

78 | Februar 1961

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

A. Kracht

**Einfluss aller Erhebungen am
Schiffskörper auf den
Wellenwiderstand, insbesondere
Wulst am Bug und Keil am Heck**

Bericht zum Modellversuch

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

Einfluss aller Erhebungen am Schiffskörper auf den Wellenwiderstand, insbesondere Wulst am Bug und Keil am Heck

Bericht zum Modellversuch

A.Kracht, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1961

© Technische Universität Hamburg-Harburg
Schriftenreihe Schiffbau
Schwarzenbergstraße 95c
D-21073 Hamburg

<http://www.tuhh.de/vss>

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit dem Einfluß aller Erhebungen am Schiffskörper auf den Wellenwiderstand, darunter besonders der Bugwulst und der Keil am Heck. Das Problem wird zuerst rein theoretisch behandelt. Die zugehörigen Modellversuche werden anschließend durchgeführt. Aus den theoretischen Ergebnissen wird eine Erklärung dafür gegeben, wie ein Wulst beschaffen sein muß, um immer einen günstigen Einfluß auszuüben; und warum man bisher der Meinung war, daß ein Wulst nur bei $0,25 \leq Fr \leq 0,55$ als günstig angesehen werden kann.

Einführung

Körper, die sich dicht an oder auf der Oberfläche einer Flüssigkeit bewegen, erzeugen ein Wellensystem, dessen typische Ausbildung von der Form und Geschwindigkeit des Körpers abhängt. Die Energie dieses Systems ist dem Wellenwiderstand des Körpers äquivalent. Eine Beeinflussung des Wellensystems bedeutet demnach auch eine Beeinflussung des Wellenwiderstandes des Körpers. Die einfachste Möglichkeit der Beeinflussung ist die Überlagerung des primären Wellensystems mit einem sekundären, wie es mit einem Mehrkörpersystem möglich ist. Dabei können die Amplituden des resultierenden Systems unter bestimmten Voraussetzungen die Summe oder die Differenz der Amplituden der Einzelsysteme sein. Bei dem System Schiff und Wulst handelt es sich um ein derartiges wellenbildendes Phänomen eines Zweikörpersystems.

Als erster behandelte Havelock (2,4) dieses Problem rein theoretisch, indem er die gegenseitige Beeinflussung von zwei Dipolen untersuchte. Die Anwendung dieser Erkenntnisse und des Michellschen Widerstandsintegrals [1] auf Schiffe mit endlichen Abmessungen, ist vor allem

Wigley [5] und Weinblum [6] - [9] zu verdanken. In dem Zweikörpersystem Schiff und Wulst stellt Wigley den Wulst als Einzeldipol dar, während Weinblum die Form der Polynomdarstellung benutzt, analog der Darstellung des Schiffskörpers selbst.

In dieser Arbeit werden beide Methoden verwendet und Tabellen gegeben, die die Berechnung des Wellenwiderstandes für beliebige andere Kombinationen gestatten.

Darstellung von Schiffskörper und Erhebung

Eine exakte Theorie, die die Berechnung des Wellenwiderstandes widerspruchsfrei gestattet, gibt es nicht. Es gibt allerdings einige Lösungsmethoden, die das Problem unter den verschiedenen Voraussetzungen idealisieren. Eine dieser Methoden wird hier bei der Berechnung des Wellenwiderstandes eines Zweikörpersystems an einer freien Flüssigkeitsoberfläche benutzt. Das Körpersystem wird dabei mit Hilfe von Singularitäten so dargestellt, daß unter bestimmten Voraussetzungen direkt von der Verteilungsform auf die Körperform geschlossen werden kann; denn die größten Schwierigkeiten bereitet gerade die exakte Berechnung der Körperform wenn die Verteilungsform bekannt ist im dreidimensionalen Fall. Nur in wenigen Fällen ist dies gelungen und durchgeführt worden (Inui [13], Thomson [14], Eggers u. Wetterling [10]).

Für hinreichend schmale, zylindrische Schiffe ($\beta=1$) gibt Havelock die Proportionalität zwischen Dipolverteilung und Querschnittskurve in der Form

$$m(x) = -\frac{c}{2\pi} y(x) \quad \text{Gl. 1}$$

an. Dabei bedeuten $m(x)$ die Dipolverteilung der Länge nach und $y(x)$ die Querschnittskurve (Körperkontur bei Zylindern). Für eine Quell-Senken-Verteilung $q(x)$ ergibt sich

$$q(x) = \frac{\partial m(x)}{\partial x} = -\frac{c}{2\pi} y'(x) \quad \text{Gl. 1a}$$

Nun hat Weinblum [8,9] die Funktion $y(x)$ durch ein Polynom der Form

$$y(x) = \sum_0^n a_i x^i \quad \text{Gl.2}$$

dargestellt. Diese Darstellung hat den großen Vorteil, dass sich das Widerstandsintegral in Typintegrale auflösen und berechnen läßt. Mit den heutigen Rechenanlagen bedeutet die Berechnung und Tabellierung dieser Integrale keine Schwierigkeiten mehr. Sie sind auch mehrfach berechnet worden und liegen bereits für die Exponenten $1 \leq i \leq 11$ tabelliert vor.

Für die Darstellung des Wulstes bzw. der Erhebungen kann man ähnlich verfahren. Nur bei einer Polynomdarstellung kann man die Forderungen der Theorie hinsichtlich der kleinen Tangentensteigung $y'(x)$ im Bereich des vorderen Lotes naturgemäß nicht erfüllen. Die Exponenten steigen dabei im Extremfall bis 1000, wobei der Term mit diesem Exponenten den starken Abfall der Funktion im Stevengbiet bewirken soll. Trotz dieses Widerspruchs sind die Typintegrale berechnet worden und die damit angestellten Berechnungen zeigen doch einige brauchbare Ergebnisse.

Besser für die Darstellung der Erhebung im allgemeinen und des Wulstes im besonderen ist der Einzeldipol. Die damit zusammenhängenden Typintegrale sind ebenfalls berechnet und tabelliert worden. Wigley selbst hat nur einige spezielle Formen berechnet.

Ableitung der Formel für den Wellenwiderstand

In Anlehnung an die Darstellung von Havelock [4a] und Lunde [11] kann die Ableitung des Wellenwiderstandsintegrals kurz folgendermaßen beschrieben werden.

Voraussetzungen: Die Flüssigkeit sei unbegrenzt in x- und y-Richtung und +z-Richtung. Sie sei reibungsfrei, inkompressibel und habe eine freie Oberfläche bei $z = 0$.

Da die Flüssigkeit reibungsfrei ist, wird sich eine Welle bis ins Unendliche ausbreiten, ohne Energie zu verlieren. Die Gesamtenergie der Welle besteht aus kinetischer Energie, auf Grund ihrer Bewegung mit der Geschwindigkeit

c, und potentielle Energie, auf Grund der Erhebung der Oberfläche über die horizontale Ebene. Bewegt sich nun ein Körper an der Oberfläche durch die Flüssigkeit, so erzeugt er ein Wellensystem, dessen Energiebilanz nun betrachtet werden soll.

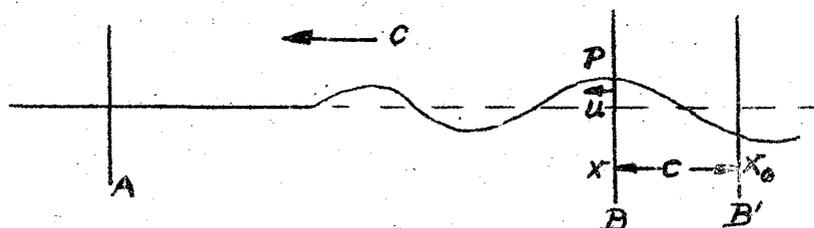


Fig. 1

Betrachtet man zwei Ebenen A und B (A weit vor dem Körper und B weit dahinter) und den Energiefluß der potentiellen und kinetischen Energie durch diese beiden Ebenen, so sei $E(A)$ die Menge der Energie, die durch A in der Zeiteinheit transportiert wird und analog $E(B)$. Gleichzeitig werden die Arbeiten betrachtet, die der Flüssigkeitsdruck beim Durchgang durch diese Ebenen leistet. Dabei sei p der Flüssigkeitsdruck pro Flächeneinheit und u die in das Gebiet gerichtete auf der Ebene senkrecht stehende Geschwindigkeitskomponente von c . Die Flüssigkeit links von B überträgt eine Arbeit $W(B)$ auf die rechte Seite, die sich aus dem Integral von $p \cdot u$ über B ergibt. Ähnlich verhält es sich bei A, nur hier wird $-W(A)$ in das Gebiet zwischen A und B gebracht. Nun muß die Energiedifferenz gleich der Differenz der Arbeiten des betrachteten Gebietes sein, oder anders ausgedrückt:

$$R \cdot c + W(B) - W(A) = E(B) - E(A) \quad \text{Gl. 3}$$

Gleichung 3 stellt die Energiebilanz an der Ebene B dar. Dabei ist R der Widerstand des Körpers, der sich mit der Geschwindigkeit c bewegt und im Gebiet ebenfalls Arbeit leistet. Über die Vorgänge bei A läßt sich sagen, daß bei großer Entfernung vom Körper sich die Flüssigkeit hier in Ruhe befindet und demnach $W(A)$ und $E(A)$ verschwinden. Die Ebene B wird nun ebenfalls so weit vom Körper entfernt, daß nur noch ein freies Wellensystem vorhanden ist.

sind. Der Gesamtbetrag der kinetischen Energie wird

$$\rho/2 \left\{ c \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \varphi_z \Big|_{z=0} dy + \int_{-\infty}^{+\infty} dy \cdot \int_0^{+\infty} [(\varphi \varphi_x) \Big|_{x=x_0} - (\varphi \varphi_x) \Big|_{x=x_1}] dz \right\}$$

Betrachtet man von diesem Ausdruck den zweiten Term und führt folgenden Grenzübergang $B \rightarrow B'$ durch, so daß sich ergibt

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{\varphi \varphi_x \Big|_{x=x_0} - \varphi \varphi_x \Big|_{x=x_1}}{\frac{x_0 - x_1}{t}} \cdot c = c \cdot \frac{\partial(\varphi \varphi_x)}{\partial x} = c \cdot [(\varphi_x)^2 + \varphi \varphi_{xx}]$$

$$\text{denn } \frac{x_0 - x_1}{t} = c.$$

Damit wird der Fluß der kinetischen Energie pro Zeiteinheit durch die Ebene B, wenn noch die Oberflächenbedingung

$$\varphi_{xx} + K_0 \varphi_x = 0 \quad \text{mit } K_0 = g/c^2 \quad \text{Gl. 8}$$

eingesetzt wird

$$\frac{\rho \cdot c}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \cdot \int_{-\infty}^0 [(\varphi_x)^2 + \varphi \varphi_{xx}] dz - \frac{\rho \cdot c}{2 K_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \varphi_{xx} \Big|_{z=0} dy = E_k \quad \text{Gl. 9}$$

Die potentielle Energie der Welle innerhalb BB' bestimmt sich zu:

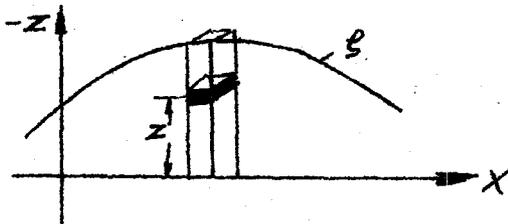


Fig. 3

Das Massenelement hat die Größe $dm = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$, die potentielle Energie des Teilchens ist

$$dE = m \cdot g \cdot h = \rho g \cdot z \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

und die Gesamtenergie

$$E_p = \rho g \int_{-\infty}^{+\infty} dy \cdot \int_0^c dx \cdot \int_0^z z \cdot dz = \frac{\rho g c}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta^2 dy \quad \text{Gl. 10}$$

ζ ist die Ordinate der Wellenkontur und ergibt sich aus der Bernoullischen Gleichung zu

$$\zeta = -\frac{c}{g} \cdot \varphi_x|_{z=0} \quad \text{Gl. 11}$$

Gl. 10 und Gl. 11 ergeben die potentielle Energie der Welle zu

$$E_p = +\frac{\rho \cdot c^3}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi_x)^2|_{z=0} dy = +\frac{\rho \cdot c}{2 \cdot K_0} \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi_x)^2|_{z=0} dy \quad \text{Gl. 12}$$

Der totale Energiefluß pro Zeiteinheit durch die Ebene B ist die Summe der beiden Energien

$$E(B) = \frac{\rho c}{2} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dy \cdot \int_0^{+\infty} [(\varphi_x)^2 + \varphi \varphi_{xx}] dz + \frac{1}{K_0} \int_{-\infty}^{+\infty} [(\varphi_x)^2 - \varphi \varphi_{xx}]_{z=0} dy \right\} \quad \text{Gl. 13}$$

Der Druck für die Arbeit des Druckes ergibt sich aus der Bernoullischen Gleichung zu

$$p = \text{const.} - \rho g z - \rho c \varphi_x \quad \text{Gl. 14}$$

Beim Durchgang durch B leistet const. und $\rho g z$ keine Arbeit, damit wird die Druckarbeit

$$W(B) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \cdot \int_0^{+\infty} p u \cdot dz = -\rho c \int_{-\infty}^{+\infty} dy \cdot \int_0^{+\infty} (\varphi_x)^2 dz \quad \text{Gl. 15}$$

mit $u = \varphi_x$.

Gl. 4 geht durch Einsetzen von Gl. 13 und Gl. 15 über in

$$R = \frac{\rho c}{2 K_0} \int_{-\infty}^{+\infty} [(\varphi_x)^2 - \varphi \varphi_{xx}]_{z=0} dy - \frac{\rho c}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \cdot \int_0^{+\infty} [(\varphi_x)^2 - \varphi \varphi_{xx}] dz \quad \text{Gl. 16}$$

Das Potential φ : Die einfachste Form eines freien Wellenmodells kann man sich aus Sinus- und Cosinuswellen zusammengesetzt denken. Für tiefes Wasser ergibt sich die Wellenlänge λ einer mit c fortschreitenden Welle zu

$$\lambda = \frac{2\pi c}{g} = \frac{2\pi}{K_0}$$

Eine sinusförmige, fortschreitende Welle mit der Amplitude a hat die Form

$$\zeta = a \cdot \sin(K_0 x - \omega t)$$

oder mit $\omega = g/c$ und $K_0 = g/c^2$

$$\zeta = a \cdot \sin(K_0 [x - ct])$$

Für eine in eine beliebige Richtung θ zur x-Achse fortschreitende Welle ergibt sich nach einer einfachen Koordinatentransformation die allgemeine, sinusförmige Wellengleichung.

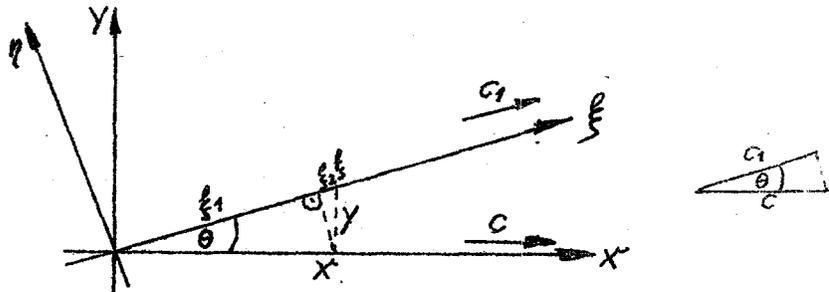


Fig. 4

Die Welle breitet sich in ξ -Richtung mit c_1 aus und hat die Form

$$\zeta = a \cdot \sin[K'_0 (\xi - c_1 t)]$$

Für das x-y-System gilt folgende Transformation

$$c_1 = c \cdot \cos \theta$$

$$K'_0 = g/c_1^2 = K_0 \sec^2 \theta$$

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = x' \cos \theta + y \cdot \sin \theta$$

$$\zeta = a \cdot \sin[K_0 \sec^2 \theta (x' \cos \theta + y \cdot \sin \theta - ct \cdot \cos \theta)]$$

Setzt man für $x' - ct = x$ dann wird ζ

$$\zeta = a \cdot \sin[K_0 \sec^2 \theta (x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta)] \quad \text{Gl. 16}$$

Ein Wellensystem, das aus einzelnen Wellen des Types 18 besteht und sich mit c in x-Richtung fortbewegt, hat die Form $+\pi/2$

$$\zeta = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} f(\theta) \cdot \sin[K_0 \sec^2 \theta (x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta)] d\theta \quad \text{Gl. 19}$$

$f(\theta)$ kann als Amplitudenfunktion gedeutet werden.

Betrachtet man ein Cosinuswellensystem, so ergibt sich ganz analog:

$$\zeta = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} F(\theta) \cos[K_0 \sec^2 \theta (x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta)] d\theta \quad \text{Gl. 20}$$

Durch Überlagerung von 19 und 20 erhält man das allgemeine Wellensystem der Form

$$\zeta = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left\{ f(\theta) [\sin(K_0 \sec^2 \theta (x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta))] + F(\theta) [\cos(K_0 \sec^2 \theta (x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta))] \right\} d\theta \quad \text{Gl. 21}$$

Addiert man zu diesem Wellensystem ein zweites, das unter dem Winkel $-\theta$ zur x -Achse steht, so erhält man unter Ausnutzung der Symmetrie

$$\zeta = \int_0^{\pi/2} \left\{ 2[f(\theta) + f_1(\theta)] \sin a \cdot \cos b + 2[f(\theta) - f_1(\theta)] \cos a \cdot \sin b + 2[F(\theta) + F_1(\theta)] \cos a \cdot \cos b + 2[-F(\theta) + F_1(\theta)] \sin a \cdot \cos b \right\} d\theta \quad \text{Gl. 22}$$

oder in kürzerer Schreibweise

$$\zeta = \int_0^{\pi/2} \{ P_1 \sin a \cdot \cos b + P_2 \cos a \cdot \sin b + P_3 \cos a \cdot \cos b + P_4 \sin a \cdot \sin b \} d\theta \quad \text{Gl. 22}$$

wobei $a = K_0 x \cdot \sec \theta$ und $b = K_0 y \cdot \sin \theta \cdot \sec^2 \theta$

Mit Gl. 22 folgt unter Berücksichtigung folgender Bedingungen das Potential φ aus Gl. 11

1. $\Delta \varphi = 0$
2. $\lim_{z \rightarrow \infty} \varphi_z(x, y, z) = 0$

$$\varphi = c \cdot \int_0^{\pi/2} (P_1 \cos a \cdot \cos b - P_2 \sin a \cdot \sin b - P_3 \sin a \cdot \cos b + P_4 \cos a \cdot \sin b) \cos \theta \cdot \exp(-K_0 z \cdot \sec^2 \theta) d\theta \quad \text{Gl. 23}$$

Nach Lunde wird nun folgende Umformung und Substitution durchgeführt, um den Fourierschen Satz anzuwenden:

$$\varphi = c \int_0^{\pi/2} \left\{ (P_1 \cos a - P_3 \sin a) \cos b \right\} \cos \theta \\ + \left\{ (-P_2 \sin a + P_4 \cos a) \sin b \right\} \cos \theta \exp(-Kz \cdot \sec^2 \theta) d\theta$$

Substitution $u = K_0 \sin \theta \cdot \sec^2 \theta$

$$\frac{du}{d\theta} = K_0 \frac{1 + \sin^2 \theta}{\cos^3 \theta}$$

somit wird φ

$$\varphi = \frac{c}{K_0} \int_0^{\infty} \frac{\cos^4 \theta}{1 + \sin^2 \theta} \left[(P_1 \cos a - P_3 \sin a) \cos y u \right. \\ \left. + (-P_2 \sin a + P_4 \cos a) \sin y u \right] \exp(-K_0 z \cdot \sec^2 \theta) du$$

$$\varphi_x = -c \int_0^{\infty} \frac{\cos^3 \theta}{1 + \sin^2 \theta} (P_1 \sin a + P_3 \cos a) \cos y u \\ + (P_2 \cos a + P_4 \sin a) \sin y u \exp(-K_0 z \cdot \sec^2 \theta) du$$

$$\varphi_{xx} = -c K_0 \int_0^{\infty} \frac{\cos^2 \theta}{1 + \sin^2 \theta} (P_1 \cos a - P_3 \sin a) \cos y u \\ + (-P_2 \sin a + P_4 \cos a) \sin y u \exp(-K_0 z \cdot \sec^2 \theta) du$$

