordnung einer Quelle und einer Senke gleicher Ergebigkeit auf der x -Achse in $\pm a$. Hierdurch wird in einer Strömung parallel zur x -Achse in unbegrenzter Flüssigkeit ein Ovoid erzeugt,

- b) die Quell-Senkenverteilung $\sigma(\xi) = 2\xi$, durch die ein Rotationsellipsoid erzeugt wird,
- c) die Quell-Senkenverteilung $\sigma(\xi) = 4\xi(1 - \xi^2)$; die Dipolverteilung in normierter Form ist $\eta = (1 - \xi^2)^2$
- d) die Quell-Senkenverteilung $\sigma(\xi) = 3\xi - 2\xi^3$
 (Dipolverteilung in normierter Form $\eta = 1 - 1,5\xi^2 + 0,5\xi^4$)

In Abb. 1 sind die Spantflächen der Körper gezeichnet, die in unbegrenzter Flüssigkeit durch die in a) bis d) angegebenen Verteilungen in Zusammenwirkung mit einer Translationsströmung entstehen. Gerechnet wird mit der normierten Form der Verteilung $\sigma(\xi)$, die sich über das Intervall $(-1; +1)$ erstreckt.

Die Körperkonturen in unbegrenzter Flüssigkeit sind nach der Methode von Amtsberg [2] aus der Gleichung der Stromlinien ψ ermittelt, indem $\psi = 0$ gesetzt ist. Da es sich um Rotationskörper handelt, genügt es, die Kontur in der xz -Ebene zu ermitteln. Wegen der Symmetrie der Verteilung können wir uns weiterhin auf das Intervall $0 \leq x \leq a$ beschränken, da auch für die Körperform $z(-x) = z(+x)$ ist. Für die Stromfunktion in normierter, dimensionsloser Form gilt die folgende Gleichung:

$$(13) \quad \psi = 1 - \frac{\alpha}{2} \frac{1}{(a/b)^2} \int_{-1}^{+1} \frac{\eta(\xi)}{[(x - \xi)^2 + (\frac{z}{a/b})^2]^{3/2}} d\xi$$

Zuerst ist aus Gl. (13) für $\psi = 0$ der Korrekturfaktor α berechnet, indem $x = 0$ und $z = 1$ gesetzt sind. Damit wird die halbe Breite des Körpers gleich b , bzw. in normierter Form gleich Eins.

Wie bereits erwähnt, werden die von der Oberfläche bis zur Tiefe $z = h$ sich erstreckenden Halbkörper durch Spiegelung an der Oberfläche zu Vollkörpern zwischen den Wänden mit dem Abstand $2h$ ergänzt. Es wird zunächst so getan, als ob durch den Flachwassereinfluß gar keine Deformierungen auftreten. Die Geschwindigkeit wird für einige Konturpunkte

der nicht deformierten Körper aus Gl. (7a), bzw. Gl. (10b) berechnet, und zwar werden folgende Punkte erfaßt:

$$P_1(X = 0; Y = 0; Z = b)$$

$$P_2(X = 0; Y = b; Z = 0)$$

$$P_3(X = 0,5a; Y = 0; Z = Z(X = 0,5a))$$

$$P_4(X = 0,5a; Y = Y(X = 0,5a); Z = 0)$$

P_1 und P_2 sind die Punkte am Hauptspant; P_1 ist der tiefste Punkt des Körpers, er liegt auf der z-Achse; P_2 liegt in der freien Oberfläche auf der y-Achse und gibt die halbe Breite des Körpers an. P_3 und P_4 sind die entsprechenden Punkte bei $X = \pm \frac{a}{2}$. Wegen der Hauptspantsymmetrie sind die Werte der Geschwindigkeit für positive und negative X-Werte gleich. In normierter Form, entsprechend den Gleichungen (7a) und (10b), haben die Punkte folgende Ordinaten:

$$P_1(x = 0; y = 0; z = 1)$$

$$P_2(x = 0; y = 1; z = 0)$$

$$P_3(x = 0,5; y = 0; z = z(x = 0,5))$$

$$P_4(x = 0,5; y = y(x = 0,5); z = 0)$$

Die Verhältnisse a/b und h/b werden für sämtliche zugrundegelegten Verteilungen variiert; es wird gesetzt $a/b = 6, 8, 10$ und 12 . Für das Verhältnis der Wassertiefe zum Tiefgang des Körpers wird mit $h/b = 2$ begonnen; als obere Grenze ist $h/b = 10$ gewählt, weil man nach D.W. Taylor [12] von diesem Verhältnis an die Wassertiefe als unbegrenzt ansehen kann. Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit bestätigen diese Feststellung.

Berechnet wurde stets die x-Komponente der Zusatzgeschwindigkeit Δu_x , die in den Punkten am Hauptspant, also für $x = 0$ mit der Tangentialgeschwindigkeit übereinstimmt. Für das Beispiel a) wird die Gleichung (7a) direkt benutzt.

Für die Beispiele b), c) und d) ist die Zusatzgeschwindigkeit Δu_x aus Gl. (10b) zu berechnen. In diese Formel, die für die verschiedenen kontinuierlichen axialen Verteilungen allgemein gilt, werden die speziellen Verteilungen eingesetzt, die bei den einzelnen Beispielen vorgesehen sind. Da dieselben die Form von Polynomen haben, ist eine geschlossene Integration der Integrale möglich.

Wegen der langsamen Konvergenz der zu berechnenden unendlichen Reihen ist die Zusatzgeschwindigkeit in den Punkten P_3 und P_4 nur für die Beispiele a) und b), d.h. für das Ovoid und das Rotationsellipsoid berechnet worden. Man ist jedoch zu der Annahme berechtigt, daß die Tendenz in den Fällen c) und d) ähnlich wie beim Rotationsellipsoid sein wird, da es sich bei diesen drei Beispielen stets um "schlanke" Körper handelt, deren Schärfegrade sich nicht stark voneinander unterscheiden.

5) Die Ergebnisse der Rechnung.

Die Tabellen 1 und 2 bringen die Ergebnisse der Rechnung. Die Abb. 2 und 3 zeigen das Verhalten der Zusatzgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Wassertiefe und dem Verhältnis der Körperabmessungen am Beispiel des Rotationsellipsoids. Man sieht hieraus, daß die Erhöhung der Zusatzgeschwindigkeit in allen Fällen für $h/b = 2$ am stärksten ist, mit wachsendem h/b sehr rasch abnimmt und die Werte für $h/b = 10$ sich nur noch wenig von den entsprechenden Werten in unbegrenzter Flüssigkeit unterscheiden. Diese Unterschiede sind umso geringer, je kleiner das Verhältnis a/b angenommen ist.

An Hand der vorliegenden Ergebnisse ist nun festzustellen, ob bereits für die Verhältnisse $h/b = 10$ der Flachwassereinfluß so gering ist, daß er vernachlässigt werden kann.

Die Ermittlung der Zusatzgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Wassertiefe ist, wie schon erwähnt, nicht Selbstzweck, sondern soll dazu dienen, den Einfluß des Flachwassers auf den Reibungswiderstand festzustellen. Maßgeblich hierfür ist nicht die

Zusatzgeschwindigkeit allein sondern vielmehr die Gesamtgeschwindigkeit. Deshalb ist es auch von sekundärem Interesse, zu wissen, um wieviel Prozent die Zusatzgeschwindigkeit bei $h/b = 10$ von der Zusatzgeschwindigkeit für $h \rightarrow \infty$ abweicht, dagegen von primärem Interesse, zu erfahren, in welchem Maße sich die Gesamtgeschwindigkeiten bei $h/b = 10$ und $h/b \rightarrow \infty$ voneinander unterscheiden. Für die Gesamtgeschwindigkeit u gilt:

$$(14) \quad u = u_0 (1 + \Delta u)$$

bzw. für die Komponente in x-Richtung:

$$(14a) \quad u_x = u_0 (1 + \Delta u_x)$$

Man erhält also die Größe $\frac{u_x}{u_0}$, indem man zu den in den Tabellen 1 und 2 angegebenen Werten jeweils eine Eins addiert. Ein Vergleich der Werte $\frac{u_x}{u_0}$ für $h/b = 10$ und $h/b \rightarrow \infty$ zeigt, daß die Abweichung zwischen diesen beiden Werten in sämtlichen Fällen unter 0,5% liegt, vielfach kaum 0,1% beträgt.

Die bereits von D.W. Taylor [12] getroffene Feststellung, daß für die Verhältnisse $h/b = 10$ kein Flachwassereinfluß mehr vorliegt, wird somit durch die vorliegende Untersuchung bestätigt.

6) Der Einfluß der Deformierung der Körper auf die Ergebnisse.

Es ist die Frage zu erörtern, wie weit die ermittelten Werte der Geschwindigkeit zuverlässig sind, d.h. die in den Punkten P_1 , P_2 , P_3 und P_4 berechneten Werte wirklich die Geschwindigkeit in den Körperpunkten am Hauptspant und bei $x = \pm 0,5a$ darstellen. Wie zu Beginn erwähnt, ist von der Annahme ausgegangen worden, daß die auf verschiedenen Wassertiefen durch bestimmte Verteilungen erzeugten Körper gleich den Körpern sind, die durch diese Verteilungen in unbegrenzter Flüssigkeit erzeugt werden, was tatsächlich nicht der Fall ist, da durch den Einfluß des Flachwassers diese Körper eine Deformierung erfahren, die umso stärker sein wird, je geringer die Wassertiefe ist. Auch wird diese Deformierung nicht über jeweils einen Querschnitt konstant, sondern in den dem Boden am nächsten gelegenen Punkten am stärksten sein und zur Quer-

schnittsmittle hin schwächer werden, so daß auch die in unbegrenzter Flüssigkeit vorhandene Rotationssymmetrie der Körper im Flachwasser nicht mehr erhalten bleibt.

Wenn derartige Verhältnisse vorliegen, so wird man mit Recht fragen, warum dann nicht lieber von den Körpern selbst ausgegangen wurde anstatt von bestimmten Verteilungen, ob es überhaupt einen Sinn hat, eine derartige Näherung zu gebrauchen.

Die Antwort auf diese Frage soll nun erfolgen.

Wollte man von den Körpern selbst ausgehen, so müßte man die diesen Körpern entsprechenden Quell-Senkenverteilungen auf der Oberfläche der Körper bestimmen, was schon in unbegrenzter Flüssigkeit sowohl hinsichtlich der mathematischen Darstellung als auch der numerischen Auswertung bedeutend komplizierter ist als die Bestimmung der Körper aus vorgegebenen axialen Verteilungen. Bei Berücksichtigung des Flachwassereinflusses würden sich die Schwierigkeiten bei der Oberflächenbelegung bezüglich der mathematischen Formulierung und des zu erwartenden Rechenaufwandes bedeutend erhöhen. Deshalb ist der Methode der axialen Verteilungen, bei welcher die Körper nicht primär vorhanden sind, der Vorzug gegeben. Natürlich ist das Argument der leichteren und schnelleren Behandlungsweise allein keine stichhaltige Begründung für den Gebrauch einer Methode, wenn die damit erhaltenen Ergebnisse unbrauchbar sind. Deshalb soll im Folgenden gezeigt werden, daß die hier gebrauchte Näherung erlaubt ist.

Der Beweis kann nicht direkt geführt werden, abgesehen von dem Verhältnis $h/b = 10$, für das im vorhergehenden Abschnitt bereits festgestellt worden ist, daß der Flachwassereinfluß so gering ist, daß er vernachlässigt werden kann. Damit ist ohne weiteres klar, daß in diesem Fall auch die Abweichungen des tatsächlichen Körpers von dem Ersatzkörper unwesentlich sein werden und nicht berücksichtigt zu werden brauchen. Etwas anderes ist es mit den Verhältnissen $h/b < 10$. Hier sind wir auf Analogieschlüsse aus ähnlich gelagerten Problemen angewiesen. Wenden wir uns deshalb dem ebenen Problem eines Dipols zu, durch welchen bekanntlich in einer Translations-

strömung in unbegrenzter Flüssigkeit ein Kreis erzeugt wird. In [13] ist derjenige Körper berechnet worden, der entsteht, wenn der gleiche Dipol sich in einer Translationsströmung zwischen zwei Wänden befindet, die voneinander den Abstand $2h$ haben. Tabelle 3 zeigt die Ergebnisse der Rechnung. Daraus ist ersichtlich, daß zwar die Deformierung gerade bei geringen Wassertiefen beträchtlich ist (für $h/b = 2$ fast 10%), daß aber die Unterschiede in der Deformierung über den Querschnitt tatsächlich sehr gering sind; für die extremsten Punkte bei $x = 0$ und $x = \frac{L}{2B}$ beträgt der Unterschied selbst für $h/b = 2$ nur rund 1%. Man kann also sagen, daß der Kreischarakter des Körpers auch bei sehr geringen Wassertiefen praktisch erhalten bleibt. Da bekanntlich beim ebenen Problem die Effekte bedeutend stärker sind als im Falle der Rotationssymmetrie oder des allgemeinen dreidimensionalen Körpers, ergibt sich für die vorliegende Untersuchung der wichtige Schluß, daß die Rotationssymmetrie der in unbegrenzter Flüssigkeit erzeugten Körper nicht durch den Einfluß des Flachwassers verlorenggeht, sondern auch auf geringen Wassertiefen, wie sie durch das Verhältnis $h/b = 2$ gegeben sind, erhalten bleibt.

Es ist nun noch zu untersuchen, ob trotz der festgestellten Deformierungen die Geschwindigkeit in den Punkten des Ersatzkörpers mit der Geschwindigkeit in den entsprechenden Punkten des tatsächlich vorhandenen Körpers übereinstimmt. Hierfür wenden wir uns zwecks besserer Vergleichsmöglichkeiten dem Beispiel einer Quelle und einer Senke auf der x -Achse in den Punkten $x = \pm a$ zu, durch welche im ebenen Fall in einer Translationsströmung in unbegrenzter Flüssigkeit ein Oval, das sogenannte Rankinesche Oval erzeugt wird. In [13] sind für $x = 0$ und $x = 0,5a$ die y -Ordinaten der Körperkontur infolge des Flachwassereinflusses für verschiedene Verhältnisse h/b berechnet (mit h ist die Wassertiefe, mit b die halbe Breite des Ovals in unbegrenzter Flüssigkeit bezeichnet) und die Zusatzgeschwindigkeit in diesen Punkten und in den entsprechenden Punkten des in unbegrenzter Flüssigkeit erzeugten Ersatzkörpers. Aus den Ergebnissen in Tab. 4 ist ersichtlich, daß die Geschwindigkeit in diesen Punkten die gleiche ist, obwohl die berech-

neten Deformierungen stärker sind als im Falle des Dipols. Dies Ergebnis berechtigt zu der Schlußfolgerung, daß auch im Falle der Rotationskörper, bei welchen geringere Deformierungen als beim ebenen Problem zu erwarten sind, die für die Ersatzkörper berechneten Zusatzgeschwindigkeiten exakt mit den Zusatzgeschwindigkeiten in den entsprechenden Punkten der tatsächlich vorhandenen Körper übereinstimmen. Damit erscheint es gerechtfertigt, zur Ermittlung der Zusatzgeschwindigkeit an Stelle der wirklichen Körper die in unbegrenzter Flüssigkeit erzeugten Ersatzkörper zu benutzen.

Zur weiteren Untermauerung dieser Aussage sind noch Untersuchungen über das Ovoid im Rohr nach Lamb [4] und das Rotationsellipsoid in Wandnähe nach Eisenberg [14] angestellt worden. Die Ergebnisse, die ebenfalls bestätigen, daß die gemachte Näherung berechtigt ist, sind in [13] zu finden.

7) Der Reibungswiderstand von Rotationskörpern in unbegrenzter Flüssigkeit.

Bekanntlich wird der Reibungswiderstand dargestellt durch die Formel

$$(15) \quad W_r = \zeta_{rp} \frac{\rho}{2} u_0^2 \Omega$$

Mit ρ ist die Dichte der Flüssigkeit bezeichnet; sie beträgt für Süßwasser $\rho = 102 \frac{\text{kg s}^2}{\text{m}^4}$; u_0 ist die Fahrtgeschwindigkeit des Schiffes, Ω seine benetzte Oberfläche und ζ_{rp} der Reibungsbeiwert der Platte nach Schönherr. Damit ist es klar, daß der Reibungswiderstand von Schiffen und anderen Körpern, z.B. Rotationskörpern, nach der Gleichung (15) zu niedrig ermittelt wird, da sich dieser Ausdruck auf die Platte bezieht und die Abhängigkeit des Reibungswiderstandes von der Körperform nicht berücksichtigt ist. Für einen beliebigen Körper müßte die exakte Formel für den Reibungswiderstand in unbegrenzter Flüssigkeit lauten:

$$(15a) \quad W_r = \zeta_{r\infty} \frac{\rho}{2} u_0^2 \Omega,$$

wobei hier für $\zeta_{r\infty}$ der Reibungsbeiwert des Körpers zu setzen wäre, der sich zusammensetzt aus dem Reibungsbeiwert der

Platte ζ_{rp} und einem Zuwachs $\Delta \zeta_{r\infty}$, der durch die Körperform bedingt ist:

$$(16) \quad \zeta_{r\infty} = \zeta_{rp} + \Delta \zeta_{r\infty}$$

$$(16a) \quad \zeta_{r\infty} = \zeta_{rp} \left(1 + \frac{\Delta \zeta_{r\infty}}{\zeta_{rp}} \right)$$

Es ist die Größe des Zuwachses $\Delta \zeta_{r\infty}$ zu ermitteln. Nach Lamb [4], Lock [5] und Weinblum [6] kann man den Reibungswiderstand proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit annehmen. Von diesem Gedanken ausgehend ist die infolge der Körperform am Körper auftretende Zusatzgeschwindigkeit Δu_o zu bestimmen und in Gl. (15) einzusetzen:

$$W_r = \zeta_{rp} \frac{\rho}{2} u_o^2 \left(1 + \frac{\Delta u_o}{u_o} \right)^2 \Omega$$

Ein Vergleich dieses Ausdrucks mit (15a) zeigt, daß für den Reibungsbeiwert des Körpers in unbegrenzter Flüssigkeit gilt:

$$(17) \quad \zeta_{r\infty} = \zeta_{rp} \left(1 + \frac{\Delta u_o}{u_o} \right)^2$$

oder

$$(17a) \quad \frac{\Delta \zeta_{r\infty}}{\zeta_{rp}} = 2 \frac{\Delta u_o}{u_o} + \left(\frac{\Delta u_o}{u_o} \right)^2$$

Bekanntlich ist die Geschwindigkeitsverteilung über den Körper nicht konstant; maßgeblich ist der Mittelwert der Tangentialgeschwindigkeit u_t , der sich ergibt aus der Integration der Geschwindigkeit über die Körperoberfläche, dividiert durch diese Fläche; für die Rotationskörper gilt die einfache Beziehung

$$(18) \quad \frac{u_{tm}}{u_o} = \frac{\int_{-L/2}^{+L/2} r \frac{u_t}{u_o} dx}{\int_{-L/2}^{+L/2} r dx}$$

wobei mit r der Radius des jeweiligen Kreisquerschnittes an der Stelle x bezeichnet ist.

