

69 | Juni 1960

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

G. Collatz

Theoretische Behandlung der gegenseitigen Beeinflussung zweier unendlich langer Kreiszyylinder beim Begegnen bzw. Überholen in unbeschränktem Wasser

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

**Theoretische Behandlung der gegenseitigen Beeinflussung zweier unendlich langer
Kreiszyylinder beim Begegnen bzw. Überholen in unbeschränktem Wasser**

G. Collatz, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1960

© Technische Universität Hamburg-Harburg
Schriftenreihe Schiffbau
Schwarzenbergstraße 95c
D-21073 Hamburg

<http://www.tuhh.de/vss>

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Prof. Dr.-Ing. G. Weinblum

Theoretische Behandlung der gegenseitigen Beein-
flussung zweier unendlich langer Kreiszytinder
beim Begegnen bzw. Überholen in unbeschränktem
Wasser

von

Dipl.-Ing. Günter Collatz

Juni 1960

Einführung

Wenn sich zwei Schiffe begegnen, überholen oder in einem geringen Abstand nebeneinander herfahren, so beeinflussen sich ihre individuellen Strömungsfelder. Dadurch werden an den Schiffen Kräfte und Momente hervorgerufen. Die Komponente der Kraft in Fahrtrichtung bewirkt eine Änderung des ursprünglichen Widerstandes des jeweiligen Schiffes, die Komponente senkrecht zur Fahrtrichtung ein Abstoßen bzw. Anziehen beider Schiffe. Beim Moment handelt es sich um ein Giermoment, welches zur Folge hat, dass sich das Schiff um eine lotrechte Achse dreht oder, wie man es im Allgemeinen nennt, "aus dem Ruder läuft". Die Größen von Kraft und Moment sind abhängig von der Form, der Grösse und der jeweiligen Geschwindigkeit beider Schiffe. Auch die Tiefe des Wassers ist von Bedeutung. Bei flachem Wasser treten wesentlich stärkere Effekte auf als beim Wasser mit unbeschränkter Tiefe.

Die theoretische Behandlung der gegenseitigen Beeinflussung zweier schiffsähnlicher Körper unter Berücksichtigung der freien Wasseroberfläche und der beschränkten Wassertiefe ist recht umfangreich. Die Schwierigkeit liegt vor allem in der Darstellung der Körper, d.h. es muss ein mathematischer Ausdruck gefunden werden, der die Umströmung der beiden Körper beschreibt. In der Hydrodynamik spricht man davon, dass die Oberflächenbedingung erfüllt sein muss, eine Bedingung, die der Tatsache Rechnung trägt, dass durch die Oberfläche eines festen Körpers keine Flüssigkeit hindurchtreten kann. Erst wenn die Darstellung der Körper gelungen ist, lassen sich die Kräfte und Momente bestimmen, die die beiden Körper aufeinander ausüben.

Eine weitere Schwierigkeit liegt in der Tatsache, dass sich die Körper beim Begegnen oder Überholen in einer gekrümmten, instationären Strömung befinden. Erst die Arbeit von W. E. Cummins [1], die im Jahre 1957 erschien, ermöglicht es, diesen allgemeinen Teil theoretisch zu lösen.

Um zunächst einmal über die Grösse und Art der auftretenden Kräfte einen Aufschluss zu erhalten, wurde als einfachstes Beispiel der Fall zweier unendlich langer Kreiszyllinder in unbeschränktem Wasser behandelt. Dieser Fall ist im Verhältnis zu allen anderen insofern von Vorteil, da es sich erstens um eine "ebene Strömung" handelt, die sich leichter behandeln lässt als eine räumliche Strömung. Ausserdem bietet der Kreis als einfachste Körperkontur die Möglichkeit, die Oberflächenbedingung beim Vorhandensein eines zweiten Körpers auf relativ einfache Weise exakt zu erfüllen.

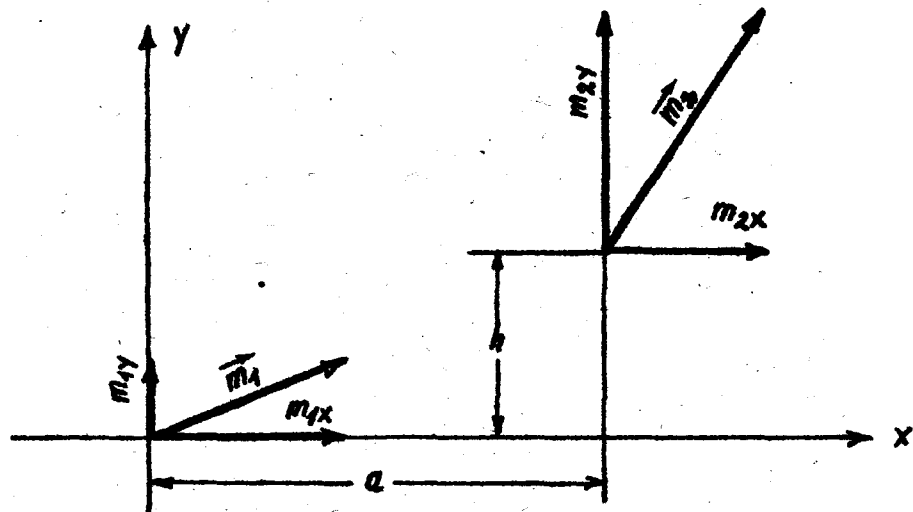
Prof. Weinblum hat in seiner Arbeit [2] im Jahre 1933 ebenfalls einfache Körper wie Kugel und unendlich lange Kreiszyllinder behandelt. Allerdings gab er Näherungslösungen an, die nur Gültigkeit haben, wenn sich die beiden Körper nicht zu nahe beieinander bewegen. Auch war er zur damaligen Zeit nicht in der Lage, die instationären Kraftanteile zu bestimmen.

In der vorliegenden Arbeit wird nun gezeigt, dass eine Vernachlässigung der instationären Kraftanteile nicht statthaft ist. Im Fall, dass sich zwei Kreiszyllinder begegnen, sind die stationären Kraftanteile so gerichtet, dass sich die beiden Körper abstossen. Die instationären Kraftanteile sind entgegengesetzt gerichtet, dabei etwa doppelt so gross. Als resultierende Kraft ergibt sich also eine Kraft, die eine Anziehung bewirkt. Würde man die instationären Kräfte vernachlässigen, bekäme man ein physikalisch völlig falsches Bild.

Dem eigentlichen Thema dieser Arbeit, der gegenseitigen Beeinflussung zweier unendlich langer Kreiszyllinder, werden zwei Betrachtungen vorangestellt. Im ersten Abschnitt werden die stationären Kräfte und Momente bestimmt, die zwei ebene Dipole aufeinander ausüben. Im zweiten Abschnitt wird die Spiegelung am Kreis behandelt, ein Theorem, welches die exakte Erfüllung der Oberflächenbedingung zweier Kreiszyllinder ermöglicht.

I. Kräfte und Momente, die zwei ebene Dipole aufeinander ausüben. Literatur: [3], [4]

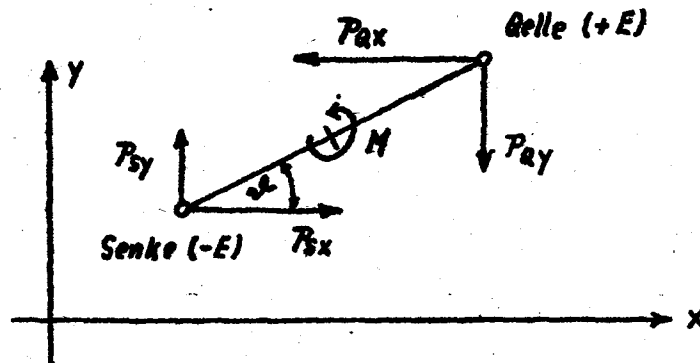
Es ist gefragt nach der Kraft, die zwei ebene Dipole mit den Dipolmomenten \vec{m}_1 und \vec{m}_2 aufeinander ausüben. Der Ursprung des Koordinatensystems sei in den Dipol 1 gelegt. Der Dipol 2 befindet sich in Punkt (a, h)



Die Dipolmomente sind gerichtete Größen und wurden aus diesem Grunde durch Pfeile dargestellt. Als positive Richtung der Dipolachse soll diejenige bezeichnet werden, die mit der Richtung der aus dem Dipol herauskommenden Strömung übereinstimmt. Wie jeder Vektor lassen sich die Dipolmomente in Komponenten zerlegen. Es soll beispielsweise m_{1x} die X-Komponente des Dipolmoments \vec{m}_1 bedeuten.

Um die Kräfte und das Moment zu erhalten, die auf einen Dipol in einer beliebigen stationären Strömung wirken, wird ausgegangen von einer Quelle und einer Senke gleicher Ergiebigkeit E , die sich im Abstand ϵ voneinander befinden. An der Senke habe die ungestörte Anströmgeschwindigkeit \vec{c} die Komponenten u_1 in

X-Richtung und v_1 in Y-Richtung. An der Quelle seien die Komponenten der Geschwindigkeit u_2 und v_2



Nach Lagally sind die Komponenten der Kraft, die die ungestörte Grundströmung auf die Senke ausübt:

$$P_{sx} = \rho E u_1$$

$$P_{sy} = \rho E v_1$$

Auf die Quelle wirken die Komponenten:

$$P_{ax} = -\rho E u_2$$

$$P_{ay} = -\rho E v_2$$

Da das System - Quelle und Senke - als ganzes betrachtet werden soll, sind die Kräfte, die Quelle und Senke aufeinander ausüben, innere Kräfte, und brauchen nicht berücksichtigt zu werden.

Auf das gesamte Quell-Senken-System wirken also folgende Kräfte:

$$P_x = P_{sx} + P_{ax} = -\rho E (u_2 - u_1)$$

$$P_y = P_{sy} + P_{ay} = -\rho E (v_2 - v_1)$$

Ausserdem wirkt ein Moment (bezogen auf die Mitte des Abstandes ε ; positiver Drehsinn links herum):

$$\begin{aligned} M &= (P_{sx} - P_{ax}) \frac{1}{2} \varepsilon \sin \vartheta - (P_{sy} - P_{ay}) \frac{1}{2} \varepsilon \cos \vartheta \\ &= \rho E E \left[\frac{1}{2} (u_1 + u_2) \sin \vartheta - \frac{1}{2} (v_1 + v_2) \cos \vartheta \right] \end{aligned}$$

Macht man nun den Übergang vom Quell-Senken-System zum Dipol, indem man den Abstand ε gegen Null gehen lässt, so kann lineare Geschwindigkeitsverteilung vorausgesetzt werden. Damit wird:

$$(u_2 - u_1) = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \vartheta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \vartheta \right)$$

$$(v_2 - v_1) = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = \varepsilon \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cos \vartheta + \frac{\partial v}{\partial y} \sin \vartheta \right)$$

Die Ausdrücke

$$\frac{1}{2} (u_1 + u_2) = u$$

$$\frac{1}{2} (v_1 + v_2) = v$$

in der Gleichung für das Moment stellen bei linearer Geschwindigkeitsverteilung Mittelwerte, d.h. für den Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ die Komponenten der Geschwin-

keit am Ort des Dipols dar.

Bedenkt man ferner, dass

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \cdot E = |\vec{m}|$$

ist, so ergeben sich für die Kräfte und das Moment, die auf einen ebenen Dipol in einer beliebigen stationären Strömung wirken, folgende Ausdrücke:

$$P_x = -g |\vec{m}| \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \vartheta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \vartheta \right)$$

Gl. 1a

$$P_y = -g |\vec{m}| \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cos \vartheta + \frac{\partial v}{\partial y} \sin \vartheta \right)$$

$$M = g |\vec{m}| (u \sin \vartheta - v \cos \vartheta)$$

In Vektorschreibweise:

$$\vec{P} = -g (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{c}$$

Gl. 1b

$$\vec{M} = -g \vec{m} \times \vec{c}$$

Führt man die Komponenten des Dipolmomentes ein,

$$m_x = |\vec{m}| \cos \vartheta \quad m_y = |\vec{m}| \sin \vartheta$$

so lauten die obigen Gleichungen:

$$P_x = -g \left(m_x \frac{\partial u}{\partial x} + m_y \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Gl. 1c

$$P_y = -g \left(m_x \frac{\partial v}{\partial x} + m_y \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$M = -g (m_x v - m_y u)$$

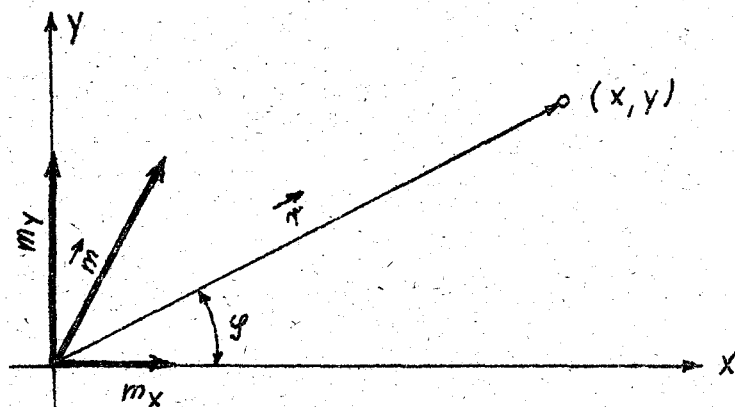
Um nun die Kräfte und das Moment zu erhalten, die zwei Dipole aufeinander ausüben, muss die von dem einen Dipol am Ort des anderen Dipols induzierte Geschwindigkeit bzw. ihre Komponenten und deren örtlichen Ableitungen bekannt sein.

Das Potential eines ebenen Dipols, der sich im Ursprung befindet, lautet:

$$\phi = - \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{2\pi r^2} = - \frac{|\vec{m}|}{2\pi} \cdot \frac{\cos(\vec{m}, \vec{r})}{r} \quad \text{Gl. 2a}$$

Dabei bedeutet \vec{r} der Ortsvektor zum Aufpunkt. Sein Betrag ist

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Ist das Dipolmoment in seine Komponenten zerlegt, so kann man die Gleichung für das Potential auch folgendermassen schreiben

$$\phi = - \frac{1}{2\pi r^2} [m_x r \cos \varphi + m_y r \cos(90 - \varphi)] \quad \text{Gl. 2b}$$

- 8 -

$$r \cos \varphi = x$$

$$r \cos(90-\varphi) = r \sin \varphi = y$$

Gl. 2c

$$\phi = -\frac{1}{2\pi} \left[m_x \frac{x}{x^2+y^2} + m_y \frac{y}{x^2+y^2} \right]$$

Für die Komponenten der Geschwindigkeit und deren örtliche Ableitungen ergeben sich daraus folgende Ausdrücke:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \left[m_x \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + m_y \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \right]$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{2\pi} \left[m_x \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - m_y \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \right]$$

Gl. 3a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2\pi} \left[m_x \frac{2(3y^2-x^2)x}{(x^2+y^2)^3} - m_y \frac{2(3x^2-y^2)y}{(x^2+y^2)^3} \right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi} \left[m_x \frac{2(3x^2-y^2)y}{(x^2+y^2)^3} + m_y \frac{2(3y^2-x^2)x}{(x^2+y^2)^3} \right]$$

Führt man noch die folgenden Abkürzungen ein, die nur vom Verhältnis a/h abhängig sind;

$$\alpha = h^2 \frac{a^2-h^2}{(a^2+h^2)^2} = \frac{(\frac{a}{h})^2-1}{[(\frac{a}{h})^2+1]^2}$$

$$\beta = h^2 \frac{2ah}{(a^2+h^2)^2} = \frac{2\frac{a}{h}}{[(\frac{a}{h})^2+1]^2}$$