Der Fouriersche Satz für Doppelintegrale lautet:

$$F(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) \cos[u(y - \alpha)] d\alpha$$

Wenn $F(y) = \int_0^{\infty} (E_1 \cos y u + E_2 \sin y u) du$

und $G(y) = \int_0^{\infty} (G_1 \cos y u + G_2 \sin y u) du$

ist und $E_1; E_2; G_1; G_2$ Funktionen von u sind, dann gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(y) \cdot G(y) dy = \pi \int_0^{\infty} (E_1 G_1 + E_2 G_2) du$$

Dieser Satz wird nun auf die Einzelnen Glieder von Gl. 17 angewand.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi_x)^2 dy = c^2 \pi \int_0^{\infty} \frac{\cos^6 \theta}{(1+\sin^2 \theta)^2} [(P_1 \sin \alpha + P_3 \cos \alpha)^2 + (P_2 \cos \alpha + P_4 \sin \alpha)^2] \exp(-K_0 z \cdot \sec^2 \theta) du$$

oder für $u = K_0 \sin \theta \sec^2 \theta$ substituiert

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi_x)^2 dy = c^2 \pi K_0 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 \theta}{1+\sin^2 \theta} [(P_1 \sin \alpha + P_2 \cos \alpha)^2 + (P_2 \cos \alpha + P_4 \sin \alpha)^2] \exp(-2K_0 z \cdot \sec^2 \theta) d\theta \quad \text{Gl.24}$$

und analog

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \varphi_{xx} dy = -c^2 \pi K_0 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 \theta}{1+\sin^2 \theta} [(P_1 \cos \alpha - P_2 \sin \alpha)^2 + (-P_2 \sin \alpha + P_4 \cos \alpha) \exp(-2K_0 z \cdot \sec^2 \theta)] d\theta \quad \text{Gl.25}$$

Nun müssen noch 24 und 25 nach z integriert werden.

$$\int_0^{\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi_x)^2 dy = \frac{c^2 \pi}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^5 \theta}{1+\sin^2 \theta} [(P_1 \sin \alpha + P_3 \cos \alpha)^2 + (P_2 \cos \alpha + P_4 \sin \alpha)^2] d\theta$$

$$\int_0^{\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \varphi_{xx} dy = \frac{c^2 \pi}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^5 \theta}{1+\sin^2 \theta} [(P_1 \cos \alpha - P_2 \sin \alpha)^2 + (-P_2 \sin \alpha + P_4 \cos \alpha)^2] d\theta$$

Diese Ausdrücke in Gl.17 eingesetzt ergeben für den Wellenwiderstand

$$R = \frac{\pi_0 c^2}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 \theta}{1+\sin^2 \theta} (P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2) d\theta - \frac{\pi_0 c^2}{2^2} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^5 \theta}{1+\sin^2 \theta} (P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2) d\theta$$

oder wenn $\cos^3 \theta$ ausgeklammert wird und $2 - \cos^2 \theta = 1 + \sin^2 \theta$ gesetzt wird ist

$$R = \frac{\pi_0 \cdot c^2}{4} \int_0^{\pi/2} (P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2) \cos \theta \cdot d\theta \quad \text{Gl.26}$$

Dabei sind die P_i die gleichen wie in Gl.22.

Bestimmung der P_i : Die P_i sind Funktionen der Singularitätenverteilung, der Geschwindigkeit und des Winkels θ . Weit hinter einer sich bewegenden Quelle hat die Oberflächenstörung die Form

$$\zeta = \frac{8K_0 q}{c} \int_0^{\pi/2} \cos [K_0 (x-x_s) \sec \theta] \cdot \cos [K_0 (y-y_s) \sec^2 \theta \cdot \sin \theta] \cdot \exp(-K_0 z_s \sec^2 \theta) \cdot \sec \theta \, d\theta$$

$x_s; y_s; z_s$ sind die Koordinaten der Quelle.

Für eine Singularitätenverteilung am gleichen Ort wird ζ

$$\zeta = \frac{8K_0}{c} \iint q \cdot dS \cos [(x-x_s) K_0 \sec \theta] \cos [(y-y_s) K_0 \sin \theta \cdot \sec^2 \theta] \exp(-K_0 z_s \sec^2 \theta) \sec^2 \theta \, d\theta \quad \text{Gl.27}$$

Die Ausdrücke $\cos(\alpha-\beta) \cdot \cos(a-b)$ ergeben

$$\begin{aligned} & (\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta) (\cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b) = \\ & = \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos a \cdot \cos b + \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin a \cdot \sin b \\ & + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos a \cdot \cos b + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin a \cdot \sin b \end{aligned}$$

Damit wird Gl.27

$$\zeta = \int_0^{\pi/2} (P_1 \sin a \cdot \cos b + P_2 \cos a \cdot \sin b + P_3 \cos a \cdot \cos b + P_4 \sin a \cdot \sin b) d\theta$$

wobei die P_i mit denen von Gl.22 übereinstimmen:

$$P_1 = \frac{8K_0}{2} \int q \cdot \sin A \cdot \cos B \cdot \exp(\delta) \sec^3 \theta \, dS$$

$$P_2 = \frac{8K_0}{2} \int q \cdot \cos A \cdot \sin B \cdot \exp(\delta) \sec^3 \theta \, dS$$

Gl.28

$$P_3 = \frac{8K_0}{2} \int q \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \exp(\delta) \sec^3 \theta \, dS$$

$$P_4 = \frac{8K_0}{2} \int q \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \exp(\delta) \sec^3 \theta \, dS$$

$$\text{Mit } A = K_0 x_s \sec \theta \quad B = K_0 y_s \sec^2 \theta \cdot \sin \theta$$

$$a = K_0 x \cdot \sec \theta \quad b = K_0 y \cdot \sec^2 \theta \cdot \sin \theta$$

$$\delta = -K_0 z_s \sec^2 \theta$$

Somit läßt sich der Wellenwiderstand eines Körpers, der durch Quell-Senken-Singularitäten dargestellt wird, bestimmen. Ist die Quell-Senken-Singularität in der x-z-Ebene beschränkt, dann wird Gl. 28, wobei $P = P_1 + P_2$ und $Q = P_3 + P_4$

$$P_q = \frac{8K_0}{c} \int_{-l}^{+l} \int_0^f q(x, z) \sin(K_0 x \cdot \sec \theta) \exp(\delta) \sec^3 \theta \, dx \cdot dz \quad \text{Gl. 29}$$

$$Q_q = \frac{8K_0}{c} \int_{-l}^{+l} \int_0^f q(x, z) \cos(K_0 x \cdot \sec \theta) \exp(\delta) \sec^3 \theta \, dx \cdot dz$$

P stellt den Anteil, den eine symmetrische Verteilung leistet, dar und entsprechend Q den Anteil der Unsymmetrie. Für eine Dipolverteilung, deren Dipolelemente alle in x-Richtung gerichtet sind, ergibt sich für P und Q:

$$P_D = - \frac{8K_0}{c} \int_{-l}^{+l} \int_0^f m(x, z) K_0 \cos \theta \cdot \cos(K_0 x \cdot \sec \theta) \exp(\delta) \cdot \sec^5 \theta \, dx \cdot dz \quad \text{Gl. 30}$$

$$Q_D = + \frac{8K_0}{c} \int_{-l}^{+l} \int_0^f m(x, z) K_0 \cos \theta \cdot \sin(K_0 x \cdot \sec \theta) \exp(\delta) \cdot \sec^5 \theta \, dx \cdot dz$$

mit $\delta = -K_0 z \cdot \sec^2 \theta$

Man erhält Gl. 30 aus Gl. 29, indem man den Operator

$$- \delta r \left(l \frac{\partial}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial y} + n \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

anwendet. l, m, n stellen den jeweiligen Richtungscosinus der entsprechenden Achse des Dipols dar. Ferner geht $\delta r \rightarrow 0$, aber $q \cdot \delta r \rightarrow M$.

Nun werden die einzelnen Formeln vereinfacht und man erhält als Ergebnis für den Wellenwiderstand eines Körpers dargestellt durch eine Singularitätenverteilung, die sich in der x-z-Ebene befindet:

$$R = 16\pi_0 K_0^2 \int_0^{\pi/2} (P^2 + Q^2) \cdot \sec^3 \theta \, d\theta \quad \text{Gl. 31}$$

$$P_q = \int_{-l}^{+l} \int_0^f q(x, z) \cdot \sin(K_0 x \cdot \sec \theta) \cdot \exp(-K_0 z \cdot \sec^2 \theta) \, dx \cdot dz$$

$$Q_q = \int_{-L_0}^{+L_0} \int_{-L_0}^{+L_0} q(x, z) \cdot \cos(K_0 x \cdot \sec \theta) \cdot \exp(-K_0 z \sec^2 \theta) dx \cdot dz \quad \text{Gl. 31a}$$

und

$$P_p = - \int_{-L_0}^{+L_0} \int_{-L_0}^{+L_0} m(x, z) K_0 \sec \theta \cdot \cos(K_0 x \cdot \sec \theta) \cdot \exp(-K_0 z \cdot \sec^2 \theta) dx \cdot dz$$

$$Q_D = + \int_{-L_0}^{+L_0} \int_{-L_0}^{+L_0} m(x, z) K_0 \sec \theta \cdot \sin(K_0 x \cdot \sec \theta) \cdot \exp(-K_0 z \cdot \sec^2 \theta) dx \cdot dz \quad \text{Gl. 31b}$$

Der Index ^{deutet} q die Quell-Senken-Singularität an und D die Dipol-Singularität. Die Verteilungsfunktion der Singularitäten soll in beiden Fällen zwischen $+l$ und $-l$ stetig verlaufen. Durch partielle Integration von Gl. 31b läßt sich zeigen, daß

$$\frac{\partial m(x, z)}{\partial x} = q(x, z)$$

wenn $m(x, z)$ bei $x = \pm L$ verschwindet.

Berechnung des Wellenwiderstandes eines Zweikörpersystems

Zwei Körper, die auf irgendeine Weise miteinander verbunden sind, erzeugen ein resultierendes Wellensystem, das aus den einzelnen Systemen durch Interferenz entsteht. Dabei können, wie eingangs erwähnt, sich die einzelnen Amplituden addieren oder subtrahieren. Für den Wellenwiderstand eines solchen Zweikörpersystems bedeutet das, daß der resultierende Wellenwiderstand kleiner oder größer als die Summe der Einzelwiderstände sein kann. Der Betrag des Unterschiedes ist die Widerstandsänderung ΔR des Zweikörpersystems.

In dieser Arbeit werden Körper betrachtet, die symmetrisch zu einer Mittellängsebene sind und sich in deren Richtung mit konstanter Geschwindigkeit fortbewegen. Das Zweikörpersystem hat eine gemeinsame Mittellängsebene. Für diesen Fall lautet das Widerstandsintegral

$$R = 16\pi_0 K_0^2 \int_0^{\pi/2} [(P_1 + P_2)^2 + (Q_1 + Q_2)^2] \sec^3 \theta \cdot d\theta \quad \text{Gl. 32}$$

$P_{1,2}$ und $Q_{1,2}$ sind durch Gl. 31a und Gl. 31b mit den entsprechenden Indices und Grenzen gegeben.

Betrachtet man nur Zweikörpersysteme, deren unsymmetrischer Anteil Q Null ist, dann schreibt sich Gl.32

$$R = 16\pi\sigma K_0^2 \int_0^{\pi/2} (P_1^2 + 2P_1 P_2 + P_2^2) \sec^3 \theta \cdot d\theta \quad \text{Gl.33}$$

Daraus geht hervor, daß sich der Widerstand in drei Teile aufteilt, in die beiden Einzelwiderstände der Körper und in den Interferenzterm

$$R = R_1 + 2R_{12} + R_2 \quad \text{Gl.33a}$$

Die Funktionen P_1 und P_2 können nun entweder beide eine verschiedene Art von Singularitäten enthalten, oder beide die gleiche.

Berechnung der Typintegrale des Michellschen Widerstandsintegrals

Alle weiteren Berechnungen des Widerstandes beschränken sich auf zum Hauptspant symmetrische Schiffs- und Wulstformen, deren Tiefenverteilung der Singularitäten konstant ist, d.h. die CWL ist unter ^{den} Voraussetzungen gleichzeitig Spantarealkurve. Damit kann Gl.2 direkt benutzt werden. Die Gl.31 bis 33 lassen sich nun für schmale Schiffe endlicher Länge, Breite und Tiefe mit Gl.1 umformen zu:

$$R = \frac{16\sigma c K_0^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (P^2) \sec^3 \theta \cdot d\theta \quad \text{Gl.34}$$

$$P_q = - \int_0^{L/2} \int_0^{L/2} y'(x, z) \sin(K_0 x \cdot \sec \theta) \exp(-K_0 z \cdot \sec^2 \theta) dx \cdot dz$$

$$P_p = + \int_0^{L/2} \int_0^{L/2} y(x, z) \cos(K_0 x \sec \theta) \exp(-K_0 z \sec^2 \theta) K_0 \sec \theta \cdot dx \cdot dz$$

Zur Erleichterung der tabellarischen Darstellung der Ergebnisse werden dimensionslose Koordinaten eingeführt. Benutzt eine zusätzliche Substitution, so erhält man aus Gl.34 die hier gebrauchte Form des Michellschen Widerstandsintegrals.

$$\gamma_0 = K_0 L / 2$$

$$\gamma = K_0 l / 2 \cdot \sec \theta$$

$$d\theta = \frac{d\gamma}{\gamma \sqrt{(\gamma/\gamma_0)^2 - 1}}$$

$$\begin{aligned} x &= \xi \cdot L/2 & dx &= L/2 \cdot d\xi \\ y &= \eta \cdot B/2 & dy &= B/2 \cdot d\eta \\ z &= \zeta \cdot T & dz &= T \cdot d\zeta \end{aligned}$$

$$R = \frac{80g}{\pi} \cdot \frac{B^2 T^2}{L} \int_{\gamma_0}^{\infty} (P)^2 \frac{(\gamma/\gamma_0)^2}{\sqrt{(\gamma/\gamma_0)^2 - 1}} d\gamma$$

$$P_q = - \int_0^1 \int_0^1 \eta'(\xi, \zeta) \sin(\gamma \xi) \cdot \exp(-k\zeta \gamma^2/\gamma_0) d\xi \cdot d\zeta \quad \text{Gl. 35}$$

$$P_p = + \int_0^1 \int_0^1 \eta(\xi, \zeta) \gamma \cos(\gamma \xi) \cdot \exp(-k\zeta \gamma^2/\gamma_0) d\xi \cdot d\zeta$$

mit $k = 2T/L$.

Dabei wird R selbst noch wie folgt dimensionslos gemacht

$$R^* = \frac{R}{\frac{80g}{\pi} \cdot \frac{B^2 T^2}{L}} \quad \text{Gl. 35a}$$

Typintegrale für Q-S-Verteilungen Unter Benutzung von Gl. 2 und Berücksichtigung der Tatsache, daß im R^* -Integral $[\eta'(\xi)]^2$ vorkommt, baut sich der Gesamtwiderstand aus einer Summe von Widerstandsteilintegralen auf, die folgende allgemeine Form haben:

$$\mathcal{W}_{ij}[\gamma; k] = \int_{\gamma_0}^{\infty} M_i(\gamma) \cdot M_j(\gamma) \cdot E_0(\gamma) \cdot E_1(\gamma) \cdot f(\gamma) d\gamma \quad \text{Gl. 36}$$

darin bedeuten

$$M_i(\gamma) = \int_0^1 \xi^i \sin(\gamma \xi) d\xi \quad \text{entspr. } M_j(\gamma) \quad \text{Gl. 37}$$

$$E_0(\gamma) = \int_0^1 \exp(-\delta \zeta) d\zeta \quad \text{mit } \delta = 2T/L \cdot \gamma^2/\gamma_0 \quad \text{Gl. 38}$$

$$f(\gamma) = \frac{(\gamma/\gamma_0)^2}{\sqrt{(\gamma/\gamma_0)^2 - 1}} \quad \text{Gl. 39}$$

Formel 37 läßt sich rekursiv exakt lösen

$$M_i(\gamma) = -\frac{\cos \gamma}{\gamma} + \frac{i}{\gamma} \left[\frac{\sin \gamma}{\gamma} - \frac{i}{\gamma} \cdot M_{i-2}(\gamma) \right] \quad \text{Gl. 37a}$$

Für numerische Rechnungen ist Gl. 7a für $\gamma \ll 1$ und auch für große i schlecht geeignet, folgende Reihendarstellung

ist besser

$$M_i(\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\gamma^{2n+1}}{(2n+1)!(i+2+2n)} \quad \text{Gl. 37b}$$

Für große i und große γ ist Gl. 37b ungeeignet. Da sehr große i ($i \leq 1000$) bei der Darstellung des Wulstes in Polynomform verwendet werden, kann durch einen Trick folgende Reihendarstellung gewonnen werden

$$M_i(\gamma) = \frac{\sin \gamma}{i+1} \left[1 - \frac{\gamma^2}{(i+2)(i+3)} + \frac{\gamma^4}{(i+2)(i+3)(i+4)(i+5)} - \dots \right] \\ - \frac{\gamma \cos \gamma}{(i+1)(i+2)} \left[1 - \frac{\gamma^2}{(i+3)(i+4)} + \frac{\gamma^4}{(i+3)(i+4)(i+5)(i+6)} - \dots \right]$$

Gl. 37c

Die Formel 37c eignet sich neben 37a am besten für den Rechenautomaten und konvergiert für kleine γ sehr gut. Gl. 38 läßt sich exakt lösen zu

$$E_0(\gamma) = \frac{1 - \exp(-\delta)}{\delta} \quad \delta = 2T/L \cdot \gamma/\gamma_0 \quad \text{Gl. 38a}$$

Gl. 39 hat bei $\gamma = \gamma_0$ eine Polstelle, die aber durch folgende Substitution umgangen werden kann

$$z^2 = \gamma - \gamma_0 \quad d\gamma = 2z \cdot dz$$

dabei läuft z von 0 bis ∞ .

$$f(z^2 + \gamma_0) = \frac{2(z^2 + \gamma_0)^2}{\gamma_0 \sqrt{z^2 + 2\gamma_0}} \quad \text{Gl. 39a}$$

Die Integration wurde mit Hilfe einer Quadraturformel durchgeführt, wobei die Integration bei einer oberen Grenze $T = z + \gamma_0$ abgebrochen wurde. Über die Genauigkeit der Rechnungen gibt die Berechnung des letzten Integrandenwertes einige Hinweise. Gl. 36 wird

$$\mathcal{M}_{ij}[\gamma_0; k] = \int_0^T M_i(\gamma) \cdot M_j(\gamma) \cdot [E_0(\gamma)]^2 \frac{2(z^2 + \gamma_0)^2}{\gamma_0 \sqrt{z^2 + 2\gamma_0}} dz + \Delta \mathcal{M}_{ij}[\gamma_0; k] \\ = h(c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + c_4 f_4 + c_5 f_5 + c_6 f_6 + c_7 f_7 + f_8 + f_9 + \dots + \\ + c_7 f_{n-6} + c_6 f_{n-5} + c_5 f_{n-4} + c_4 f_{n-3} + c_3 f_{n-2} + c_2 f_{n-1} + c_1 f_n) + \Delta \mathcal{M}_{ij}[\gamma_0; k]$$

Gl. 40

Es ist natürlich besser den Fehler durch die Größe des Restgliedes $\Delta \mathcal{M}_{ij}$ abzuschätzen, aber dies bereitet bei $i = j \leq 1000$ sehr große Schwierigkeiten. Für $i = j \leq 100$

liefert $\Delta \mathcal{M}_i$ geeignete Restglieder. Auf die Abschätzung dieser Werte wird hier nicht näher eingegangen.

Die Konstanten c haben folgende Größe

$$c_1 = 0,318500$$

$$c_2 = 1,376388$$

$$c_3 = 0,655555$$

$$c_4 = 1,212500$$

$$c_5 = 0,925694$$

$$c_6 = 1,011111$$

$$c_7 = 1,000000$$

Die Berechnungen sind auf der Elektronischen Rechenanlage IBM 650 in Hamburg Barmbek durchgeführt worden.