Es gilt somit, aus der Geschwindigkeitsverteilung auf der Körperoberfläche den Mittelwert $\frac{u_{tm}}{u_o}$ zu bestimmen.

Für die Zusatzgeschwindigkeit $\frac{\Delta u_{\infty}}{u_0}$ in Gl. (17) und (17a) ist dann

$$\frac{\Delta u_{\infty}}{u_0} = \frac{u_{tm}}{u_0} - 1$$

Die Mittelwerte der Geschwindigkeit in unbegrenzter Flüssigkeit sind für die Beispiele a) bis d) berechnet; bei den Beispielen c) und d) ist allerdings nur das Verhältnis $a/b = 8$ berücksichtigt. In Tab. 5 sind diese Mittelwerte und ihre prozentualen Abweichungen von der Geschwindigkeit am Hauptspant in Abhängigkeit von dem Verhältnis a/b und dem Schärfegrad φ angegeben. Man sieht hieraus, daß der Mittelwert umso näher am Hauptspant auftritt, je schärfer der Körper ist, - beim Beispiel c) $\eta = (1 - \xi^2)^2$ mit dem Schärfegrad $\varphi = 0,533$ liegt der Mittelwert bei $x = 0,474$; - man erkennt aber auch, daß bei den schlanken Körpern (Beispiele b), c) und d)) die Abweichung des Mittelwertes von dem Hauptspantwert umso größer ist, je schärfer der Körper, d.h. je kleiner der Schärfegrad φ ist. Beim Rotationsellipsoid ($\varphi = 2/3$) mit dem Verhältnis $a/b = 8$ beträgt die Differenz 0,7%, beim Beispiel c) $\eta = (1 - \xi^2)^2$ mit $\varphi = 0,533$ ist der Mittelwert der Geschwindigkeit aber um 2,2% kleiner als der Wert am Hauptspant. Die stärksten Unterschiede treten allerdings beim Ovoid auf, was zu erwarten war, da bei diesem im Gegensatz zu den "schlanken" Körpern der Beispiele b) bis d) die Maximalgeschwindigkeit nicht am Hauptspant herrscht sondern ziemlich zu den Ovoidenden hin, etwa bei $x = \pm 0,95a$.

Durch das negative Vorzeichen bei der Angabe der prozentualen Abweichung ist ausgedrückt, daß beim Ovoid die mittlere Geschwindigkeit um die angegebene Prozentzahl größer ist als die Geschwindigkeit am Hauptspant.

Auf Grund der Mittelwerte der Geschwindigkeit ist der Zuwachs $\Delta \zeta_{r,\infty}$ des Reibungsbeiwertes berechnet worden. Eine Kurve für die Erhöhung des Reibungswiderstandes von Rotationskörpern nach Rechnungen von Scholz [15] befindet sich in der bereits zitierten Veröffentlichung von Graff [3]. Ein Vergleich der Ergebnisse der vorliegenden Arbeit mit der Kurve von Scholz (Abb.4) zeigt, daß die von Scholz ermittelten Erhöhungen bedeutend

größer sind. Die Erklärung hierfür findet sich in der Abhandlung von Scholz [15], in welcher er erklärt, daß er die Erhöhung des Widerstandes proportional der dreifachen Zusatzgeschwindigkeit setzt, während in der vorliegenden Arbeit auf Grund der Annahme, daß der Reibungswiderstand proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit ist, die Erhöhung des Reibungswiderstandes ungefähr gleich der zweifachen Zusatzgeschwindigkeit ist. (Das bedeutet, daß bei Scholz auch Zähigkeitseinflüsse berücksichtigt sind). Rechnet man die Werte aus der Kurve von Scholz entsprechend um, so sieht man, daß die Übereinstimmung mit unseren Ergebnissen sehr gut ist (Tab. 6).

Ein weiterer Vergleich ist durchgeführt mit zwei empirischen Formeln von Hoerner [16; 17], durch welche die Erhöhung des Reibungswiderstandes in Abhängigkeit von dem "Dickeverhältnis" b/l des Körpers dargestellt ist; die Formeln lauten:

$$(19a) \quad \frac{\Delta \zeta_{r\infty}}{\zeta_{rp}} = k_1 \frac{b}{l}$$

$$(19b) \quad \frac{\Delta \zeta_{r\infty}}{\zeta_{rp}} = 1,5 \left(\frac{b}{l} \right)^{3/2}$$

mit $k_1 \approx 0,5$ für die herkömmlichen Stromlinienkörper.

Das Dickeverhältnis b/l ist das Verhältnis einer charakteristischen Breite des Körpers zu seiner Länge; für Rotationskörper ist die größte Breite gleich der charakteristischen Breite.

In Tab. 7 sind die nach diesen Formeln ermittelten Werte für die Erhöhung des Reibungswiderstandes den Ergebnissen der vorliegenden Arbeit, die nach dem Spiegelungsprinzip ermittelt worden sind, gegenübergestellt. Man erkennt hieraus, daß die nach den Formeln von Hoerner ermittelten Zunahmen des Reibungswiderstandes außer beim Ovoid zu hoch liegen; bei letzterem sind die Ergebnisse für $a/b = 6, 10$ und 12 nach beiden Formeln von Hoerner zu niedrig und für $a/b = 6$ nach Gl. (19a) zu niedrig, nach Gl. (19b) aber zu hoch.

8) Der Reibungswiderstand von Rotationskörpern im Flachwasser.

Nach den Ausführungen des vorhergehenden Abschnittes über den Reibungswiderstand von Rotationskörpern in unbegrenzter Flüssigkeit ist es möglich, analog auf Grund der Ergebnisse für die Zusatzgeschwindigkeit auf verschiedenen Wassertiefen die Zunahme des Reibungswiderstandes im Flachwasser zu schätzen.

Der Reibungswiderstand wird wieder, wie im Falle unbegrenzter Flüssigkeit, proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit angenommen (nach Lamb [4], Lock [5] und Weinblum [6]), d.h. der Widerstand auf beschränkter Wassertiefe ist

$$(20) \quad W_{rh} = \zeta_{rp} \frac{\rho}{2} u_o^2 \left(1 + \frac{\Delta u_h}{u_o} \right)^2 \Omega$$

wobei in der Zusatzgeschwindigkeit Δu_h nun sowohl der Anteil auf Grund der Körperform als auch der Anteil infolge beschränkter Wassertiefe enthalten ist.

Formt man Gl. (20) um analog der Gleichung für den Reibungswiderstand in unbegrenzter Flüssigkeit, indem man die Erhöhung des Reibungswiderstandes durch die Vergrößerung des Reibungsbeiwertes darstellt, so wird

$$(20a) \quad W_{rh} = \zeta_{rh} \frac{\rho}{2} u_o^2 \Omega$$

wobei mit ζ_{rh} der Reibungsbeiwert für die Wassertiefe h bezeichnet ist; er setzt sich wie folgt zusammen:

$$\zeta_{rh} = \zeta_{rp} + \Delta \zeta_{r\infty} + \Delta \zeta_{rh} = \zeta_r + \Delta \zeta_{rh} = \zeta_{rp} + \Delta \zeta_r$$

Mit ζ_{rp} ist der Reibungsbeiwert der Platte in unbegrenzter Flüssigkeit bezeichnet, mit $\Delta \zeta_{r\infty}$ der Anteil auf Grund der Körperform und mit $\Delta \zeta_{rh}$ der Anteil infolge der beschränkten Wassertiefe, während in ζ_r die Größen ζ_{rp} und $\Delta \zeta_{r\infty}$ zusammengefaßt sind und in $\Delta \zeta_r$ die Anteile $\Delta \zeta_{r\infty}$ und $\Delta \zeta_{rh}$. In Abhängigkeit von der Zusatzgeschwindigkeit wird demnach

$$(21) \quad \zeta_{rh} = \zeta_{rp} \left(1 + 2 \frac{\Delta u_h}{u_o} + \left(\frac{\Delta u_h}{u_o} \right)^2 \right)$$

oder wenn nur die Vergrößerung infolge des Flachwassereinflusses gegenüber dem Wert in unbegrenzter Flüssigkeit berücksichtigt werden soll:

$$(21a) \quad \zeta_{rh} = \zeta_r \left(1 + 2 \cdot \frac{\Delta u_h - \Delta u}{u_\infty} + \left(\frac{\Delta u_h - \Delta u}{u_\infty} \right)^2 \right)$$

wobei $u_\infty = u_o + \Delta u$ die Geschwindigkeit am Körper in unbegrenzter Flüssigkeit ist.

Mit Hilfe der beiden Gleichungen (21) und (21a) wird die Erhöhung des Reibungswiderstandes durch die Vergrößerung der Geschwindigkeit ausgedrückt.

Zur Ermittlung des Reibungswiderstandes sind zuerst die Mittelwerte der Geschwindigkeit zu bestimmen. Hierfür wäre es notwendig, den gesamten Geschwindigkeitsverlauf um die einzelnen Körper zu kennen; das ist aber nicht der Fall, vielmehr sind für die Beispiele a) und b) (Ovoid und Rotationsellipsoid) nur die Zusatzgeschwindigkeiten in den Punkten bei $x = 0$ und $x = 0,5a$ und für die Beispiele c) und d) sogar nur die Zusatzgeschwindigkeiten am Hauptspant, d.h. für $x = 0$, berechnet worden. Auf Grund eingehender Überlegungen muß man also die Mittelwerte der Geschwindigkeit für die einzelnen Körper auf verschiedenen Wassertiefen schätzen.

Aus dem Vorhergehenden ist es klar, daß zur Bestimmung des Reibungswiderstandes nicht die Geschwindigkeitswerte am Hauptspant zugrundegelegt werden dürfen, da diese in den Beispielen b) bis d) die Maximalgeschwindigkeit darstellen und somit in diesen Fällen zu große Werte des Reibungswiderstandes ergeben würden, für das Ovoid aber einen zu geringen Reibungswiderstand, weil bei letzterem das Maximum der Geschwindigkeit etwa bei $x = 0,95a$ liegt und der Mittelwert der Geschwindigkeit höher ist als die Geschwindigkeit am Hauptspant.

Die Hauptaufgabe besteht folglich darin, aus den vorliegenden Ergebnissen die Mittelwerte der Geschwindigkeit zu schätzen. Wir betrachten zunächst das Ovoid und dann die anderen Körper.

a) Der Mittelwert der Geschwindigkeit für das Ovoid und die

 Erhöhung des Reibungswiderstandes im Flachwasser

Für unbegrenzte Flüssigkeit ist der Mittelwert der Geschwindigkeit berechnet worden (Tab.5). Für das Ovoid im Rohr nach Lamb sind in [13] die Geschwindigkeiten in einigen Punkten der Ovoidoberfläche ermittelt worden. Die Ergebnisse zeigen, daß mit wachsendem h/b der Unterschied zwischen der Geschwindigkeit am Hauptspant und der Maximalgeschwindigkeit erheblich größer wird und den größten Wert in unbegrenzter Flüssigkeit erreicht. Daraus ergibt sich, daß sich auch der Mittelwert der Geschwindigkeit in unbegrenzter Flüssigkeit am stärksten von dem Wert am Hauptspant unterscheidet.

Aus den Berechnungen für unbegrenzte Flüssigkeit geht ferner hervor, daß beispielsweise für $a/b = 6$ die Abweichung des Mittelwertes vom Hauptspantwert etwa $1/3$ der Abweichung der Maximalgeschwindigkeit beträgt. Nimmt man an, daß dies Verhältnis auch für die verschiedenen Rohrquerschnitte gilt, so kann man daraus die Größe der Mittelwerte der Geschwindigkeit am Ovoid im Rohr, ausgehend von der Hauptspantgeschwindigkeit, für die verschiedenen Verhältnisse h/b schätzen. Damit erhält man für die Mittelwerte der Geschwindigkeit am Ovoid im Flachwasser eine untere und eine obere Schranke:

$$\left(\frac{u_m - u_{\text{H}}}{u_{\text{H}}} \right)_{h/b_{\text{Rohr}}} < \left(\frac{u_m - u_{\text{H}}}{u_{\text{H}}} \right)_{h/b_{\text{Flachw.}}} < \left(\frac{u_m - u_{\text{H}}}{u_{\text{H}}} \right)_{\infty}$$

d.h. die prozentuale Abweichung des Mittelwertes der Geschwindigkeit von dem Wert am Hauptspant muß am Ovoid im Flachwasser zwar größer sein als bei dem entsprechenden h/b -Verhältnis im Rohr, aber auf jeden Fall kleiner als in unbegrenzter Flüssigkeit. Mit wachsendem h/b wird sich das Verhältnis der oberen Schranke nähern, für sehr kleine h/b -Werte der unteren Schranke. Von diesen Überlegungen ausgehend, sind die Größen $\Delta u_{mh}/u_o = (u_m - u_{mh})/u_o$ für den Fall des Ovoids im Flachwasser für die verschiedenen Verhältnisse a/b in Abhängigkeit von h/b geschätzt worden, wobei der Wert für $h/b = 10$ gleich dem Wert in unbegrenzter Flüssigkeit angesetzt wurde. Die Ermittlung der Widerstandserhöhung

erfolgte iterativ. Die Abweichungen $\Delta u_{mh}/u_o$ wurden als Funktionen von h/b mit a/b als Parameter gezeichnet und die Kurven aufeinander abgestimmt. Aus den Gleichungen (21) und (21a) wurden dann die Erhöhungen des Reibungswiderstandes im Flachwasser ermittelt:

- a) die Erhöhung gegenüber dem Plattenwert ζ_{rp} auf Grund der Körperform und des Flachwassereinflusses
- b) die Erhöhung gegenüber dem Reibungsbeiwert ζ_r des Körpers in unbegrenzter Flüssigkeit infolge des Flachwassereinflusses.

Für den Fall a) erhalten wir aus Gl. (21)

$$\frac{\Delta \zeta_r}{\zeta_{rp}} = \frac{\zeta_{rh} - \zeta_{rp}}{\zeta_{rp}} = \frac{2 \Delta u_{mh}}{u_o} + \left(\frac{\Delta u_{mh}}{u_o} \right)^2$$

oder

$$\frac{\Delta \zeta_r}{\zeta_{rp}} = \left(\frac{u_{mh}}{u_o} \right)^2 - 1$$

Für den Fall b) ergibt sich aus (21a):

$$\frac{\Delta \zeta_{rh}}{\zeta_r} = \frac{\Delta \zeta_{rh} - \zeta_r}{\zeta_r} = \left(1 + \frac{u_{mh} - u_m}{u_m} \right)^2 - 1$$

Für $\frac{u_{mh} - u_m}{u_m}$ können wir schreiben:

$$\frac{u_{mh} - u_m}{u_m} = \frac{u_{mh}}{u_o} : \frac{u_m}{u_o} - 1$$

und für $\frac{u_{mh}}{u_o}$:

$$\frac{u_{mh}}{u_o} = - \frac{\Delta u_{mh}}{u_o} + \frac{u_{mh}}{u_o}$$

Die auf diese Art ermittelten Größen $\frac{\Delta \zeta_r}{\zeta_{rp}}$ und $\frac{\Delta \zeta_{rh}}{\zeta_r}$ werden als Funktionen der Wassertiefe gezeichnet, dann Unregelmäßigkeiten im Kurvenverlauf ausgeglichen und rückwirkend die Größen $\frac{\Delta u_{mh}}{u_o}$ abgeändert. Mit den neuen Werten $\frac{\Delta u_{mh}}{u_o}$ werden dann wieder die Erhöhungen der Reibungsbeiwerte berechnet.

Dieser Ausgleich wird so lange wiederholt, bis sämtliche Kurven einen glatten Verlauf aufweisen. Die endgültigen Kurven $\frac{\Delta u_{mh}}{u_o} = f(h/b; a/b)$ sind als Beispiel in Abb. 5 gezeigt; in Tab. 8 sind die auf diese Art ermittelten Geschwindigkeiten $\frac{u_{mh}}{u_o}$ und die Erhöhungen des Reibungswiderstandes in Abhängigkeit von h/b und dem von Schlichting [18] eingeführten Parameter $\frac{\sqrt{F_{\square}}}{h}$ angegeben (mit F_{\square} ist die Hauptspantfläche bezeichnet). In Abb. 6 ist die Erhöhung des Reibungswiderstandes infolge des Flachwassereinflusses $\frac{\Delta \zeta_{rh}}{\zeta_r}$ in Abhängigkeit von $\sqrt{F_{\square}}/h$ anschaulich dargestellt.

b) Der Mittelwert der Geschwindigkeit für das Rotationsellipsoid und die anderen Körper und die Erhöhung des Reibungsbeiwertes

Auch in diesen Fällen wird angenommen, daß die prozentuale Abweichung des Mittelwertes der Geschwindigkeit von dem Wert am Hauptspant sich für größere Wassertiefen nur ganz geringfügig von der Abweichung in unbegrenzter Flüssigkeit unterscheidet. Aber im Gegensatz zum Ovoid, bei dem sich die prozentuale Abweichung bei Verringerung der Wassertiefe ebenfalls verringerte, ist bei diesen Körpern die umgekehrte Tendenz zu erwarten, nämlich eine Vergrößerung der prozentualen Abweichung bei Verringerung der Wassertiefe. Diese Schlußfolgerung ergibt sich aus dem Beispiel b) des Rotationsellipsoids, für welches die Zusatzgeschwindigkeiten in den Punkten am Hauptspant und bei $x = 0,5a$ berechnet sind. Aus den Ergebnissen sieht man, daß bei Verringerung der Wassertiefe die Unterschiede zwischen den Werten am Hauptspant und bei $x = 0,5a$ sich vergrößern; zwar ist für $h/b = 10$ bis $h/b = 6$ die prozentuale Abweichung ungefähr gleich der in unbegrenzter Flüssigkeit, eher noch etwas geringer, aber dann steigt sie doch an und erreicht in Abhängigkeit von dem Verhältnis a/b für $h/b = 2$ das Zwei- bis Dreifache des prozentualen Unterschiedes der Werte in unbegrenzter Flüssigkeit.