Gl. 3b

$$\gamma = h^3 \frac{2(3h^2-a^2)a}{(a^2+h^2)^3} = 2\frac{a}{h} \frac{3-(\frac{a}{h})^2}{[(\frac{a}{h})^2+1]^3}$$

$$\delta = h^3 \frac{2(3a^2-h^2)h}{(a^2+h^2)^3} = 2 \frac{3(\frac{a}{h})^2-1}{[(\frac{a}{h})^2+1]^3}$$

so lauten die vom Dipol \vec{m}_1 am Punkt (a, h) induzierten Geschwindigkeiten und deren Ableitungen:

$$u = \frac{1}{2\pi h^2} [m_{1x} \alpha + m_{1y} \beta]$$

$$v = \frac{1}{2\pi h^2} [m_{1x} \beta - m_{1y} \alpha]$$

Gl. 3c

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2\pi h^2} [m_{1x} \gamma - m_{1y} \delta]$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi h^2} [m_{1x} \delta + m_{1y} \gamma]$$

Setzt man diese Gleichungen in die Gleichungen 1c ein, so ist die Frage nach den Kräften und Momenten die der Dipol \vec{m}_1 auf den Dipol \vec{m}_2 ausübt, gelöst. Es ergeben sich folgende endgültige Ausdrücke:

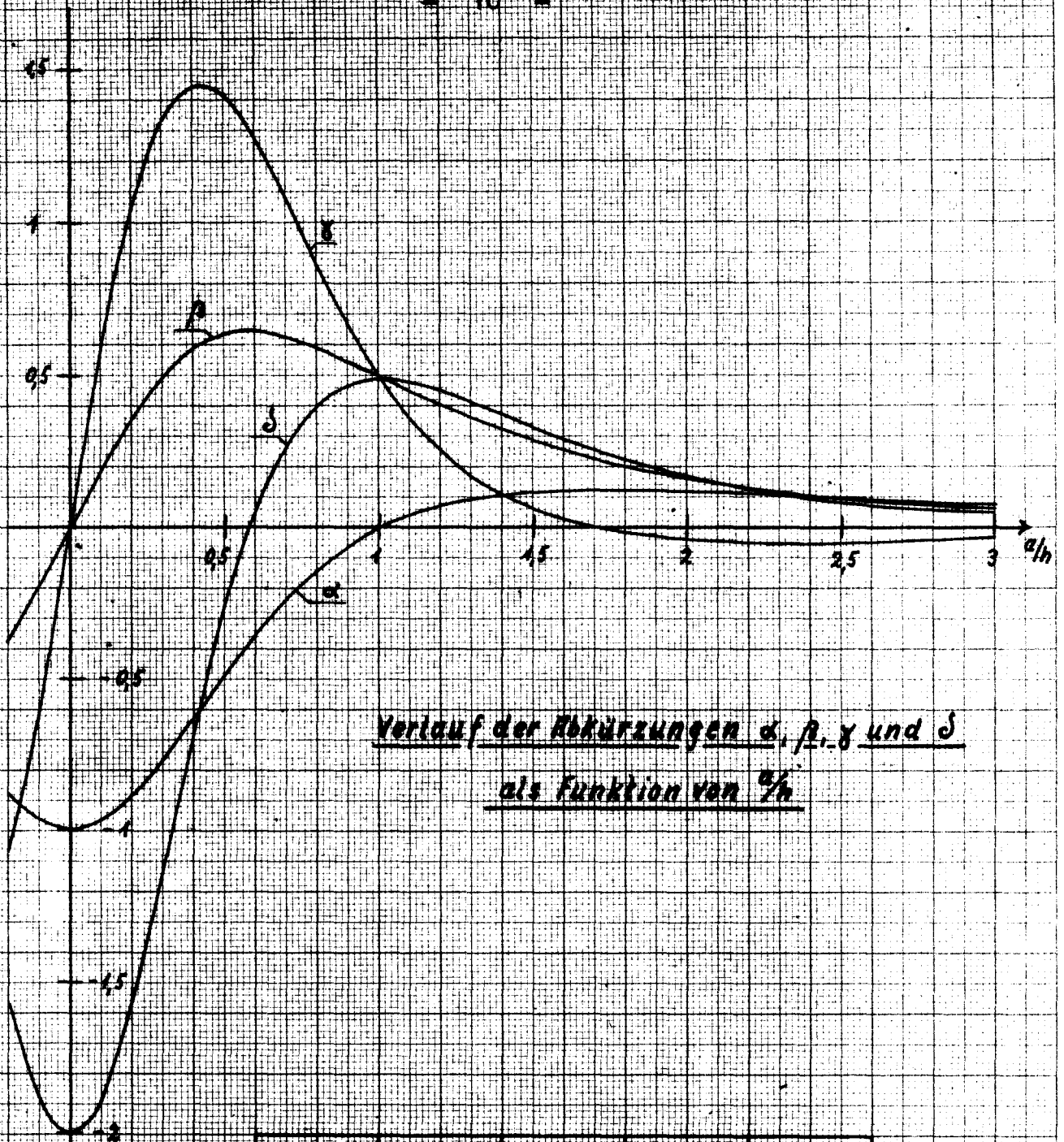
$$P_x = \frac{g}{2\pi h^3} [-(m_{1x} m_{2x} - m_{1y} m_{2y}) \gamma + (m_{1x} m_{2y} + m_{1y} m_{2x}) \delta]$$

Gl. 4

$$P_y = \frac{g}{2\pi h^3} [(m_{1x} m_{2x} - m_{1y} m_{2y}) \delta + (m_{1x} m_{2y} + m_{1y} m_{2x}) \gamma]$$

$$M = \frac{g}{2\pi h^2} [-(m_{1x} m_{2x} - m_{1y} m_{2y}) \beta + (m_{1x} m_{2y} + m_{1y} m_{2x}) \alpha]$$

Es sei noch bemerkt, dass diese Kräfte und Momente auf die Längeneinheit der Dipole bezogen sind. (Analog zur Ergiebigkeit einer ebenen Quelle).



Verlauf der Abkürzungen α , β , γ und δ
als Funktion von $\frac{a}{h}$

$\frac{a}{h}$	α	β	γ	δ
0	-1,0000	0	0	-2,0000
01	-0,9705	0,1961	0,6804	-1,8329
02	-0,9276	0,3818	1,0726	-1,5646
03	-0,8757	0,5550	1,3182	-1,1274
04	-0,8193	0,7145	1,4558	-0,6663
05	-0,7500	0,8500	1,4800	-0,2560
06	-0,6660	0,9600	1,3974	0,2636
07	-0,5728	0,9949	1,2361	0,7174
10	0	1,0000	0,5000	0,5000
12	0,0707	1,0011	0,2877	0,4571
15	0,1782	0,9970	0,0933	0,3750
2	0,3200	0,9600	-0,2000	0,1960
3	0,5000	0,6660	-0,6660	0,0320
3	0,6667	0,3333	-0,6667	0,0111

II. Spiegelung am Kreis Literatur [5] Seite 149

Ist das komplexe Potential einer ebenen Strömung $\Omega(z)$ und bringt man nachträglich in diese Strömung einen Zylinder mit dem Radius r hinein, so lautet jetzt das komplexe Potential:

$$\Omega(z) + \bar{\Omega}\left(\frac{r^2}{z}\right) \quad \text{Gl. 5}$$

Dabei bedeutet $\bar{\Omega}$ die zu Ω konjugiert komplexe Funktion, so wie $\bar{z} = x - iy$ die zu $z = x + iy$ konjugiert komplexe Zahl bedeutet.

Die Begründung ist die: Für den Kreisumfang $|z| = r$ verschwindet für das zusammengesetzte Potential $\Omega + \bar{\Omega}$ der Imaginärteil, d.h. die Stromfunktion ψ ist Null, der Kreisumfang ist also eine Stromlinie. Im folgenden Beispiel wird auf die Begründung noch näher eingegangen.

1.) Das Abbild einer ebenen Quelle in bezug auf einen Kreis.

Im Punkt $P(1,0)$ befindet sich eine ebene Quelle mit der Ergiebigkeit E . Das Potential für diese Quelle lautet:

$$\phi = \frac{E}{2\pi} \ln |R| \quad \text{Gl. 6a}$$

Denn die Radialkomponente der induzierten Geschwindigkeit ergibt sich daraus zu:

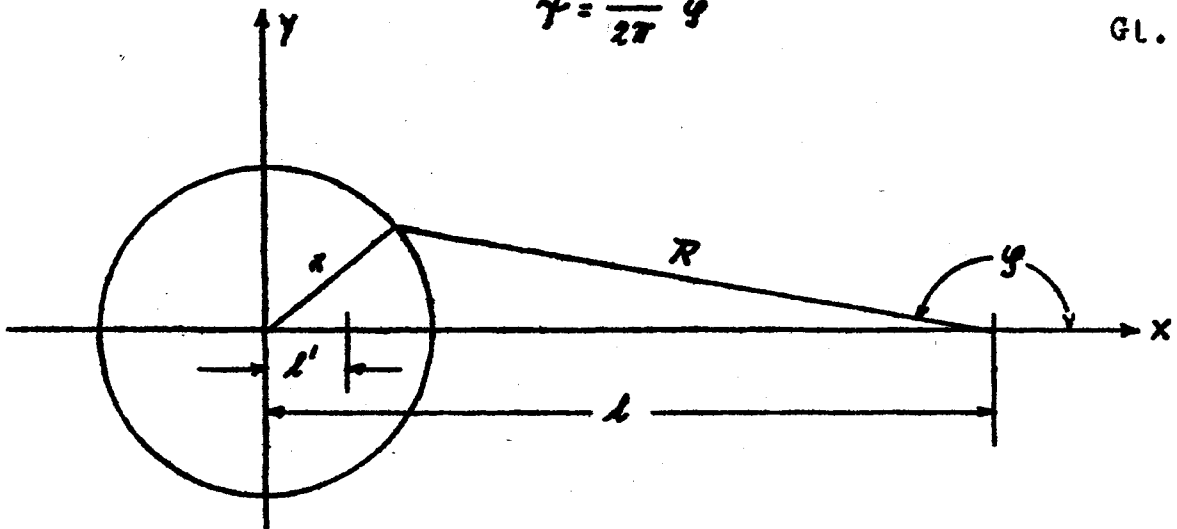
$$v_R = \frac{\partial \phi}{\partial R} = \frac{E}{2\pi |R|} \quad v_R \cdot 2\pi |R| = E$$

Und der Fluss über eine kreisförmige Kontrollfläche ist gleich der Ergiebigkeit E

Der Ausdruck für die Stromfunktion ist:

$$\gamma = \frac{E}{2\pi} \varphi$$

Gl. 6b



Damit lautet das komplexe Potential

$$\Omega = \phi + i\gamma = \frac{E}{2\pi} [\ln|R| + i\varphi]$$

Gl. 6c

Nun ist:

$$R = |R| e^{i\varphi} = z - l$$

$$e^{i\varphi} = \frac{z-l}{|R|} \quad i\varphi = \ln \frac{z-l}{|R|}$$

Es ergibt sich schliesslich:

$$\Omega = \frac{E}{2\pi} \left[\ln|R| + \ln \frac{z-l}{|R|} \right] = \frac{E}{2\pi} \ln(z-l)$$

Gl. 6d

Bringt man nun in die von dieser Quelle induzierten Strömung einen Zylinder hinein, so ergibt sich das neue Potential, indem man zu dem obigen Potential das folgende hinzufügt.

$$\bar{\Omega} = \frac{E}{2\pi} \ln\left(\frac{r^2}{z} - 1\right) \quad \text{Gl. 7a}$$

Für den Kreisumfang ist $\frac{r^2}{z} = \bar{z}$, damit lautet das gesamte komplexe Potential für den Kreisumfang:

$$\begin{aligned} \Omega + \bar{\Omega} &= \frac{E}{2\pi} [\ln(z-1) + \ln(\bar{z}-1)] \\ &= \frac{E}{2\pi} \ln[(z-1)(\bar{z}-1)] \\ &= \frac{E}{2\pi} \ln[z\bar{z} - 1(z+\bar{z}) + 1^2] \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist reell, da $z \cdot \bar{z} = r^2$ und $z + \bar{z} = 2x$ ist. Das bedeutet, wie oben bereits ausgeführt wurde, dass der Kreisumfang eine Stromlinie ist.

Es entsteht nun die Frage, durch welche Singularitäten innerhalb des Kreises sich das Potential $\bar{\Omega}$ darstellen lässt. Man spricht in diesem Fall von dem Abbild der Quelle in bezug auf den Kreis.

Durch eine einfache Umformung erhält man:

$$\begin{aligned}\bar{\Omega} &= \frac{E}{2\pi} \ln \left(\frac{r^2}{z} - 1 \right) \\ &= \frac{E}{2\pi} \ln \left[-\frac{l}{z} \left(z - \frac{r^2}{l} \right) \right] \\ &= \frac{E}{2\pi} \ln(-1) + \frac{E}{2\pi} \ln \left(z - \frac{r^2}{l} \right) - \frac{E}{2\pi} \ln z\end{aligned}\quad \text{Gl. 7b}$$

Der erste Ausdruck ist eine Konstante. Da ein Potential immer bis auf eine Konstante bestimmt ist, kann dieser Ausdruck ausser Betracht bleiben. Auch die Tatsache, dass es sich um einen Logarithmus eines negativen Numerus handelt, stört nicht, da $\bar{\Omega}$ ein komplexer Ausdruck ist. Er ist nämlich:

$$\ln(-1) = \ln(-1) + \ln l = i\pi + \ln l$$

Der zweite Ausdruck ist analog aufgebaut wie der Ausdruck für das komplexe Potential der ursprünglichen, abgebildeten Quelle (siehe Gl. 6 d). Er unterscheidet sich von diesem nur dadurch, dass statt l in diesem Fall $\frac{r^2}{l}$ steht. Es handelt sich also um das komplexe Potential einer Quelle mit der gleichen Ergiebigkeit E , die sich im inversen Punkt $l' = \frac{r^2}{l}$ befindet.

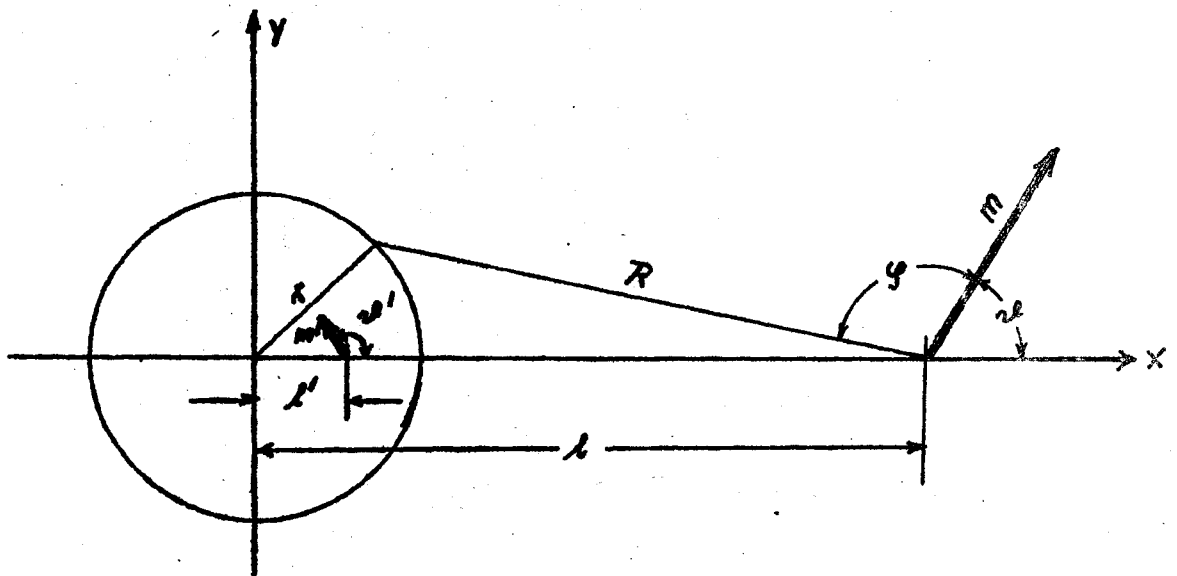
Der dritte Ausdruck, der ein negatives Vorzeichen hat, ist das komplexe Potential einer Senke im Ursprung, d. h. in diesem Fall im Kreismittelpunkt.