Folgende Werte der $\mathcal{M}_{ij}[\gamma; k]$ sind berechnet und tabelliert worden:

$$i = 1, 2, 3, 5, 7, 9, 99, 199, 499, 999$$

$$j = 1, 2, 3, 5, 7, 9, 99, 199, 499, 999$$

$$\gamma = 0,5; 1, 2, 3, \dots, 15 \quad \text{mit } \Delta\gamma=1$$

$$k = 0,06 \quad \text{als normales Verhältnis bei Schiffen}$$

Dabei betrug die Intervalllänge für z $0 \leq z \leq 10$ und $\Delta z = h = 0,05$. An sich müsste die obere Grenze z der Genauigkeit entsprechend geändert werden; dies ist nicht durchgeführt worden, einmal, weil das Maschinenprogramm noch komplizierter geworden wäre, zum anderen, weil die Rechenzeit für große γ und große z enorm gewachsen wäre.

Typintegrale einer Q-S-Verteilung mit einem Dipol: Um einen Wulst im Rahmen des Geltungsbereiches der Michelttschen Theorie besser darstellen zu können, als es mit der Polynomdarstellung mit hohen Exponenten möglich ist, kommt der Dipolwulst als die geeignetste Form infrage, und zwar aus folgenden Gründen:

1. läßt sich die P_p -Funktion exakt lösen und
2. kann der Dipol in der x - z -Ebene beliebig verschoben werden.

Gleichzeitig ist noch ein Dipolstab mit in z -Richtung konstanter Dipolverteilung berechnet worden, um einen guten Vergleich mit der Polynomdarstellung zu haben. Auch in diesen Fall läßt sich P_p exakt lösen.

Nach Gl.35 erhält man für die beiden Fälle

a; Einzeldipol

$$P_D = M \cdot \gamma \cdot \cos(d\gamma) \cdot \exp(-\delta f)$$

wobei (d;f) die Lage des Dipols in der x-z-Ebene angibt.

$M = 2\pi r^3 c$ ist das Dipolmoment im räumlichen Fall.

b; Dipolstab

$$P_D = M \cdot \gamma \cdot \cos(d\gamma) \cdot E_c(\gamma)$$

d gibt die Lage der Länge nach an.

$M = 2\pi r^2 c$ ist das Dipolmoment im ebenen Fall.

Mit den Ausdrücken von P_D lassen sich mit den $M_i(\gamma)$ folgende Typintegrale für den Interferenzterm in dimensionsloser Form von Dipol und Q-S-Singularität aufstellen und berechnen:

a; Einzeldipol

$$\mathcal{M}_{iD}[\gamma; k] = \int_{\gamma_0}^{\infty} M_i(\gamma) \cdot E_c(\gamma) \cdot \gamma \cos(d\gamma) \exp(-\delta f) f(\gamma) d\gamma \quad \text{Gl.41}$$

b; Dipolstab

$$\mathcal{M}_{iD}[\gamma; k] = \int_{\gamma_0}^{\infty} M_i(\gamma) \cdot E_c(\gamma) \cdot \gamma \cos(d\gamma) \cdot E_c(\gamma) \cdot f(\gamma) d\gamma \quad \text{Gl.41a}$$

Der Index D deutet an, daß es sich um Dipole handelt. Der Eigenwiderstand dieser Dipole hat in der \mathcal{M} -Schreibweise folgende Gestalt:

a; Einzeldipol

$$\mathcal{M}_{DD}[\gamma; k] = \int_{\gamma_0}^{\infty} [\gamma \cdot \cos(d\gamma) \cdot \exp(-\delta f)]^2 f(\gamma) d\gamma \quad \text{Gl.42}$$

b; Dipolstab

$$\mathcal{M}_{DD}[\gamma; k] = \int_{\gamma_0}^{\infty} [E_c(\gamma) \cdot \gamma \cos(d\gamma)]^2 f(\gamma) d\gamma \quad \text{Gl.42a}$$

Diese \mathcal{M} -Funktionen sind ebenfalls auf der elektronischen Rechenanlage mit Hilfe der Quadraturformel 40 berechnet worden.

Folgende \mathcal{M}_{iD} -Werte sind berechnet und tabelliert worden:

$$i = 1, 2, 3, 5, 7, 9$$

$$\gamma_0 = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,$$

$$k = 0, 06$$

mit den Parametern $d = 0; 0,2; 0,4; 0,5; 0,6; \dots 1,2$

$$f = 0,5; 0,75; 1,00$$

Abschätzung der Genauigkeit der gelösten Integrale

Um die Berechnung der M_i -Funktionen in der angegebenen Weise durchführen zu können, ist die Konvergenz des Integranden wichtig. Die Konvergenz ist gegeben, denn für $\gamma \ll \gamma$ strebt der Integrand mit $1/\gamma^3$ gegen Null. Da nun die Integration bei $z = 10$ als obere Grenze abgebrochen wurde, entsteht notwendigerweise ein Fehler über die Größe des gemachten Fehlers gibt die Berechnung oder besser die Abschätzung des letzten Integrandenwertes Auskunft. Man kann sagen, daß die Genauigkeit von 8 Ziffern kaum beeinflusst wird, wenn die Größe des letzten Wertes erst die 10. Ziffer beeinflusst.

Allgemeine Werte in der Höchstgrenze:

a; z = 10	$\gamma_0 = 1$	$M_i = 0,01$
		$\delta = 0,61 \cdot 10^3$
		$e^{\delta} = 0$
		$E_0 = 1,64 \cdot 10^{-3}$
		$f(z) = 2,02 \cdot 10^3$
		$\gamma \cos(d\gamma) = 1,01 \cdot 10^2$
b; z = 10	$\gamma_0 = 15$	$M_i = 0,01$
		$\delta = 0,53 \cdot 10^2$
		$e^{\delta} = 0$
		$E_0 = 1,9 \cdot 10^{-2}$
		$f(z) = 1,53 \cdot 10^2$
		$\gamma \cos(d\gamma) = 1,15 \cdot 10^2$

Nach Gl. 36 ergibt sich für den letzten Wert

$$F(z) = \Delta h \cdot M_i \cdot M_j \cdot E_0 \cdot f(z)$$

mit $\Delta h = 0,05$ und $M_j = 0,001$ für

$$a; z = 10 \quad \gamma_0 = 1 \quad \underline{F(z) = 3 \cdot 10^{-9}}$$

Die Ergebnisse liegen in der Größenordnung von $3 \cdot 10^{-9}$.

Es wird also die 7. Ziffer noch beeinflusst. Ist $M_i = M_j = 0,01$, dann sind die Verhältnisse um eine Ziffer noch ungünstiger.

$$b; z = 10 \quad \gamma_0 = 15 \quad \underline{F(z) = 3 \cdot 10^{-8}}$$

Die Ergebnisse haben die Größenordnung von $3 \cdot 10^{-8}$. Es wird also die 5. Ziffer noch beeinflusst.

Diese grobe Abschätzung zeigt, daß die Ergebnisse, besonders für große i , mit Vorsicht zu behandeln sind. Es ist selbstverständlich, daß das Restglied noch weitere

Stellen beeinflussen wird. Wie vorher erwähnt, lohnt sich eine genauere Berechnung wegen der enormen Rechenzeit nicht. Gl. 41 Interferenzterm des Einzeldipols. Der letzte Wert ist

$$F(z) = \Delta h \cdot M_i \cdot E_o \cdot \gamma \cos(d\gamma) \cdot \exp(-\delta f)$$

a; $z = 10$ $\gamma_0 = 1$ Für diesen Fall reicht die Genauigkeit der Ergebnisse vollkommen aus, da $e^{-\delta f}$ sehr schnell gegen Null strebt.

b; $z = 10$ $\gamma_0 = 15$ mit $f = 0,5$ wird

$$\underline{F(z) = 0,72 \cdot 10^{-12}}$$

Auch in diesem Fall wird das Restglied kaum die 8. Stelle beeinflussen.

Gl. 41a Interferenzterm des Stabdipols

$$F(z) = M_i \cdot E_o \cdot E_o \cdot \gamma \cos(d\gamma) \Delta h$$

a; $z = 10$ $\gamma_0 = 1$

$$\underline{F(z) = 3 \cdot 10^{-4}}$$

Die Konvergenz ist schwächer als die von Gl. 41, ebenso die Genauigkeit.

b; $z = 10$ $\gamma_0 = 15$

$$\underline{F(z) = 3 \cdot 10^{-3}}$$

Für diese Geschwindigkeit wird die Genauigkeit noch schlechter.

Gl. 42a Stabdipol allein

$$a; z = 10 \quad \gamma_0 = 1\pi \quad \underline{F(z) = 3,0}$$

Die Ergebnisse liegen in der Größenordnung von 1000, trotzdem macht das Restglied noch einen erheblichen Teil des Gesamtintegrals aus.

$$b; z = 10 \quad \gamma_0 = 15 \quad \underline{F(z) = 36}$$

Die Ergebnisse liegen bei 4000.

Aus diesen Betrachtungen geht hervor, daß der Einzeldipol die geeignetste Darstellung eines Wulstes ist und die besten Ergebnisse bezüglich der Berechnung der $M_{j,0}$ -Funktionen liefert und die Voraussetzungen erfüllt. Die anderen Ergebnisse - Stabdipol, M_j mit $j \leq 1000$ - müssen mit Vorsicht betrachtet werden, sind aber noch gut für Betrachtungen über das Verhalten von Wulstformen geeignet.

Die Größe der Kugel, die der Dipol erzeugt

Es wird angenommen, daß der Dipol kombiniert mit der Q-S-Verteilung immer eine Kugel erzeugen möge, gleich an welcher Stelle der x-z-Ebene er sich befindet. In Wirklichkeit ist dies natürlich nicht immer gegeben. Der Radius der Kugel in Abhängigkeit von den Modellabmessungen errechnet sich wie folgt:

Für das System Körper + Kugelwulst lautet das Widerstandsintegral:

$$R = 16\pi\sigma K_0^2 \int_0^\infty (E_q^2 + 2P_q P_D + E_D^2) f(\gamma) \cdot d\gamma$$

$$P_q = \frac{c}{\pi} \cdot \frac{B \cdot T}{2} \int_0^1 \int_0^1 \eta'(\xi, \zeta) \cdot \sin(\gamma \xi) \exp(-\delta \zeta) d\xi \cdot d\zeta$$

$$P_D = \frac{2}{L} M_s \gamma \cos(d\gamma) \cdot \exp(-\delta f)$$

Dabei sind nun d mit L/2 und f mit T dimensionstlos gemacht worden.

Für einen Dipolstab wird P_D

$$P_D = \frac{2T}{L} M_s \gamma \cos(d\gamma) \cdot \int_0^1 m(\zeta) \cdot \exp(-\delta \zeta) d\zeta$$

$m(\gamma)$ ist die dimensionlose Dipolverteilung der Tiefe nach. Damit nun $R_{ges} = R_c + 2R_{ob} + E_D$ in der Form 55 steht, hat der Interferenzterm folgendes Aussehen für einen Einzeldipol

$$R_{ob} = - \frac{8\sigma g}{\pi} \cdot \frac{B^2 \cdot T^2}{L} \left[\frac{4\pi M_0}{c \cdot L \cdot B \cdot T} \right] \int_0^\infty P_q \cdot P_D \cdot f(\gamma) \cdot d\gamma$$

Setzt man für

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi M_0}{c \cdot L \cdot B \cdot T}$$

oder mit $M_s = 2\pi r^2 \sigma$

$$\Delta\varphi = \frac{8\pi^2 r^3}{L \cdot B \cdot T}$$

dann gibt $\Delta\varphi$ die 6π -fache Vermehrung von φ bei Anwesenheit einer Erhebung (Wulst) an. Das Dipolmoment kann auch nach G.I. Taylor

$$M_0 = (1 + K_x) \cdot \bar{V} \cdot c$$

gesetzt werden. Darin bedeuten K_x der Koeffizient der hydrodynamischen Masse in x-Richtung und \bar{V} das erzeugte

Volumen.

Für den Interferenzterm des Stabdipols erhält man:

$$R_{ob} = - \frac{80g}{\pi} \frac{B^2 T^2}{L} \left[\frac{4\pi \cdot M}{c \cdot L \cdot B} \right] \int_{\gamma}^{\infty} P_q \cdot P_D \cdot f(\gamma) d\gamma$$

Dabei wurde wieder

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi \cdot M_0}{c \cdot L \cdot B}$$

gesetzt mit $M_0 = 2\pi r^2 c$ für den zweidimensionalen Fall. Es ist klar, daß der R_b -Term den Faktor $(\Delta\varphi)^2$ in beiden Fällen erhält.

Numerische Untersuchungen mit zwei Modellformen

Allgemeines: In dieser Arbeit wird im Gegensatz zu Wigley [5] nur der Einfluß eines Wulstes auf den Wellenwiderstand betrachtet. Die mögliche Änderung des Reibungswiderstandes bleibt unberücksichtigt. Die in diesem Abschnitt behandelte gesamte Widerstandsänderung ΔR^* bei Anwesenheit eines Wulstes hat die Form

$$\Delta R^* = \mp 2R_{ob} + R_w \quad \text{Gl. 43}$$

d.h. der Eigenwiderstand des Wulstes ist mit enthalten. Gl. 43 ist entsprechend Gl. 35a dimensionlos. Zuerst werden die Berechnungen mit dem Dipol durchgeführt, da er sich den Forderungen am besten anpaßt. Mit dem Dipol, der immer ein $\Delta\varphi = 0,001$ auch innerhalb der Q-S-Belegung erzeugen möge, kann auch ein sogenannter Änderungswiderstand definiert werden, der an den verschiedenen Stellen $d; f$ der x-z-Ebene angebracht deren Einfluß auf den Wellenwiderstand angibt. Berücksichtigt man noch die Änderung einiger Parameter der Grundform, so kann man wiederum deren Bedeutung für die Darstellung einer Schiffsförmigkeit bezüglich des Wellenwiderstandes finden. Der Änderungswiderstand hat natürlich die gleiche Form wie Gl. 43, soll nur kleiner sein und nur den Einfluß einer infinitesimal kleinen Änderung der Spantarealkurve (oder Schiffsoberfläche) auf den Wellenwiderstand charakterisieren.

Danach wird ein Vergleich mit der Polynomdarstellung durchgeführt. Ferner wird die optimale Größe des Wulstes für beide Darstellungsformen berechnet und kritisiert.

Grundformen [7;8] Die Berechnung der Widerstandsänderung wird mit zwei Modellen durchgeführt, deren $\beta = 1$ ist. Das erste Modell hat eine Parabel 2. Grades als CWL, das zweite eine Parabel 4. oder 6. Grades. Die zwei verschiedenen Polynomdarstellungen des zweiten Modells sind aus folgendem Grund gewählt worden: Bei der ersten Darstellung ist der Rechenaufwand gering, während die zweite die Verwendung eines weiteren Parameters gestattet. Da die Rechnungen alle in der dimensionslosen Form durchgeführt werden, sind auch alle Verteilungskurven dimensionslos und haben die allgemeine Gleichung

$$\eta(\xi) = \sum_0^m a_n \cdot \xi^n \quad \text{Gl. 44}$$

Die Modelle erhalten alle eine Kurzbezeichnung der Form

$$\langle n_1; n_2; n_3; \dots; \varphi; t; \kappa; \dots \rangle$$

Darin stellen die n_i die Exponenten von ξ dar und

$$\varphi = \int \eta(\xi) d\xi \quad \text{der Schärfegrad}$$

$$\text{Gl. 45} \quad t = \left. \frac{\partial \eta(\xi)}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} \quad \text{die Steigung der Tangente im V.L.}$$

$$\kappa = \frac{\partial^2 \eta(\xi)}{\partial \xi^2} \quad \text{die Krümmung im Hauptspant.}$$

Die a_n von Gl. 44 folgen aus den Bedingungsgleichungen 45.

1. Modell: Parabel 2. Grades der Form

$$\eta(\xi) = 1 - \xi^2$$

Hier erübrigt sich eine Kurzbezeichnung.

2. Modell:

a;2-parametrische Darstellung

$$\langle 2; 4; 6; \varphi; t \rangle$$

mit der allgemeinen Gleichung

$$\eta(\xi) = 1 - a_2 \xi^2 - a_4 \xi^4 - a_6 \xi^6$$

Für die a_n gelten folgende Bestimmungsgleichungen

$$a_1 = - \frac{105\varphi - 3t - 72}{8}$$

$$a_4 = + \frac{210\varphi - 10t - 120}{8}$$

$$a_6 = - \frac{105\varphi - 7t - 56}{8}$$

Zu den einzelnen Parametern φ und t gehören bestimmte a_n , so wie es die folgende Tabelle zeigt

t	φ	a_2	a_4	a_6
0	0,64	+ 0,6000	+ 1,800	- 1,4000
0,5	0,64	+ 0,7875	+ 1,175	- 0,9625
1,0	0,64	+ 0,9750	+ 0,550	- 0,5250
1,7	0,64	+ 1,2375	- 0,325	+ 0,0875
2,0	0,64	+ 1,3500	- 0,700	+ 0,3500
3,0	0,64	+ 1,7250	- 1,950	+ 1,2250
4,0	0,64	+ 2,1000	- 3,200	+ 2,1000
0	0,56	+ 1,6500	- 0,300	- 0,3500
0	0,60	+ 1,1250	+ 0,750	- 0,8750
0	0,68	+ 0,0750	+ 2,850	- 1,9250

b; 3-parametrische Form

$$\langle 2; 3; 4; 6; \varphi; t; \varrho \rangle$$

mit der allgemeinen Gleichung

$$\eta(\xi) = 1 - a_2 \xi^2 - a_3 \xi^3 - a_4 \xi^4 - a_6 \xi^6$$

Die a_n bestimmen sich aus folgenden Gleichungen

$$a_2 = + \frac{\varrho}{2}$$

$$a_3 = \frac{576 - 840\varphi - 32\varrho + 24t}{18}$$

$$a_4 = \frac{-810 + 1260\varphi + 30\varrho + 45t}{18}$$

$$a_6 = \frac{252 - 420\varphi - 7\varrho + 21t}{18}$$

Zu den einzelnen Parametern $\varphi; \varrho; t$ gehören folgende a_n

t	φ	a_2	a_3	a_4	a_6
0	0	0,64	+ 0	+ 2,133	- 0,200
1	0	0,64	+ 0,5	+ 0,355	+ 1,466
2	0	0,64	+ 1,0	- 1,422	+ 3,133
3	0	0,64	+ 1,5	- 3,200	+ 4,800

α	t	φ	a_2	a_3	a_4	a_6
0	1,7	0,64	+ 0	+ 4,400	- 4,450	+ 1,050
1	1,7	0,64	+ 0,5	+ 2,622	- 2,783	+ 0,661
2	1,7	0,64	+ 1,0	+ 0,844	- 1,116	+ 0,272
3	1,7	0,64	+ 1,5	- 0,933	+ 0,549	- 0,116

Wulstformen in Blynomdarstellung Die allgemeine Gleichung des Wulstes, der eine große aber endliche Tangente behält, hat nach [6] folgende Form

$$\eta_b = a \cdot f(\xi) \cdot \psi(\zeta) \quad \text{Gl. 46}$$

Diese Gleichung genüge der Bedingung $\eta_b = 0$ bei $\xi = 0$ und $\xi = 1$. Ferner kann man fordern, daß $\Delta\delta = 0$ ist, d.h. die Wulstform stellt eine Verschiebung von Displacement dar. In dieser Gleichung bedeuten a die Wulststärke, $f(\xi)$ die Verteilung der Länge nach und $\psi(\zeta)$ die der Tiefe nach. Da hier nur Verteilungen behandelt werden, die konstant der Tiefe nach sind, ist $\psi(\zeta) = 1$ und $\Delta\delta = \Delta\varphi \cdot f(\xi)$ baut sich analog Gl. 44 auf. Folgende zwei Gruppen von Wulstformen werden behandelt.

