10

Kombinationen und Permutationen

In den nächsten beiden Kapiteln wird die Abzählungstheorie der klassischen Abbildungstypen mit Nebenbedingungen entwickelt. Sie beschäftigt sich konkret mit der Frage, auf wie viele Arten es möglich ist, N Kugeln auf R Fächer so zu verteilen, dass in jedes Fach höchstens eine Kugel, mindestens eine Kugel oder genau eine Kugel kommt oder aber beliebig viele Kugeln kommen. Dabei wird unterschieden, ob die Kugeln oder Fächer unterscheidbar (gefärbt) oder ununterscheidbar (ungefärbt) sind. Diese Fragestellung wird im Folgenden auf ein einheitliches Grundmuster zurückgeführt, das auf Wörtern basiert.

10.1 Kombinationen

k-Kombinationen und Mengen

Seien k und n natürliche Zahlen. Ein Wort x der Länge k über $\underline{n}$ wird eine k-*Kombination* von n genannt, wenn x streng mononton ist. Ein Wort $x = x_1x_2 \ldots x_k$ heißt *streng monoton*, wenn $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$. Die Anzahl der k-Kombinationen von n wird mit $\binom{n}{k}$ bezeichnet, sprich "*n über k*", und heißt *Binomialzahl* von n über k.

Beispiel 10.1. Die 2-Kombinationen von 4 lauten 12, 13, 14, 23, 24 und 34.

Jede k-Kombination $x = x_1x_2 \ldots x_k$ von n beschreibt eine k-Teilmenge $f(x) = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ von $\underline{n}$. Die Zuordnung $f : x \mapsto f(x)$ liefert eine Bijektion von der Menge aller k-Kombinationen von n auf die Menge aller k-Teilmengen von $\underline{n}$. Die Menge aller k-Teilmengen von $\underline{n}$ wird mit $\binom{\underline{n}}{k}$ bezeichnet. Mit dem Gleichheitsprinzip folgt

$$\binom{n}{k} = \left|\binom{\underline{n}}{k}\right|. \tag{10.1}$$

Satz 10.2. *Für alle natürlichen Zahlen k und n gilt*

- $\binom{n}{k} = 0$, *falls* $k > n$.
- $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$ *und* $\binom{n}{1} = n$.
- *Für* $1 \leq k \leq n$ *gilt*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}. \tag{10.2}$$

- *Für* $0 \leq k \leq n$ *gilt*

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{10.3}$$

- *Für* $0 \leq k \leq n$ *gilt*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \tag{10.4}$$

Beweis. Die ersten beiden Aussagen folgen aus den Definitionen. Für den Beweis der dritten Aussage kann aufgrund der zweiten Aussage $n > 1$ vorausgesetzt werden. Sei A die Menge aller k-Kombinationen von n, die n enthalten, und B die Menge der übrigen k-Kombinationen von n. Mit dem Additionsprinzip folgt $\binom{n}{k} = |A| + |B|$. Eine k-Kombination $x_1x_2\ldots x_k$ von n liegt in A genau dann, wenn $x_k = n$ und $x_1x_2\ldots x_{k-1}$ eine $(k-1)$-Kombination von $n-1$ ist. Also folgt $|A| = \binom{n-1}{k-1}$. Eine k-Kombination $x = x_1x_2\ldots x_k$ von n gehört zu B genau dann, wenn x eine k-Kombination von $n-1$ ist. Folglich ist $|B| = \binom{n-1}{k}$. Die vierte Aussage wird durch vollständige Induktion nach n mithilfe der dritten Aussage bewiesen. Die letzte Aussage folgt direkt aus der vierten. □

Satz 10.3. *Für jede natürliche Zahl n gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n. \tag{10.5}$$

Beweis. Es gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} |\binom{\underline{n}}{k}| = |\bigcup_{k=0}^{n} \binom{\underline{n}}{k}| = |P(\underline{n})| = 2^n,$$

dabei ergibt sich die erste Gleichung aus (10.1), die zweite aus dem Additionsprinzip und die letzte aus dem Satz 3.10. □

Satz 10.4. *Für jede natürliche Zahl n gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0. \tag{10.6}$$

Beweis. Die Summe auf der linken Seite hat wegen (10.2) die Gestalt

$$1 - \left\{\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1}\right\} + \left\{\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2}\right\}$$
$$- \left\{\binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3}\right\} \pm \ldots + (-1)^{n-1}\left\{\binom{n-1}{n-2} + \binom{n-1}{n-1}\right\} + (-1)^n.$$

Jede Binomialzahl $\binom{n-1}{k}$, $1 \leq k \leq n-2$, kommt je einmal mit positivem und negativem Vorzeichen vor, weshalb nur folgende Teilsumme übrig bleibt

$$1 - \binom{n-1}{0} + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1} + (-1)^n = 1 - 1 + (-1)^{n-1} + (-1)^n = 0.$$

□

Die Binomialzahl $\binom{n}{k}$ beschreibt die Anzahl der Möglichkeiten, k Elemente aus einer n-elementigen Menge auszuwählen, wobei jedes Element höchstens einmal ausgewählt wird und es nicht auf die Reihenfolge der Elemente ankommt.

Beispiel 10.5. Beim Zahlenlotto werden 6 aus 49 Zahlen gezogen. Sechs Richtige bilden eine 6-Kombination von 49. Die Anzahl der 6-Kombinationen von 49 ist gleich $\binom{49}{6}$. Die *Wahrscheinlichkeit*, sechs Richtige zu erhalten, ist $1/\binom{49}{6} \approx 7.1 \cdot 10^{-8}$.

k-Kombinationen und charakteristische Wörter

Jede k-Kombination $x = x_1x_2 \ldots x_k$ von n beschreibt ein Wort $\chi(x) = c_1c_2 \ldots c_n$ der Länge n über dem Alphabet $\{0, 1\}$, wobei

$$c_i = \begin{cases} 1 \text{ falls } i \text{ in } x \text{ vorkommt,} \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases} \tag{10.7}$$

Das Wort $\chi(x)$ besteht aus k Einsen und $n-k$ Nullen und wird *charakteristisches Wort* oder (n,k)-*Wort* von x genannt. Die Zuordnung $\chi : x \mapsto \chi(x)$ liefert eine Bijektion von der Menge aller k-Kombinationen von n auf die Menge aller (n,k)-Wörter. Diese Zuordnung verdeutlicht folgende Tabelle

k	k-Kombinationen von 4	$(4,k)$-Wörter
0	ϵ	0000
1	1, 2, 3, 4	1000, 0100, 0010, 0001
2	12, 13, 14,	1100, 1010, 1001,
	23, 24, 34	0110, 0101, 0011
3	123, 124,	1110, 1101,
	134, 234	1011, 0111
4	1234	1111

10.2 Repetitionen

Repetitionen sind Kombinationen mit Wiederholung. Ein Wort $x_1 x_2 \ldots x_n$ der Länge n über $\mathbb{N}_0$ heißt eine *k-Repetition* von n, wenn $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$.