Zusammenfassend kann gesagt werden: Das Abbild einer ebenen Quelle in bezug auf einen Kreis besteht aus einer Quelle und einer Senke von der gleichen Ergiebigkeit wie die ursprüngliche Quelle. Dabei befindet sich die Senke im Kreismittelpunkt, die Quelle in dem zur ursprünglichen Quelle inversen Punkt.

Entsprechendes gilt für das Abbild einer Senke. Nur befindet sich in diesem Fall die Quelle im Kreismittelpunkt und die Senke im inversen Punkt.

2.) Das Abbild eines ebenen Dipols in bezug auf einen Kreis.

Die gleiche Betrachtung wie für die Quelle soll nun für einen ebenen Dipol durchgeführt werden. Der Dipol befinde sich im Punkt $P(l, 0)$. Der Betrag des Dipolmomentes sei m . Der Dipol bilde mit der X-Achse den Winkel α .



Potential und Stromfunktion lauten:

$$\phi = -\frac{m}{2\pi} \cdot \frac{\cos \varphi}{|R|} \quad \gamma = \frac{m}{2\pi} \cdot \frac{\sin \varphi}{|R|}$$

Gl. 8a

$$\Omega = \phi + i\gamma = -\frac{m}{2\pi} \cdot \frac{\cos \varphi - i \sin \varphi}{|R|} = -\frac{m}{2\pi} \cdot \frac{e^{-i\varphi}}{|R|}$$

Es ist:

$$e^{-i\varphi} = e^{-i(\varphi + \alpha)} e^{i\alpha}$$

$$R = |R| e^{i(\varphi + \alpha)} = z - l$$

$$e^{i(\varphi + \alpha)} = \frac{z - l}{|R|} \quad e^{-i(\varphi + \alpha)} = \frac{|R|}{z - l}$$

Somit ergibt sich schliesslich für das komplexe Potential:

$$\Omega = \frac{m}{2\pi} \cdot \frac{e^{i\alpha}}{l - z}$$

Gl. 8b

Das zu diesem Potential nach Einführung des Zylinders hinzuzufügende konjugiert komplexe lautet:

$$\bar{\Omega} = \frac{m}{2\pi} \cdot \frac{e^{-i\alpha}}{l - \frac{r^2}{z}}$$

Gl. 9a

Um zu sehen, durch welche Singularitäten innerhalb des Kreises sich dieses Potential darstellen lässt, werden folgende Umformungen gemacht:

$$\frac{1}{l - \frac{r^2}{z}} = \frac{1}{l} - \frac{r^2}{l^2} \cdot \frac{1}{\frac{r^2}{l} - z}$$

$$e^{-i\alpha} = -e^{i(\pi - \alpha)}$$

Nach Einsetzen dieser Umformungen erhält man:

$$\bar{\Omega} = \frac{m}{2\pi} \cdot \frac{e^{-i\varphi}}{\lambda} + \frac{m \frac{r^2}{\lambda^2}}{2\pi} \cdot \frac{e^{i(\bar{r}-\varphi)}}{\frac{r^2}{\lambda} - x} \quad \text{Gl. 9b}$$

Der erste Term ist eine Konstante und braucht wiederum nicht berücksichtigt zu werden.

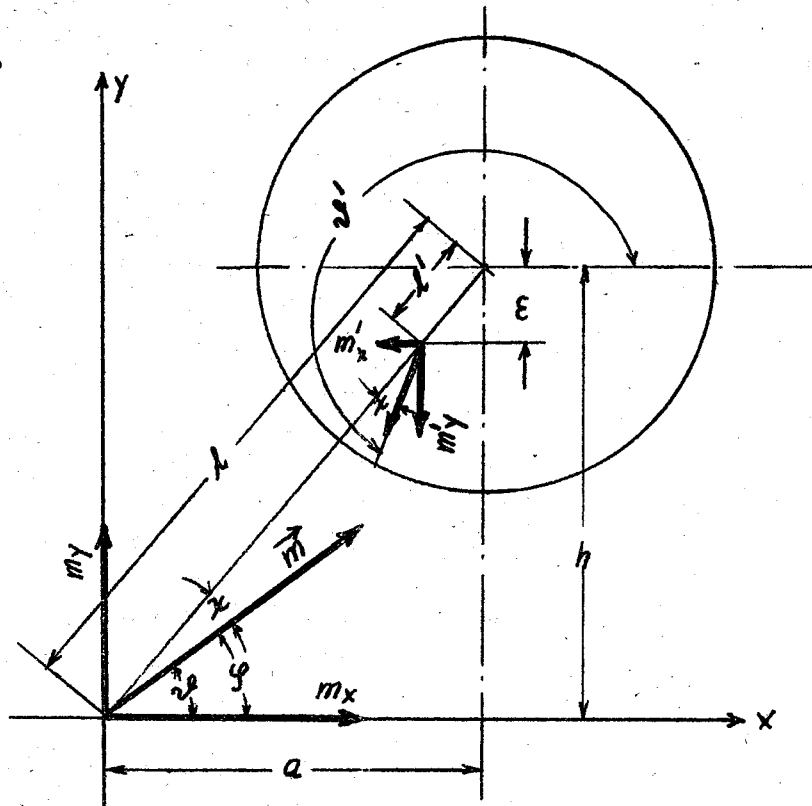
Beim zweiten Term handelt es sich um das komplexe Potential eines Dipols, der sich

- a) im inversen Punkt $\lambda' = \frac{r^2}{\lambda}$ befindetet,
- b) dessen Betrag $m' = m \left(\frac{r}{\lambda}\right)^2$ ist, und der
- c) mit der X-Achse den Winkel $\varphi' = \pi - \varphi$ bildet.

Man hätte das Abbild eines Dipols inbezug auf einen Kreis auch durch einen Grenzübergang aus dem Abbild eines Quell-Senken-Systems herleiten können. Beim Grenzübergang gehen Quelle und Senke in den jeweils inversen Punkten in den Dipol m' über. Anders verhalten sich jedoch die Senke und Quelle im Kreismittelpunkt. Sie befinden sich von vornherein in ein und demselben Punkt. Sie haben sich also gegenseitig auf, da es sich hier nicht um einen Grenzübergang handelt.

3.) Komponentendarstellung des Abbildes eines Dipols

Bei der Ableitung des Abbildes eines Dipols wurde davon ausgegangen, dass sich der Dipol auf der X-Achse befindet. Eine allgemeinere Lage des Dipols zum Kreis (Zylinder) bereitet keine Schwierigkeit. Es sollen jedoch jetzt der abzubildende Dipol sowie das Abbild nicht mehr durch den Betrag des Dipolmoments und die Richtung sondern statt dessen durch ihre X- und Y-Komponenten dargestellt werden.



Der Abstand des inversen Punktes vom Kreismittelpunkt ist

$$l' = \frac{r^2}{l}$$

Die Y-Komponente dieses Abstandes sei ϵ . Aus der Skizze ergibt sich:

$$\frac{\epsilon}{h} = \frac{l'}{l} \longrightarrow \epsilon = h \cdot \frac{l'}{l} = h \frac{r^2}{l^2}$$

Es ist

$$l^2 = a^2 + h^2 = h^2 \left[\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1 \right]$$

Damit ergibt sich:

$$\epsilon = \frac{r^2}{h} \cdot \frac{1}{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 1}$$

Für die Winkel gelten folgende Beziehungen:

$$\gamma = \varphi - \alpha \quad \alpha' = \pi + \varphi + \gamma = \pi + 2\varphi - \alpha$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha' &= \cos(\pi + 2\varphi - \alpha) \\ &= -\cos(2\varphi - \alpha) \\ &= -[\cos 2\varphi \cos \alpha + \sin 2\varphi \sin \alpha] \\ &= -[(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \cos \alpha + 2 \sin \varphi \cos \varphi \sin \alpha] \\ &= -\cos \alpha [(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + 2 \sin \varphi \cos \varphi \operatorname{tg} \alpha] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha' &= \sin(\pi + 2\varphi - \alpha) \\ &= -\sin(2\varphi - \alpha) \\ &= -[\sin 2\varphi \cos \alpha - \cos 2\varphi \sin \alpha] \\ &= -[2 \sin \varphi \cos \varphi \cos \alpha - (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \sin \alpha] \\ &= -\cos \alpha [2 \sin \varphi \cos \varphi - (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \operatorname{tg} \alpha] \end{aligned}$$

Nun ist:

$$\sin \varphi = \frac{h}{l} \quad \cos \varphi = \frac{a}{l}$$

$$(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = \frac{a^2}{l^2} - \frac{h^2}{l^2} = \frac{a^2 - h^2}{a^2 + h^2} = \frac{(\frac{a}{h})^2 - 1}{(\frac{a}{h})^2 + 1}$$

$$2 \sin \varphi \cos \varphi = 2 \frac{a \cdot h}{l^2} = 2 \frac{a \cdot h}{a^2 + h^2} = \frac{2 \frac{a}{h}}{(\frac{a}{h})^2 + 1}$$

Der Winkel ϑ' gibt die Richtung des abzubildenden Dipols an. Es ist

$$\tan \vartheta = \frac{m_y}{m_x}$$

Damit wird:

$$\cos \vartheta' = - \cos \vartheta \left[\frac{(\frac{v}{h})^2 - 1}{(\frac{v}{h})^2 + 1} + \frac{2 \frac{v}{h}}{(\frac{v}{h})^2 + 1} \cdot \frac{m_y}{m_x} \right]$$

$$\sin \vartheta' = - \cos \vartheta \left[\frac{2 \frac{v}{h}}{(\frac{v}{h})^2 + 1} - \frac{(\frac{v}{h})^2 - 1}{(\frac{v}{h})^2 + 1} \cdot \frac{m_y}{m_x} \right]$$

Der Betrag des Abbildes ergab sich aus dem Betrag des ursprünglichen Dipols zu:

$$m' = m \left(\frac{v}{h} \right)^2 = m \left(\frac{v}{h} \right)^2 \frac{1}{(\frac{v}{h})^2 + 1}$$

Damit lauten die Ausdrücke für die Komponenten:

$$m'_x = m' \cos \vartheta' = - m \left(\frac{v}{h} \right)^2 \cos \vartheta \left[\alpha + \beta \frac{m_y}{m_x} \right]$$

$$m'_y = m' \sin \vartheta' = - m \left(\frac{v}{h} \right)^2 \cos \vartheta \left[\beta - \alpha \frac{m_y}{m_x} \right]$$

Wobei α und β die bereits vorher (s. Gl. 3b) definierten Abkürzungen bedeuten. Bedenkt man ferner, dass

$$m \cos \vartheta = m_x$$

ist, so ergibt sich schliesslich:

$$m'_x = - \left(\frac{r}{h} \right)^2 (m_x \alpha + m_y \beta) \quad \text{Gl. 11}$$

$$m'_y = - \left(\frac{r}{h} \right)^2 (m_x \beta - m_y \alpha)$$

4.) Zeitliche Ableitung der Komponenten.

Für die weitere Rechnung ist von Interesse, wie sich die Komponenten des Abbildes zeitlich verändern, wenn der Abstand a zeitlich nicht konstant ist. Bewegt sich z.B. der Zylinder mit der Geschwindigkeit u_2 in X-Richtung, und der abzubildende Dipol mit der Geschwindigkeit u_1 , so ist:

$$a(t) = (u_2 - u_1) t$$

Gl. 12

$$\frac{d(a/h)}{dt} = \frac{1}{h} \cdot \frac{da}{dt} = \frac{u_2 - u_1}{h}$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass der Abstand h konstant bleibt. Durch Anwendung der Kettenregel ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m'_x}{\partial t} &= \frac{\partial m'_x}{\partial (a/h)} \cdot \frac{d(a/h)}{dt} = - \left(\frac{r}{h} \right)^2 \left[m_x \frac{\partial \alpha}{\partial (a/h)} + m_y \frac{\partial \beta}{\partial (a/h)} \right] \frac{u_2 - u_1}{h} \\ \frac{\partial m'_y}{\partial t} &= \frac{\partial m'_y}{\partial (a/h)} \cdot \frac{d(a/h)}{dt} = - \left(\frac{r}{h} \right)^2 \left[m_x \frac{\partial \beta}{\partial (a/h)} - m_y \frac{\partial \alpha}{\partial (a/h)} \right] \frac{u_2 - u_1}{h} \end{aligned}$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial (a/h)} &= \frac{\partial}{\partial (a/h)} \frac{(a/h)^2 - 1}{[(a/h)^2 + 1]^2} = 2 \frac{a/h}{[(a/h)^2 + 1]^3} = \gamma \\ \frac{\partial \beta}{\partial (a/h)} &= \frac{\partial}{\partial (a/h)} \frac{2 a/h}{[(a/h)^2 + 1]^2} = -2 \frac{3(a/h)^2 - 1}{[(a/h)^2 + 1]^3} = -\delta \end{aligned} \quad \text{Gl. 13}$$

Die Abkürzungen γ und δ wurden bereits vorher definiert. (S. Gl. 3b). Sie treten, wie auch die Abkürzungen α und β , in den Ausdrücken auf, die für die Kräfte und Momente aufgestellt wurden, die zwei Dipole aufeinander ausüben.

Damit ergeben sich für die zeitliche Änderung der Komponenten des Abbildes folgende Ausdrücke:

$$\frac{\partial m'_x}{\partial t} = -\left(\frac{\pi}{h}\right)^2 (m_x \gamma - m_y \delta) \frac{u_2 - u_1}{h} \quad \text{Gl. 14}$$
$$\frac{\partial m'_y}{\partial t} = \left(\frac{\pi}{h}\right)^2 (m_x \delta + m_y \gamma) \frac{u_2 - u_1}{h}$$

Der Fall, dass sich auch der abzubildende Dipol zeitlich ändert, - wobei sich sowohl die Lage als auch Betrag und Richtung ändern können - wird später bei der Betrachtung zweier sich begegnender Zylinder behandelt.

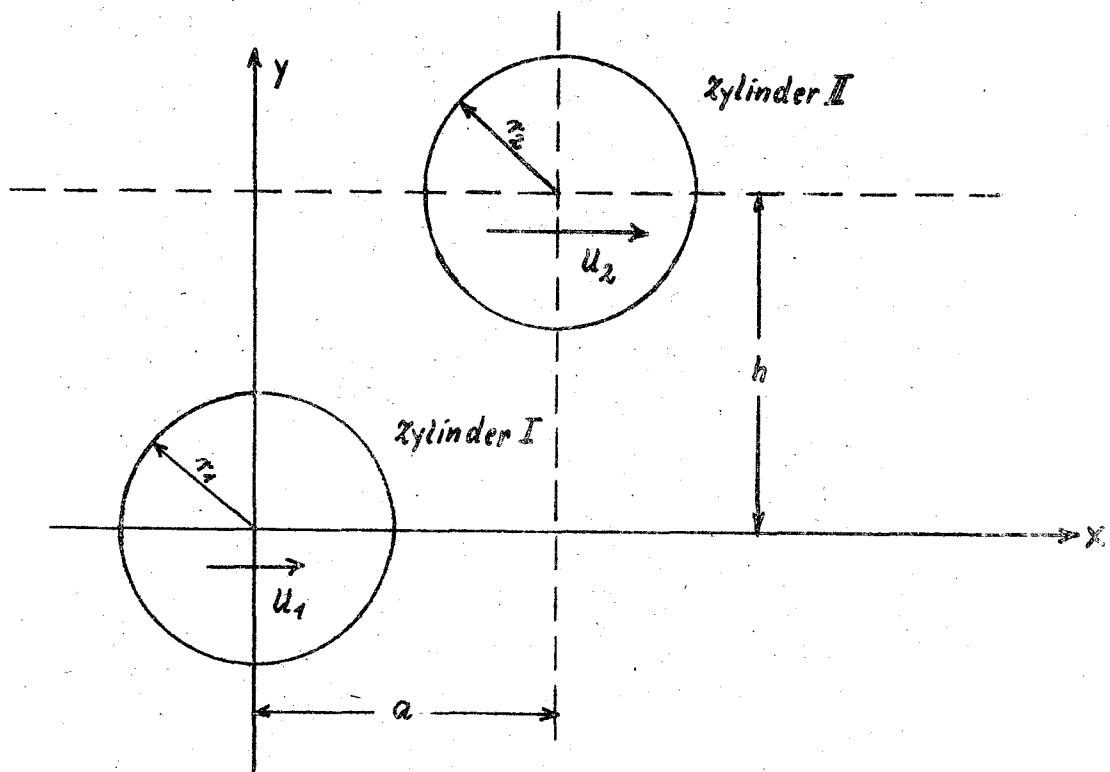
III. Gegenseitige Beeinflussung zweier Zylinder beim Begegnen bzw. Überholen.