1. Wulstformen, die eine Displacementvermehrung um $\Delta\varphi$ mit sich bringen. Sie haben die allgemeine Gleichung:

$$\eta_b = a \cdot (\xi^{m_1} - \xi^{m_2}) \quad \text{Gl. 47}$$

Gl. 47 genügt den Bedingungen

$$\begin{aligned} \eta_b &= 0 & \text{bei} & \xi = 0 \text{ und } \xi = 1 \\ \Delta\varphi &\neq 0 \end{aligned}$$

Aus Gl. 47 erhält man t ; $\Delta\varphi$ und die maximale Spantfläche f zu

$$t = \frac{\partial \eta_b(\xi)}{\partial \xi}$$

$$\Delta\varphi = a \cdot \int_0^1 \eta_b(\xi) d\xi \quad \text{Gl. 48}$$

$$f = a \cdot \eta_{b \max} \quad (\text{graph. ermittelt})$$

Die folgende Tabelle zeigt die untersuchten Formen

m_1	m_2	t	$\Delta\varphi$	f	a für $\Delta\varphi=0,001$
10	100	- 90a	0,081a	0,69a	0,01235
10	100	0	0,0899a	0,80a	0,011127
10	1000	- 990a	0,09a	0,94a	0,01111
100	200	- 100a	0,005a	0,28a	0,2

2. Wulstformen, die keine Deplacementvermehrung mit sich bringen. Sie haben die allgemeine Forme

$$\eta_b = a [b(\xi^{m_1} - \xi^{m_2}) + \xi^{m_2} - \xi^{m_3}] \quad \text{Gl. 49}$$

Gl. 49 erfüllt die Bedingungen

$$\eta_b = 0 \quad \text{bei } \xi = 0 \quad \text{und } \xi = 1$$

Die Konstante b folgt aus der Forderung $\Delta\varphi = 0$

Es wird nur eine Form dieser Art betrachtet, und zwar

$$\eta_b = a (-0,743\xi^4 + 1,743\xi^{10} - \xi^{100}) \quad \text{Gl. 50}$$

mit $t = -85a$ und $f = 0,61a$.

Die formale Schreibweise beider Formen ist analog Gl. 44

$$\langle m_1; m_2; m_3 \rangle$$

Die Spantarealkurven $\eta_b(\xi)$ der verschiedenen Wulstformen zeigt Diagramm 1.

Berechnung des Wellenwiderstandes Da in Gl. 33 P^2 bzw. $P_1 \cdot P_2$ vorkommt und P eine Funktion von $\eta'(\xi)$ ist, wird sich der Widerstand aus einer Summe von \mathcal{M}_i -Funktionen nach Gl. 36 zusammensetzen; wobei die einzelnen \mathcal{M}_i mit Faktoren multipliziert werden müssen, die aus $[\eta'(\xi)]^2$ bzw. $\eta'_1(\xi) \cdot \eta'_2(\xi)$ folgen. Für $\eta'(\xi)$ sind die Gleichungen der Grund- bzw. der Wulstform zu nehmen.

1. Grundform Der Widerstand der Grundform ist R_0^+ und ergibt sich für die 1. Modellform zu

$$\eta' = -2\xi$$

$$\text{bzw.} \quad R = +4\mathcal{M}_{11}$$

Für die zweiparametrische Darstellung der 2. Modellform ergibt sich R_0^+ zu

$$\eta' = -2a_2\xi - 4a_4\xi^3 - 6a_6\xi^5 \quad \text{und damit}$$

$$R_0^+ = 4a_2^2\mathcal{M}_{11} + 16a_4^2\mathcal{M}_{33} + 36a_6^2\mathcal{M}_{55} + 8a_2a_4\mathcal{M}_{13} + 12a_2a_6\mathcal{M}_{15} + 24a_4a_6\mathcal{M}_{35} \quad \text{Gl. 51}$$

Und analog für die dreiparametrische Darstellung

$$\eta' = -2a_2\xi - 3a_3\xi^2 - 4a_4\xi^3 - 6a_6\xi^5 \quad \text{und damit}$$

$$R_0^+ = 4a_2^2\mathcal{M}_{11} + 9a_3^2\mathcal{M}_{22} + 16a_4^2\mathcal{M}_{33} + 36a_6^2\mathcal{M}_{55} + 6a_2a_3\mathcal{M}_{12} + 8a_2a_4\mathcal{M}_{13} + 12a_2a_6\mathcal{M}_{15} + 12a_3a_4\mathcal{M}_{23} + 18a_3a_6\mathcal{M}_{25} + 24a_4a_6\mathcal{M}_{35} \quad \text{Gl. 52}$$

Die a_n sind in den beiden obigen Tabellen und die \mathcal{M}_{ij} in den Tabellen im Anhang angegeben.

Die Ergebnisse dieser Rechnungen zeigt Tafel 1 und Diagramm 2 die entsprechende graphische Darstellung

2. Wulstformen Der Eigenwiderstand R_b^+ der Wulstformen wird analog für die einzelnen Darstellungsarten:

a; für die Polynomdarstellung: Gl. 49 stellt die allgemeine Form dar (für Gl. 47 ist $b = 0$).

$$\eta_b^+ = a [bm_1 \xi^{m_1} - (b-1)m_2 \xi^{m_2} - m_3 \xi^{m_3}] \quad \text{und damit}$$

$$R_b^+ = a^2 \cdot [b^2 m_1^2 \mathcal{M}_{m_1, m_1} + (b-1)^2 m_2^2 \mathcal{M}_{m_2, m_2} + m_3^2 \mathcal{M}_{m_3, m_3} - b(b-1)m_1 m_2 \mathcal{M}_{m_1, m_2} - bm_3 \mathcal{M}_{m_2, m_3} + (b-1)m_2 m_3 \mathcal{M}_{m_2, m_3}] \quad \text{Gl. 53}$$

Für a die Wulststärke, b, m_1, m_2, m_3 sind die entsprechenden Werte aus den obigen Tabellen einzusetzen; die \mathcal{M}_{ij} sind ebenfalls im Anhang zu finden. (Mit m'_i werden die um 1 verringerten Exponenten von ξ bezeichnet)

b; für den Dipol: R_b^+ für den Dipol läßt sich direkt aus den Tabellen ablesen und ist nach Gl. 42

$$R_b^+ = + (\Delta\varphi)^2 \mathcal{M}_{DP} \quad \text{Gl. 54}$$

Der Eigenwiderstand der Wulstformen ist nicht extra in Tabellen angegeben.

3. Interferenzterm Der Interferenzwiderstand ergibt sich aus dem Produkt $P_1 P_2$ bzw. $\eta'_0(\xi) \cdot \eta'_b(\xi)$.

a; Polynomdarstellung der 2-parametrischen Form:

$$R_{ob}^+ = a [-2a_2 b m_1 \mathcal{M}_{1, m_1} + 2a_2 (b-1) m_2 \mathcal{M}_{1, m_2} + 2a_2 m_3 \mathcal{M}_{1, m_3} - 4a_4 b m_1 \mathcal{M}_{3, m_1} + 4a_4 (b-1) m_2 \mathcal{M}_{3, m_2} + 4a_4 m_3 \mathcal{M}_{3, m_3} - 6a_6 b m_1 \mathcal{M}_{5, m_1} + 6a_6 (b-1) m_2 \mathcal{M}_{5, m_2} + 6a_6 m_3 \mathcal{M}_{5, m_3}] \quad \text{Gl. 55}$$

Und entsprechend für die 3-parametrische Darstellung.

b; Dipoldarstellung

$$R_{ob}^+ = \Delta\varphi \cdot 4 \mathcal{M}_{1,1} \quad \text{für die Parabel} \quad \text{Gl. 56}$$

für die 2-parametrische Darstellung

$$R_{ob}^+ = \Delta\varphi [-2a_2 \mathcal{M}_{1,D} - 4a_4 \mathcal{M}_{3,D} - 6a_6 \mathcal{M}_{5,D}] \quad \text{Gl. 57}$$

für die 3-parametrische Darstellung

$$R_{ob}^+ = \Delta\varphi [-2a_2 \mathcal{M}_{1,D} - 3a_3 \mathcal{M}_{2,D} - 4a_4 \mathcal{M}_{3,D} - 6a_6 \mathcal{M}_{5,D}] \quad \text{Gl. 58}$$

Mit diesen Formeln ist die Widerstandsänderung

$$\Delta R^+ = \mp 2R_{0b}^+ + R_b^+$$

in allen Fällen berechnet und in Tafel 2 (Polynomdarstellung) und in Tafel 3 u. 4 (Dipoldarstellung) zusammengefaßt worden. Diagramm 3 zeigt die graphische Darstellung von ΔR^+ der Wulstformen in Polynomdarstellung und Diagramm 4 ΔR^+ der Dipoldarstellung.

Optimale Wirkung eines Wulstes Der Wellenwiderstand eines Zweikörpersystems ist eine Funktion der Größe der beiden Körper und deren Lage zueinander. Soll nun die Bedingung, den Wellenwiderstand zu einem Minimum zu machen, gestellt werden, dann kann diese bezüglich der gegenseitigen Lage oder der Größe erfüllt werden. Ist ein Körper der beiden gegeben, dann kann aus Gl. 33a, die sich mit Hilfe der Ausdrücke nach Gl. 51+58 auch schreiben läßt

$$R^+ = \sum a_v \cdot \mathcal{M}_{ij} + 2a \sum b_v \cdot \mathcal{M}_{ij} + a^2 \sum c_v \cdot \mathcal{M}_{ij} \quad ,$$

die optimale Größe des zweiten Körpers mit der Bedingung

$$\frac{\partial R}{\partial a} = 0$$

bestimmt werden. Für die optimale Wulststärke a folgt

$$a = \frac{\sum b_v \cdot \mathcal{M}_{ij}}{\sum c_v \cdot \mathcal{M}_{ij}} \quad \text{Gl. 60}$$

und für $\Delta \varphi$

$$\Delta \varphi = \frac{\sum b_v \cdot \mathcal{M}_{ij}}{\mathcal{M}_{DD}} \quad \text{Gl. 61}$$

Die optimalen Werte von $\Delta \varphi$ und a sind für die betrachteten Geschwindigkeiten berechnet worden und ebenfalls die entsprechenden Widerstände.

Die optimale Lage des Dipols der Länge nach ist graphisch ermittelt worden, indem ΔR^+ über L (bzw. d) aufgetragen wurde. (Diagr. 7+9). Diagramm 10 zeigt die Verhältnisse der optimalen ^{Lage} des Dipols in der Nähe des vorderen Lotes.

Die optimalen Werte der Wulststärke a und die zugehörigen Widerstände ΔR_{opt}^+ sind in Tafel 2 zu finden. Gleichzeitig wurde ΔR_{opt}^+ in Prozenten des Widerstandes R_0^+ der Grundform

berechnet und aufgetragen. Die entsprechenden Werte für den Dipol enthalten Tafel 3 und 4. Die zugehörige graphische Darstellung zeigt Diagramm 6.

Diskussion und Auswertung der numerischen Berechnungen

Die Diskussion der numerischen Berechnungen wird nun in zwei Teile gegliedert. Zunächst wird allgemein der Einfluß irgend einer Erhebung der Außenhaut oder besser eines Deplacementelementes, das durch einen Dipol charakterisiert wird, auf den Wellenwiderstand betrachtet. Danach wird der Wulst in den Darstellungsformen diskutiert.

1. Einfluß eines Deplacementelementes auf den Wellenwiderstand, charakterisiert durch einen Dipol:

Betrachtet man die Verteilungsfunktion der Länge nach der den Körper erzeugenden Singularitäten, dann läßt sich die Gl. 33 so auffassen, daß P_1 die Verteilungsfunktion des Körpers ist und P_2 nur ein Element davon. Nach Gl. 33a läßt sich der Wellenwiderstand des Körpers nun zerlegen in den Eigenwiderstand R_0^+ , den Interferenzterm $R_{0,2}^+$ und den Eigenwiderstand des Elementes R_2^+ . $2R_{0,2}^+$ und R_2^+ werden nun als ΔR^+ zusammengefaßt und Änderungswiderstand des Elementes genannt. Die Größe von ΔR^+ ist nun ein Maß für den Einfluß eines Elementes, das sich an einer beliebigen Stelle der x-z-Ebene befinden kann und konstante Stärke hat, auf die Bildung des Wellenwiderstandes. Man kann nun die Orte der Verteilungskurve ausmachen, die einen positiven oder negativen Einfluß ausüben. In den hier betrachteten Fällen bedeutet das Element ein zusätzliches Deplacement, das aber vernachlässigbar klein ist.

Aus den Diagrammen 7+9 läßt sich nun die unterschiedliche Bedeutung der Dipollagen der Länge und Tiefe nach erkennen. Im Bereich des Hauptspantes übt eine Erhebung den geringsten Einfluß auf den Wellenwiderstand aus. Der Einfluß wird allerdings umso größer, je mehr man sich dem vorderen Lot nähert. Die größte Bedeutung hat das Vorschiff, seiner Ausbildung ist demnach die größte Aufmerksamkeit zu schenken. Der positive oder negative Änderungswider-

stand ist eine Folge des wellenbildenden Phänomens. zwischen Schiffskörper und Element. Der Charakter dieser Kurven entspricht auch dem des resultierenden Wellensystems, dessen Wellenlänge sich stark mit der Geschwindigkeit ändert, ebenso verändern sich die günstigen und ungünstigen Bereiche von AR^* . Vom vorderen Lot bis $d = 0,88L$ bei niedrigen Geschwindigkeiten steigt der Bereich der günstigen Beeinflussung des Wellenwiderstandes an bis $d = 0,65L$ bei hohen Geschwindigkeiten.

Für die verschiedenen Tiefenlagen f läßt sich sagen, daß AR^* entsprechend $e^{-\alpha f}$ anwächst, wenn f abnimmt. Allerdings darf f nicht Null werden, da für $f = 0$ die Integrale nicht mehr konvergieren. Die drei Tauchungen $f = 1,0; 0,75; 0,5$ dürften für die Betrachtungen ausreichen.

2. Anwendung auf die Ausbildung der Spantarealkurve:

Der Dipol erhält nun die Bedeutung eines Elementes der Spantarealkurve. Denkt man sich diese Kurve aus solchen Elementen aufgebaut, die vom vorderen Lot zum Hauptspant hin anwachsen, dann bedeutet ein starker Anstieg ein großes Element an dieser Stelle. Starke Änderungen der Kurve wirken also genauso auf den Wellenwiderstand, wie ein Dipolelement an der gleichen Stelle. Daraus folgt, daß zu starke Displacementzunahmen in den oben angeführten ungünstigen Bereichen nach Möglichkeit zu vermeiden sind. Man muß also auf eine widerstandstechnisch gut ausgebildete Schulter achten. Die Optimalform folgt diesen Forderungen, indem das Displacement in dem Gebiet stark zunimmt, in dem AR^* negativ ist und hat fast eine horizontale Tangente in dem Gebiet mit $+AR^*$.

Es taucht nun die Frage auf, wie groß wird der Änderungswiderstand einer Optimalform. Diese Frage wird später noch behandelt, da sie komplizierter ist, als man vermutet.

3. Einfluß des Wulstes auf den Wellenwiderstand:

Es soll nochmal erwähnt werden, daß bei diesen theoretischen Behandlungen des Wulstes dieser im Vor- und Hintersteven symmetrisch zum Hauptspant angeordnet ist. Die Ergebnisse sind in den Tafeln 2 und 3, bzw. in den Diagrammen 3 und 4

zu finden.

a; Der Dipolwulst: Der Wulst, der durch einen Dipol erzeugt wird, soll kurz als Dipolwulst bezeichnet werden; ob der Dipol immer eine Kugel oder kugelige Erhebung erzeugt, ist für die Betrachtungen zunächst unwichtig. Das oben Gesagte gilt selbstverständlich auch für den Dipolwulst, der sich an einer beliebigen Stelle der Mittschiffsebene befinden kann.

b; Die optimale Lage des Dipolwulstes: Wie vor den Rechnungen erwartet wurde, ist die optimale Lage der Länge nach des Dipolwulstes nicht in jedem Falle im Vorsteven, sondern stark von der Geschwindigkeit abhängig. Diagramm 10 zeigt in Abhängigkeit von γ_0 die unterschiedliche Lage vor oder hinter dem vorderen Lot. Die Ursache für diese Schwankungen von d_{opt} liegt in der Änderung des Wellenbildes. Für große Geschwindigkeiten strebt d_{opt} wahrscheinlich gegen Unendlich.

c; Der Einfluß der Formparameter des Grundmodells auf AR^+ :
 Änderung von φ : Aus Diagramm 11 folgt, daß eine Änderung von φ nur eine Änderung von AR^+ mit sich bringt, während die optimale Lage des Dipols unbeeinflusst bleibt. Die Wellenlänge λ der AR^+ -Kurven wird mit abnehmendem φ etwas größer. Der Grund dieses Verhaltens liegt in der gleichen Tangentensteigung im Vorsteven.

Änderung der Krümmung κ im Hauptspant: Der Einfluß der Änderung von κ auf AR^+ und die optimale Lage ist gering. Eine weitere Bestätigung dafür, daß Änderungen im Mittschiffsbereich von unbedeutendem Einfluß auf den Wellenwiderstand sind.

Änderung der Tangentensteigung im Vorsteven: Die größten Veränderungen in der optimalen Lage und in der Größe von AR^+ ruft die Änderung der Eintrittstangente t im Vorsteven hervor. Mit wachsendem t verschiebt sich die optimale Lage, die bei $t = 0$ die größte Rücklage hat, nach vorn und nähert sich asymptotisch einer vordersten Lage, die für jede Geschwindigkeit anders ist. Das Maximum von AR^+ nimmt mit wachsendem t zunächst etwas ab, um dann mit wachsendem t wahrscheinlich gegen Unendlich zu streben. Der entscheidende

Parameter zur Charakterisierung des Widerstandsverhaltens bezüglich des Wellenwiderstandes ist die Eintrittstangente t .
d; Der Dipolwulst im vorderen Lot: Diagramm 4 zeigt für verschiedene Tiefenlagen f und für den Stabdipol die Widerstandsänderung ΔR^* in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit bei konstantem $\Delta\phi$. Die Kurven zeigen einen alternierenden Verlauf und für die verschiedenen Tiefenlagen folgt, daß mit abnehmender Entfernung von der Oberfläche der Wulst immer mehr zieht. Am besten ist in diesem Falle auch wieder der Dipolstab analog dem gleichförmigen Wulst von [6].

Nun läßt sich nach Gleichung 61 für jede Geschwindigkeit ein $\Delta\phi_{opt}$ berechnen und damit die maximale Widerstandsänderung ΔR^* . Diagramm 6 zeigt die optimalen Verhältnisse. Jetzt kehren sich allerdings die Verhältnisse um, die größten Wirkungen erzielt der Wulst bei $f = 1$, während der Dipolstab am schlechtesten dasteht. Ferner folgt, daß $\Delta\phi_{opt}$ für $f \rightarrow 0$ auch gegen Null strebt. Für hohe Geschwindigkeiten haben die optimalen Werte nur theoretischen Wert, ab $Fr = 0,35$ ($\gamma = 4$) sind die optimalen Werte durchaus realisierbar.

Als interessantes Ergebnis stellt sich nun heraus, daß der prozentuale Anteil von ΔR^*_{opt} am Wellenwiderstand R_w mit abnehmender Geschwindigkeit gegen 100% strebt. Bei hohen Geschwindigkeiten beträgt der prozentuale Anteil allerdings nur 50%. Diese Ergebnisse sind zwar etwas zu theoretisch, aber doch nicht ganz unglaubwürdig, denn auch Inui spricht von 70% Gewinn an Wellenwiderstand durch einen Wulst. Bedenkt man nun, daß der Wellenwiderstand bezogen auf den totalen Widerstand in Prozenten mit abnehmender Geschwindigkeit auch abnimmt, und umgekehrt der Reibungswiderstand zunimmt, sind 97% Gewinn an Wellenwiderstand zwar enorm, aber im Vergleich zum Gesamtwiderstand nur wenig. Hinzu kommt noch der Grad der Genauigkeit der Theorie und der Rechnungen. Where Untersuchungen über die Verhältnisse von Reibungs- und Wellenwiderstand sollen hier nicht angestellt werden. Die 50% Gewinn bei hohen Geschwindigkeiten sind theoretisch interessant, da bei diesen Geschwindigkeiten der Wellenwiderstand dominiert, aber kaum von praktischer Bedeutung, da solche Wülste außerhalb jeder praktischen Anwendungsmöglichkeit

liegen. Daraus kann geschlossen werden, daß der Wulst bei hohen Froudeschen Zahlen nur theoretischen Wert hat. Für kleinere Wulststärken ist zwar der Gewinn bei hohen Geschwindigkeiten auch noch gut, jedoch der relative Nutzen ist gering.

e; Wulstformen in Polynomdarstellung: Von den verschiedenen Formen ist die Form $\langle 4, 10, 100 \rangle$ die geeignetste. Sie bedeutet nur eine Verschiebung von Displacement nach vorn und sollte überall dort verwendet werden, wo ein Wulst von vorn herein geplant ist. Die übrigen Formen bedeuten alle ein zusätzliches Displacement und sind für Modellversuche gut geeignet, bei denen verschiedene Wulstformen untersucht werden sollen.

