

175 | 1965

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

O. Krappinger

Einige Grundlagen für die Anwendung
quadratischer Mittelwertrechner bei
Seegangversuchen

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

**Einige Grundlagen für die Anwendung quadratischer Mittelwertrechner bei
Seegangsversuchen**

O. Krappinger, 1. Auflage, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1965

© Technische Universität Hamburg-Harburg
Schriftenreihe Schiffbau
Schwarzenbergstraße 95c
D-21073 Hamburg
<http://www.tuhh.de/vss>

Einige Grundlagen für die Anwendung
quadratischer Mittelwertrechner bei Seegangsversuchen

von
O. Krappinger

Hamburg 1965

Einige Grundlagen für die Anwendung quadratischer
Mittelwertrechner bei Seegangsversuchen

1.

Über Schiffsbewegungen, das Überkommen von Wasser und dergl. in unregelmäßigem Seegang können ebenso wie über solchen Seegang selbst nur Wahrscheinlichkeitsaussagen gemacht werden. Dabei spielt die Varianz der Koordinate der Bewegung eine große Rolle. Bezeichnet man die Bewegungskordinate¹⁾, die eine zufällige Funktion der Zeit t ist, mit $x(t)$, so gilt für die Varianz

$$m_0(t) = E \left\{ (x(t) - E \{x(t)\})^2 \right\} = E \left\{ x^2(t) \right\} - E^2 \{x(t)\} \quad 2)$$

Im folgenden wird immer vorausgesetzt, daß es sich bei $x(t)$ um einen stationären zufälligen Vorgang handelt. Bei einem solchen ist $E \{f(x(t))\}$, insbesondere auch der Mittelwert $E \{x(t)\}$ und die Varianz $m_0(t)$, unabhängig von der Zeit t . Ferner wird auch immer $E \{x(t)\} = 0$ angenommen. Dies kann durch eine geeignete Nullpunktverschiebung in jedem Fall leicht erreicht werden. Unter diesen Voraussetzungen kann für die Varianz

$$m_0 = E \left\{ x^2(t) \right\}$$

geschrieben werden.

¹⁾ Es kann sich dabei z.B. um den Stampf- oder Rollwinkel, um die Tauchbewegung oder die Vertikalbewegung irgend eines Punktes des Schiffes, um die relative Eintauchung oder auch um die entsprechenden Geschwindigkeiten bzw. Winkelgeschwindigkeiten oder Beschleunigungen bzw. Winkelbeschleunigungen handeln.

²⁾ $E \{f(\xi)\}$ bedeutet die mathematische Erwartung der in den geschweiften Klammern stehenden Funktion der zufälligen Variablen ξ .

Bei bekanntem m_0 können u.a. folgende Aussagen über die Bewegung $x(t)$ gemacht werden:

Wahrscheinlichkeit, daß $x(t)$ einen bestimmten Wert x_1 nicht überschreitet:

$$W(x \leq x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m_0}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{-x^2/2m_0} dx = \varphi_1(m_0; x_1) \quad (1a)$$

Wahrscheinlichkeit, daß $x(t)$ größere Werte als x_1 annimmt:

$$W(x > x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m_0}} \int_{x_1}^{\infty} e^{-x^2/2m_0} dx = \varphi_2(m_0; x_1) \quad (1b)$$

Wahrscheinlichkeit, daß die Amplituden a von $x(t)$ einen bestimmten Wert a_1 nicht überschreiten (siehe Bild 1):

$$W(a \leq a_1) = 1 - e^{-a_1^2/2m_0} = \varphi_3(m_0; a_1) \quad (2a)$$

Wahrscheinlichkeit, daß die Amplituden a von $x(t)$ größer als a_1 sind:

$$W(a > a_1) = e^{-a_1^2/2m_0} = \varphi_4(m_0; a_1) \quad (2b)$$

Wahrscheinlichkeit, daß Amplituden aus einem Intervall $a_1 \leq a < a_2$ auftreten:

$$W(a_1 \leq a < a_2) = e^{-a_1^2/2m_0} - e^{-a_2^2/2m_0} = \varphi_5(m_0; a_1, a_2) \quad (2c)$$

Mittelwert der $p\%$ größten Amplituden ($0 < p < 100$)

$$E \{ a | a > a_p \} = k_1(p) \sqrt{m_0} = \varphi_6(m_0; p) \quad (3a)$$

Dabei ist

$$\alpha_p = \sqrt{2m_0} \sqrt{\ln \frac{100}{p}}$$

Wahrscheinlichste Amplitude von $x(t)$:

$$\tilde{a} = \sqrt{m_0} = \varphi_7(m_0) \quad (3b)$$

Erwartungswert der jeweils größten Amplitude aus n Amplituden:

$$E \{ a_{\max n} \} = k_2(n) \sqrt{m_0} = \varphi_8(m_0; n) \quad (3c)$$

Wahrscheinlichster Wert der größten Amplitude aus n Amplituden:

$$\tilde{a}_{\max n} = k_3(n) \sqrt{m_0} = \varphi_9(m_0; n) \quad (3d)$$

Tabellen für $k_1(p)$, $k_2(n)$ und $k_3(n)$ sind z.B. in der Arbeit von Bartsch (1959) zu finden.³⁾

Vorstehende Zusammenstellung zeigt, daß man mit Hilfe der Varianzen m_0 der Schiffsbewegungen auf recht einfache Weise eine ganze Reihe von Größen bestimmen kann, mit denen man das Seeverhalten (das letztlich von den Schiffsbewegungen, worunter Wege bzw. Winkel und deren Ableitungen verstanden werden, abhängt) eines Schiffes charakterisieren kann. Hinzukommt, daß auch m_0 selbst aus Messungen relativ einfach, u.U. sogar durch automatisch arbeitende Rechenwerke, bestimmt werden kann.

3) Bei Bartsch wird statt m_0 eine Größe $R = 2m_0$ verwendet.

2.

Für die Varianz von $x(t)$ bestehen folgende Beziehungen:

$$E \{ x^2 \} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx \quad (4)$$

$f(x)$ bedeutet dabei die Verteilungsdichte von x . Es handelt sich um eine Normalverteilung $N(0, \sqrt{m_0})$.

$$E \{ x^2 \} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n x_k^2(t_1)}{n} \quad (5)$$

Die Werte $x_k(t_1)$ sind dabei verschiedene unter den vorliegenden Gegebenheiten mögliche Realisationen des zufälligen Prozesses $x(t)$ zu einer bestimmten Zeit t_1 .

$$E \{ x^2 \} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \quad (6)$$

Zur Bestimmung von m_0 aus einer Messung von $x(t)$ ist keine der Beziehungen (4), (5) und (6) unmittelbar geeignet: $f(x)$ in (4) hängt selbst von m_0 ab. Das für (5) notwendige Ensemble verschiedener Realisationen von $x(t)$ ist für $n \rightarrow \infty$ sicher und auch für $n < \infty$ meist nicht verfügbar. Schließlich kann man auch nicht - um (6) zu berechnen - $x(t)$ über eine unendlich lange Zeit messen. Aus mehreren Gründen muß T sogar oft relativ kurz gewählt werden: erstens, weil man in der Wirklichkeit $x(t)$ meist nur über relativ kurze Zeit mit genügend guter Näherung als stationär annehmen darf und zweitens, weil bisher Integrierwerke zur automatischen Berechnung von quadratischen Mittelwerten nur für nicht zu große Integrierzeiten T zur Verfügung stehen.

