

529 | Dezember 1992

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Stefan Krüger

Instationäre Grenzschichteffekte an Tragflügelprofilen

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

Instationäre Grenzschichteffekte an Tragflügelprofilen

Stefan Krüger, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1992

ISBN: 3-89220-529-9

© Technische Universität Hamburg-Harburg
Schriftenreihe Schiffbau
Schwarzenbergstraße 95c
D-21073 Hamburg

<http://www.tuhh.de/vss>

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr. 529

Instationäre Grenzschichteffekte an Tragflügelprofilen

Stefan Krüger

Dezember 1992

Instationäre Grenzschichteffekte an Tragflügelprofilen

Dissertation
zur Erlangung des Grades
Doktor-Ingenieur
der Universität Hamburg

vorgelegt von

Stefan Krüger
aus Hamburg

Hamburg
Juli 1992

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als Wissenschaftlicher Mitarbeiter im Fachbereich *Strömungsmechanik und Schiffstheorie* am Institut für Schiffbau der Universität Hamburg bei Prof. Dr.-Ing. W. H. Isay. Durch seinen fachlichen Rat, seine Betreuung und insbesondere durch die stete Bereitschaft zur wissenschaftlichen Diskussion hat Herr Prof. Isay nicht nur die Entstehung dieser Arbeit an sich angeregt, sondern auch ihren Fortgang ganz wesentlich gefördert. Dafür spreche ich ihm an dieser Stelle meinen herzlichen Dank aus.

Hamburg, im Juli 1992

Stefan Krüger

Zusammenfassung

Es wird ein Verfahren zur Berechnung von laminarer Ablösung sowie Stabilität und Transition von instationären zweidimensionalen Grenzschichten angegeben. Die laminare Grenzschichtrechnung erfolgt mit einem instationär modifizierten Kármán-Pohlhausen-Verfahren. Die Lösung der instationär erweiterten Sommerfeld-Gleichung durch eine Galerkin-Approximation des instationären Eigenspektrums mittels Abspaltung der Zeitabhängigkeit liefert den Stabilitätspunkt der laminaren Lösung. Der Umschlagpunkt wird durch eine integrale Anfachungsrechnung unter Verwendung eines halbempirischen Transitionskriteriums ermittelt. Die Anwendung des vorgestellten Verfahrens auf instationäre Profilgrenzschichten liefert stets plausible Ergebnisse, in den wenigen Fällen, wo experimentelle Untersuchungen vorliegen, lassen sich die wesentlichen Effekte reproduzieren.

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Einleitung | 1 |
| 2 | Potentialtheorie für Profile | 5 |
| 2.1 | Stationärer Anteil | 5 |
| 2.2 | Instationärer Anteil | 7 |
| 3 | Laminare Grenzschichtlösungen | 9 |
| 3.1 | Grundgleichungen aus der Grenzschichttheorie | 9 |
| 3.1.1 | Integraler Impulssatz bei instationärer Strömung | 9 |
| 3.1.2 | Profilansatz | 10 |
| 3.1.3 | Instationäres Kármán–Pohlhausen–Verfahren | 11 |
| 3.2 | Grenzschichtparameter im Staupunkt | 14 |
| 3.2.1 | Grundsätzliches | 14 |
| 3.2.2 | Quasistationäre Grenzschichtparameter | 16 |
| 3.2.3 | Instationäre Grenzschichtparameter | 19 |
| 3.3 | Instationäres Ablösekriterium | 23 |
| 3.4 | Lösungsverfahren | 25 |
| 3.5 | Beispiele instationärer laminarer Grenzschichten | 28 |
| 3.5.1 | Instationäre Plattengrenzschicht | 28 |
| 3.5.2 | Instationäre Profilgrenzschicht | 30 |
| 3.5.2.1 | Profil J 105 | 30 |
| 3.5.2.2 | Profil NACA 16–012 | 31 |
| 4 | Stabilität und Transition | 39 |
| 4.1 | Allgemeines | 39 |
| 4.2 | Stabilitätstheorie stationärer Grenzschichten | 39 |
| 4.2.1 | Grundlagen der Stabilitätstheorie | 39 |
| 4.2.2 | Lösungsverfahren | 40 |
| 4.2.3 | Approximation des Eigenspektrums | 42 |
| 4.2.4 | Berechnung des Instabilitätspunktes für ein gegebenes Grenzschichtprofil | 44 |
| 4.2.5 | Grundlagen der zeitlichen e^n -Methode | 46 |
| 4.2.6 | Die Berechnung des Transitionspunktes mit einer vereinfachten e^n -Methode | 48 |
| 4.2.7 | Ergebnisse der stationären Theorie | 49 |
| 4.3 | Stabilitätstheorie instationärer Grenzschichten | 53 |
| 4.3.1 | Grundlagen der Stabilitätstheorie für instationäre Grenzschichten | 53 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4.3.2 | Approximation des Eigenspektrums | 54 |
| 4.3.3 | Stabilitätsverhalten instationärer Grenzschichten | 56 |
| 4.3.4 | Transition instationärer Grenzschichten | 59 |
| 5 | Instationäre Grenzschichteffekte | 63 |
| 5.1 | Profil J 105 | 63 |
| 5.2 | Profil NACA 16-012 | 68 |
| 6 | Ergebnisse der Theorie | 69 |
| | Symbolverzeichnis | 71 |
| | Literaturverzeichnis | 73 |

Kapitel 1

Einleitung

Schon seit langem ist bekannt, daß Grenzschichteffekte an umströmten Körpern die dort auftretenden Kräfte in hohem Maße beeinflussen. In den letzten Jahren konnte außerdem ein direkter Zusammenhang zwischen dem Kavitationsverhalten von Tragflügeln und dem Charakter der jeweiligen Profilgrenzschicht – insbesondere dem Phänomen der laminaren Ablösung – nachgewiesen werden ([4, 13, 22, 39]). Diese Untersuchungen waren meistens auf stationäre Strömungsvorgänge beschränkt. Viele technisch interessante Strömungsvorgänge haben jedoch einen ausgesprochen instationären Charakter, beispielsweise Schiffspropeller im Nachstrom, Helikopterrotoren, Strömungsvorgänge in Turbomaschinen und anderes mehr. Solche Vorgänge werden nun im allgemeinen unzureichend mit einer stationären Theorie beschrieben. Daher sind gerade in den letzten Jahren diese instationären Strömungsvorgänge eingehend untersucht worden; sowohl experimentell, als auch theoretisch.

Grundsätzlich lassen sich zwei wesentliche Grundtypen instationärer Strömungsvorgänge unterscheiden: Einmal führt der umströmte Körper selbst Bewegungen aus (Helikopterrotor, Flügelklappen, Anfahrvorgänge, etc.), oder der Körper wird von einer zeitlich veränderlichen Strömung beaufschlagt (Propellerflügel im Nachstrom, Druckschwankungen in Rohrleitungen, etc.).

Von besonderem technischen Interesse ist nun der klassische Fall einer Tragflügel-schwingung, bei der ein Tragflügel Drehschwingungen, Schlagschwingungen oder aber daraus kombinierte Bewegungsformen ausführt. Insbesondere die reine Drehschwingung von Tragflügeln wurde sehr eingehend untersucht, unter anderem auch deshalb, weil dieser Fall experimentell verhältnismäßig einfach realisierbar ist. Hierzu existieren daher sehr viele experimentelle Untersuchungen; teils über die Kräfte, die an derartig belasteten Tragflügelprofilen auftreten (z.B. [10, 53, 58, 11, 2]), teils über die Kavitationserscheinungen (z.B. [3, 13, 53, 40]). Einige Arbeiten (z.B. [23, 24, 6, 52]) beschäftigen sich mit theoretischen Ansätzen zur Beschreibung der instationären Effekte.

Das instationäre Grenzschichtverhalten war dahingehend weniger Gegenstand eingehender Untersuchungen, auch sind nur wenige experimentelle Untersuchungen instationärer Grenzschichten bekannt (z.B. [13]). Dies liegt nun einmal daran, daß die experimentelle Beobachtung instationärer Vorgänge außerordentlich schwierig ist. Außerdem erscheint eine instationäre Theorie von Grenzschichten sehr aufwendig, zumal man heutzutage mit zunehmender Leistungsfähigkeit der Computer mehr dazu übergeht, die Navier-Stokesschen Gleichungen direkt zu lösen. In der Praxis finden außerdem für derartige instationäre Strömungsvorgänge häufig einfache quasistationäre Verfahren Anwendung;

aus diesen Ergebnissen wird dann durch Korrelation auf die instationären Vorgänge geschlossen.

Tatsächlich sind jedoch immer noch viele Effekte, die speziell mit dem instationären Charakter der Grenzschicht tun haben, ungeklärt,¹ so daß man häufig auf parametrische Untersuchungen von Einzelphänomenen angewiesen sein wird. Daher erscheint es lohnenswert, eine spezielle instationäre Grenzschichttheorie zu entwickeln, die mit verhältnismäßig geringem Aufwand die wesentlichen Erscheinungen richtig wiedergibt und die ferner grundlegende Untersuchungen ermöglicht.

Die vorliegende Arbeit stellt nun ein solches Berechnungsverfahren für instationäre, zweidimensionale Grenzschichten vor. Der wichtigste Anwendungsbereich für zweidimensionale Rechenverfahren ist die Untersuchung von Tragflügeln mit dem Ziel der rechnerischen Voraussage von Ablöserscheinungen, denn diese haben nicht nur großen Einfluß auf die Druckverteilung am betrachteten Tragflügelprofil, sondern auch auf das Kavitationsverhalten. Dies gilt insbesondere für die laminare Ablösung, wobei an Tragflügelprofilen folgende Ablöseformen beobachtet werden ([22, 41]):

- In der Umgebung der Profilverderrkante entsteht eine kurze laminare Ablöseblase. Der Ablösevorgang selbst begünstigt dabei den Umschlag in den turbulenten Zustand, dadurch kommt es infolge des verstärkten Energieaustausches mit dem wandnahen Bereich häufig zum turbulenten Wiederanliegen der Grenzschicht, obwohl in der Außenströmung selbst ein positiver Druckgradient herrscht. Danach ist die Strömung voll turbulent; die Druckverteilung ändert sich gegenüber der Potentialströmung nur innerhalb eines kleinen Bereiches ([41]). Diese geschlossene laminare Ablöseblase hat ferner erheblichen Einfluß auf den Beginn des Kavitationseinsatzes, denn dieser ist durch beginnendes Instabilwerden von Gaskeimen gekennzeichnet, die sich in der durch Rückströmung gekennzeichneten Ablöseblase lange genug aufhalten können. So konnte gezeigt werden (z.B. [39]), daß der Beiwert des Kavitationseinsatzes bei Tragflügelprofilen in guter Näherung mit dem potentialtheoretischen Druckbeiwert an der Stelle der laminaren Ablösung übereinstimmt; vorausgesetzt, es kommt zu der oben beschriebenden Form der Ablösung.
- In manchen Fällen ist entweder der Druckanstieg der Strömung so stark (z. B. hoher Anstellwinkel), oder das Turbulenzniveau der Strömung ist derartig niedrig (z. B. bei sehr kleinen Reynoldszahlen), daß die Strömung entgegen dem positiven Druckgradienten nicht wieder anliegen kann; dann spricht man von einem Aufplatzen der laminaren Ablöseblase mit offener Totwasserbildung. In diesem Fall bricht der Auftrieb des Tragflügels praktisch zusammen. Dabei entsteht eine lange abgelöste Totwasserzone mit turbulenten Druckschwankungen, die ihrerseits zu einer Anregung und Aufweitung von Kavitationskeimen führen.
- Bei genügend hohen Reynoldszahlen kann die Grenzschicht vor Eintritt der laminaren Ablösung bereits in den voll turbulenten Zustand umgeschlagen sein. Es tritt dann keine Ablösung in der Nähe der Verderrkante auf, denn turbulente Grenzschichten sind aufgrund des höheren Energieaustausches mit dem wandnahen Bereich unempfindlicher für Ablösung als laminare. Die turbulente Grenzschicht kann dann in

¹Beispielsweise ist immer noch ungeklärt, unter welchen Voraussetzungen instationäre Grenzschichten ablösen, oder wann innerhalb solcher Grenzschichten Geschwindigkeiten auftreten können, die größer als die momentane Außenpotentialströmung sind.

der Nähe der Hinterkante ablösen. Auch hier beeinflussen die turbulenten Druckschwankungen das Kavitationsverhalten.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich nun ausschließlich mit den beiden erstgenannten Ablösungsformen, und zwar wird insbesondere untersucht, unter welchen Bedingungen instationäre laminare Ablösung auftreten kann, und unter welchen Bedingungen vorher der natürliche Umschlag in den turbulenten Zustand erfolgt, so daß diese beiden laminaren Ablöseformen nicht mehr auftreten können. Das für diese Untersuchungen entwickelte Rechenverfahren ist in der Lage, theoretisch diese instationären Grenzschichteffekte vorherzusagen.

Der Aufbau dieser Methode läßt sich im wesentlichen in vier Schritte unterteilen. Zuerst wird eine instationäre Potentialströmung um den Strömungskörper (im allgemeinen ein Tragflügelprofil) mit Hilfe der linearisierten Profiltheorie berechnet. Anschließend erfolgt eine Grenzschichtrechnung mit einem Näherungsverfahren, das die Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen auf integrale Weise löst. Dazu wurde das Grenzschichtverfahren von Kármán und Pohlhausen [37] in einer von Marzi [41] bezüglich des Profilansatzes modifizierten Form auf den Fall instationärer Belastungen erweitert. Die zugrunde liegende Theorie berücksichtigt insbesondere die zeitliche Änderung des Staupunktes. Neben den üblichen Grenzschichtparametern liefert das Verfahren vor allem die Stelle verschwindender Wandschubspannung als Funktion der Zeit. Ferner werden Kriterien aufgestellt, nach denen beurteilt werden kann, ob an diesem Punkt Ablösung stattfinden kann. Anschließend erfolgt eine Stabilitätsuntersuchung dieser laminaren Grundlösung mit einer Methode, welche die instationäre Sommerfeld-Gleichung mittels Abspaltung der Zeitabhängigkeit und Galerkin-Approximation des Eigenspektrums löst. Dieser Schritt liefert den Instabilitätspunkt bezüglich überlagerter Störwellen, die aus einzelnen Partialschwingungen zusammengesetzt sind. Diese neutralen Störungen werden stromabwärts des Instabilitätspunktes weiterverfolgt; und mit Hilfe einer integralen Anfachungsrechnung wird der theoretische Transitionspunkt bestimmt. Anhand der Lage von Transitionspunkt und laminarem Ablösepunkt lassen sich dann Rückschlüsse auf das Grenzschichtverhalten ziehen: Liegt der Transitionspunkt deutlich vor dem laminaren Ablösepunkt, dann erfolgt natürlicher Umschlag der Strömung in den turbulenten Zustand; die Strömung bleibt weiterhin anliegend. Ist der turbulente Zustand an der Stelle der prognostizierten laminaren Ablösung noch nicht voll ausgebildet, wird die Strömung dort laminar ablösen. Über den dabei entstehenden Grundtypus der Ablösung – also kurze Ablöseblase mit turbulentem Wiederanliegen oder Aufplatzen der Blase mit offenem Totwasser ([41]) – kann das instationäre Verfahren nur sehr vage Aussagen machen, weil hier im Gegensatz zum stationären Fall (z.B. [41, 15]) überhaupt keine Kriterien existieren.

Die Anwendung des vorgestellten Verfahrens auf instationäre Profilhrenzschichten liefert stets plausible Ergebnisse; in den wenigen Fällen, wo experimentelle Untersuchungen vorliegen, lassen sich die wesentlichen Effekte gut reproduzieren.

Kapitel 2

Potentialtheorie für Profile

Im folgenden werden einige wesentliche Formeln zur Berechnung der Potentialströmung für dünne Tragflügelprofile zusammengestellt, die in den weiteren Kapiteln – insbesondere bei der expliziten Berechnung der Grenzschichtparameter im Staupunkt – benötigt werden. Die instationäre Zusatzbelastung¹ soll hier auf den Fall der Drehschwingung als ein Beispiel für instationäre Potentialströmungen an Tragflügelprofilen beschränkt werden.

2.1 Stationärer Anteil

Betrachtet wird ein mäßig dickes und schwach gewölbtes Tragflügelprofil, dessen Profilschne im Bereich $-a \leq x \leq a$ mit der x -Achse zusammenfällt (vgl. Abb. 2.1). Wie in der Profiltheorie allgemein üblich, wird der Auftriebseffekt durch eine Wirbelbelegung $\gamma_s(x)$ modelliert, für die der klassische Ansatz nach Prandtl–Birnbaum (z.B. nach [50])

$$\frac{\gamma_s(x)}{2U_0} = A_0 \cot \frac{\vartheta}{2} + A_1 \sin \vartheta + A_2 \sin 2\vartheta + \dots \quad (2.1)$$

¹Im Rahmen der linearisierten Profiltheorie wird davon ausgegangen, daß die Potentialströmung aus je einem separaten stationären und instationären Anteil zusammengesetzt werden kann.

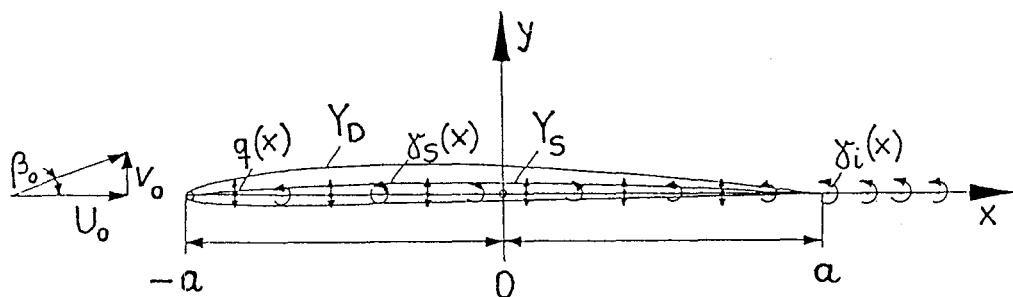


Abbildung 2.1: Koordinatensystem für die potentialtheoretischen Rechnungen

verwendet wird. Zwischen der Profilschnenkoordinate x und der trigonometrischen Variablen ϑ besteht dabei der Zusammenhang:

$$\begin{aligned} x &= -a \cos \vartheta, & -a \leq x \leq a, \\ 0 &\leq \vartheta \leq \pi & \text{(Saugseite)} \\ -\pi &\leq \vartheta \leq 0 & \text{(Druckseite)} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Die durch eine endliche Profildicke bedingte Verdrängungswirkung wird durch eine Quellen-Senkenbelegung $q(x)$ erfaßt, die mit der Dickenlinie des Profils $Y_D(x)$ durch die Relation

$$\frac{1}{U_0} q(x) = 2 \frac{dY_D(x)}{dx} \quad (2.3)$$

zusammenhängt. Für $q(x)$ wird der bereits der Schließungsbedingung

$$\int_{-a}^a q(x) dx = 0 \quad \text{bzw.} \quad \int_0^\pi q(\vartheta) d\vartheta = 0 \quad (2.4)$$

genügende Ansatz

$$\frac{q(x)}{2U_0} = B_0 \left(\cot \frac{\vartheta}{2} - 2 \sin \vartheta \right) + B_1 \left(\tan \frac{\vartheta}{2} - 2 \sin \vartheta \right) + B_2 \sin 2\vartheta + \dots \quad (2.5)$$

gemacht. Die Koeffizienten $B_{(i)}$ hängen dabei unmittelbar mit der Dickenlinie Y_D zusammen, so ergibt sich beispielsweise mit r_v als vorderem Nasenradius für B_0 die Relation:

$$2B_0 = \sqrt{\frac{r_v}{2a}} \quad (2.6)$$

Die Strömungsrandbedingung am Profil (tangente Strömung entlang der Skelettlinie) lautet mit β_s als Anstellwinkel:

$$\beta_s - \frac{dY_S}{dx} = \frac{1}{2\pi U_0} \int_{-a}^a \frac{\gamma_s(\xi) d\xi}{x - \xi} \equiv A_0 - A_1 \cos \vartheta - A_2 \cos 2\vartheta - \dots \quad (2.7)$$

Dann ergibt sich für den stationären Anteil der Tangentialgeschwindigkeit auf dem Profil:

$$\frac{U_s}{U_0} = \frac{1 + B_0(2 \cos \vartheta + 1) + B_1(2 \cos \vartheta - 1) - B_2 \cos 2\vartheta - \dots + A_0 \cot \frac{\vartheta}{2} + A_1 \sin \vartheta + \dots}{\sqrt{1 + (B_0(\cot \frac{\vartheta}{2} - 2 \sin \vartheta) + B_1(\tan \frac{\vartheta}{2} - 2 \sin \vartheta) + B_2 \sin 2\vartheta + \dots)^2}} \quad (2.8)$$

Der Nenner der Gl. 2.8 stellt den in der Profiltheorie allgemein bekannten Riegelsfaktor $1/\sqrt{1 + Y_D'^2}$ dar. Speziell in der Nähe der Vorderkante des Profils ($\vartheta \rightarrow 0$) ergibt sich aus Gl. 2.8 mit $\frac{U_s}{U_0} = 0$ die Lage des vorderen Staupunktes ϑ_{st} :

$$\vartheta_{st} = \frac{2A_0}{1 + 3B_0 + B_1 - B_2 - B_3 - \dots} \quad (A_0 = \beta_s \geq 0) \quad (2.9)$$

Die Umströmung der Vorderkante wird für $\vartheta = 0$:

$$\left(\frac{U}{U_0} \right)_{\vartheta=0} = \frac{A_0}{B_0} \quad (2.10)$$

2.2 Instationärer Anteil

Im folgenden wird der Fall zeitlich periodischer Strömungen kleiner Schwingungsamplitude mit der Grundkreisfrequenz ω betrachtet.² Der instationäre Anteil der Wirbeldichte γ_i wird in einer Fourierreihe der Form

$$\gamma_i(\xi, t) = \sum_{\mu=-M}^M \gamma_\mu(\xi) \cdot e^{i\mu\omega t} \quad (2.11)$$

angesetzt. Die linearisierte Strömungsrandbedingung an einer schwingenden Profilskelettlinie wird ebenfalls mittels einer Fourierreihe angenähert:

$$-\frac{\partial Y_S}{\partial t} - U_0 \frac{\partial Y_S}{\partial x} = U_0 \sum_{\mu=-M}^M \left(\sum_{\sigma=0}^{\infty} b_\sigma^{(\mu)} \cos(\sigma\vartheta) \right) e^{i\mu\omega t} \quad (2.12)$$

Wie in der instationären Tragflügeltheorie gezeigt wird ([28]), lautet die allgemeine Lösung für die einzelnen Funktionen γ_μ mit $k = \frac{\mu\omega a}{U_0}$ als reduzierter Frequenz und $H_m^{(2)}$ als Hankelscher Funktion zweiter Art:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_\mu(\tau)}{2U_0} &= \frac{b_0 H_1^{(2)}(k) + \frac{i}{2} b_1 H_0^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + i H_0^{(2)}(k)} \cot \frac{\tau}{2} - \left[b_1 - ik \left(b_0 - \frac{b_2}{2} \right) \right] \sin \tau - \\ &- \sum_{\sigma=2}^{\infty} \left[b_\sigma - \frac{i}{2\sigma} k (b_{\sigma-1} - b_{\sigma+1}) \right] \sin \sigma \tau \end{aligned} \quad (2.13)$$

Speziell für den Fall, daß das Profil Drehschwingungen um eine Achse $x = x_0$ bei zeitlich konstanter Anströmgeschwindigkeit in der Form

$$\frac{Y_S}{a} = -\frac{x - x_0}{a} \frac{c_0}{k} \sin \mu(\omega t + \zeta_0) \quad (2.14)$$

durchführt (wobei c_0 eine Amplitudenkonstante und ζ_0 eine Phase bedeuten), ergibt sich für die Fourierkoeffizienten b_σ in Gl. 2.13:

$$\begin{aligned} b_0 &= -\frac{c_0}{2} e^{i\mu\zeta_0} \left(\frac{x_0}{a} + \frac{i}{k} \right) \\ b_1 &= -\frac{c_0}{2} e^{i\mu\zeta_0} \\ b_\sigma &= 0 \quad \text{für } \sigma \geq 2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Für den instationären Zusatzanteil der Tangentialgeschwindigkeit entlang der Profilkontur ergibt sich daraus:

$$\frac{U_i(x, t)}{U_0} = \pm \frac{1}{2} \frac{\gamma_i(x, t)}{\sqrt{1 + Y_D'^2}} \quad (2.16)$$

In Gl. 2.16 gilt das positive Vorzeichen für die Saugseite, das negative für die Druckseite.

²Dabei wird vorausgesetzt, daß die instationären Lageveränderungen des Profils aufgrund der Bewegung vernachlässigt werden können. Des weiteren wird angenommen, daß die hinter dem Profil entstehenden freien Längswirbel mit der Anströmgeschwindigkeit U_0 abschwimmen.