Diagramm 3 zeigt die Widerstandsänderung der betrachteten Formen. ΔR^+ ist bei konstantem $\Delta \varphi$ nur gering. Eine Ausnahme bildet die Form $\langle 10, 100 \rangle$ mit $t=0$ bei $\xi=1$ (hier ist aber $\eta = 0,9a$ bei $\xi=1$), die bei hohen Geschwindigkeiten einen größeren Gewinn als die anderen Formen bringt.

Untersucht man die Optimalformen, so zeigt sich wieder, daß bei $\gamma_0 = 4$ die Werte für a_{opt} vertretbar werden. Aus der Gl.

$$f = a \cdot \eta_{max}$$

erhält man die maximale Wulstfläche. Aus den Rechnungen geht nun hervor, daß f schon ab $\gamma_0 = 7$ der Formen $\langle 10, 100 \rangle$, $\langle 4, 10, 100 \rangle$ und $\langle 10, 1000 \rangle$ und ab $\gamma_0 = 3$ der Form $\langle 100, 200 \rangle$ den Wert von 10% erreicht. Legt man nun dieses f der Konstruktion zugrunde, so müssen alle ΔR^+ unter $\gamma_0 = 7$ positiv werden; so wie es die Modellversuche von Lindblad [12] zeigen.

Aus dieser Diskussion geht hervor, daß ein Wulst ebenso wie eine Optimalform für eine bestimmte Geschwindigkeit ausgelegt werden muß. Bei dieser Geschwindigkeit erreicht der Wulst seine optimale Wirkung und wird für kleinere Geschwindigkeiten schlechter sein. Ferner folgt, daß der Dipolwulst allen anderen Formen überlegen ist, denn im Optimalfall erreichen die Wulstformen in Polynomdarstellung keine 50% Gewinn.

Literatur

- 1 Mitchell, J 'The Wave Resistance of a Ship'
Philosophical Magazine 1898
- 2 Havelock, T, H 'Wave Resistance'
Proc. Roy. Soc. Vol. 6113 A
- 3 'Wave Pattern and Wave Resistance'
Trans. Inst. N.A. Vol. 78 (1934)
- 4 'The Theory of Wave Resistance'
Proc. Roy. Soc. Vol. 138 A (1938)
- 4a 'The Calculation of Wave Resistance'
Proc. Roy. Soc. Vol. 144 A (1934)
- 5 Wigley, W. C. S. 'The Theory of Bulbous Bow and its
Practical Application'
North East Coast. Inst. Trans. Vol 52 (1935)
- 6 Weinblum, G. 'Theorie der Wulstschiffe'
- 7 'Rechnerische Entwicklung von Schiffformen'
- 8 'Schiffsform und Wellenwiderstand'
Jahrbuch der STG Bd. 33
- 9 'A Systematic Evaluation of Michell's
Integral'
Navy Department June 1955 Report 886
- 10 Eggers/
Wetterling 'Bericht über die Berechnungen zum Wellen-
widerstand von Schiffen auf der Elektro-
nischen Rechenanlage G2 des Max-Planck-
Institutes in Göttingen'
Institutsbericht
- 11 Lunde, K. 'On the Linearized Theory of Wave Resistance
for Displacement Ships in Steady and
Accelerated Motion'
- 12 Lindblad, A. 'Experiments with Bulbous Bows' (1944)
'Further Experiments with Bulbous Bows (1948)
Göteborgs Berichte
- 13 Inui, T. 'A Study on Wave-Making-Resistanceless
Hull Form'
- 14 Thomson, P. 'Zur Berechnung von Umströmungskörpern
zu Quell-Senken-Verteilungen'
Schiffstechnik Bd. 7

Tafel 1 Der Eigenwiderstand R_0^+ der beiden Modellformen

γ_0	Parabel 2.Gr.	Form (246, φ , t)	Form (2346, φ , t)
0,5	4,031582	3,949302	4,017583
1	3,145599	3,065344	3,118738
2	2,196765	2,138782	2,178548
3	1,023781	1,009667	1,036486
4	0,363302	0,288623	0,284036
5	0,401556	0,251517	0,227185
6	0,362380	0,254057	0,239204
7	0,168444	0,122765	0,110405
8	0,160037	0,108337	
9	0,180717	0,126956	
10	0,100121	0,072495	
11	0,081843	0,057077	
12	0,103757	0,073374	
13	0,066922	0,048224	
14	0,048043	0,033592	
15	0,064269	0,045645	

Tafel 2 Die Widerstandsänderung ΔR^+ der verschiedenen Wulstformen in Polynomdarstellung

γ_0	$\Delta R^+_{\Delta\varphi=0,001}$ (-)	α_{opt}	ΔR^+_{opt} (-)	%v. R_0^+	$\Delta R^+_{\Delta\varphi=0,001}$ (-)	α_{opt}	ΔR^+_{opt} (-)	%v. R_0^+
0,5	0,014831	0,9400	0,568457	14,4	0,075361	0,730	2,490262	63
1	15439	6430	400151	13,1	57936	596	1,565245	51
2	16764	4590	316396	14,9	38402	473	0,825224	39
3	15963	3470	228283	22,6	13567	224	139953	14
4	09813	1920	078856	27,3	08049	121	045834	16
5	08453	1530	054604	21,7	15686	225	162448	65
6	10748	1640	074330	29,3	11972	258	141768	60
7	06980	1030	031065	25,3	06380	156	046307	38
8	04260	0692	013211	12,2	09575	186	082525	76
9	06938	0968	028886	22,7	09348	240	103107	81
10	05246	0670	015793	21,9	04979	194	044726	62
11	01764	0358	002623	4,6	05758	175	046734	82
12	03731	0554	009367	12,8	06727	217	067287	92
13	03820	0480	008539	17,7	03965	216	039498	82
14	00536	0127	000740	2,2	03567	178	029491	88
15	01459	0265	002047	4,5	04658	203	043758	96

Form (10,100)

Form (10,100) $t=0$

Tafel 2 Die Widerstandsänderung ΔR^* der verschiedenen Wulstformen in Polynordarstellung

%	$\Delta R_{\Delta p=0,001}^*$	Q_{opt}	ΔR_{opt}^*	%v. R_0	$\Delta R_{\Delta p=0,001}^*$	Q_{opt}	ΔR_{opt}^*	% R_0^*	$\Delta R_{\Delta p=0,001}^*$	Q_{opt}	ΔR_{opt}^*	% R_0^*
0,5	0,015212	0,8620	0,594196	15,1	0,018679	9,180	0,433427	11,0	0,065788	0,9990	0,345750	8,8
1	15922	5920	421512	13,8	19907	5,550	281545	9,2	71501	6200	241298	7,9
2	17435	4240	337294	15,8	22844	3,640	213946	10,0	78390	4420	187592	8,1
3	16688	3210	245188	24,3	22420	2,600	151365	15,0	69899	3050	127287	12,6
4	10638	1837	090729	31,4	17028	1,620	073489	25,4	58714	2280	085710	29,7
5	99532	1508	067144	26,7	17902	1,426	068615	27,3	71914	2345	107212	42,6
6	11846	1581	087375	34,4	20244	1,361	074392	29,3	73155	2185	103661	40,1
7	08020	1040	039632	32,3	15687	0,988	043111	35,1	45198	1520	0511789	41,7
8	05573	0776	020962	19,4	15341	0,876	037952	35,0	43555	1391	047304	43,7
9	08317	0988	039165	30,8	18551	0,918	047842	37,7	54417	1450	060201	47,5
10	06410	0708	022153	30,6	14581	0,704	029929	41,3	29997	1038	030038	41,5
11	03134	0422	006857	12,0	12693	0,589	022520	39,5	14648	0789	0157765	27,6
12	05250	0613	015919	21,7	16164	0,645	030839	42,0	27234	0958	027287	37,2
13	05069	0534	013587	28,1	13281	0,521	021450	44,5	14649	0727	017059	35,3
14	01858	0256	002736	8,1	10147	0,404	013636	40,6	03938	0427	004895	14,6
15	03040	0410	006495	14,3	13236	0,446	019026	41,7	06090	0609	010233	22,4

Form (10,1000)

Form (100,200)

Form (410,100)

Tafel 3 Die Widerstandsänderung ΔR^+ des Dipolwulstes

$\% \Delta R^+ \Delta \psi = 0,001$	$\Delta \psi_{opt}$	ΔR^+_{opt}	$\% v. R_0^+$	$\Delta R^+ \Delta \psi = 0,001$	$\Delta \psi_{opt}$	ΔR^+_{opt}	$\% v. R_0^+$	$\Delta R^+ \Delta \psi_{opt}$	$\Delta \psi_{opt}$	ΔR^+_{opt}	$\% v. R_0^+$	
1	0,010460	0,2800	1,466249	47,9	0,012973	0,2002	1,301259	42,5	0,016880	0,1182	1,001828	32,7
2	13900	1727	1,204527	56,1	16385	1192	0,980529	45,1	20234	0,683	0,695629	32,5
3	13559	1038	0,708553	70,0	16074	0735	594501	58,9	19951	0432	436080	43,2
4	08749	0565	0,249509	86,5	11089	0405	227668	78,9	14782	0247	186340	64,6
5	09841	0456	0,227802	90,6	12340	0332	208652	82,9	16200	0205	170752	67,9
6	11751	0391	0,232686	91,6	14474	0290	213459	84,0	18575	0183	174388	68,6
7	07934	0287	0,115790	94,3	10341	0208	110017	89,7	14092	0129	095131	75,5
8	08087	0248	0,101752	94,0	10588	0181	097424	90,0	14442	0113	085864	79,3
9	10478	0202	0,120197	94,6	13352	0169	116187	91,3	17623	0109	100644	79,3
10	07282	0187	0,069671	96,2	09932	0134	067962	93,7	13514	0085	060705	83,7
11	06427	0165	0,054741	95,9	08802	0104	042810	94,0	12494	0073	049017	85,5
12	08894	0155	0,071183	97,0	11766	0113	069695	95,1	16034	0073	062954	85,8
15	07275	0116	0,044247	96,8	10010	0083	043587	95,0	14104	0053	041099	90,0

Tiefenlage $f = 1,00$

Tiefenlage $f = 0,75$

Tiefenlage $f = 0,50$

Tafel 4 Die Widerstandsänderung ΔR^+ des Dipolstabes

γ_0	$\Delta R^+_{\Delta\psi=0,001}$	$\Delta\psi_{opt}$	ΔR^+_{opt}	% v. R_0^+
1	0,020582	0,02380	0,250427	8,2
2	23658	1540	188042	8,8
3	23148	1080	131992	13,1
4	17760	0675	064645	22,4
5	18992	0595	061882	24,6
6	21202	0567	057901	22,8
7	16513	0409	033547	27,3
8	16703	0367	036058	33,3
9	19769	0386	0437562	34,5
10	15446	0295	027942	37,9
11	14259	0259	022929	40,2
12	17735	0282	030386	41,4
15	15359	0214	021585	47,3

η_0
10
0.9

0.9

0.8

0.7

0.6

0.5

0.4

0.3

0.2

0.1

0

Form (10; 1000)

Form (10; 100)

Form (10; 100)

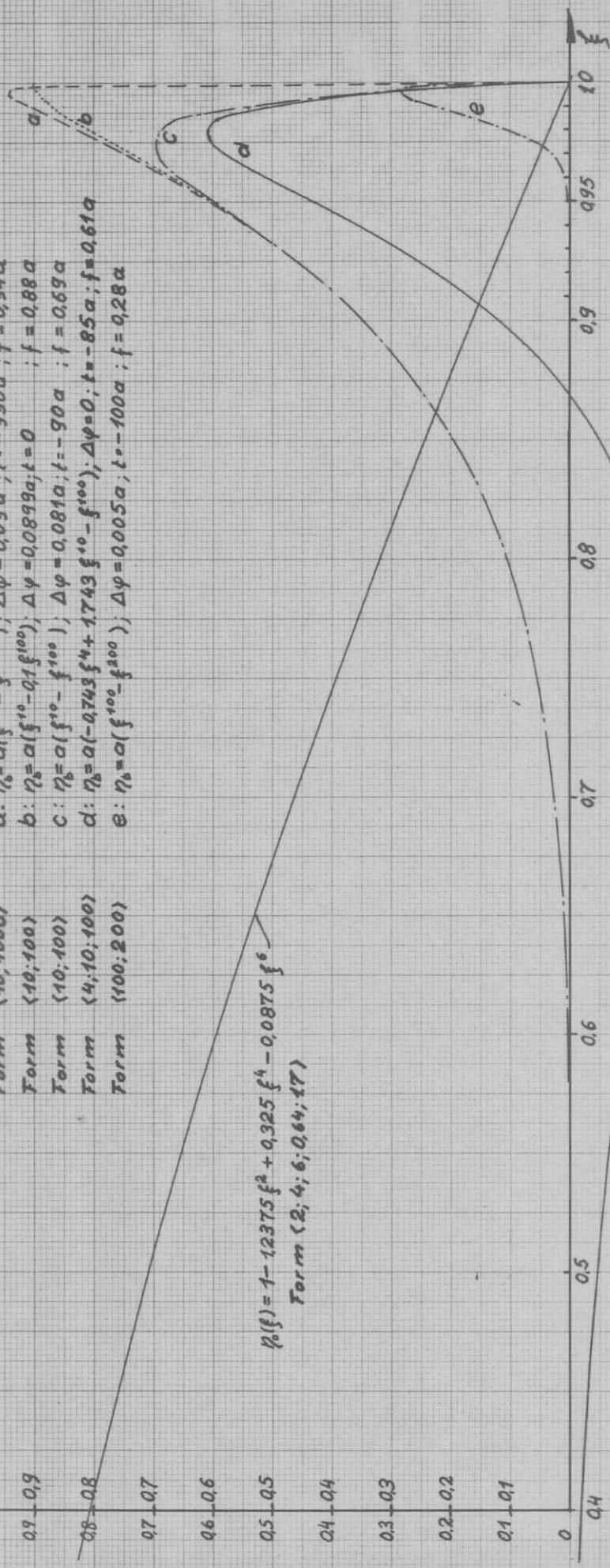
Form (4; 10; 100)

Form (100; 200)

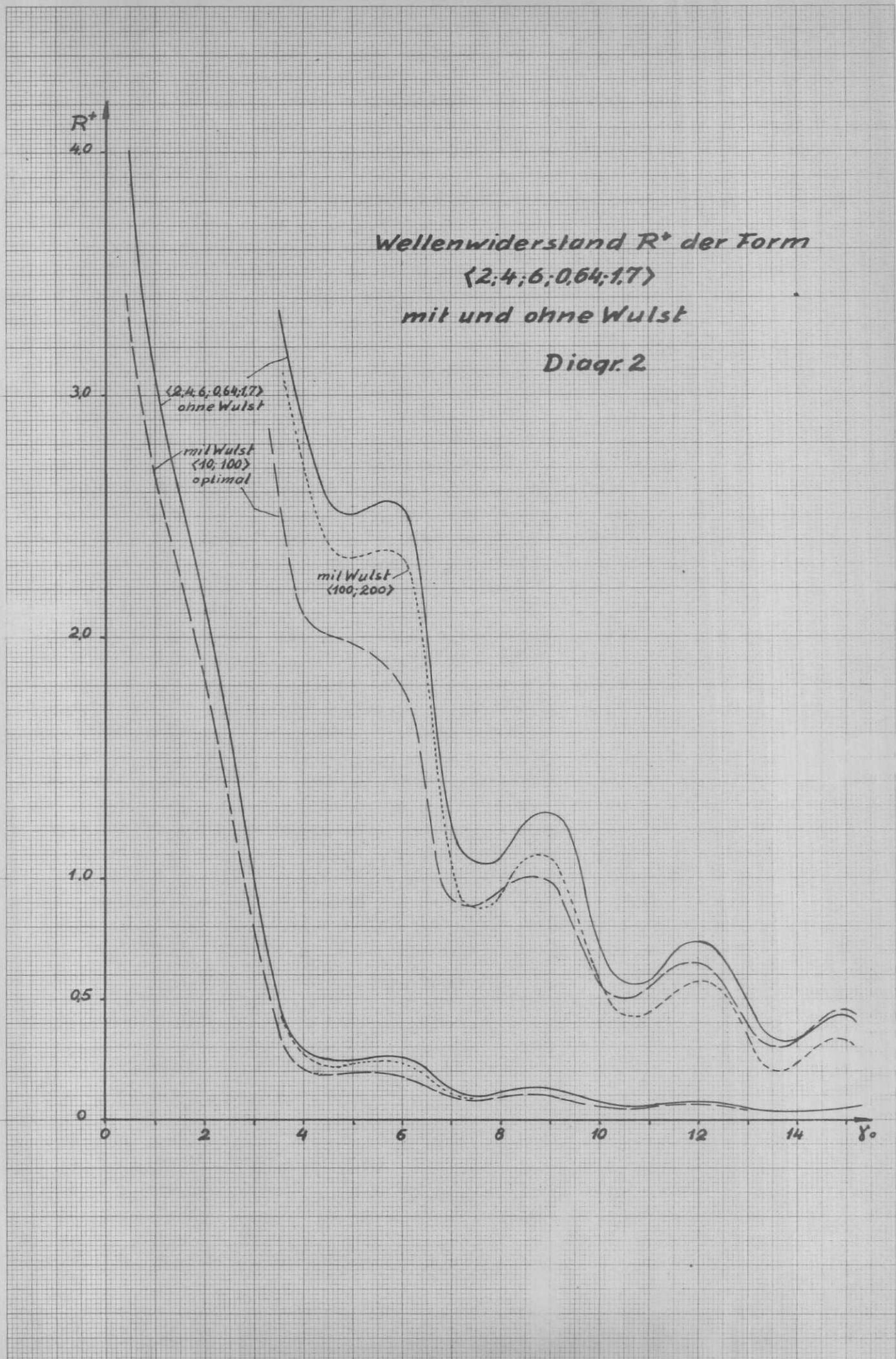
a: $\eta_0 = a(f^{10} - f^{1000})$; $\Delta\psi = 0,09a$; $t = -990a$; $f = 0,94a$
 b: $\eta_0 = a(f^{10} - 0,1f^{100})$; $\Delta\psi = 0,0899a$; $t = 0$; $f = 0,88a$
 c: $\eta_0 = a(f^{10} - f^{100})$; $\Delta\psi = 0,081a$; $t = -90a$; $f = 0,69a$
 d: $\eta_0 = a(-0,743f^4 + 1,743f^{40} - f^{100})$; $\Delta\psi = 0$; $t = -85a$; $f = 0,61a$
 e: $\eta_0 = a(f^{100} - f^{200})$; $\Delta\psi = 0,005a$; $t = -100a$; $f = 0,28a$

$$\eta_0(f) = 1 - 12375f^2 + 0,325f^4 - 0,0875f^6$$

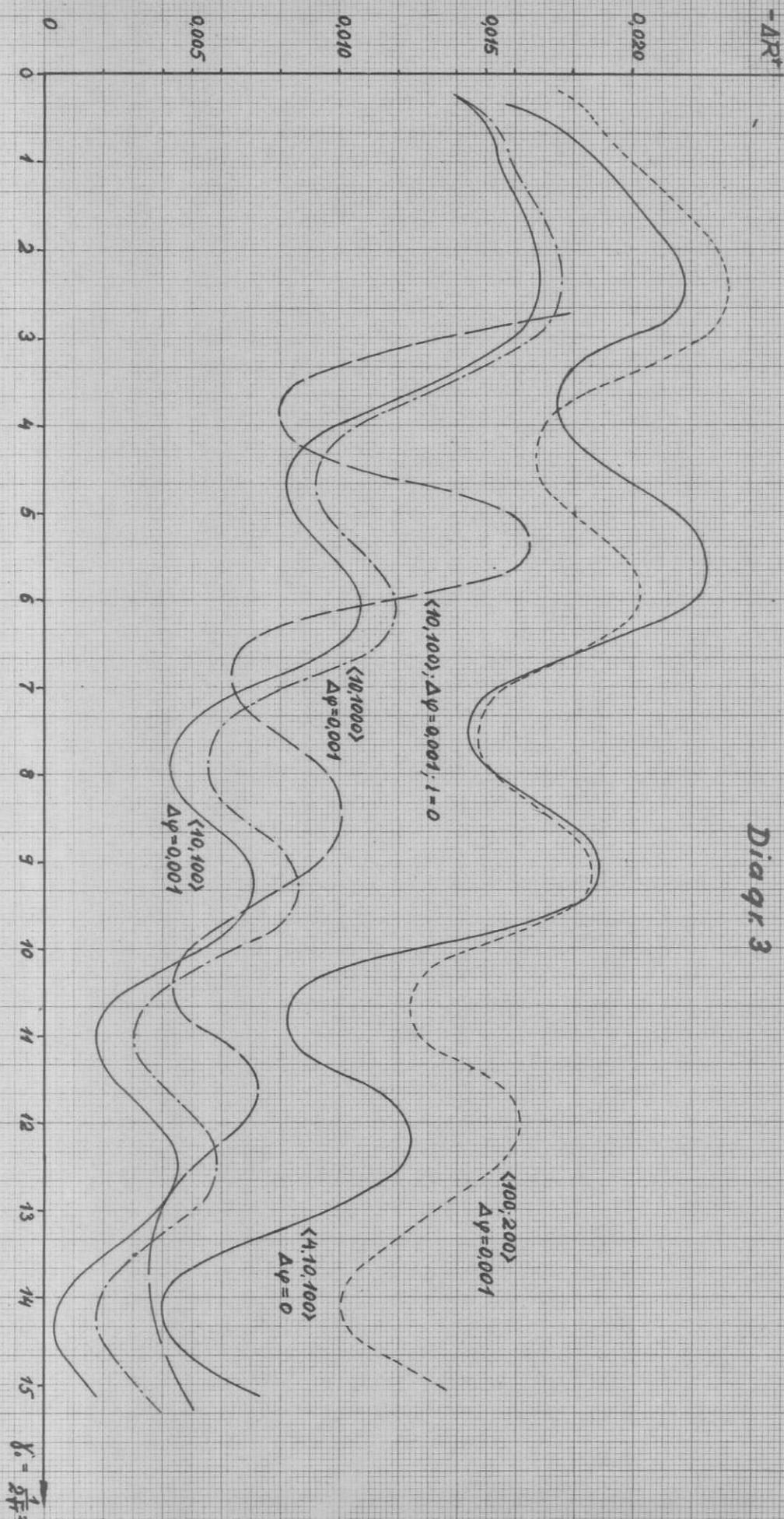
Form (2; 4; 6; 0,64; 17)