Berechnet man den Mittelwert von $x^2(t)$ über eine Zeit $T < \infty$, so wird man im allgemeinen für verschiedene solche Zeitabschnitte T (vergl. Bild 2) verschiedene Werte für

$${}_k\mu_o = \frac{1}{T} \int_0^T {}_k x^2(t) dt \quad (7)$$

erhalten (Der links stehende Index k weist dabei auf einzelne Zeitabschnitte hin).

${}_k\mu_o$ ist eine zufällige Variable. Ihr Mittelwert ist

$$\begin{aligned} E \{ {}_k\mu_o \} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_1^n {}_k\mu_o}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_1^n \frac{1}{T} \int_0^T {}_k x^2(t) dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_1^n {}_k x^2(t)}{n} dt \end{aligned} \quad (8)$$

Mit (5) folgt daraus

$$E \{ {}_k\mu_o \} = \frac{1}{T} \int_0^T m_o dt = m_o \quad (8a)$$

Jedernach (7), d.h. jeder in Wirklichkeit berechnete Wert von ${}_k\mu_o$ ist eine Schätzung von m_o . Um etwas über die Genauigkeit einer solchen Schätzung aussagen zu können, wird im nächsten Abschnitt die Streuung σ_{m_o} von ${}_k\mu_o$ berechnet.

3.

Die Varianz $\sigma_{m_o}^2$ von μ_o ist (der Index k wird im folgenden weggelassen):

$$\sigma_{m_o}^2 = E \left\{ (\mu_o - m_o)^2 \right\} = E \left\{ \mu_o^2 \right\} - m_o^2 \quad (9)$$

Für $E \left\{ \mu_0^2 \right\}$ kann man schreiben (vergl. Gleichg. (7)):

$$\begin{aligned} E \left\{ \mu_0^2 \right\} &= E \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t_1) dt_1 \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t_2) dt_2 \right\} = \\ &= E \left\{ \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T x_0^2(t_1) x_0^2(t_2) dt_1 dt_2 \right\} = \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T E \left\{ x^2(t_1) x^2(t_2) \right\} dt_1 dt_2 \quad (10) \end{aligned}$$

Die Indizierung der Zeit t dient dabei lediglich zur Unterscheidung der beiden Integrationsvariablen.

Mit der Verteilungsdichte $f(x(t_1), x(t_2))$ der zweidimensionalen zufälligen Variablen $(x(t_1), x(t_2))$ gilt für den Integranden von (10)

$$E \left\{ x^2(t_1) x^2(t_2) \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t_1) x^2(t_2) f(x(t_1), x(t_2)) dx(t_1) dx(t_2) \quad (11)$$

Mit

$$E \left\{ x^2(t_1) \right\} = E \left\{ x^2(t_2) \right\} = m_0$$

$$E \left\{ x(t_1) x(t_2) \right\} = R(t_1 - t_2)^4$$

findet man für die Verteilungsdichte von $(x(t_1), x(t_2))$ (siehe z.B. Schmetterer (1956), Seite 102):

$$\begin{aligned} f(x(t_1), x(t_2)) &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(m_0^2 - R^2(t_1 - t_2))} \exp \left[\frac{-1}{2(m_0^2 - R^2(t_1 - t_2))} \right. \\ &\quad \left. (m_0(x^2(t_1) + x^2(t_2)) - 2R(t_1 - t_2) x(t_1)x(t_2)) \right] \quad (12) \end{aligned}$$

⁴⁾ $R(t_1 - t_2)$ ist die Autokovarianzfunktion von $x(t)$

Mit den Beziehungen

$$\frac{x(t_1)}{\sqrt{m_0}} = y_1; \quad \frac{x(t_2)}{\sqrt{m_0}} = y_2; \quad t_1 - t_2 = \tau$$

$$\frac{R(t_1 - t_2)}{m_0} = \rho(\tau) \quad (\rho(\tau) \text{ ist der Korrelationskoeffizient von } x(t_1) \text{ und } x(t_2))$$

sowie mit Gleichung (12) ergibt sich für Gleichung (11):

$$E \{ y_1 \cdot y_2 \} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2(\tau)}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y_1^2 y_2^2 \exp \left[\frac{-y_1^2}{2(1-\rho^2)} + \frac{\rho(\tau)y_1 y_2}{2(1-\rho^2)} - \frac{y_2^2}{2(1-\rho^2)} \right] dy_1 dy_2 \quad (13)$$

Die Berechnung dieses Integrals läßt sich mit Hilfe von Integraltafeln (z.B. Gröbner-Hofreiter (1957)) leicht durchführen. Man erhält:

$$E \{ y_1 y_2 \} = 1 + 2 \rho^2(\tau) \quad (13a)$$

oder auch

$$E \{ x(t_1) x(t_2) \} = m_0^2 + 2R^2(\tau) \quad (13b)$$

Da $x(t)$ als stationär vorausgesetzt worden ist, kann man Gleichung (10) umformen, indem man $t_2 = t_1 + \tau$ setzt und die Integrationsgrenzen entsprechend verändert (vergl. Bild 3). Wenn man noch

(13b) einsetzt, erhält man

$$E \{ \mu_0^2 \} = \frac{1}{T^2} \int_{t_1=0}^T \int_{t_2=t_1-\tau}^{t_1} (m_0^2 + 2R^2(\tau)) d\tau dt_1 \quad (14)$$

Für den ersten Summanden des Integranden ergibt sich

$$\frac{1}{T^2} \int_{t_1=0}^T \int_{\tau=t_1-T}^{t_1} m_0^2 d\tau dt_1 = m_0^2 \quad (14a)$$

Für den zweiten Summanden findet man, wenn man die Integrationsfolge vertauscht und über t_1 integriert

$$\begin{aligned} \frac{2}{T^2} \int_0^T \int_{t_1-T}^{t_1} R^2(\tau) d\tau dt_1 &= \frac{2}{T^2} \left\{ \int_{\tau=-T}^0 \int_{t_1=0}^{T+\tau} R^2(\tau) dt_1 d\tau + \right. \\ &+ \left. \int_{\tau=0}^T \int_{t_1=\tau}^T R^2(\tau) dt_1 d\tau \right\} = \frac{2}{T^2} \left\{ \int_{\tau=-T}^0 R^2(\tau)(T+\tau) d\tau + \int_{\tau=0}^T R^2(\tau)(T-\tau) d\tau \right\} = \\ &= \frac{4}{T^2} \int_0^T (T-\tau) R^2(\tau) d\tau \quad (14b) \end{aligned}$$

Bei der letzten Umformung wurde davon Gebrauch gemacht, daß $R^2(\tau)$ symmetrisch und $\tau R^2(\tau)$ schiefsymmetrisch ist.