Schließlich wird noch der Druckbeiwert an einem instationär belasteten Tragflügelprofil benötigt. Die Bernoullische Gleichung lautet unter Vernachlässigung des Anstellwinkelquadrates mit Φ_γ als Potential der Wirbeldichte:

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}U_0^2 = \frac{p}{\rho} + \frac{\partial\Phi_\gamma}{\partial t} + \frac{1}{2}U^2 \quad (2.17)$$

Dabei gilt für U :

$$U = U_0 \frac{1 + \frac{U_q}{U_0} + \frac{U_{\gamma s}}{U_0} + \frac{U_{\gamma i}}{U_0}}{\sqrt{1 + Y_D'^2}} \quad (2.18)$$

Die wirbelinduzierten Geschwindigkeiten lauten:

$$U_{\gamma s} = \pm \frac{1}{2}\gamma_s \quad U_{\gamma i} + \frac{1}{U_0} \frac{\partial\Phi_\gamma}{\partial t} = \pm \frac{1}{2}\gamma_i \quad (2.19)$$

Außerdem gilt:

$$\frac{\partial\Phi_\gamma}{\partial t} = \pm \frac{1}{2} \int_{-a}^x \frac{\partial}{\partial t} \gamma_i(\xi, t - \frac{x - \xi}{U_0}) d\xi \quad (2.20)$$

Dieser Term ist jedoch klein, insbesondere verschwindet er in der Nähe der Vorderkante bei $x \approx -a$. Aus Gl. 2.17, Gl. 2.18 und 2.19 ergibt sich für den Druckbeiwert:

$$\begin{aligned} c_p(x, t) &\equiv \frac{p_0 - p(x, t)}{\frac{\rho}{2}U_0^2} = -1 + \frac{1}{1 + Y_D'^2} \left(1 + \frac{U_q}{U_0} \pm \frac{\gamma_s}{2U_0} \pm \frac{\gamma_i}{2U_0} \right)^2 + \\ &+ \frac{2}{U_0^2} \frac{\partial\Phi_\gamma}{\partial t} - \frac{2}{U_0^2} \frac{\partial\Phi_\gamma}{\partial t} \frac{1}{1 + Y_D'^2} \left(1 + \frac{U_q}{U_0} \pm \frac{\gamma_s}{2U_0} \pm \frac{\gamma_i}{2U_0} \right) - \\ &- \frac{1}{1 + Y_D'^2} \left(\frac{1}{U_0^2} \frac{\partial\Phi_\gamma}{\partial t} \right)^4 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Der letzte Term auf der rechten Seite der Gl. 2.21 ist von höherer Ordnung klein und wird vernachlässigt, ferner kompensieren sich der dritte und vierte Term in etwa, so daß der Druckbeiwert schließlich lautet:

$$c_p(x, t) = -1 + \frac{1}{1 + Y_D'^2} \left(1 + \frac{U_q}{U_0} \pm \frac{\gamma_s + \gamma_i}{2U_0} \right)^2 \quad (2.22)$$

Kapitel 3

Laminare Grenzschichtlösungen

3.1 Grundgleichungen aus der Grenzschichttheorie

3.1.1 Integraler Impulssatz bei instationärer Strömung

Aus den bekannten Vereinfachungen der Navier–Stokes Gleichungen erhält man die instationären Grenzschichtgleichungen für den ebenen Fall:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.2)$$

Dabei beschreibt Gl. 3.1 den Impuls in x -Richtung; Gl. 3.2 stellt die Kontinuitätsgleichung dar. Mit der als bekannt vorausgesetzten Geschwindigkeitsverteilung der Potentialströmung $U(x, t)$ liefert die instationäre Bernoulli-Gleichung

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} \quad (3.3)$$

den der Grenzschicht aufgeprägten Druck. Damit ergibt sich aus Gl. 3.1:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u - U) + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - U \frac{\partial U}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.4)$$

Mit der Definition der Wandschubspannung τ_0 entsprechend

$$\mu(\partial u / \partial y)_{y=0} = \tau_0 \quad (3.5)$$

erhält man nach Einführen einer Grenzschichtdicke $\delta(x, t)$ durch Integration von Gl. 3.4 über den Bereich $0 \leq y \leq h$, wobei die Größe h konstant sein und über die Grenzschichtdicke hinausragen muß ([47], [50]), folgende Darstellung:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h (U - u) dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u(U - u) dy + \frac{\partial U}{\partial x} \int_0^h (U - u) dy = \frac{\tau_0}{\rho} \quad (3.6)$$

Mit den bekannten Darstellungen der Verdrängungs- und Impulsverlustdicke δ^* bzw. θ

$$U \delta^* = \int_0^\infty (U - u) dy \quad (3.7)$$

$$U^2\theta = \int_0^\infty u(U-u)dy \quad (3.8)$$

erhält man schließlich den instationären, integralen Impulssatz der Grenzschichttheorie:

$$\frac{\partial}{\partial t}(U\delta^*) + \frac{\partial}{\partial x}(U^2\theta) + U\frac{\partial U}{\partial x}\delta^* = \frac{\tau_0}{\rho} \quad (3.9)$$

3.1.2 Profilansatz

Im klassischen Kármán–Pohlhausen–Verfahren [37] wird für die Darstellung des Geschwindigkeitsprofils senkrecht zur Wand in Abhängigkeit vom dimensionslosen Wandabstand η ein viergliedriges Polynom verwendet:

$$\frac{u}{U} = a_1\eta + a_2\eta^2 + a_3\eta^3 + a_4\eta^4 \quad (\eta = \frac{y}{\delta}) \quad (3.10)$$

Dabei sind für die Bestimmung der freien Konstanten a_1 , a_2 , a_3 und a_4 die folgenden Randbedingungen vorgeschrieben, die auch von der exakten Lösung erfüllt werden müssen:

$$\begin{aligned} y = \delta : \quad & \frac{u}{U} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \\ y = 0 : \quad & \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial t} - U \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0 \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Nach Einführen des Formparameters λ , der als das Verhältnis von Druckkräften zu Reibkräften gedeutet werden kann, entsprechend

$$\lambda(x, t) = \frac{\delta^2}{\nu} \left(\frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\delta^2}{\nu U} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.12)$$

ergibt sich für die einzelnen Koeffizienten:

$$a_1 = 2 + \frac{\lambda}{6}, \quad a_2 = -\frac{\lambda}{2}, \quad a_3 = -2 + \frac{\lambda}{2}, \quad a_4 = 1 - \frac{\lambda}{6} \quad (3.13)$$

Da einerseits das auf diesem Ansatz aufgebaute klassische Kármán–Pohlhausen–Verfahren im Bereich des Druckabfalls befriedigende Ergebnisse liefert und andererseits – wie später gezeigt wird – der im folgenden angeführte Profilansatz grundsätzlich nicht im Bereich des Druckabfalls verwendet werden kann, wird für die beschleunigte Strömung stets der klassische viergliedrige Profilansatz nach Gl. 3.10 verwendet.

Bekanntermaßen wird das Verfahren für verzögerte Strömung unzuverlässig; insbesondere liegt der ermittelte Ablösepunkt zu weit stromabwärts. Daher wird für diesen Bereich ein erweiterter Profilansatz verwendet. Nach Marzi [41] hat sich für eine anliegende laminare Grenzschicht mit positivem Druckgradienten ohne Berücksichtigung einer etwa vorhandenen Wandkrümmung folgender Ansatz bewährt:

$$\frac{u}{U} = a_1\eta + a_2\eta^2 + a_3\eta^3 + a_4\eta^4 + a_5\eta^5 \quad (\eta = \frac{y}{\delta}) \quad (3.14)$$

Mit dem Formparameter λ ergibt sich dann für die einzelnen Koeffizienten des Geschwindigkeitsprofils:

$$a_1 = \frac{5}{3} + \frac{\lambda}{4}, \quad a_2 = -\frac{\lambda}{2}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = -\frac{5}{3} + \frac{\lambda}{2}, \quad a_5 = 1 - \frac{\lambda}{4} \quad (3.15)$$

Dieser Ansatz liefert das Verschwinden der Wandschubspannung, wenn der Formparameter λ den Wert $-20/3$ erreicht, wohingegen die Ablösestelle unter Verwendung des viergliedrigen Geschwindigkeitsprofils bei $\lambda = -12$ liegt. Im Bereich des Druckanstiegs wird also anstelle des viergliedrigen Geschwindigkeitsprofils stets dieser modifizierte Ansatz nach Marzi verwendet, wobei es dann für die praktische Rechnung darauf ankommt, eine geeignete Übergangszone festzulegen.

3.1.3 Instationäres Kármán–Pohlhausen–Verfahren

Im folgenden wird ein instationär modifiziertes Kármán–Pohlhausen–Verfahren entwickelt. Hierzu soll zunächst ein viergliedriges Geschwindigkeitsprofil gemäß Gl. 3.10 zugrunde gelegt werden. Die für den erweiterten Ansatz relevanten Formeln werden in diesem Abschnitt weiter unten angegeben. Aus Gl. 3.12 und Gl. 3.13 ergibt sich dann für die Geschwindigkeitsverteilung:

$$\begin{aligned} u &= U(2\eta - 2\eta^3 + \eta^4) + \frac{1}{6} \frac{\delta^2}{\nu} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} \right) (\eta - 3\eta^2 + 3\eta^3 - \eta^4) \\ &= U(2\eta - 2\eta^3 + \eta^4) - \frac{1}{6} \frac{\delta^2}{\nu} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} (\eta - 3\eta^2 + 3\eta^3 - \eta^4) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Durch Differentiation von Gl. 3.16 ergibt sich die Wandschubspannung τ_0 wie folgt:

$$\tau_0 = \rho \nu \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\rho \nu U}{\delta} \left(2 - \frac{\delta^2}{6\nu\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{U} \right) = \frac{\rho \nu U}{\delta} \left(2 + \frac{\lambda}{6} \right) \quad (3.17)$$

Ferner können die Verdrängungsdicke und die Impulsverlustdicke angegeben werden; sie ergeben sich aus Gl. 3.7 und Gl. 3.8 genau wie im stationären Verfahren zu:

$$\frac{\delta^*}{\delta} = 0.30000 - 0.00833\lambda, \quad (3.18)$$

$$\frac{\theta}{\delta} = 0.11746 - 0.00106\lambda - 0.00011\lambda^2 \quad (3.19)$$

Allerdings ist jetzt zu berücksichtigen, daß beide Größen auch noch von der Zeit abhängig sind. Damit kann der Impulssatz nach Gl. 3.9 in folgende Form gebracht werden:

$$\frac{\partial}{\partial x} (U^2\theta) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \delta^* = \frac{\tau_0}{\rho} - U \frac{\partial \delta^*}{\partial t} \quad (3.20)$$

Wie im stationären Verfahren wird außer dem in Gl. 3.12 definierten Formparameter λ die Größe κ eingeführt:

$$\kappa(x, t) = -\frac{1}{\rho} \frac{\theta^2}{\nu U} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.21)$$

Der Zusammenhang zwischen λ und κ ist dann – unabhängig von x und t – gegeben durch:

$$\frac{\kappa}{\lambda} = (0.11746 - 0.00106\lambda - 0.00011\lambda^2)^2 \quad (3.22)$$

Unter Verwendung von Gl. 3.3 nimmt Gl. 3.20 die Form an:

$$\frac{U\theta}{\nu} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\theta^2}{\nu} \left(2 + \frac{\delta^*}{\theta} \right) \frac{1}{U} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\tau_0}{\rho} \frac{\theta}{\nu U} - \frac{\theta}{\nu} \frac{\partial \delta^*}{\partial t} + 2 \frac{\theta^2}{\nu} \frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial t} \quad (3.23)$$

Wie im stationären Verfahren werden nun folgende Funktionen eingeführt:

$$f_1(\kappa) \equiv \frac{0.30000 - 0.00833\lambda}{0.11746 - 0.00106\lambda - 0.00011\lambda^2} = \frac{\delta^*}{\theta} \quad (3.24)$$

$$f_2(\kappa) \equiv \left(2 + \frac{\lambda}{6}\right) (0.11746 - 0.00106\lambda - 0.00011\lambda^2) = \frac{\tau_0}{\rho} \frac{\theta}{\nu U} \quad (3.25)$$

Diese Funktionen sind jetzt ebenfalls über die Größe κ von der Zeit abhängig. Mit

$$\delta^* = \theta \cdot f_1(\kappa) \quad (3.26)$$

ergibt sich dann aus Gl. 3.23

$$\frac{U}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\theta^2}{\nu} \right) + \kappa \cdot (2 + f_1(\kappa)) = f_2(\kappa) + \frac{\theta^2}{\nu} \frac{2}{U} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\theta^2}{\nu} \right) \cdot \frac{1}{2} f_1(\kappa) - \frac{\theta^2}{\nu} \frac{\partial f_1(\kappa)}{\partial t} \quad (3.27)$$

Mit der Walzschen Näherung

$$2f_2(\kappa) - 4\kappa - 2\kappa f_1(\kappa) \approx 0.47 - 6\kappa \quad (3.28)$$

wird dann unter Berücksichtigung von

$$\kappa = \frac{\theta^2}{\nu} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\theta^2}{\nu} \frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial t} \quad (3.29)$$

aus Gl. 3.23:

$$U \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\theta^2}{\nu} \right) = 0.47 - 6 \frac{\theta^2}{\nu} \frac{\partial U}{\partial x} - 2 \frac{\theta^2}{\nu} \frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial t} - f_1(\kappa) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\theta^2}{\nu} \right) - 2 \frac{\theta^2}{\nu} \frac{\partial f_1(\kappa)}{\partial t} \quad (3.30)$$

Gl. 3.30 kann auch in der Form geschrieben werden:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{U\theta^2}{\nu} \right) + \frac{U\theta^2}{\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x} \ln U^5 + \frac{2}{U^2} \frac{\partial U}{\partial t} \right) = 0.47 - f_1(\kappa) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\theta^2}{\nu} \right) - 2 \frac{\theta^2}{\nu} \frac{\partial f_1(\kappa)}{\partial t} \quad (3.31)$$

Gl. 3.31 wird als inhomogene lineare Differentialgleichung in $U\theta^2/\nu$ aufgefaßt. Die Lösung lautet mit der Anfangsbedingung im Staupunkt:

$$x = -x_{st}(t) : \quad U(x = -x_{st}(t), t) = 0 \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{U\theta^2}{\nu} &= \frac{1}{U^5(x, t)} \cdot e^{2 \frac{\partial}{\partial t} \int_{v(\xi, t)}^x \frac{d\xi}{v(\xi, t)}} \cdot \int_{-x_{st}(t)}^x \left(0.47 - f_1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\theta^2}{\nu} \right) - 2 \frac{\theta^2}{\nu} \frac{\partial f_1}{\partial t} \right) \cdot \\ &\cdot U^5(\xi, t) \cdot e^{-2 \frac{\partial}{\partial t} \int_{v(\xi, t)}^{\xi} \frac{d\xi}{v(\xi, t)}} \cdot d\xi \end{aligned} \quad (3.33)$$

Die Auswertung von Gl. 3.33 erfolgt nach einem iterativen Verfahren, wobei die zunächst unbekanntenen Zeitableitungen $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\theta^2}{\nu} \right)$ und $\frac{\partial f_1}{\partial t}$ – ausgehend von einer quasistationären

Lösung – iteriert werden. Eine weitere zweckmäßige Darstellung von Gl. 3.33 gewinnt man durch partielle Integration:

$$\begin{aligned}
\frac{U\theta^2}{\nu} &= \frac{1}{U^5(x,t)} \cdot \int_{\xi=-x_{st}(t)}^x \left(0.47 - f_1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\theta^2}{\nu} \right) - 2 \frac{\theta^2}{\nu} \frac{\partial f_1}{\partial t} \right) \cdot U^5(\xi, t) d\xi - \\
&- \frac{1}{U^5(x,t)} \cdot e^{2 \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{d\xi}{\nu(\xi,t)}} \cdot \int_{\xi=-x_{st}(t)}^x \left(\left(\int_{\zeta=-x_{st}(t)}^{\xi} \left(0.47 - f_1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\theta^2}{\nu} \right) - 2 \frac{\theta^2}{\nu} \frac{\partial f_1}{\partial t} \right) \right. \right. \\
&\left. \left. \cdot U^5(\zeta, t) d\zeta \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(e^{-2 \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{d\xi}{\nu(\xi,t)}} \right) \right) \cdot d\xi \quad (3.34)
\end{aligned}$$

Diese Darstellung läßt klar den Charakter des Verfahrens, nämlich iteratives Vorgehen, ausgehend von einer quasistationären Lösung, erkennen. In nullter Näherung gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\theta^2}{\nu} \right)_0 = 0; \quad \left(\frac{\partial f_1(\kappa)}{\partial t} \right)_0 = 0 \quad (3.35)$$

Damit wird aus Gl. 3.34:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{U\theta^2}{\nu} \right)_1 &= \frac{1}{U^5(x,t)} \int_{\xi=-x_{st}(t)}^x 0.47 U^5(x,t) d\xi - \frac{1}{U^5(\xi,t)} \cdot e^{2 \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{d\xi}{\nu(\xi,t)}} \cdot \\
&\cdot \int_{\xi=-x_{st}(t)}^x \left(\left(\int_{\zeta=-x_{st}(t)}^{\xi} 0.47 U^5(\zeta, t) d\zeta \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(e^{-2 \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{d\xi}{\nu(\xi,t)}} \right) \right) d\xi \quad (3.36)
\end{aligned}$$

Der erste Term entspricht dabei genau der stationären Theorie, mit $U = f(x, t)$ ist dies gerade ein quasistationärer Anteil. Der zweite Term kann als instationärer Zusatzanteil aufgefaßt werden, in dem jedoch der quasistationäre Anteil in seiner ursprünglichen Form als Teil des Integranden enthalten ist.

Schließlich sollen noch die notwendigen Modifikationen einiger Gleichungen angegeben werden, für den Fall, daß das erweiterte Geschwindigkeitsprofil gemäß Gl. 3.14 zugrunde gelegt wird. Dann lautet die Beziehung für die Wandschubspannung anstelle von Gl. 3.19:

$$\tau_0 = \frac{\rho \nu U}{\delta} \left(\frac{5}{3} + \frac{\lambda}{4} \right) \quad (3.37)$$

Aus Gl. 3.20 und Gl. 3.21 erhält man nun für Verdrängungs- und Impulsverlustdicke:

$$\frac{\delta^*}{\delta} = 0.33333 - 0.01667\lambda \quad (3.38)$$

$$\frac{\theta}{\delta} = 0.12426 - 0.00152\lambda - 0.00043\lambda^2 \quad (3.39)$$

Der Zusammenhang zwischen λ und κ lautet nun anstelle von Gl. 3.22:

$$\frac{\kappa}{\lambda} = (0.12426 - 0.00152\lambda - 0.00043\lambda^2)^2 \quad (3.40)$$

Die Funktionen f_1 und f_2 werden dann anstelle von Gl. 3.24 bzw. Gl. 3.25 durch die folgenden Zusammenhänge definiert:

$$f_1(\kappa) \equiv \frac{0.33333 - 0.01667\lambda}{0.12426 - 0.00152\lambda - 0.00043\lambda^2} = \frac{\delta^*}{\theta} \quad (3.41)$$

$$f_2(\kappa) \equiv \left(\frac{5}{3} + \frac{\lambda}{4} \right) (0.12426 - 0.00152\lambda - 0.00043\lambda^2) = \frac{\tau_0}{\rho} \frac{\theta}{\nu U} \quad (3.42)$$

Marzi [41] hat ferner gezeigt, daß die Walzsche Näherung gemäß Gl. 3.28 auch für den oben angegebenen erweiterten Ansatz genügend genau erfüllt ist.

3.2 Grenzschichtparameter im Staupunkt

3.2.1 Grundsätzliches

Die Grenzschichtrechnung nach den oben angeführten Gleichungen beginnt stets im Staupunkt $x = -x_{st}$. Für ein instationär belastetes Tragflügelprofil ist nun die Lage des Staupunktes von der Zeit abhängig, unter Verwendung der instationär modifizierten Vorderkantennäherung (vgl. Gl. 2.9, 2.18, 2.19 und 2.20)¹ ergibt sich:

$$\vartheta_{st} = \frac{2A_{0s} + 2A_{0i}e^{i\omega t} + 2\bar{A}_{0i}e^{-i\omega t}}{1 + 3B_0 + B_1 + \dots} \equiv \vartheta_{sts} + \vartheta_{sti} \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (3.43)$$

Dies bedeutet für eine instationäre Grenzschichtrechnung, daß in Gl. 3.33 und Gl. 3.34 eine zeitlich veränderliche untere Integrationsgrenze zu berücksichtigen ist. Außerdem erhält man dadurch – was, wie sich zeigen wird, wesentlich unangenehmer ist – zeitlich veränderliche Anfangswerte der Integration der Gl. 3.33 bzw. Gl. 3.34. Natürlich könnte man zunächst die zeitliche Änderung der Staupunktlage überhaupt nicht berücksichtigen und stattdessen z.B. für alle Zeitpunkte die Staupunktlage verwenden, die dem mittleren Anstellwinkel entspricht. Diese Vorgehensweise würde – wie zunächst durchgeführte quasistationäre Rechnungen ergeben haben – nur dann zu brauchbaren Ergebnissen führen, wenn die Ablösung stets in größerem Abstand hinter der Vorderkante eintritt und nicht stark oszilliert. Dies wäre jedoch eine bedeutende Einschränkung des Verfahrens. Abb. 3.1 zeigt beispielsweise die Ergebnisse der nullten Näherung der Gl. 3.33 für ein NACA 16-012 Profil mit mittlerem Anstellwinkel 6° , einer Anstellwinkelamplitude von 1° bei einer reduzierten Frequenz von 0.943 und einer Profil-Re-Zahl von $3 \cdot 10^5$. Aufgetragen sind für verschiedene Zeitpunkte innerhalb einer Periode die jeweiligen Staupunktlagen und die ermittelten Ablösepunkte der nullten Näherung; das Ablösekriterium ist gegeben durch $\kappa = -0.089$. Dabei wurde eine instationäre Geschwindigkeitsverteilung der Potentialströmung zugrunde gelegt; Abb. 3.2 zeigt den zugehörigen bezogenen Druckgradienten $\frac{2a}{\rho U_0^2} \frac{\partial p}{\partial x}$. Man erkennt deutlich, daß bei dieser Betrachtungsweise die ermittelte Ablöselinie im wesentlichen der instationären Staupunktbeziehung folgt; würde man diese lediglich – wie oben angedeutet – durch ihren Mittelwert berücksichtigen, dann ergäbe sich in diesem Fall praktisch eine zeitlich unveränderliche Lage der Ablösepunkte.

¹ Die Herleitung der Formeln für die instationären Zusatzanteile der Potentialströmung ([28, 38]) erfolgt unter der Voraussetzung, daß die freien Längswirbel mit der Anströmgeschwindigkeit U_0 abschwimmen. Diese Annahme ist jedoch gerade in der Nähe des Staupunktes nicht zutreffend, denn dort ist ja $U = 0$, so daß die Verwendung von Gl. 3.43 zumindest zweifelhaft ist; es wird später gezeigt werden, daß sich daraus erhebliche Konsequenzen für die Berechnung der Grenzschichtparameter im Staupunkt ergeben.

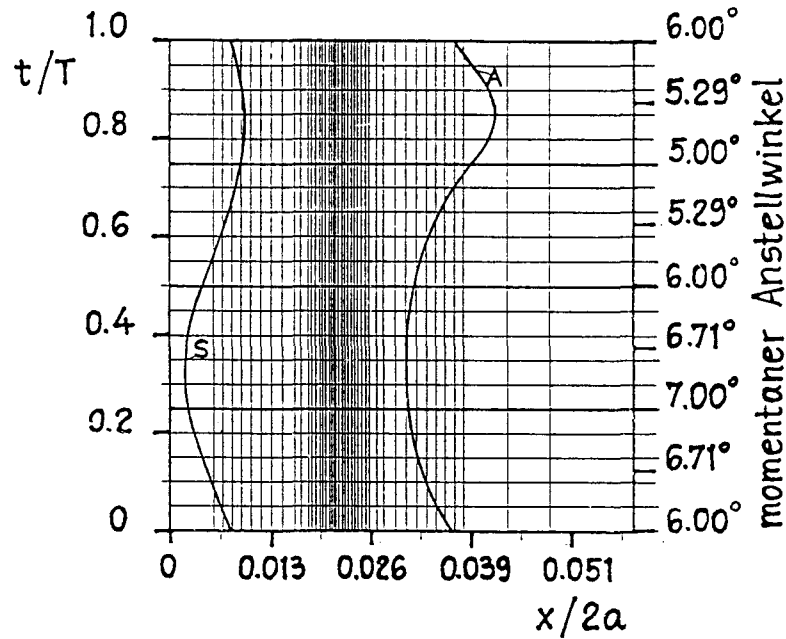


Abbildung 3.1: Staulinie (S) und Ablöselinie (A), 0. Iteration, NACA 16-012, $\beta_s = 6^\circ$, $\beta_i = 1^\circ$, $k = 0.943$, $Re = 3 \cdot 10^5$

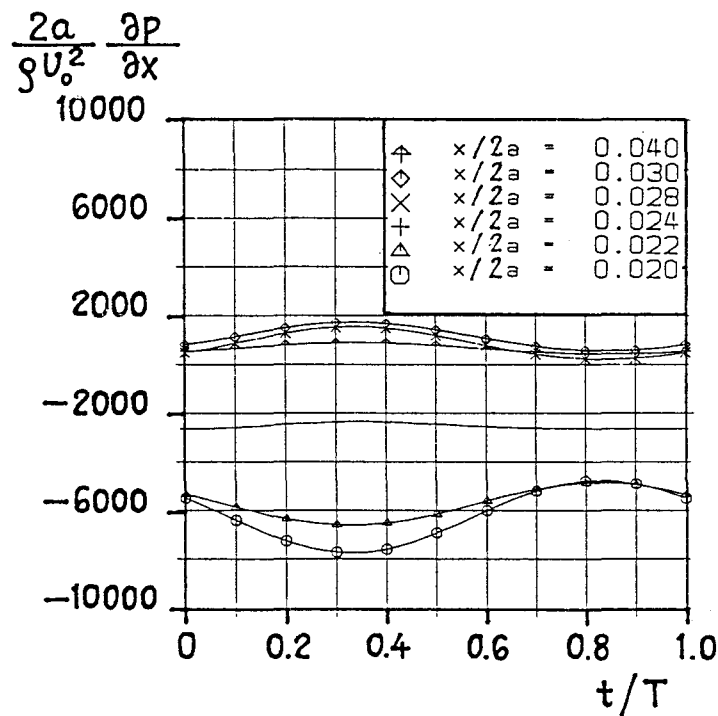


Abbildung 3.2: bezogener Druckgradient, NACA 16-012, $\beta_s = 6^\circ$, $\beta_i = 1^\circ$, $k = 0.943$, $Re = 3 \cdot 10^5$

Diese Überlegungen führen dazu, daß die zeitlich veränderliche Bewegung des Staupunktes berücksichtigt werden muß. Um den Rechenaufwand des Verfahrens gering zu halten, wird darauf verzichtet, ein zeitlich veränderliches Koordinatensystem einzuführen; als zeitfester Nullpunkt der Profilkordinate wird etwa die am weitesten auf der Profildruckseite befindliche Staupunktlage gewählt (z.B. $x_o = -0.015$ in Abb. 3.1). Daraus ergibt sich dann die Notwendigkeit, in Gl. 3.33 und Gl. 3.34 mit einer zeitlich variablen unteren Integrationsgrenze zu rechnen, wodurch sich dann folgende Komplikationen ergeben:

- Genau wie in der stationären Theorie muß für jeden Zeitschritt auf dieser Staulinie, die die untere Integrationsgrenze darstellt, der Anfangswert der Integration für die Größe (θ^2/ν) festgelegt werden.
- Zusätzlich muß für alle Zeitpunkte innerhalb dieses oszillierenden Staupunktgebietes eine geeignete Darstellung der Ausdrücke $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\theta^2}{\nu} \right)$ und $\frac{\partial f_1}{\partial t}$ gefunden werden. Sie können nicht einfach durch Differentiation entlang einer Linie $x = \text{const.}$ ermittelt werden, da diese mehrfach von der unteren Integrationsgrenze geschnitten wird.

In den folgenden Abschnitten werden für alle Grenzschichtparameter in der unmittelbaren Umgebung der unteren Integrationsgrenze analytische Formeln hergeleitet.