Es sollen die Kräfte bestimmt werden, die zwei Zylinder (unendlich lang, ebenes Problem) aufeinander ausüben, wenn sie nebeneinander herfahren, sich begegnen oder überholen.

Der Zylinder I habe den Radius r_1 und bewege sich mit der konstanten Geschwindigkeit u_1 .

Parallel in einem Abstand h bewege sich der Zylinder II mit der konstanten Geschwindigkeit $u_2 = u$. Der Radius dieses Zylinders sei $r_2 = r$. Die augenblickliche Lage beider Zylinder sei durch den Abstand a charakterisiert.

Der Ursprung des Koordinatensystems ist ohne Bedeutung. Er sei in den Mittelpunkt des Zylinders I gelegt. Die positive Richtung der X-Achse sei die Richtung der Geschwindigkeit des Zylinders II.



Durch das Verhältnis der beiden Geschwindigkeiten lassen sich verschiedene "Begegnungsarten" darstellen. So bedeuten z.B.:

- a) $\frac{u_1}{u} = 1$ Beide Zylinder fahren nebeneinander her.
- b) $1 > \frac{u_1}{u} > 0$ Der Zylinder II überholt den Zylinder I
- c) $\frac{u_1}{u} = 0$ Der Zylinder II fährt am ruhenden Zylinder I vorbei.
- d) $\frac{u_1}{u} < 0$ Beide Zylinder begegnen sich.
- e) $\frac{u_1}{u} = -1$ Begegnung speziell für den Fall, dass beide Zylinder gleiche Geschwindigkeit haben.

A. Darstellung der Zylinder

1.) Ursprüngliche Dipole:

Sind die beiden Zylinder sehr weit voneinander entfernt, so dass sich ihre Strömungsbilder gegenseitig nicht beeinflussen, so lassen sie sich darstellen durch je einen Dipol. So ein Dipol, durch den ein Zylinder in einer Parallelströmung dargestellt wird, soll im folgenden ursprünglicher Dipol genannt werden. Er hat die Richtung der jeweiligen Geschwindigkeit des Zylinders. Es wird z.B. der Zylinder I dargestellt durch den Dipol: (S. auch Hütte I, 28. Auflage, Seite 775)

$$\vec{m} = 2\pi \tau_1^2 \vec{u}_1$$

Gl. 15a

Stellt man die Dipole durch ihre Komponenten dar, so lautet die X-Komponente des ursprünglichen Dipols des Zylinders I:

$$m_{0x}^I = 2\pi\tau_1^2 u_1 \quad \text{Gl. 15b}$$

Die Y-Komponente ist Null $m_{0y}^I = 0$

Die Komponenten des ursprünglichen Dipols des Zylinders II lauten:

$$m_{0x}^{\bar{I}} = 2\pi\tau_2^2 u_2 = m \quad \text{Gl. 15c}$$
$$m_{0y}^{\bar{I}} = 0$$

Die Indizes haben folgende Bedeutung:

I; II: Angabe des Zylinders, den der Dipol darstellt,

0 : Gibt an, dass es sich um den ursprünglichen Dipol handelt.

X; Y : Angabe der Komponenten des Dipols.

Macht man die Komponenten der Dipole dimensionslos, indem man sie durch die X-Komponente des ursprünglichen Dipols des Zylinders II dividiert, so erhält man folgende Größen:

$$\frac{m_{0x}^I}{m} = \left(\frac{\tau_1}{\tau}\right)^2 \frac{u_1}{u} \quad \frac{m_{0x}^{\bar{I}}}{m} = 1 \quad \frac{m_{0y}^{\bar{I}}}{m} = \frac{m_{0y}^I}{m} = 0 \quad \text{Gl. 15c}$$

Dabei wurde der Einfachheit halber die X-Komponente des ursprünglichen Dipols des Zylinders II mit m abgekürzt.

- 2.) Rekursionsformeln für die Abbilder der ursprünglichen Dipole:
Nähern sich die beiden Zylinder einander, so beeinflussen sich ihre Strömungsbilder. Die beiden ursprünglichen Dipole stellen nun keine Zylinder mehr dar. Oder, wenn man

die Zylinder betrachtet, bedeutet das, dass über ihre Oberfläche Flüssigkeit ein- bzw. austritt. Die Randbedingungen werden also durch die gegenseitige Beeinflussung gestört. Um die Randbedingungen wieder herzustellen, müssen zu den ursprünglichen Dipolen weitere Dipole - die gegenseitigen Abbilder - hinzugefügt werden.

Es war gezeigt worden, dass das Abbild eines Dipols in bezug auf einen Kreis ein Dipol im inversen Punkt ist. Die Randbedingungen des Zylinders I werden also wieder hergestellt, wenn man in den Zylinder I das Abbild des ursprünglichen Dipols des Zylinders II hinzufügt. Der inverse Punkt, d. h. die Lage dieses Abbildes ist durch den Abstand

$$\varepsilon_1^I = \frac{r_1^2}{h} \cdot \frac{1}{\left(\frac{r_1}{h}\right)^2 + 1}$$

gekennzeichnet. (S. Gl. 10). Die Komponenten des Dipols sind (S. Gl. 11):

$$m_{1x}^I = -\left(\frac{r_1}{h}\right)^2 m_{0x}^I \cdot \alpha$$

$$m_{1y}^I = -\left(\frac{r_1}{h}\right)^2 m_{0x}^I \cdot \beta$$

Entsprechende Gleichungen gelten für das Abbild des ursprünglichen Dipols des Zylinders I in bezug auf den Zylinder II. Damit ist die Aufgabe aber noch nicht gelöst. Es sind jetzt zwar die Einflüsse der ursprünglichen Dipole auf die Randbedingungen kompensiert, hinzugekommen sind jedoch die Einflüsse der Abbilder. Um auch diese Einflüsse zu kompensieren, müssen weitere Abbilder, d.h. die Abbilder der Abbilder, eingeführt werden usw. Da

die Beträge der Abbilder stets kleiner sind als die der abzubildenden Dipole, handelt es sich um eine gegen Null konvergierende Folge. Die Konvergenz ist um so besser, je weiter beide Zylinder voneinander entfernt sind.

Es werden nun die Rekursionsformeln angegeben, mit deren Hilfe man aus dem $(n-1)$ -ten Abbild im Zylinder II das n -te Abbild im Zylinder I bestimmen kann und umgekehrt.

Der inverse Punkt, der die Lage des n -ten Abbildes im Zylinder I angibt, ist bestimmt durch den Abstand ϵ_n^I . Die Projektion des Abstandes auf die Y-Achse, um die das $(n-1)$ -te Abbild im Zylinder II vom Mittelpunkt des Zylinders I entfernt ist, ist: $h - \epsilon_{n-1}^I$.

Damit ergibt sich:

$$\epsilon_n^I = \frac{r_1^2}{h - \epsilon_{n-1}^I} \cdot \frac{1}{(a/h)^2 + 1} \quad \text{Gl. 16a}$$

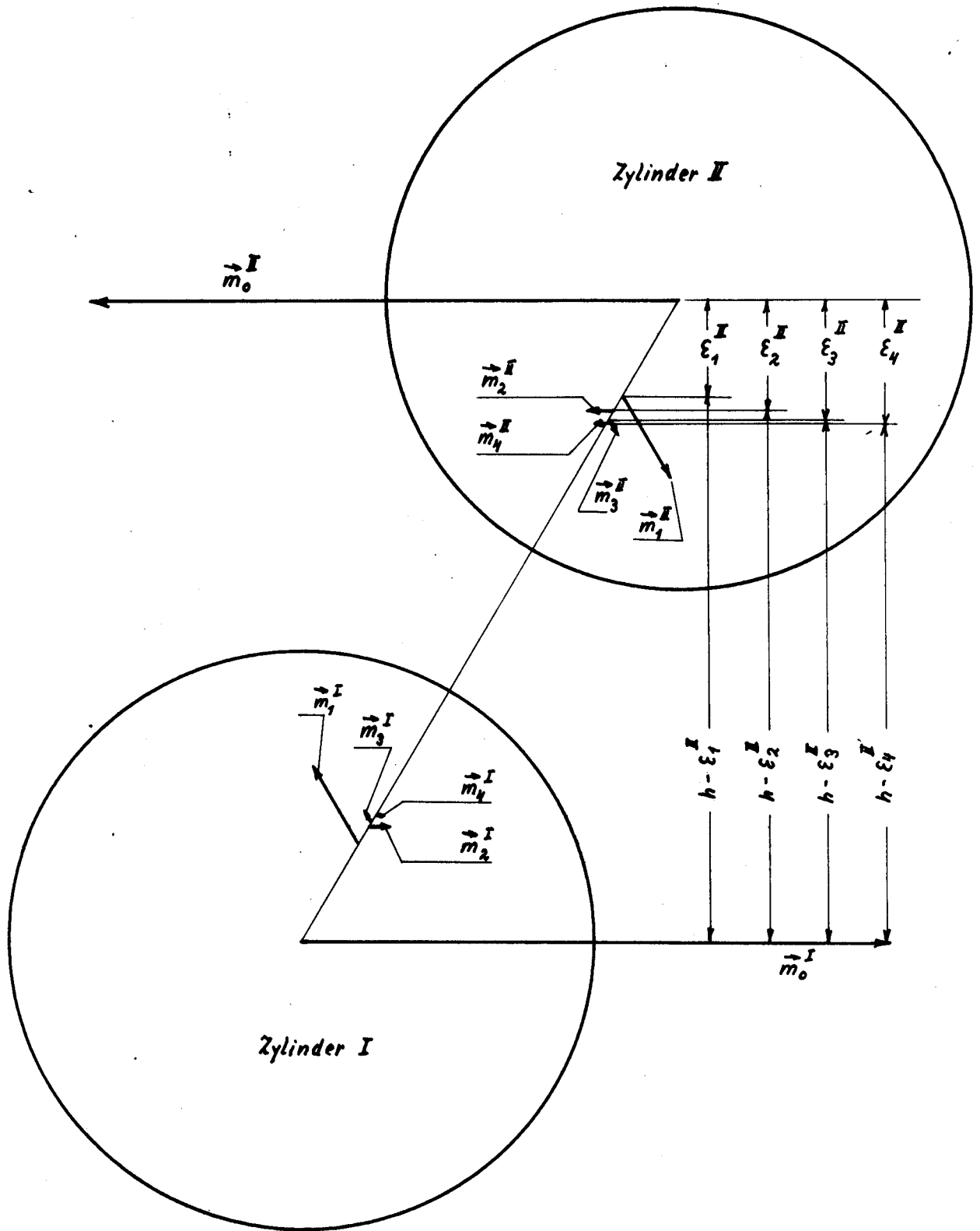
Oder in dimensionloser Form:

$$\frac{\epsilon_n^I}{r} = \frac{\left(\frac{r_1}{r}\right)^2}{\frac{h}{r} - \frac{\epsilon_{n-1}^I}{r}} \cdot \frac{1}{(a/h)^2 + 1} \quad \text{Gl. 16b}$$

Für den Zylinder II ist der inverse Punkt gekennzeichnet durch den Wert:

$$\epsilon_n^{II} = \frac{r^2}{h - \epsilon_{n-1}^I} \cdot \frac{1}{(a/h)^2 + 1} \quad \text{Gl. 16c}$$

$$\frac{\epsilon_n^{II}}{r} = \frac{1}{\frac{h}{r} - \frac{\epsilon_{n-1}^I}{r}} \cdot \frac{1}{(a/h)^2 + 1} \quad \text{Gl. 16d}$$



Größe, Richtung und Lage der Abbilder
für den Fall des Begegnens: $u_1 = -u_2$

Da die Ausgangswerte für die Rekursionsformeln bekannt sind,

$$\frac{\epsilon_0^I}{r} = \frac{\epsilon_0^{\bar{I}}}{r} = 0 \quad (\text{Lage des ursprünglichen Dipols})$$

lässt sich damit auch für alle folgenden Abbilder die Lage angeben.

Ist die Lage der einzelnen Abbilder bekannt, lassen sich auch ihre Komponenten bestimmen. Während die Y-Komponenten der ursprünglichen Dipole Null sind, ist das bei den Abbildern nur bei geradem Index n der Fall. Bei ungeradem n treten sowohl Y- als auch X-Komponenten auf.

Die Rekursionsformeln für den allgemeinen Fall lauten in dimensionsloser Form:

X-Komponente des n -ten Abbildes im Zylinder I

$$\frac{m_{nx}^I}{m} = - \left(\frac{r/r}{h/r - \epsilon_n^{\bar{I}}/r} \right)^2 \left(\frac{m_{n-1x}^{\bar{I}}}{m} \alpha + \frac{m_{n-1y}^{\bar{I}}}{m} \beta \right) \quad \text{Gl. 17a}$$

Y-Komponente des n -ten Abbildes im Zylinder I

$$\frac{m_{ny}^I}{m} = - \left(\frac{r/r}{h/r - \epsilon_n^{\bar{I}}/r} \right)^2 \left(\frac{m_{n-1x}^{\bar{I}}}{m} \beta - \frac{m_{n-1y}^{\bar{I}}}{m} \alpha \right) \quad \text{Gl. 17b}$$

X-Komponente des n -ten Abbildes im Zylinder II

$$\frac{m_{nx}^{\bar{I}}}{m} = - \left(\frac{1}{h/r - \epsilon_n^I/r} \right)^2 \left(\frac{m_{n-1x}^I}{m} \alpha + \frac{m_{n-1y}^I}{m} \beta \right) \quad \text{Gl. 17c}$$

Y-Komponente des n -ten Abbildes in Zylinder II

$$\frac{m_{ny}^{\bar{I}}}{m} = - \left(\frac{1}{h/r - \epsilon_n^I/r} \right)^2 \left(\frac{m_{n-1x}^I}{m} \beta - \frac{m_{n-1y}^I}{m} \alpha \right) \quad \text{Gl. 17d}$$

B. Bestimmung der Kräfte

Es sollen nun die Kräfte (pro Längeneinheit) bestimmt werden, die der Zylinder I auf den Zylinder II ausübt. Diese Kräfte werden aufgeteilt in:

- 1.) Kräfteanteil der ursprünglichen Dipole
- 2.) Stationärer Kräfteanteil der Abbilder
- 3.) Instationärer Kräfteanteil der Abbilder.

Unter dem stationären Kräfteanteil sind die Lagally-Kräfte gemeint, die die Dipole des Zylinders I auf die Dipole des Zylinders II ausüben. (Die Kräfte, die die Dipole eines Zylinders unter sich ausüben, sind innere Kräfte, brauchen also nicht berücksichtigt zu werden). Die instationären Kraftanteile bestehen aus den Ausdrücken, die zu den Lagally-Kräften hinzukommen, wenn die Strömung instationär ist. Es sei bemerkt, dass der instationäre Kraftanteil des 1. Abbildes grösser werden kann als der Kraftanteil der beiden ursprünglichen Dipole, der nur stationär ist, da sich diese Dipole zeitlich nicht ändern.