Unter Benutzung von (14), (14a) und (14b) erhält man für Gleichung (9)

$$\sigma_{m_0}^2 = \frac{4}{T^2} \int_0^T (T-\tau) R^2(\tau) d\tau \quad (15)$$

Damit ist die Streuung σ_{m_0} von μ_0 als Funktion der Integrier- bzw. Meßzeit T sowie der Autokovarianzfunktion $R(\tau)$ von $x(t)$ gegeben.

4.

Um Gleichung (15) weiter auswerten zu können, muß die Autokovarianzfunktion $R(\tau)$ bekannt sein. Voznessensky und Firsoff (1957) haben gezeigt, daß man die Autokovarianzfunktion von natürlichem

Seegang bzw. von Schiffsbewegungen in solchem recht gut durch

$$R(\tau) = m_0 e^{-\alpha\tau} \cos \omega_0 \tau \quad (16)$$

annähern kann. Sie haben auch 58 Wertpaare (α, ω_0) , die aufgrund von Messungen verschiedener Seegänge bestimmt worden sind, veröffentlicht. Bild 4 zeigt die Mittelwerte von α und ω_0 als Funktion der kennzeichnenden Wellenhöhe.

Setzt man den Ausdruck (16) in Gleichung (15) ein, so ergibt sich⁵⁾

$$\begin{aligned} \sigma_{m_0}^2 &= \frac{4m_0^2}{T^2} \int_0^T (T-\tau) (e^{-2\alpha\tau} \cos^2 \omega_0 \tau) d\tau = \\ &= m_0^2 \frac{2\left(\frac{\alpha}{\omega_0}\right)^2 + 1}{2\alpha T \left(\left(\frac{\alpha}{\omega_0}\right) + 1\right)} + h(T) \end{aligned} \quad (17)$$

Mit $h(T)$ sind einige weitere Glieder bezeichnet, die bei praktisch vorkommenden T -Werten vernachlässigbar klein werden.

Bevor näher auf Gleichung (17) eingegangen wird, sei noch einiges über die Parameter α und ω_0 der Autokovarianzfunktion (16) gesagt. ω_0 kann als die Frequenz gedeutet werden, in deren Nachbarschaft das Seegangsspektrum die größten Werte annimmt.

⁵⁾ Zur Auswertung des Integrals wurden die Integraltafeln von Gröbner-Hofreiter (1957) benutzt.

α hängt von der Unregelmäßigkeit des Seegangs ab:⁶⁾ Bei Dünung ist α klein, bei Windsee groß. Da bei einer Dünung der größte Teil der Energie ^{häufig} von Elementarwellen großer Länge beigetragen wird, ist in diesem Fall auch ω_0 meist kleiner als bei einer Windsee. Das Verhältnis α/ω_0 wird deshalb nicht sehr stark schwanken. Brauchbare Werte sind $\alpha/\omega_0 = 0,1$ bis $0,3$. Setzt man sie in Gleichung (17) ein, so ergibt sich

$$\sigma_{m_0} = \frac{0,71 \text{ bis } 0,725}{\sqrt{\alpha T}} m_0 \quad (17a)$$

Gleichung (17a) zeigt, daß die Streuung der nach Gleichung (7) berechneten μ_0 -Werte um so größer wird je kleiner die Meß- bzw. Integrierzeit ist und je kleiner α ist. Ersteres ^{entspricht} ~~entspricht~~ ^{entspricht} ~~durchaus~~ unserer Vorstellung. Letzteres ist zunächst überraschend: Je kleiner α ist, in einem desto engeren Bereich ist die Energie des Seegangs um die Frequenz ω_0 konzentriert. Man erwartet, daß in einem solchen Fall der natürliche Seegang regelmäßigen Wellen viel ähnlicher ist als wenn das Spektrum breit ist. (In der Tat hat man bei Beobachtung einer Dünung, bei der α klein ist, eher den Eindruck regelmäßiger Wellen als bei Windsee, für die sich größere α -Werte ergeben). Gleichung (17a) ergibt also, daß die Streuung von μ_0 um so größer wird, je mehr der Seegang regelmäßigen Wellen ähnlich ist. Andererseits ist die Streuung von μ_0 für regelmäßige Wellen gleich Null. (Es ist in diesem Fall $\mu_0 = m_0 = \frac{1}{2} \bar{a}^2$ mit \bar{a} = Wellenamplitude).

⁶⁾ Es kann gezeigt werden, daß α gleich dem Abstand der Abszissenwerte des Energiespektrums ist, bei denen die Spektraldichte die Hälfte ihres Maximalwertes annimmt. α kann deshalb auch als Maß für die Breite des Spektrums aufgefaßt werden.

Diese scheinbare Diskrepanz läßt sich leicht aufklären. Es wird dazu folgende aus zwei harmonischen Komponenten bestehende Welle betrachtet

$$x(t) = \bar{a} \cos(\omega_0 - \Delta\omega)t + \bar{a} \cos(\omega_0 + \Delta\omega)t.$$

Nach einer einfachen Umformung kann man dafür auch schreiben

$$x(t) = 2\bar{a} \cos \Delta\omega t \cos \omega_0 t.$$

Bild 5 zeigt zwei Beispiele dieser Funktion. In einem liegen die Frequenzen der beiden Harmonischen dicht beisammen (Analogie zu einem schmalen Spektrum), im anderen ist ihr Abstand größer (Analogie zu einem breiten Spektrum). Man erkennt leicht, daß der über das Zeitintervall T gebildete Mittelwert von $x^2(t)$ in dem dem schmalen Spektrum entsprechenden Fall (Bild 5a) viel stärker von dem richtigen Wert $m_0 = \bar{a}^2$ abweicht als in dem dem breiten Spektrum entsprechenden Fall (Bild 5b).

Bei zufälligen Funktionen sind die Verhältnisse zwar grundsätzlich anders als bei diesem einfachen Beispiel, es besteht aber doch eine gewisse Analogie: Bei einem zufälligen Vorgang mit breitem Spektrum erhält man in einem bestimmten Zeitintervall T mehr Informationen über den Funktionsverlauf als bei einem schmalen Spektrum. Je mehr Informationen verfügbar sind, desto genauer wird aber auch eine statistische Schätzung.