3.2.2 Quasistationäre Grenzschichtparameter

Als erstes muß der Anfangswert der Integration für die Größe (θ^2/ν) bestimmt werden. Dazu wird zunächst eine quasistationäre Betrachtungsweise diskutiert. Mit den aus der Potentialtheorie für Tragflügelprofile bekannten Transformationen geht man zu trigonometrischen Variablen über und erhält aus der Vorderkantennäherung (Gl. 2.9):²

$$\vartheta_{st} = \frac{2\beta}{1 + 3B_0}; \quad (\vartheta_{st} \geq 0) \quad (3.44)$$

Ferner ergibt sich im Rahmen dieser Näherung für die Potentialströmung in der Umgebung der Vorderkante:

$$U = U_0 \cdot \frac{(1 + 3B_0)\vartheta + 2\beta}{\sqrt{\vartheta^2 + 4B_0^2}} = U_0 \cdot \frac{(1 + 3B_0)(\vartheta + \vartheta_{st})}{\sqrt{\vartheta^2 + 4B_0^2}} \quad (3.45)$$

Für ein Profilbogenelement dx gilt der Zusammenhang:

$$dx = \sqrt{\vartheta^2 + 4B_0^2} \cdot a \cdot d\vartheta \quad (3.46)$$

Damit ergibt sich:

$$\frac{dU}{dx} = \frac{dU}{d\vartheta} \frac{d\vartheta}{dx} = \frac{U_0 (4B_0^2 - \vartheta\vartheta_{st})(1 + 3B_0)}{a (\vartheta^2 + 4B_0^2)^2} \quad (3.47)$$

Betrachtet man nur den stationären Anteil von Gl. 3.34, dann ergibt sich daraus unter Verwendung von Gl. 3.46 und 3.47:

$$\frac{U_0 \theta^2}{a \nu} = \frac{0.47 (\vartheta^2 + 4B_0^2)^3}{(1 + 3B_0)(\vartheta + \vartheta_{st})^6} \int_{\tau = -\vartheta_{st}}^{\vartheta} \frac{(\tau + \vartheta_{st})^5}{(\tau^2 + 4B_0^2)^2} d\tau \quad (3.48)$$

²In allen folgenden Formeln wird stets aus Gründen der Übersichtlichkeit der aus der Dickenverteilung des Profils stammende Term $(1 + 3B_0 + B_1 - B_2 + \dots)$ durch $(1 + 3B_0)$ abgekürzt.

Das Integral in Gl. 3.48 ist elementar auswertbar, man erhält:

$$\begin{aligned}
\int_{\tau=-\vartheta_{st}}^{\vartheta} \frac{(\tau + \vartheta_{st})^5}{(\tau^2 + 4B_0^2)^2} d\tau &= \frac{-\frac{1}{2}\vartheta^4 - \frac{5}{2}\vartheta_{st}\vartheta^3 - 5\vartheta_{st}^2\vartheta^2 - 5\vartheta_{st}^3\vartheta - \frac{5}{2}\vartheta_{st}^4}{\vartheta^2 + 4B_0^2} \\
&+ \frac{\frac{1}{2}\vartheta_{st}^4}{\vartheta_{st}^2 + 4B_0^2} + \frac{\vartheta_{st}^5\vartheta}{8B_0^2(\vartheta^2 + 4B_0^2)} + \frac{\vartheta_{st}^6}{8B_0^2(\vartheta_{st}^2 + 4B_0^2)} \\
&+ \left(\frac{\vartheta_{st}^5}{16B_0^3} + \frac{10\vartheta_{st}^3}{4B_0} - 15\vartheta_{st}B_0 \right) \left(\arctan \frac{\vartheta}{2B_0} + \arctan \frac{\vartheta_{st}}{2B_0} \right) \\
&+ (5\vartheta_{st} - 4B_0^2) \ln \left| \frac{\vartheta^2 + 4B_0^2}{\vartheta_{st}^2 + 4B_0^2} \right| \\
&+ \vartheta^2 + \frac{15}{2}\vartheta\vartheta_{st} - \frac{13}{2}\vartheta_{st}^2
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Für $\vartheta \neq -\vartheta_{st}$ kann mit Gl. 3.48 und Gl. 3.49 die Größe (θ^2/ν) ermittelt werden. Zur Berechnung des Anfangswertes der Integration für $\vartheta = -\vartheta_{st}$ werden die Variablen

$$\vartheta + \vartheta_{st} = \epsilon; \quad \tau + \vartheta_{st} = \xi; \quad d\xi = d\tau \tag{3.50}$$

eingeführt. Dann lautet der Grenzwert von Gl. 3.48 für $\vartheta = -\vartheta_{st}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{\vartheta \rightarrow -\vartheta_{st}} \frac{1}{(\vartheta_{st} + \vartheta)^6} \int_{\tau=-\vartheta_{st}}^{\vartheta} \frac{(\tau + \vartheta_{st})^5}{(\tau^2 + 4B_0^2)^2} d\tau &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^6} \int_0^{\epsilon} \frac{\xi^5 d\xi}{((\xi - \vartheta_{st})^2 + 4B_0^2)^2} \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^6} \int_0^{\epsilon} \frac{\xi^5 d\xi}{(4B_0^2 + \vartheta_{st}^2)^2 \left(1 - \frac{2\xi\vartheta_{st}}{\vartheta_{st}^2 + 4B_0^2}\right)^2} \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^6} \int_0^{\epsilon} \xi^5 \left(1 + 4\xi \frac{\vartheta_{st}}{\vartheta_{st}^2 + 4B_0^2}\right) \frac{d\xi}{(\vartheta_{st}^2 + 4B_0^2)^2} \\
&= \frac{1}{6} \frac{1}{(\vartheta_{st}^2 + 4B_0^2)^2}
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Unter Verwendung dieses Grenzwertes ergibt sich dann im Staupunkt:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{U_0 \theta^2}{a \nu} \right)_{\vartheta=-\vartheta_{st}} &= \frac{0.47 (\vartheta_{st}^2 + 4B_0^2)^3}{(1 + 3B_0)} \lim_{\vartheta \rightarrow -\vartheta_{st}} \frac{1}{(\vartheta_{st} + \vartheta)^6} \int_{\tau=-\vartheta_{st}}^{\vartheta} \frac{(\tau + \vartheta_{st})^5}{(\tau^2 + 4B_0^2)^2} d\tau \\
&= \frac{0.47 (\vartheta_{st}^2 + 4B_0^2)}{6 (1 + 3B_0)}
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Ferner ist es – wie sich noch zeigen wird – zweckmäßig, die Ableitung

$$\frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{U_0 \theta^2}{a \nu} \right)_{\vartheta=-\vartheta_{st}} = -\frac{31}{7} \frac{0.47\vartheta_{st}}{(1 + 3B_0)} \tag{3.53}$$

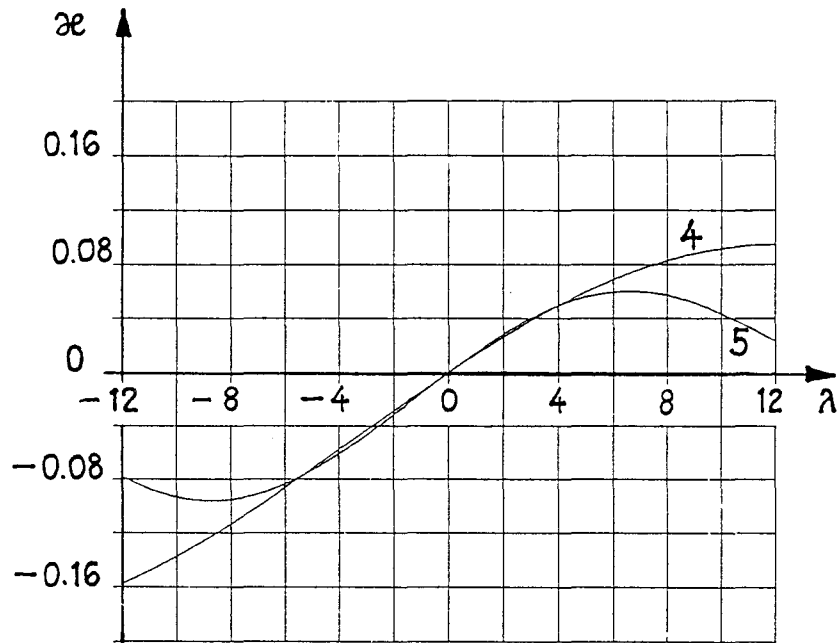


Abbildung 3.3: $\kappa = f(\lambda)$, für vier- (4) und fünfgliedrigen (5) Profilanatz

im Staupunkt anzugeben. Dabei wird außer Gl. 3.51 noch eine weitere Grenzwertbetrachtung ausgenutzt:

$$\lim_{\vartheta \rightarrow -\vartheta_{st}} \frac{1}{(\vartheta_{st} + \vartheta)^7} \int_{\tau = -\vartheta_{st}}^{\vartheta} \frac{(\tau + \vartheta_{st})^5}{(\tau^2 + 4B_0^2)^2} d\tau = \lim_{\vartheta \rightarrow -\vartheta_{st}} \frac{1}{6 (\vartheta_{st}^2 + 4B_0^2)^2 (\vartheta + \vartheta_{st})} + \frac{4}{7} \frac{\vartheta_{st}}{(\vartheta_{st}^2 + 4B_0^2)^3} \quad (3.54)$$

Aus diesen Überlegungen erhält man für den Formparameter κ :

$$\kappa = \frac{0.47 (\vartheta^2 + 4B_0^2) (4B_0^2 - \vartheta_{st}\vartheta)}{(\vartheta + \vartheta_{st})^6} \int_{\tau = -\vartheta_{st}}^{\vartheta} \frac{(\tau + \vartheta_{st})^5}{(\tau^2 + 4B_0^2)^2} d\tau \quad (3.55)$$

Unter Verwendung des in Gl. 3.51 angegebenen Grenzwertes ergibt sich dann im Staupunkt:

$$(\kappa)_{\vartheta = -\vartheta_{st}} = \left(\frac{0.47 (\vartheta^2 + 4B_0^2) (4B_0^2 - \vartheta_{st}\vartheta)}{6 (\vartheta^2 + 4B_0^2)^2} \right)_{\vartheta = -\vartheta_{st}} = 0.07833 \quad (3.56)$$

Dies entspricht in guter Näherung dem von Schlichting allgemein im Staupunkt [47] angegebenen Wert von $\kappa = 0.0770$. κ ist offenbar unabhängig von Profilkennwerten, nicht jedoch der Anfangswert von (θ^2/ν) , wie die oben angegebenen Formeln zeigen. Damit kann nun die in Abschnitt 3.1.2 aufgetretene Frage geklärt werden, wann welcher Profilanatz verwendet werden soll. In Abb. 3.3 ist der Zusammenhang zwischen den beiden

Formparametern κ und λ nach Gl. 3.22 bzw. Gl. 3.40 aufgetragen. Es zeigt sich dabei, daß der erweiterte Ansatz nach Marzi [41] maximal einen κ -Wert von etwa 0.060 darstellen kann, bei einem zugehörigen λ von etwa 6.5. Für $\lambda \geq 6.5$ treten innerhalb der Grenzschicht Geschwindigkeiten auf, die größer als die Außenpotentialströmung sind, was für stationäre Grenzschichten³ auf keinen Fall zutrifft. Demzufolge existiert für den im Staupunkt berechneten κ -Wert nach dem erweiterten Ansatz überhaupt kein λ ; ⁴ hier muß der viergliedrige Ansatz verwendet werden. Die beiden Funktionen sind jedoch im Bereich $0 \leq \lambda \leq 4$ praktisch identisch, für $\lambda = 4$ sind sie sogar gleich, so daß an dieser Stelle ein sinnvoller Übergangsbereich gegeben ist.

3.2.3 Instationäre Grenzschichtparameter

Der oben durchgeführte Formalismus wird nun auf den instationären Fall angewendet; und zwar geht man zunächst von der ersten Näherung der Gl. 3.33 aus, die Terme $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\theta^2}{\nu} \right)$ und $\frac{\partial f_1}{\partial t}$ sind dabei gleich 0 gesetzt. Für die zeitliche Änderung der Potentialströmung ergibt sich aus Gl. 3.45:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{dU}{d\vartheta_{st}} \frac{d\vartheta_{st}}{dt} = U_0 \frac{1 + 3B_0}{\sqrt{\vartheta^2 + 4B_0^2}} \dot{\vartheta}_{st} \quad (3.57)$$

Für den Exponenten der e -Funktion in Gl. 3.33 bzw. Gl. 3.34 erhält man:

$$\int^x \frac{d\xi}{U(\xi, t)} = \frac{a}{U_0(1 + 3B_0)} \left(\frac{1}{2}\vartheta^2 - \vartheta\vartheta_{st} + (\vartheta_{st}^2 + 4B_0^2) \ln |\vartheta + \vartheta_{st}| \right) \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int^x \frac{d\xi}{U(\xi, t)} = \frac{a\dot{\vartheta}_{st}}{U_0(1 + 3B_0)} \left(-\vartheta + 2\vartheta_{st} \ln |\vartheta + \vartheta_{st}| + \frac{\vartheta_{st}^2 + 4B_0^2}{\vartheta_{st} + \vartheta} \right) \quad (3.59)$$

Der Ausdruck in Gl. 3.59 enthält nun zwei singuläre Terme, eine logarithmische Singularität sowie einen Pol erster Ordnung. Für die folgende Betrachtung soll zunächst nur die höchste auftretende Singularität berücksichtigt werden, das ist gerade der Ausdruck $(\vartheta_{st}^2 + 4B_0^2)/(\vartheta_{st} + \vartheta)$. Unter Verwendung der Transformationen aus Gl. 3.50 wird dann das Grenzwertproblem für die Größe (θ^2/ν) im Staupunkt:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{U_0 \theta^2}{a \nu} \right) &= \frac{0.47}{1 + 3B_0} (\vartheta_{st}^2 + 4B_0^2)^3 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon^6} e^{\frac{2a\dot{\vartheta}_{st}}{U_0(1+3B_0)}} \frac{(\vartheta_{st}^2 + 4B_0^2)}{\epsilon} \right. \\ &\quad \left. \cdot \int_0^\epsilon \frac{\xi^5 \cdot e^{-\frac{2a\dot{\vartheta}_{st}}{U_0(1+3B_0)} \frac{(\vartheta_{st}^2 + 4B_0^2)}{\xi}}}{(\vartheta_{st}^2 + 4B_0^2 - 2\xi\vartheta_{st} + \xi^2)^2} d\xi \right) \end{aligned} \quad (3.60)$$

Mit der Abkürzung

$$\Lambda = \frac{2a\dot{\vartheta}_{st}}{U_0(1 + 3B_0)} (\vartheta_{st}^2 + 4B_0^2) \quad (3.61)$$

³Inwieweit dieses für instationäre Grenzschichten sinnvoll ist, wird in Kapitel 3.5.1 erörtert.

⁴Dies wurde auch schon von Schlichting und Ulrich [48] bei der Erweiterung des Verfahrens mit einem sechsgliedrigen Ansatz festgestellt.

ergibt sich aus Gl. 3.60:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{U_0}{a} \frac{\theta^2}{\nu} \right) = \frac{0.47}{1 + 3B_0} (\vartheta_{st}^2 + 4B_0^2) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon^6} e^{\frac{\Lambda}{\epsilon}} \cdot \int_0^{\epsilon} \frac{\xi^5 e^{-\frac{\Lambda}{\xi}}}{\left(1 - \frac{2\xi\vartheta_{st}}{\vartheta_{st}^2 + 4B_0^2} + \dots\right)^2} d\xi \right) \quad (3.62)$$

Setzt man ferner

$$\frac{\xi}{\epsilon} = \frac{1}{\tau^*}; \quad \frac{d\xi}{\epsilon} = -\frac{d\tau}{\tau^{*2}} \quad (3.63)$$

und betrachtet nur den wesentlichen Anteil von Gl. 3.62, dann ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(e^{\frac{\Lambda}{\epsilon}} \cdot \int_0^{\epsilon} \left(\frac{\xi}{\epsilon} \right)^5 e^{-\frac{\Lambda}{\xi}} \frac{d\xi}{\epsilon} \right) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(e^{\frac{\Lambda}{\epsilon}} \cdot \int_1^{\infty} \frac{e^{-\frac{\Lambda\tau^*}{\epsilon}} d\tau^*}{\tau^{*7}} \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_1^{\infty} \frac{e^{-\frac{\Lambda}{\epsilon}(\tau^*-1)} d\tau^*}{\tau^{*7}} \right) \end{aligned} \quad (3.64)$$

Aus Gl. 3.64 wird nun ersichtlich, daß dieser Grenzwert im instationären Fall nicht in physikalisch sinnvoller Weise existiert. Das Vorzeichen von Λ ist nach Gl. 3.61 gegeben durch die zeitliche Ableitung des Staupunktes ϑ_{st} . Für $\vartheta_{st} = 0$ ergibt sich gerade wieder der in Abschnitt 3.2.2 diskutierte stationäre Fall. $\vartheta_{st} > 0$ liefert als Grenzwert 0, für $\vartheta_{st} < 0$ wird dieser dagegen unendlich. Dieses physikalisch unbefriedigende Ergebnis hängt offenbar mit der Verwendung der instationären Vorderkantennäherung⁵ zusammen. Für die Berechnung des Grenzwertes für die Größe (θ^2/ν) im instationären Fall wird daher in der Nähe der Vorderkante folgende Approximation verwendet:

$$\frac{1}{U^2} \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{\rho U_m^2} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{2U_m^2} \frac{\partial U^2}{\partial x} \quad (3.65)$$

Dabei ist U_m eine willkürlich angenommene Geschwindigkeit, die in der Größenordnung der Anströmgeschwindigkeit U_0 liegen soll.⁶ Mit dieser Approximation ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} \frac{U_0}{a} \frac{\theta^2}{\nu} &= \frac{0.47}{1 + 3B_0} \frac{(\vartheta_{st}^2 + 4B_0^2)^3}{(\vartheta_{st} + \vartheta)^6} e^{\frac{2}{\rho U_m^2} p(\vartheta, t) + \frac{U^2(\vartheta, t)}{U_m^2}} \cdot \\ &\cdot \int_{\tau = -\vartheta_{st}}^{\vartheta} \frac{(\tau + \vartheta_{st})^5}{(\tau^2 + 4B_0^2)^2} e^{\frac{-2}{\rho U_m^2} p(\vartheta, t) - \frac{U^2(\vartheta, t)}{U_m^2}} d\tau \end{aligned} \quad (3.66)$$

Damit existiert der Grenzwert im Staupunkt, man erhält wie vorher:

$$\lim_{\vartheta \rightarrow -\vartheta_{st}} \left(\frac{U_0}{a} \frac{\theta^2}{\nu} \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{0.47}{1 + 3B_0} (\vartheta^2 + 4B_0^2)^3 e^{\frac{2p(-\vartheta_{st}, t)}{\rho U_m^2} + \frac{U_0^2}{U_m^2} \frac{(1+3B_0)^2 \epsilon^2}{4B_0^2 + (\epsilon - \vartheta_{st})^2}} \right)$$

⁵vgl. hierzu auch die Fußnote auf S. 14

⁶Die durchgeführte Rechnung wird später zeigen, daß das mit dieser Approximation erhaltene Ergebnis praktisch unabhängig von U_m ist, solange U_m etwa dieselbe Größenordnung wie U_0 hat, daher wird bei allen Rechnungen stets $U_m = U_0$ angenommen.

$$\begin{aligned}
& \cdot \left. \frac{1}{\epsilon^6} \int_0^\xi \xi^5 \cdot e^{\frac{-2p(-\vartheta_{st}, t)}{\rho U_m^2} - \frac{U_0^2}{U_m^2} \frac{(1+3B_0)^2 \xi^2}{4B_0^2 + (\xi - \vartheta_{st})^2}} d\xi \right) \\
& = \frac{0.47 (\vartheta_{st}^2 + 4B_0^2)}{6 (1 + 3B_0)} \quad (3.67)
\end{aligned}$$

Wie im quasistationären Fall soll die Größe (θ^2/ν) auch in der unmittelbaren Umgebung des Staupunktes für $\vartheta \neq -\vartheta_{st}$ angegeben werden. Mit

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} = \frac{\partial U}{\partial t} \frac{dx}{d\vartheta} + U \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \quad (3.68)$$

und den folgenden Ausdrücken

$$U \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_0^2 (1 + 3B_0)^2 (\vartheta + \vartheta_{st}) (4B_0^2 - \vartheta \vartheta_{st})}{a \sqrt{\vartheta^2 + 4B_0^2}^5} \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = U_0 \frac{(1 + 3B_0) \dot{\vartheta}_{st}}{\sqrt{\vartheta^2 + 4B_0^2}} \quad (3.70)$$

ergibt sich für den Druckgradienten:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = U_0 \frac{(1 + 3B_0) \dot{\vartheta}_{st}}{\sqrt{\vartheta^2 + 4B_0^2}} + \frac{U_0^2 (1 + 3B_0)^2 (\vartheta + \vartheta_{st}) (4B_0^2 - \vartheta \vartheta_{st})}{a \sqrt{\vartheta^2 + 4B_0^2}^5} \quad (3.71)$$

Unter Verwendung von Gl. 3.46 ergibt sich nach Integration über ϑ :

$$-\frac{1}{\rho} p(\vartheta, t) = a U_0 (1 + 3B_0) \dot{\vartheta}_{st} \vartheta + \frac{1}{2} U_0^2 \frac{(1 + 3B_0)^2 (\vartheta + \vartheta_{st})^2}{4B_0^2 + \vartheta^2} \quad (3.72)$$

Als Abkürzung wird eingeführt:

$$\Psi = \frac{2U_0}{U_m^2} (1 + 3B_0) a \dot{\vartheta}_{st} \quad (3.73)$$

Damit wird schließlich die gesuchte Größe (θ^2/ν) :

$$\frac{U_0}{a} \frac{\theta^2}{\nu} = \frac{0.47}{(1 + 3B_0)} \frac{(\vartheta_{st}^2 + 4B_0^2)^3}{(\vartheta + \vartheta_{st})^6} e^{-\Psi \vartheta} \int_{\tau = -\vartheta_{st}}^{\vartheta} \frac{(\tau + \vartheta_{st})^5}{(\tau^2 + 4B_0^2)^2} e^{\Psi \tau} d\tau \quad (3.74)$$

Für die praktische Auswertung von Gl. 3.74 ist es zweckmäßig, die e -Funktion im Integranden in eine Reihe zu entwickeln:

$$e^{\Psi \tau} = 1 + \Psi \tau + \frac{1}{2} \Psi^2 \tau^2 + \dots \quad (3.75)$$

Damit ergeben sich zu Gl. 3.49 folgende instationäre Zusatzanteile für die Größe (θ^2/ν) :

$$\frac{0.47 (\vartheta^2 + 4B_0^2)^3}{(1 + 3B_0) (\vartheta + \vartheta_{st})^6} e^{\Psi \vartheta} \int_{\tau = -\vartheta_{st}}^{\vartheta} \frac{(\tau + \vartheta_{st})^5 \Psi \tau}{(\tau^2 + 4B_0^2)^2} d\tau = \left(\frac{0.47 \Psi (\vartheta^2 + 4B_0^2)^3}{(1 + 3B_0)} e^{\Psi \vartheta} \right).$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left[\frac{\frac{1}{2}(\tau + \vartheta_{st})^5 + \frac{5}{6}\tau^5 + \frac{10}{3}B_0^2\tau^3}{\tau^2 + 4B_0^2} + \left(20B_0^3 - 30B_0\vartheta_{st}^2 + \frac{5}{4}\frac{\vartheta_{st}^4}{B_0} \right) \arctan \frac{\tau}{2B_0} + \right. \\
& \left. + (5\vartheta_{st}^3 - 20B_0^2\vartheta_{st}) \ln |\tau^2 + 4B_0^2| + 5\vartheta_{st}\tau^2 + 15\vartheta_{st}^2\tau - 10B_0^2\tau \right]_{\tau=-\vartheta_{st}}^{\vartheta} \quad (3.76)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{0.47(\vartheta^2 + 4B_0^2)^3}{(1 + 3B_0)(\vartheta + \vartheta_{st})^6} e^{\Psi\vartheta} \int_{\tau=-\vartheta_{st}}^{\vartheta} \frac{(\tau + \vartheta_{st})^5 \frac{\Psi^2}{2}\tau^2}{(\tau^2 + 4B_0^2)^2} d\tau = \left(\frac{0.47\Psi^2(\vartheta^2 + 4B_0^2)^3}{2(1 + 3B_0)} e^{\Psi\vartheta} \right) \cdot \\
& \cdot \left[\frac{\frac{1}{4}\tau^6 + 3B_0^2\tau^4 + \frac{5}{3}\tau^5\vartheta_{st} - 5\tau^4\vartheta_{st}^2 - 5\tau^3\vartheta_{st}^3 - \frac{5}{2}\tau^2\vartheta_{st}^4 - \frac{1}{2}\tau\vartheta_{st}^5 + \frac{50}{3}B_0^2\tau^3\vartheta_{st}}{\tau^2 + 4B_0^2} + \right. \\
& + \left(100\vartheta_{st}B_0^3 - 30\vartheta_{st}^3B_0 + \frac{1}{4B_0}\vartheta_{st}^5 \right) \arctan \frac{\tau}{2B_0} + \\
& + \left(24B_0^4 - 40\vartheta_{st}^2B_0^2 + \frac{5}{2}\vartheta_{st}^4 \right) \ln |\tau^2 + 4B_0^2| - \\
& \left. - 6B_0^2\tau^2 - 50B_0^2\vartheta_{st}\tau + 10\vartheta_{st}^2\tau^2 + 15\vartheta_{st}^3\tau \right]_{\tau=-\vartheta_{st}}^{\vartheta} \quad (3.77)
\end{aligned}$$

Abschließend sollen noch die verbleibenden zeitlichen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\theta^2}{\nu} \right)$ und $\frac{\partial f_1}{\partial t}$ entwickelt werden. Dabei gilt – wie schon gezeigt wurde – für den Operator $\frac{\partial}{\partial t}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \dot{\vartheta}_{st} \cdot \frac{d}{d\vartheta_{st}} \quad (3.78)$$

Speziell für $\vartheta = -\vartheta_{st}$ ergibt sich nach Differentiation von Gl. 3.48:

$$\frac{U_0}{a} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\theta^2}{\nu} \right)_{\vartheta=-\vartheta_{st}} = -0.04476 \frac{\vartheta_{st}\dot{\vartheta}_{st}}{(1 + 3B_0)} \quad (3.79)$$

Für die zeitliche Änderung der Funktion f_1 im Staupunkt erhält man zunächst:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} f_1 \right)_{\vartheta=-\vartheta_{st}} = \left(\frac{df_1}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\kappa} \frac{d\kappa}{d\vartheta_{st}} \cdot \dot{\vartheta}_{st} \right)_{\vartheta=-\vartheta_{st}} \quad (3.80)$$

Die Differentiation von Gl. 3.55 liefert:

$$\left(\frac{\partial \kappa}{\partial \vartheta_{st}} \right)_{\vartheta=-\vartheta_{st}} = 0.03357 \frac{\vartheta_{st}\dot{\vartheta}_{st}}{\vartheta_{st}^2 + 4B_0^2} \quad (3.81)$$

Ferner gewinnt man nach Differentiation aus Gl. 3.22 und Gl. 3.24 im Staupunkt

$$\left(\frac{d\lambda}{d\kappa} \right)_{\vartheta=-\vartheta_{st}} = 141.366 \quad (3.82)$$

und:

$$\left(\frac{df_1}{d\lambda} \right)_{\vartheta=-\vartheta_{st}} = -0.02206 \quad (3.83)$$

Damit erhält man schließlich für die zeitliche Änderung der Funktion f_1 an der Stelle $\vartheta = -\vartheta_{st}$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} f_1 \right)_{\vartheta = -\vartheta_{st}} = -0.10469 \frac{\vartheta_{st} \dot{\vartheta}_{st}}{\vartheta_{st}^2 + 4B_0^2} \quad (3.84)$$

Für $\vartheta \neq -\vartheta_{st}$ ergeben sich die entsprechenden Ausdrücke durch Anwenden von Gl. 3.78 auf die Gln. 3.49, 3.76 und 3.77 nach demselben Formalismus, es wird jedoch darauf verzichtet, diese umfangreichen Formeln hier anzugeben.