Das Verhalten des Rotationsellipsoids kann als typisch auch für die Körper der Beispiele c) und d) angesehen werden, für welche die entsprechenden Vergleichswerte fehlen. Es wurde also für die Beispiele b) bis d) angenommen, daß die prozentuale Abweichung des Mittelwertes der Geschwindigkeit von dem Wert am Hauptspant für große h/b -Verhältnisse gleich der Abweichung in unbegrenzter Flüssigkeit ist und sich mit abnehmendem h/b vergrößert. Auf gleiche Art wie im Falle des Ovoids sind durch Schätzen und Ausstraken die Werte $\frac{u_m - u_{mh}}{u_0}$ und die Mittelwerte der Geschwindigkeit bestimmt und aus letzteren mit Hilfe der Gleichungen (21) und (21a) die Erhöhungen des Reibungsbeiwertes. Die genannten Werte sind für die Beispiele b) bis d) in den Tabellen 9 bis 11 zusammengestellt, auch wieder, wie im Falle des Ovoids, in Abhängigkeit von den Verhältnissen a/b und h/b und dem Schlichting-schen Parameter $\sqrt{F_{\text{R}}}/h$. Abb. 7 zeigt die Größen $\frac{\Delta \xi_{rh}}{\xi_r} = f(\sqrt{F_{\text{R}}}/h; a/b)$ für das Rotationsellipsoid; auf die Darstellung dieser Größen für die Beispiele c) und d) ist verzichtet worden, da diese Kurven einen ganz ähnlichen Verlauf haben wie im Falle des Rotationsellipsoids.

Diskussion der Ergebnisse.

Ein Blick auf die Tabellen 8 bis 11 zeigt, daß die Ergebnisse für die schlanken Körper (Beispiele b) bis d)) sich für ein bestimmtes a/b und h/b nur wenig voneinander unterscheiden; einen stärkeren Einfluß übt das Verhältnis a/b aus; mit wachsendem a/b verringert sich der Reibungswiderstand. Die Vergrößerung des Reibungswiderstandes gegenüber dem Wert der Platte beträgt für $a/b = 6$ von $h/b = 6$ bis $h/b \rightarrow \infty$ etwa 7%, für $a/b = 12$ nur noch knapp 3% und für $h/b = 2$ bei $a/b = 6$ etwa 10%, bei $a/b = 12$ aber nur 5,3%. Entsprechendes gilt für die Zunahme des Reibungswiderstandes nur auf Grund des Flachwassereinflusses. Damit gelangt man zu der Feststellung, daß für die Erhöhung des Reibungswiderstandes von schlanken Körpern (Schärfegrad $\varphi \leq 0,67$) nur das Verhältnis a/b , - und bei Flachwasserverhältnissen außerdem das Verhältnis h/b - von entscheidender Bedeutung sind.

Beim Ovoid, das einen ausgesprochen dicken Körper darstellt, ist die Erhöhung des Reibungswiderstandes größer als bei den vorher betrachteten schlanken Körpern. Der Zuwachs gegenüber dem Wert für die Platte beträgt für $a/b = 6$ für große h/b -Verhältnisse etwa 9% und für $a/b = 12$ rund 4 bis 5%, für $h/b = 2$ und $a/b = 6$ etwa 13% und für $h/b = 2$ und $a/b = 12$ rund 7%. Damit sind auch im Falle dicker Körper die Verhältnisse a/b und h/b als die für die Erhöhung des Reibungswiderstandes entscheidenden Parameter erkannt.

Es soll nun noch ein Vergleich mit den Ergebnissen anderer Arbeiten erfolgen.

Vergleich mit anderen Arbeiten

Es steht uns eine aus Experimenten ermittelte Kurve von Graff [3] zur Verfügung; allerdings ist ein sofortiger, direkter Vergleich in der vorliegenden Form nicht möglich. Graff hat nämlich die Erhöhung des Reibungswiderstandes nur infolge des Flachwassereinflusses, ohne Berücksichtigung der Widerstandszunahme auf Grund der Körperform, in Beziehung gesetzt zum Widerstand der Platte; d.h. er hat nach unserer Bezeichnungswiese die prozentuale Erhöhung $\frac{\Delta \zeta_{rh}}{\zeta_{rp}}$ als Funktion des Tiefenverhältnisses T/h aufgetragen, welches im Falle der Rotationskörper allerdings mit b/h identisch ist. Da wir aber entweder die Erhöhung des Widerstandes im Flachwasser gegenüber dem Widerstand des betreffenden Körpers in unbegrenzter Flüssigkeit betrachtet haben ($\frac{\Delta \zeta_{rh}}{\zeta_r}$) oder aber die gesamte Widerstandszunahme durch Flachwasser und Körperform gegenüber dem Plattenwert ($\frac{\Delta \zeta_r}{\zeta_{rp}}$), so sind diese Werte erst entsprechend umzurechnen, um sie mit den Ergebnissen von Graff vergleichen zu können. Es gilt folgende Beziehung:

$$(22) \quad \frac{\Delta \zeta_{rh}}{\zeta_{rp}} = \frac{\Delta \zeta_{rh}}{\zeta_r} \cdot \frac{\zeta_{rp} + \Delta \zeta_{r\infty}}{\zeta_{rp}}$$

$$\frac{\Delta \zeta_{rh}}{\zeta_{rp}} = \frac{\Delta \zeta_{rh}}{\zeta_r} \left(1 + \frac{\Delta \zeta_{r\infty}}{\zeta_{rp}} \right)$$

Die Werte $\frac{\Delta \zeta_{rh}}{\zeta_r}$ und $\frac{\Delta \zeta_{r\infty}}{\zeta_{rp}}$ sind für die verschiedenen Körper in Abhängigkeit von a/b und h/b aus den Tab. 8 bis 11 zu entnehmen; dabei ist $\frac{\Delta \zeta_{r\infty}}{\zeta_{rp}} = \frac{\Delta \zeta_r}{\zeta_{rp}} (h \rightarrow \infty)$. Die Werte unterscheiden sich bei konstantem h/b für die verschiedenen a/b -Verhältnisse und die einzelnen Körper nur wenig voneinander. In Abb. 8 sind diese Werte mit der Kurve von Graff verglichen. Man sieht, daß die Werte von Graff höher liegen, obwohl für den Vergleich das Verhältnis $a/b = 6$ gewählt worden ist, für welches sich die größten Erhöhungen $\frac{\Delta \zeta_{rh}}{\zeta_{rp}}$ ergeben. Nun handelt es sich bei den von Graff durchgeführten Versuchen um konkrete Schiffformen, bei denen von Rotationssymmetrie keine Rede sein kann. Daher weiß man nicht, ob man für den Vergleich das Verhältnis L/B oder L/T berücksichtigen soll, da das Verhältnis B/T für die einzelnen Modelle stark von dem Wert 2, der für Rotationskörper gilt, abweicht. Infolge der Unregelmäßigkeit der Schiffformen wird der Widerstand eines Schiffes stets größer sein als der eines Rotationskörpers mit den gleichen Formparametern; bei Berücksichtigung dieser Fakten ist das Ergebnis des Vergleichs mit den Werten von Graff in Abb. 8 recht erfreulich. - Für einen weiteren Vergleich steht eine empirische Formel von Lock [5] zur Verfügung, durch welche die Übergeschwindigkeit in Rohren mit verschiedenen Durchmessern bestimmt wird:

$$(23) \quad \frac{\Delta u_h}{u_0} = \tau \lambda_1 \left(\frac{b}{h} \right)^2 \cdot \frac{l}{h} \cdot Q$$

Es gelten folgende Bedeutungen:

- l ist die halbe Länge des Körpers
- b der größte Körperradius
- h der Halbmesser des Rohres
- τ ein Koeffizient zur Berücksichtigung der Querschnittsform des Rohres
- λ_1 ein Koeffizient zur Berücksichtigung der Körperform. (Lock hat in Fig. 6 seiner Arbeit [5] Kurven für die Größe λ_1 bei verschiedenen Körpern in Abhängigkeit von l/b aufgestellt; für das Ovoid entnimmt man beispielsweise für $a/b = 12$ den Wert $\lambda_1 = 0,97$).

Für den Faktor Q kann nach Lock in erster Näherung $Q = 1$ gesetzt werden, in zweiter Näherung $Q = 1 - \left(\frac{l}{h} \right)^2 q$. Für die

Größe q sind in der bereits erwähnten Fig. 6 von Lock ebenfalls Kurven zu finden. Für unsere Beispiele erhält man daraus $q = 0,2$ für $a/b = 6$ und $q = 0,22$ für $a/b \gtrsim 8$. Nach Lock liegt der Fehler unter 1%, wenn man $(1 + \frac{\Delta u_h}{u_o})$ nach der von ihm aufgestellten Formel (23) mit der ersten Näherung $Q = 1$ berechnet, vorausgesetzt, daß $h/b > 5$ und $l/h < 1$. Für größere Körperlängen ist die zweite Näherung $Q = 1 - (\frac{l}{h})^2 q$ zu benutzen.

Die Prüfung dieser Formel hat leider ergeben, daß sie für $h/b \leq 5$ völlig versagt. Für unsere Beispiele ergaben sich damit für $h/b = 2$ bei Verwendung der ersten Näherung $Q = 1$ Widerstandszunahmen von mehr als 60%, mit der zweiten Näherung von Q hingegen für die gleichen Fälle negative Widerstandsänderungen, die eine Verringerung des Widerstandes bedeuten würden. Deshalb kann der Vergleich sich nur erstrecken auf die Verhältnisse $h/b \gtrsim 6$; dabei findet die erste Näherung $Q = 1$ Anwendung für $l/h < 1$ und die zweite Näherung für $l/h > 1$. Die Ergebnisse der Rechnung nach der Formel von Lock sind für das Ovoid und das Rotationsellipsoid in Tab. 12 angegeben. Aus der Formel geht deutlich hervor, daß nur die Geschwindigkeitserhöhung infolge der Flüssigkeitsbegrenzung ermittelt wird, nicht aber die Erhöhung auf Grund der Körperform, denn für $h \rightarrow \infty$ erhält man $\frac{\Delta u_h}{u_o} = 0$. In der Erhöhung des Reibungswiderstandes ist demnach nicht der Anteil aus der Form des Körpers enthalten und die Tab. 12 zeigt folglich die Werte $\frac{\Delta \xi_{rh}}{\xi_r}$. Der Vergleich mit den entsprechenden Werten in Tab. 8 und 9 zeigt, daß die nach der Formel von Lock berechneten Werte beträchtlich höher liegen. Das muß auch so sein, da die Formel von Lock nicht die Geschwindigkeitserhöhung im Flachwasser sondern im Rohr angibt, bei welchem stärkere Effekte auftreten als nur bei beschränkter Wassertiefe.

Ferner zeigt die Tab. 12, daß die Näherungsformel von Lock nicht nur begrenzt ist auf Verhältnisse $h/b \gtrsim 6$, sondern auch auf kleinere l/h -Werte. Für $a/b = 12$ und $h/b = 6$ gilt im Flachwasser für das Ovoid $l/h = 2,0835$ und für das Rotationsellipsoid $l/h = 2,0059$. Nach der Formel von Lock ergeben sich für diese Parameter zwar noch positive Geschwindigkeits- und Widerstandserhöhungen, die

Werte selbst aber sind so niedrig, daß sie aus dem Rahmen fallen und nicht in die Tendenz der anderen Ergebnisse hineinpassen.

Es soll nun noch ein Vergleich mit den Ergebnissen von Schlichting [18] erfolgen. Nach Schlichting hängt die Erhöhung des Reibungswiderstandes vorwiegend von dem Parameter $\sqrt{F_{\text{R}}}/h$ ab, der für Rotationskörper durch folgende Gleichung mit dem Verhältnis h/b verbunden ist:

$$\frac{\sqrt{F_{\text{R}}}}{h} = \frac{\sqrt{\pi/2}}{h/b}$$

Aus den Tabellen 8 bis 11 ist ersichtlich, daß die Zunahme des Reibungswiderstandes zwar vorwiegend von h/b , in geringem Maße aber auch von a/b abhängt. Die Werte der Widerstandserhöhung für die verschiedenen Körper mit gleichem a/b unterscheiden sich nur unwesentlich voneinander. Für den Vergleich mit Schlichting spielt es demnach keine Rolle, welches Beispiel b) bis d) zugrundegelegt wird. Wir beschränken uns daher auf das Rotationsellipsoid. Die Werte für die Erhöhung des Reibungswiderstandes im Flachwasser gegenüber unbegrenzter Flüssigkeit $\Delta \zeta_{\text{rh}}/\zeta_{\text{r}}$ aus Tab. 9 sind für $a/b = 8$ in Abb. 9 mit der Kurve von Schlichting verglichen. Es genügt, das Verhältnis $a/b = 8$ zu betrachten, da dieses einen guten Mittelwert darstellt. Merkliche Unterschiede in der Widerstandserhöhung treten nur bei $\sqrt{F_{\text{R}}}/h = 0,6267$ d.h. bei $h/b = 2$ auf, also bei derjenigen Wassertiefe, für welche die Ermittlung der Geschwindigkeits- und Widerstandserhöhung ohnehin unsicher ist. Da in der vorliegenden Arbeit $h/b = 2$ als untere Grenze der Wassertiefe gesetzt ist, kann der Vergleich mit Schlichting nur für $\sqrt{F_{\text{R}}}/h \leq 0,6267$ durchgeführt werden. Die Kurve von Schlichting hingegen erstreckt sich bis $\sqrt{F_{\text{R}}}/h = 1,36$, einem Verhältnis, das bei konkreten Schiffsförmern mit sehr geringem Tiefgang und großer Breite durchaus möglich ist, bei Rotationskörpern aber unreal wäre, da bei letzteren $\sqrt{F_{\text{R}}}/h = 1,36$ ein Verhältnis $h/b = 0,922$ bedeuten würde. Aus den beiden Kurven in Abb. 9 ist zu erkennen, daß die Kurve von Schlichting für die größeren $\sqrt{F_{\text{R}}}/h$ -Werte etwas höher liegt als die in der vorliegenden Arbeit aufgestellte Kurve für das Rotationsellipsoid, etwa ab $\sqrt{F_{\text{R}}}/h \leq 0,3$ jedoch mit der Kurve

für das Rotationsellipsoid praktisch zusammenfällt. Zum Vergleich ist auch die Widerstandserhöhung für das Ovoid mit dem Verhältnis $a/b = 8$ eingetragen: die Kurve liegt für größere Verhältnisse $\frac{\sqrt{F_R}}{h}$ zwischen der Kurve von Schlichting und der für das Rotationsellipsoid. Für $\sqrt{F_R}/h \leq 0,3$ fallen alle drei Kurven zusammen. Die maximale Abweichung der Kurven voneinander beträgt knapp 1%; man kann demnach von einer befriedigenden Übereinstimmung sprechen. Die von Kinoshita [19] ermittelte Kurve weicht dagegen erheblich von der Kurve von Schlichting und von den Kurven für das Rotationsellipsoid ab. Wahrscheinlich sind in ihr außer dem reinen Reibungswiderstand noch verschiedene andere Einflüsse enthalten, da sie wesentlich höher liegt als die drei anderen Kurven.

Abschließend sollen die Gedanken dieses Abschnitts kurz zusammengefaßt werden.

1) Die Erhöhung des Reibungswiderstandes wird proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit angenommen:

$$W_{rh} = W_r \left(1 + \frac{\Delta u_h}{u_0} \right)^2$$

oder

$$\zeta_{rh} = \zeta_{rp} \left(1 + \frac{\Delta \zeta_r}{\zeta_{rp}} \right)$$

wobei $\Delta \zeta_r$ die Erhöhung des Reibungswiderstandes gegenüber dem Plattenwert angibt für die Form des Körpers und den Einfluß beschränkter Wassertiefe.

2) Da die Geschwindigkeit über die Körperoberfläche veränderlich ist, muß der für die Erhöhung des Reibungswiderstandes maßgebliche Mittelwert der Geschwindigkeit bestimmt werden. Für unbegrenzte Flüssigkeit sind die Werte für alle vier Beispiele zum größten Teil berechnet worden. Für beschränkte Wassertiefen wurden durch Analogieschlüsse die Mittelwerte der Geschwindigkeit und die daraus resultierenden Erhöhungen des Reibungswiderstandes geschätzt, bzw. extrapoliert. Die Ergebnisse sind in den Tab. 8 bis 11 zusammengestellt.

3) Ein Vergleich mit anderen, bereits vorliegenden Ergebnissen ist nur in sehr geringem Maße möglich, da kaum die gleichen

Körper untersucht worden sind und z.T. auch stärkere Abweichungen zwischen den Ergebnissen der Theorie und des Versuchs auftreten. Vergleichsrechnungen nach einigen Näherungsformeln zeigen für den Fall des Flachwassers keine direkte Vergleichsmöglichkeit (Formel von Lock). Der Vergleich mit den Ergebnissen von Schlichting war zufriedenstellend.

9) Die Ausdehnung der Ergebnisse auf konkrete Schiffskörper.