In nachstehender Tabelle sind als Beispiel einige Werte von $\frac{\sigma_{m_0}}{m_0}$ in Abhängigkeit von T und α zusammengestellt (Es wurde dabei $\alpha/\omega_0 = 0,2$ angenommen):

T	min sek	5 300	10 600	15 900	20 1200
$\alpha = 0,1$		0,13	0,093	0,075	0,065
$\alpha = 0,3$		0,075	0,053	0,044	0,038
$\alpha = 0,5$		0,059	0,042	0,034	0,029

Die bisherigen Ausführungen dieses Abschnittes betreffen eine ganz spezielle Form der Autokovarianzfunktion (Vergl. Gleichung (16)). D.h. sie gelten nur für solche zufällige Vorgänge, deren Spektrum durch die Fouriertransformierte von (16) gut angenähert werden kann. Bei Vorgängen mit anderen Spektren ist zu erwarten, daß sich gegenüber den hier gezogenen Folgerungen keine grundsätzlichen Änderungen ergeben. Falls man dabei auf genaue quantitative Ergebnisse Wert legt, kann man wie folgt vorgehen:

Man nähert das gegebene Spektrum $S^*(\omega)$ (das ohne weiteres auch zwei oder mehrere Maxima haben darf) durch ein aus mehreren Teilspektren zusammengesetztes Spektrum an⁷⁾:

$$S^*(\omega) \approx S(\omega) = S_1(\omega) + S_2(\omega) + \dots$$

Für die dem Spektrum $S(\omega)$ entsprechende Autokovarianzfunktion gilt dann

$$R(\tau) = R_1(\tau) + R_2(\tau) + \dots$$

wobei $R(\tau)$ bzw. $R_i(\tau)$ die Fouriertransformationen von $S(\omega)$ bzw. $S_i(\omega)$ sind. Für die $R_i(\tau)$ wird dabei die Form

$$R_i(\tau) = \sigma_{m_0} e^{-\alpha_i \tau}$$

gewählt. Von Gleichung (15) ausgehend, kann man dann, formal ganz gleich wie es oben gezeigt worden ist, σ_{m_0} bestimmen.

⁷⁾ Siehe hierzu auch Bendat (1958), S.211

5.

Um aus dem bisher Gesagten praktischen Nutzen ziehen zu können, ist es notwendig, die Verteilung von μ_0 zu kennen. Um sie zu ermitteln, wird folgende Überlegung angestellt: Es wird zunächst angenommen, daß n voneinander unabhängige Realisationen von $x(t)$ zu einer Zeit t_1 bekannt sind. Sie werden mit $x_1, \dots, x_k, \dots, x_n$ bezeichnet. Damit kann eine Schätzung μ_0 von m_0 berechnet werden (vergl. Gleichung (5)):

$$\mu_0 = \frac{\sum_{k=1}^n x_k^2}{n-1} \quad (18)$$

Da die x_k normal nach $N(0, \sqrt{m_0})$ verteilt sind, ist

$$\frac{(n-1)\mu_0}{m_0} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k^2}{m_0} \quad (19)$$

nach einer χ^2 -Verteilung mit $\nu = (n-1)$ Freiheitsgraden verteilt (Siehe z.B. Schmetterer (1956), S.138). Die Varianz der zufälligen Variablen $\chi_\nu^2 = \frac{\nu \mu_0}{m_0}$ ist dann

$$E\left\{(\chi_\nu^2 - \nu)^2\right\} = E\left\{\left(\frac{\nu \mu_0}{m_0} - \nu\right)^2\right\} = 2\nu \quad (20)$$

Grundsätzlich ist es gleichgültig, ob man die Schätzung von m_0 nach Gleichung (7) oder nach Gleichung (18) vornimmt. Deshalb müssen - wenn der Umfang n der Gleichung (18) zugrundeliegenden Stichprobe der bei Gleichung (7) benutzten Integrierzeit T äquivalent ist - , die Verteilungen für die nach den beiden Methoden berechneten Werte μ_0 gleich sein. Insbesondere müssen dann auch die Varianzen von μ_0 in beiden Fällen gleich groß sein.

Die folgenden Untersuchungen beschränken sich auf den Fall, daß die Autokovarianzfunktion von $x(t)$ die durch Gleichung (16) gegebene Form hat. Für Gleichung (17a) kann man dann auch schreiben:

$$E \left\{ (\mu_0 - m_0)^2 \right\} = \frac{k^2}{\alpha T} m_0^2 \quad (21)$$

oder wenn man statt μ_0 die Größe $\frac{\nu}{m_0} \mu_0$ setzt:

$$E \left\{ \left(\frac{\nu \mu_0}{m_0} - \nu \right)^2 \right\} = \nu^2 \frac{k^2}{\alpha T} \quad (21b)$$

Gleichsetzen von Gleichung (20) und (21b) ergibt:

$$\begin{aligned} 2\nu &= \nu^2 \frac{k^2}{\alpha T} \\ \nu &= 2 \frac{\alpha T}{k^2} \end{aligned} \quad (22)$$

Die nach Gleichung (7) bestimmten Werte μ_0 sind immer dann gleich verteilt wie die nach Gleichung (18) bestimmten Werte, wenn die Beziehung (22) gilt. Für beide Fälle handelt es sich - wenn man statt μ_0 die Variable $\frac{\nu \mu_0}{m_0}$ betrachtet - um eine χ^2 -Verteilung mit ν Freiheitsgraden.

6.

In diesem Abschnitt werden einige Beispiele für die Anwendung der oben untersuchten Zusammenhänge gebracht. Zunächst soll gezeigt werden, wie man die Genauigkeit ^{eines}entsprechend Gleichung (7) bestimmten μ_0 -Wertes beurteilen kann.

In Bild 6 ist die Verteilungsdichte von $\chi^2 = \frac{\nu \mu_0}{m_0}$ einge-

zeichnet. Mit

$$W\left\{\chi^2 \leq \chi_u^2\right\} = \frac{\alpha}{2} \quad \text{und} \quad W\left\{\chi^2 > \chi_o^2\right\} = \frac{\alpha}{2}$$

gilt auch

$$W\left\{\chi_u^2 \leq \frac{\nu \mu_o}{m_o} < \chi_o^2\right\} = 1 - \alpha = \beta$$

Dafür kann auch

$$W\left\{\frac{1}{\chi_o^2} \leq \frac{m_o}{\nu \mu_o} < \frac{1}{\chi_u^2}\right\} = \beta$$

oder

$$W\left\{\frac{\nu \mu_o}{\chi_o^2} \leq m_o < \frac{\nu \mu_o}{\chi_u^2}\right\} = \beta \quad (23)$$

geschrieben werden. Gleichung (23) besagt: Die Wahrscheinlichkeit, daß m_o von dem in den geschwungenen Klammern stehenden Bereich überdeckt wird, ist β . Wenn man β groß wählt, (z.B. 0.95 oder 0.99), so ist es fast sicher, daß der Bereich den wirklichen Wert von μ_o , d.i. m_o , überdeckt. Der angegebene Bereich heißt Konfidenzbereich zum Konfidenzniveau β . Er läßt sich nach folgendem Schema leicht ermitteln:

- Bestimmung eines Konfidenzbereiches für m_o -

1. Bestimme μ_o (mit Hilfe von Gleichung (7) bzw. einem Mittelwertrechner
2. Berechne die Zahl der Freiheitsgrade nach Gleichung (22).

$$\nu = \frac{2 \alpha T}{k}$$

(T ist gegeben, α und k hängen vom Spektrum ab. Sie können, wenn ein solches nicht vorliegt, aufgrund von Erfahrungen geschätzt werden).

3. Wähle ein Konfidenzniveau β und lese aus Tabellen der χ^2 -Verteilung für ν und β die Grenzen χ^2_{α} und $\chi^2_{1-\alpha}$ ab (Siehe Anhang).
4. Berechne entsprechend Gleichung (23) den Konfidenzbereich für m_0 . Er ist ein Maß für die Genauigkeit der Schätzung von m_0 .