3.3 Instationäres Ablöse Kriterium

Die Frage, unter welchen Bedingungen bei instationären, laminaren Grenzschichten Ablösung eintritt, ist in der Literatur ausführlich diskutiert worden (z.B. [42, 46, 51, 11, 56, 6, 14, 36]), ohne daß sich daraus jedoch ein definitiv verwendbares Ablöse Kriterium im Sinne des hier vorgestellten Verfahrens ableiten ließe. Sicher scheint lediglich zu sein, daß der in der stationären Theorie verwendete Ansatz, nämlich das Verschwinden der Wandschubspannung, im instationären Fall lediglich ein notwendiges, nicht aber hinreichendes Kriterium darstellt. Bei den instationären Grenzschichten kommt hinzu, daß der Ablösepunkt zeitlich veränderlich ist, er bewegt sich bei den hier betrachteten periodischen Vorgängen sowohl stromaufwärts als auch stromabwärts. Offenbar muß diese Bewegung des Ablösepunktes bei der Formulierung eines instationären Ablöse Kriteriums berücksichtigt werden. Auf einer Arbeit von Rott [46] aufbauend, formulierten Sears [51] und Moore [42] als Ablöse Kriterium, daß instationäre Ablösung gekennzeichnet sei durch das Erreichen der Wandschubspannung $\tau_0 = 0$ und dem gleichzeitigen Verschwinden der Geschwindigkeit an einer Stelle y innerhalb der Grenzschicht relativ zu dem sich bewegenden Ablösepunkt. Dadurch ergeben sich prinzipiell unterschiedliche Geschwindigkeitsprofile an der Ablösestelle, je nachdem ob der Ablösepunkt gerade stromaufwärts oder stromabwärts wandert. Abb. 3.4 zeigt schematisch diese Geschwindigkeitsprofile an der Ablösestelle nach Moore ([42]), die durchgezogenen Linien sollen die instationären Profile im Ablösepunkt darstellen, die gestrichelten Linien zeigen die Profile bei stationärer Ablösung. Nach diesem Modell können offensichtlich stromaufwärts der laminaren Ablösestelle Rückströmungen auftreten, nämlich dann, wenn sich der Ablösepunkt ebenfalls stromaufwärts bewegt. Praktisch jedoch ergibt sich bei der rechnerischen Anwendung dieses Modells die Schwierigkeit, daß man die Bewegungsgeschwindigkeit des zunächst unbekanntes Ablösepunktes mit in die Formulierung der Ablösebedingung mit aufnehmen muß. Dieses Modell wurde außerdem von Williams und Johnson ([59, 60] behandelt. Geißler, Carr und Cebeci ([24]) haben diesen Ansatz dahingehend modifiziert, daß Ablösung durch das Verschwinden der Wandschubspannung bei gleichzeitigem Auftreten der maximalen Rückströmung gekennzeichnet ist.

Andere Rechenmodelle ([56, 6, 57]) nehmen an, daß instationäre Ablösung auftritt, wenn die Wandschubspannung den Wert 0 unterschreitet und gleichzeitig die Rechnung wegen des Auftretens einer Singularität zusammenbricht. Dies ist jedoch physikalisch unklar.

Zu ganz anderen Ergebnissen kommen Despard und Miller ([11]) aufgrund von Experimenten an einem durch wellenförmige Anströmung instationär belasteten Tragflügel. Demnach sei der instationäre Ablösepunkt identisch mit dem am weitesten stromaufwärts gelegenen Punkt, an dem die Wandschubspannung verschwindet, betrachtet über eine Pe-

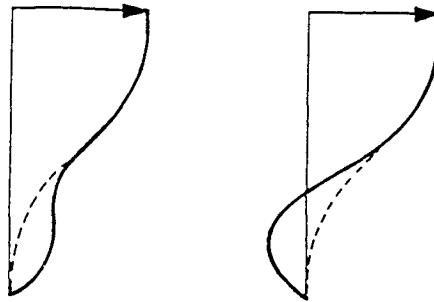


Abbildung 3.4: Geschwindigkeitsprofile an der Ablösestelle nach Moore für einen bewegten Ablösepunkt, links stromabwärts, rechts stromaufwärts.

riode. Folgt man diesem Kriterium, dann würde die instationäre Ablösung nicht mehr von der Zeit abhängen. Pauley et. al. ([36]) geben als Ablösekriterium folgende Bedingung:

$$P_{max} = \frac{\theta_{sep}^2}{\nu} \left(\frac{dU}{dx} \right)_{max} \approx -0.24 \quad (3.85)$$

Dabei bedeutet θ_{sep} die Impulsverlustdicke im Ablösepunkt, und $\left(\frac{dU}{dx} \right)_{max}$ ist der größte Geschwindigkeitsgradient der Potentialströmung, der in der unmittelbaren Umgebung der Ablösestelle auftritt. Auch dieses Kriterium erscheint unklar.

Aus allen diesen Untersuchungen wird ersichtlich, daß das Verschwinden der Wandschubspannung in jedem Fall ein notwendiges Kriterium für die Ablösung ist. Da die Anwendung des hier dargestellten Verfahrens stromabwärts des Punktes, an dem die Wandschubspannung verschwindet, ohnehin zweifelhaft ist, wird im folgenden lediglich das erstmalige Verschwinden der Wandschubspannung angegeben.⁷ Unabhängig davon, ob dort nun in der Realität tatsächlich Ablösung auftritt oder nicht, stellt dieser Punkt jedenfalls die am weitesten stromaufwärts gelegene Stelle dar, an der überhaupt Ablösung auftreten kann.⁸

Eine gewisse Hilfe bei der Beurteilung der physikalischen Plausibilität der so bestimmten Ablöselinie ergibt sich aus folgender Überlegung: Solange der jeweils angegebene Punkt stromabwärts wandert, darf er sich jedenfalls nicht schneller stromabwärts bewegen, als die dahinter liegende laminare Ablöseblase abschwimmen kann. Parkin und Baker [43] geben aufgrund von experimentellen Untersuchungen an Rotationskörpern folgende Formel für die Höhe H einer solchen laminaren Ablöseblase an:

$$\frac{H}{D} = 111 \left(\frac{U_0 D}{\nu} \right)^{-0.79} \quad (3.86)$$

In Gl. 3.86 steht D für den Durchmesser des Rotationskörpers. Ferner kann gezeigt werden, ([39], [35]), daß die Höhe einer solchen Ablöseblase in der Größenordnung der

⁷Dieser Punkt wird in allen folgenden Ausführungen stets mit „Ablösepunkt“ bezeichnet.

⁸Im Sinne von Despard und Miller wäre der am weitesten vorn liegende Punkt auf dieser Kurve der für alle Zeiten geltende Ablösepunkt.

Grenzschichtdicke liegt. Daher wird angenommen, daß die Abschwimmgeschwindigkeit einer solchen Ablöseblase durch den integralen Mittelwert des Geschwindigkeitsprofils an der Ablösestelle über die Grenzschichtdicke an dieser Stelle approximiert werden kann, dieser Mittelwert ergibt sich unter Verwendung des erweiterten Profilsatzes nach Gl. 3.14 und Gl. 3.15 zu:

$$U_{vsep}(t) = 0.556U(x_{sep}, t) \quad (3.87)$$

3.4 Lösungsverfahren

In Kapitel 3.1.1 wurde gezeigt, daß die Auflösung der Gl. 3.33 iterativ erfolgen muß. Zur Auswertung von Gl. 3.33 wird wie folgt verfahren:

- Berechnen der instationären Potentialströmung $U(x, t)$.
- Damit wird ein geeignetes Gitter von Kontrollpunkten und Zeitschritten festgelegt.
- Es ergibt sich die nullte Näherung der Gl. 3.33 für jeden Zeitschritt. In der Nähe der Vorderkante werden dabei die vorher angegebenen Formeln verwendet. Ansonsten erfolgt die Auswertung numerisch.
- Das Kriterium $\kappa = -0.089$ liefert die entsprechenden Punkte verschwindender Wandschubspannung. Ferner werden unter Verwendung der auf dem viergliedrigen Profilsatz beruhenden Gleichungen Gl. 3.22 und Gl. 3.24 der Formparameter λ und die Funktion f_1 bestimmt, und zwar bis zum Verschwinden der Wandschubspannung des jeweiligen Zeitschrittes.⁹
- Für alle Kontrollpunkte werden nun die zeitlichen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\theta^2}{\nu} \right)$ und $\frac{\partial f_1}{\partial t}$ bestimmt, in der Nähe der Vorderkante mit den im vorigen Kapitel angegebenen Formeln, ansonsten numerisch.
- Die erneute Auswertung der Gl. 3.33 liefert dann eine weitere Näherung. Dabei wird für jeden Zeitschritt zunächst entweder bis zum Erreichen eines κ -Wertes von -0.089 oder bis zum Erreichen des letzten bekannten Punktes verschwindender Wandschubspannung gerechnet. Wurde – bei positivem Druckgradienten – bis dahin keine Ablösung festgestellt, wird Gl. 3.33 mit über x extrapolierten $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\theta^2}{\nu} \right)$ und $\frac{\partial f_1}{\partial t}$ ausgewertet, bis Verschwinden der Wandschubspannung festgestellt wird. Damit wird zugelassen, daß sich der Ablösepunkt während der Iteration sowohl nach vorne als auch nach hinten verschieben kann.
- Dann können für die aktuelle Lage der Ablösepunkte wieder $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\theta^2}{\nu} \right)$ und $\frac{\partial f_1}{\partial t}$ bestimmt werden; vorher eventuell extrapolierte Werte werden nun verbessert.

⁹ Hierin liegt ein gewisse Inkonsistenz, denn für die Iteration von f_1 wird der viergliedrige Ansatz unter der Voraussetzung verwendet, daß die Wandschubspannung bei $\kappa = -0.089$ (und nicht erst bei $\kappa = -0.1567$ bzw. $\lambda = -12$) verschwindet. Damit wird also vorausgesetzt, daß das Verhältnis δ^*/θ im Ablösegebiet noch annähernd dem einer anliegenden Grenzschicht entspricht. Dies läßt sich jedoch nicht umgehen, da für die hinteren Ablösepunkte angrenzende Bereiche mit Rückströmung modelliert werden müssen und – wie auch Abb. 3.3 zeigt – der λ -Bereich hinter der Ablösung bis zum Erreichen des lokalen Minimums bei dem erweiterten Ansatz nicht ausreichend ist. Dadurch ist die Amplitude der Linie verschwindender Wandschubspannung stets zu groß, denn der Betrag von $\partial f_1/\partial t$ ist – verglichen mit dem erweiterten Ansatz – stets zu klein. Dies gilt in höherem Maße für den hinteren Bereich.

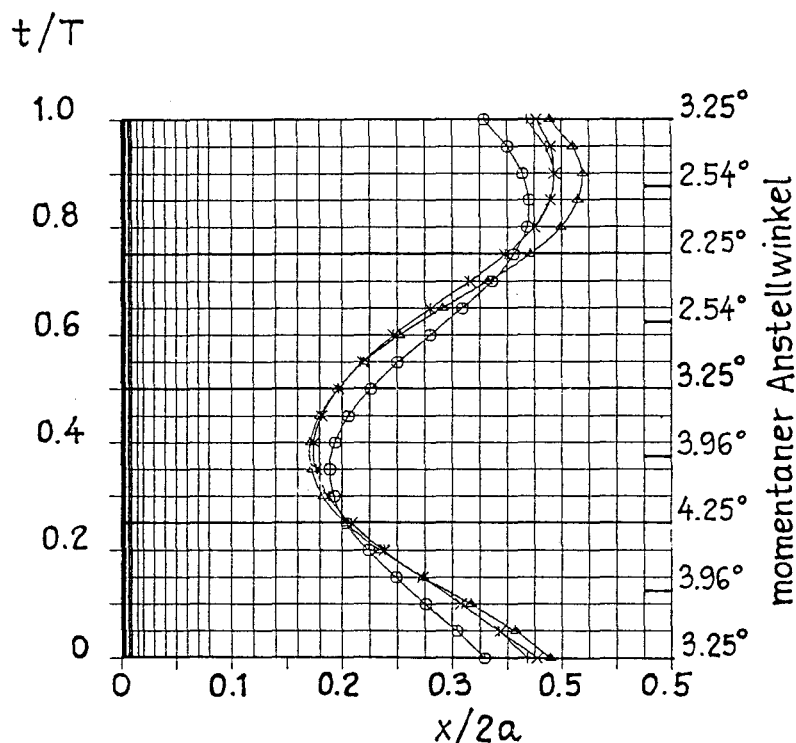


Abbildung 3.5: Iteration der Linie verschwindender Wandschubspannung, $J 105$, $\beta_s = 3.25^\circ$, $\beta_i = 1^\circ$, $k = 0.75$, $Re = 2 \cdot 10^6$, $\circ 0$, $\triangle 1$, $+ 5$, $\times 10$ Iterationsschritte

- Nach dem gleichen Schema erfolgt die nächste Iteration, solange, bis Konvergenz erfolgt ist.
- Das Verfahren konvergiert, wenn ein neuer Iterationsschritt keine bedeutenden Verschiebungen der Linie verschwindender Wandschubspannung mehr bringt.
- Mit der so erhaltenen Lösung können nun unter Verwendung des fünfgliedrigen Ansatzes im Gebiet des Druckanstieges alle Grenzschichtparameter bestimmt werden.

In Abb. 3.5 ist der Verlauf dieser Iteration am Beispiel eines Joukowski-Profiles mit 10.5% maximaler Dicke dargestellt. Der mittlere Anstellwinkel beträgt 3.25° , die Amplitude 1° . Das Profil führt Drehbewegungen um die $1/4$ -Linie mit einer reduzierten Frequenz von 0.75 durch, die Profilreynoldszahl beträgt $2 \cdot 10^6$. Der Rechnung liegt eine instationäre Potentialströmung zugrunde; Abb. 3.6 zeigt den zugehörigen bezogenen Druckgradienten $\frac{2a}{\rho U_0^2} \frac{\partial p}{\partial x}$. Die mit „0. Iteration“ bezeichnete Kurve in Abb. 3.5 stellt die nullte Näherung für die in zugrundegelegte Potentialströmung dar,¹⁰ ferner sind die berechneten Linien verschwindender Wandschubspannung für unterschiedliche Anzahlen von Iterationsschritten dargestellt. Nach fünf Iterationen ist das Ergebnis in diesem Fall praktisch stabil, im vorderen Bereich stellt auch schon die erste Näherung eine brauchbare Lösung dar, hier vergrößert sich die Phasenverschiebung zwischen dem maximalen Anstellwinkel des Profils und dem am weitesten stromaufwärts gelegenen Punkt verschwindender Wandschubspannung. Gleiches gilt für das hintere Extremum, allerdings liefert hier die erste

¹⁰Diese ist nicht identisch mit einer quasistationären Lösung, denn es wird eine instationäre Potentialströmung zugrundegelegt.

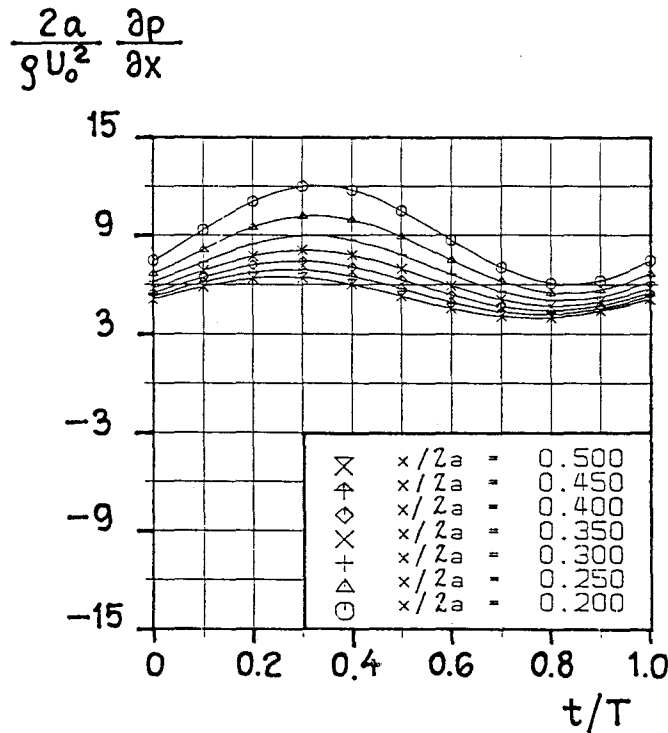


Abbildung 3.6: bezogener Druckgradient, $J 105$, $\beta_s = 3.25^\circ$, $\beta_i = 1^\circ$, $k = 0.75$, $Re = 2 \cdot 10^6$

Iteration Punkte, die – verglichen mit der konvergierten Lösung – zu weit hinten liegen. Insgesamt ist das Konvergenzverhalten in diesem Bereich etwas schlechter. Ob das Verfahren überhaupt konvergiert, hängt zum einen von der Größe der reduzierten Frequenz ab, zum anderen aber auch von der Bewegungsamplitude des Ablösepunktes.¹¹ Nimmt man das in Abschnitt 3.3 zur Beurteilung der laminaren Ablösung entwickelte Kriterium zu Hilfe, dann läßt sich eine solche Konvergenzbedingung leicht angeben, denn es hat sich gezeigt, daß immer erst das Ablösekriterium verletzt wird, bevor das Verfahren nicht mehr konvergiert. Also wird die Konvergenzgrenze des Verfahrens praktisch durch den Zustand bestimmt, in dem sich der laminare Ablösepunkt schneller stromabwärts bewegt, als die dahinter liegende laminare Ablöseblase abschwimmen kann. Läßt sich für ein Tragflügelprofil die Bewegung des Ablösepunktes etwa durch den Ansatz

$$x_{sep}(t) = \zeta_{sep} \sin \omega t \tag{3.88}$$

mit ζ_{sep} als Amplitude, die vom mittleren Anstellwinkel und von der Schwingungsamplitude abhängt, darstellen, dann lautet die Konvergenzbedingung unter Verwendung von Gl. 3.87:

$$\omega \zeta_{sep} = 0.556 U(x_{sep}, t) \approx 0.6 U_0 \tag{3.89}$$

Mit der Definition der reduzierten Frequenz

$$k = \frac{\omega a}{U_0} \tag{3.90}$$

¹¹ vgl. hierzu auch die Fußnote auf S. 25.

ergibt sich dann als Abschätzung etwa

$$\frac{k\zeta_{sep}}{2a} = 0.3 \quad (3.91)$$

als Konvergenzgrenze des Verfahrens. Dabei kann die Amplitude der Bewegung des laminaren Ablösepunktes aus der quasistationären Lösung verwendet werden. Dieses Kriterium gilt für alle Profile, deren Bewegung des Ablösepunktes etwa durch den Ansatz nach Gl. 3.88 dargestellt werden kann. Ist dies nicht möglich, weil der Ablösepunkt schlagartig über einen größeren Bereich wandert, wie z.B. bei den Profilen NACA 16–006 und NACA 16–012 ([22]), dann gilt folgende Abschätzung: Ist Δx_{sep} die maximal auftretende Verschiebung des Ablösepunktes im in Frage kommenden Zeitintervall, dann erhält man nach den gleichen Überlegungen folgende Konvergenzbedingung: ¹²

$$\frac{k\Delta x_{sep}}{2a} = 0.05 \quad (3.92)$$

3.5 Beispiele instationärer laminarer Grenzschichten

3.5.1 Instationäre Plattengrenzschicht

Das hier dargestellte Verfahren soll zunächst auf die einfachste denkbare instationäre Grenzschicht angewendet werden, und zwar auf eine Plattengrenzschicht, die von einer Potentialströmung der Form

$$U(t) = U_0(1 + A \sin \omega t) \quad (3.93)$$

beaufschlagt wird. Dieser Fall ist in der Literatur von Phillips und Ackerberg [44] behandelt worden. Dort wird mit einem differentiellen Verfahren eine instationär modifizierte Blasius-Differentialgleichung gelöst; als Ergebnis ist für verschiedene normierte Koordinaten $\bar{x} = x\omega/U_0$ jeweils der Verlauf der dimensionslosen Wandschubspannung über der Zeit angegeben. Der Druckgradient der Potentialströmung wird mit Gl. 3.93:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} = \omega U_0 A \cos \omega t \quad (3.94)$$

Er ist unabhängig von x . Für die quasistationäre Lösung ist der Druckgradient stets gleich 0, ebenso die Formparameter κ und λ . Ablösung kann daher nicht auftreten. Die instationär ermittelten Formparameter schwanken um diesen Mittelwert, erwartet wird Ablösung für die Zeitpunkte $0.25 < t/T < 0.75$, da nur dort der Druckgradient positiv ist. Abb. 3.7 zeigt Ergebnisse solcher Grenzschichtrechnungen mit dem hier diskutierten Verfahren für mehrere reduzierte Frequenzen k im Bereich von 0.25 bis 1.00 bei einer Amplitude von $A = 0.3$. Das Verfahren liefert Ablösung innerhalb des genannten Bereiches, der Beginn der Ablösung erfolgt zeitverzögert nach dem erstmaligen Erreichen eines positiven Druckgradienten bei $t/T \geq 0.25$; mit steigender reduzierter Frequenz tritt das Verschwinden der Wandschubspannung bei früheren Zeitpunkten ein. Der Druckgradient steigt mit zunehmender reduzierter Frequenz k , daher verlagert sich das Ablösegebiet bei höheren reduzierten Frequenzen nach vorn; unterhalb von $k = 0.25$ kann überhaupt keine Ablösung festgestellt werden. Abb. 3.8 zeigt für verschiedene reduzierte Frequenzen die

¹²Dabei wird eine Periode T durch 40 Zeitschritte dargestellt.

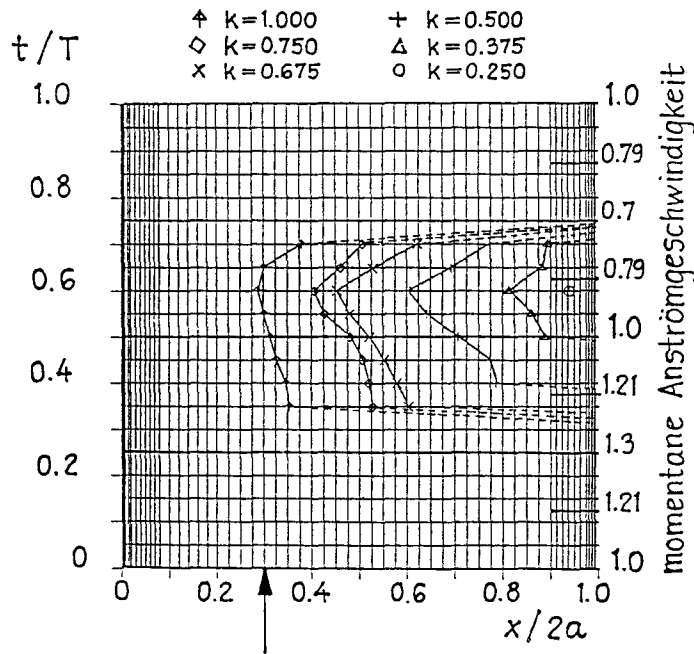


Abbildung 3.7: Verschwinden der Wandschubspannung für verschiedene reduzierte Frequenzen k , $A = 0.3$, $Re = 3 \cdot 10^6$, $\circ k = 0.25$, $\triangle k = 0.375$, $+ k = 0.5$, $\times k = 0.675$, $\diamond k = 0.75$, $\uparrow k = 1.0$

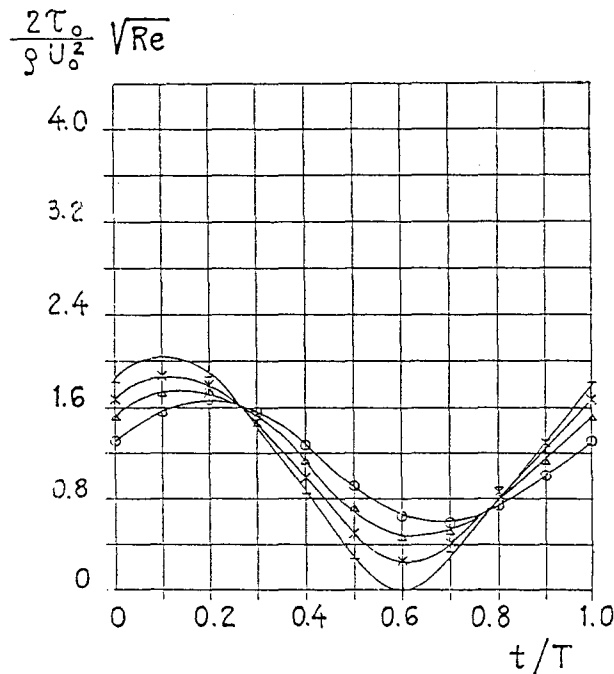


Abbildung 3.8: Wandschubspannungen für verschiedene Frequenzen k bei $x/2a = 0.30$, $A = 0.3$, $Re = 3 \cdot 10^6$, $\circ k = 0.25$, $\triangle k = 0.5$, $+ k = 0.75$, $\times k = 1.0$

normierte Wandschubspannung bei $x/2a = 0.30$. Da das Verfahren nur bis zur jeweiligen Ablösestelle gültig ist, kann die normierte Wandschubspannung nicht – wie bei Phillips und Ackerberg [44] – innerhalb des Ablösegebietes angegeben werden. Ein quantitativer Vergleich der Ergebnisse ist auch deswegen nicht möglich, weil von Phillips und Ackerberg [44] die reduzierte Frequenz nicht explizit angegeben wird. Die Ergebnisse stimmen tendenziell auf jeden Fall mit denen von Phillips und Ackerberg überein, insbesondere kann die von den genannten Autoren gefundene Tatsache reproduziert werden, daß sich die Kurven in ihrem zeitlichen Verlauf alle bei $t/T \approx 0.30$ und $t/T \approx 0.80$ schneiden.