Die in den vorstehenden Abschnitten berechneten Geschwindigkeitserhöhungen infolge des Flachwassereinflusses und die daraus resultierenden Vergrößerungen des Reibungswiderstandes beziehen sich auf Rotationskörper. Es soll versucht werden, die Ergebnisse auf konkrete Schiffskörper anzuwenden. Dabei kann es sich nur um Näherungswerte handeln; tatsächlich wird die Erhöhung des Reibungswiderstandes eines Schiffes stets größer sein als die Erhöhung bei dem entsprechenden Rotationskörper mit gleichen Formparametern, weil die Schiffsförmung nie einen derartig glatten und symmetrischen Verlauf hat wie die Oberfläche der Rotationskörper; es fehlt die Symmetrie von Vor- und Hinterschiff; das Verhältnis B/T ist meist von dem für Rotationskörper gültigen Wert $B/T = 2$ verschieden, - nach Amtsberg [2] hinsichtlich des Widerstandes das günstigste Verhältnis, da es einen quadratischen Querschnitt bedeutet, dessen Ecken durch den Kimmradius abgerundet sind. Ist B/T größer oder auch kleiner als 2, so tritt in beiden Fällen eine Erhöhung des Reibungswiderstandes gegenüber dem Wert für $B/T = 2$ auf. Zu dem gleichen Ergebnis gelangte Wigley [20]. Amtsberg [2] führt diese Tatsache hauptsächlich auf die unsymmetrische Geschwindigkeits- und Druckverteilung über einen Spantquerschnitt zurück und die starken Krümmungen an der Kimm; die Bestätigung hierfür findet Amtsberg in den Ergebnissen von Versuchen, die er mit einem Rotationskörper und drei weiteren Modellen durchgeführt hat. Diese drei Modelle haben die gleiche Spantflächenkurve wie der Rotationskörper, aber die Vergrößerung des Reibungswiderstandes gegenüber dem Plattenwert ist bei ihnen erheblich größer als beim Rotationskörper; während sie nach Amtsberg [2] für den betrachteten Rotationskörper 6,4% beträgt, liegen diese Werte

bei den anderen Modellen bei 8,9%, 9,8% und 11,6%. Die entsprechenden B/T-Verhältnisse sind 2,4, 3,3 und 4,5.

Die vorstehenden Ausführungen beziehen sich auf die Erhöhung des Reibungswiderstandes infolge der Körperform in unbegrenzter Flüssigkeit. Es bleibt noch die Frage, wie sich die Ergebnisse für Rotationskörper im Flachwasser auf konkrete Schiffssormen übertragen lassen. Unter dem Verhältnis h/b soll nun ausdrücklich das Verhältnis der Wassertiefe zum Tiefgang des betrachteten Körpers verstanden werden, da bei nicht rotationssymmetrischen Körpern der Tiefgang ja nicht mehr gleich der halben Breite ist, d.h. es gilt nicht mehr $B/T = 2$. Natürlich wird man die Ergebnisse von den Rotationskörpern umso besser auf Schiffssformen übertragen können, je näher deren Verhältnis B/T an dem Wert 2 liegt. Nach Graff [3] tritt erst bei größeren B/T-Werten von etwa 3,5 oder 4,0 ein merklicher Unterschied auf. Es ist anzunehmen, daß auch im Flachwasserbereich eine Vergrößerung von B/T widerstandsvermehrend wirkt, da der Querschnitt größer wird. Günstiger im Flachwasser könnte sich eine Verkleinerung des B/T-Verhältnisses auswirken, weil dadurch der Querschnitt verkleinert wird.

Zusammenfassend kann man demnach sagen, daß bei der Übertragung der Ergebnisse für die Rotationskörper auf Schiffe zunächst die Spantflächenkurve und die verschiedenen Formparameter zu vergleichen sind. Für die Abweichung des Verhältnisses B/T von dem Wert 2 ist ein gewisser Zuschlag zur Widerstandserhöhung zu machen, durch welchen bei großen B/T-Verhältnissen der ursprüngliche Zuschlag $\Delta \zeta_{r,h}$ für den Rotationskörper fast verdoppelt werden kann. Im Flachwasser ist für $B/T < 2$ der Zuschlag etwas geringer anzunehmen. Die Schärfegrade für die in dieser Arbeit untersuchten Körper und die Verhältnisse a/b sind bekannt und in den Tab.8 bis 11 zu finden; ihre Spantflächenkurven, bzw. für die Beispiele b), c) und d) die Verteilungskurven, die sich nur geringfügig von den Spantflächenkurven unterscheiden, sind in den Abb. 10 und 11 dargestellt. Damit sind die Unterlagen für den Vergleich mit Schiffssformen bereitgestellt.

Bisher war ausschließlich die Rede davon, welche Erhöhung der Reibungswiderstand auf Grund der Körperform und durch den Einfluß des Flachwassers erfährt. Zu Beginn der vorliegenden Arbeit wurde vorausgesetzt, daß die Erhöhung des Wellenwiderstandes infolge des Flachwassereinflusses nur klein ist und vernachlässigt werden kann. Der Gesamtwiderstand im Flachwasser ergibt sich demnach, indem zunächst der für unbegrenzte Flüssigkeit ermittelte Gesamtwiderstand aufgeteilt wird in den Reibungswiderstand W_r und die übrigen Widerstandsanteile. In dem Wert W_r des Reibungswiderstandes soll auch der Einfluß der Körperform enthalten sein, d.h. es handelt sich hierbei um einen gegenüber dem Plattenwert entsprechend erhöhten Reibungswiderstand. Zu dieser Größe W_r wird für die einzelnen Körper in Abhängigkeit von der Wassertiefe ein Zuschlag entsprechend den Tab. 8 bis 11 gemacht. Der nunmehr einer bestimmten Wassertiefe entsprechende Reibungswiderstand W_{rh} wird zu den übrigen Widerstandsanteilen, die laut Voraussetzung durch den Flachwassereinfluß nicht geändert werden, hinzuaddiert. Damit hat man den Gesamtwiderstand auf beschränkter Wassertiefe.

Schlußbemerkung

Es ist die Wirkung beschränkter Wassertiefe auf die Geschwindigkeit und den Widerstand untersucht worden. Zugrundegelegt wurden für die Rechnung nicht bestimmte Körper sondern Singularitätenverteilungen. Mit den hierdurch in unbegrenzter Flüssigkeit erzeugten Rotationskörpern wurde auch im Falle des Flachwassers gerechnet, d.h. die Deformierung der Körper im Flachwasser ist bei der Berechnung der Zusatzgeschwindigkeit vernachlässigt, da vergleichende Untersuchungen ergaben, daß der hierbei auftretende Fehler im Rahmen der Rechengenauigkeit bleibt. Aus den für einzelne Punkte der Körperoberfläche berechneten Geschwindigkeiten wurden die Mittelwerte der Geschwindigkeit geschätzt und aus letzteren die Erhöhungen des Reibungswiderstandes ermittelt. Die Ergebnisse liegen in den Tab. 8 bis 11 vor. Sie lassen sich bei Vorgabe gleicher Formparameter und ähnlicher Spantflächenkurven auf Schiffe übertragen, für welche allerdings wegen der vom Rotationskörper abweichenden Form ein Zuschlag zu machen ist. Der Unterschied wird umso größer sein,

je mehr das Verhältnis B/T des Schiffes von dem Wert $B/T = 2$ abweicht. Nach Untersuchungen von Amtsberg [2] ergab sich in einem Falle für $B/T = 4,5$ ungefähr die doppelte Erhöhung des Zähigkeitswiderstandes wie für den entsprechenden Rotationskörper.

Den Reibungswiderstand im Flachwasser erhält man, indem man zu dem für unbegrenzte Flüssigkeit ermittelten Reibungswiderstand des Körpers den entsprechenden Zuschlag für beschränkte Wassertiefe addiert. Voraussetzung hierfür ist, daß keine Erhöhung des Wellenwiderstandes infolge beschränkter Wassertiefe stattfindet.

Zum Schluß möchte ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft danken, durch welche die Benutzung der elektronischen Rechanlage IBM 650 ermöglicht wurde.

Literaturverzeichnis

- [1] Schuster, S.: Untersuchungen über Strömungs- und Widerstandsverhältnisse bei der Fahrt von Schiffen in beschränktem Wasser. (Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft, Bd. 46, S.244-288, 1952.)
- [2] Amtsberg, H.: Untersuchungen über die Formabhängigkeit des Reibungswiderstandes. (Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft, Bd. 38, S.177-225, 1937.)
- [3] Graff, W.: Die Zunahme des Reibungswiderstandes auf flachem Wasser. (Schiffstechnik Bd. 3, H.14/15, S.99-101, 1955/56.)
- [4] Lamb, H.: On the effects of the walls of an experimental tank on the resistance of a model. (Aeronautical Research Committee, Reports and Memoranda No.1010.)
- [5] Lock, C.N.H., and F.C. Johansen. Wind tunnel interference on streamline bodies. (Aeronautical Research Committee, Reports and Memoranda No.1451.)
- [6] Weinblum, G.: Einfluß der endlichen Querschnittsabmessungen einer Schlepprinne auf den Modellwiderstand. (Schiffbau, Bd. 35, S.83-85, 1934.)
- [7] Gawn, R.W.L.: Some model experiments in connection with mine warfare. Appendix II. (Transactions of the Institution of Naval Architects, Vol.188, S.165-166, 1946.)
- [8] Rankine, W.J.M.: On the mathematical theory of stream-lines, with four foci and upwards. (Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1871, S.267-306.)
- [9] Rankine, W.J.M.: On plane water lines in two dimensions. (Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1864, S.369-391.)
- [10] Munk, M.M.: Fluid Mechanics. Part II. (Aerodynamic Theory, hrsg. von W.F.Durand, Berlin, Springer 1935, Vol. I, Abt. C.)
- [11] Weinig, F.: Über schnell konvergierende graphische Lösungen von Strömungsproblemen durch Integralgleichungen. (Zeitschrift für technische Physik, Vol. 9, Nr.1, 1928.)

- [12] Taylor, D.W.: On solid stream forms and the depth of water necessary to avoid abnormal resistance of ships. (Transactions of the Institution of Naval Architects, Vol.36, S.234-247, 13 Fig., 1895.)
- [13] Kirsch, M.: Umströmung von Körpern auf flachem Wasser und in Kanälen. (Schiffstechnik Bd. 12, Nr. 61, S. 42-48, 1965.)
- [14] Eisenberg, Ph.: An asymptotic solution for the flow about an ellipsoid near a plane wall. (Hydrodynamics Laboratory, California Institute of Technology, Report N-57.)
- [15] Scholz, N.: Über eine rationelle Berechnung des Strömungswiderstandes schlanker Körper mit beliebig rauher Oberfläche. (Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft Bd. 45, S. 244-263, 1951.)
- [16] Hoerner, S.F.: Analysis of viscous ship resistance (International Shipbuilding Progress 1, S. 156-161, 1954.)
- [17] Hoerner, S.F.: Fluid dynamic drag. (Midland Park, New Jersey, Selbstverlag des Verfassers, 1958.)
- [18] Schlichting, O., und E. Strohbusch: Schiffswiderstand auf beschränkter Wassertiefe. (Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft, Bd.35, S. 127-148, 1934.)
- [19] Studies on the effect of shallow water upon the resistance of large tanker. II. (Hitachi Zosen. 4,3, S. 13, 1961.)
- [20] Wigley, W.C.S.: Ship wave resistance. (Transactions of the Institution of Naval Architects, 76, S. 223-245, 1935 and Taf. XXVI, spez.Fig.5b.)

Abb.: 1 Die Konturen der vier Beispiele

- a) Ovoid
- b) Rotationsellipsoid
- c) Körper, entsprechend der Verteilung $\eta = (1 - \xi^2)^2$
- d) Körper, entsprechend der Verteilung $\eta = 1 - 1,5\xi^2 + 0,5\xi^4$

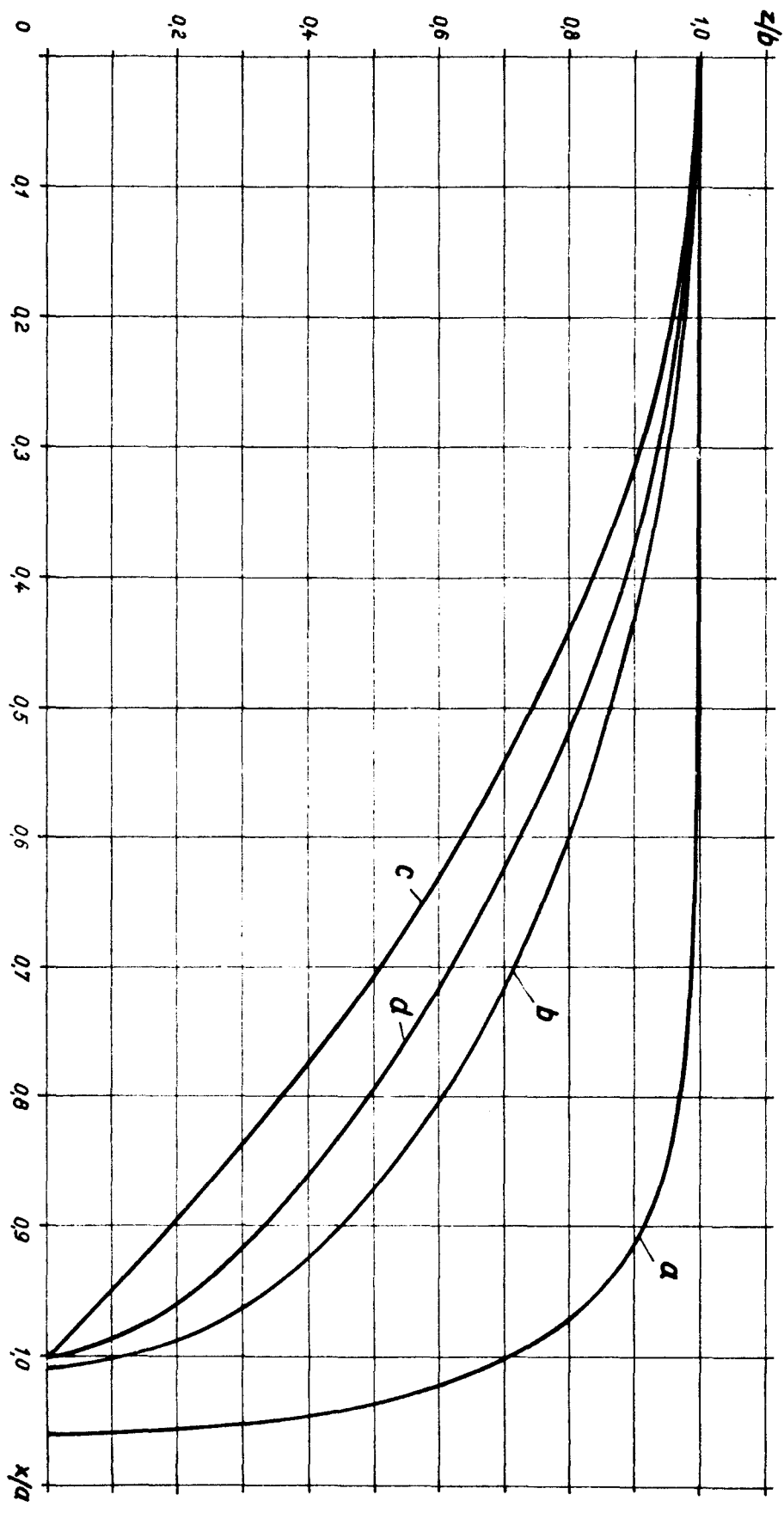


Abb. 2: Die Zusatzgeschwindigkeit auf Flachwasser für das Rotationsellipsoid
 im Punkt $P_1 (0; 0; b)$ mit a/b als Parameter

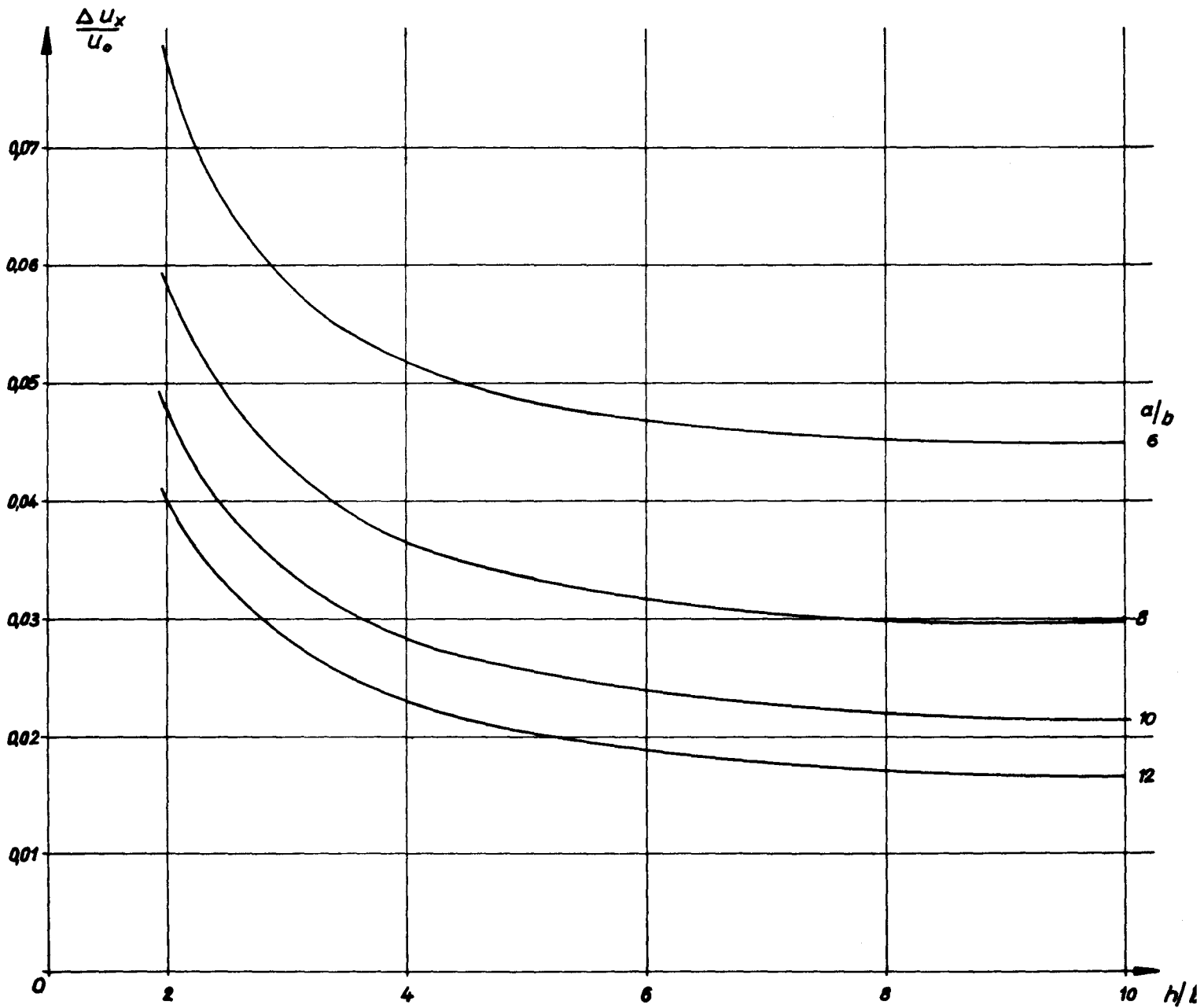


Abb. 3:

Die Zusatzgeschwindigkeit auf Flachwasser für das Rotationsellipsoid
im Punkt $P_1 (0; 0; b)$ mit h/b als Parameter

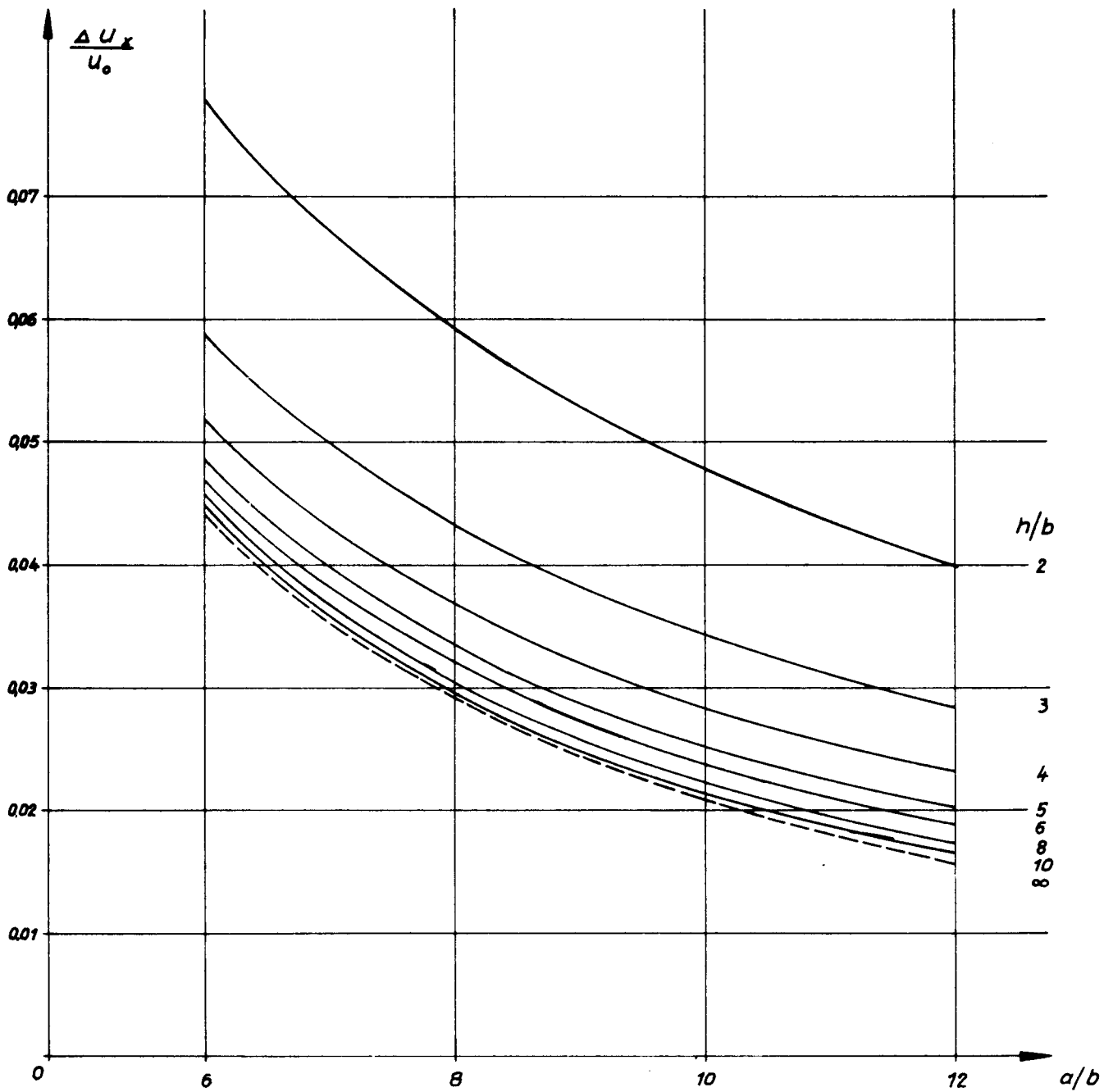


Abb. 4 : Die Erhöhung des Reibungswiderstandes von Rotationskörpern in unbegrenzter Flüssigkeit

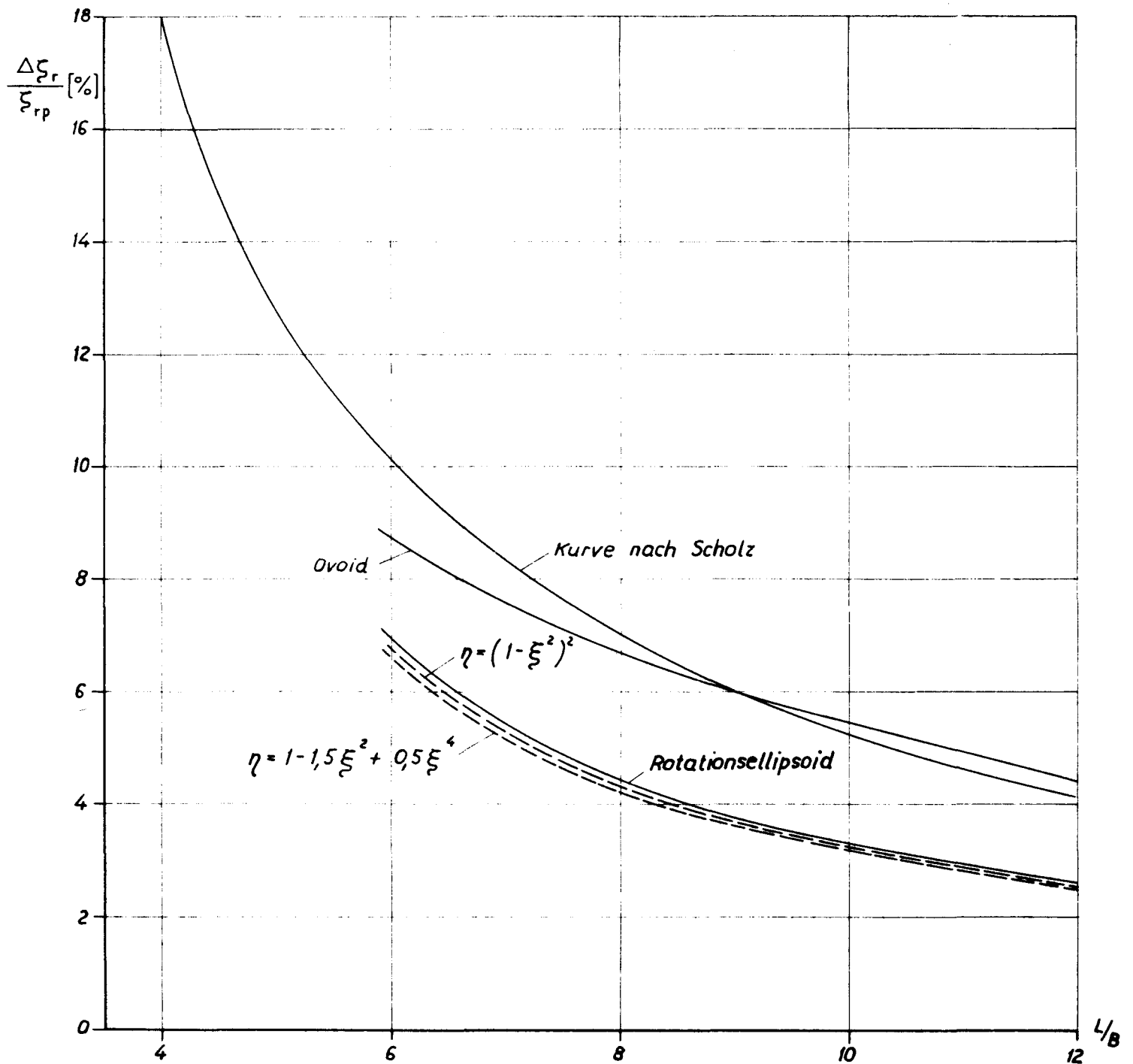


Abb.5: Die Abweichungen der Mittelwerte der Geschwindigkeit von den Werten am Hauptspant für den Fall des Ovoids

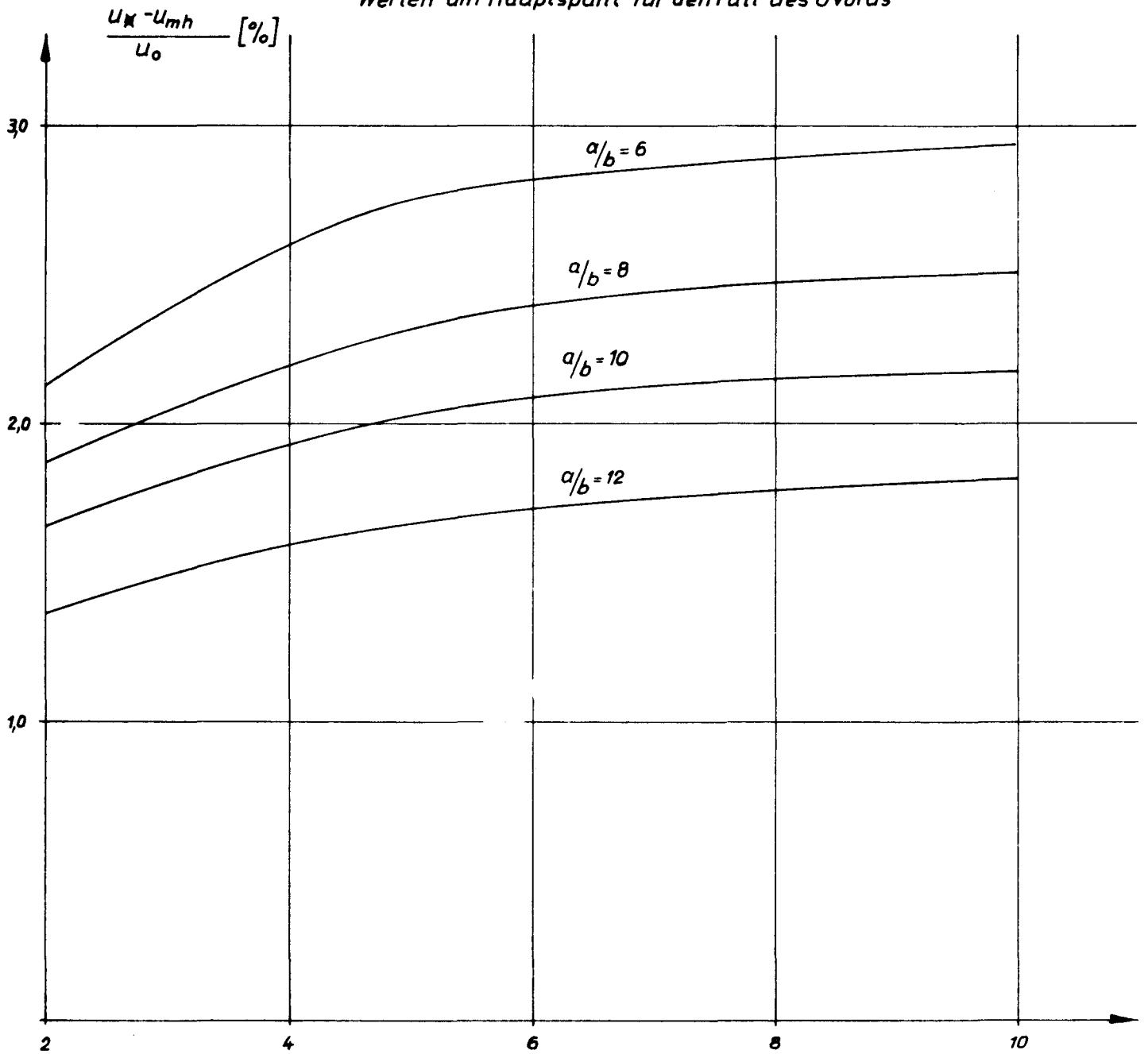


Abb. 6: Die Erhöhung des Reibungswiderstandes infolge des Flachwassereinflusses.

a) Ovoid

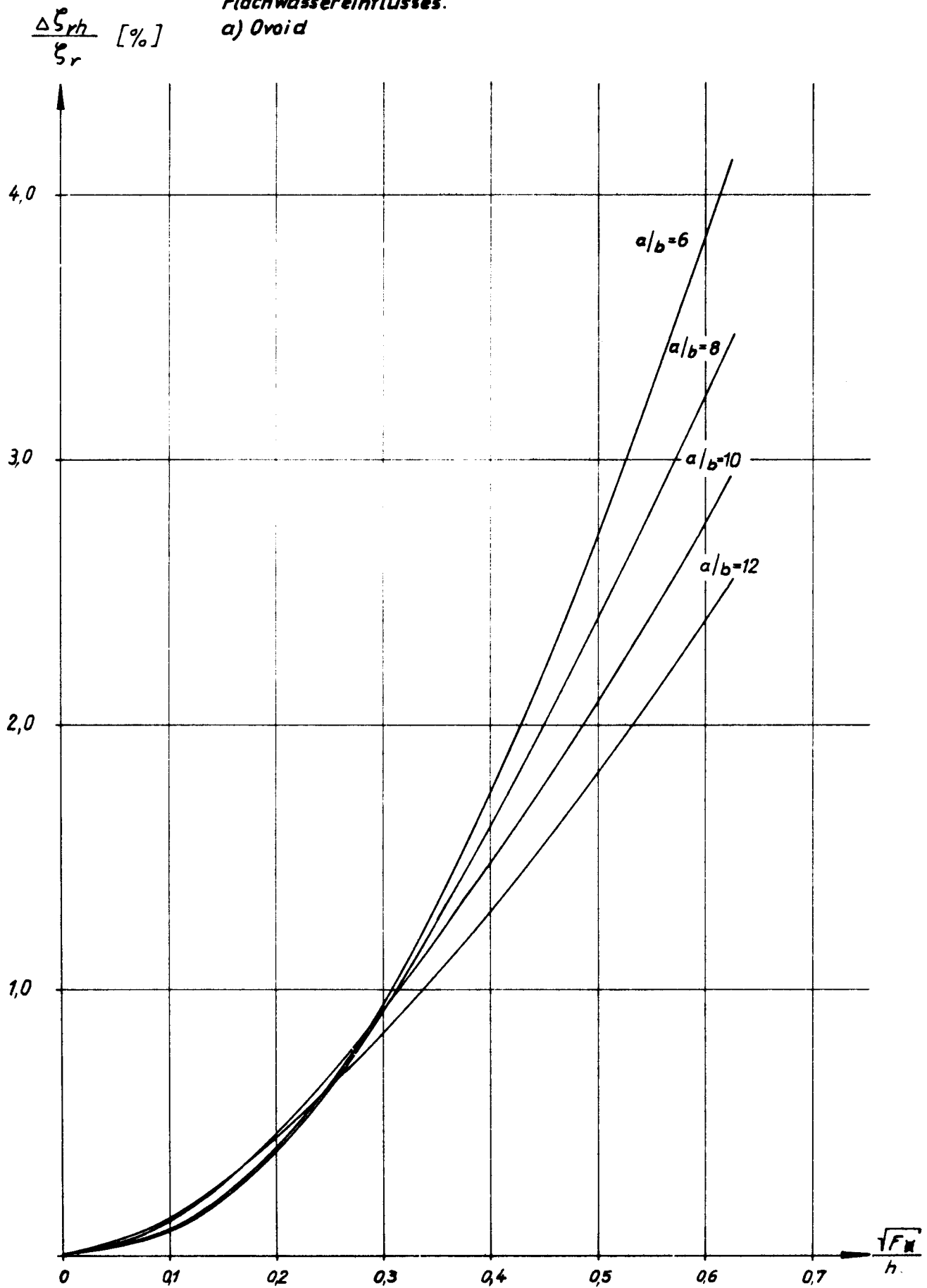


Abb. 7: Die Erhöhung des Reibungswiderstandes infolge des Flachwassereinflusses

b) Rotationsellipsoid.