Als nächstes wird gezeigt, wie man das Seeverhalten zweier Schiffe aufgrund von μ_0 -Werten vergleichen kann. Es soll sich z.B. um folgendes Problem handeln: Zwei Schiffe haben unterschiedlichen Spantcharakter. Werden dadurch die Vertikalbeschleunigungen im Abstand $L/4$ vom vorderen Lot beeinflusst? - Beide Schiffe werden mit Beschleunigungsmessern an der interessierenden Stelle und mit Mittelwertbildnern ausgerüstet. Sie fahren so nahe nebeneinander, wie es aus Sicherheitsgründen zu vertreten ist, auf Parallelkurs durch unregelmäßigen Seegang. Auf einem Schiff wird μ_{0A} , auf dem anderen μ_{0B} gemessen, (bzw. aus den Messungen der Beschleunigungen bestimmt). Im allgemeinen wird $\mu_{0A} \neq \mu_{0B}$ sein. Es geht nun um die Frage, ob dieser Unterschied zufällig ist (d.h. ob er aus der Streuung von μ_{0A} und μ_{0B} folgt) oder seine Ursache an dem verschiedenen Spantcharakter liegt. In der Sprache der mathematischen Statistik ausgedrückt, handelt es sich hierbei um die Prüfung des Unterschiedes der Varianzen zweier unabhängiger⁸⁾

8) Der Abstand der Schiffe wird - wenn es sich nicht gerade um eine sehr "gleichmäßige" Dünung handelt, immer so groß sein, daß man den Seegang auf beiden Schiffskursen und damit auch die Bewegungen als stochastisch unabhängig ansehen kann.

Normalverteilungen bei bekannten Mittelwerten (Siehe z.B. Schmetterer (1956), S. 137).

Im folgenden wird davon Gebrauch gemacht, daß der Quotient $F = \frac{\eta_n / \mu_n}{\eta_m / \mu_m}$, in dem η_n bzw. η_m nach einer χ^2 -Verteilung mit n bzw. m Freiheitsgraden verteilte zufällige Variable bedeuten, nach der sogenannten F-Verteilung mit (n, m) Freiheitsgraden verteilt ist.

Im vorliegenden Fall werden die Größen $\frac{\nu_A \mu_{oA}}{m_{oA}}$ und $\frac{\nu_B \mu_{oB}}{m_{oB}}$ betrachtet. Sie sind, wie oben gezeigt worden ist, nach χ^2 mit ν_A bzw. ν_B Freiheitsgraden verteilt.

Zunächst wird nun angenommen, daß der Spantcharakter der beiden Schiffe keinen Einfluß auf die Beschleunigungen hat (Nullhypothese). Es soll also $m_{oA} = m_{oB} = m_o$ gelten und man erhält

$$F = \frac{\mu_{oA}}{\mu_{oB}} \quad (24)$$

F ist nach einer F-Verteilung mit (ν_A, ν_B) Freiheitsgraden verteilt. Mit der Annahme gleicher Meß- bzw. Integrierzeit T für beide Schiffe und weil für beide Schiffe gleiches Seegangsspektrum vorausgesetzt werden darf, liefert Gleichung (22) in beiden Fällen die gleiche Zahl von Freiheitsgraden $\nu_A = \nu_B = \nu$.

Es soll nun folgende Überlegung ausgenutzt werden:

Wenn die Hypothese $m_{oA} = m_{oB}$ richtig ist, ist es unwahrscheinlich, daß $\frac{\mu_{oA}}{\mu_{oB}}$ stark von 1 abweicht. Wenn es dies aber tut, kann man annehmen, daß die Nullhypothese falsch ist, d.h. daß der Spantcharakter von Einfluß auf die interessierenden Beschleunigungen ist.

Bild 7 zeigt ein Beispiel für eine F-Verteilung. Sie gilt unter Voraussetzung der Nullhypothese $m_{0A} = m_{0B}$. In dem Bild sind zwei Bereiche schraffiert, die so gewählt sind, daß die Wahrscheinlichkeit, daß $F = \mu_{0A} / \mu_{0B}$ in einen dieser Bereiche fällt, wenn die Nullhypothese richtig ist, gleich α ist. Wenn man α klein wählt, ist es unwahrscheinlich, daß F in einen dieser Bereiche fällt. Tut es dies trotzdem, ~~so lehnt man~~ die Nullhy-pothese ab. Die Wahrscheinlichkeit, sich dabei zu irren (d.h. die Nullhypothese abzulehnen, obwohl sie richtig ist), ist dabei gleich α . Man nennt deshalb α auch Irrtumswahrscheinlichkeit.

Erhält man für $F = \mu_{0A} / \mu_{0B}$ einen Wert, der zwischen die schraffierten Bereiche fällt, bedeutet dies noch nicht, daß die Nullhypothese richtig wäre. Es ist dies vielmehr wie folgt zu deuten: Die Meßzeit T reicht nicht aus, um einen eventuellen Unterschied zwischen m_{0A} und m_{0B} mit großer Wahrscheinlichkeit festzustellen.

Bei sehr großem T wird der unschraffierte Bereich (Bild 7) sehr eng. Wenn in einem solchen Fall ein größerer Unterschied zwischen m_{0A} und m_{0B} besteht, würde F mit großer Wahrscheinlichkeit in einen der schraffierten Bereiche fallen. Man sieht also: Je kleiner der Unterschied zwischen m_{0A} und m_{0B} ist, desto größer muß T sein, um ihn feststellen zu können. Es sei auch dieser Test in einem Schema zusammengefaßt:

Prüfung der Unterschiede von zwei μ_0 -Werten:

1. Bestimme μ_{0A} und μ_{0B} für gleiche Bedingungen, aber aufgrund unabhängiger Ausgangsdaten.
2. Berechne die Zahl der Freiheitsgrade nach Gleichung (22):

$$\nu = 2 \frac{\alpha T}{k^2}$$

(T ist gegeben, α und k hängen vom Spektrum ab).

3. Wähle eine Irrtumswahrscheinlichkeit α und lese aus Tabellen der F-Verteilung für (ν, ν) und α F_u und F_o ab (siehe Anhang).
4. Berechne $F = \mu_{0A} / \mu_{0B}$ und prüfe, ob $F < F_u$ oder $F > F_o$. Ist dies der Fall, wird die Hypothese $m_{0A} = m_{0B}$ abgelehnt.

Im nun folgenden letzten Beispiel soll gezeigt werden, wie die Empfindlichkeit des Vergleichsverfahrens für zwei μ_0 -Werte verbessert werden kann, wenn nicht nur geprüft wird, ob überhaupt ein Unterschied besteht, sondern wenn es darauf ankommt, festzustellen, ob der eine μ_0 -Wert größer ist als der andere.

Zwei im übrigen gleiche Schiffe sind mit verschiedenen Schlingerdämpfungsanlagen ausgerüstet worden. Es soll durch Messung der Rollwinkel bzw. ihrer quadratischen Mittelwerte überprüft werden, ob die Schlingerdämpfungsanlage B besser ist als die Anlage A oder ob kein wesentlicher Unterschied zwischen den beiden Anlagen besteht. Daß die Wirksamkeit von Anlage B geringer ist als die von Anlage A, kann mit Sicherheit ausgeschlossen werden.