Der hier diskutierte Fall stellt zwar die einfachste denkbare instationäre Grenzschicht dar, es ergeben sich jedoch bei der Anwendung des hier diskutierten Verfahrens diverse Schwierigkeiten, die letztlich dazu führen, daß die Methode nur langsam konvergiert.¹³ Auf jeden Fall ist die nullte Näherung sehr ungünstig, da hier überhaupt keine Ablösung vorliegt, allerdings verschieben sich in der ersten Näherung alle Ablösepunkte nach vorne, was sich für das Konvergenzverhalten insgesamt positiv auswirkt. Ferner werden die Ablösepunkte in den Bereichen um $t/T = 0.40$ bzw. $t/T = 0.65$ erst im Verlauf mehrerer Iterationen festgestellt, so daß sich während der Rechnung nicht nur die Lage, sondern auch die zeitliche Ausdehnung des Ablösegebietes laufend ändert. Außerdem wird für die Zeitpunkte mit negativem Druckgradienten $\lambda \geq 12$ erreicht; das bedeutet, daß in der Grenzschicht Geschwindigkeiten auftreten, die größer als die zu diesem Zeitpunkt einwirkende Potentialströmung $U(x, t)$ sind. Dies ist physikalisch nicht ausgeschlossen¹⁴ und wurde auch in den Rechnungen von Phillips und Ackerberg festgestellt. Dieser Fall kann jedoch mit den zugrunde liegenden Geschwindigkeitsprofilen nicht behandelt werden, da für $\kappa \geq 0.0948$ keine λ existieren.¹⁵

3.5.2 Instationäre Profilgrenzschicht

3.5.2.1 Profil J 105

Zunächst soll beispielhaft für instationäre Profilgrenzschichten ein Joukowski-Profil mit 10.5% Dickenverhältnis ([53]) behandelt werden. Das Profil führt Drehschwingungen der Form $\beta(t) = \beta_s + \beta_i \sin \omega t$ um die 1/4-Linie mit einem mittleren Anstellwinkel von $\beta_s = 3.25^\circ$ und einer Amplitude von $\beta_i = 2^\circ$ bei verschiedenen reduzierten Frequenzen von 0 bis 0.75 durch. Die Profilyoldszahl beträgt $2.4 \cdot 10^5$. Abb. 3.9 zeigt die berechneten Linien verschwindender Wandschubspannung; die Abb. 3.10 bis Abb. 3.14 enthalten die zugehörigen bezogenen Druckgradienten der Potentialströmung in der Umgebung der Ablösezone. Der Fall mit $k = 0$ ist eine quasistationäre Lösung. Man erkennt deutlich, daß er die am weitesten stromaufwärts liegende Ablösung liefert; sie fällt erwartungsgemäß mit dem Auftreten des maximalen Anstellwinkels von 5.25° zusammen. Schon die Ablösung bei $k = 0.10$ ist deutlich phasenverschoben, diese Phasenverschiebung vergrößert sich mit steigender reduzierter Frequenz. Ferner ändert sich die x-Koordinate des stromaufwärts gelegenen Extremwertes kaum mit der reduzierten Frequenz, sie liegt für die instationären Fälle etwa im Bereich $0.1 \leq x \leq 0.14$. Ganz anders dagegen liegen die Verhältnisse im

¹³Auch nach etwa 20 Iterationsschritten können sich einzelne Ablösepunkte – insbesondere an den Rändern – noch etwas verschieben.

¹⁴Solche Bereiche treten offenbar dann auf, wenn einmal die Verdrängungsdicke einen hinreichend großen Wert angenommen hat und gleichzeitig der Druckgradient stets negativ ist. Es stellt sich daher die Frage, ob unter diesen Bedingungen die Grenzschicht überhaupt noch laminar ist.

¹⁵vgl. dazu Abb. 3.3

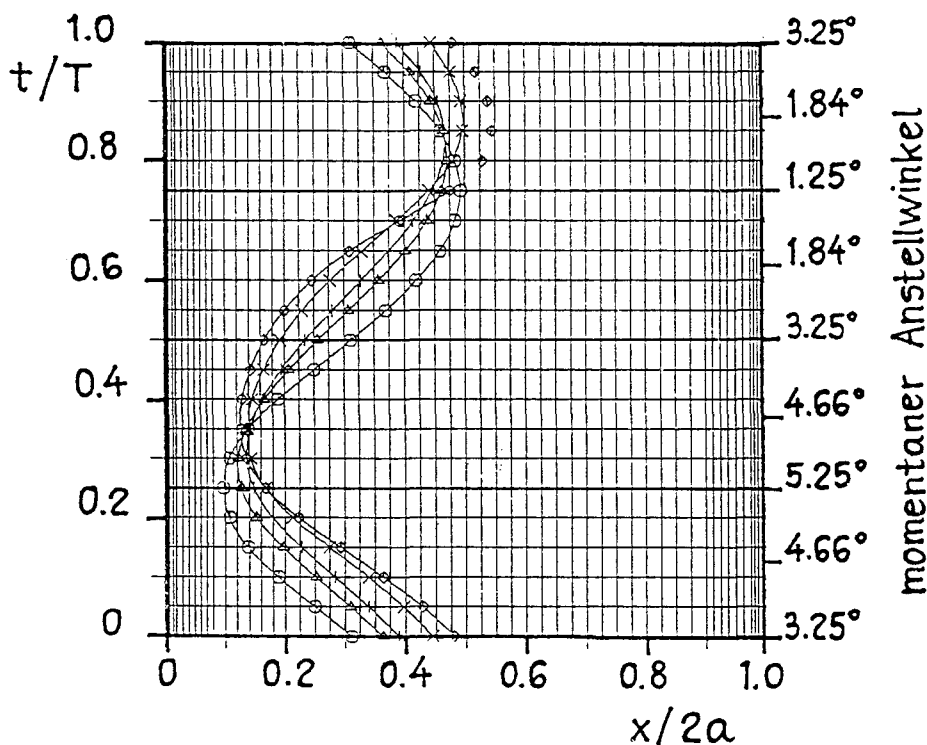


Abbildung 3.9: Linien verschwindender Wandschubspannung, J 105, $\beta_s = 3.25^\circ$, $\beta_i = 2^\circ$, $Re = 2.4 \cdot 10^5$, \circ quasistationär, $\Delta k = 0.1$, $+ k = 0.25$, $\times k = 0.5$, $\diamond k = 0.75$

hinteren Extremum; es wird bei allen instationären Fällen deutlich später erreicht, jedoch nimmt die Phasenverschiebung hier bei den höheren reduzierten Frequenzen wieder ab. Außerdem verlagert sich dieser Bereich auf dem Profil immer weiter nach hinten, für $k = 0.75$ geht der am weitesten hinten liegende Ablösepunkt sogar über den der quasistationären Rechnung hinaus.¹⁶ Bei noch höheren reduzierten Frequenzen ergibt sich, daß für einzelne Zeitpunkte im Bereich $0.75 < t/T < 0.85$ das Verschwinden der Wandschubspannung nicht mit Sicherheit festgestellt werden kann. In diesem Fall traten lokal wieder größere Geschwindigkeiten in der Grenzschicht als in der Potentialströmung auf. Überhaupt sind die Ergebnisse in diesem Bereich bei höheren reduzierten Frequenzen fraglich, denn für $k = 0.75$ war für $t/T \approx 0.70$ die in Kapitel 3.3 angegebene Abschwimmgeschwindigkeit einer laminaren Ablöseblase geringer als die Bewegungsgeschwindigkeit des gerade stromabwärts wandernden Ablösepunktes,¹⁷ was darauf hindeutet, daß das diesem Verfahren zugrunde liegende Modell dort nicht mehr gültig ist.

3.5.2.2 Profil NACA 16-012

Als weiteres Beispiel für eine instationäre Profilgrenzschicht wird das von Franc und Michel [13] experimentell untersuchte NACA 16-012-Profil behandelt. Das Profil führt Dreh-

¹⁶Dies physikalisch nicht sinnvolle Ergebnis ist durch die in Kapitel 3.4 angegebenen Einschränkungen bezüglich der numerischen Realisierung des Verfahrens bedingt, die letztlich dazu führen, daß der hintere Extremwert der Ablöselinie – insbesondere bei höherer reduzierter Frequenz – stets zu groß ermittelt wird.

¹⁷In diesem Zusammenhang wird noch einmal darauf hingewiesen, daß in Abb. 3.9 lediglich die Kurven dargestellt sind, entlang derer die nach diesem Verfahren berechnete Wandschubspannung verschwindet, unabhängig davon, ob dann tatsächlich Ablösung eintritt oder nicht.

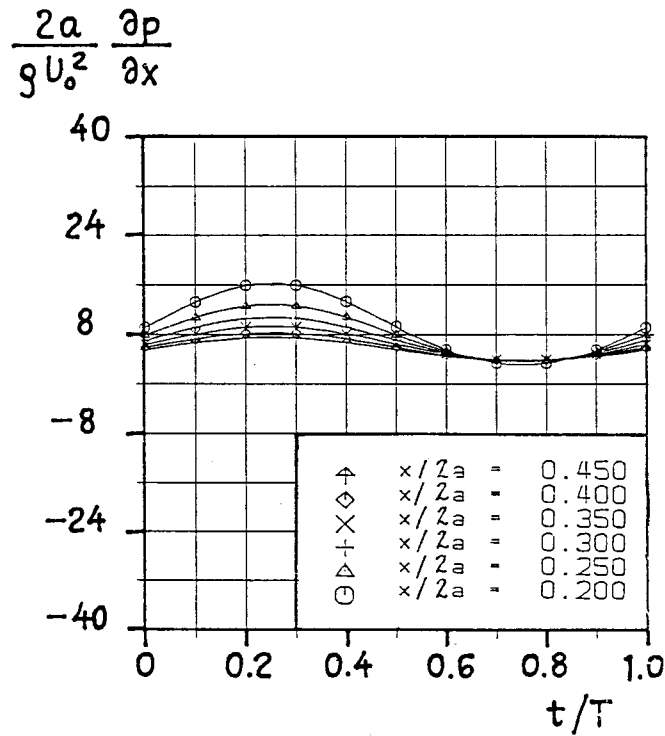


Abbildung 3.10: Bezogener Druckgradient, J 105, $\beta_s = 3.25^\circ$, $\beta_i = 2^\circ$, $k = 0.00$, $Re = 2.4 \cdot 10^5$

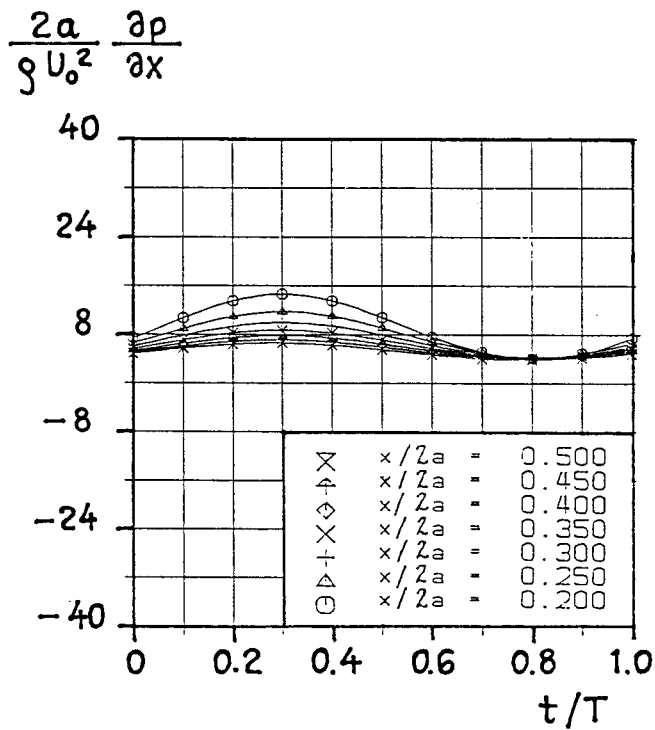


Abbildung 3.11: Bezogener Druckgradient, J 105, $\beta_s = 3.25^\circ$, $\beta_i = 2^\circ$, $k = 0.20$, $Re = 2.4 \cdot 10^5$

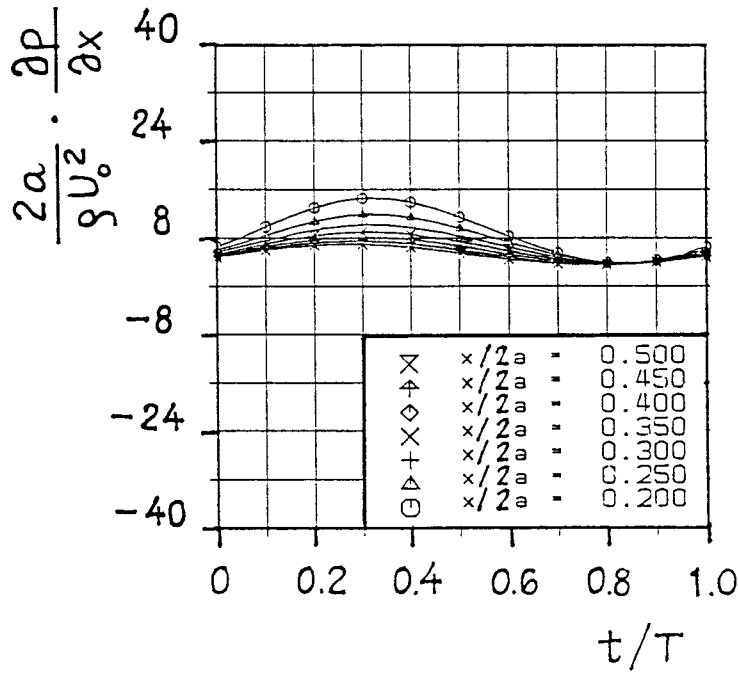


Abbildung 3.12: Bezogener Druckgradient, J 105, $\beta_s = 3.25^\circ$, $\beta_i = 2^\circ$, $k = 0.50$, $Re = 2.4 \cdot 10^5$

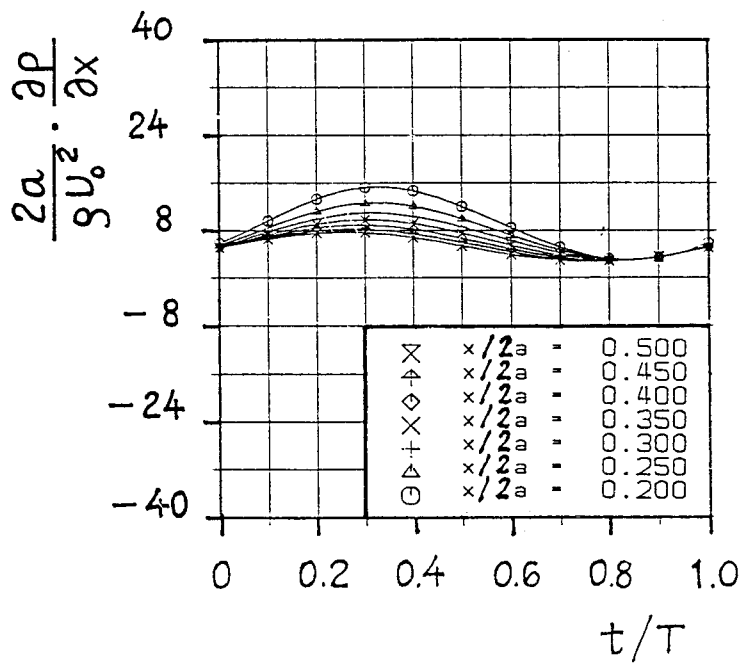


Abbildung 3.13: Bezogener Druckgradient, J 105, $\beta_s = 3.25^\circ$, $\beta_i = 2^\circ$, $k = 0.75$, $Re = 2.4 \cdot 10^5$

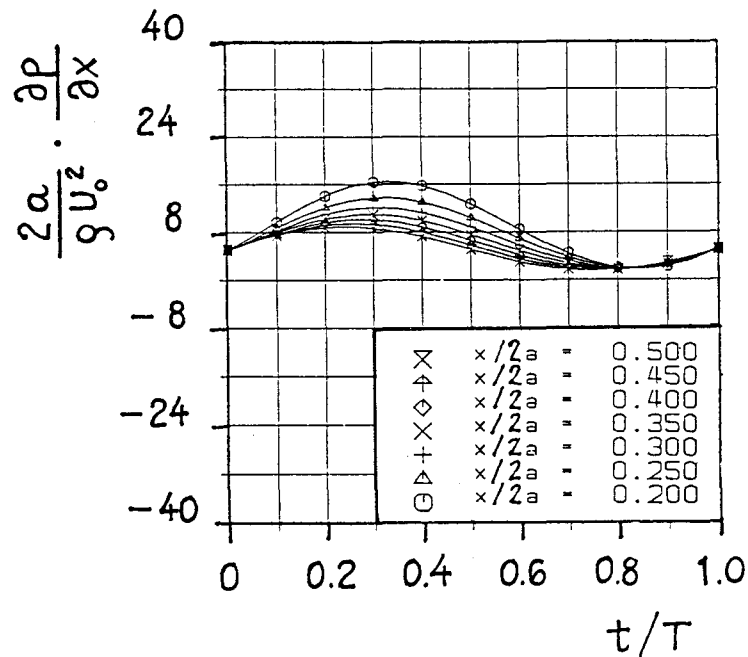


Abbildung 3.14: Bezogener Druckgradient, J 105, $\beta_s = 3.25^\circ$, $\beta_i = 2^\circ$, $k = 1.00$, $Re = 2.4 \cdot 10^5$

schwingungen um die Profilmittellinie mit einer Schwingungsamplitude von 5° durch. Die Versuche von Franc und Michel wurden bei verschiedenen mittleren Anstellwinkeln -0° , 5° und 10° – durchgeführt, die reduzierte Frequenz betrug 0.471 für $\beta_s = 5^\circ$, sonst 0.785. Der Fall mit 0° mittlerem Anstellwinkel kann mit dem hier vorgestellten Verfahren nicht berechnet werden, da dort ständig Saug- und Druckseite wechseln und der Ablösepunkt somit periodisch über die Profilverkante wandert. Ferner ist für das NACA 16-012-Profil charakteristisch [22], daß bei kleinen Anstellwinkeln die (stationäre) Ablösung im Bereich der Hinterkante eintritt (etwa bei $x/2a \approx 0.95$); bei größeren Anstellwinkeln liegt der Ablösepunkt praktisch in der Nähe der Vorderkante; in einem Übergangsbereich, der etwa bei einem Anstellwinkel von 4° liegt, wandert dieser Punkt praktisch über die gesamte Profiltiefe. Der Fall mit 5° mittlerem Anstellwinkel enthält nun diesen Übergangsbereich, so daß der Ablösepunkt dann auf jeden Fall schneller als die laminare Ablöseblase stromabwärts wandert. Daher werden die Grenzschichtparameter nur in der unmittelbaren Umgebung der Vorderkante berechnet. Abb. 3.15 und Abb. 3.17 zeigen die Ergebnisse der Grenzschichtrechnung für die mittleren Anstellwinkel von 5° und 10° . Dort sind jeweils die Linien verschwindender Wandschubspannung (markierte Kurven) sowie die Staulinien (durchgezogene Kurven) im unmittelbaren Bereich der Vorderkante eingetragen. Abb. 3.16 und Abb. 3.18 zeigen die zugehörigen bezogenen Druckgradienten in der entsprechenden Umgebung als Funktion der Zeit. Das Verschwinden der Wandschubspannung wird in beiden Fällen erwartungsgemäß praktisch in der Nähe der Vorderkante festgestellt. Die jeweils am weitesten vorn liegenden Punkte sind wieder gegenüber dem Auftreten des maximalen Anstellwinkels phasenverschoben. Bei dem mittleren Anstellwinkel von 10° ist die Linie verschwindender Wandschubspannung nur noch schwach zeitabhängig, die Amplitude ist

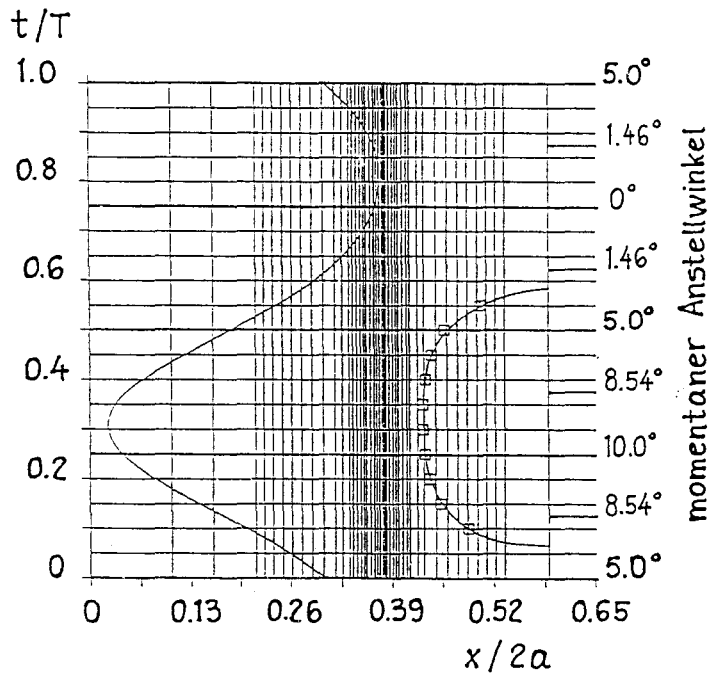


Abbildung 3.15: Staulinie (-) und Linie verschwindender Wandschubspannung (\circ), NACA 16-012, $\beta_s = 5^\circ$, $\beta_i = 5^\circ$, $k = 0.471$, $Re = 3.0 \cdot 10^5$

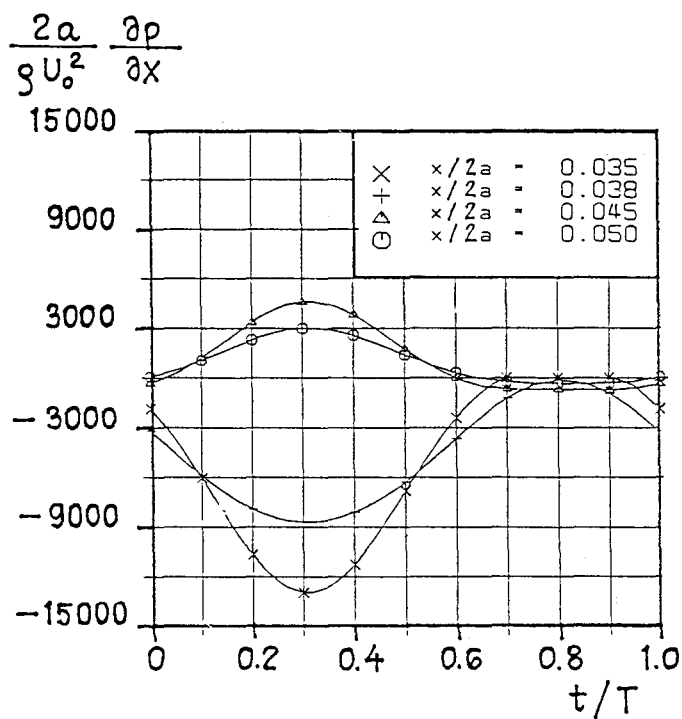


Abbildung 3.16: Bezogener Druckgradient, NACA 16-012, $\beta_s = 5^\circ$, $\beta_i = 5^\circ$, $k = 0.471$, $Re = 3 \cdot 10^5$

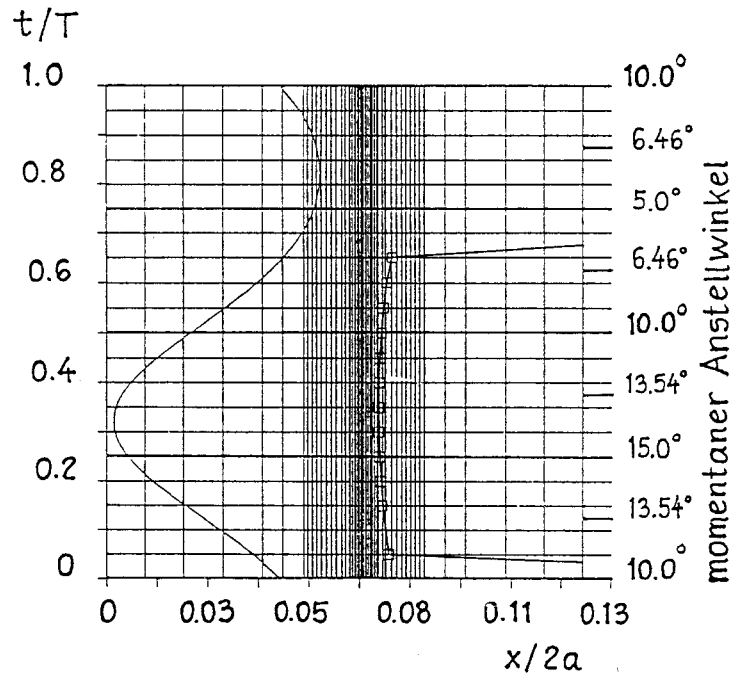


Abbildung 3.17: Staulinie (—) und Linie verschwindender Wandschubspannung (○), NACA 16-012, $\beta_s = 10^\circ$, $\beta_i = 5^\circ$, $k = 0.785$, $Re = 3 \cdot 10^5$

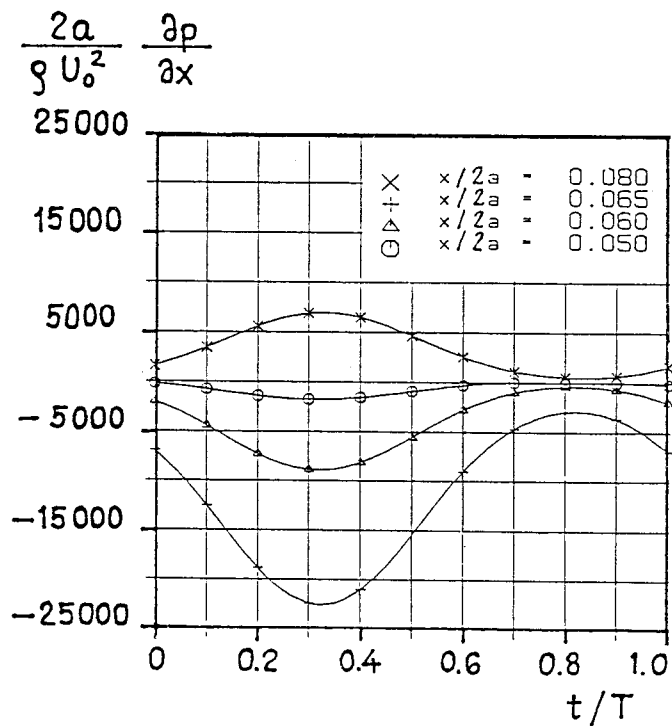


Abbildung 3.18: Bezogener Druckgradient, NACA 16-012, $\beta_s = 10^\circ$, $\beta_i = 5^\circ$, $k = 0.785$, $Re = 3 \cdot 10^5$

sehr klein. ¹⁸ Bemerkenswert ist, daß die Linie verschwindender Wandschubspannung für den Fall mit 5° mittlerem Anstellwinkel in ihrem Verlauf wesentlich durch die Staulinie geprägt wird, wie schon in Abschnitt 3.2 vermutet wurde. Diese Tendenz zeigt sich grundsätzlich auch bei 10° mittlerem Anstellwinkel.