Ferner werden die Kräfte aufgeteilt in ihre X- und Y-Komponenten. Die X-Komponente (Kraft in Fahrtrichtung des Zylinders II) bedeutet eine Beschleunigungskraft. Für die Berechnung der Kräfte wurde ideale Flüssigkeit vorausgesetzt. Ein Körper, der sich in idealer Flüssigkeit gleichförmig bewegt, erfährt keinen Widerstand. Lässt man jedoch hinterher, nachdem die Kräfte, die durch die gegenseitige Beeinflussung auftreten, bestimmt sind, die Voraussetzung idealer Flüssigkeit wieder fallen, so kann man die X-Komponente der Kraft folgendermassen deuten:

Der Körper erfährt in reibungsbehafteter Flüssigkeit einen Widerstand. Nun kommt die gegenseitige Beeinflussung der beiden Körper hinzu. Eine positive X-Komponente der Kraft bedeutet dann eine Widerstandsverminderung, eine negative X-Komponente eine Widerstandserhöhung.

Die Y-Komponente bedeutet, wenn sie positiv ist, eine Abstossung, wenn sie negativ ist, eine Anziehung der beiden Zylinder.

Momente können unter der Voraussetzung idealer Flüssigkeit an Zylindern nicht auftreten. D.h. die Momente, die die einzelnen Dipole aufeinander ausüben, müssen sich in ihrer Gesamtheit aufheben, brauchen also nicht berücksichtigt zu werden.

1.) Kräfteanteil der ursprünglichen Dipole

Da die Y-Komponenten der ursprünglichen Dipole Null sind, ergeben sich für die Kräfte, die die beiden ursprünglichen Dipole aufeinander ausüben, recht einfache Ausdrücke. So ist z.B. die X-Komponente der Kraft:

$$\begin{aligned}
 P_{00x} &= -\frac{\rho}{2\pi h^3} m_{0x}^I m_{0x}^{II} \gamma \\
 &= -\frac{\rho}{2\pi h^3} (2\pi r^2 u)^2 \frac{m_{0x}^I}{m} \frac{m_{0x}^{II}}{m} \gamma \\
 &= -\frac{\rho}{2} 2\pi r u^2 \cdot 2 \left(\frac{r}{h}\right)^3 \frac{m_{0x}^I}{m} \frac{m_{0x}^{II}}{m} \gamma
 \end{aligned}
 \tag{18a}$$

Macht man die Kraft dimensionslos mit Hilfe des Staudrucks $\frac{\rho}{2} u^2$ und der Oberfläche $2\pi r \cdot "1"$ des Zylinders II, so ergibt sich als Koeffizient:

$$C_{00x} = \frac{P_{00x}}{\rho \pi r u^2} = -\frac{2\gamma}{\left(\frac{h}{r}\right)^3} \cdot \frac{m_{0x}^I}{m} \frac{m_{0x}^{II}}{m}
 \tag{19a}$$

Für die Y-Komponente der Kraft gilt:

$$P_{00y} = \frac{9}{2\pi h^2} m_{0x}^I m_{0x}^II \delta \quad \text{Gl. 18b}$$

Damit lautet der Ausdruck für den Koeffizienten:

$$C_{00y} = \frac{P_{00y}}{9\pi r u^2} = \frac{2\delta}{\left(\frac{h}{r}\right)^3} \cdot \frac{m_{0x}^I}{m} \frac{m_{0x}^II}{m} \quad \text{Gl. 19b}$$

2.) Stationärer Kräfteanteil der Abbilder

Die X-Komponente der Kraft, die das i -te Abbild im Zylinder I auf das k -te Abbild im Zylinder II ausübt, lautet:

$$P_{iAx} = \frac{9}{2\pi (h - \epsilon_i^I - \epsilon_k^II)^3} \left[-(m_{ix}^I m_{Ax}^II - m_{iy}^I m_{Ay}^II) \gamma + (m_{ix}^I m_{Ay}^II + m_{iy}^I m_{Ax}^II) \delta \right] \quad \text{Gl. 20a}$$

Der Ausdruck für die Y-Komponente ist:

$$P_{iAy} = \frac{9}{2\pi (h - \epsilon_i^I - \epsilon_k^II)^3} \left[(m_{ix}^I m_{Ay}^II - m_{iy}^I m_{Ax}^II) \delta + (m_{ix}^I m_{Ax}^II + m_{iy}^I m_{Ay}^II) \gamma \right] \quad \text{Gl. 20b}$$

Bildet man wieder den Koeffizienten

$$C_{iA} = \frac{P_{iA}}{9\pi r u^2}$$

und bedenkt, dass

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{2\pi (h - \epsilon_i^I - \epsilon_h^E)^3} &= \frac{\rho (2\pi \tau^2 u)^2}{2\pi (h/\tau - \epsilon_i^I/\tau - \epsilon_h^E/\tau)^3 \tau^3 m^2} \\ &= \rho \pi \tau u^2 \cdot \frac{2}{(h/\tau - \epsilon_i^I/\tau - \epsilon_h^E/\tau)^3} \cdot \frac{1}{m^2} \end{aligned}$$

ist, so folgt:

Gl. 21a

$$C_{ikx} = \frac{2}{(h/\tau - \epsilon_i^I/\tau - \epsilon_h^E/\tau)^3} \left[- \left(\frac{m_{ix}^I m_{Ax}^E}{m} - \frac{m_{iy}^I m_{Ay}^E}{m} \right) \delta + \left(\frac{m_{ix}^I m_{Ay}^E}{m} + \frac{m_{iy}^I m_{Ax}^E}{m} \right) \delta \right]$$

Gl. 21b

$$C_{iky} = \frac{2}{(h/\tau - \epsilon_i^I/\tau - \epsilon_h^E/\tau)^3} \left[\left(\frac{m_{ix}^I m_{Ax}^E}{m} - \frac{m_{iy}^I m_{Ay}^E}{m} \right) \delta + \left(\frac{m_{ix}^I m_{Ay}^E}{m} + \frac{m_{iy}^I m_{Ax}^E}{m} \right) \delta \right]$$

Die Koeffizienten für die gesamten stationären Kraftkomponenten der ursprünglichen Dipole und aller Abbilder erhält man schliesslich durch eine doppelt unendliche Summe

$$C_{sx} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_{ikx}$$

Gl. 2?

$$C_{sy} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_{iky}$$

3.) Instationärer Kraftanteil der Abbilder

Die gesamte instationäre Kraft, die auf den Zylinder II wirkt, ergibt sich aus der zeitlichen Änderung aller Dipole, die sich innerhalb des Zylinders II befinden, multipliziert mit der Dichte des Wassers. (S. [1])

$$P_{Ix} = -\rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} (m_{nx}^I)$$

Gl. 23a

$$P_{Iy} = -\rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} (m_{ny}^I)$$

Gl. 23b

Macht man auch die instationären Kräfte dimensionslos durch den Staudruck und die Oberfläche des Zylinders II, so erhält man für den Koeffizienten der X-Komponente des n -ten Abbildes im Zylinder II:

$$\begin{aligned} C_{nx}^I &= \frac{P_{nx}^I}{\rho \pi r u^2} = - \frac{\rho \frac{\partial}{\partial t} (m_{nx}^I)}{\rho \pi r u^2} \\ &= - \frac{2}{2\pi r u^2} \cdot \frac{2\pi r^2 u}{m} \frac{\partial}{\partial t} (m_{nx}^I) \\ &= - \frac{2r}{u} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m_{nx}^I}{m} \right) \end{aligned}$$

Gl. 24a

Und entsprechend für die Y-Komponente:

$$C_{ny}^I = - \frac{2\tau}{u} \frac{J}{\partial t} \left(\frac{m_{ny}^I}{m} \right) \quad \text{Gl. 24b}$$

Auch für den Zylinder I werden diese Koeffizienten definiert.

$$C_{nx}^I = - \frac{2\tau}{u} \frac{J}{\partial t} \left(\frac{m_{nx}^I}{m} \right) \quad \text{Gl. 24c}$$

$$C_{ny}^I = - \frac{2\tau}{u} \frac{J}{\partial t} \left(\frac{m_{ny}^I}{m} \right) \quad \text{Gl. 24d}$$

Sie werden zwar direkt für die instationären Kräfte, die auf den Zylinder II wirken, nicht benötigt, treten jedoch in den folgenden Rekursionsformeln auf, mit deren Hilfe die Koeffizienten des n -ten Abbildes aus den Koeffizienten des $(n-1)$ -ten Abbildes bestimmt werden können.

Der ursprüngliche Dipol m_{ox}^I bringt keinen instationären Kraftanteil, da er zeitlich konstant ist.

Der nächste Dipol ist das Abbild des ursprünglichen Dipols von Zylinder I

$$\frac{m_{nx}^I}{m} = - \left(\frac{\tau}{h} \right)^2 \frac{m_{ox}^I}{m} \alpha \quad \text{Gl. 25a}$$

$$\frac{m_{ny}^I}{m} = - \left(\frac{\tau}{h} \right)^2 \frac{m_{ox}^I}{m} \beta \quad \text{Gl. 25b}$$

Da die ursprünglichen Dipole zeitlich konstant sind, erhält man für die Änderung des 1. Abbildes:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m_{IX}^I}{m} \right) = - \left(\frac{r}{h} \right)^2 \frac{m_{0X}^I}{m} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \quad \text{Gl. 26a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m_{IY}^I}{m} \right) = - \left(\frac{r}{h} \right)^2 \frac{m_{0X}^I}{m} \frac{\partial \beta}{\partial t} \quad \text{Gl. 26b}$$

Die zeitlichen Änderungen von α und β sind schon bekannt. (S. Gl. 12 und 13).

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial (\%h)} \cdot \frac{d(\%h)}{dt} = \gamma \frac{u - u_1}{h}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial \beta}{\partial (\%h)} \cdot \frac{d(\%h)}{dt} = - \gamma \frac{u - u_1}{h}$$

Damit ergeben sich schliesslich folgende Koeffizienten für die instationären Kraftkomponenten des 1. Abbildes im Zylinder II:

$$C_{IX}^I = - \frac{2r}{u} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m_{IX}^I}{m} \right) = \frac{2\gamma}{\left(\frac{h}{r} \right)^3} \left(1 - \frac{u_1}{u} \right) \frac{m_{0X}^I}{m} \quad \text{Gl. 27a}$$

$$C_{IY}^I = - \frac{2r}{u} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m_{IY}^I}{m} \right) = - \frac{2\gamma}{\left(\frac{h}{r} \right)^3} \left(1 - \frac{u_1}{u} \right) \frac{m_{0X}^I}{m} \quad \text{Gl. 27b}$$

Bei den weiteren Abbildern sind die Ausdrücke nicht mehr so einfach, da sich nun auch die abzubildenden Dipole zeitlich ändern und zwar sowohl in ihrer Lage als auch in Betrag und Richtung.

Es war z.B. (S. Gl. 17a)

$$\frac{m_{nx}^I}{m} = - \left(\frac{r/r}{h/r - \epsilon_{n-1} r/r} \right)^2 \left(\frac{m_{n-1x}^I}{m} \alpha + \frac{m_{n-1y}^I}{m} \beta \right)$$

Entsprechende Ausdrücke gelten für die Y-Komponente und für die Abbilder im Zylinder II. In diesen Ausdrücken sind im allgemeinen Fall folgende Grössen zeitlich veränderlich:

$$\frac{\epsilon_{n-1}^I}{r}, \frac{\epsilon_{n-1}^I}{r}, \text{ sämtliche } \frac{m_{n-1}^I}{m} \text{-Werte sowie } \alpha \text{ und } \beta.$$

Damit wird:

$$\begin{aligned} C_{nx}^I &= - \frac{2r}{u} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m_{nx}^I}{m} \right) \\ &= \frac{2r}{u} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{r/r}{h/r - \epsilon_{n-1} r/r} \right)^2 \left(\frac{m_{n-1x}^I}{m} \alpha + \frac{m_{n-1y}^I}{m} \beta \right) \right] \\ &= \frac{2r}{u} \left(\frac{m_{n-1x}^I}{m} \alpha + \frac{m_{n-1y}^I}{m} \beta \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{r/r}{h/r - \epsilon_{n-1} r/r} \right)^2 + \\ &\quad + \left(\frac{r/r}{h/r - \epsilon_{n-1} r/r} \right)^2 \left\{ \frac{2r}{u} \left[\alpha \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m_{n-1x}^I}{m} \right) + \beta \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m_{n-1y}^I}{m} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2r}{u} \left[\frac{m_{n-1x}^I}{m} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{m_{n-1y}^I}{m} \frac{\partial \beta}{\partial t} \right] \right\} \end{aligned}$$

Die Differentiation der einzelnen Terme ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{r/r}{h/r - \varepsilon_{n-1}^{\text{II}}/r} \right)^2 &= \left(\frac{r_1}{r} \right)^2 \frac{\partial}{\partial (\varepsilon_{n-1}^{\text{II}})} \left(\frac{h}{r} - \frac{\varepsilon_{n-1}^{\text{II}}}{r} \right)^{-2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_{n-1}^{\text{II}}}{r} \right) \\ &= \left(\frac{r_1}{r} \right)^2 2 \left(\frac{h}{r} - \frac{\varepsilon_{n-1}^{\text{II}}}{r} \right)^{-3} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_{n-1}^{\text{II}}) \end{aligned}$$

Gl. 29

$$\begin{aligned} \frac{2r}{u} \left(\frac{m_{n-1x}^{\text{II}}}{m} \alpha + \frac{m_{n-1y}^{\text{II}}}{m} \beta \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{r/r}{h/r - \varepsilon_{n-1}^{\text{II}}/r} \right)^2 &= \\ = \left(\frac{r/r}{h/r - \varepsilon_{n-1}^{\text{II}}/r} \right)^2 \left(\frac{m_{n-1x}^{\text{II}}}{m} \alpha + \frac{m_{n-1y}^{\text{II}}}{m} \beta \right) \frac{2}{h/r - \varepsilon_{n-1}^{\text{II}}/r} \cdot \frac{2r}{u} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_{n-1}^{\text{II}}) &= \\ = - \frac{m_{nx}^{\text{II}}}{m} \cdot \frac{4}{h/r - \varepsilon_{n-1}^{\text{II}}/r} \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_{n-1}^{\text{II}}) \end{aligned}$$

Gl. 30

$$\begin{aligned} \frac{2r}{u} \left[\alpha \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m_{n-1x}^{\text{II}}}{m} \right) + \beta \left(\frac{m_{n-1y}^{\text{II}}}{m} \right) \right] &= \\ = - \left[\alpha \left\{ - \frac{2r}{u} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m_{n-1x}^{\text{II}}}{m} \right) \right\} + \beta \left\{ - \frac{2r}{u} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m_{n-1y}^{\text{II}}}{m} \right) \right\} \right] &= \\ = - \left[\alpha C_{n-1x}^{\text{II}} + \beta C_{n-1y}^{\text{II}} \right] \end{aligned}$$

Gl. 31

$$\begin{aligned} \frac{2r}{u} \left[\frac{m_{n-1x}^{\text{II}}}{m} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{m_{n-1y}^{\text{II}}}{m} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial t} \right] &= \\ = \left[\frac{m_{n-1x}^{\text{II}}}{m} \gamma - \frac{m_{n-1y}^{\text{II}}}{m} \delta \right] \frac{u - u_1}{h} \cdot \frac{2r}{u} &= \\ = \left[\frac{m_{n-1x}^{\text{II}}}{m} \gamma - \frac{m_{n-1y}^{\text{II}}}{m} \delta \right] \frac{2}{(h/r)} \cdot (1 - u_1/u) \end{aligned}$$

Gl. 32

Damit erhält man schliesslich für den Koeffizienten der X-Komponente der instationären Kraft, die auf das n -te Abbild im Zylinder I wirkt, folgende Rekursionsformel:

$$C_{nx}^I = - \frac{m_{nx}^I}{m} \cdot \frac{4}{h/r - \varepsilon_{n-1}/r} \cdot \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_{n-1}^{\bar{I}}) + \quad \text{Gl. 33a}$$

$$+ \left(\frac{r/r}{h/r - \varepsilon_{n-1}/r} \right)^2 \left[-(\alpha C_{n-1x}^{\bar{I}} + \beta C_{n-1y}^{\bar{I}}) + \left(\frac{m_{n-1x}^{\bar{I}}}{m} \delta - \frac{m_{n-1y}^{\bar{I}}}{m} \delta \right) \frac{2}{h/r} \left(1 - \frac{u_1}{u} \right) \right]$$