Es mögen die unter geeigneten Bedingungen bestimmten Werte μ_{OA} und μ_{OB} für beide Schiffe vorliegen. Wenn die Anlage B besser ist, muß der wirkliche quadratische Mittelwert m_{OB} kleiner sein als m_{OA} . Zunächst wird wieder angenommen, daß die Nullhypothese $m_{OA} = m_{OB}$ gilt. Es ist dann unwahrscheinlich, daß F stark von 1 abweicht.

Im vorliegenden Fall kann diese Feststellung noch etwas verschärft werden: Wenn die Nullhypothese gilt, ist es unwahrscheinlich, daß $F = \mu_{OA} / \mu_{OB}$ viel größer als 1 ist. Abweichungen von F nach der anderen Seite (zu Werten kleiner als 1) können hier unberücksichtigt bleiben.

Bild 8 zeigt die unter Voraussetzung der Nullhypothese geltende F -Verteilung. In die Verteilung ist F_0 so eingetragen, daß die Wahrscheinlichkeit $W\{F \geq F_0\} = \alpha$ ist. Wenn man α klein wählt, dann ist es unwahrscheinlich, daß das Verhältnis $F = \mu_{OA} / \mu_{OB}$ in den schraffierten Bereich fällt, wenn die Nullhypothese richtig ist. Wenn es dies trotzdem tut, lehnt man deshalb die Nullhypothese ab und nimmt an, daß $m_{OA} \geq m_{OB}$, d.h. daß die Anlage B in der Tat besser ist. Die Wahrscheinlichkeit, sich dabei zu irren, ist wieder α .

Ein Vergleich von Bild 7 und Bild 8 zeigt, daß unter sonst gleichen Verhältnissen das Bild 8 zugrundeliegende Prüfverfahren trennschärfer ist. D.h. die Nullhypothese wird in diesem Fall schon bei einer kleineren Abweichung von μ_{OA} gegenüber μ_{OB} .

nach oben abgelehnt. Die Information, daß m_{0B} mit Sicherheit nicht größer ist als m_{0A} wirkt sich also ähnlich aus wie eine Vergrößerung von T . In beiden Fällen wird die Nullhypothese bei kleineren Abweichungen abgelehnt.

Schrifttum

- Bartsch, H. (1959):** Statistische Methoden zur Untersuchung der Bewegungen eines Schiffes im Seegang. Schiffstechnik, Band 6. S. 1 bis 8 und 85 bis 92.
- Blackman, R.B. und J.W. Tukey (1958):** The measurement of power spektra. Dover Publications, New York.
- Bendat, J. (1958):** Principles and applications of random noise theory. John Wiley & Sons, New York.
- Gröbner, W. und N. Hofreiter (1957):** Integraltafel. 2. Auflage Springer-Verlag, Wien und Innsbruck.
- Keil, H. (1964):** Über die Bestimmung von Sepktren des Seegangs und der Schiffsbewegungen. Schiffstechnik, Band 11, S. 141 bis 149.
- Schmetterer, L. (1956):** Mathematische Statistik. Springer-Verlag, Wien.
- Voznessensky, A.I. und G.A. Firsoff (1957):** Statistical analysis of data concerning rolling of ships. Proc.Symp. on the Behaviour of Ships in a Seaway, Wageningen

Bezeichnungen

- a Amplituden von $x(t)$ (siehe Bild 1)
- \bar{a} Amplituden harmonischer Schwingungen
- A } bezeichnet (als Index) zwei verschiedene Schiffe bzw.
B } Schlingerdämpfungsanlagen
- E { ... } Erwartungswert von ...
- f (...) Verteilungsdichte von ...
- F zufällige Variable, die nach der F-Verteilung verteilt ist
- F_u, F_o unteres bzw. oberes Quantil von F
- k als Index, dient zur Bezeichnung von x bzw. μ_o
- $k_i(\dots)$ Koeffizienten, die von ... abhängen
- k Konstante
- m_o Varianz von x , Mittelwert von μ_o
- n Zahl
- $N(m, \sigma)$ Normalverteilung mit Mittel x und Streuung σ
- p Wahrscheinlichkeit in %
- $R(\tau)$ oder $R(t_1 - t_2)$ Autokovarianzfunktion von $x(t)$
- R wird von Bartsch (1959) statt m_o verwendet ($R = 2m_o$)
- $S(\omega)$ Spektraldichte des Energiespektrums von $x(t)$
- t Zeitkoordinate
- T Zeitintervall
- W { ... } Wahrscheinlichkeit, daß eintritt
- $x(t)$ Bewegungskordinate
- y Hilfsvariable

- α Parameter eines Seegangsspektrums bzw. der dazugehörigen Autokovarianzfunktion
- α Irrtumswahrscheinlichkeit
- β Konfidenzniveau
- μ_0 statistische Schätzung von m_0
- ν Freiheitsgrade der χ^2 - bzw. F-Verteilung
- ρ Autokorrelationskoeffizient
- σ_{m_0} Streuung von μ_0
- $\sigma_{m_0}^2$ Varianz von μ_0
- $\varphi(\dots)$ Funktion von ...
- χ^2 zufällige Variable, die nach einer χ^2 -Verteilung verteilt ist
- χ_u^2, χ_o^2 unteres bzw. oberes Quantil von χ^2
- ω Kreisfrequenz
- ω_0 Parameter einer Seegangsfunktion bzw. der dazugehörigen Seegangsfunktion.