¹⁸Man muß hier allerdings einschränkend bemerken, daß die Gültigkeit der in Kapitel 3.2 aus der Vorderkantennäherung abgeleiteten Formeln bei diesen hohen Anstellwinkeln fragwürdig ist.

Kapitel 4

Stabilität und Transition

4.1 Allgemeines

Im vorangegangenen Kapitel wurde eine Theorie zur Berechnung der wesentlichen Kenngrößen – insbesondere der laminaren Ablösung – von laminaren Grenzschichten vorgestellt. Dabei wurde implizit unabhängig von der Profilreynoldszahl stets ein laminarer Zustand der Grenzschicht vorausgesetzt, obwohl bekannt ist, daß diese bei größeren Reynoldszahlen turbulenten Charakter hat.

Der in diesem Kapitel vorgestellten Theorie liegt nun die Vorstellung zugrunde, daß die laminare Grenzschicht stets eine mögliche Lösung der Navier–Stokesschen Gleichungen ist, jedoch oberhalb einer gewissen Grenze instabil wird und in die turbulente Form umschlägt. Das Ziel dieser Theorie ist es, für instationäre Grenzschichten sowohl diese Stabilitätsgrenze als auch den Ort des Umschlages vorhersagen zu können. Das dazu entwickelte Lösungsverfahren soll jedoch vorher an bekannten Lösungen stationärer Grenzschichten erprobt werden.

4.2 Stabilitätstheorie stationärer Grenzschichten

4.2.1 Grundlagen der Stabilitätstheorie

Betrachtet wird eine zweidimensionale inkompressible Grundströmung der Form:

$$u(y); \quad 0; \quad p(x, y); \quad \left(\frac{\partial p}{\partial x} = \text{const}\right). \quad (4.1)$$

Die Komponente u hängt dabei lediglich von der y -Koordinate ab, die anderen Anteile des Geschwindigkeitsfeldes verschwinden. Dieser Grundströmung wird eine ebenfalls zweidimensionale Störungsbewegung überlagert, diese hat die Form: ¹

$$u'(x, y, t); \quad v'(x, y, t); \quad p'(x, y, t). \quad (4.2)$$

¹Die Änderung der Grundströmung in x -Richtung kann gegenüber derjenigen in y -Richtung vernachlässigt werden. Sie wird implizit dadurch berücksichtigt, daß nacheinander und jeweils unabhängig voneinander die Grundströmungen an verschiedenen Stellen x betrachtet werden. In diesem Sinne wird in der unmittelbaren Umgebung der gerade betrachteten Stelle x der Druckgradient als konstant angenommen. Ferner reicht es aus, nur zweidimensionale Störungen zu betrachten, denn diese führen eher zur Instabilität als dreidimensionale (z.B. [47], S. 357).

Daraus ergibt sich die resultierende Bewegung zu:

$$u + u'; \quad v'; \quad p + p' \quad (4.3)$$

Die überlagerte Störungsbewegung wird nun aus einzelnen Partialschwingungen aufgebaut, von denen jede eine in x -Richtung fortschreitende Welle darstellt. Für diese Form der zweidimensionalen Störungsbewegung wird eine Stromfunktion $\psi(x, y, t)$ in folgender Weise eingeführt [47], wodurch die Kontinuitätsgleichung automatisch erfüllt ist:

$$\psi(x, y, t) = \varphi(y)e^{i(\alpha x - \beta t)} \quad (4.4)$$

Dabei sind als Sonderfälle entweder das Problem der zeitlichen (α rein reell) oder der räumlichen Anfachung (β rein reell) von Bedeutung. Bei der Untersuchung der Stabilität von laminaren Grenzschichten genügt die Lösung des zeitlichen Anfachungsproblems; also ist in Gl. 4.4 die Wellenzahl α reell, während die Größe β komplex ist, $\beta = \beta_{\Re} + i\beta_{\Im}$. Dabei bedeutet β_{\Re} die Kreisfrequenz der Störbewegung, β_{\Im} ist eine zeitliche Anfachungsgröße. Für $\beta_{\Im} > 0$ wird die Störbewegung angefacht, $\beta_{\Im} < 0$ bedeutet Dämpfung. Aus Gl. 4.4 ergibt sich für die Geschwindigkeitskomponenten der Störungsbewegung:

$$\begin{aligned} u' &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} e^{i(\alpha x - \beta t)} \\ v' &= -i\alpha \varphi e^{i(\alpha x - \beta t)} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Setzt man Gl. 4.5 in die Navier–Stokesschen Gleichungen ein und vernachlässigt quadratische Terme der Störbewegung, so ergibt sich unter der Berücksichtigung der Tatsache, daß die Grundströmung selbst die Navier–Stokesschen Gleichungen erfüllen muß, nach der Elimination des Druckes eine gewöhnliche Differentialgleichung vierter Ordnung für die Amplitudenfunktion φ :²

$$\nu \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} - 2\alpha^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \alpha^4 \varphi \right) - i(\alpha u - \beta) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \alpha^2 \varphi \right) + i\alpha \varphi \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (4.6)$$

Gl. 4.6 bildet die Grundlage der Stabilitätstheorie laminarer Grenzschichten und ist in der Literatur als Orr–Sommerfeld–Gleichung bekannt.

4.2.2 Lösungsverfahren

Die Lösung der Gl. 4.6 erfolgt mit einem Galerkin–Verfahren. Die Amplitudenfunktion $\varphi(y)$ wird dazu durch folgenden Reihenansatz approximiert:

$$\varphi(y) = \sum_{m=1}^M D_m \cdot \varphi_m(y) \quad (4.7)$$

Die einzelnen Ansatzfunktionen φ_m in Gl. 4.7 müssen jeweils die Randbedingungen für eine Grenzschichtströmung – Verschwinden der Komponenten der Störungsgeschwindigkeiten auf der Körperwand und in unendlichem Wandabstand – erfüllen:³

²vgl. hierzu auch Abschnitt 4.3.1

³Hierzu könnte man einwenden, daß es ebenfalls plausibel wäre, die Randbedingungen nicht bei $y = \infty$, sondern bei $y = \delta$ zu erfüllen. Verschiedene Rechnungen haben jedoch gezeigt, daß dieser Einwand ohne Bedeutung ist, da kein nennenswerter Einfluß auf die jeweiligen Ergebnisse festgestellt werden konnte.

$$\begin{aligned}
y = \infty & : & \varphi = 0, & \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\
y = 0 & : & \varphi = 0, & \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Einsetzen von Gl. 4.7 in die Orr-Sommerfeld-Gleichung (Gl. 4.6) liefert nach Multiplikation mit φ_k und Integration unter Verwendung der Abkürzungen ⁴

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\delta^4} A_{km} &= \frac{1}{\delta^4} \int_0^\infty \frac{d^2 \varphi_k}{d\eta^2} \frac{d^2 \varphi_m}{d\eta^2} d\eta, & \frac{1}{\delta^2} B_{km} &= \frac{1}{\delta^2} \int_0^\infty \frac{d\varphi_k}{d\eta} \frac{d\varphi_m}{d\eta} d\eta \\
C_{km} &= \int_0^\infty \varphi_k \varphi_m d\eta, & \frac{U}{\delta^2} U_{km} &= \frac{1}{\delta^2} \int_0^\infty \frac{d\varphi_k}{d\eta} \frac{d\varphi_m}{d\eta} u d\eta \\
\frac{U}{\delta^2} V_{km} &= \frac{1}{\delta^2} \int_0^\infty \varphi_k \frac{d\varphi_m}{d\eta} \frac{du}{d\eta} d\eta, & UW_{km} &= \int_0^\infty \varphi_k \varphi_m u d\eta
\end{aligned} \tag{4.9}$$

mit $\eta = \frac{y}{\delta}$ folgendes Gleichungssystem:

$$\sum_{m=1}^M D_m \left\{ \begin{aligned} & A_{km} + 2\alpha^2 \delta^2 B_{km} + \alpha^4 \delta^4 C_{km} + i\alpha \delta \frac{U\delta}{\nu} (U_{km} - V_{mk}) + i\alpha^3 \delta^3 \frac{U\delta}{\nu} W_{km} \\ & - i\frac{\beta\delta^2}{\nu} B_{km} - i\frac{\beta\delta^2}{\nu} \alpha^2 \delta^2 C_{km} \end{aligned} \right\} = 0, \quad (k = 1 \dots M) \tag{4.10}$$

Gl. 4.10 kann nun als allgemeines komplexes Eigenwertproblem für die Größe $\beta\delta^2/\nu$ aufgefaßt werden, etwa in der Form:

$$[\mathbf{P}][\mathbf{D}] - \frac{\beta\delta^2}{\nu} [\mathbf{Q}][\mathbf{D}] = 0 \tag{4.11}$$

Die Matrizen $[\mathbf{P}]$ und $[\mathbf{Q}]$ sowie sind komplex und haben die Größe $M \times M$, $[\mathbf{Q}]$ ist rein imaginär. Führt man weiter eine mit der Grenzschichtdicke δ und der Außenpotentialströmung U gebildete Reynoldszahl $Re_\delta = U\delta/\nu$ ein, so ergibt sich für die einzelnen Elemente der Matrizen $[\mathbf{P}]$ und $[\mathbf{Q}]$:

$$\begin{aligned}
\Re(p_{km}) &= A_{km} + 2\alpha^2 \delta^2 B_{km} + \alpha^4 \delta^4 C_{km} \\
\Im(p_{km}) &= \alpha \delta Re_\delta (U_{km} - V_{mk}) + \alpha^3 \delta^3 Re_\delta W_{km} \\
\Re(q_{km}) &= 0 \\
\Im(q_{km}) &= B_{km} + \alpha^2 \delta^2 C_{km}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Die Lösung des Eigenwertproblems Gl. 4.11 ergibt nun für eine vorgegebene Kombination aus normierter Wellenzahl $\alpha\delta$ und Reynoldszahl Re_δ M Eigenwerte für die gesuchte Größe $\beta\delta^2/\nu$, deren Imaginärteil über (zeitliche) Anfachung oder Dämpfung der entsprechenden Mode entscheidet. Der zugehörige Neutralpunkt ist gerade dadurch gegeben, daß der entsprechende Eigenwert rein reell ist.

⁴Diese Darstellung wird durch partielle Integration unter Ausnutzung der Gl. 4.8 erhalten.

4.2.3 Approximation des Eigenspektrums

Zur Approximation des Eigenspektrums (Gl. 4.7) kommt es nun darauf an, geeignete Ansatzfunktionen für die φ_m zu finden. Betrachtet sei zunächst folgende Schar von Ansatzfunktionen:

$$\varphi_m(\eta) = \tanh^2(m\eta)e^{-\alpha\delta\eta}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (4.13)$$

Die φ_m erfüllen nicht nur alle Randbedingungen nach Gl. 4.8, sondern für $\eta \gg 1$ auch die Orr–Sommerfeld–Gleichung der reibungsfreien Außenpotentialströmung ($Re \rightarrow \infty$). Dann gilt nämlich in Gl. 4.6 $\nu = 0$, ferner $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$ und $u = U$. Damit lautet dann die Orr–Sommerfeld–Gleichung

$$(\alpha u - \beta) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \alpha^2 \varphi \right) = 0 \quad (4.14)$$

mit $\varphi(\eta) = e^{-\alpha\delta\eta}$ als exakter Lösung. Funktionen dieses Typs haben sich jedoch bei der Auswertung der Orr–Sommerfeld–Gleichung nicht bewährt. Zum einen, weil sich diese Funktionen etwa ab $m > 10$ so ähnlich werden, daß sie im numerischen Sinne nicht mehr linear unabhängig sind, und zum anderen, weil die Auswertung der Integralformeln in Gl. 4.9 nur numerisch erfolgen kann.

Daher wird zur Approximation des Eigenspektrums der folgende Ansatz verwendet, der automatisch die Randbedingungen nach Gl. 4.8, erfüllt, jedoch nicht mehr exakte Lösung der Orr–Sommerfeld–Gleichung im Unendlichen ist:

$$\varphi_m(\eta) = [\cos 2m\eta - \cos(2m+1)\eta] e^{-\alpha\delta\eta}, \quad 2m-1 = 1, 2, 3 \dots M \quad (4.15)$$

In Abb. 4.1 sind die ersten fünf Moden dieser Ansatzfunktionen zur Approximation des Eigenspektrums für $\alpha\delta = 0.5$ und 1.0 dargestellt.

Zur Auswertung der Integralformeln Gl. 4.9 ist es zweckmäßig, das zu untersuchende Grenzschichtprofil im Bereich $0 \leq \eta \leq \infty$ zu entwickeln. Da der Instabilitätspunkt etwa in der Umgebung des Druckminimums ($\lambda = 0$) oder stromabwärts davon erwartet wird ([48, 49]), kann das zu untersuchende Geschwindigkeitsprofil durch den fünfgliedrigen Polynomansatz nach Marzi [41] dargestellt werden:⁵

$$\frac{u}{U} = 1 + (\eta - 1)^3 \left(1 + \frac{4}{3}\eta + \eta^2 + a_2 \frac{1}{2}(\eta + \eta^2) \right), \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (4.16)$$

Dabei ist für ein anliegendes Grenzschichtprofil $a_2 = -\frac{\lambda}{2}$. Zunächst soll der a_2 -freie Teil des Geschwindigkeitsprofils nach Gl. 4.16 behandelt werden, er entspricht dem Blasius–Profil für die ebene Platte ohne Druckgradient und wird im folgenden mit u_1 bezeichnet. Für u_1 gelten nach Gl. 4.16 folgende Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \eta = 0 : \frac{u_1}{U} = 0, & \quad \frac{1}{U} \frac{du_1}{d\eta} = \frac{5}{3}, & \quad \frac{1}{U} \frac{d^2 u_1}{d\eta^2} = 0, & \quad \frac{1}{U} \frac{d^3 u_1}{d\eta^3} = 0 \\ \eta = 1 : \frac{u_1}{U} = 1, & \quad \frac{1}{U} \frac{du_1}{d\eta} = 0, & \quad \frac{1}{U} \frac{d^2 u_1}{d\eta^2} = 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

In der im folgenden entwickelten Näherungsdarstellung sollen die Randbedingungen bei $\eta = 0$ erhalten bleiben, während diejenigen für $\eta = 1$ jetzt im Unendlichen erfüllt werden. Dazu wird u_1 folgendermaßen dargestellt:

$$\frac{u_1}{U} = 1 + c_1 \eta e^{-\alpha_1 \eta} - e^{-\alpha_2 \eta} \quad (4.18)$$

⁵vgl. hierzu auch Abb. 3.3.

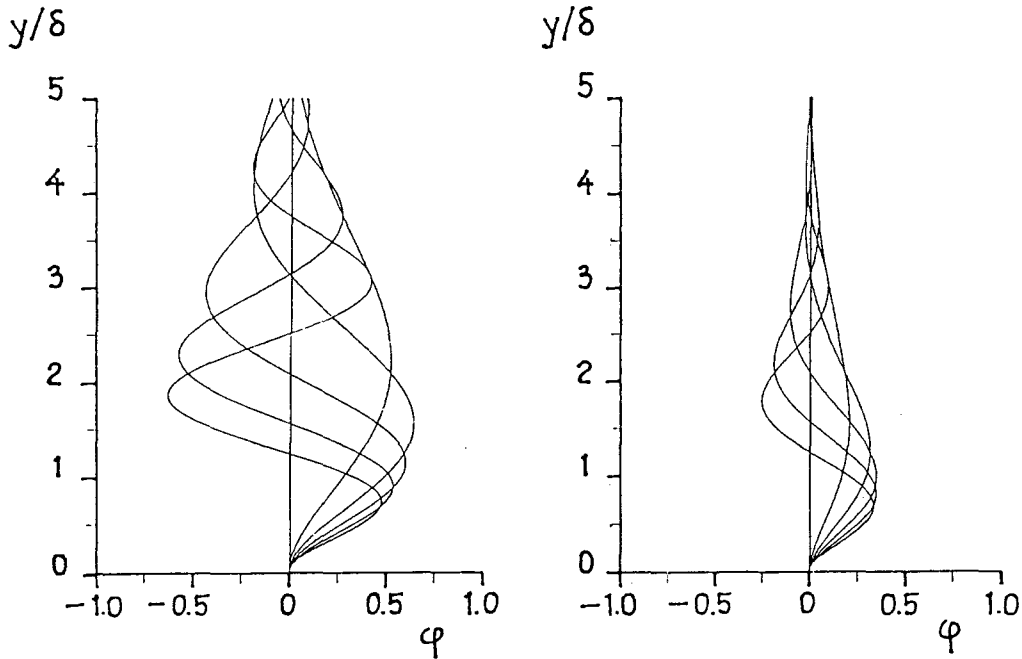


Abbildung 4.1: Ansatzfunktionen zur Approximation des Eigenspektrums, $2m-1 = 0 \dots 4$, links: $\alpha\delta = 1$, rechts: $\alpha\delta = 0.5$

Gl. 4.18 liefert zusammen mit den Randbedingungen Gl. 4.17 folgende Bedingungen für die freien Konstanten α_1, α_2 und c_1 :

$$\frac{5}{3} = c_1 + \alpha_2, \quad 0 = -2c_1\alpha_1 - \alpha_2^2, \quad 0 = 3c_1\alpha_1^2 - \alpha_2^3 \quad (4.19)$$

Als Lösung ergibt sich:

$$c_1 = -5, \quad \alpha_1 = \frac{40}{9}, \quad \alpha_2 = \frac{20}{3} \quad (4.20)$$

Der von a_2 abhängige Teil des Geschwindigkeitsprofils u_2 wird analog behandelt. Hier ergeben sich nach Gl. 4.16 folgende Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \eta = 0 : \frac{u_2}{U} = 0, \quad \frac{1}{U} \frac{du_2}{d\eta} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{U} \frac{d^2u_2}{d\eta^2} = 2, \quad \frac{1}{U} \frac{d^3u_2}{d\eta^3} = 0 \\ \eta = 1 : \frac{u_2}{U} = 0, \quad \frac{1}{U} \frac{du_2}{d\eta} = 0, \quad \frac{1}{U} \frac{d^2u_2}{d\eta^2} = 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Genau wie vorher bleiben die Randbedingungen für $\eta = 0$ erhalten, alle anderen werden wieder bei $\eta = \infty$ erfüllt. Der Ansatz für u_2 lautet:

$$\frac{u_2}{U} = (c_3\eta + c_4\eta^2) e^{-\alpha_3\eta} \quad (4.22)$$

Die Randbedingungen liefern

$$-\frac{1}{2} = c_3 \quad 0 = -2c_3\alpha_3 + 2c_4, \quad 0 = \alpha_3^2c_3 - 2\alpha_3c_4 \quad (4.23)$$

mit der Lösung:

$$c_3 = -\frac{1}{2}, \quad c_4 = -1, \quad \alpha_3 = 4 \quad (4.24)$$

Damit kann das durch den fünfgliedrigen Polynomansatz dargestellte Grenzschichtprofil im Bereich $0 \leq \eta < \infty$ mit $a_2 = -\frac{\lambda}{2}$ angegeben werden:

$$\frac{u}{U} = 1 - 5\eta e^{-\frac{40}{3}\eta} - e^{-\frac{20}{3}\eta} + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\eta}{2} + \eta^2 \right) e^{-4\eta} \quad (4.25)$$

Die Berechnung der Matrixkoeffizienten kann nun unter Zuhilfenahme der Integralformeln Gl. 4.9 durchgeführt werden, dabei sind alle in Gl. 4.9 auftretenden Integrale exakt analytisch auswertbar.⁶

4.2.4 Berechnung des Instabilitätspunktes für ein gegebenes Grenzschichtprofil

Im folgenden wird die Stabilitätsuntersuchung für die durch den Formparameter λ gekennzeichneten Grenzschichtprofile nach Marzi ([41]) dargestellt. Hierzu ist es notwendig, für das zu untersuchende Profil eine Neutralkurve zu berechnen. Ein Punkt auf dieser Neutralkurve ist grundsätzlich nach Gl. 4.11 durch eine derartige Kombination von $\alpha\delta$ und Re_δ gekennzeichnet, daß der Eigenwert der zugehörigen Mode in Gl. 4.11 rein reell ist. Die Lösung des Eigenwertproblems Gl. 4.11 liefert nun M Eigenwerte⁷ mit M Frequenzen und Anfachungsgrößen. Es zeigt sich, daß in dem für die Stabilitätsuntersuchung wesentlichen Bereich von Re_δ nur jeweils eine einzige angefachte Mode existiert (vgl. [16]), alle anderen sind stets eindeutig gedämpft, erst bei deutlich größeren Re_δ -Werten existieren weitere angefachte Moden.

⁶Die Auswertung erfolgt mit folgenden Integralformeln:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\Lambda\eta} \cos M\eta \cos N\eta d\eta &= \frac{\frac{\Lambda}{2}}{\Lambda^2 + (M - N)^2} + \frac{\frac{\Lambda}{2}}{\Lambda^2 + (M + N)^2} \\ \int_0^\infty e^{-\Lambda\eta} \sin M\eta \sin N\eta d\eta &= \frac{\frac{\Lambda}{2}}{\Lambda^2 + (M - N)^2} - \frac{\frac{\Lambda}{2}}{\Lambda^2 + (M + N)^2} \\ \int_0^\infty e^{-\Lambda\eta} \sin M\eta \cos N\eta d\eta &= \frac{\frac{1}{2}(M - N)}{\Lambda^2 + (M - N)^2} + \frac{\frac{1}{2}(M + N)}{\Lambda^2 + (M + N)^2} \\ \int_0^\infty e^{-\Lambda\eta} \eta \cos M\eta \cos N\eta d\eta &= \frac{1}{2} \frac{\Lambda^2 - (M - N)^2}{(\Lambda^2 + (M - N)^2)^2} + \frac{1}{2} \frac{\Lambda^2 - (M + N)^2}{(\Lambda^2 + (M + N)^2)^2} \\ \int_0^\infty e^{-\Lambda\eta} \eta \sin M\eta \sin N\eta d\eta &= \frac{1}{2} \frac{\Lambda^2 - (M - N)^2}{(\Lambda^2 + (M - N)^2)^2} - \frac{1}{2} \frac{\Lambda^2 - (M + N)^2}{(\Lambda^2 + (M + N)^2)^2} \\ \int_0^\infty e^{-\Lambda\eta} \eta \sin M\eta \cos N\eta d\eta &= \frac{\Lambda(M - N)}{(\Lambda^2 + (M - N)^2)^2} + \frac{\Lambda(M + N)}{(\Lambda^2 + (M + N)^2)^2} \\ \int_0^\infty e^{-\Lambda\eta} \eta^2 \cos M\eta \cos N\eta d\eta &= \frac{3\Lambda(M - N)^2 - \Lambda^3}{(\Lambda^2 + (M - N)^2)^3} + \frac{3\Lambda(M + N)^2 - \Lambda^3}{(\Lambda^2 + (M + N)^2)^3} \\ \int_0^\infty e^{-\Lambda\eta} \eta^2 \sin M\eta \sin N\eta d\eta &= \frac{3\Lambda(M - N)^2 - \Lambda^3}{(\Lambda^2 + (M - N)^2)^3} - \frac{3\Lambda(M + N)^2 - \Lambda^3}{(\Lambda^2 + (M + N)^2)^3} \\ \int_0^\infty e^{-\Lambda\eta} \eta^2 \sin M\eta \cos N\eta d\eta &= \frac{(M - N)^3 - 3\Lambda^2(M - N)}{(\Lambda^2 + (M - N)^2)^3} + \frac{(M + N)^3 - 3\Lambda^2(M + N)}{(\Lambda^2 + (M + N)^2)^3} \end{aligned}$$

⁷Für Rechnungen zur Ermittlung des Instabilitätspunktes reichen $M=20$ Ansatzfunktionen zur Approximation des Eigenspektrums aus.

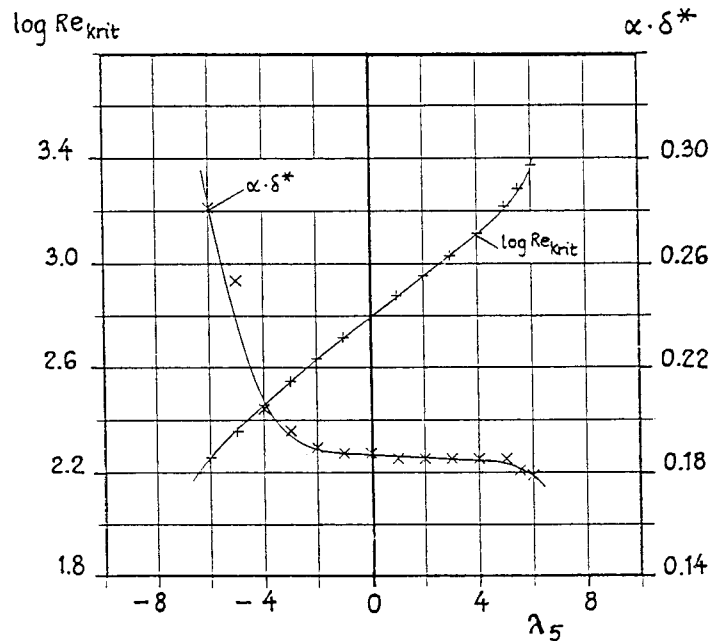


Abbildung 4.2: Kritische Reynoldszahl $\log Re_{\delta^*}$ (+) und zugehörige neutrale Störwellenzahl $\alpha \delta^*$ (x) für verschiedene Grenzschichtprofile

Der Instabilitätspunkt des betrachteten Geschwindigkeitsprofils ist nun durch den kleinstmöglichen Wert von Re_{δ} gegeben, für den eine solche neutrale Störung existiert (vgl. Abb. 4.3 links). Zur Berechnung des Instabilitätspunktes wird für eine vorgegebene Störwellenlänge $\alpha \delta$ der Wert von Re_{δ} so bestimmt, daß die Lösung der Gl. 4.11 einen rein reellen Eigenwert liefert und gleichzeitig diejenige Störwellenlänge gesucht wird, für die dieser Wert von Re_{δ} das absolute Minimum annimmt. Abb. 4.2 zeigt die Ergebnisse solcher Stabilitätsuntersuchungen für verschiedene Grenzschichtprofile. Dort sind die neutralen Störwellenzahlen und der Logarithmus der Reynoldszahl im Instabilitätspunkt in Abhängigkeit des Formparameters λ dargestellt; beide Größen sind hier nicht auf die Grenzschichtdicke δ , sondern auf die Verdrängungsdicke δ^* bezogen.⁸ Das Verfahren berechnet die kritische Reynoldszahl für das Blasius-Profil ($\lambda = 0$) in befriedigender Übereinstimmung mit der Literatur (z.B. [49, 48, 12, 30]) zu etwa 630, die zugehörige Störwellenzahl $\alpha \delta^*$ ergibt sich zu 0.196.⁹

Ferner liefert es ein Absinken der kritischen Reynoldszahl für Geschwindigkeitsprofile mit positivem Druckgradienten, wohingegen Geschwindigkeitsprofile mit negativem

⁸Die Verdrängungsdicke δ^* ergibt sich (z. B. nach [48]) etwa zu $\delta^* = 0.341\delta$.