Spantarealkurven im Vorschiffsbereich
 von 5 Wulstformen und von
 dem Grundmodell
 Diag. 1



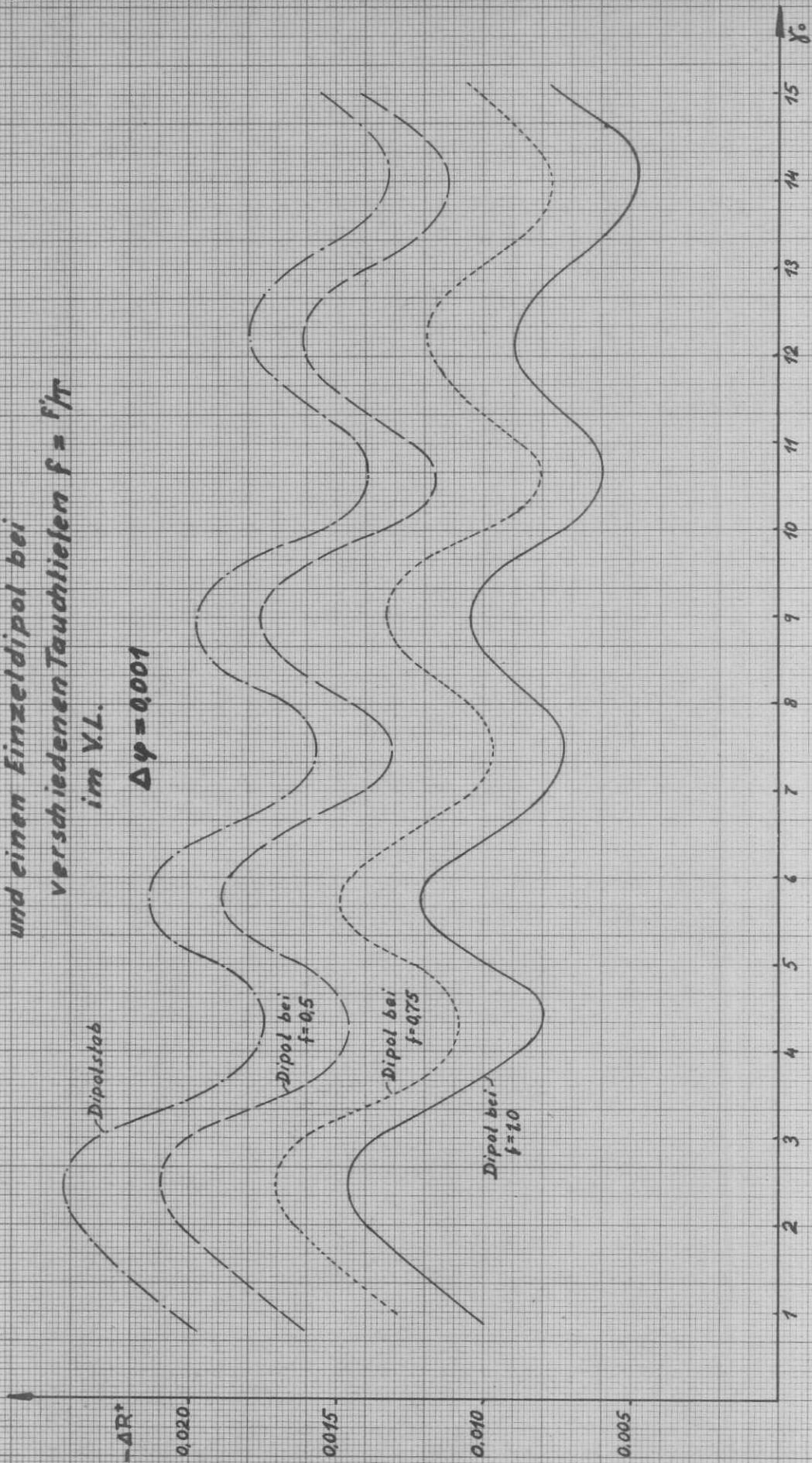
Widerstandsänderung ΔR^* des Wellenwiderstandes von
 verschiedenen Wulstformen
 Diag: 3



$\lambda_0 = \frac{1}{2F^2}$

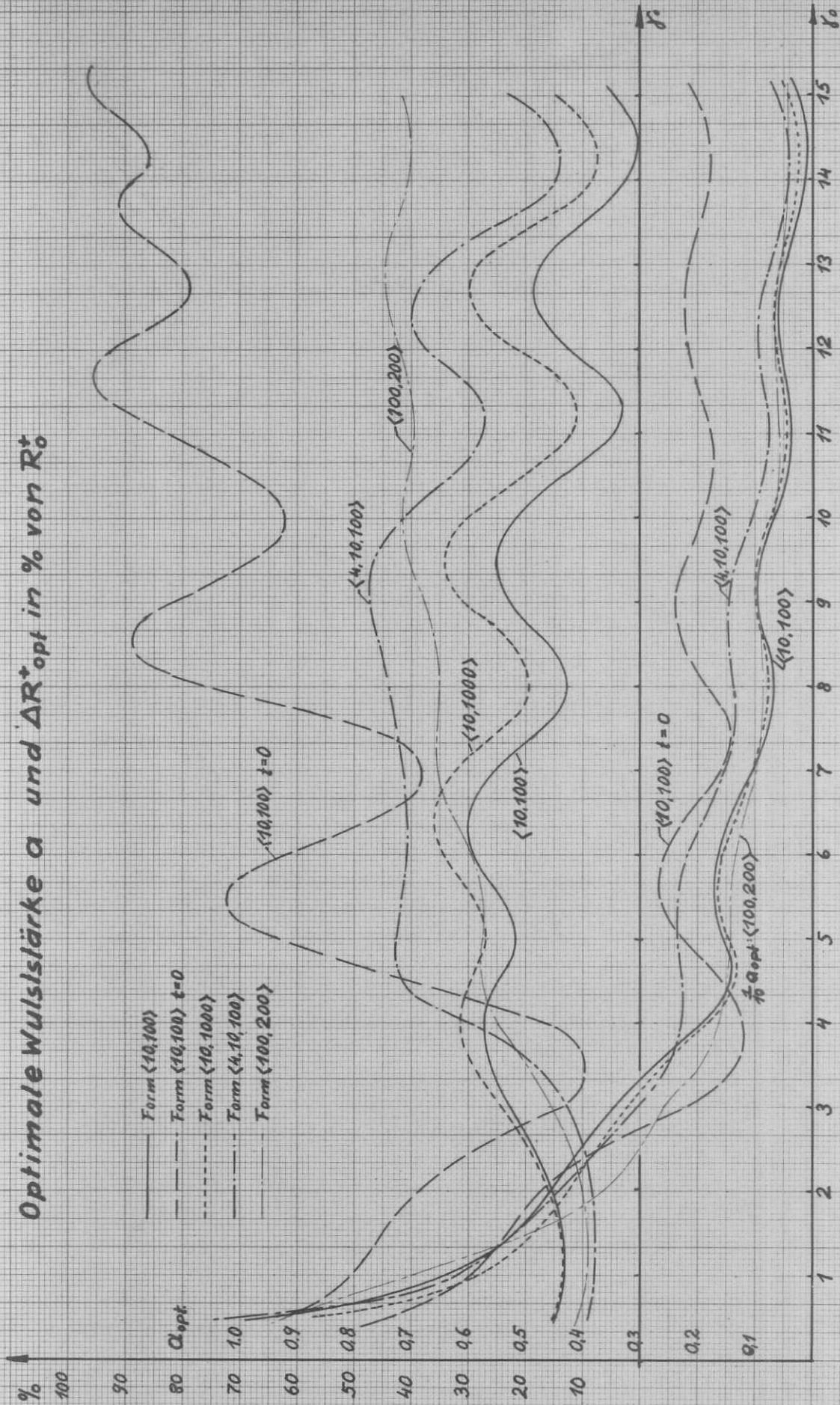
Widerstandsänderung ΔR^* durch einen Dipolstab
 und einen Einzeldipol bei
 verschiedenen Taudhiefen $f = f'/\pi$
 im V.L.

$$\Delta \varphi = 0,001$$



Diagr. 4

Optimale Wulslstärke α und ΔR_{opt} in % von R_0^*



Diagr. 5

$$\gamma_0 = 10.0$$

$$R_0 = 0.1001$$

$$\Delta\varphi = 0.001$$

$$\eta = 1 - \xi^2$$

M.S.

0

0.1

0.2

0.3

0.4

0.5

0.6

0.7

0.8

0.9

V.L.

1.0

1.1

1.2

Δ

0.014

$+\Delta R^+$

0.010

0.008

0.004

0.004

0.001

0.018

$-\Delta R^+$

Dipolstab

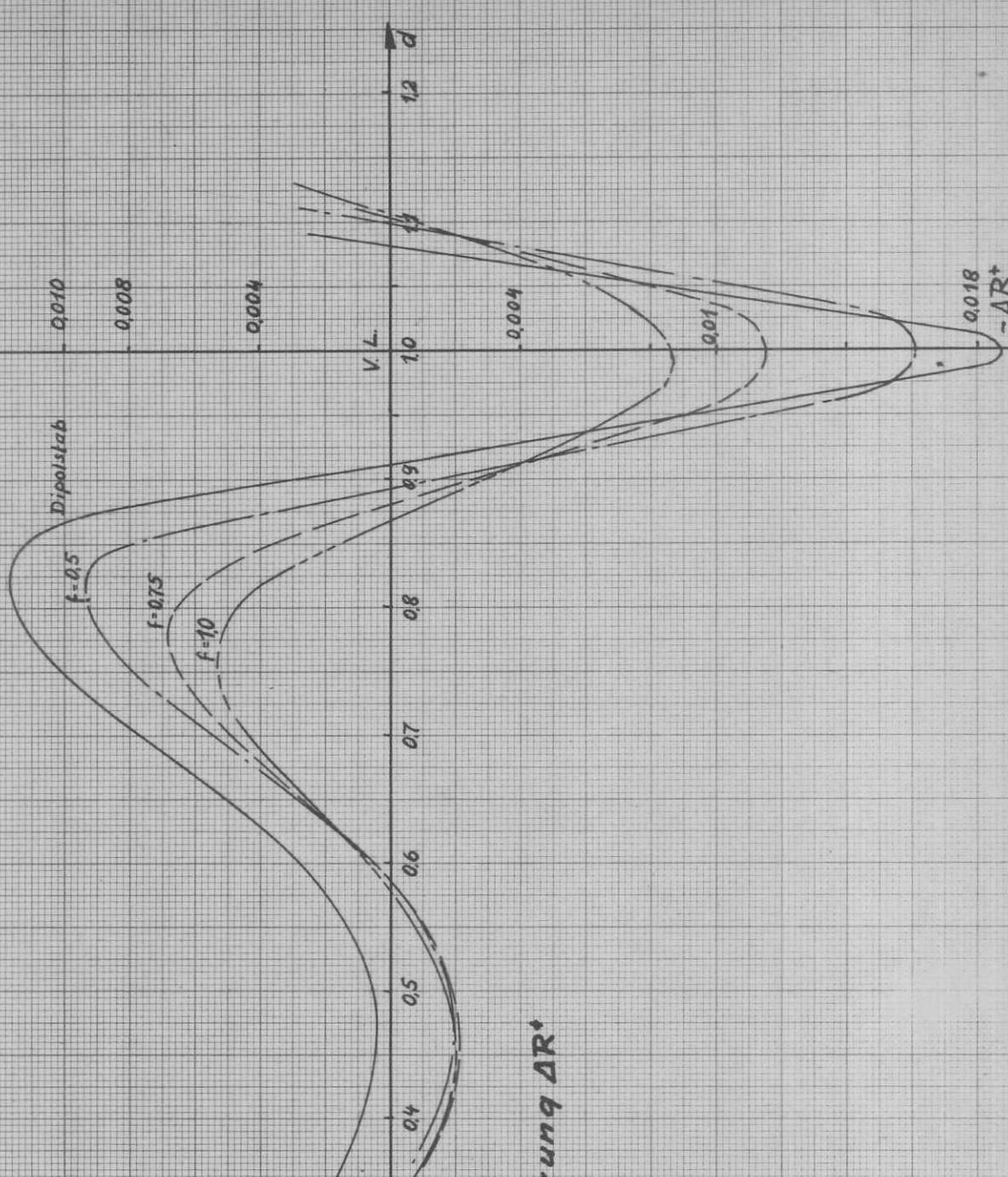
$f=0.5$

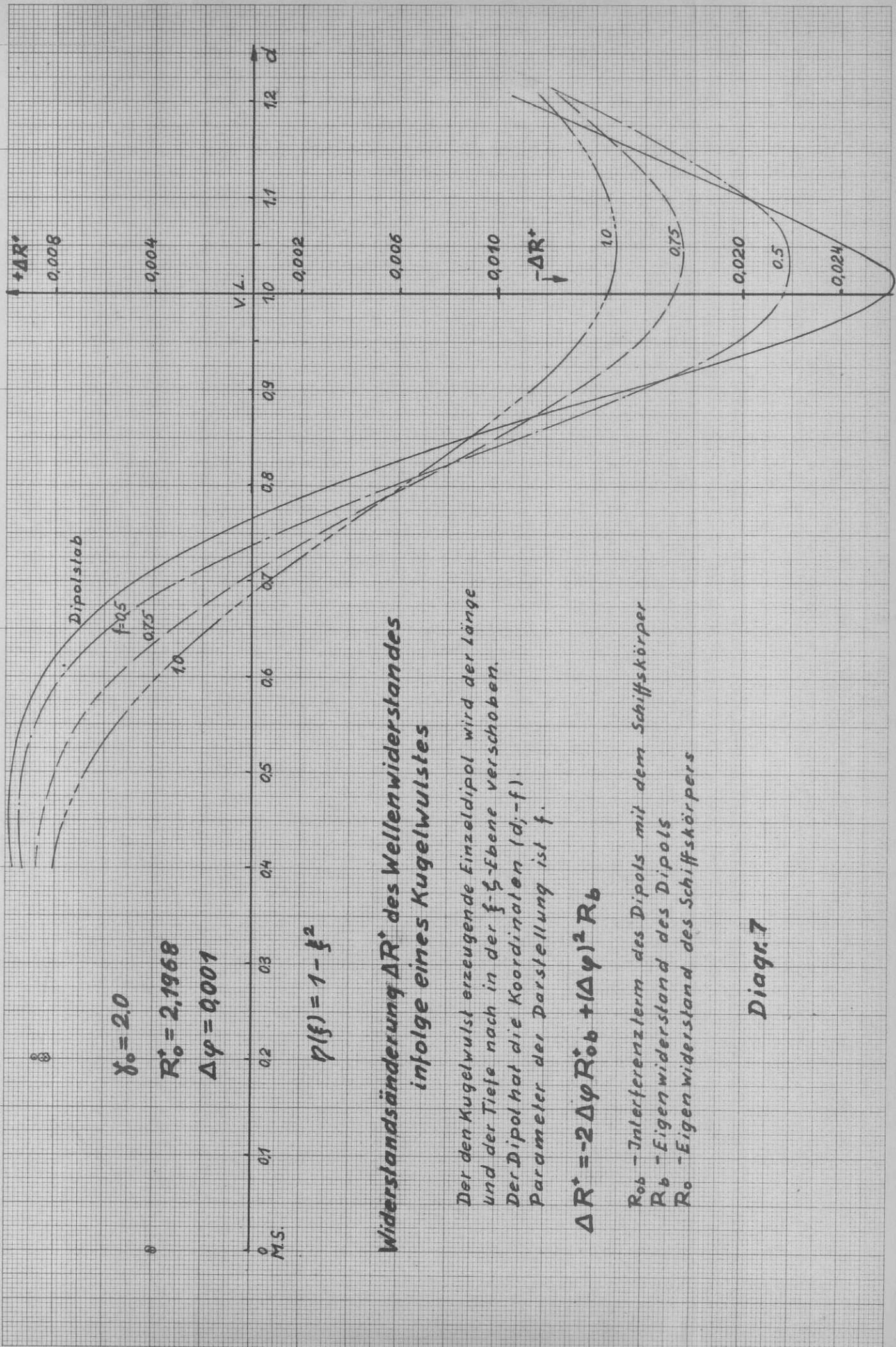
$f=0.75$

$f=1.0$

Widerstandsänderung ΔR^+

Diagr. 7





$$\gamma_0 = 2.0$$

$$R_0^* = 2.1968$$

$$\Delta\varphi = 0.001$$

$$\varphi(\xi) = 1 - \xi^2$$

**Widerstandsänderung ΔR^* des Wellenwiderstandes
infolge eines Kugelwulstes**

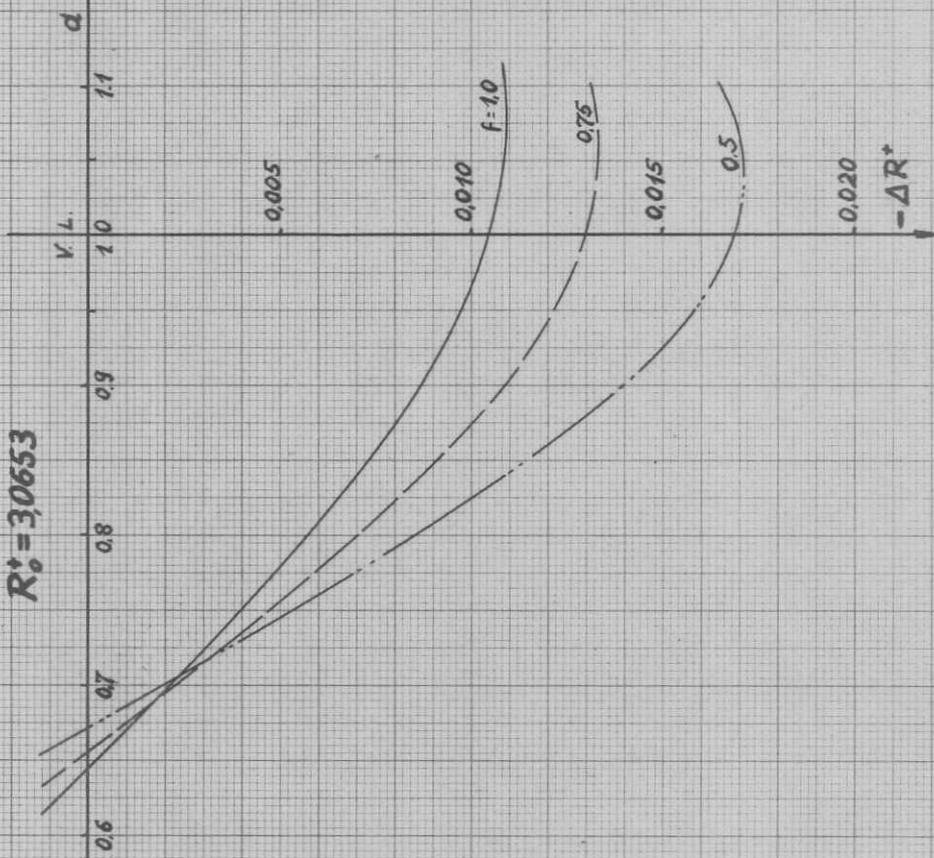
Der den Kugelwulst erzeugende Einzeldipol wird der Länge und der Tiefe nach in der ξ - ζ -Ebene verschoben.
Der Dipol hat die Koordinaten $(d; -f)$.
Parameter der Darstellung ist f .