Beispiel 10.6. Die 2-Repetitionen von 4 lauten 2000, 1100, 1010, 1001, 0200, 0110, 0101, 0020, 0011 und 0002.

Jede k-Repetition $x_1 x_2 \ldots x_n$ von n ist eine endliche Folge $f : \underline{n} \to \mathbb{N}_0$ mit $f(i) = x_i$ für $1 \leq i \leq n$. Folgen mit natürlichzahligem Wertebereich sind Multimengen.

Beispiel 10.7. Die 2-Repetitionen von 4 aus Beispiel 10.6 entsprechen der Reihe nach den Multimengen $\{1,1\}_M$, $\{1,2\}_M$, $\{1,3\}_M$, $\{1,4\}_M$, $\{2,2\}_M$, $\{2,3\}_M$, $\{2,4\}_M$, $\{3,3\}_M$, $\{3,4\}_M$ und $\{4,4\}_M$.

Satz 10.8. *Die Anzahl der k-Repetitionen von n ist gleich $\binom{n+k-1}{k}$.*

Beweis. Jeder k-Repetition $x_1 x_2 \ldots x_n$ von n wird ein Wort über $\{0,1\}$ zugeordnet:

$$\overbrace{1\ldots1}^{x_1}0\overbrace{1\ldots1}^{x_2}0\ldots0\overbrace{1\ldots1}^{x_n}.$$

Dieses Wort hat $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$ Einsen und $n-1$ Nullen und ist somit ein $(n+k-1,k)$-Wort. Diese Zuordnung liefert eine Bijektion von der Menge aller k-Repetitionen von n auf die Menge aller $(n+k-1,k)$-Wörter. Die Anzahl der $(n+k-1,k)$-Wörter ist nach dem Gleichheitsprinzip identisch mit der Anzahl der k-Kombination von $n+k-1$, letztere ist $\binom{n+k-1}{k}$. Also folgt mit dem Gleichheitsprinzip die Behauptung. □

Die folgende Tabelle zeigt vier Darstellungsformen für Repetitionen

3-Repetitionen von 2	Multimengen	$(4,3)$-Wörter	3-Kombinationen von 4
30	$\{1,1,1\}_M$	1110	123
21	$\{1,1,2\}_M$	1101	124
12	$\{1,2,2\}_M$	1011	134
03	$\{2,2,2\}_M$	0111	234

Die Binomialzahl $\binom{n+k-1}{k}$ beschreibt die Anzahl der Möglichkeiten, k Elemente aus einer n-elementigen Menge auszuwählen, wobei jedes Element mehrfach ausgewählt werden darf und es nicht auf die Reihenfolge der Elemente ankommt.

Beispiel 10.9. Die Anzahl der Würfe mit 5 nicht unterscheidbaren Würfeln ist identisch mit der Anzahl der 5-Repetitionen von 6, nämlich $\binom{10}{5} = 252$.

10.3 Permutationen

Ein Wort x der Länge k über $\underline{n}$ heißt eine *k-Permutation* von n, wenn x keinen Buchstaben mehrfach enthält. Die Anzahl der k-Permutationen von n wird mit $(n)_k$ bezeichnet, sprich "*k unter n*".

Beispiel 10.10. Die 2-Permutationen von 4 lauten 12, 21, 13, 31, 14, 41, 23, 32, 24, 42, 34 und 43.

Jede k-Permutation $x_1x_2\ldots x_k$ von n entspricht einer injektiven Abbildung $f : \underline{k} \to \underline{n}$ mit $f(i) = x_i$ für $1 \leq i \leq k$, und umgekehrt. Also ist die Menge aller k-Permutationen von n identisch mit der Menge aller injektiven Abbildungen von $\underline{k}$ nach $\underline{n}$.

Satz 10.11. *Für jede natürliche Zahl n gilt*

$$(n)_1 = n \quad \textit{und} \quad (n)_n = n!. \tag{10.8}$$

Für alle natürlichen Zahlen n und k mit $1 < k < n$ gilt

$$(n)_k = (n-1)_k + k \cdot (n-1)_{k-1}. \tag{10.9}$$

Beweis. Die 1-Permutationen von n sind die Ziffern $1, 2, \ldots, n$. Für eine n-Permutationen von n gibt es n Möglichkeiten, den ersten Buchstaben zu wählen. Für den zweiten Buchstaben verbleiben $n-1$ Möglichkeiten. Auf diese Weise fortfahrend ergeben sich $n!$ Möglichkeiten, die n-Permutationen von n zu erzeugen.

Sei A die Menge aller k-Permutationen von n, die n enthalten, und B die Menge der übrigen k-Permutationen von n. Mit dem Additionsprinzip folgt $(n)_k = |A| + |B|$. Jede $(k-1)$-Permutation $y = y_1y_2\ldots y_{k-1}$ von $n-1$ lässt sich zu einer k-Permutation $y^{(i)}$ von n fortsetzen, indem n an der Position i eingefügt wird. Die Zuordnung $(i, y) \mapsto y^{(i)}$ definiert eine Bijektion des kartesischen Produkts von $\underline{k}$ und der Menge aller $(k-1)$-Permutationen von $n-1$ auf die Menge A. Mit dem Multiplikations- und Gleichheitsprinzip folgt $|A| = k \cdot (n-1)_{k-1}$. Die Elemente von B entsprechen den k-Permutationen von $n-1$. Mit dem Gleichheitprinzip folgt $|B| = (n-1)_k$. □

Durch vollständige Induktion erhalten wir das folgende

Korollar 10.12. *Für alle natürlichen Zahlen n und k mit $1 \leq k \leq n$ gilt*

$$(n)_k = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1). \tag{10.10}$$

Die Zahl $(n)_k$ beschreibt die Anzahl der Möglichkeiten, k Elemente aus einer n-elementigen Menge auszuwählen, wobei jedes Element höchstens einmal ausgewählt wird und es auf die Reihenfolge der Elemente ankommt.