Entsprechend gilt für die Y-Komponente des n -ten Abbildes im Zylinder I:

$$C_{ny}^I = - \frac{m_{ny}^I}{m} \cdot \frac{4}{h/r - \varepsilon_{n-1}/r} \cdot \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_{n-1}^{\bar{I}}) + \quad \text{Gl. 33b}$$

$$+ \left(\frac{r/r}{h/r - \varepsilon_{n-1}/r} \right)^2 \left[-(\beta C_{n-1x}^{\bar{I}} - \alpha C_{n-1y}^{\bar{I}}) - \left(\frac{m_{n-1x}^{\bar{I}}}{m} \delta - \frac{m_{n-1y}^{\bar{I}}}{m} \delta \right) \frac{2}{h/r} \left(1 - \frac{u_1}{u} \right) \right]$$

Für die X-Komponente des n -ten Abbildes im Zylinder II gilt:

$$C_{nx}^{\bar{I}} = - \frac{m_{nx}^{\bar{I}}}{m} \cdot \frac{4}{h/r - \varepsilon_{n-1}^{\bar{I}}/r} \cdot \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_{n-1}^I) + \quad \text{Gl. 33c}$$

$$+ \left(\frac{1}{h/r - \varepsilon_{n-1}^{\bar{I}}/r} \right)^2 \left[-(\alpha C_{n-1x}^I + \beta C_{n-1y}^I) + \left(\frac{m_{n-1x}^I}{m} \delta - \frac{m_{n-1y}^I}{m} \delta \right) \frac{2}{h/r} \left(1 - \frac{u_1}{u} \right) \right]$$

Und endlich erhält man für die Y-Komponente des n -ten Abbildes im Zylinder II:

$$C_{ny}^{\bar{I}} = - \frac{m_{ny}^{\bar{I}}}{m} \cdot \frac{4}{h/r - \varepsilon_{n-1}^{\bar{I}}/r} \cdot \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_{n-1}^I) + \quad \text{Gl. 33d}$$

$$+ \left(\frac{1}{h/r - \varepsilon_{n-1}^{\bar{I}}/r} \right)^2 \left[-(\beta C_{n-1x}^I - \alpha C_{n-1y}^I) - \left(\frac{m_{n-1x}^I}{m} \delta - \frac{m_{n-1y}^I}{m} \delta \right) \frac{2}{h/r} \left(1 - \frac{u_1}{u} \right) \right]$$

In diesen Rekursionsformeln sind die $\frac{m_n}{m}$ -Werte bekannt. Da sich die ursprünglichen Dipole zeitlich nicht ändern, sind die Ausgangswerte für die Koeffizienten C

$$C_{0x}^I = C_{0y}^I = C_{0x}^{\bar{I}} = C_{0y}^{\bar{I}} = 0$$

Unbekannt sind bisher noch die zeitlichen Ableitungen der Entfernung ϵ .

In den Rekursionsformeln stehen die Terme:

$$\frac{1}{u} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_{n-1}^{\bar{I}}) \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_{n-1}^I)$$

Für diese Terme, die dimensionslos sind, gelten folgende Rekursionsformeln:

$$\begin{aligned} \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_n^I) &= \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{r_1^2}{h - \epsilon_{n-1}^{\bar{I}}} \cdot \frac{1}{(\frac{a}{h})^2 + 1} \right] && \text{Gl. 34e} \\ &= \frac{1}{u} \left[\frac{r_1^2}{(h - \epsilon_{n-1}^{\bar{I}})^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_{n-1}^{\bar{I}}) \cdot \frac{1}{(\frac{a}{h})^2 + 1} - \frac{r_1^2}{h - \epsilon_{n-1}^{\bar{I}}} \cdot \frac{2(\frac{a}{h})}{[(\frac{a}{h})^2 + 1]^2} \cdot \frac{u - u_1}{h} \right] \\ &= \left(\frac{r_1/r}{h/r - \epsilon_{n-1}^{\bar{I}}/r} \right)^2 \left[\frac{1}{(\frac{a}{h})^2 + 1} \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_{n-1}^{\bar{I}}) - \frac{h/r - \epsilon_{n-1}^{\bar{I}}/r}{h/r} \cdot \beta \left(1 - \frac{u_1}{u} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_n^{\bar{I}}) &= \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{r_2^2}{h - \epsilon_{n-1}^I} \cdot \frac{1}{(\frac{a}{h})^2 + 1} \right] && \text{Gl. 34b} \\ &= \left(\frac{1}{h/r - \epsilon_{n-1}^I/r} \right)^2 \left[\frac{1}{(\frac{a}{h})^2 + 1} \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_{n-1}^I) - \frac{h/r - \epsilon_{n-1}^I/r}{h/r} \cdot \beta \left(1 - \frac{u_1}{u} \right) \right] \end{aligned}$$

Die Ausgangswerte sind wiederum Null:

$$\frac{\epsilon_0^I}{r} = \frac{\epsilon_0^{\bar{I}}}{r} = \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0^I) = \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0^{\bar{I}}) = 0$$

Die Koeffizienten für die gesamten instationären Kraftkomponenten erhält man durch Summierung der instationären Anteile aller Abbilder.

$$C_{Ix} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{nx}$$

Gl. 35

$$C_{Iy} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{ny}$$

Schliesslich ergibt sich durch Zusammenfassung der stationären und der instationären Komponenten die Gesamtkraft, die die beiden Kreiszyylinder aufeinander ausüben.

$$C_x = C_{sx} + C_{Ix} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_{ikx} + \sum_{n=0}^{\infty} C_{nx}$$

Gl. 36

$$C_y = C_{sy} + C_{Iy} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_{iky} + \sum_{n=0}^{\infty} C_{ny}$$

Ergebnisse.

Für die oben aufgestellten Formeln wurde ein Programm entwickelt, um die Berechnung der Kräfte auf der elektronischen Rechenanlage IBM 650 der Universität Hamburg durchführen zu können. Es wurden folgende Fälle untersucht:

a.) Verhältnis der Geschwindigkeiten

$$u_1/u_2 = 1, 1/2, 0 \text{ und } -1$$

b.) Verhältnis der Grössen beider Zylinder

$$r_1/r_2 = 1, 2 \text{ und } 3$$

c.) Verhältnis des Abstandes der Bahnen zum Radius der Zylinder

$$h/r_1 = 2 1/2, 3, 4 \text{ und } 5$$

Für die sich daraus ergebenden 48 Kombinationen wurden die Kräfte für jeweils 13 verschiedene Lagen, d.h. 13 verschiedene $a:h$ - Werte im Bereich von $a:h = 0$ bis $a:h = 3$ durchgeführt.

In den nachfolgenden Diagrammen und Tafeln sind die Ergebnisse für den Fall zweier gleich grosser Kreiszyylinder aufgetragen. Die Vorzeichen wurden dabei so gewählt, dass die Koeffizienten positiv aufgetragen wurden, wenn sie eine Anziehung hervorrufen, negativ, wenn sie eine Abstossung beider Zylinder bewirken. Diese Festsetzung gilt einheitlich sowohl für die Komponenten in Fahrtrichtung als auch quer zur Fahrtrichtung.

Um die Grössenordnung der einzelnen Kraftanteile aufzuzeigen, sollen zwei Beispiele herausgegriffen werden.

$$a.) \quad \frac{u_0}{h} = 1 \quad \frac{v_0}{r} = 1 \quad \frac{h}{r} = 3 \quad \frac{q}{h} = 0$$

Es handelt sich also hierbei um zwei gleich grosse Kreiszyylinder, die mit der gleichen Geschwindigkeit direkt nebeneinander herfahren. Die Entfernung zwischen ihren Mittelpunkten beträgt das 3_fache ihrer Radien, d.h. zwischen beiden Zylindern ist ein Zwischenraum von der Grösse des halben Durchmessers. Für diesen Fall setzt sich der Koeffizient der Queranziehung zusammen aus:

Anteile der ursprünglichen Dipole:	0,1481
Stationärer Anteil der Abbilder:	0,0604
<u>Instationärer Anteil der Abbilder:</u>	<u>0</u>
Gesamter Koeffizient:	0,2085

Der stationäre Anteil der Abbilder beträgt demnach 29% der Gesamtkraft. Die instationären Anteile der Abbilder sind Null, da es sich beim Nebeneinanderherfahren um

einen stationären Strömungszustand handelt.

$$b.) \quad u_1/h = -1 \quad r_1/r = 1 \quad h/r = 3 \quad q/h = 0$$

Dies ist der Fall, dass sich die Zylinder mit gleicher Geschwindigkeit begegnen, und zwar handelt es sich gerade um den Augenblick, wo sie sich direkt gegenüber stehen. Hier setzt sich nun der Koeffizient der Queranziehung zusammen aus:

Anteile der ursprünglichen Dipole:	-0,1481
Stationärer Anteil der Abbilder:	0,0379
<u>Instationärer Anteil der Abbilder:</u>	<u>0,3024</u>
Gesamter Koeffizient	0,1922

Für diesen Fall ist der instationäre Anteil dem Betrage noch am grössten. Wie bereits in der Einleitung bemerkt wurde, würde sich bei Vernachlässigung des instationären Kraftanteils ein physikalisch falsches Bild ergeben, da der Anteil der ursprünglichen Dipole eine Abstossung bewirkt. (Negatives Vorzeichen).

Die beiden Fälle, dass zwei Zylinder nebeneinander herfahren oder sich mit gleicher Geschwindigkeit begegnen, nehmen insofern eine Sonderstellung ein, als bei ihnen infolge gleichen Betrages der Geschwindigkeiten und gleicher Zylindergrösse der Strömungszustand symmetrisch ist. Die Kraft, die der Zylinder I auf den Zylinder II ausübt, muss demnach gleich gross und entgegengesetzt gerichtet sein wie die Kraft, die der Zylinder II auf den Zylinder I ausübt. Dieses gilt nicht nur für den oben aufgeführten Fall $a:h = 0$ sondern ganz allgemein für beliebige Verhältnisse $a:h$.

Anders verhält es sich, wenn die Beträge der Geschwindigkeiten verschieden sind. Hier ist es so, dass der schnellere Körper auf den langsameren die grösseren Kräfte ausübt. Erklären lässt sich diese Tatsache auf folgende Weise:

Der schnellere Körper setzt das Wasser in seiner Umgebung mehr in Bewegung als der langsamere. Demnach befindet sich der langsamere Körper in einer Strömung, die zeitlich stärker veränderlich ist als die, in der sich der schnellere befindet. Entsprechend sind auch die instationären Kräfte, die auf den langsameren Körper wirken, grösser als die, die auf den schnelleren wirken.

Ein besonders eindrucksvolles Beispiel dafür bietet der Fall, dass ein Zylinder an einem ruhenden vorbeifährt. Für die Parameter

$$u_2 = 0 \quad r/h = 1 \quad h/r = 3 \quad q/h = 0$$

ergeben sich folgende Koeffizienten für die Queranziehung:

Kraft, die der fahrenden am ruhenden Zylinder ausübt:

$$C_{2Q} = 0,1758$$

Kraft, die der ruhende am fahrenden Zylinder ausübt:

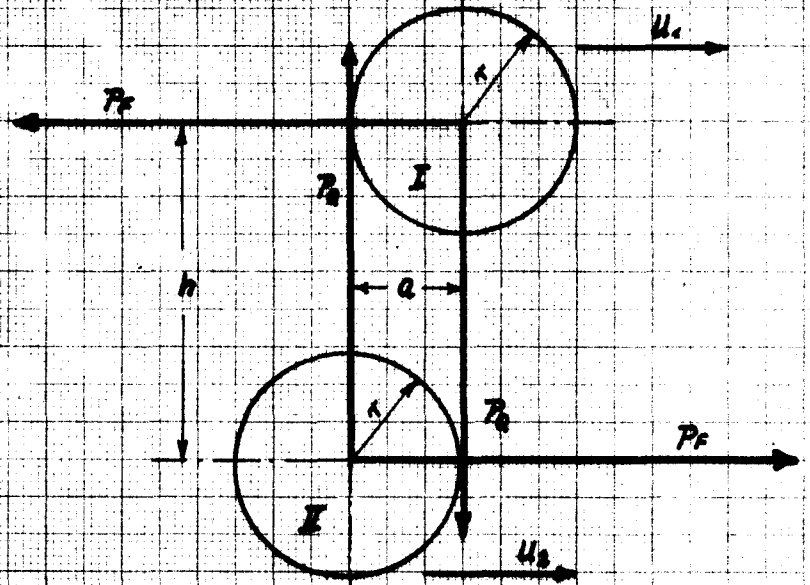
$$C_{1Q} = 0,0246$$

Die Kraft, die auf dem ruhenden Zylinder wirkt, beträgt bei diesem Beispiel das 7-fache der Kraft, die der ruhende auf den sich bewegenden Zylinder ausübt.

Literaturverzeichnis

- [1] W. E. Cummins
The Force and Moment on a Body in a Time-Varying
Potential Flow.
Journal of Ship Research, April 1957, Seite 7 - 18.
- [2] G. Weinblum
Theoretische Untersuchungen der Strömungsbeeinflus-
sung zweier Schiffe aufeinander beim gegenseitigen
Begegnen und Überholen auf tiefem und beschränktem
Wasser.
Schiffbau 1933, Seite 113 - 117.
- [3] M. Lagally
Berechnung der Kräfte und Momente, die strömende
Flüssigkeiten auf ihre Begrenzung ausüben.
Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik
1922, Band 2, Seite 409 - 422.
- [4] A. Betz
Singularitätenverfahren zur Ermittlung der Kräfte
und Momente auf Körper in Potentialströmungen.
Ingenieur-Archiv 1932, Band 2, Seite 454 - 462.
- [5] L. M. Milne-Thomson
Theoretical Hydrodynamics
Macmillan, London 1949.
- [6] Hütte I, 28. Auflage,
Wilhelm Ernst u. Sohn, Berlin 1955

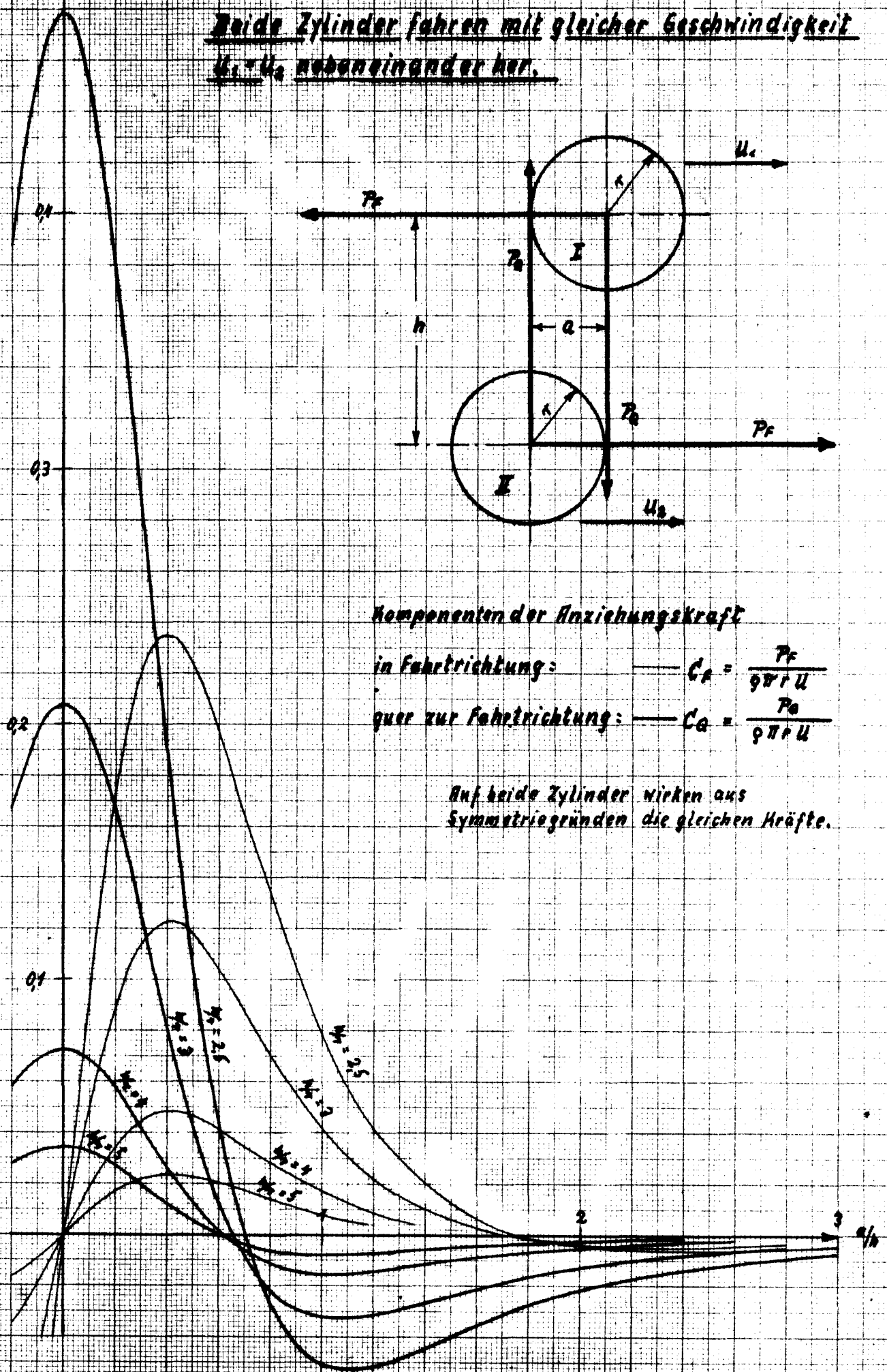
Zwei Zylinder fahren mit gleicher Geschwindigkeit
 $u_1 = u_2$ nebeneinander her.