⁹In neueren Arbeiten [12, 30] zu diesem Gebiet wird die kritische Reynoldszahl des Blasius-Profiles mit etwa 580 angegeben. Dieser Unterschied ergibt sich daraus, daß hier für dieses Profil die Näherungsdarstellung im Sinne des Kármán-Pohlhausen-Verfahrens verwendet wurde. Der Einfluß dieser Näherung auf die Ergebnisse der Stabilitätsrechnung wurde schon von Schlichting [48] untersucht. Dabei ergab die exakte Blasius-Lösung eine kritische Reynoldszahl von 575. Im Vergleich dazu lieferte die Näherungslösung mit vier Polynomgliedern $Re_{krit} = 1150$, ein verbesserter Ansatz mit sechs Polynomgliedern brachte $Re_{krit} = 645$.

Druckgradienten eine deutlich höhere Stabilitätsgrenze haben. Es zeigt sich, daß für den praktisch bedeutsamen Bereich des Formparameters λ , der etwa durch die Lage des Druckminimums ($\lambda = 0$) bestimmt wird, die kritische Reynoldszahl der Geschwindigkeitsprofile nach Marzi [41] durch folgenden Ausdruck angegeben werden kann:

$$\log Re_{\delta^*} = 2.800 + 0.087\lambda \quad (4.26)$$

Außerdem erkennt man, daß Geschwindigkeitsprofile mit positivem Druckgradienten bei größeren Störwellenzahlen instabil werden als solche mit negativem Druckgradienten.

Die Berechnung des Instabilitätspunktes einer technischen Grenzschichtströmung (z.B. für ein Tragflügelprofil) erfolgt dann in der Weise, daß die profilspezifische Funktion $Re_{\delta^*}(\lambda)$ mit der universellen Gl. 4.26 zum Schnitt gebracht wird.

4.2.5 Grundlagen der zeitlichen e^n -Methode

Der vorher berechnete Instabilitätspunkt stellt für eine Grenzschichtströmung den am weitesten stromaufwärts gelegenen Punkt dar, an dem angefachte Störwellen existieren. Es kommt im folgenden darauf an, stromabwärts das Anfachungsverhalten dieser Störwellen zu untersuchen und dieses mit experimentellen Beobachtungen so in Verbindung zu bringen, daß eine rechnerische Vorhersage des Transitionspunktes mit dieser Theorie möglich ist.

Die Untersuchung des Anfachungsverhaltens dieser Störwellen erfordert allerdings die Lösung des räumlichen Anfachungsproblems, das heißt, die Wellenzahl α ist komplex ($\alpha = \alpha_{\Re} + i\alpha_{\Im}$), während nun die Frequenz β rein reell ist. Dabei ist α_{\Im} die räumliche Anfachungsrate der betrachteten Störung ($\alpha_{\Im} > 0$ bedeutet Dämpfung, $\alpha_{\Im} < 0$ Anfachung). Über das für den Energiegehalt des Störwellensystems maßgebliche Amplitudenverhältnis an einer stromabwärts des Instabilitätspunktes x_I gelegenen Stelle x kann dort ein räumlicher Anfachungsfaktor einer solchen Störbewegung angegeben werden (z. B. [7, 54]):

$$\ln A(x) = - \int_{x_I}^x \alpha_{\Im}(x) dx \quad (4.27)$$

Die Lösung des räumlichen Anfachungsproblems ist jedoch wesentlich aufwendiger als die des zeitlichen (Gl. 4.6 ist in α von vierter Ordnung). Gaster ([16, 17, 18, 20, 21]) hat jedoch gezeigt, daß sich das räumliche Anfachungsproblem näherungsweise durch folgende Transformation in das zeitliche überführen läßt:

$$\alpha_{\Im} \simeq \frac{\beta_{\Im}}{v_{gr}}, \quad v_{gr} = \frac{\partial \beta_{\Re}}{\partial \alpha} \quad (4.28)$$

Dabei ist α_{\Im} der Imaginärteil der Wellenzahl des räumlichen Anfachungsproblems, β_{\Im} , β_{\Re} und α bezeichnen Größen des entsprechenden zeitlichen Problems, und v_{gr} bedeutet die Gruppengeschwindigkeit der betrachteten zeitlich angefachten Störbewegung.¹⁰

¹⁰Eine numerisch zuverlässige Bestimmung der Gruppengeschwindigkeit ist allerdings nur mit hohem Rechenaufwand durchzuführen, denn sie erfordert die Differentiation zweier unmittelbar in α benachbarter Eigenwertlösungen der Gl. 4.11 nach α . Da die Gruppengeschwindigkeit in grober Näherung etwa gleich der Phasengeschwindigkeit ist [16], kann auch in Gl. 4.28 die Phasengeschwindigkeit verwendet werden. Diese Näherung schränkt die praktische Bedeutung der Theorie nicht ein, da die so ermittelte Anfachungsrate auf jeden Fall unter Verwendung von Experimenten auf die Lage des Transitionspunktes kalibriert werden muß.

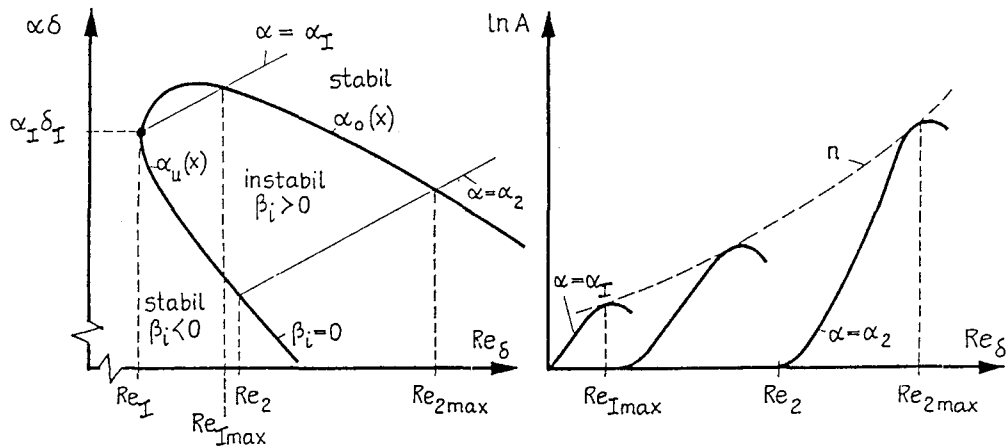


Abbildung 4.3: Bestimmung der Anfachsungsrate für eine Grenzschichtströmung

Abb. 4.3 zeigt die grundsätzliche Vorgehensweise bei der Ermittlung der räumlichen Anfachsungsrate. Dort ist die zeitliche Neutralkurve ($\beta_{\Im} = 0$) für eine Grenzschichtströmung über der Reynoldszahl Re_{δ} (gleichbedeutend mit der Lauflänge x) eingetragen. Hat die betrachtete Grundströmung einen Druckgradienten, dann liegt an jeder Stelle x ein anderes Geschwindigkeitsprofil vor, das jeweils durch $U(x)$ und $\lambda(x)$ charakterisiert ist. An der Stelle x_I bzw. Re_I liege der Instabilitätspunkt der betrachteten Grenzschichtströmung, hier existieren zeitlich neutrale Störungen der Wellenzahl $(\alpha\delta)_I$. Stromabwärts davon existiert nun eine Bandbreite von angefachten Störungen, charakterisiert durch den oberen und unteren Ast der Neutralkurve (α_o, α_u). Außerhalb dieses Wellenzahlbereiches sind alle Störungen gedämpft. Verfolgt man beispielsweise die Störung, die zur Instabilität geführt hat, weiter stromabwärts ($\alpha = \alpha_I$), so erkennt man, daß diese Störung zunächst angefacht wird, dann aber für $Re_{\delta} > Re_{I\max}$, wo ein weiterer Neutralpunkt existiert, wieder gedämpft ist. Berechnet man nun nach Gl. 4.27 unter Verwendung von Gl. 4.28 die räumliche Anfachsungsrate $\ln A(x)$, so ergibt sich für diese Störung der in Abb. 4.3 rechts gezeigte prinzipielle Verlauf der Anfachsungsrate. Eine weitere betrachtete Störwelle der Wellenzahl $\alpha = \alpha_2$ tritt erst bei $Re_{\delta} = Re_2$ in den instabilen Bereich ein, der entsprechende Verlauf der Anfachsungsrate ist in Abb. 4.3 rechts eingetragen. Man muß nun das Anfachsungsverhalten vieler solcher Störungen untersuchen, der sogenannte n -Faktor wird dann als die Einhüllende der auf diese Weise erhaltenen Anfachsungsraten definiert (gestrichelte Kurve in Abb. 4.3 rechts). Ein Vergleich mit experimentell ermittelten Transitionspunkten zeigt, daß der turbulente Umschlag eintritt, wenn n etwa den Wert 9 erreicht ([7, 54]). Das geschilderte Verfahren ist sehr rechenintensiv, da zur theoretischen Vorhersage des Umschlagspunktes eine Reihe von Störwellen mit jeweils konstanter Frequenz β_{\Re} untersucht werden muß, bis man diejenige Störbewegung ermittelt hat, die dann letztendlich nach dieser Theorie zum Umschlag führt.

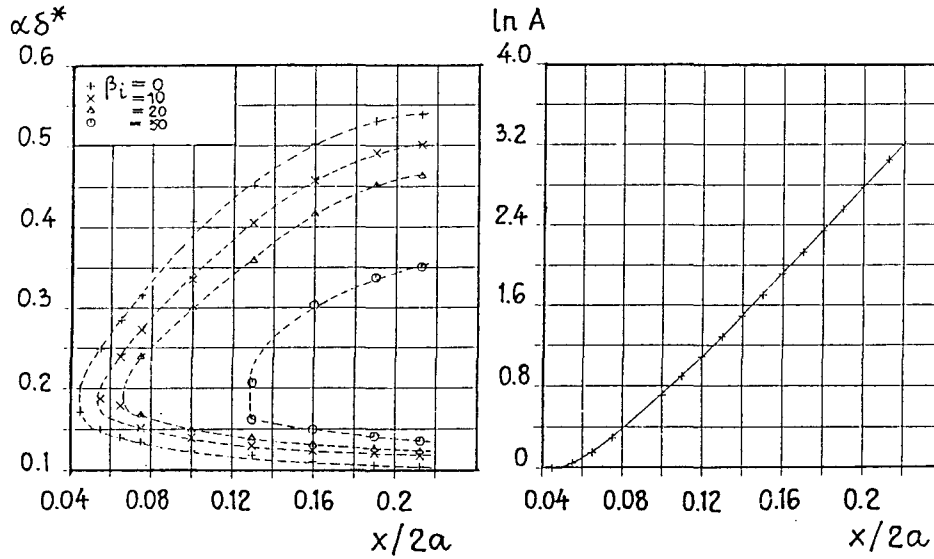


Abbildung 4.4: Anfachungsverhältnisse (links) und Anfachungsrate $\ln A^*$ (rechts) an einem Profil J 105, $\beta_s = 3.25^\circ$, $Re = 1 \cdot 10^6$

4.2.6 Die Berechnung des Transitionspunktes mit einer vereinfachten e^n -Methode

Im folgenden wird eine wesentliche Vereinfachung der oben angegebenen e^n -Methode entwickelt. Anstelle der in Gl. 4.27 definierten Anfachungsrate für eine feste Frequenz $\beta_{\mathfrak{R}}$ wird eine integral über alle angefachten Störwellen gemittelte Anfachungsrate verwendet, die an einer Stelle $x > x_I$ folgendermaßen definiert ist:

$$\ln A^*(x) = \int_{x_I}^x \frac{1}{\alpha_o(x) - \alpha_u(x)} \int_{\alpha_u(x)}^{\alpha_o(x)} \alpha_i(x) d\alpha dx \simeq \int_{x_I}^x \frac{1}{\alpha_o(x) - \alpha_u(x)} \int_{\alpha_u(x)}^{\alpha_o(x)} \frac{\beta_{\mathfrak{S}}(x)\alpha(x)}{\beta_{\mathfrak{R}}(x)} d\alpha dx \quad (4.29)$$

Hierbei wurde die Gaster-Transformation (Gl. 4.28) ausgenutzt, außerdem wurde $v_{gr} \simeq v$ gesetzt, $\beta_{\mathfrak{S}}$ und $\beta_{\mathfrak{R}}$ ergeben sich jeweils als Lösung des Eigenwertproblems nach Gl. 4.11 für eine gegebene Kombination von $\alpha\delta$ und Re_δ . Es kommt nun darauf an, diese Anfachungsrate $\ln A^*$ anhand von experimentellen Ergebnissen so zu kalibrieren, daß eine rechnerische Vorhersage des Transitionspunktes möglich ist. Im folgenden wird angenommen, daß die Lage des Transitionspunktes durch die auf experimentellen Untersuchungen basierende empirische Beziehung zwischen Lauflänge x_{tr} und Impulsverlustdicke θ_{tr} von Cebeci und Bradshaw ([8, 9])

$$\left(\frac{U\theta}{\nu}\right)_{tr} = 1.174 \left(1 + 22400 \frac{\nu}{Ux_{tr}}\right) \left(\frac{Ux}{\nu}\right)_{tr}^{0.46} \quad (4.30)$$

bestimmt werden kann. In Gl. 4.30 bedeutet θ_{tr} die Impulsverlustdicke im Transitionspunkt, x_{tr} die entsprechende Lauflänge auf der Körperkontur, beginnend im Staupunkt. Es zeigt sich nun, daß zwischen der nach Gl. 4.30 bestimmten Lage des Transitionspunk-

tes, der ermittelten Lage des Instabilitätspunktes und der in Gl. 4.29 definierten integralen Anfachungsrate folgender Zusammenhang aufgestellt werden kann:

$$\left(\frac{U\theta}{\nu}\right)_{tr} = \left(\frac{U\theta}{\nu}\right)_I \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{c_0 \ln A^*}}}\right), \quad c_0 = \frac{10^6}{Re_0} \quad (4.31)$$

Dabei bedeuten $\left(\frac{U\theta}{\nu}\right)_{tr}$ und $\left(\frac{U\theta}{\nu}\right)_I$ die auf die Impulsverlustdicke im Transitionsunkt bzw. Instabilitätspunkt bezogenen örtlichen Reynoldszahlen, Re_0 ist die mit der Anströmgeschwindigkeit und Sehnenlänge gebildete Profilreynoldszahl.

Abb. 4.4 zeigt exemplarisch die Anfachungsverhältnisse an einem Joukowski-Profil mit 10.5% relativer Dicke. Der mittlere Anstellwinkel beträgt $\beta_s = 3.25^\circ$, die Profilreynoldszahl $Re = 1 \cdot 10^6$. Das linke Bild zeigt die Neutralkurve ($\beta_{\mathfrak{N}} = 0$) sowie weitere Kurven mit jeweils konstantem β_i . Rechts ist der Verlauf der nach dieser Theorie ermittelten integralen Anfachungsrate über der Profelsehnenkoordinate dargestellt.

4.2.7 Ergebnisse der stationären Theorie

Die oben angegebene stationäre Theorie soll nun an verschiedenen Tragflügelprofilen erprobt werden. Zum Vergleich werden die von Gasau [22] zusammengestellten Ergebnisse herangezogen. Berechnet wurden die Grenzschichtcharakteristika für die Profile NACA 0015, NACA 4412 und NACA 16-012 bei verschiedenen Anstellwinkeln jeweils für die Profilreynoldszahlen $1 \cdot 10^6, 2 \cdot 10^6, 3 \cdot 10^6$ und $4 \cdot 10^6$; die Ergebnisse sind in den Abb. 4.5 bis 4.10 dargestellt. Dort sind jeweils die von der Profilreynoldszahl unabhängigen laminaren Ablösepunkte eingetragen, ferner die mit der hier vorgestellten Theorie berechneten Instabilitäts- und Transitionsunkte. Zu Vergleichszwecken wurden auch die nach der empirischen Formel von Cebeci ermittelten Transitionsunkte eingezeichnet.¹¹ Die Übereinstimmung der Transitionsunkte nach Cebeci mit denen der modifizierten e^n -Methode ist für die Profile NACA 0015 und NACA 4412 insgesamt sehr gut, lediglich bei dem NACA 16-012-Profil ergeben sich bei den Anstellwinkeln 0° und 1° größere Abweichungen, hier liegen die Werte nach Cebeci deutlich weiter hinten. Dabei muß man jedoch berücksichtigen, daß die Formel von Cebeci bei kleinen Anstellwinkeln tendenziell Transitionsunkte ermittelt, die zu weit hinten liegen. Bei der Beurteilung der Frage, ob laminare Ablösung oder natürlicher Umschlag vorliegt, liefern beide Methoden stets das gleiche Ergebnis.

¹¹Das Grenzschichtrechenverfahren endet mit Erreichen der laminaren Ablösung; kommt es bis dahin nicht zum turbulenten Umschlag, ist dies in den Abb. dadurch angedeutet, daß die entsprechenden Kurven zusammenfallen.

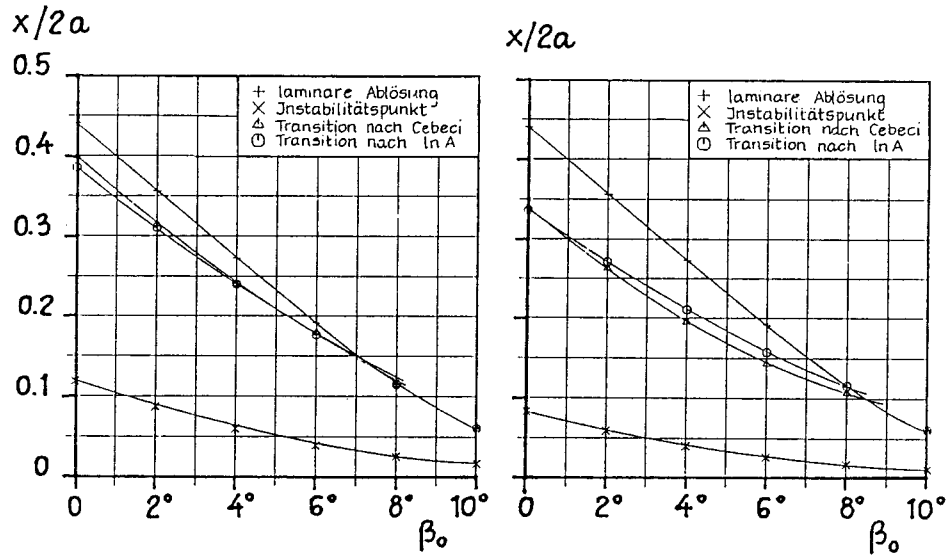


Abbildung 4.5: Grenzschichtcharakteristik des Profils NACA 0015, links: $Re = 1 \cdot 10^6$
rechts: $Re = 2 \cdot 10^6$

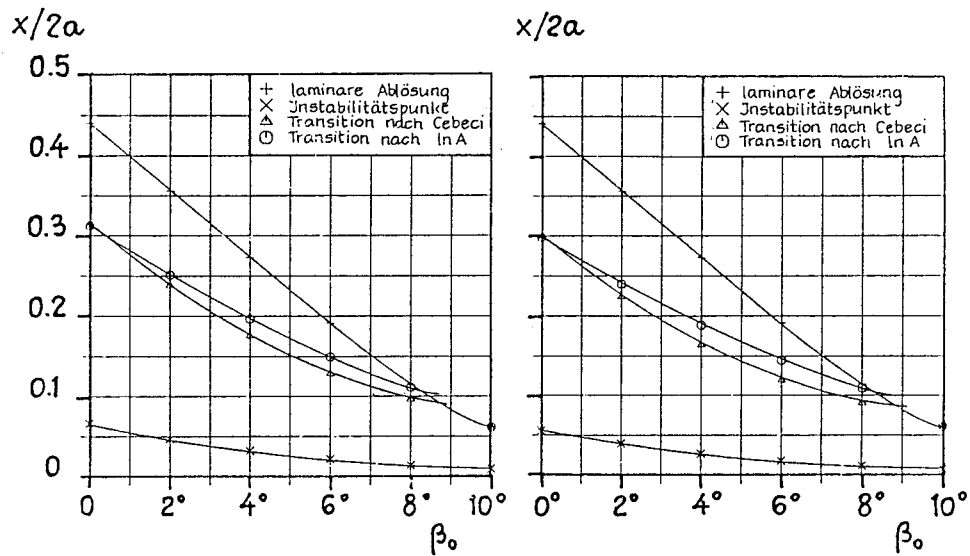


Abbildung 4.6: Grenzschichtcharakteristik des Profils NACA 0015, links: $Re = 3 \cdot 10^6$
rechts: $Re = 4 \cdot 10^6$

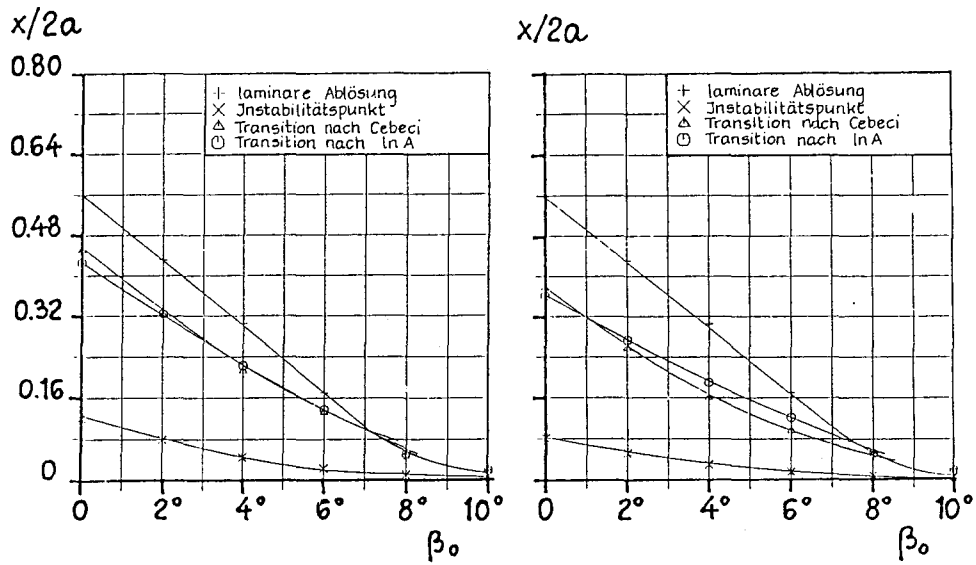


Abbildung 4.7: Grenzschichtcharakteristik des Profils NACA 4412, links: $Re = 1 \cdot 10^6$ rechts: $Re = 2 \cdot 10^6$

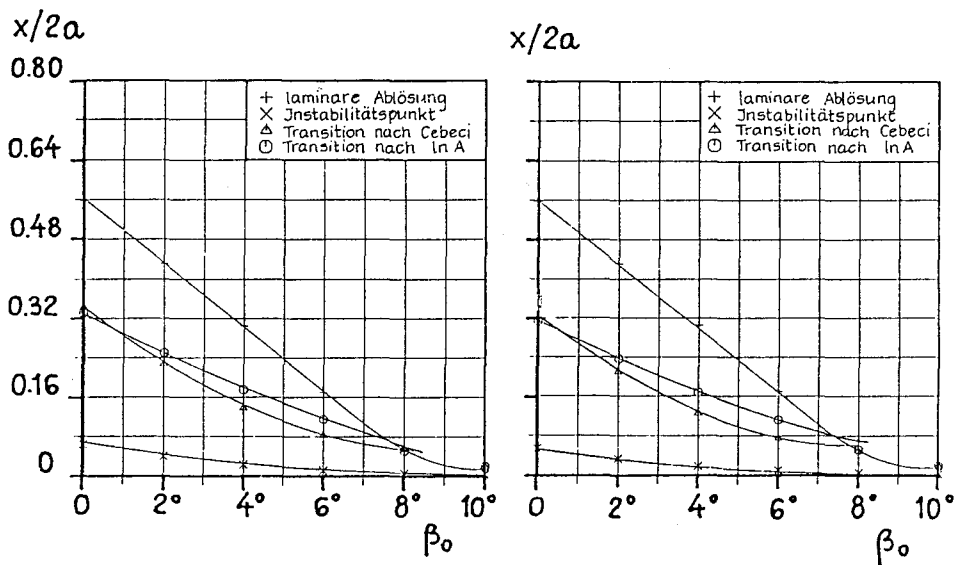


Abbildung 4.8: Grenzschichtcharakteristik des Profils NACA 4412, links: $Re = 3 \cdot 10^6$ rechts: $Re = 4 \cdot 10^6$