Beispiel 10.13. Wie viele dreistellige Dezimalzahlen lassen sich mit den Ziffern 2, 3, 4, 5 und 6 bilden, so dass keine Ziffer mehrfach auftritt? Diese Dezimalzahlen entsprechen den 3-Permutationen von 5. Die Antwort lautet $(5)_3 = 60$.

Korollar 10.14. *Die Anzahl der Permutationen vom Grad n ist gleich $n!$.*

Beweis. Die injektiven Abbildungen $f : \underline{n} \to \underline{n}$ sind nach Satz 6.8 bijektiv. Also entsprechen die n-Permutationen von n genau den Permutationen vom Grad n. Mit dem Satz 10.11 folgt die Behauptung. □

10.4 Permutationen und Zykeltypen

Jede Permutation vom Grad n ist als Produkt von disjunkten Zykeln darstellbar (Abs. 6.4). In diesem Abschnitt werden Permutationen vom Grad n hinsichtlich ihrer Zykelstruktur klassifiziert.

Stirling-Zahlen erster Art

Die *absolute Stirling-Zahl erster Art* (James Stirling, 1692-1770) beschreibt die Anzahl der Permutationen vom Grad n, die aus k disjunkten Zykeln bestehen. Sie wird mit $s_0(n,k)$ bezeichnet. Da eine Permutation vom Grad n höchstens n disjunkten Zykeln besitzt, ergibt sich $s_0(n,k) = 0$, falls $k > n$.

Satz 10.15. *Für jede natürliche Zahl n gilt*

$$s_0(n,1) = (n-1)!, \quad s_0(n,n-1) = \binom{n}{2} \quad \textit{und} \quad s_0(n,n) = 1. \tag{10.11}$$

Für alle natürlichen Zahlen n und k mit $1 < k < n$ gilt

$$s_0(n,k) = s_0(n-1,k-1) + (n-1) \cdot s_0(n-1,k). \tag{10.12}$$

Beweis. In einem Zykel der Länge n kann die Eins als Anfangselement festgehalten und die restlichen $n-1$ Zahlen beliebig permutiert werden. Die letzten $n-1$ Zahlen bilden eine Permutation vom Grad $n-1$. Mit dem Korollar 10.14 folgt $s_0(n,1) = (n-1)!$. Eine Permutation vom Grad n mit $n-1$ disjunkten Zykeln besteht aus einer Transposition und $n-2$ Fixpunkten. Die Transpositionen entsprechen den 2-Kombinationen von n. Also gibt es $\binom{n}{2}$ derartige Transpositionen. Schließlich gibt es eine Permutation mit n Fixpunkten, die identische Abbildung $(1)(2)\ldots(n)$.

Die Menge aller Permutationen vom Grad n mit k disjunkten Zykeln wird in zwei Teilmengen zerlegt. Sei A die Menge aller Permutationen vom Grad n mit k disjunkten Zykeln, die n als Fixpunkt enthalten, und sei B die Menge der übrigen Permutationen vom Grad n mit k disjunkten Zykeln. Mit dem Additionsprinzip folgt $s_0(n,k) = |A| + |B|$.

Jeder Permutation in A wird durch Fortlassen des Fixpunkts n zu einer Permutation vom Grad $n-1$ mit $k-1$ disjunkten Zykeln. Dadurch ergibt sich eine Bijektion von A auf die Menge aller Permutationen vom Grad $n-1$ mit $k-1$ disjunkten Zykeln. Mit dem Gleichheitsprinzip folgt $|A| = s_0(n-1,k-1)$.

Jeder Permutation $\pi = \ldots(\ldots,i,n,j,\ldots)\ldots \in B$ wird ein Paar zugewiesen, bestehend aus dem Urbild i von n unter π und einer Permutation $\ldots(\ldots,i,j,\ldots)\ldots$ vom Grad $n-1$, die aus π durch Entfernen von n entsteht. Dadurch erhellt sich eine Bijektion von B auf das kartesischen Produkt von $\underline{n-1}$ und der Menge aller Permutationen vom Grad $n-1$ mit k disjunkten Zykeln. Mit dem Multiplikations- und Gleichheitsprinzip folgt $|B| = (n-1)\cdot s_0(n-1,k)$. □

Die *Stirling-Zahlen erster Art* sind gegeben durch

$$s(n,k) = (-1)^{n-k}s_0(n,k). \tag{10.13}$$

Für die Stirling-Zahlen erster Art gilt

$$s(n,k) = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^l\binom{n-1-l}{n-k+l}\binom{2n-k}{n-k-l}S(n-k+l,l), \tag{10.14}$$

wobei die $S(n,k)$ Stirling-Zahlen zweiter Art bezeichnen (Abs. 11.2).

Zykeltypen

Eine Permutation π vom Grad n hat den *Zykeltyp* $1^{k_1}2^{k_2}\ldots n^{k_n}$, wenn die Zykeldarstellung von π aus k_i Zykeln der Länge i besteht. Der Zykeltyp ist als symbolischer Ausdruck zu verstehen. Eine Permutation vom Zykeltyp $1^{k_1}2^{k_2}\ldots n^{k_n}$ hat den Grad

$$n = 1\cdot k_1 + 2\cdot k_2 + \ldots + n\cdot k_n \tag{10.15}$$

und die Anzahl ihrer Zykeln ist

$$k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n. \tag{10.16}$$

Beispiel 10.16. Die Permutationen vom Zykeltyp $1^1 2^1 3^0$ lauten (1)(23), (2)(13) und (3)(12).