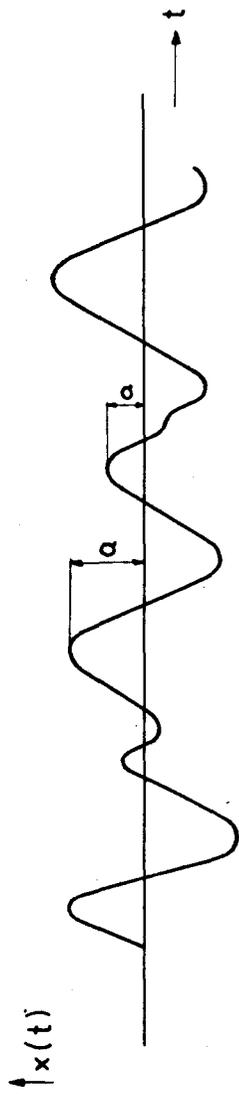


Bild 1

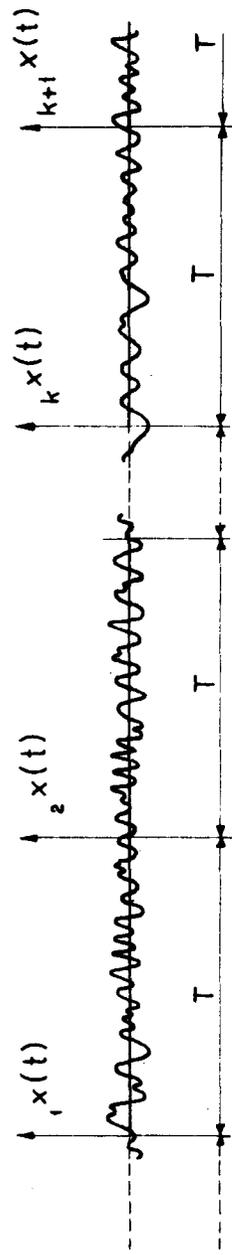


Bild 2

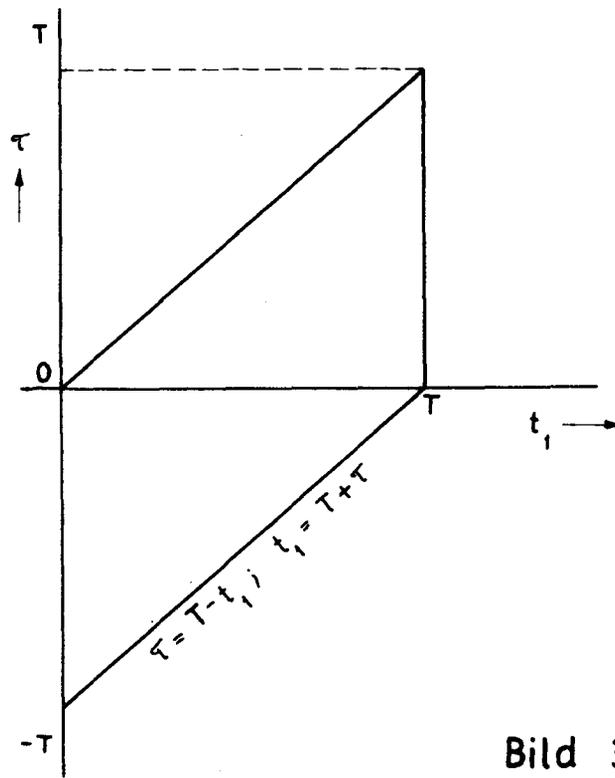


Bild 3

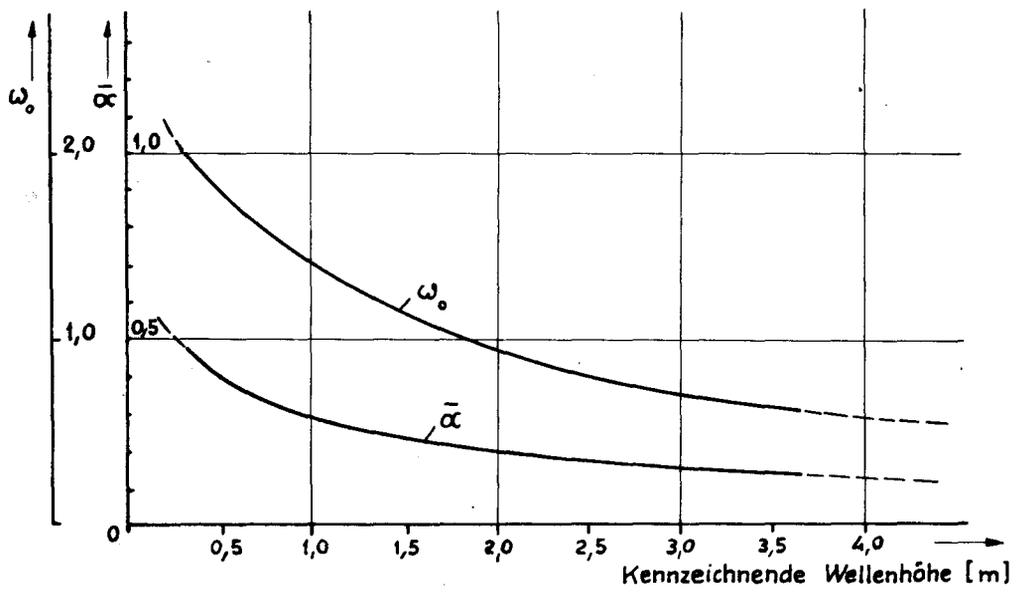
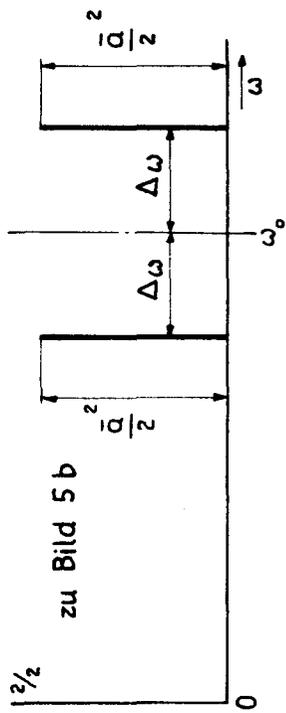
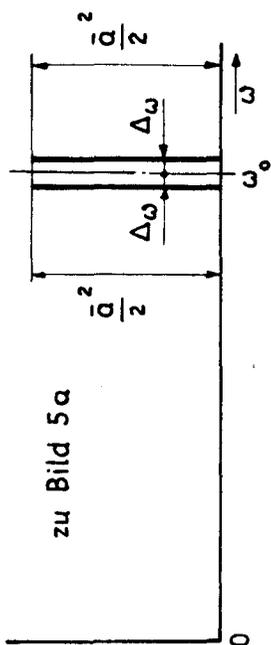
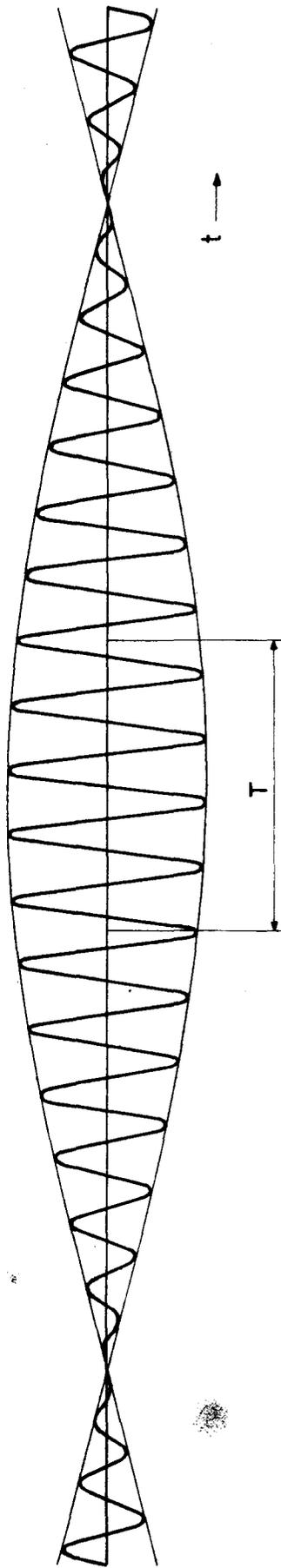