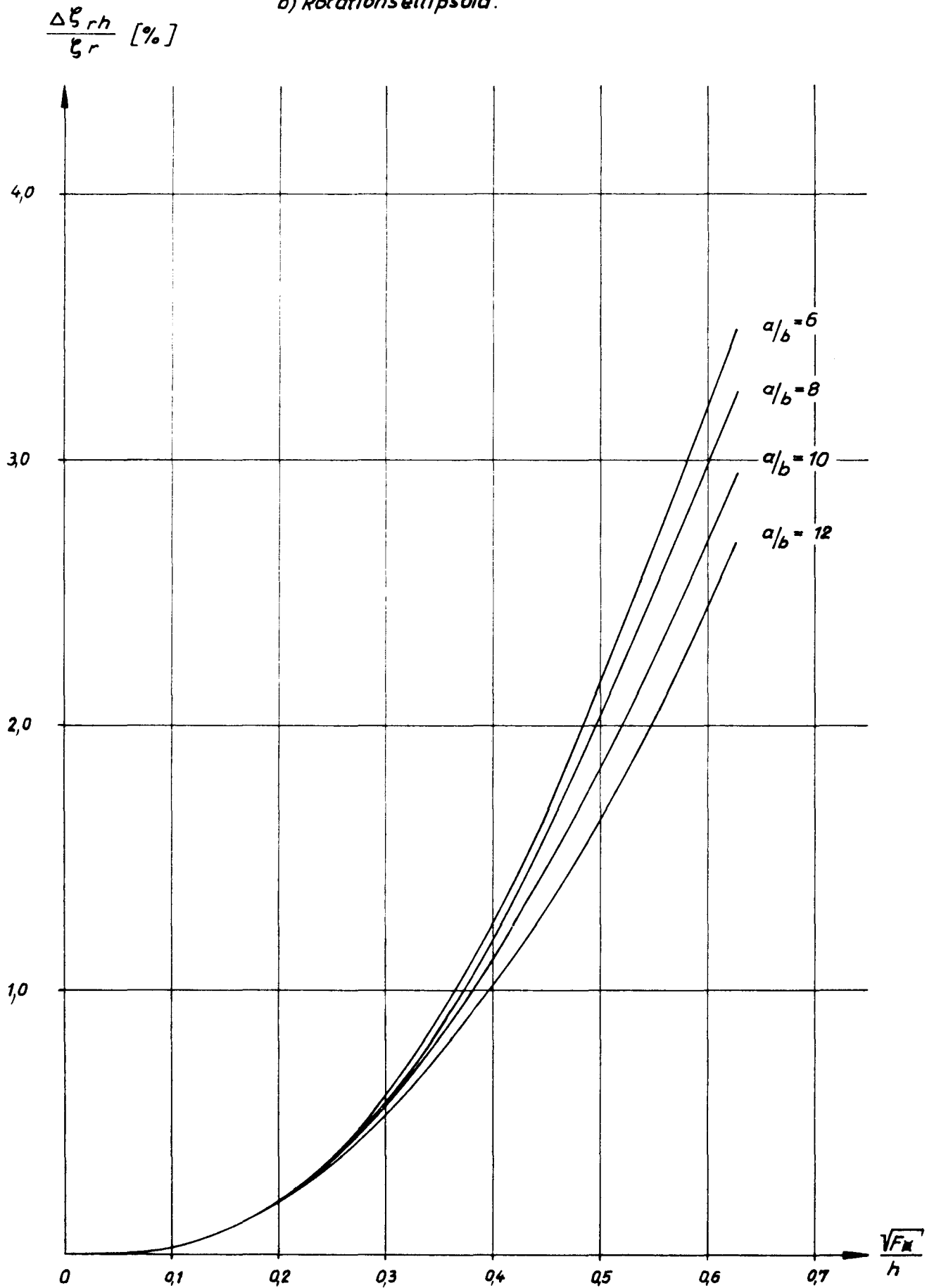


Abb. 8: Die Erhöhung des Reibungswiderstandes durch den Einfluß des Flachwassers gegenüber dem Wert für die Platte

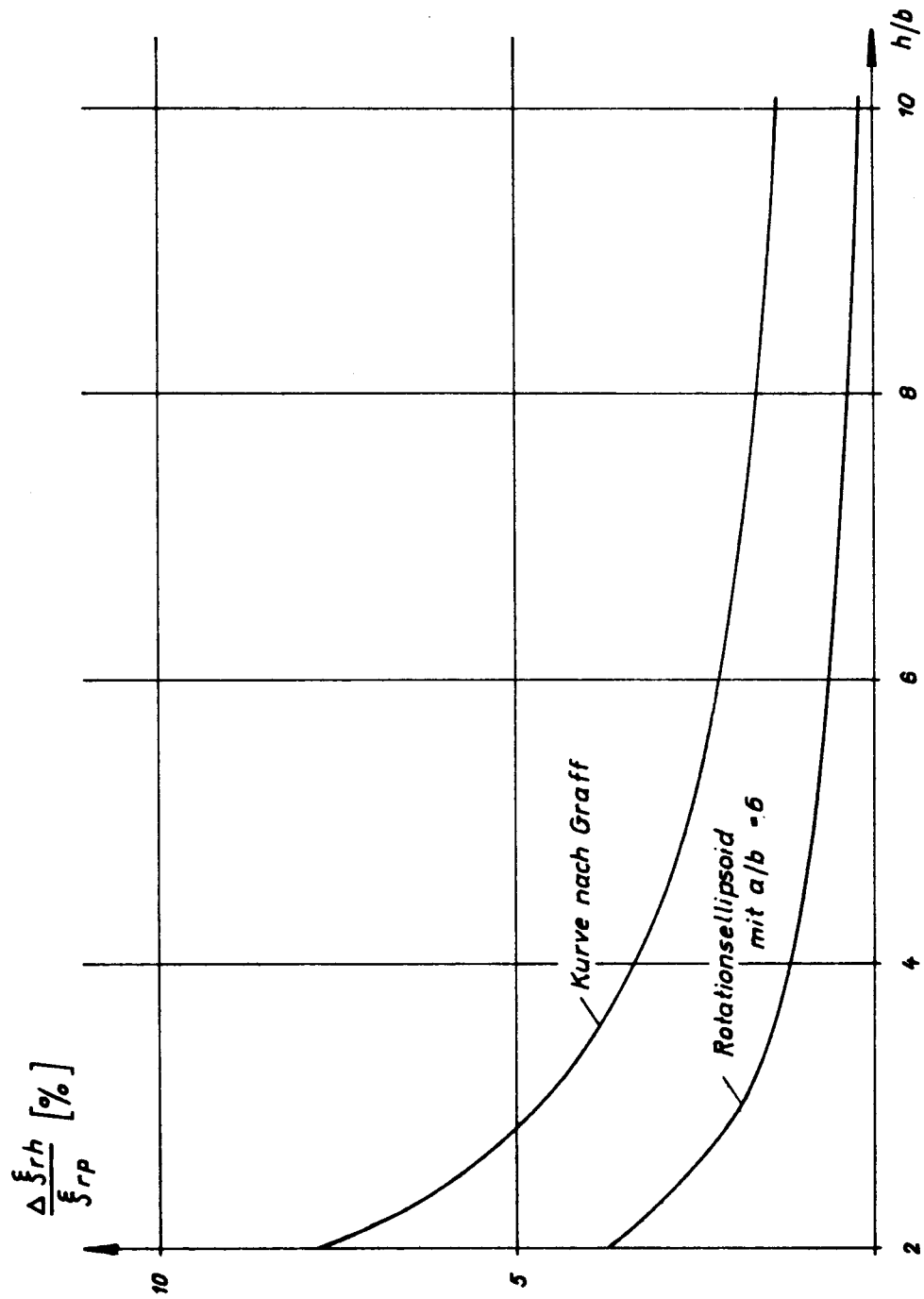


Abb. 9: Die Erhöhung des Reibungswiderstandes (Ein Vergleich)

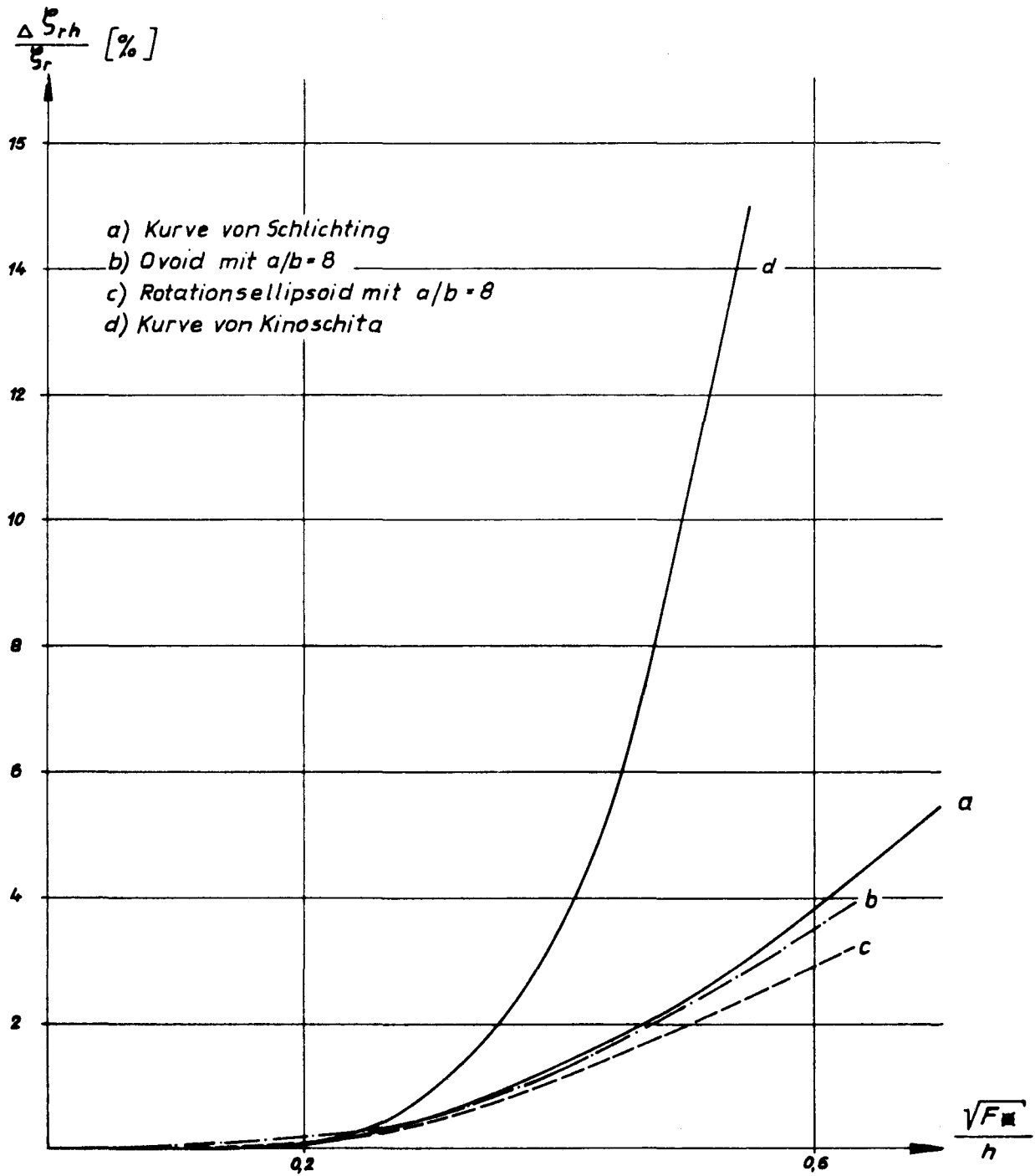


Abb. 10: Die Spantflächenkurven des Ovoids für verschiedene Verhältnisse a/b

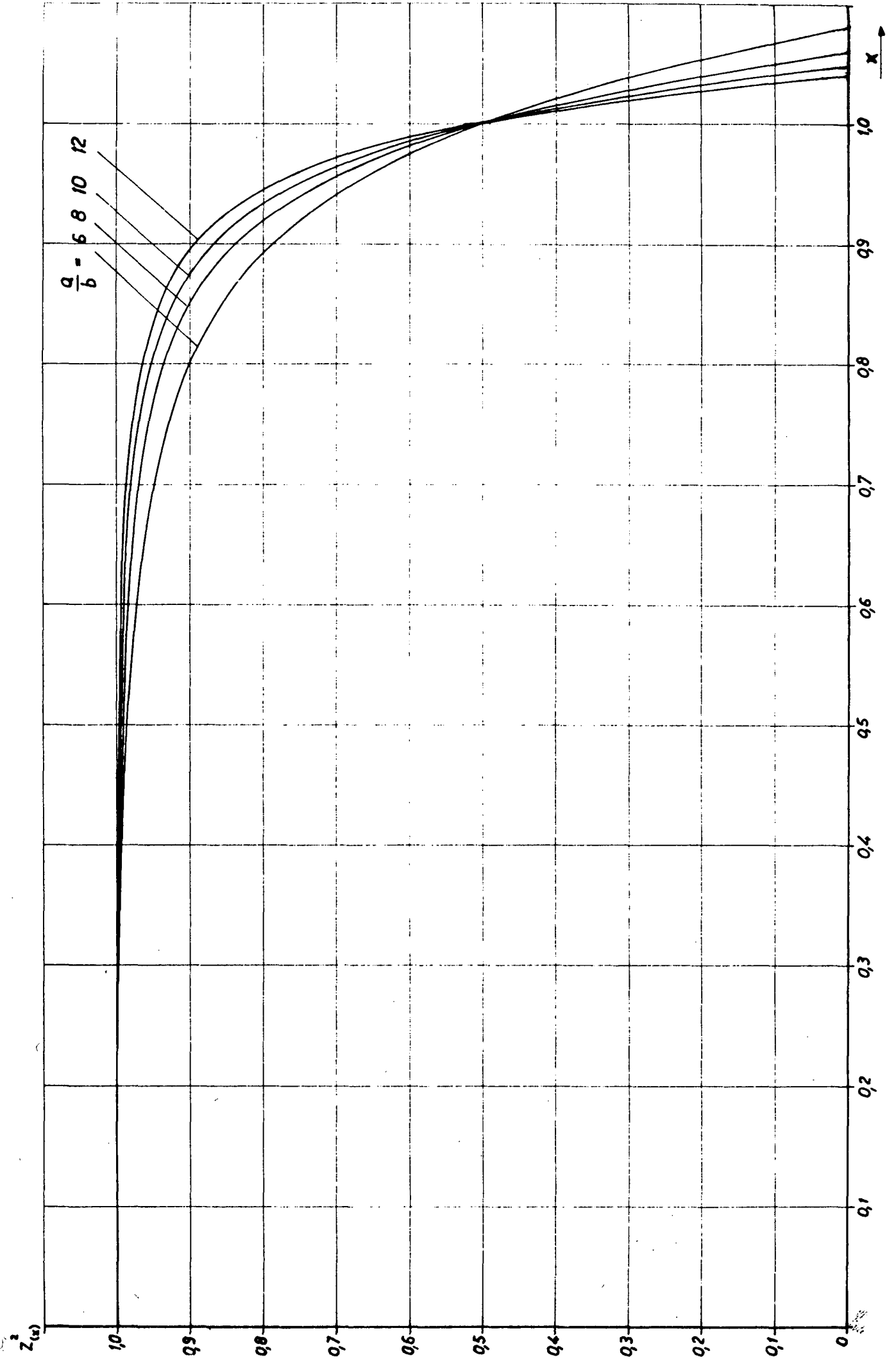


Abb. 11: Die Dipolverteilungen der Beispiele b), c) und d)

- b) $\eta = 1 - \xi^2$
- c) $\eta = (1 - \xi^2)^2$
- d) $\eta = 1 - 1,5\xi^2 + 0,5\xi^4$

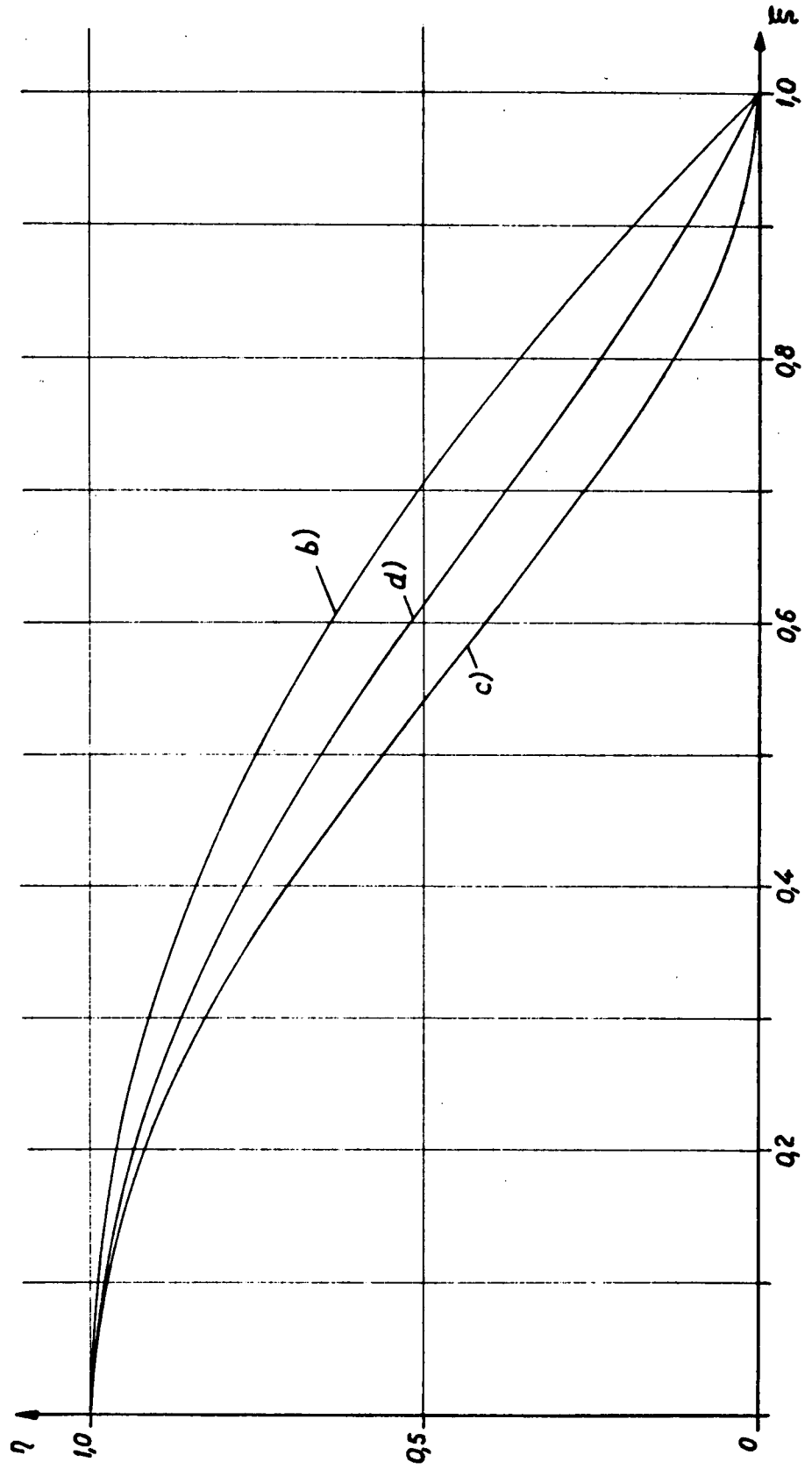


Tabelle 1: Die Zusatzgeschwindigkeit am Hauptspant in den Punkten P_1 für $y = 0$ und P_2 für $z = 0$