Satz 10.17. *Die Anzahl der Permutationen vom Zykeltyp* $1^{k_1}2^{k_2}\ldots n^{k_n}$ *ist gleich*

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_n!1^{k_1}2^{k_2}\ldots n^{k_n}}. \tag{10.17}$$

Beweis. Die Permutationen vom Zykeltyp $1^{k_1}2^{k_2}\ldots n^{k_n}$ resultieren durch Füllen des untenstehenden Gerüsts mit den n-Permutationen von n

$$\overbrace{(\cdot)(\cdot)\ldots(\cdot)}^{k_1}\overbrace{(\cdot\cdot)(\cdot\cdot)\ldots(\cdot\cdot)}^{k_2}\overbrace{(\cdot\cdot\cdot)(\cdot\cdot\cdot)\ldots(\cdot\cdot\cdot)}^{k_3}\ldots$$

Nach Korollar 10.14 ist die Anzahl der n-Permutationen von n gleich $n!$. Dieselbe Permutation wird auf zwei Arten erhalten: Erstens, wenn Zykeln gleicher Länge vertauscht werden, wofür es $k_1!k_2!\ldots k_n!$ Möglichkeiten gibt. Zweitens, wenn die Elemente eines Zykels zyklisch verschoben werden, wofür $1^{k_1}2^{k_2}\ldots n^{k_n}$ Möglichkeiten existieren. □

Satz 10.18. *Die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen vom Grad n ist gleich*

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)!. \tag{10.18}$$

Beweis. Sei A die Menge aller Permutationen vom Grad n. Sei A_i die Menge derjeniger Permutationen vom Grad n, die $i \in \underline{n}$ als Fixpunkt enthalten. Die Menge aller fixpunktfreien Permutationen vom Grad n ist dann

$$A \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} A_i).$$

Sei I eine Teilmenge von $\underline{n}$. Die Menge aller Permutationen vom Grad n, die alle Elemente aus I invariant lassen, ist

$$\bigcap_{j\in I} A_j.$$

Diese Menge entspricht der Menge aller Permutationen von $\underline{n} \setminus I$, die nach Satz 10.14 die Mächigkeit $(n-|I|)!$ besitzt. Diese Zahl hängt nur von der Mächtigkeit von I ab. Deshalb die vereinfachte Siebformel 9.12 anwendbar ist, so dass für die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen von Grad n gilt

$$|A \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)| = n! + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)! = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)!\,.$$

□

10.5 Variationen

Variationen sind Permutationen mit Wiederholung. Ein Wort der Länge k über $\underline{n}$ wird eine k-*Variation* von n genannt.

Beispiel 10.19. Die 2-Variationen von 4 lauten 11, 12, 21, 13, 31, 14, 41, 22, 23, 32, 24, 42, 33, 34, 43 und 44.

Eine k-Variation $x_1x_2\ldots x_k$ von n entspricht einer Abbildung $f : \underline{k} \to \underline{n}$ mit $f(i) = x_i$ für $1 \leq i \leq k$, und umgekehrt. Die Menge aller k-Variationen von n ist also identisch mit der Menge aller Abbildungen von $\underline{k}$ nach $\underline{n}$.

Satz 10.20. *Die Anzahl der Abbildungen von $\underline{k}$ nach $\underline{n}$ ist gleich n^k.*

Beweis. Es gilt

$$|\underline{n}^{\underline{k}}| = |\underline{n}^k| = |\underline{n}|^k = n^k, \tag{10.19}$$

wobei die erste Identität aus Satz 6.10 und dem Gleichheitsprinzip folgt, während sich die zweite Gleichung aus Multiplikationsprinzip ergibt. □

Die Zahl n^k beschreibt die Anzahl der Möglichkeiten, k Elemente aus einer n-elementigen Menge auszuwählen, wobei jedes Element mehrfach ausgewählt werden darf und es auf die Reihenfolge der Elemente ankommt.

Eine k-Variation von n heißt vom *Typ* $1^{k_1}2^{k_2}\ldots n^{k_n}$, wenn sie k_i Buchstaben i enthält. Der Typ einer Variation ist ebenfalls als symbolisches Produkt zu verstehen. Für jede k-Variation vom Typ $1^{k_1}2^{k_2}\ldots n^{k_n}$ gilt

$$k = k_1 + \ldots + k_n. \tag{10.20}$$

Die Anzahl der k-Variationen vom Typ $1^{k_1}2^{k_2}\ldots n^{k_n}$ wird *Multinomialzahl* von k über $k_1, \ldots, k_n$ genannt, kurz

$$\binom{k}{k_1, k_2, \ldots, k_n}. \tag{10.21}$$

Satz 10.21. *Für natürliche Zahlen k, $k_1, \ldots, k_n$ mit $k = k_1 + \ldots + k_n$ gilt*

$$\binom{k}{k_1, k_2, \ldots, k_n} = \frac{k!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}. \tag{10.22}$$

Beweis. In einem Wort der Länge k können k_1 Buchstaben 1 auf $\binom{k}{k_1}$ Arten platziert werden. In den verbliebenen $k - k_1$ freien Stellen lassen sich k_2 Buchstaben 2 auf $\binom{k-k_1}{k_2}$ Arten platzieren. Auf diese Weise fortfahrend ergibt sich

$$\binom{k}{k_1, k_2, \ldots, k_n} = \binom{k}{k_1}\binom{k-k_1}{k_2}\cdots\binom{k-k_1-\ldots-k_{n-1}}{k_n}.$$

Daraus folgt mit Hilfe von (10.3) die Behauptung. □

Im Falle $n = 2$ werden aus Multinomialzahlen Binomialzahlen

$$\binom{k}{k_1, k_2} = \binom{k}{k_1} = \binom{k}{k_2}. \tag{10.23}$$

Die Multinomialzahl $\binom{k}{k_1,\ldots,k_n}$ beschreibt die Anzahl der Möglichkeiten, k Objekte, von denen jeweils $k_1, \ldots, k_n$ Objekte gleich sind, in beliebiger Reihenfolge anzuordnen.