$$\Delta R^* = -2\Delta\varphi R_0^* + (\Delta\varphi)^2 R_b$$

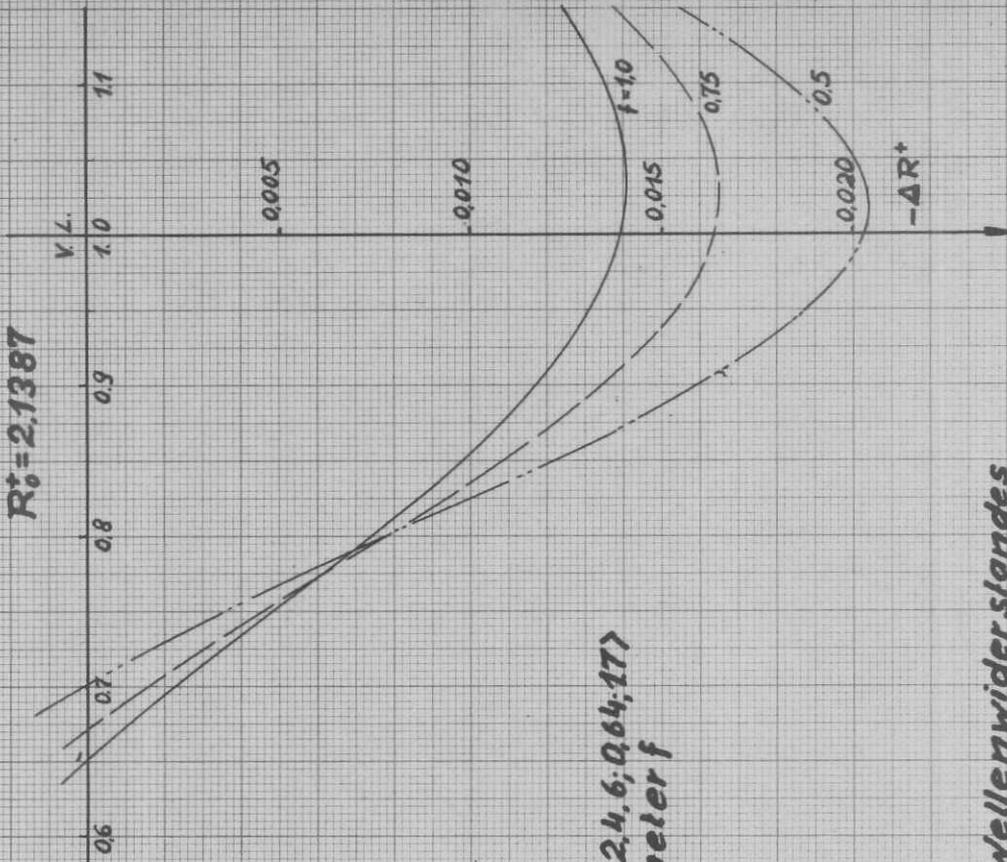
- R_0^* - Interferenzterm des Dipols mit dem Schiffskörper
- R_b - Eigenwiderstand des Dipols
- R_0 - Eigenwiderstand des Schiffskörpers

Diagr. 7

$\gamma_0 = 10$
 $R_0^* = 30653$



$\gamma_0 = 2.0$
 $R_0^* = 21387$



Form (2,4,6; 0,64,17)
 Parameter f

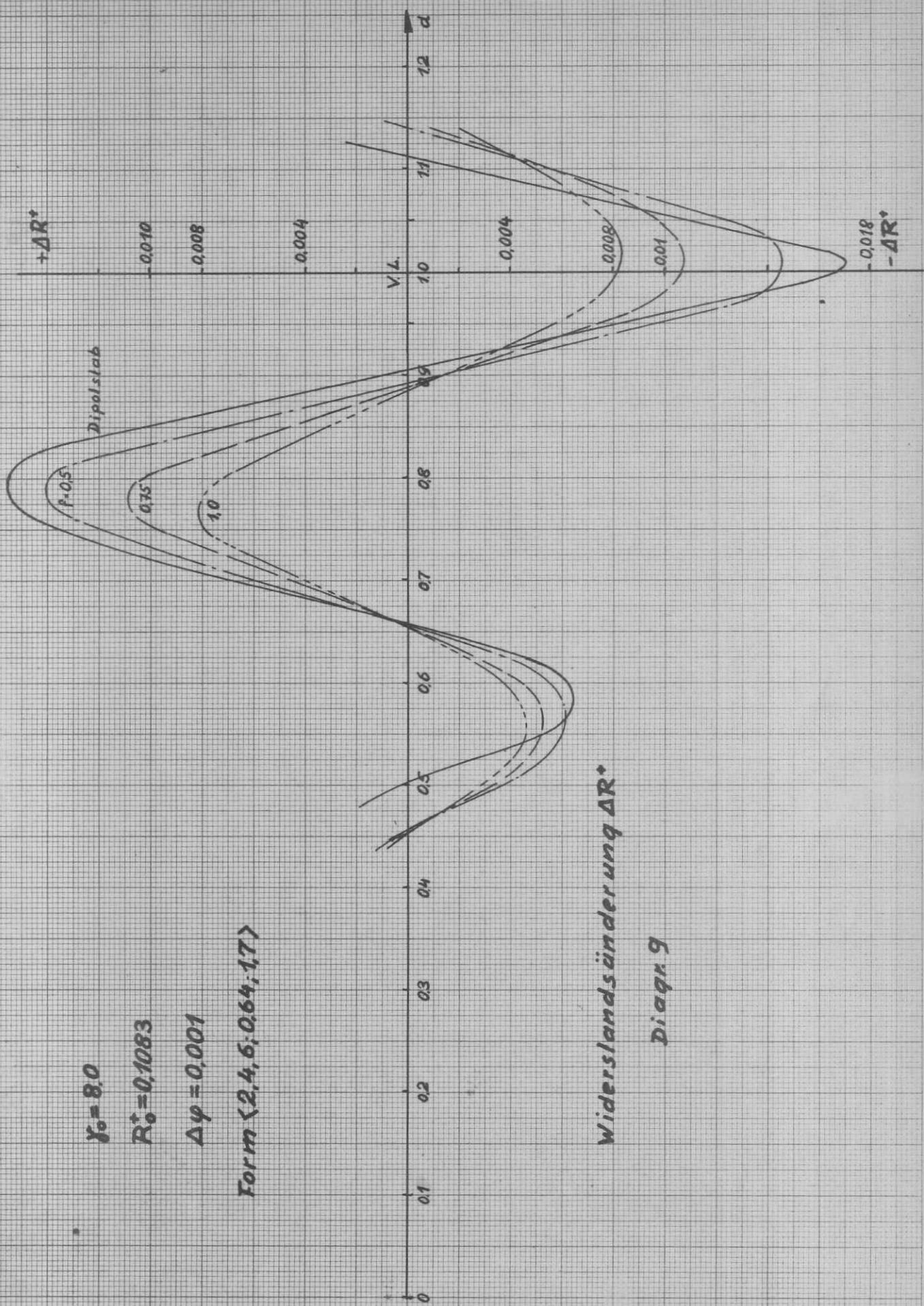
Widerstandsänderung ΔR^* des Wellenwiderstandes
 infolge eines Kugelwulstes
 in der Nähe des V.L.
 Diagr. 8

$$\gamma_0 = 8.0$$

$$R_0^* = 0.1083$$

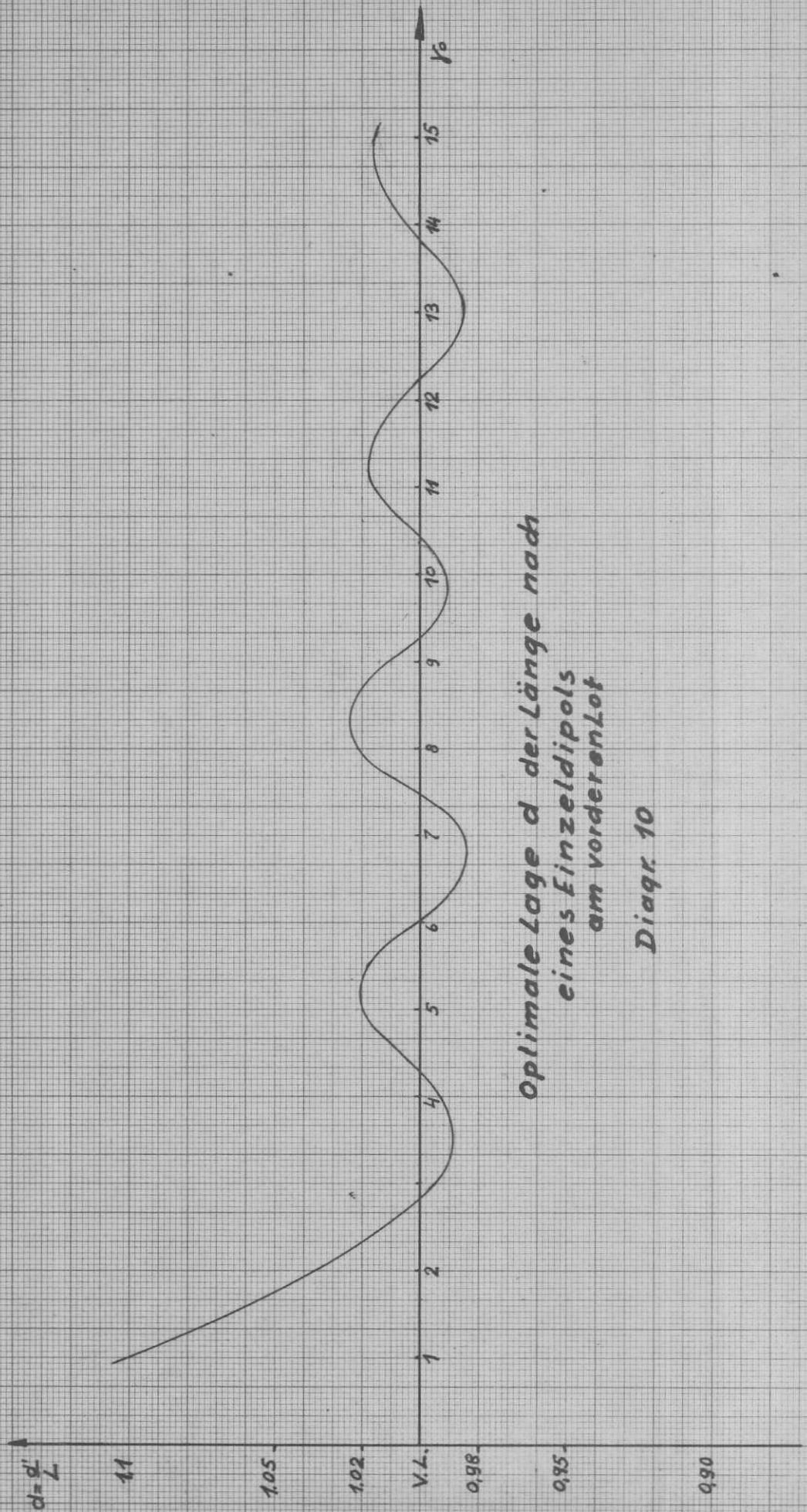
$$\Delta\psi = 0.001$$

Form $\langle 2, 4, 6; 0.64, 1.7 \rangle$



Widerstandsänderung ΔR^*

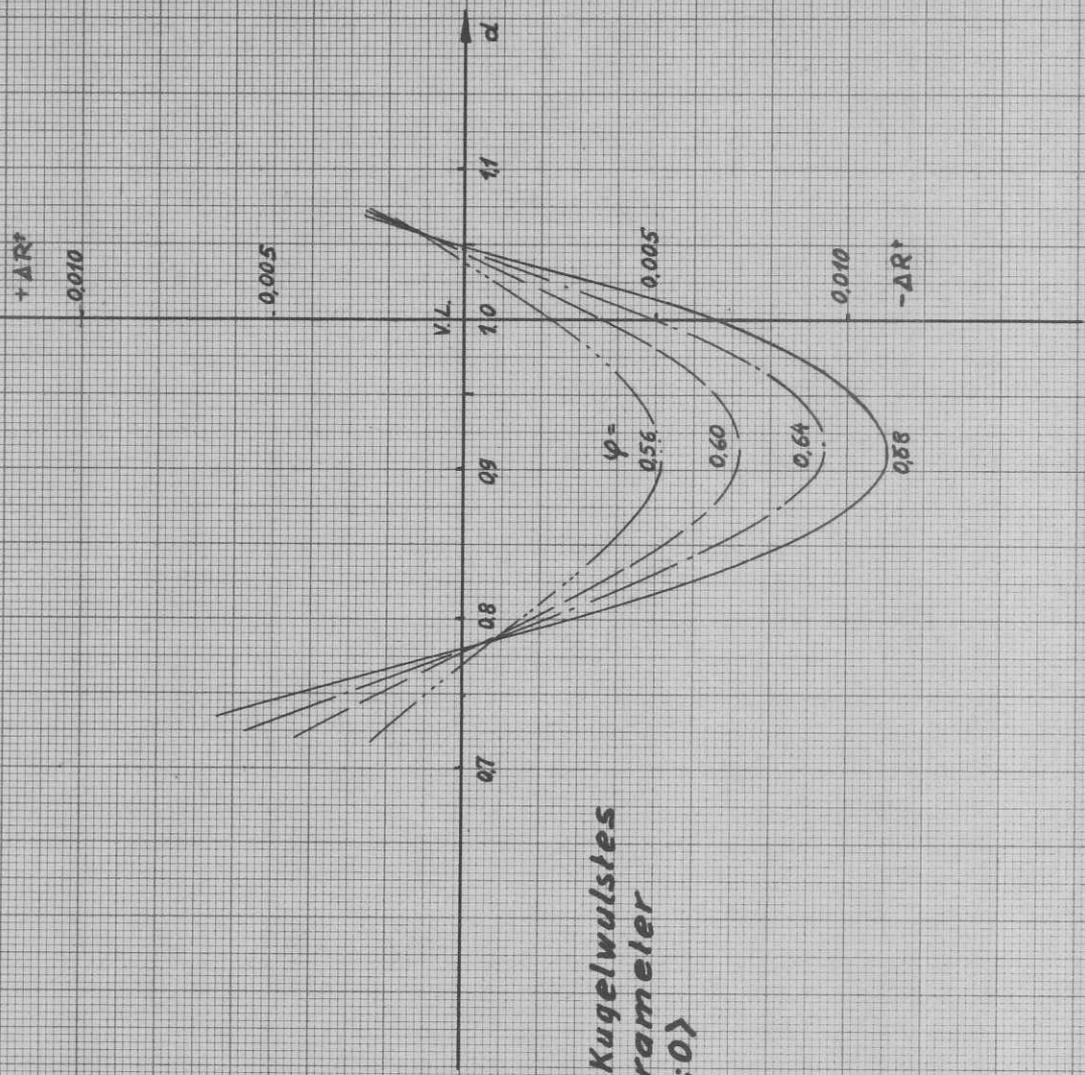
Diagram 9



Optimale Lage d der Länge nach
eines Einzeldipols
am vorderen Lot

Diagr. 10

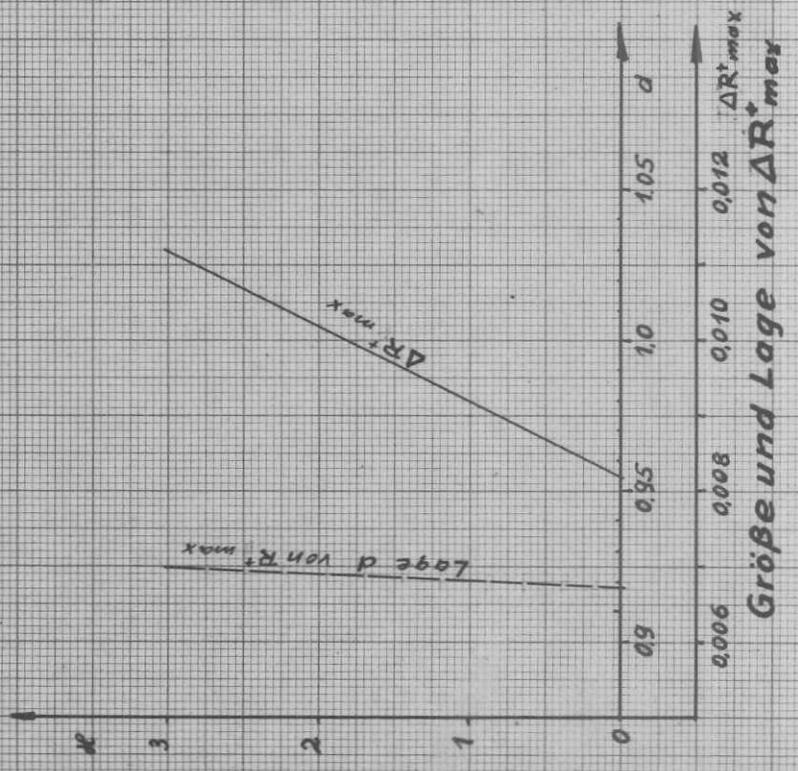
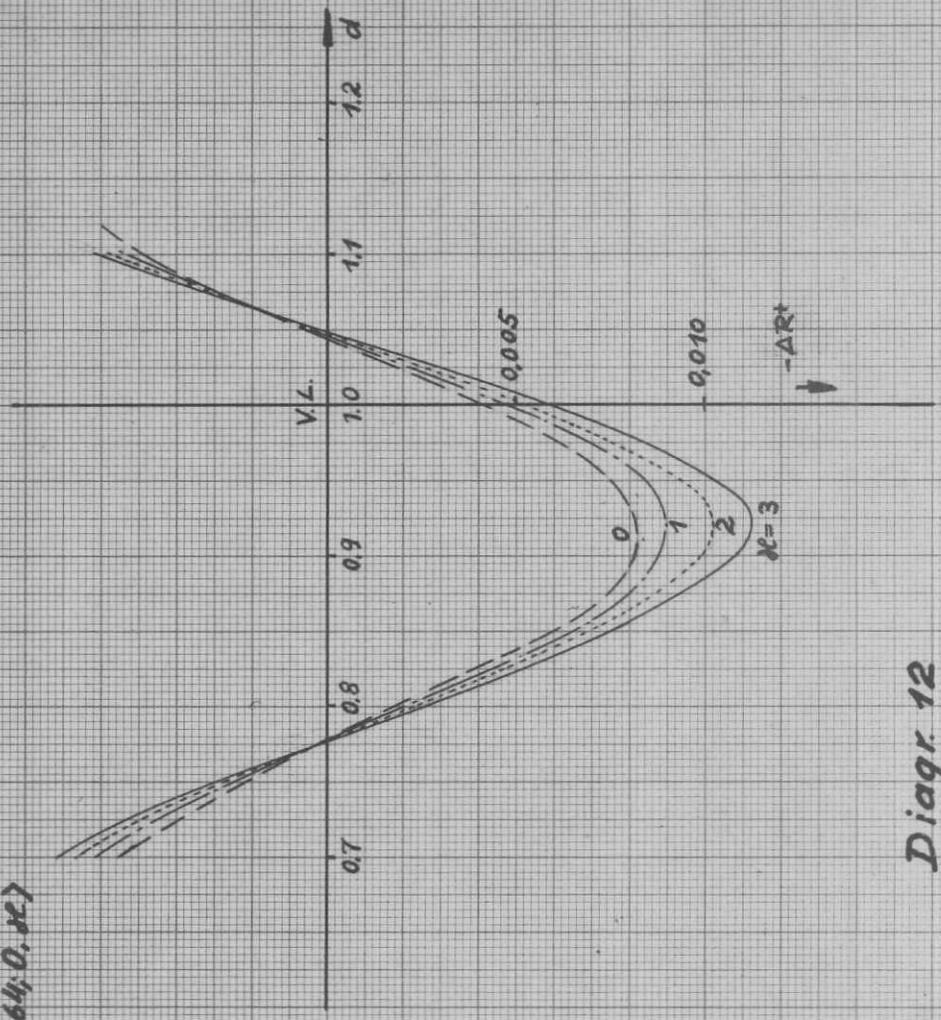