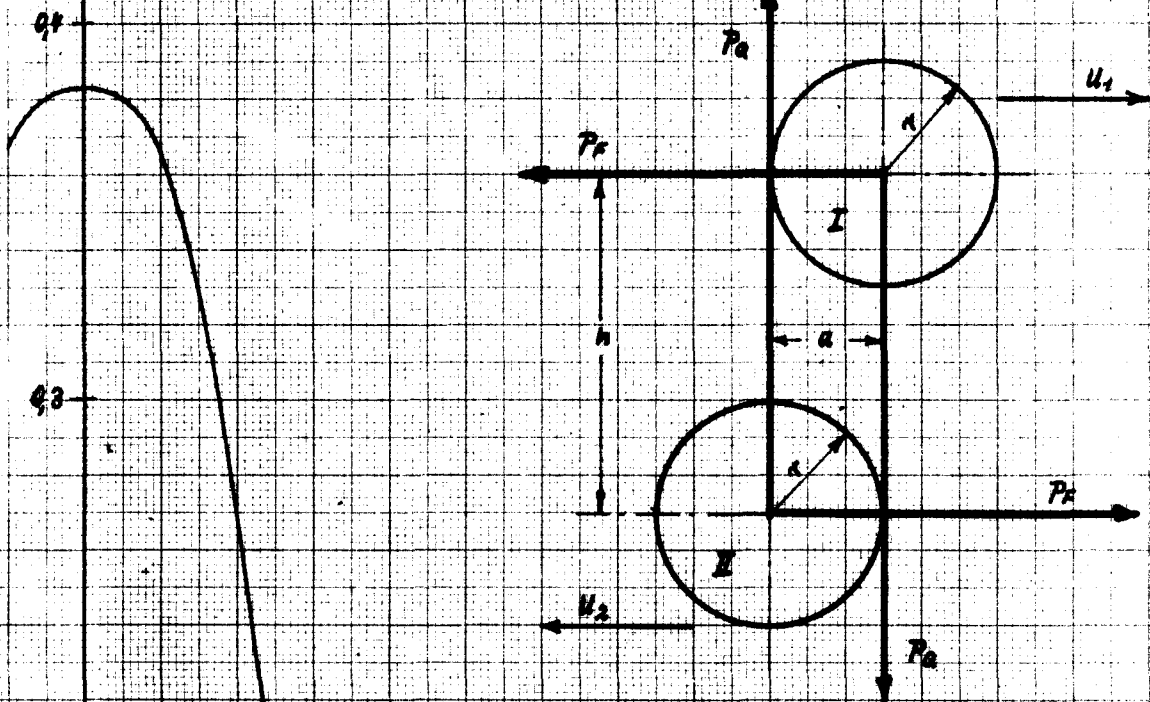
Komponenten der Anziehungskraft

in Fahrtrichtung: $C_F = \frac{P_F}{\rho \pi r U}$
 quer zur Fahrtrichtung: $C_G = \frac{P_G}{\rho \pi r U}$

Auf beide Zylinder wirken aus
 Symmetriegründen die gleichen Kräfte.



Beide Zylinder begegnen sich mit gleicher Geschwindigkeit $u_1 = -u_2$

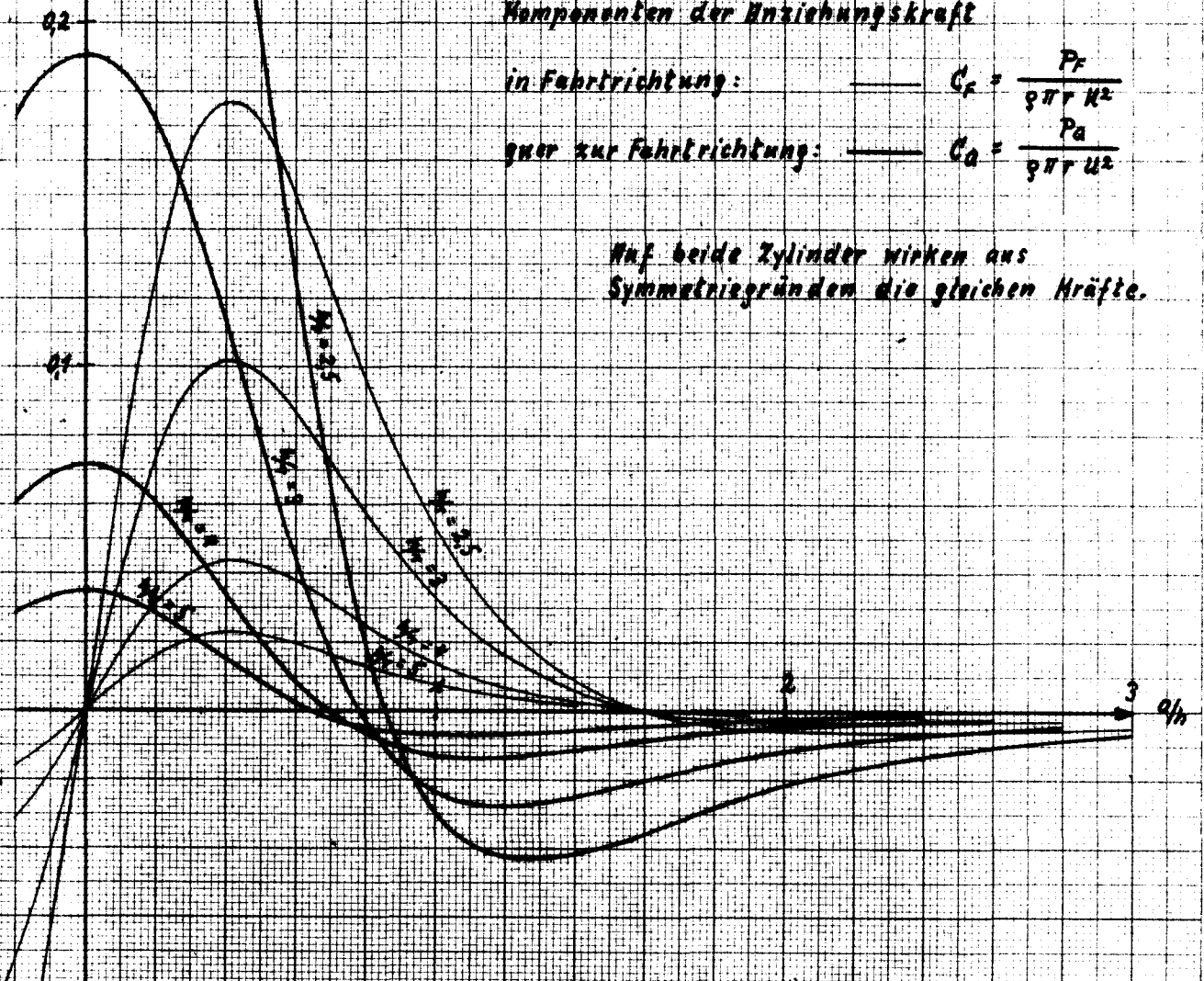


Komponenten der Anziehungskraft

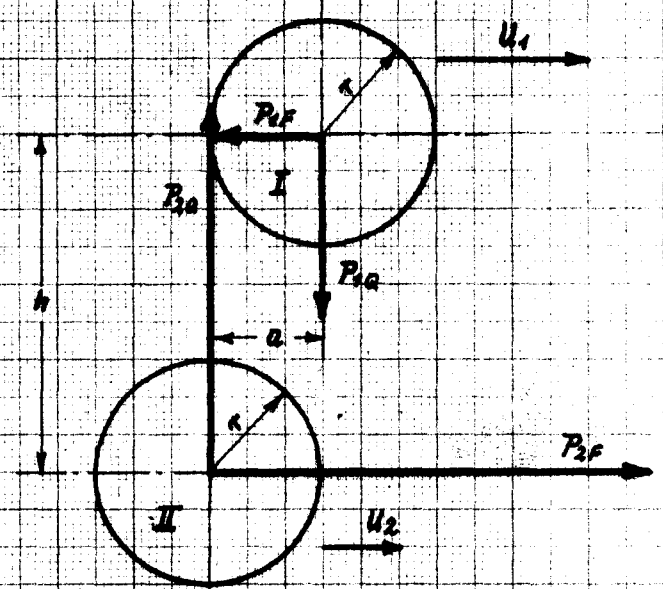
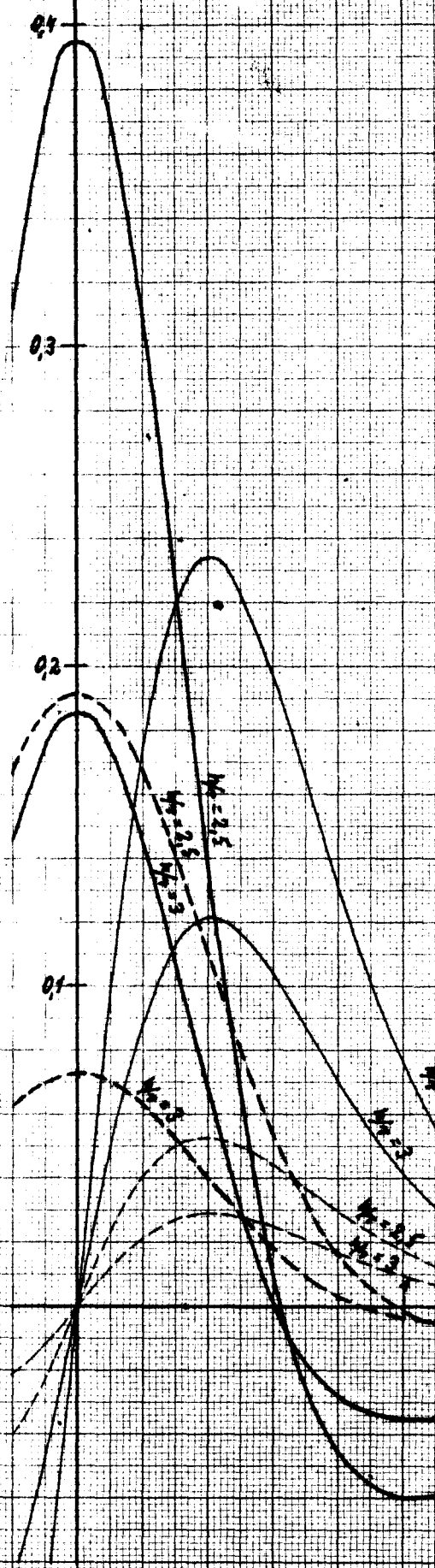
in Fahrtrichtung: $C_f = \frac{P_f}{\rho \pi r u^2}$

quer zur Fahrtrichtung: $C_a = \frac{P_a}{\rho \pi r u^2}$

Auf beide Zylinder wirken aus Symmetriegründen die gleichen Kräfte.



Der Zylinder I überholt den Zylinder II
mit der doppelten Geschwindigkeit $U_1 = 2U_2$



Komponenten der Kraft, die der überholende Zylinder am überholten hervorruft.

in Fahrtrichtung: $C_{2F} = \frac{P_{2F}}{9\pi r U_1^2}$

quer zur Fahrtrichtung: $C_{2A} = \frac{P_{2A}}{9\pi r U_1^2}$

Komponenten der Kraft, die der überholte Zylinder am überholenden hervorruft.

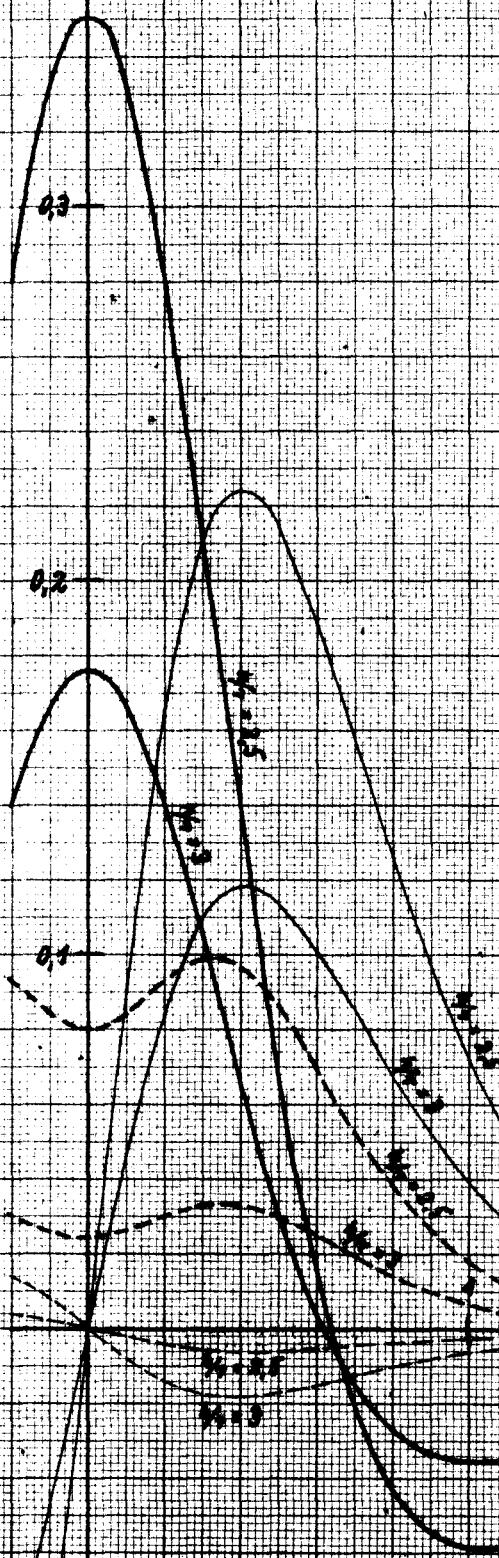
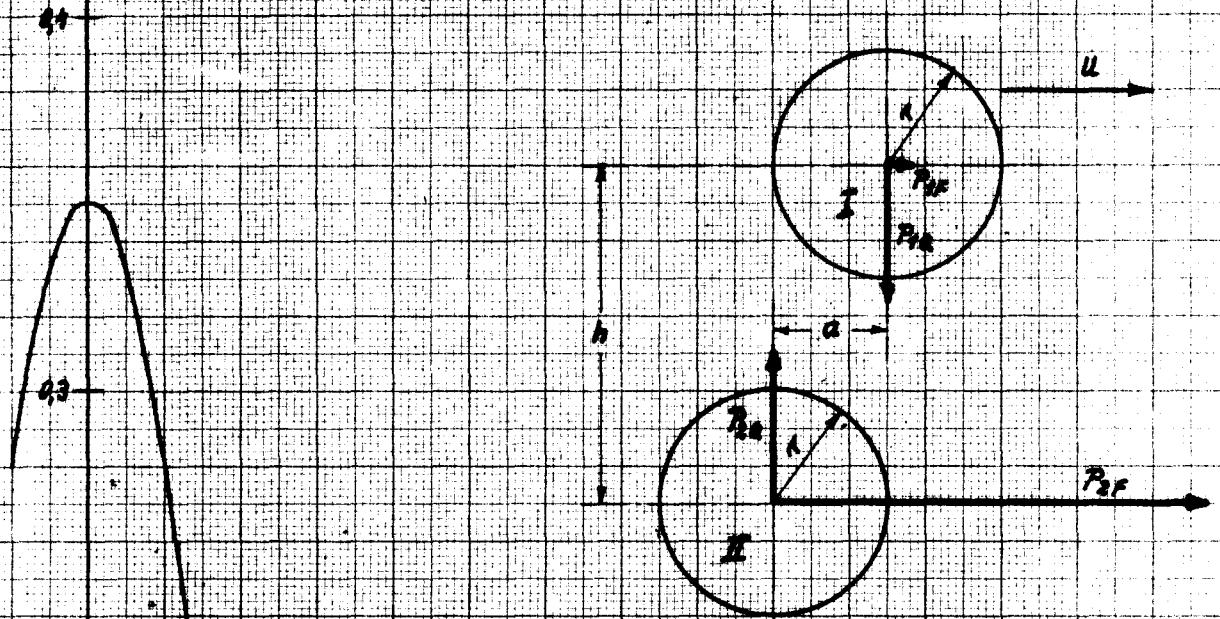
in Fahrtrichtung: $C_{1F} = \frac{P_{1F}}{9\pi r U_1^2}$

quer zur Fahrtrichtung: $C_{1A} = \frac{P_{1A}}{9\pi r U_1^2}$

In beiden Fällen sind die Kräfte durch den Standruck der größeren Geschwindigkeit U_1 dimensionslos gemacht.

x/h

Der Zylinder I bewegt sich mit der Geschwindigkeit U am ruhenden Zylinder II vorbei.