Beispiel 10.22. Das Wort MISSISSIPPI entspricht dem Wort 12332332442, einer 11-Variation vom Typ $1^1 2^4 3^4 4^2$. Die Anzahl der Wörter, die sich mit den Buchstaben des Wortes MISSISSIPPI bilden lassen, korrespondiert zur Anzahl der 11-Variationen vom Typ $1^1 2^4 3^4 4^2$

$$\binom{11}{1, 4, 4, 2} = 34\,650.$$

Die Multinomialzahl $\binom{k}{k_1,\ldots,k_n}$ beschreibt die Anzahl der Abbildungen von $\underline{k}$ nach $\underline{n}$, in denen jeweils k_i Elemente aus $\underline{k}$ auf i abgebildet werden.

Beispiel 10.23. Die 4-Variationen vom Typ $1^2 2^1 3^1$ lauten 1123, 1132, 1213, 1231, 1312, 1321, 2113, 2131, 2311, 3112, 3121 und 3211. Diese Wörter entsprechen den Abbildungen $f : \underline{4} \to \underline{3}$, in denen jeweils zwei Elemente auf 1 und je ein Element auf 2 und 3 abgebildet werden. Die Anzahl dieser Abbildungen ist gleich

$$\binom{4}{2,1,1} = 12.$$

Selbsttestaufgaben

10.1. Ein Bauer kauft drei Kühe, zwei Schweine und vier Hennen von einem Händler, der sechs Kühe, fünf Schweine und acht Hennen anbietet. Wie viele Möglichkeiten der Auswahl hat der Bauer?

10.2. In einem Behälter befinden sich fünf weiße und sechs rote Kugeln. Wie viele Möglichkeiten gibt es, vier Kugeln zu ziehen, so dass zwei Kugeln weiß und zwei Kugeln rot sind?

10.3. Eine Studentin hat in einer Prüfung sechs von acht Fragen richtig zu beantworten. Wie viele Möglichkeiten gibt es, sechs dieser Fragen auszuwählen? Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn die Studentin die ersten drei Fragen richtig beantworten muss. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn die Studentin mindestens vier der ersten fünf Fragen korrekt beanworten soll.

10.4. Zeige, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$ und $m \geq 1$ gilt

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{m+i}{m} = \binom{m+n+1}{m+1}.$$

10.5. In einer Diskussionsrunde mit drei Jungen und zwei Mädchen sollen alle Jungen und Mädchen in einer Reihe sitzen. Wie viele Anordnungen gibt es, wenn beide Mädchen nebeneinander sitzen?

10.6. Bestimme die Anzahl der Wörter der Länge vier, die aus den Buchstaben des Wortes NUMERICAL gebildet werden können.

10.7. Wie viele Wörter können in der vorigen Aufgabe gebildet werden, wenn jedes Wort mit einem Konsonanten beginnen und enden soll?

10.8. Bestimme die Anzahl der Möglichkeiten, fünf große Bücher, vier mittelgroße Bücher und drei kleine Bücher auf einem Regal so anzuordnen, dass alle Bücher gleicher Größe nebeneinander stehen.

10.9. Beweise die Gleichung (10.14).

10.10. Aus einer n-elementigen Menge sind k Elemente auszuwählen mit bzw. ohne Berücksichtigung der Reihenfolge und mit bzw. ohne Wiederholung der Elemente. Gib die Anzahl in jedem der vier Fälle an.

10.11. Berechne die Anzahl der Wörter der Länge sechs, die aus den Buchstaben A, C, D, H, I und U ohne Wiederholung gebildet werden können, wobei die Wörter ICH und DU nicht als Teilwörter enthalten sein dürfen.

10.12. Wie viele Wörter können mit dem Wort HUGENOTTEN gebildet werden? Wie viele Wörter gibt es, die das Bigramm TT enthalten?

11

Partitionen

In diesem Kapitel wird die im letzten Kapitel begonnene Abzählungstheorie der klassischen Abbildungstypen mit Nebenbedingungen fortgesetzt.

11.1 Mengenpartitionen

Wachstumsbeschränkte Wörter

Ein Wort $x = x_1 \ldots x_n$ der Länge n über $\mathbb{N}$ heißt *wachstumsbeschränkt*, wenn

$$x_1 = 1 \quad \text{und} \quad x_i \leq \max\{x_1, \ldots, x_{i-1}\} + 1 \quad \text{für } 2 \leq i \leq n. \tag{11.1}$$

Beispiel 11.1. Die wachstumsbeschränkten Wörter der Länge 3 lauten 111, 112, 121, 122 und 123.

Eine Partition der Menge $\underline{n}$, die aus k Blöcken besteht, wird *k-Partition* von n genannt.

Beispiel 11.2. Die 2-Partitionen von 3 lauten $\{\{1\},\{2,3\}\}$, $\{\{2\},\{1,3\}\}$ und $\{\{3\},\{1,2\}\}$.

Satz 11.3. *Seien k und n natürliche Zahlen mit $1 \leq k \leq n$. Die k-Partitionen von n entsprechen den wachstumsbeschränkten Wörtern $x = x_1, \ldots, x_n$ der Länge n mit der Eigenschaft*

$$k = \max\{x_1, \ldots, x_n\}. \tag{11.2}$$

Beweis. Sei $P = \{P_1, \ldots, P_k\}$ eine k-Partition von $\underline{n}$. O.B.d.A. seien die Blöcke von P so nummeriert, dass $1 \in P_1$ und P_j die kleinste Zahl enthält, die in $P_1, \ldots, P_{j-1}$ nicht vorkommt. Einer solchen Partition P wird ein Wort $x = x_1 \ldots x_n$ wie folgt zugeordnet

$$x_i = j \quad :\Longleftrightarrow \quad i \in P_j. \tag{11.3}$$

Das so definierte Wort x ist nach Definition von P wachstumsbeschränkt und erfüllt die Bedingung (11.2). Diese Zuordnung liefert eine bijektive Abbildung von der Menge aller k-Partitionen von n auf die Menge aller wachstumsbeschränkten Wörter der Länge n mit der Eigenschaft (11.2). $\square$

Beispiel 11.4. Die Beziehung zwischen den Partitionen von 3 und den wachstumsbeschränkten Wörtern der Länge 3 zeigt folgende Tabelle

Partitionen	Wörter
$\{\{1,2,3\}\}$	111
$\{\{1\},\{2,3\}\}$	122
$\{\{1,2\},\{3\}\}$	112
$\{\{1,3\},\{2\}\}$	121
$\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$	123

Blockstruktur von Partitionen

Wir klassifizieren Partitionen hinsichtlich ihrer Blockstruktur. Eine k-Partition von n hat den *Typ* $1^{k_1}2^{k_2}\ldots n^{k_n}$, wenn sie k_i Blöcke der Mächtigkeit i enthält. Für jede k-Partition vom Typ $1^{k_1}2^{k_2}\ldots n^{k_n}$ gilt

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k \quad \text{und} \quad 1 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2 + \ldots n \cdot k_n = n. \tag{11.4}$$

Beispiel 11.5. Die Partitionen vom Typ $1^1 2^1 3^0$ sind $\{\{1\},\{2,3\}\}$, $\{\{2\},\{1,3\}\}$ und $\{\{3\},\{1,2\}\}$.