a/b	h/b	Ovoid $\frac{\Delta u}{u_0}(P_1)$ $\frac{\Delta u}{u_0}(P_2)$	Rotationsellipsoid $\frac{\Delta u}{u_0}(P_1)$ $\frac{\Delta u}{u_0}(P_2)$	Körper für $\eta=(1-\xi^2)^2$ $\frac{\Delta u}{u_0}(P_1)$ $\frac{\Delta u}{u_0}(P_2)$	Körper für $\eta=1-15\xi^2+95\xi^4$ $\frac{\Delta u}{u_0}(P_1)$ $\frac{\Delta u}{u_0}(P_2)$
6	2	0,04222 0,04109	0,07802 0,07439	0,10065 0,09564	0,08915 0,08485
	3	0,02822 0,02770	0,05875 0,05763	0,07917 0,07786	0,06880 0,06758
	4	0,02100 0,02157	0,05160 0,05118	0,07192 0,07154	0,06159 0,06119
	5	0,01858 0,01841	0,04841 0,04823	0,06903 0,06889	0,05855 0,05839
	6	0,01676 0,01667	0,04681 0,04673	0,06745 0,06731	0,05696 0,05685
	8	0,01504 0,01501	0,04541 0,04539	0,06630 0,06592	0,05568 0,05548
10	2	0,01434 0,01432	0,04487 0,04486	0,06559 0,06567	0,05506 0,05509
	3	0,01351 0,01351	0,04427 0,04427	0,06529 0,06529	0,05461 0,05461
	4	0,03147 0,03097	0,05918 0,05685	0,07690 0,07342	0,06794 0,06505
	5	0,02100 0,02068	0,04320 0,04238	0,05831 0,05726	0,05067 0,04974
	6	0,01587 0,01567	0,03669 0,03634	0,05139 0,05095	0,04396 0,04356
	8	0,01299 0,01287	0,03354 0,03338	0,04824 0,04812	0,04081 0,04067
10	2	0,01127 0,01119	0,03186 0,03177	0,04668 0,04650	0,03919 0,03905
	3	0,00949 0,00946	0,03029 0,03026	0,04522 0,04520	0,03767 0,03765
	4	0,00870 0,00868	0,02966 0,02965	0,04470 0,04468	0,03709 0,03708
	5	0,00769 0,00769	0,02891 0,02891	0,04404 0,04404	0,03639 0,03639
	6	0,02509 0,02483	0,04771 0,04611	0,06227 0,05973	0,05493 0,05287
	8	0,01673 0,01656	0,03418 0,03359	0,04608 0,04525	0,04008 0,03937
12	2	0,01257 0,01245	0,02837 0,02810	0,03964 0,03929	0,03396 0,03365
	3	0,01014 0,01005	0,02541 0,02527	0,03655 0,03639	0,03094 0,03079
	4	0,00870 0,00854	0,02375 0,02367	0,03490 0,03477	0,02928 0,02918
	5	0,00661 0,00688	0,02212 0,02209	0,03337 0,03332	0,02770 0,02766
	6	0,00649 0,00608	0,02142 0,02141	0,03269 0,03274	0,02701 0,02703
	8	0,00445 0,00495	0,02055 0,02055	0,03201 0,03201	0,02623 0,02623
10	2	0,02077 0,02070	0,03999 0,03883	0,05233 0,05043	0,04612 0,04459
	3	0,01391 0,01380	0,02830 0,02785	0,03809 0,03742	0,03316 0,03261
	4	0,01044 0,01036	0,02312 0,02290	0,03216 0,03187	0,02761 0,02736
	5	0,00837 0,00831	0,02038 0,02026	0,02920 0,02905	0,02476 0,02463
	6	0,00703 0,00699	0,01879 0,01872	0,02756 0,02749	0,02315 0,02308
	8	0,00548 0,00545	0,01715 0,01713	0,02597 0,02594	0,02153 0,02151
10	2	0,00468 0,00466	0,01642 0,01641	0,02531 0,02529	0,02084 0,02082
	3	0,00345 0,00345	0,01545 0,01545	0,02446 0,02446	0,01993 0,01993
	4	0,01673 0,01656	0,03418 0,03359	0,04608 0,04525	0,04008 0,03937
	5	0,01257 0,01245	0,02837 0,02810	0,03964 0,03929	0,03396 0,03365
	6	0,01014 0,01005	0,02541 0,02527	0,03655 0,03639	0,03094 0,03079
	8	0,00661 0,00688	0,02212 0,02209	0,03337 0,03332	0,02770 0,02766
10	2	0,00649 0,00608	0,02142 0,02141	0,03269 0,03274	0,02701 0,02703
	3	0,00445 0,00495	0,02055 0,02055	0,03201 0,03201	0,02623 0,02623
	4	0,02077 0,02070	0,03999 0,03883	0,05233 0,05043	0,04612 0,04459
	5	0,01391 0,01380	0,02830 0,02785	0,03809 0,03742	0,03316 0,03261
	6	0,01044 0,01036	0,02312 0,02290	0,03216 0,03187	0,02761 0,02736
	8	0,00837 0,00831	0,02038 0,02026	0,02920 0,02905	0,02476 0,02463
10	2	0,00703 0,00699	0,01879 0,01872	0,02756 0,02749	0,02315 0,02308
	3	0,00548 0,00545	0,01715 0,01713	0,02597 0,02594	0,02153 0,02151
	4	0,00468 0,00466	0,01642 0,01641	0,02531 0,02529	0,02084 0,02082
	5	0,00345 0,00345	0,01545 0,01545	0,02446 0,02446	0,01993 0,01993
	6	0,01673 0,01656	0,03418 0,03359	0,04608 0,04525	0,04008 0,03937
	8	0,01257 0,01245	0,02837 0,02810	0,03964 0,03929	0,03396 0,03365
10	2	0,01014 0,01005	0,02541 0,02527	0,03655 0,03639	0,03094 0,03079
	3	0,00870 0,00854	0,02375 0,02367	0,03490 0,03477	0,02928 0,02918
	4	0,00661 0,00688	0,02212 0,02209	0,03337 0,03332	0,02770 0,02766
	5	0,00649 0,00608	0,02142 0,02141	0,03269 0,03274	0,02701 0,02703
	6	0,00445 0,00495	0,02055 0,02055	0,03201 0,03201	0,02623 0,02623
	8	0,02077 0,02070	0,03999 0,03883	0,05233 0,05043	0,04612 0,04459
10	2	0,01391 0,01380	0,02830 0,02785	0,03809 0,03742	0,03316 0,03261
	3	0,01044 0,01036	0,02312 0,02290	0,03216 0,03187	0,02761 0,02736
	4	0,00837 0,00831	0,02038 0,02026	0,02920 0,02905	0,02476 0,02463
	5	0,00703 0,00699	0,01879 0,01872	0,02756 0,02749	0,02315 0,02308
	6	0,00548 0,00545	0,01715 0,01713	0,02597 0,02594	0,02153 0,02151
	8	0,00468 0,00466	0,01642 0,01641	0,02531 0,02529	0,02084 0,02082
10	2	0,00345 0,00345	0,01545 0,01545	0,02446 0,02446	0,01993 0,01993
	3	0,01673 0,01656	0,03418 0,03359	0,04608 0,04525	0,04008 0,03937
	4	0,01257 0,01245	0,02837 0,02810	0,03964 0,03929	0,03396 0,03365
	5	0,01014 0,01005	0,02541 0,02527	0,03655 0,03639	0,03094 0,03079
	6	0,00870 0,00854	0,02375 0,02367	0,03490 0,03477	0,02928 0,02918
	8	0,00661 0,00688	0,02212 0,02209	0,03337 0,03332	0,02770 0,02766
10	2	0,00649 0,00608	0,02142 0,02141	0,03269 0,03274	0,02701 0,02703
	3	0,00445 0,00495	0,02055 0,02055	0,03201 0,03201	0,02623 0,02623
	4	0,02077 0,02070	0,03999 0,03883	0,05233 0,05043	0,04612 0,04459
	5	0,01391 0,01380	0,02830 0,02785	0,03809 0,03742	0,03316 0,03261
	6	0,01044 0,01036	0,02312 0,02290	0,03216 0,03187	0,02761 0,02736
	8	0,00837 0,00831	0,02038 0,02026	0,02920 0,02905	0,02476 0,02463
10	2	0,00703 0,00699	0,01879 0,01872	0,02756 0,02749	0,02315 0,02308
	3	0,00548 0,00545	0,01715 0,01713	0,02597 0,02594	0,02153 0,02151
	4	0,00468 0,00466	0,01642 0,01641	0,02531 0,02529	0,02084 0,02082
	5	0,00345 0,00345	0,01545 0,01545	0,02446 0,02446	0,01993 0,01993
	6	0,01673 0,01656	0,03418 0,03359	0,04608 0,04525	0,04008 0,03937
	8	0,01257 0,01245	0,02837 0,02810	0,03964 0,03929	0,03396 0,03365
10	2	0,01014 0,01005	0,02541 0,02527	0,03655 0,03639	0,03094 0,03079
	3	0,00870 0,00854	0,02375 0,02367	0,03490 0,03477	0,02928 0,02918
	4	0,00661 0,00688	0,02212 0,02209	0,03337 0,03332	0,02770 0,02766
	5	0,00649 0,00608	0,02142 0,02141	0,03269 0,03274	0,02701 0,02703
	6	0,00445 0,00495	0,02055 0,02055	0,03201 0,03201	0,02623 0,02623
	8	0,02077 0,02070	0,03999 0,03883	0,05233 0,05043	0,04612 0,04459
10	2	0,01391 0,01380	0,02830 0,02785	0,03809 0,03742	0,03316 0,03261
	3	0,01044 0,01036	0,02312 0,02290	0,03216 0,03187	0,02761 0,02736
	4	0,00837 0,00831	0,02038 0,02026	0,02920 0,02905	0,02476 0,02463
	5	0,00703 0,00699	0,01879 0,01872	0,02756 0,02749	0,02315 0,02308
	6	0,00548 0,00545	0,01715 0,01713	0,02597 0,02594	0,02153 0,02151
	8	0,00468 0,00466	0,01642 0,01641	0,02531 0,02529	0,02084 0,02082
10	2	0,00345 0,00345	0,01545 0,01545	0,02446 0,02446	0,01993 0,01993
	3	0,01673 0,01656	0,03418 0,03359	0,04608 0,04525	0,04008 0,03937
	4	0,01257 0,01245	0,02837 0,02810	0,03964 0,03929	0,03396 0,03365
	5	0,01014 0,01005	0,02541 0,02527	0,03655 0,03639	0,03094 0,03079
	6	0,00870 0,00854	0,02375 0,02367	0,03490 0,03477	0,02928 0,02918
	8	0,00661 0,00688	0,02212 0,02209	0,03337 0,03332	0,02770 0,02766
10	2	0,00649 0,00608	0,02142 0,02141	0,03269 0,03274	0,02701 0,02703
	3	0,00445 0,00495	0,02055 0,02055	0,03201 0,03201	0,02623 0,02623
	4	0,02077 0,02070	0,03999 0,03883	0,05233 0,05043	0,04612 0,04459
	5	0,01391 0,01380	0,02830 0,02785	0,03809 0,03742	0,03316 0,03261
	6	0,01044 0,01036	0,02312 0,02290	0,03216 0,03187	0,02761 0,02736
	8	0,00837 0,00831	0,02038 0,02026	0,02920 0,02905	0,02476 0,02463
10	2	0,00703 0,00699	0,01879 0,01872	0,02756 0,02749	0,02315 0,02308
	3	0,00548 0,00545	0,01715 0,01713	0,02597 0,02594	0,02153 0,02151
	4	0,00468 0,00466	0,01642 0,01641	0,02531 0,02529	0,02084 0,02082
	5	0,00345 0,00345	0,01545 0,01545	0,02446 0,02446	0,01993 0,01993
	6	0,01673 0,01656	0,03418 0,03359	0,04608 0,04525	0,04008 0,03937
	8	0,01257 0,01245	0,02837 0,02810	0,03964 0,03929	0,03396 0,03365
10	2	0,01014 0,01005	0,02541 0,02527	0,03655 0,03639	0,03094 0,03079
	3	0,00870 0,00854	0,02375 0,02367	0,03490 0,03477	0,02928 0,02918
	4	0,00661 0,00688	0,02212 0,02209	0,03337 0,03332	0,02770 0,02766
	5	0,00649 0,00608	0,02142 0,02141	0,03269 0,03274	0,02701 0,02703
	6	0,00445 0,00495	0,02055 0,02055	0,03201 0,03201	0,02623 0,02623
	8	0,02077 0,02070	0,03999 0,03883	0,05233 0,05043	0,04612 0,04459
10	2	0,01391 0,01380	0,02830 0,02785	0,03809 0,03742	0,03316 0,03261
	3	0,01044 0,01036	0,02312 0,02290	0,03216 0,03187	0,02761 0,02736
	4	0,00837 0,00831	0,02038 0,02026	0,02920 0,02905	0,02476 0,02463
	5	0,00703 0,00699	0,01879 0,01872	0,02756 0,02749	0,02315 0,02308
	6	0,00548 0,00545	0,01715 0,01713	0,02597 0,02594	0,02153 0,02151
	8	0,00468 0,00466	0,01642 0,01641	0,02531 0,02529	0,02084 0,02082
10	2	0,			

Tabelle 2: Die Zusatzgeschwindigkeit bei $x = 0,5a$
in den Punkten P_3 für $y = 0$ und P_4 für $z = 0$

a/b	h/b	z/b für P_3 ;		Ovoid		z/b für P_3 ;		Rotationsellipsoid	
		y/b für P_4	$\frac{\Delta u}{u_0}(P_3)$	$\frac{\Delta u}{u_0}(P_4)$	y/b für P_4	$\frac{\Delta u}{u_0}(P_3)$	$\frac{\Delta u}{u_0}(P_4)$		
6	2	0,9925	0,05630	0,05356	0,8699	0,05703	0,05536		
	3		0,04039	0,03955		0,04523	0,04477		
	4		0,03435	0,03404		0,04072	0,04054		
	5		0,03152	0,03138		0,03856	0,03848		
	6		0,03000	0,02993		0,03740	0,03735		
	8		0,02855	0,02852		0,03629	0,03628		
	10		0,02793	0,02792		0,03583	0,03583		
	∞		0,02717	0,02717		0,03220	0,03220		
8	2	0,9956	0,04197	0,04035	0,8683	0,04323	0,04201		
	3		0,02885	0,02821		0,03317	0,03282		
	4		0,02336	0,02309		0,02916	0,02902		
	5		0,02067	0,02054		0,02717	0,02710		
	6		0,01918	0,01911		0,02605	0,02601		
	8		0,01769	0,01767		0,02492	0,02491		
	10		0,01703	0,01702		0,02442	0,02442		
	∞		0,01612	0,01612		0,02199	0,02199		
10	2	0,9971	0,03347	0,03251	0,8675	0,03481	0,03390		
	3		0,02259	0,02212		0,02607	0,02578		
	4		0,01768	0,01746		0,02246	0,02235		
	5		0,01516	0,01505		0,02063	0,02057		
	6		0,01373	0,01367		0,01957	0,01954		
	8		0,01227	0,01224		0,01848	0,01846		
	10		0,01159	0,01157		0,01796	0,01796		
	∞		0,01059	0,01059		0,01611	0,01611		
12	2	0,9979	0,02784	0,02724	0,8670	0,02915	0,02844		
	3		0,01865	0,01831		0,02144	0,02120		
	4		0,01431	0,01413		0,01816	0,01806		
	5		0,01198	0,01188		0,01647	0,01642		
	6		0,01061	0,01055		0,01548	0,01545		
	8		0,00919	0,00917		0,01443	0,01442		
	10		0,00852	0,00850		0,01392	0,01392		
	∞		0,00746	0,00746		0,01237	0,01237		

Tabellè 3: Die Querschnitte, die durch einen Dipol auf verschiedenen Wassertiefen h erzeugt werden

b = Radius des Kreises, der durch einen Dipol in unbegrenzter Flüssigkeit erzeugt wird.

L = Länge der Fläche, die durch einen Dipol auf begrenzter Flüssigkeit der Wassertiefe h erzeugt wird.

y = halbe Breite dieser Fläche an der Stelle x .

$\frac{h}{b}$	$\frac{L}{2b}$	$\frac{y}{b}(x = 0)$	$\frac{y}{b}(x = 0,5b)$
2	0,9183	0,9080	0,7620
3	0,9596	0,9565	0,8163
5	0,9842	0,9838	0,8474
10	0,9960	0,9958	0,8612
∞	1,0000	1,0000	0,8660

Tabelle 4: Die Ordinaten des Rankineschen Ovals für $x = 0$ und $x = 0,5 a$ bei verschiedenen Wassertiefen und die x -Komponenten der Zusatzgeschwindigkeit in diesen und den entsprechenden Punkten des in unbegrenzter Flüssigkeit erzeugten Ovals.

$$\frac{\Delta u_x}{u_0}$$

Zusatzgeschwindigkeit am Querschnitt

$$\frac{\Delta u_x^*}{u_0}$$

Zusatzgeschwindigkeit im Vergleichspunkt

a/b	h/b	x/a	y/b	$\frac{\Delta u_x}{u_0}$	$\frac{\Delta u_x^*}{u_0}$	x/a	y/b	$\frac{\Delta u_x}{u_0}$	$\frac{\Delta u_x^*}{u_0}$
6	2	0	0,7169	0,5588	0,5587	0,5	0,7151	0,5609	0,5589
	3		0,8135	0,3734	0,3732		0,8055	0,3831	0,3807
	5		0,9060	0,2323	0,2319		0,8861	0,2551	0,2535
	10		0,9696	0,1507	0,1505		0,9420	0,1792	0,1786
	∞		1,0000	0,1186	0,1186		0,9683	0,1465	0,1465
8	2	0	0,7038	0,5430	0,5430	0,5	0,7035	0,5434	0,5430
	3		0,7973	0,3621	0,3621		0,7945	0,3657	0,3648
	5		0,8902	0,2196	0,2195		0,8791	0,2329	0,2310
	10		0,9634	0,1266	0,1266		0,9420	0,1497	0,1494
	∞		1,0000	0,0851	0,0851		0,9735	0,1102	0,1102
10	2	0	0,6961	0,5339	0,5339	0,5	0,6960	0,5340	0,5339
	3		0,7875	0,3559	0,3559		0,7865	0,3572	0,3570
	5		0,8793	0,2142	0,2142		0,8733	0,2216	0,2212
	10		0,9566	0,1159	0,1159		0,9408	0,1346	0,1333
	∞		1,0000	0,0673	0,0673		0,9797	0,0880	0,0880
12	2	0	0,6910	0,5279	0,5279	0,5	0,6910	0,5281	0,5279
	3		0,7810	0,3519	0,3520		0,7806	0,3524	0,3523
	5		0,8717	0,2114	0,2144		0,8684	0,2163	0,2160
	10		0,9509	0,1103	0,1103		0,9391	0,1236	0,1234
	∞		1,0000	0,0556	0,0556		0,9830	0,0732	0,0732

Tabelle 5: Der Mittelwert der Geschwindigkeit für einige Körper in unbegrenzter Flüssigkeit und die Stelle x , an welcher der Mittelwert auftritt.