Komponenten der Kraft, die der sich bewegende Zylinder am ruhenden hervorruft:

in Fahrtrichtung: $C_{2F} = \frac{P_{2F}}{9\pi r U^2}$

quer zur Fahrtrichtung: $C_{2a} = \frac{P_{2a}}{9\pi r U^2}$

Komponenten der Kraft, die der ruhende Zylinder am sich bewegenden hervorruft:

in Fahrtrichtung: $C_{1F} = \frac{P_{1F}}{9\pi r U^2}$

quer zur Fahrtrichtung: $C_{1a} = \frac{P_{1a}}{9\pi r U^2}$

Kräfte, die zwei gleich grosse Kreiszyylinder aufeinander ausüben, wenn sie mit gleicher Geschwindigkeit nebeneinander herfahren.

$$U_1 = U_2 \text{ (stationärer Strömungszustand)}$$

Koeffizient für die Komponente der Anziehungskraft in Fahrtrichtung:

a:h	h:r = 2,5	h:r = 3,0	h:r = 4,0	h:r = 5,0
0	0	0	0	0
0,1	0,0983	0,0494	0,0192	0,0096
0,2	0,1761	0,0892	0,0349	0,0174
0,3	0,2218	0,1138	0,0446	0,0223
0,4	0,2352	0,1223	0,0481	0,0241
0,5	0,2238	0,1178	0,0466	0,0233
0,6	0,1977	0,1051	0,0417	0,0208
0,8	0,1327	0,0714	0,0284	0,0142
1,0	0,0780	0,0421	0,0167	0,0083
1,2	0,0414	0,0223	0,0088	0,0043
1,5	0,0125	0,0064	0,0024	0,0012
2,0	-0,0027	-0,0018	-0,0009	-0,0005
3,0	-0,0044	-0,0026	-0,0011	-0,0006

Koeffizient für die Komponente der Anziehungskraft quer zur Fahrtrichtung:

a:h	h:r = 2,5	h:r = 3,0	h:r = 4,0	h:r = 5,0
0	0,4788	0,2085	0,0731	0,0351
0,1	0,4525	0,1973	0,0691	0,0331
0,2	0,3824	0,1671	0,0581	0,0277
0,3	0,2887	0,1258	0,0431	0,0204
0,4	0,1930	0,0823	0,0271	0,0126
0,5	0,1100	0,0437	0,0129	0,0056
0,6	0,0460	0,0134	0,0017	0,0001
0,8	-0,0273	-0,0216	-0,0110	-0,0060
1,0	-0,0512	-0,0323	-0,0146	-0,0077
1,2	-0,0519	-0,0313	-0,0137	-0,0071
1,5	-0,0403	-0,0238	-0,0102	-0,0053
2,0	-0,0218	-0,0128	-0,0054	-0,0028
3,0	-0,0066	-0,0038	-0,0016	-0,0008

Aus Gründen der Symmetrie wirken auf beide Kreiszyylinder die gleichen Kräfte.

Kräfte, die zwei gleich grosse Kreiszyylinder aufeinander ausüben,
wenn sie sich mit gleicher Geschwindigkeit begegnen.

$$U_1 = -U_2$$

Koeffizient für die Komponente der
Anziehungskraft in Fahrtrichtung:

a:h	h:r = 2,5	h:r = 3,0	h:r = 4,0	h:r = 5,0
0	0	0	0	0
0,1	0,0683	0,0400	0,0174	0,0090
0,2	0,1259	0,0730	0,0316	0,0164
0,3	0,1636	0,0940	0,0405	0,0210
0,4	0,1775	0,1017	0,0437	0,0227
0,5	0,1705	0,0981	0,0422	0,0219
0,6	0,1501	0,0872	0,0377	0,0196
0,8	0,0973	0,0580	0,0254	0,0132
1,0	0,0535	0,0328	0,0146	0,0077
1,2	0,0254	0,0162	0,0074	0,0039
1,5	0,0042	0,0033	0,0017	0,0009
2,0	-0,0056	-0,0029	-0,0011	-0,0006
3,0	-0,0049	-0,0028	-0,0011	-0,0006

Koeffizient für die Komponente der
Anziehungskraft quer zur Fahrtrichtung:

a:h	h:r = 2,5	h:r = 3,0	h:r = 4,0	h:r = 5,0
0	0,3834	0,1922	0,0717	0,0348
0,1	0,3809	0,1875	0,0688	0,0332
0,2	0,3667	0,1725	0,0606	0,0286
0,3	0,3298	0,1470	0,0484	0,0221
0,4	0,2694	0,1134	0,0343	0,0149
0,5	0,1965	0,0772	0,0204	0,0080
0,6	0,1250	0,0437	0,0085	0,0023
0,8	0,0198	-0,0033	-0,0069	-0,0047
1,0	-0,0293	-0,0236	-0,0126	-0,0070
1,2	-0,0434	-0,0279	-0,0129	-0,0069
1,5	-0,0389	-0,0232	-0,0101	-0,0052
2,0	-0,0223	-0,0130	-0,0055	-0,0028
3,0	-0,0068	-0,0039	-0,0016	-0,0008

Aus Gründen der Symmetrie wirken auf
beide Kreiszyylinder die gleichen Kräfte.

Kräfte, die zwei gleich grosse Kreiszyylinder aufeinander ausüben,
wenn der eine den anderen mit doppelter Geschwindigkeit überholt.

$$U_1 = 2U_2$$

A. Kräfte, die auf den überholenden Zylinder wirken.

Koeffizient für die Komponente der
Anziehungskraft in Fahrtrichtung:

a:h	h:r = 2,5	h:r = 3,0	h:r = 4,0	h:r = 5,0
0	0	0	0	0
0,1	0,0226	0,0117	0,0047	0,0024
0,2	0,0401	0,0211	0,0085	0,0043
0,3	0,0499	0,0268	0,0109	0,0055
0,4	0,0526	0,0287	0,0117	0,0059
0,5	0,0499	0,0276	0,0113	0,0057
0,6	0,0441	0,0246	0,0101	0,0051
0,8	0,0298	0,0167	0,0069	0,0035
1,0	0,0175	0,0098	0,0040	0,0020
1,2	0,0092	0,0051	0,0021	0,0011
1,5	0,0026	0,0014	0,0006	0,0003
2,0	-0,0009	-0,0005	-0,0002	-0,0001
3,0	-0,0011	-0,0007	-0,0003	-0,0001

Koeffizient für die Komponente der
Anziehungskraft quer zur Fahrtrichtung:

a:h	h:r = 2,5	h:r = 3,0	h:r = 4,0	h:r = 5,0
0	0,1916	0,0726	0,0221	0,0099
0,1	0,1853	0,0702	0,0212	0,0094
0,2	0,1674	0,0634	0,0187	0,0082
0,3	0,1412	0,0532	0,0151	0,0064
0,4	0,1110	0,0412	0,0110	0,0044
0,5	0,0809	0,0290	0,0070	0,0026
0,6	0,0543	0,0182	0,0036	0,0010
0,8	0,0169	0,0031	-0,0009	-0,0009
1,0	-0,0013	-0,0038	-0,0027	-0,0016
1,2	-0,0077	-0,0059	-0,0030	-0,0016
1,5	-0,0086	-0,0054	-0,0024	-0,0013
2,0	-0,0053	-0,0031	-0,0013	-0,0007
3,0	-0,0017	-0,0010	-0,0004	-0,0002

B. Kräfte, die auf den überholten Zylinder wirken.

Koeffizient für die Komponente der
Anziehungskraft in Fahrtrichtung:

a:h	h:r = 2,5	h:r = 3,0	h:r = 4,0	h:r = 5,0
0	0	0	0	0
0,1	0,0966	0,0488	0,0191	0,0096
0,2	0,1738	0,0884	0,0347	0,0173
0,3	0,2200	0,1129	0,0444	0,0222
0,4	0,2342	0,1215	0,0479	0,0240
0,5	0,2232	0,1172	0,0464	0,0232
0,6	0,1971	0,1045	0,0415	0,0208
0,8	0,1317	0,0709	0,0278	0,0142
1,0	0,0769	0,0416	0,0166	0,0083
1,2	0,0406	0,0219	0,0087	0,0043
1,5	0,0120	0,0062	0,0024	0,0012
2,0	-0,0029	-0,0019	-0,0009	-0,0005
3,0	-0,0044	-0,0026	-0,0011	-0,0006

Koeffizient für die Komponente der
Anziehungskraft quer zur Fahrtrichtung:

a:h	h:r = 2,5	h:r = 3,0	h:r = 4,0	h:r = 5,0
0	0,3950	0,1860	0,0692	0,0339
0,1	0,3715	0,1752	0,0652	0,0320
0,2	0,3086	0,1461	0,0543	0,0266
0,3	0,2248	0,1066	0,0394	0,0193
0,4	0,1399	0,0656	0,0238	0,0116
0,5	0,0674	0,0298	0,0101	0,0047
0,6	0,0131	0,0023	-0,0006	-0,0006
0,8	-0,0451	-0,0278	-0,0124	-0,0065
1,0	-0,0600	-0,0354	-0,0152	-0,0079
1,2	-0,0561	-0,0329	-0,0140	-0,0072
1,5	-0,0416	-0,0243	-0,0103	-0,0053
2,0	-0,0221	-0,0129	-0,0055	-0,0028
3,0	-0,0066	-0,0038	-0,0016	-0,0008

Die Kräfte sind sowohl im Fall A (überholender Zylinder)
wie auch im Fall B (überholter Zylinder) dimensionslos
gemacht mit Hilfe des Staudrucks der grösseren Geschwindig-
keit, also der Geschwindigkeit des überholenden Zylinders.

Kräfte, die zwei gleich grosse Kreiszyylinder aufeinander ausüben, wenn der eine der beiden Zylinder ruht, der andere sich mit der Geschwindigkeit U an ihm vorbeibewegt.

A. Kräfte, die auf den sich bewegenden Zylinder wirken.

Koeffizient für die Komponente der Anziehungskraft in Fahrtrichtung:

a:h	h:r = 2,5	h:r = 3,0	h:r = 4,0	h:r = 5,0
0	0	0	0	0
0,1	-0,0077	-0,0024	-0,0005	-0,0001
0,2	-0,0137	-0,0043	-0,0008	-0,0003
0,3	-0,0170	-0,0055	-0,0011	-0,0003
0,4	-0,0179	-0,0059	-0,0012	-0,0004
0,5	-0,0170	-0,0057	-0,0012	-0,0004
0,6	-0,0150	-0,0052	-0,0011	-0,0003
0,8	-0,0104	-0,0037	-0,0008	-0,0003
1,0	-0,0067	-0,0025	-0,0005	-0,0002
1,2	-0,0042	-0,0016	-0,0003	-0,0001
1,5	-0,0021	-0,0008	-0,0002	-0,0001
2,0	-0,0007	-0,0003	-0,0001	-0,0000

Koeffizient für die Komponente der Anziehungskraft quer zur Fahrtrichtung:

a:h	h:r = 2,5	h:r = 3,0	h:r = 4,0	h:r = 5,0
0	0,0800	0,0246	0,0048	0,0015
0,1	0,0842	0,0262	0,0052	0,0016
0,2	0,0931	0,0298	0,0060	0,0018
0,3	0,0989	0,0326	0,0067	0,0021
0,4	0,0964	0,0327	0,0068	0,0021
0,5	0,0857	0,0297	0,0063	0,0020
0,6	0,0702	0,0249	0,0053	0,0017
0,8	0,0395	0,0144	0,0032	0,0010
1,0	0,0190	0,0071	0,0016	0,0005
1,2	0,0084	0,0032	0,0007	0,0002
1,5	0,0022	0,0009	0,0002	0,0001
2,0	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000

B. Kräfte, die auf den ruhenden Zylinder wirken.

Koeffizient für die Komponente der
Anziehungskraft in Fahrtrichtung:

a:h	h:r = 2,5	h:r = 3,0	h:r = 4,0	h:r = 5,0
0	0	0	0	0
0,1	0,0910	0,0471	0,0188	0,0095
0,2	0,1646	0,0854	0,0341	0,0172
0,3	0,2097	0,1094	0,0436	0,0220
0,4	0,2242	0,1179	0,0471	0,0237
0,5	0,2142	0,1137	0,0456	0,0230
0,6	0,1889	0,1013	0,0407	0,0205
0,8	0,1254	0,0684	0,0277	0,0140
1,0	0,0725	0,0399	0,0162	0,0082
1,2	0,0376	0,0208	0,0084	0,0042
1,5	0,0105	0,0056	0,0022	0,0011
2,0	-0,0034	-0,0021	-0,0009	-0,0005
3,0	-0,0045	-0,0026	-0,0011	-0,0006

Koeffizient für die Komponente der
Anziehungskraft quer zur Fahrtrichtung:

a:h	h:r = 2,5	h:r = 3,0	h:r = 4,0	h:r = 5,0
0	0,3511	0,1758	0,0676	0,0335
0,1	0,3324	0,1662	0,0638	0,0316
0,2	0,2814	0,1400	0,0534	0,0264
0,3	0,2103	0,1038	0,0391	0,0192
0,4	0,1349	0,0652	0,0239	0,0116
0,5	0,0676	0,0307	0,0104	0,0048
0,6	0,0153	0,0036	-0,0002	-0,0005
0,8	-0,0432	-0,0269	-0,0121	-0,0064
1,0	-0,0593	-0,0351	-0,0151	-0,0078
1,2	-0,0561	-0,0328	-0,0140	-0,0072
1,5	-0,0419	-0,0244	-0,0104	-0,0053
2,0	-0,0222	-0,0129	-0,0055	-0,0028
3,0	-0,0066	-0,0038	-0,0016	-0,0008