Satz 11.6. *Die Anzahl der k-Partitionen vom Typ $1^{k_1}2^{k_2}\ldots n^{k_n}$ ist gleich*

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_n(1!)^{k_1}(2!)^{k_2}\ldots(n!)^{k_n}}. \tag{11.5}$$

Beweis. Die k-Partitionen vom Typ $1^{k_1}2^{k_2}\ldots n^{k_n}$ werden erhalten durch Füllen des untenstehenden Gerüsts mit den n-Permutationen von n

$$\overbrace{|\cdot|\cdot|\ldots|\cdot|}^{k_1}\ \overbrace{|\cdot\cdot|\cdot\cdot|\ldots|\cdot\cdot|}^{k_2}\ \overbrace{|\cdots|\cdots|\ldots|\cdots|}^{k_3}\ldots$$

Nach Korollar 10.14 ist die Anzahl dieser Permutationen gleich $n!$. Dieselbe Partition entsteht auf zwei Arten. Erstens, wenn Blöcke gleicher Kardinalität vertauscht werden, wofür es $k_1!k_2!\ldots k_n!$ Möglichkeiten gibt. Zweitens, wenn die Elemente eines Blockes vertauscht werden, wofür $(1!)^{k_1}(2!)^{k_2}\ldots(n!)^{k_n}$ Möglichkeiten existieren. $\square$

Die Anzahl der Partitionen vom Typ $1^{k_1}2^{k_2}\ldots n^{k_n}$ beschreibt die Anzahl der Möglichkeiten, n unterscheidbare Kugeln auf k ununterscheidbare Behälter so zu verteilen, dass k_i Behälter jeweils i Kugeln enthalten.

11.2 Stirling-Zahlen

Stirling-Zahlen zweiter Art

Die Anzahl der k-Partitionen von n heißt *Stirling-Zahl zweiter Art* und wird mit $S(n,k)$ bezeichnet. Eine Partition von $\underline{n}$ kann höchstens n Blöcke enthalten. Also ist $S(n,k) = 0$, falls $k > n$.

Satz 11.7. *Für jede natürliche Zahl n gilt*

$$S(n,1) = 1 \quad \textit{und} \quad S(n,n) = 1. \tag{11.6}$$

Für alle natürlichen Zahlen n und k mit $1 < k < n$ gilt

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k). \tag{11.7}$$

Beweis. Die einzige 1-Partition von n ist $\{\underline{n}\}$ und eine einzige n-Partition von n ist $\{\{1\},\ldots,\{n\}\}$.

Die Menge aller k-Partitionen von n wird in zwei Teilmengen zerlegt. Sei A die Menge aller k-Partitionen von n, die $\{n\}$ enthalten, und sei B die Menge der übrigen k-Partitionen von n. Mit dem Additionsprinzip folgt $S(n,k) = |A| + |B|$.

Jedes Element $\{P_1,\ldots,P_{k-1},\{n\}\} \in A$ wird durch Fortlassen von $\{n\}$ zu einer $(k-1)$-Partition $\{P_1,\ldots,P_{k-1}\}$ von $n-1$. Diese Zuordnung liefert eine bijektive Abbildung von A auf die Menge aller $(k-1)$-Partitionen von $n-1$. Mit dem Gleichheitsprinzip folgt $|A| = S(n-1,k-1)$.

Jede k-Partition $P = \{P_1,\ldots,P_k\}$ von $n-1$ ist fortsetzbar zu n Partitionen $P^{(1)},\ldots,P^{(n)}$ von B, so dass in $P^{(i)}$ der Block P_i um das Element i erweitert wird. Die Zuordnung $(i,P) \mapsto P^{(i)}$ liefert eine bijektive Abbildung des kartesischen Produkts von $\underline{k}$ und der Menge aller k-Partitionen von $n-1$ auf die Menge B. Mit dem Multiplikations- und Gleichheitsprinzip folgt $|B| = k \cdot S(n-1,k)$. $\square$

Die Stirling-Zahl $S(n,k)$ beschreibt die Anzahl der Möglichkeiten, n unterscheidbare Kugeln auf k ununterscheidbare Behälter zu verteilen.

Bell-Zahlen

Die Anzahl der Partitionen einer n-elementigen Menge wird n-te *Bell-Zahl* genannt und mit $B(n)$ bezeichnet. Für jede natürliche Zahl n gilt

$$B(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k). \tag{11.8}$$

Die ersten fünf Bell-Zahlen lauten $B(1) = 1$, $B(2) = 2$, $B(3) = 5$, $B(4) = 15$ und $B(5) = 52$. Ferner wird $B(0) = 1$ gesetzt. Die Bell-Zahl $B(n)$ beschreibt nach den Sätzen 5.5 und 5.6 die Anzahl der Äquivalenzen auf einer n-elementigen Menge.

Satz 11.8. *Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt*

$$B(n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B(n-k). \tag{11.9}$$

Beweis. Sei k eine natürliche Zahl mit $1 \leq k \leq n$. Sei $T = \{i_1, \ldots, i_{k-1}, n\}$ eine k-Teilmenge von $\underline{n}$. Die Partitionen von $\underline{n}$, die T als Element enthalten, entsprechen den Partitionen von $\underline{n-k}$. Die Anzahl solcher Partitionen ist definitionsgemäß $B(n-k)$. Die Anzahl aller k-Teilmengen von $\underline{n}$, die n als Element besitzen, ist per definitionem $\binom{n-1}{k-1}$. Mit dem Multiplikationsprinzip folgt, dass $\binom{n-1}{k-1} \cdot B(n-k)$ die Anzahl der Partitionen von $\underline{n}$ beschreibt, die eine k-Teilmenge von $\underline{n}$ der Form $\{i_1, \ldots, i_{k-1}, n\}$ als Element enthalten. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Stirling-Zahlen erster und zweiter Art

Die Stirling-Zahlen erster und zweiter Art sind eng verknüpft.