Bild 4

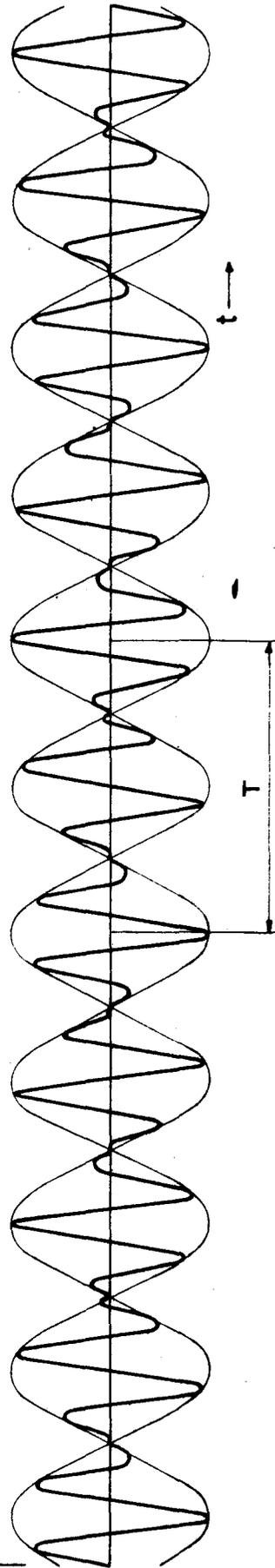
$x(t)$

Bild 5a



$x(t)$

Bild 5b



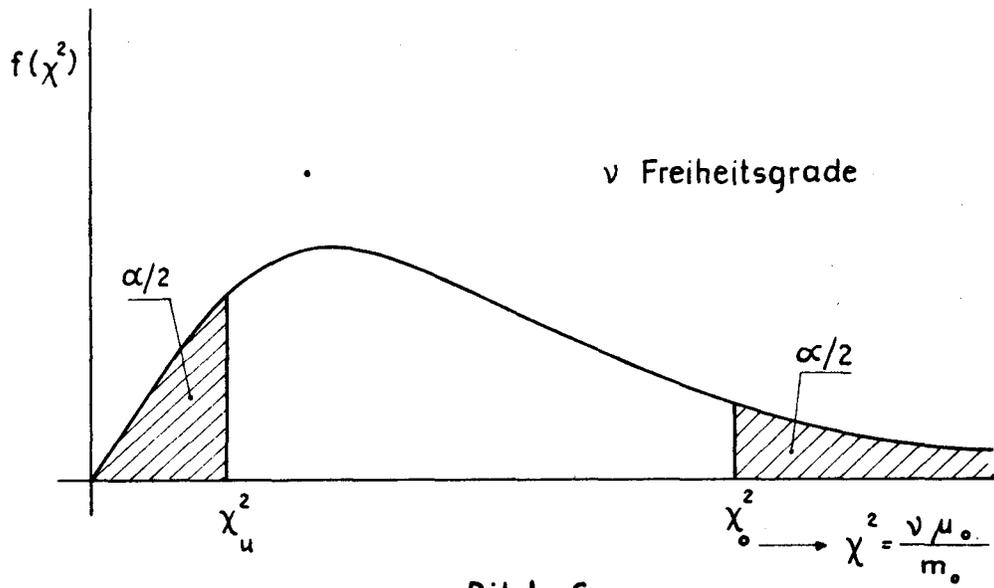


Bild 6

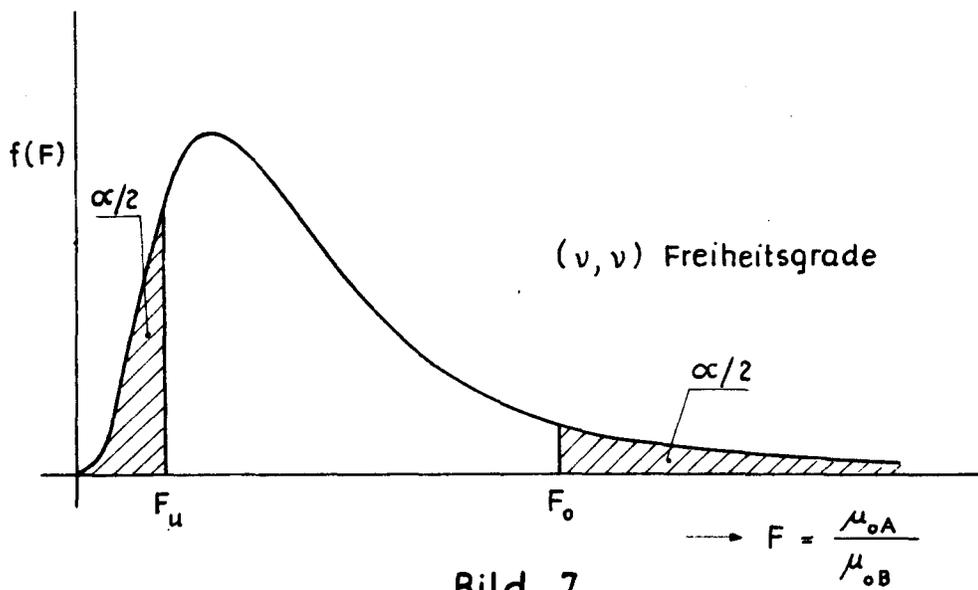


Bild 7

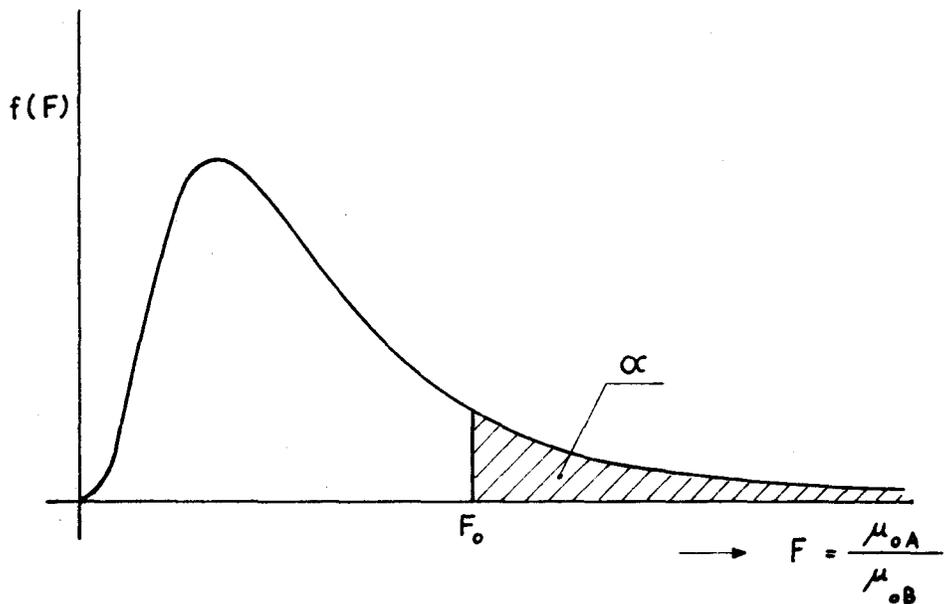


Bild 8