ΔR^+ -Verlauf über d eines Kugelwulstes
 bei $f=1$ mit φ als Parameter
 der Form $\langle 2,4,6; \varphi; 0 \rangle$
 bei $\gamma_0 = 10$

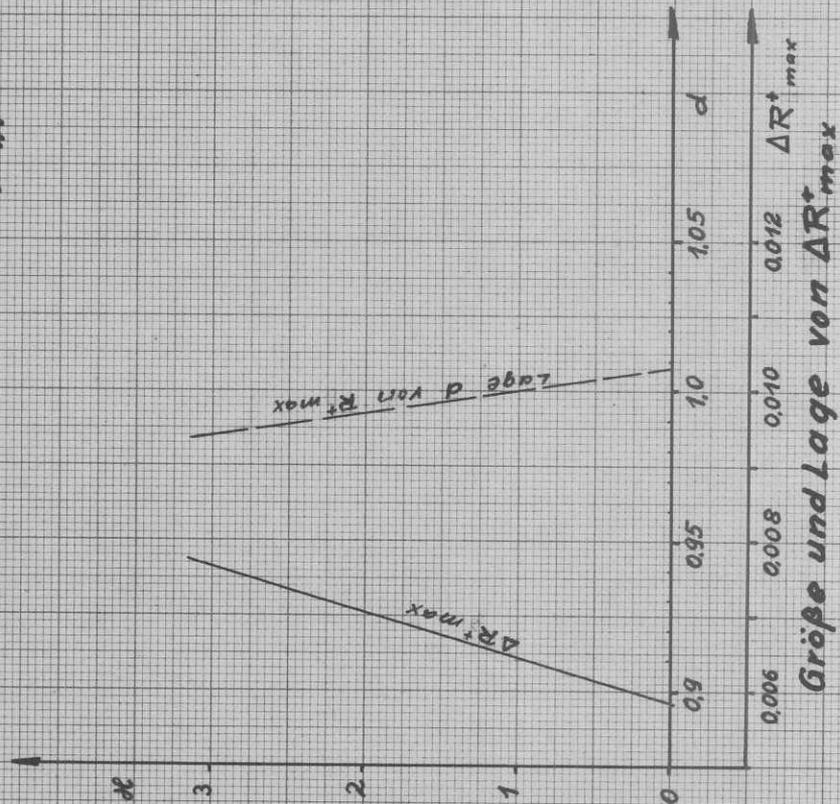
Diagr. 11

ΔR^* -Verlauf über d eines Kugelwulstes
 bei $f=10$ mit n als Parameter
 der Form $\langle 2, 3, 4, 6, 0, 64; 0, n \rangle$
 bei $f_0=10$
 $t=0$

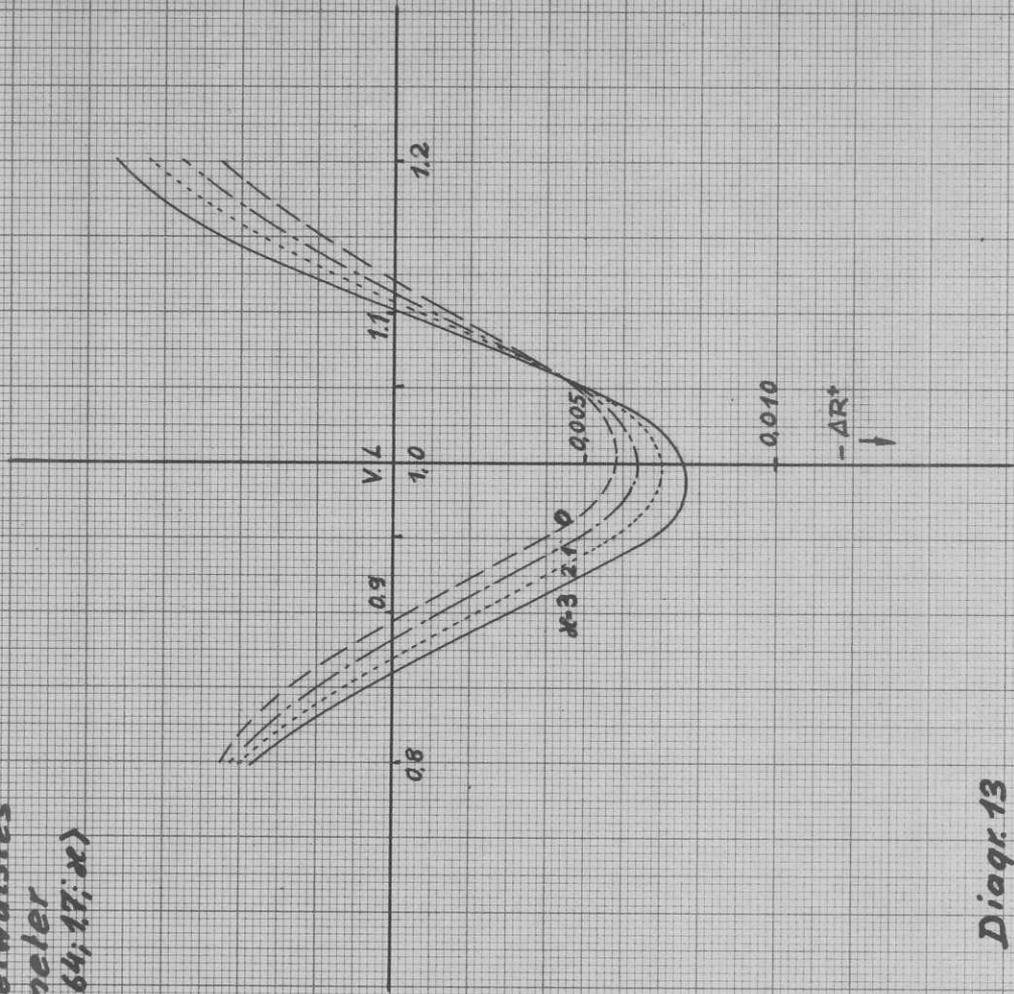


Diagr. 12

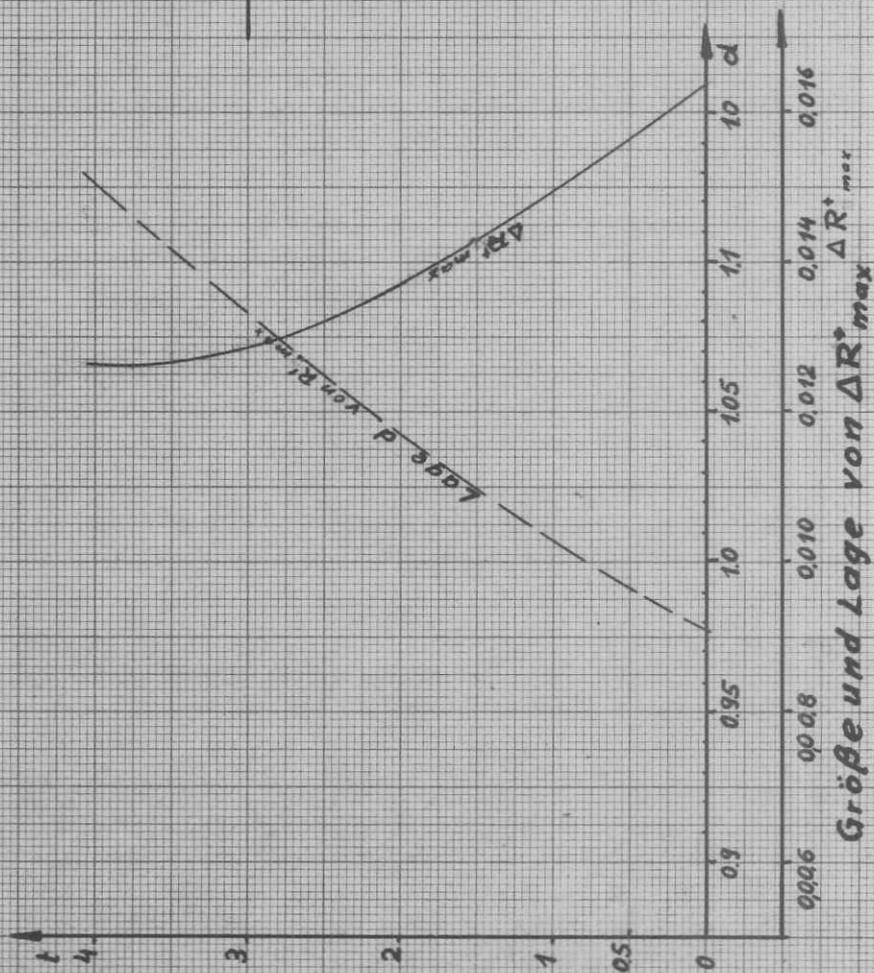
ΔR^+ -Verlauf über d eines Kugelwulstes
 bei $f=10$ mit α als Parameter
 der Form $\langle 2, 3, 4, 6, 0,64, 17; \alpha \rangle$
 bei $\lambda_0 = 10$
 $t = 1,7$



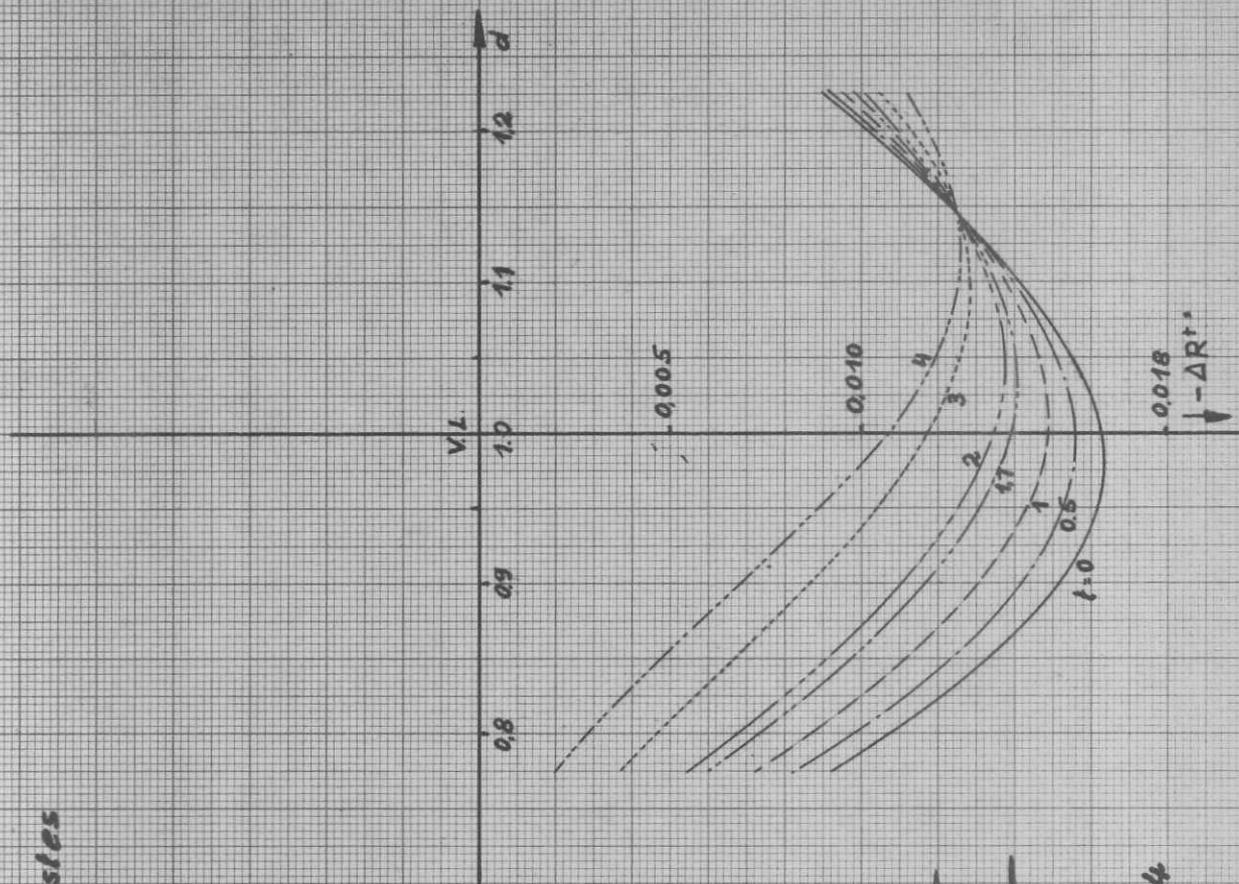
Diagr. 13



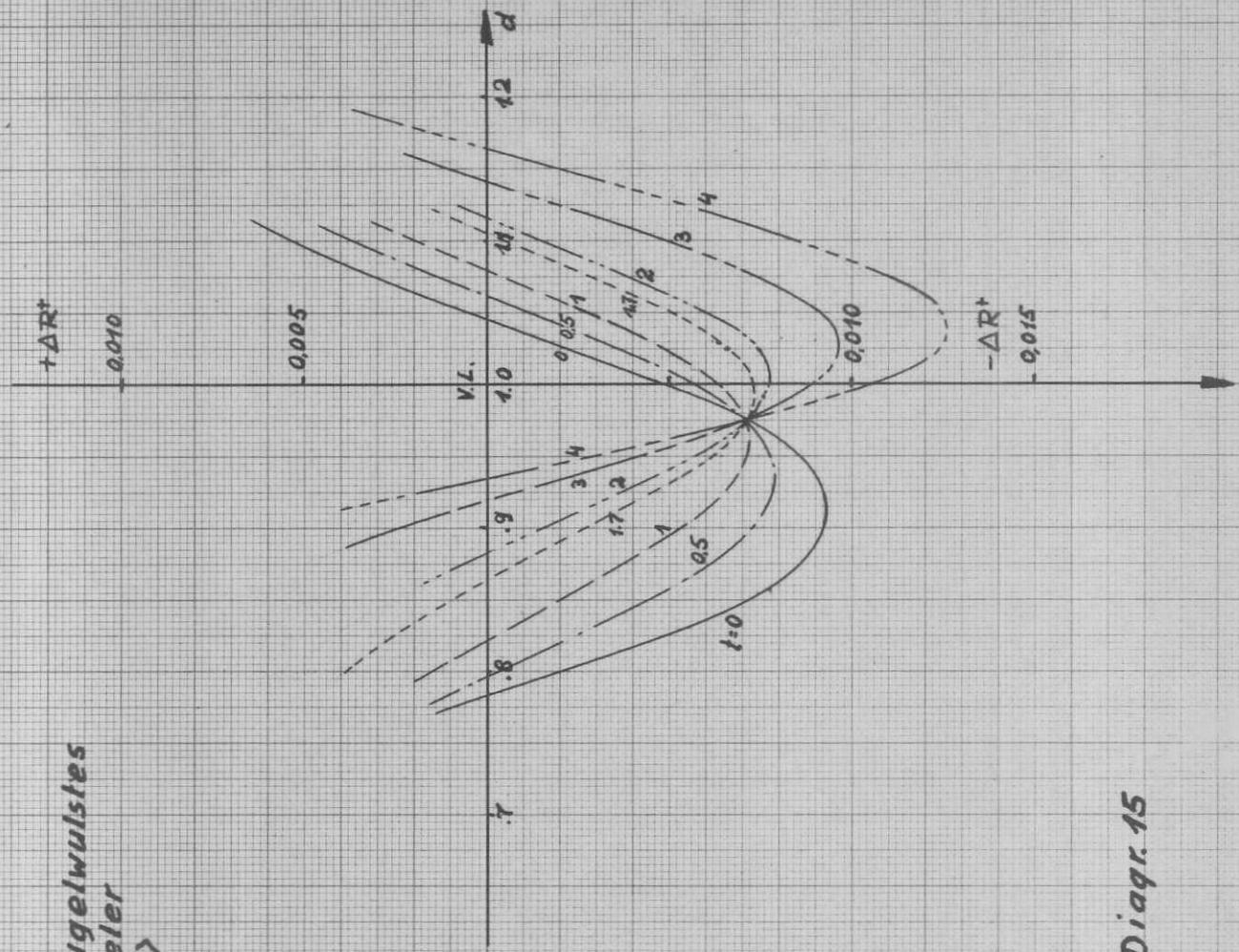
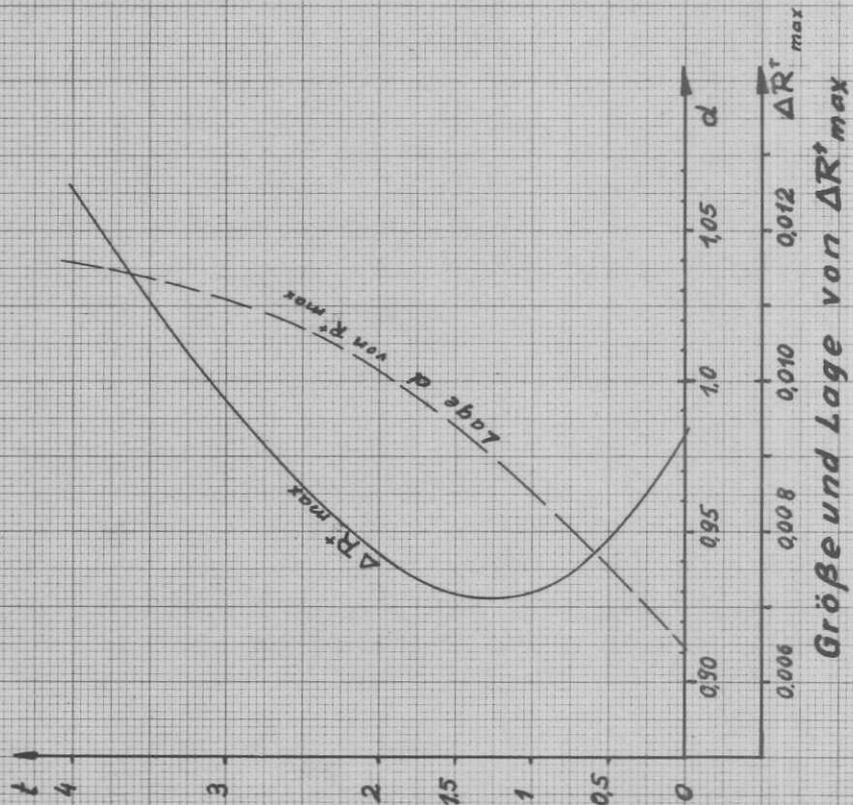
ΔR^+ -Verlauf über d eines Kugelwulstes
 bei $f=1$ mit t als Parameter
 der Form $\langle 2,4,6; 0,6t; t \rangle$
 bei $\gamma_0 = 2$



Diagr. 14



ΔR^t -Verlauf über d eines Kugelwulstes
 bei $f=1$ mit t als Parameter
 der Form $\langle 2,4,6,0,64,1 \rangle$
 bei $\gamma_0 = 10$



Diagr. 15