Satz 11.9. *Für alle natürlichen Zahlen n und k mit $n \geq k$ gilt*

$$\sum_{l=k}^{n} S(n,l)s(l,k) = \sum_{l=k}^{n} s(n,l)S(l,k) = \delta_{n,k}, \tag{11.10}$$

wobei $\delta_{n,k}$ das Kronecker-Symbol bezeichnet

$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 1 \text{ falls } n = k, \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases} \tag{11.11}$$

Der Beweis wird durch vollständige Induktion nach n mithilfe der bewiesenen Formeln für die Stirling-Zahlen geführt. Um den Satz in der Sprache der Linearen Algebra zu formulieren, betrachten wir eine $n \times n$-Matrix A mit den Einträgen $S(i,j)$ und eine $n \times n$-Matrix B mit den Einträgen $s(i,j)$. Beide Matrizen sind untere Dreiecksmatrizen, denn im Falle $i < j$ gilt $S(i,j) = s(i,j) = 0$.

Korollar 11.10. *Für die Stirling-Matrizen A und B gilt $A = B^{-1}$.*

Surjektive Abbildungen

Satz 11.11. *Die Anzahl der surjektiven Abbildungen von $\underline{n}$ auf $\underline{k}$ ist gleich $k! \cdot S(n,k)$.*

Beweis. Jede k-Partition $P = \{P_1, \ldots, P_k\}$ von n definiert eine surjektive Abbildung $f_P : \underline{n} \to \underline{k}$ mit

$$f_P(x) = i \quad :\Longleftrightarrow \quad x \in P_i.$$

Die Komposition von f_P mit einer Permutation π vom Grad k liefert nach Satz 6.6 eine surjektive Abbildung $\pi f_P : \underline{n} \to \underline{k}$. Seien P und Q k-Partitionen von n und π und σ Permutationen vom Grad k. Aus $\pi f_P = \sigma f_Q$ folgt $P = Q$ und $\pi = \sigma$. Also gibt es nach dem Multiplikationsprinzip $k! \cdot S(n,k)$ surjektive Abbildungen der Form πf_P von $\underline{n}$ auf $\underline{k}$. Sei $f : \underline{n} \to \underline{k}$ eine surjektive Abbildung. Die Menge ihrer Urbilder, $P = \{f^{-1}(i) \mid i \in \underline{k}\}$, ist eine k-Partition von n mit $f = f_P$. □

Satz 11.12. *Die Anzahl der surjektiven Abbildungen von $\underline{n}$ auf $\underline{k}$ ist gegeben durch*

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n. \tag{11.12}$$

Beweis. Sei A die Menge aller Abbildungen von $\underline{n}$ nach $\underline{k}$. Sei A_i die Menge derjeniger Abbildungen von $\underline{n}$ nach $\underline{k}$, in deren Wertebereich das Element $i \in \underline{n}$ nicht enthalten ist. Die Menge aller surjektiven Abbildungen von $\underline{n}$ auf $\underline{k}$ ist dann gleich $A \setminus (\bigcup_{i=1}^{k} A_i)$. Sei I eine Teilmenge von $\underline{k}$. Die Menge aller Abbildungen f von $\underline{n}$ nach $\underline{k}$ mit $f(\underline{n}) \cap I = \emptyset$ ist $\bigcap_{j \in I} A_j$. Diese Menge entspricht der Menge aller Abbildungen von $\underline{n}$ in eine $(k - |I|)$-elementige Menge. Letztere Menge hat nach Satz 10.20 die Mächigkeit $(k - |I|)^n$. Diese Zahl hängt nur von der Mächtigkeit von I ab. Also ist die spezialisierte Siebformel 9.12 anwendbar, so dass für die Anzahl der surjektiven Abbildungen von $\underline{n}$ auf $\underline{k}$ gilt

$$|A \setminus (\bigcup_{i=1}^{k} A_i)| = k^n + \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n.$$

□

Die Stirling-Zahlen zweiter Art sind vermöge der Sätze 11.11 und 11.12 direkt berechenbar.

Korollar 11.13. *Für alle natürlichen Zahlen n und k mit $1 \leq k \leq n$ gilt*

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n. \tag{11.13}$$

11.3 Zahlpartitionen

Geordnete Zahlpartitionen

Ein Wort $x_1 x_2 \ldots x_k$ der Länge k über $\mathbb{N}$ heißt eine *geordnete k-Zahlpartition* von n, wenn $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$. Die Anzahl der geordneten k-Zahlpartitionen von n wird mit $p(n,k)$ bezeichnet. Es gilt $p(n,k) = 0$, falls $k > n$.

Beispiel 11.14. Die geordneten k-Zahlpartitionen von 5 lauten

k	geord. k-Zahlpartitionen von 5
1	5
2	14, 41, 23, 32
3	113, 131, 311, 122, 212, 221
4	1112, 1121, 1211, 2111
5	11111

Satz 11.15. *Für jede natürliche Zahl n gilt*

$$p(n,1) = 1 \quad \textit{und} \quad p(n,n) = 1. \tag{11.14}$$

Für alle natürlichen Zahlen n und k mit $1 < k < n$ gilt

$$p(n,k) = \binom{n-1}{k-1}. \tag{11.15}$$

Beweis. Die einzige geordnete 1-Zahlpartition von n ist n und die einzige geordnete n-Zahlpartition von n ist $11\ldots1$.