Körper bzw. Verteilung	a/b	$\frac{u_m}{u_0}$	$\frac{x}{a} (u_m)$	$\frac{u_m}{u_0}$	$\frac{u_m - u_0}{u_0} [\%]$	φ
Ovoid	6	1,0430	0,641	1,0135	- 2,9	0,8865
	8	1,0330	0,676	1,0077	- 2,5	0,9105
	10	1,0270	0,720	1,0050	- 2,2	0,9218
	12	1,0219	0,738	1,0035	- 1,8	0,9372
Rotationsellipsoid	6	1,0343	0,660	1,0443	1,0	0,66...
	8	1,0219	0,672	1,0289	0,7	0,66...
	10	1,0164	0,687	1,0206	0,4	0,66...
	12	1,0129	0,653	1,0155	0,2	0,66...
$\eta = (1 - \xi^2)^2$	8	1,0214	0,474	1,0040	2,2	0,533..
$\eta = 1 - 1,5\xi^2 + 0,5\xi^4$	8	1,0211	0,530	1,0364	1,5	0,6000

Tabelle 6: Die Erhöhung des Reibungswiderstandes in unbegrenzter Flüssigkeit. (Ein Vergleich mit den Ergebnissen von Scholz).

a/b	$\frac{\Delta \xi_r}{\xi_r} [\%]$				
	nach Scholz	nach Scholz umgerechnet	Rotationsellipsoid	$\eta = (1 - \xi^2)^2$	$\eta = 1 - 1,5\xi^2 + 0,5\xi^4$
4	14,87	9,86	-	-	-
6	10,15	6,76	6,98	6,77	6,61
8	7,08	4,72	4,43	4,33	4,26
10	5,22	3,48	3,31	3,26	3,23
12	4,12	2,74	2,60	2,54	2,50

Tabelle 7: Die Fröschung des Reibungswiderstandes in unbegrenzter Flüssigkeit auf Grund der Körperförm nach Hoerner. (Ein Vergleich)

Körper oder Verteilung	a/b	l/b	$\frac{\Delta \xi_r}{\xi_{rp}}$ [%]		
			nach Hoerner		nach dem Spiegelungsprinzip
			Gl. 19 a	Gl. 19 b	
Ovoid	6	6,503	7,70	9,06	8,78
	8	8,502	5,88	6,06	6,71
	10	10,501	4,76	4,41	5,47
	12	12,501	3,98	3,40	4,43
Rotationsellipsoid	6	6,083	8,22	10,00	6,98
	8	8,064	6,20	6,56	4,43
	10	10,050	4,76	4,71	3,31
	12	12,041	4,15	3,62	2,60
$\eta = (1 - \xi^2)^2$	6	6	8,33	10,22	6,77
	8	8	6,25	6,63	4,33
	10	10	5,00	4,74	3,26
	12	12	4,16	3,72	2,54
$\eta = 1 - 1,5 \xi^2 + 0,5 \xi^4$	6	6,047	8,27	10,10	6,61
	8	8,034	6,23	6,59	4,26
	10	10,026	4,87	4,70	3,23
	12	12,022	4,16	3,62	2,50

Tabelle 8: Die Mittelwerte der Geschwindigkeit und die Erhöhung des Reibungswiderstandes beim Ovoid.

a/b	h/b	φ	$\frac{\sqrt{F_{\text{R}}}}{h}$	$\frac{u_{\text{M}}}{u_0}$	$\frac{u_{\text{M}} - u_{\text{mh}}}{u_0} [\%]$	$\frac{u_{\text{mh}}}{u_0}$	$\frac{u_{\text{mh}} - u_{\text{m}}}{u_{\text{m}}} [\%]$	$\frac{\Delta \xi_{\text{rh}}}{\xi_{\text{rh}}} [\%]$	$\frac{\xi_{\text{r}}}{\xi_{\text{rp}}} [\%]$
6	2	0,8865	0,6267	1,0422	-2,21	1,0643	2,04	4,12	13,27
	3		0,4178	1,0283	-2,45	1,0528	0,94	1,89	10,84
	4		0,3133	1,0219	-2,65	1,0484	0,52	1,04	9,91
	5		0,2507	1,0186	-2,81	1,0467	0,35	0,70	9,56
	6		0,2089	1,0168	-2,85	1,0453	0,22	0,44	9,27
	8		0,1567	1,0150	-2,92	1,0443	0,12	0,24	9,06
	10		0,1253	1,0143	-2,95	1,0438	0,08	0,17	8,95
	∞		0	1,0135	-2,95	1,0430	0	0	8,78
8	2	0,9105	0,6267	1,0315	-1,93	1,0508	1,72	3,47	10,42
	3		0,4178	1,0210	-2,10	1,0420	0,87	1,75	8,58
	4		0,3133	1,0159	-2,23	1,0382	0,52	1,00	7,79
	5		0,2507	1,0130	-2,35	1,0365	0,34	0,68	7,43
	6		0,2089	1,0113	-2,41	1,0354	0,23	0,46	7,21
	8		0,1567	1,0095	-2,49	1,0344	0,13	0,26	7,00
	10		0,1253	1,0087	-2,52	1,0339	0,08	0,16	6,89
	∞		0	1,0077	-2,53	1,0330	0	0	6,71
10	2	0,9218	0,6267	1,0251	-1,69	1,0420	1,46	2,94	8,58
	3		0,4178	1,0167	-1,84	1,0351	0,79	1,59	7,14
	4		0,3133	1,0126	-1,94	1,0320	0,48	0,97	6,50
	5		0,2507	1,0101	-2,05	1,0306	0,35	0,69	6,21
	6		0,2089	1,0086	-2,09	1,0295	0,24	0,48	5,99
	8		0,1567	1,0069	-2,16	1,0286	0,15	0,30	5,80
	10		0,1253	1,0061	-2,18	1,0279	0,09	0,19	5,66
	∞		0	1,0050	-2,20	1,0270	0	0	5,47
12	2	0,9372	0,6267	1,0209	-1,39	1,0348	1,26	2,54	7,08
	3		0,4178	1,0139	-1,51	1,0290	0,69	1,38	5,88
	4		0,3133	1,0104	-1,59	1,0263	0,44	0,89	5,33
	5		0,2507	1,0084	-1,68	1,0251	0,32	0,64	5,08
	6		0,2089	1,0070	-1,73	1,0243	0,23	0,46	4,92
	8		0,1567	1,0055	-1,79	1,0234	0,15	0,30	4,73
	10		0,1253	1,0047	-1,82	1,0229	0,10	0,20	4,63
	∞		0	1,0035	-1,84	1,0219	0	0	4,43

Tabelle 9: Die Mittelwerte der Geschwindigkeit und die Erhöhung des Reibungswiderstandes beim Rotationsellipsoid ($\varphi = 2/3$)

a/b	h/b	$\frac{\sqrt{F_{\text{R}}}}{h}$	$\frac{u_{\text{R}}}{u_0}$	$\frac{u_{\text{R}} - u_{\text{mh}}}{u_0}$	$\frac{u_{\text{mh}}}{u_0}$	$\frac{u_{\text{mh}} - u_{\text{m}}}{u_{\text{m}}}$	$\frac{\Delta \zeta_{\text{rh}}}{\zeta_{\text{r}}}$	$\frac{\Delta \zeta_{\text{r}}}{\zeta_{\text{rp}}}$
				[%]		[%]	[%]	[%]
6	2	0,6267	1,0780	2,40	1,0540	1,71	3,50	10,67
	3	0,4178	1,0588	1,72	1,0416	0,70	1,40	8,49
	4	0,3133	1,0516	1,36	1,0380	0,34	0,68	7,74
	5	0,2507	1,0484	1,19	1,0365	0,19	0,38	7,43
	6	0,2089	1,0468	1,11	1,0357	0,11	0,22	7,27
	8	0,1567	1,0454	1,05	1,0349	0,06	0,12	7,10
	10	0,1253	1,0449	1,03	1,0346	0,03	0,06	7,04
	∞	0	1,0443	1,00	1,0343	0	0	6,98
8	2	0,6267	1,0592	2,10	1,0382	1,63	3,26	7,79
	3	0,4178	1,0432	1,47	1,0285	0,66	1,32	5,78
	4	0,3133	1,0367	1,15	1,0252	0,33	0,66	5,10
	5	0,2507	1,0335	0,97	1,0238	0,19	0,38	4,82
	6	0,2089	1,0319	0,89	1,0230	0,11	0,22	4,65
	8	0,1567	1,0303	0,78	1,0225	0,06	0,12	4,55
	10	0,1253	1,0297	0,75	1,0222	0,03	0,06	4,49
	∞	0	1,0289	0,70	1,0219	0	0	4,43
10	2	0,6267	1,0477	1,65	1,0312	1,48	2,96	6,34
	3	0,4178	1,0342	1,16	1,0226	0,62	1,24	4,57
	4	0,3133	1,0284	0,88	1,0196	0,32	0,64	3,96
	5	0,2507	1,0254	0,72	1,0182	0,18	0,36	3,67
	6	0,2089	1,0238	0,63	1,0175	0,11	0,22	3,53
	8	0,1567	1,0221	0,51	1,0170	0,06	0,12	3,43
	10	0,1253	1,0214	0,47	1,0167	0,03	0,06	3,37
	∞	0	1,0206	0,42	1,0164	0	0	3,31
12	2	0,6267	1,0400	1,36	1,0264	1,35	2,70	5,35
	3	0,4178	1,0283	0,98	1,0185	0,56	1,12	3,73
	4	0,3133	1,0231	0,72	1,0159	0,30	0,60	3,21
	5	0,2507	1,0204	0,58	1,0146	0,17	0,34	2,94
	6	0,2089	1,0188	0,48	1,0140	0,11	0,22	2,82
	8	0,1567	1,0172	0,37	1,0135	0,06	0,12	2,72
	10	0,1253	1,0164	0,32	1,0132	0,03	0,06	2,66
	∞	0	1,0154	0,25	1,0129	0	0	2,60

Tabelle 10: Die Mittelwerte der Geschwindigkeit und die Erhöhung des Reibungswiderstandes bei dem durch die Verteilung $\eta = (1 - \xi^2)^2$ erzeugten Körper. ($\varphi = 0,533..$)

a/b	h/b	$\frac{\sqrt{F_{\text{R}}}}{h}$	$\frac{u_{\text{R}}}{u_0}$	$\frac{u_{\text{R}} - u_{\text{mh}}}{u_0}$	$\frac{u_{\text{mh}}}{u_0}$	$\frac{u_{\text{mh}} - u_{\text{m}}}{u_{\text{m}}}$	$\frac{\Delta \zeta_{\text{rh}}}{\zeta_{\text{r}}}$	$\frac{\Delta \zeta_{\text{r}}}{\zeta_{\text{rp}}}$
				[%]		[%]	[%]	[%]
6	2	0,6267	1,1007	5,04	1,0503	1,70	3,40	10,31
	3	0,4178	1,0792	3,89	1,0403	0,70	1,40	8,22
	4	0,3133	1,0719	3,52	1,0367	0,34	0,68	7,47
	5	0,2507	1,0690	3,38	1,0352	0,19	0,38	7,16
	6	0,2089	1,0675	3,31	1,0344	0,11	0,22	7,00
	8	0,1567	1,0663	3,24	1,0339	0,06	0,12	6,89
	10	0,1253	1,0656	3,20	1,0336	0,03	0,06	6,83
	∞	0	1,0653	3,20	1,0333	0	0	6,77
8	2	0,6267	1,0769	3,94	1,0375	1,61	3,22	7,64
	3	0,4178	1,0583	2,97	1,0282	0,68	1,36	5,72
	4	0,3133	1,0514	2,67	1,0247	0,33	0,66	5,00
	5	0,2507	1,0482	2,49	1,0233	0,19	0,38	4,71
	6	0,2089	1,0467	2,42	1,0225	0,11	0,22	4,55
	8	0,1567	1,0452	2,32	1,0220	0,06	0,12	4,45
	10	0,1253	1,0447	2,30	1,0217	0,03	0,06	4,39
	∞	0	1,0440	2,26	1,0214	0	0	4,33
10	2	0,6267	1,0623	3,15	1,0308	1,46	2,92	6,25
	3	0,4178	1,0461	2,33	1,0228	0,66	1,32	4,61
	4	0,3133	1,0396	2,02	1,0194	0,32	0,64	3,92
	5	0,2507	1,0366	1,86	1,0180	0,18	0,36	3,63
	6	0,2089	1,0349	1,76	1,0173	0,11	0,22	3,49
	8	0,1567	1,0334	1,66	1,0168	0,06	0,12	3,39
	10	0,1253	1,0327	1,62	1,0165	0,03	0,06	3,33
	∞	0	1,0320	1,58	1,0162	0	0	3,27
12	2	0,6267	1,0523	2,61	1,0262	1,36	2,72	5,31
	3	0,4178	1,0381	1,91	1,0190	0,64	1,28	3,84
	4	0,3133	1,0322	1,66	1,0156	0,30	0,60	3,14
	5	0,2507	1,0292	1,49	1,0143	0,17	0,34	2,88
	6	0,2089	1,0276	1,39	1,0137	0,11	0,22	2,76
	8	0,1567	1,0260	1,28	1,0132	0,06	0,12	2,66
	10	0,1253	1,0253	1,24	1,0129	0,03	0,06	2,60
	∞	0	1,0245	1,19	1,0126	0	0	2,54

Tabelle 11: Die Mittelwerte der Geschwindigkeit und die Erhöhung des Reibungswiderstandes bei dem durch die Verteilung $\eta = 1 - 1,5\xi^2 + 0,5\xi^4$ erzeugten Körper. ($\varphi = 0,6$)

a/b	h/b	$\frac{\sqrt{F_{\text{R}}}}{h}$	$\frac{u_{\text{R}}}{u_0}$	$\frac{u_{\text{R}} - u_{\text{mh}}}{u_0}$	$\frac{u_{\text{mh}}}{u_0}$	$\frac{u_{\text{mh}} - u_{\text{m}}}{u_{\text{m}}}$	$\frac{\Delta \zeta_{\text{rh}}}{\zeta_{\text{r}}}$	$\frac{\Delta \zeta_{\text{r}}}{\zeta_{\text{rP}}}$
				[%]		[%]	[%]	[%]
6	2	0,6267	1,0892	3,94	1,0498	1,73	3,46	10,21
	3	0,4178	1,0688	2,93	1,0395	0,70	1,40	8,06
	4	0,3133	1,0616	2,57	1,0350	0,34	0,68	7,31
	5	0,2507	1,0586	2,42	1,0344	0,19	0,38	7,00
	6	0,2089	1,0570	2,34	1,0336	0,11	0,22	6,83
	8	0,1567	1,0557	2,26	1,0331	0,06	0,12	6,73
	10	0,1253	1,0551	2,23	1,0328	0,03	0,06	6,67
	∞	0	1,0546	2,21	1,0325	0	0	6,61
8	2	0,6267	1,0679	3,06	1,0373	1,62	3,24	7,60
	3	0,4178	1,0507	2,27	1,0280	0,69	1,38	5,68
	4	0,3133	1,0440	1,96	1,0244	0,33	0,66	4,94
	5	0,2507	1,0408	1,78	1,0230	0,19	0,38	4,65
	6	0,2089	1,0392	1,70	1,0222	0,11	0,22	4,49
	8	0,1567	1,0377	1,60	1,0217	0,06	0,12	4,39
	10	0,1253	1,0371	1,57	1,0214	0,03	0,06	4,33
	∞	0	1,0364	1,53	1,0211	0	0	4,26
10	2	0,6267	1,0549	2,42	1,0307	1,47	2,94	6,23
	3	0,4178	1,0401	1,74	1,0227	0,67	1,34	4,59
	4	0,3133	1,0340	1,48	1,0192	0,32	0,64	3,88
	5	0,2507	1,0309	1,31	1,0178	0,18	0,36	3,59
	6	0,2089	1,0291	1,22	1,0171	0,11	0,22	3,45
	8	0,1567	1,0277	1,11	1,0166	0,06	0,12	3,35
	10	0,1253	1,0270	1,07	1,0163	0,03	0,06	3,29
	∞	0	1,0262	1,02	1,0160	0	0	3,23
12	2	0,6267	1,0461	2,02	1,0259	1,35	2,70	5,25
	3	0,4178	1,0332	1,42	1,0190	0,64	1,28	3,84
	4	0,3133	1,0276	1,21	1,0155	0,31	0,62	3,12
	5	0,2507	1,0248	1,07	1,0141	0,17	0,34	2,84
	6	0,2089	1,0232	0,98	1,0134	0,10	0,20	2,70
	8	0,1567	1,0215	0,85	1,0130	0,06	0,12	2,62
	10	0,1253	1,0208	0,81	1,0127	0,03	0,06	2,56
	∞	0	1,0199	0,74	1,0124	0	0	2,50

Tabelle 12: Die Zunahme der Geschwindigkeit und des Reibungs-
widerstandes nach der Näherungsformel von Lock:

$$\frac{\Delta u_h}{u_o} = \tau \lambda_1 \left(\frac{b}{h}\right)^2 \frac{l}{h} Q$$

$Q = 1$ für $\frac{l}{h} < 1$; $Q = 1 - \left(\frac{l}{h}\right)^2 q$ für $\frac{l}{h} \geq 1$ mit $q = 0,2$ für $a/b = 6$
und $q = 0,22$ für $a/b \geq 8$

$\tau = 0,797$ für den Kreisquerschnitt

a/b	h/b	Ovoid			Rotationsellipsoid		
		l/h	$\frac{\Delta u_h}{u_o}$	$\frac{\Delta \xi_{rh}}{\xi_r} [\%]$	l/h	$\frac{\Delta u_h}{u_o}$	$\frac{\Delta \xi_{rh}}{\xi_r} [\%]$
6	6	1,0838	0,0157	3,17	1,0138	0,0124	2,49
	8	0,8129	0,0094	1,89	0,7604	0,0066	1,32
	10	0,6503	0,0048	0,96	0,6083	0,0033	0,66
8	6	1,4186	0,0164	3,32	1,3440	0,0123	2,47
	8	1,0627	0,0094	1,89	1,0800	0,0068	1,36
	10	0,8502	0,0064	1,28	0,8064	0,0044	0,88
10	6	1,7502	0,0120	2,41	1,6750	0,0096	1,93
	8	1,3126	0,0097	1,95	1,2563	0,0069	1,38
	10	1,0501	0,0060	1,20	1,0050	0,0042	0,84
12	6	2,0835	0,0020	0,40	2,0059	0,0034	0,68
	8	1,5626	0,0086	1,73	1,5052	0,0063	1,26
	10	1,2501	0,0062	1,24	1,2041	0,0044	0,88