Sei $x = x_1x_2\ldots x_k$ eine geordnete k-Zahlpartition von n. Wir ordnen x ein Wort $y = y_1y_2\ldots y_{k-1}$ zu, wobei

$$y_i = x_1 + \ldots + x_i, \quad 1 \leq i \leq k-1.$$

Das Wort y ist eine $(k-1)$-Kombination von $n-1$, denn

$$1 \leq x_1 < x_1 + x_2 < \ldots < x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} = n - x_k \leq n-1.$$

Umgekehrt sei $y = y_1y_2\ldots y_{k-1}$ eine $(k-1)$-Kombination von $n-1$. Wir weisen y ein Wort $x = x_1x_2\ldots x_k$ zu, wobei

$$x_1 = y_1, \quad x_i = y_i - y_{i-1}, \quad \text{für } 2 \leq i \leq k-1, \quad \text{und} \quad x_k = n - y_{k-1}.$$

Dieses Wort x ist per definitionem eine geordnete k-Zahlpartition von n. Diese Zuordnungen sind invers zueinander. Sie liefern eine Bijektion zwischen der Menge aller geordneten k-Zahlpartition von n auf die Menge aller $(k-1)$-Kombination von $n-1$. Mit dem Gleichheitsprinzip ergibt sich die Behauptung. □

Beispiel 11.16. Die im Beweis des Satzes definierte Bijektion verdeutlicht die folgende Tabelle

geord. 3-Zahlpartition von 5	2-Kombination von 4
113	12
131	14
311	34
122	13
212	23
221	24

Die Zahl $p(n,k)$ beschreibt die Anzahl der Möglichkeiten, n ununterscheidbare Kugeln auf k unterscheidbare Behälter so zu verteilen, dass jeder Behälter mindestens eine Kugel enthält.

Ungeordnete Zahlpartitionen

Ein Wort $x_1x_2\ldots x_k$ der Länge k über $\mathbb{N}$ heißt eine *ungeordnete k-Zahlpartition* von n, wenn $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_k$ und $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$. Die Anzahl der ungeordneten k-Zahlpartitionen von n wird mit $P(n,k)$ bezeichnet. Es gilt $P(n,k) = 0$, falls $k > n$.

Beispiel 11.17. Die ungeordneten k-Zahlpartitionen von 5 lauten

k	ungeord. k-Zahlpartitionen von 5
1	5
2	14, 23
3	113, 122
4	1112
5	11111

Satz 11.18. *Für jede natürliche Zahl n gilt*

$$P(n,1) = 1 \quad \textit{und} \quad P(n,n) = 1. \tag{11.16}$$

Für alle natürlichen Zahlen n und k mit $1 < k < n$ gilt

$$P(n,k) = P(n-k,k) + P(n-1,k-1). \tag{11.17}$$

Beweis. Die einzige ungeordnete n-Zahlpartition von n ist $11\ldots1$ und die einzige ungeordnete 1-Zahlpartition von n ist n.

Die Menge aller ungeordneten k-Zahlpartitionen von n wird in zwei Teilmengen zerlegt. Sei A die Menge aller ungeordneten k-Zahlpartitionen von n, die nur Zahlen ≥ 2 enthalten, und sei B die Menge der übrigen ungeordneten k-Zahlpartitionen von n. Mit dem Additionsprinzip folgt $P(n,k) = |A| + |B|$.

Ein Wort $x_1x_2\ldots x_k \in A$ wird zu einer ungeordneten k-Zahlpartition $y_1y_2\ldots y_k$ von $n-k$, wenn von jedem x_i Eins subtrahiert wird, also $y_i = x_i - 1$. Diese Zuordnung liefert eine Bijektion von A auf die Menge aller ungeordneten k-Zahlpartitionen von $n-k$. Mit dem Gleichheitsprinzip ergibt sich $|A| = P(n-k,k)$.

Ein Wort $x_1x_2\ldots x_k \in B$ beginnt definitionsgemäß mit $x_1 = 1$ und wird zu einer ungeordneten $(k-1)$-Zahlpartition $x_2\ldots x_k$ von $n-1$, wenn x_1 weggelassen wird. Diese Zuordnung definiert eine bijektive Abbildung von B auf die Menge aller ungeordneten $(k-1)$-Zahlpartitionen von $n-1$. Mit dem Gleichheitsprinzip folgt $|B| = P(n-1,k-1)$. □

Die Zahl $P(n,k)$ spezifiziert die Anzahl der Möglichkeiten, n ununterscheidbare Kugeln auf k ununterscheidbare Behälter so zu verteilen, dass jeder Behälter wenigstens eine Kugel aufnimmt. Ferner läßt sich $P(n,k)$ als die Anzahl aller Möglichkeiten interpretieren, die Zahl n als Summe von k positiven ganzen Zahlen darzustellen.

Beispiel 11.19. Die Zahl 10 kann auf $P(10, 3) = 8$ Arten als Summe von drei positiven ganzen Zahlen geschrieben werden

$$\begin{aligned} 10 &= 1+1+8 = 1+2+7 = 1+3+6 = 1+4+5 \\ &= 2+2+6 = 2+3+5 = 2+4+4 = 3+3+4. \end{aligned}$$

Die Zählkoeffizienten $P(n, k)$ sind unter den behandelten Zählkoeffizienten die einzigen, für die keine explizite Berechnungsvorschrift bekannt ist.

Selbsttestaufgaben

11.1. Beweise den Satz 11.9.

11.2. Gegeben seien n Kugeln und r Fächer. Die Kugeln werden in die Fächer anhand einer Abbildung $f : \underline{n} \to \underline{r}$ platziert. Einerseits kann nach den Abbildungstypen klassifiziert werden, je nachdem, ob f injektiv, surjektiv oder bijektiv ist oder keine dieser Eigenschaften hat. Die Injektivität besagt, dass in jedes Fach höchstens eine Kugel kommt, die Surjektivität, dass mindestens eine Kugel in jedes Fach gelegt wird, und die Bijektivität, dass jedes Fach genau eine Kugel aufnimmt. Zum anderen kann danach klassifiziert werden, ob die Kugeln oder Fächer unterscheidbar oder ununterscheidbar sind. Diese Fragestellung führt auf insgesamt sechzehn Fälle, die in folgender Tabelle zusammengefasst sind:

	f beliebig	f injektiv	f surjektiv	f bijektiv
Kugeln gefärbt Fächer gefärbt				
Kugeln gefärbt Fächer einfarbig				
Kugeln einfarbig Fächer gefärbt				
Kugeln einfarbig Fächer einfarbig				

Trage die entsprechenden Anzahlen ein.