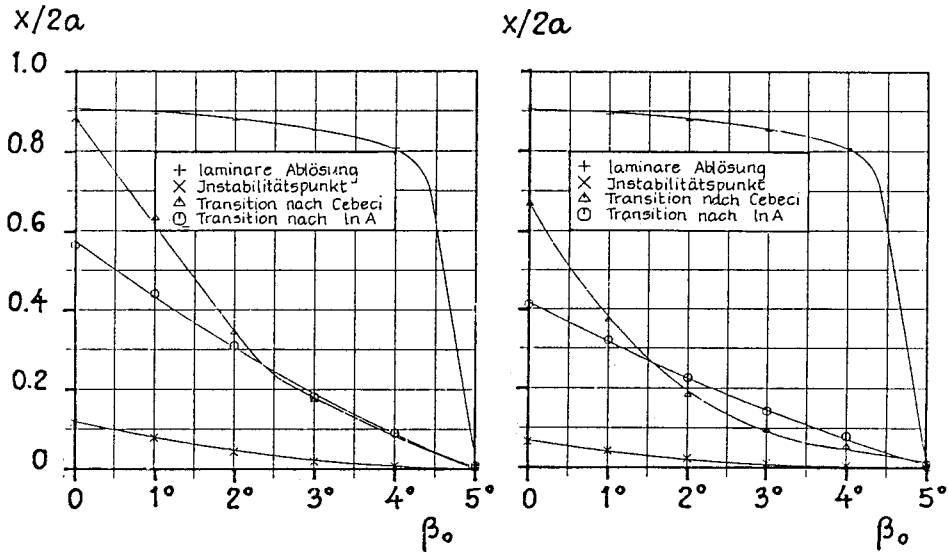


Abbildung 4.9: Grenzschichtcharakteristik des Profils NACA 16-012, links: $Re = 1 \cdot 10^6$
rechts: $Re = 2 \cdot 10^6$

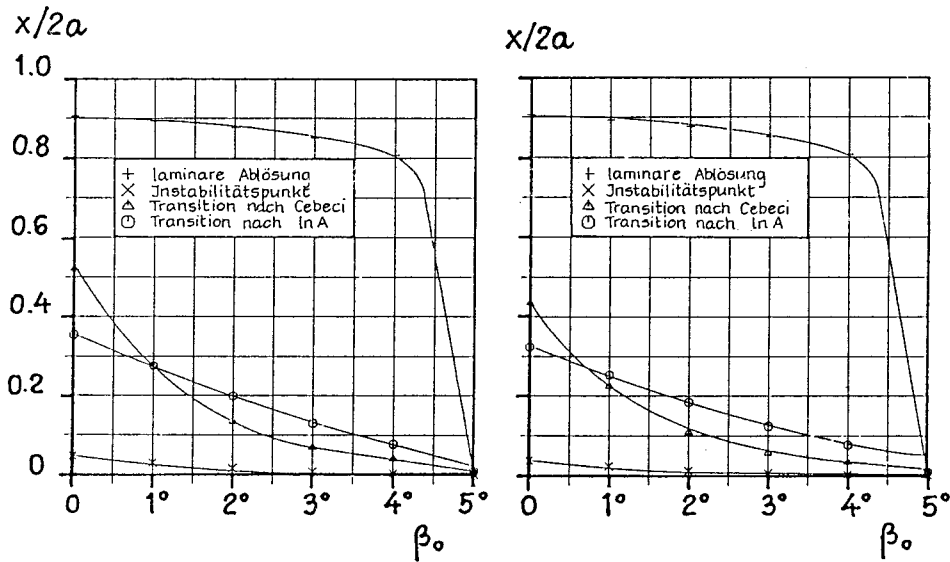


Abbildung 4.10: Grenzschichtcharakteristik des Profils NACA 16-012, links: $Re = 3 \cdot 10^6$
rechts: $Re = 4 \cdot 10^6$

4.3 Stabilitätstheorie instationärer Grenzschichten

4.3.1 Grundlagen der Stabilitätstheorie für instationäre Grenzschichten

Die vorgelegte Grundströmung ist nun auch noch von der Zeit abhängig:

$$u(y, t); \quad 0; \quad p(x, y, t). \quad (4.32)$$

Die Form der überlagerten Störungsbewegung lautet wie im stationären Fall:

$$u'(x, y, t); \quad v'(x, y, t); \quad p'(x, y, t). \quad (4.33)$$

Damit erhält man zunächst aus den Navier–Stokesschen Gleichungen die linearisierten Impulsbeziehungen

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u'}{\partial t} + u \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \nu \Delta u' \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + u \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} = \nu \Delta v' \quad (4.35)$$

sowie die Kontinuitätsgleichung der Störströmung:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \quad (4.36)$$

Genau wie im stationären Fall muß die betrachtete Grundströmung selbst Lösung der Navier–Stokesschen Gleichungen sein:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.37)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (4.38)$$

Damit vereinfachen sich die Gln. 4.34 und 4.35 zu:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + u \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} = \nu \Delta u' \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + u \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} = \nu \Delta v' \quad (4.40)$$

Die Störströmung wird wieder durch eine Stromfunktion $\psi(x, y, t)$ beschrieben:

$$\psi(x, y, t) = \varphi(y, t) e^{i(\alpha x - B(t))} \quad (4.41)$$

Eine von einer quasistationären Lösung ausgehende Überlegung zeigt, daß die Amplitudenfunktion φ jetzt zeitabhängig sein muß, denn für eine gegebene instationäre Grenzschicht würde schon eine quasistationäre Auswertung der Orr–Sommerfeld–Gleichung an einer festen Stelle x zu jedem Zeitpunkt eine andere Amplitudenfunktion φ liefern. Ferner liefert die quasistationäre Betrachtungsweise die Erkenntnis, daß bei den hier betrachteten periodisch instationären Vorgängen die Amplitudenfunktion φ selbst auch periodisch zeitabhängig sein muß.¹² Diese Überlegungen führen ferner darauf, daß auch die komplexe

¹² Würde man die Amplitudenfunktion φ von vorne herein zeitunabhängig ansetzen, dann ergibt sich auch für die zugrundegelegte instationäre Basisgrenzschicht wieder die stationäre Form der Orr–Sommerfeld–Gleichung (Gl. 4.6), man erhält also mit den jeweiligen momentanen Kenngrößen der instationären Grenzschicht lediglich eine quasistationäre Lösung.

Frequenz β periodisch zeitabhängig sein muß; daher wird zunächst in Gl. 4.41 eine beliebig zeitabhängige Frequenzfunktion $B(t)$ eingeführt. Dann entscheidet die zeitliche Ableitung der Frequenzfunktion $\dot{B}(t) = \dot{B}_{\Re}(t) + i\dot{B}_{\Im}(t)$ über das zeitliche Anwachsen oder Abklingen der jeweiligen Störung, $\dot{B}_{\Im} > 0$ bedeutet zeitliche Anfachung, $\dot{B}_{\Im} < 0$ Dämpfung, des weiteren muß $\dot{B}(t)$ periodisch sein. Nun ist es möglich, daß an einem festen Ort Anfachung oder Dämpfung jeweils nur über bestimmte Zeiträume hin existieren. Für die einzelnen Komponenten der Störungsgeschwindigkeiten ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} u' &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} e^{i(\alpha x - B(t))} \\ v' &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -i\alpha \varphi e^{i(\alpha x - B(t))} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Damit erhält man zunächst aus den Gln. 4.39 und 4.40 nach der Elimination des Druckes p' :

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^2 \partial t} + u \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^2 \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial t} + u \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = \nu \Delta \Delta \psi \quad (4.43)$$

Unter Verwendung von Gl. 4.42 ergibt sich schließlich wie im stationären Fall eine Differentialgleichung vierter Ordnung für die Amplitudenfunktion $\varphi(y, t)$:

$$\nu \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} - 2\alpha^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \alpha^4 \varphi \right) - i(\alpha u - \dot{B}) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \alpha^2 \varphi \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \alpha^2 \varphi \right) + i\alpha \varphi \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (4.44)$$

Diese Gleichung stellt analog zum stationären Fall eine zeitabhängige Orr-Sommerfeld-Gleichung dar (vgl. Gl. 4.6), in der nun zusätzlich der Term $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \alpha^2 \varphi \right)$ auftritt.

4.3.2 Approximation des Eigenspektrums

Im folgenden wird ein Lösungsverfahren für den instationären Fall geschildert, das es gestattet, die Zeitabhängigkeit der gesuchten Amplitudenfunktion $\varphi(y, t)$ vollständig abzuspalten, so daß die daraus entstehenden Beziehungen im wesentlichen mit den bereits bekannten Methoden des stationären Problems behandelt werden können.

Die instationäre Grundströmung läßt sich entsprechend Gl. 4.25 folgendermaßen darstellen:

$$u(y, t) = U(t) \left[\frac{u_1}{U(t)} + \lambda(t) \frac{u_2}{U(t)} \right] \quad (4.45)$$

Dabei sind die der Grenzschicht aufgeprägte Potentialströmung U sowie der Formparameter λ zeitabhängig. Bedenkt man nun, daß die hier untersuchten instationären Vorgänge mit der Kreisfrequenz der Profilanstellwinkeländerung ω periodisch sind, so läßt sich die Grundströmung dadurch approximieren, daß λ und U jeweils in einer Fourierreihe entwickelt werden:¹³

$$\begin{aligned} U(t) &= u_0 + u_{s1} \sin \omega t + u_{c1} \cos \omega t + u_{s2} \sin 2\omega t + u_{c2} \cos 2\omega t + \dots \\ \lambda(y, t) &= \lambda_0 + \lambda_{s1} \sin \omega t + \lambda_{c1} \cos \omega t + \lambda_{s2} \sin 2\omega t + \lambda_{c2} \cos 2\omega t + \dots \end{aligned} \quad (4.46)$$

¹³Diese Darstellung dient lediglich dazu, einen plausiblen Ansatz für die Amplitudenfunktion φ zu finden, in allen anderen unten angegebenen Formeln wird stets die aus der laminaren Rechnung bekannte Geschwindigkeit $U(y, t)$ verwendet werden.

Dann kann die nun zeitabhängige Amplitudenfunktion $\varphi(y, t)$ ebenfalls in Form einer Fourierreihe angesetzt werden:

$$\varphi(y, t) = \varphi_0 + \varphi_{s1} \sin \omega t + \varphi_{c1} \cos \omega t + \varphi_{s2} \sin 2\omega t + \varphi_{c2} \cos 2\omega t + \dots \quad (4.47)$$

Für die untersuchten Fälle der Drehschwingungen von Tragflügeln hat sich nun gezeigt, daß es ausreichend genau ist, diese Reihe nach dem dritten Glied abzubrechen.¹⁴ Setzt man diesen Ansatz für φ in Gl. 4.44 ein, dann ergibt sich folgende Form der instationären Orr–Sommerfeld–Gleichung:

$$\begin{aligned} & \nu \left(\frac{\partial^4 \varphi_0}{\partial y^4} - 2\alpha^2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} + \alpha^4 \varphi_0 \right) - i (\alpha u - \dot{B}) \left(\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} - \alpha^2 \varphi_0 \right) + i \alpha \varphi_0 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ & \sin \omega t \left[\nu \left(\frac{\partial^4 \varphi_S}{\partial y^4} - 2\alpha^2 \frac{\partial^2 \varphi_S}{\partial y^2} + \alpha^4 \varphi_S \right) - i (\alpha u - \dot{B}) \left(\frac{\partial^2 \varphi_S}{\partial y^2} - \alpha^2 \varphi_S \right) + i \alpha \varphi_S \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - \\ & \omega \cos \omega t \left(\frac{\partial^2 \varphi_S}{\partial y^2} - \alpha^2 \varphi_S \right) + \\ & \cos \omega t \left[\nu \left(\frac{\partial^4 \varphi_C}{\partial y^4} - 2\alpha^2 \frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial y^2} + \alpha^4 \varphi_C \right) - i (\alpha u - \dot{B}) \left(\frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial y^2} - \alpha^2 \varphi_C \right) + i \alpha \varphi_C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - \\ & \omega \sin \omega t \left(\frac{\partial^2 \varphi_C}{\partial y^2} - \alpha^2 \varphi_C \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.48)$$

Die φ_0 , φ_S und φ_C werden nun – wie im stationären Fall – folgendermaßen angesetzt:

$$\begin{aligned} \varphi_0(y) &= \sum_{m=1}^M D_{0m} \cdot \varphi_{0m}(y) \\ \varphi_S(y) &= \sum_{m=1}^M D_{Sm} \cdot \varphi_{Sm}(y) \\ \varphi_C(y) &= \sum_{m=1}^M D_{Cm} \cdot \varphi_{Cm}(y) \end{aligned} \quad (4.49)$$

Die φ_{0m} der gesuchten Amplitudenfunktion können mit den bereits in der stationären Theorie bewährten Funktionen der Gl. 4.15 angesetzt werden, ferner lassen sich zusätzlich noch weitere $2M$ linear unabhängige Ansatzfunktionen für φ_{Sm} und φ_{Cm} gewinnen:

$$\begin{aligned} \varphi_m(\eta) &= [\cos 2m\eta - \cos(2m+1)\eta] e^{-\alpha\delta\eta}, \quad 2m-1 = 1 + \rho, 2 + \rho, 3 + \rho \dots M + \rho, \\ \rho &= 0 \quad \text{für die } \varphi_{0m}, \quad \rho = 1/3 \quad \text{für die } \varphi_{Sm}, \quad \rho = 2/3 \quad \text{für die } \varphi_{Cm} \end{aligned} \quad (4.50)$$

¹⁴In Gl. 4.46 werden nämlich die periodischen Größen U und λ ausreichend genau durch eine Fourierreihe mit jeweils drei Gliedern beschrieben, insbesondere in der unmittelbaren Umgebung des Druckminimums ($\lambda \approx 0$). Ferner ist in Gl. 4.46 u_0 groß gegenüber u_{s1} und u_{c1} , und außerdem gilt in Gl. 4.45 $|u_2| \ll |u_1|$. Unter diesen Voraussetzungen zeigt sich, daß zur Approximation der Geschwindigkeit $u(y, t)$ ebenfalls drei Glieder der Fourierreihe genügen, die im folgenden mit 0, S und C indiziert werden. Da das zeitliche Verhalten der Amplitudenfunktion – wie oben aufgrund von Vorüberlegungen bezüglich des quasistationären Falles abgeleitet wurde – in etwa dem der Grundströmung entsprechen muß, kann der Reihenansatz für φ dann auch nach drei Reihengliedern abgebrochen werden.

Setzt man diese Form der Komponenten von φ in Gl. 4.48 ein, dann ergibt sich unter Verwendung der Gl. 4.9 wieder eine Eigenwertbedingung für die zeitliche Ableitung der komplexen Frequenzfunktion \dot{B} :¹⁵

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^M D_{0m} \left\{ A_{k0m} + 2\alpha^2\delta^2 B_{k0m} + \alpha^4\delta^4 C_{k0m} + i\alpha\delta \frac{U\delta}{\nu} (U_{k0m} - V_{m0k}) + \right. \\
& \quad \left. + i\alpha^3\delta^3 \frac{U\delta}{\nu} W_{k0m} - i \frac{\dot{B}\delta^2}{\nu} B_{k0m} - i \frac{\dot{B}\delta^2}{\nu} \alpha^2\delta^2 C_{k0m} \right\} + \\
& \sum_{m=1}^M D_{Sm} \left\{ \sin\omega t \left[A_{kSm} + 2\alpha^2\delta^2 B_{kSm} + \alpha^4\delta^4 C_{kSm} + i\alpha\delta \frac{U\delta}{\nu} (U_{kSm} - V_{mSk}) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + i\alpha^3\delta^3 \frac{U\delta}{\nu} W_{kSm} - i \frac{\dot{B}\delta^2}{\nu} B_{kSm} - i \frac{\dot{B}\delta^2}{\nu} \alpha^2\delta^2 C_{kSm} \right] + \right. \\
& \quad \left. + \cos\omega t \left[\frac{\omega\delta^2}{\nu} B_{kSm} + \frac{\omega\delta^2}{\nu} \alpha^2\delta^2 C_{kSm} \right] \right\} + \\
& \sum_{m=1}^M D_{Cm} \left\{ \cos\omega t \left[A_{kCm} + 2\alpha^2\delta^2 B_{kCm} + \alpha^4\delta^4 C_{kCm} + i\alpha\delta \frac{U\delta}{\nu} (U_{kCm} - V_{mCk}) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + i\alpha^3\delta^3 \frac{U\delta}{\nu} W_{kCm} - i \frac{\dot{B}\delta^2}{\nu} B_{kCm} - i \frac{\dot{B}\delta^2}{\nu} \alpha^2\delta^2 C_{kCm} \right] - \right. \\
& \quad \left. - \sin\omega t \left[\frac{\omega\delta^2}{\nu} B_{kCm} + \frac{\omega\delta^2}{\nu} \alpha^2\delta^2 C_{kCm} \right] \right\} = 0 \tag{4.51}
\end{aligned}$$

Gl. 4.50 kann nun für diskrete Zeitpunkte t_i ausgewertet und mit den gleichen Methoden wie das stationäre Problem behandelt werden; allerdings ergeben sich jetzt bei je M Ansatzfunktionen genau $3M$ Eigenwerte für die gesuchte zeitliche Ableitung der Frequenzfunktion \dot{B} , da die Matrizen $[\mathbf{P}]$ und $[\mathbf{Q}]$ nun jeweils von der Größe $3M$ sind. Ferner ergibt sich die Schwierigkeit, daß die Matrix $[\mathbf{Q}]$ für die Zeitpunkte $\frac{t_i}{T} = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi \dots$ singulär wird (nicht aber die Matrix $[\mathbf{P}]$). In diesen Fällen läßt sich jedoch das zugrunde liegende Eigenwertproblem durch Kondensation auf ein nicht singuläres Problem der Größe $2M$ zurückführen ([29]). Für die Berechnung der einzelnen Eigenwerte ist es außerdem zweckmäßig, das allgemeine Eigenwertproblem der Form

$$[\mathbf{P}][\mathbf{D}] - \frac{\dot{B}\delta^2}{\nu} [\mathbf{Q}][\mathbf{D}] = 0 \tag{4.52}$$

durch Linksmultiplikation mit der Inversen von $[\mathbf{Q}]$ auf ein spezielles zurückzuführen.

4.3.3 Stabilitätsverhalten instationärer Grenzschichten

Der Instabilitätspunkt der instationären Grundströmung ist für einen Zeitpunkt t_i gerade dadurch gegeben, daß an einer bestimmten Stelle x die gesuchte Zeitableitung der Frequenzfunktion rein reell ist. An dieser Stelle x kann nun für einen späteren Zeitpunkt (t_{i+1}) Anfachung herrschen ($\dot{B}_{\mathfrak{S}} > 0$), und zu einem vorigen (t_{i-1}) Dämpfung, oder umgekehrt. Im stationären Fall konnte sich die Stabilitätsbetrachtung im wesentlichen auf

¹⁵In Gl. 4.51 bedeutet U stets $U(t)$ und δ stets $\delta(t)$, also die momentanen Werte von Potentialströmung bzw. Grenzschichtdicke.

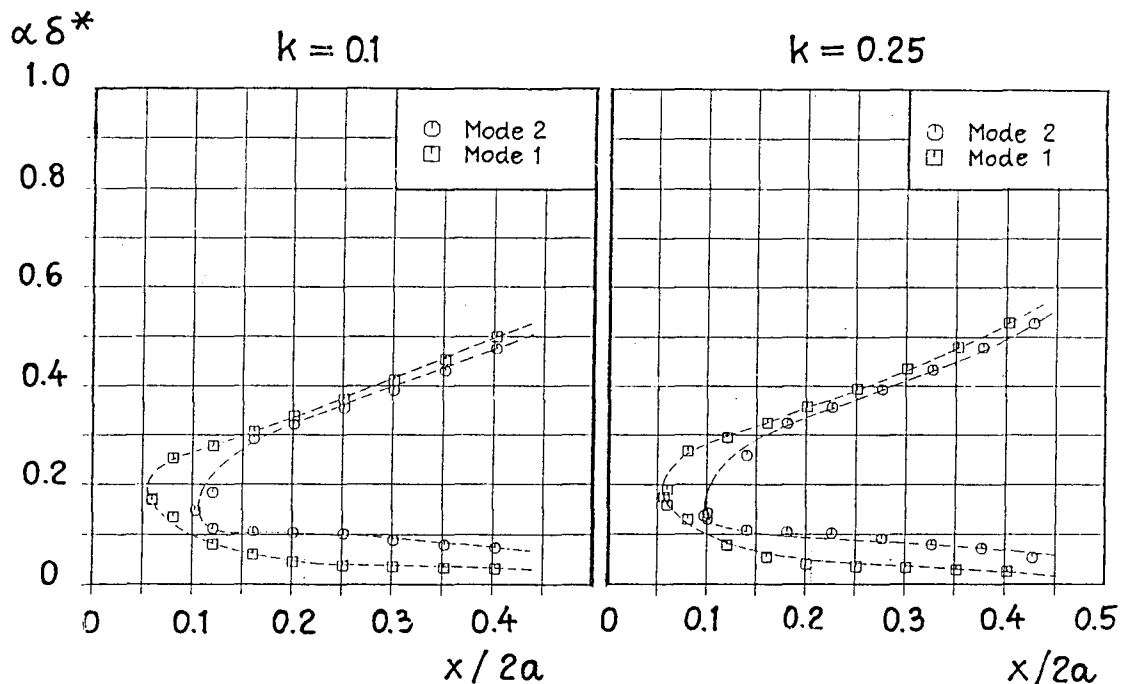


Abbildung 4.11: Neutralkurven der Grenzschicht, Profil J 105, $\beta_s = 3.25^\circ$, $\beta_i = 2^\circ$, $t/T = 0.9$, $Re = 1 \cdot 10^6$, $x_0/2a = 0.25$, links: $k = 0.1$, rechts: $k = 0.25$

die Untersuchung einzelner, jeweils durch den Formparameter λ gekennzeichneter Geschwindigkeitsprofile beschränken; aus diesen Untersuchungen ergab sich eine universelle Beziehung für den Instabilitätspunkt (vgl. Abb. 4.2 bzw. Gl. 4.26). Diese Vorgehensweise ist jedoch für den instationären Fall nicht zweckmäßig, denn hier kommt als weitere Unbekannte die Zeit hinzu, so daß die Stabilitätsbetrachtungen nur an konkreten Tragflügelumströmungen durchgeführt werden können. Die Suche nach dem Instabilitätspunkt beginnt stets im potentialtheoretischen Druckminimum des gerade betrachteten Zeitschrittes. Dort wird für eine gegebene lokale Reynoldszahl Re_s eine gewisse Bandbreite von Störwellen untersucht. Stellt man lediglich gedämpfte Störungen fest, dann liegt der Stabilitätspunkt weiter stromabwärts und die Suche wird in dieser Richtung fortgesetzt, bis erstmalig angefachte Störwellen auftreten. Wurden jedoch schon im Druckminimum angefachte Störungen angetroffen, dann liegt der Instabilitätspunkt weiter stromaufwärts, nämlich dort, wo zum ersten Mal nur noch gedämpfte Störungen festgestellt werden.

Abb. 4.11 und 4.12 zeigen exemplarisch für die behandelten Fälle die berechneten Neutralkurven eines instationär beaufschlagten Profils J 105 ([53]). Das Profil führt Dreh-schwingungen um die 1/4-Linie der Amplitude 2° aus, der mittlere Anstellwinkel beträgt 3.25° . Die Profilreynoldszahl beträgt in allen Fällen $1 \cdot 10^6$, betrachtet wird immer der Zeitpunkt $t_i/T = 0.9$.¹⁶ Dort sind für die reduzierten Frequenzen $k = 0.1, 0.25, 0.5$ und 0.75 die jeweils zu $\dot{B}_3 = 0$ gefundenen neutralen Störwellenzahlen $\alpha\delta^*$ als Funktion der Sehnenkoordinate aufgetragen.

Die Abbildungen dokumentieren zunächst die wesentliche, bei allen Stabilitätsuntersuchungen instationärer Grenzschichten gewonnene Erkenntnis, daß es im Gegensatz zum stationären Fall nun nicht mehr eine einzige angefachte Mode gibt, sondern es können

¹⁶vgl. dazu auch Kapitel 5, Abb. 5.3 und 5.4, S. 65.

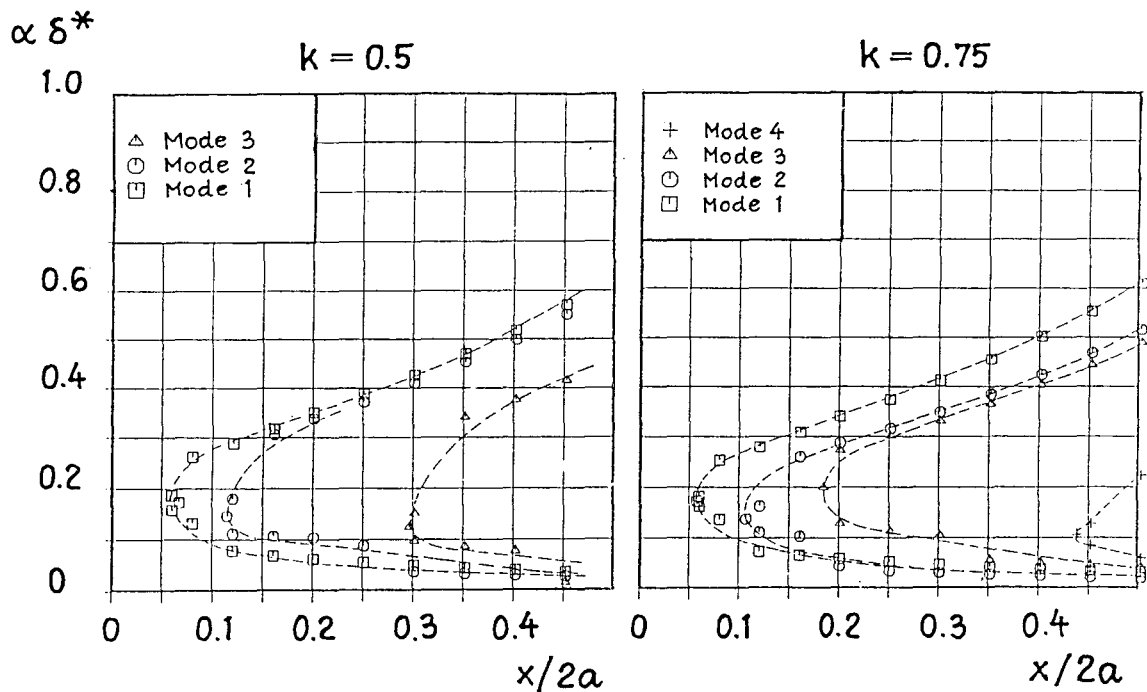


Abbildung 4.12: Neutralkurven der Grenzschicht, Profil J 105, $\beta_s = 3.25^\circ$, $\beta_i = 2^\circ$, $t/T = 0.9$, $Re = 1 \cdot 10^6$, $x_0/2a = 0.25$, links: $k = 0.5$, rechts: $k = 0.75$

mehrere solcher angefachter Moden auftreten, die offenbar jede für sich je einen eigenen Stabilitätsbereich bildet. Stromaufwärts des Instabilitätspunktes der 1. Mode existieren nur gedämpfte Störungen (die Imaginärteile aller $3M$ Eigenwerte der Gl. 4.51 sind deutlich negativ), bis dann stromabwärts dieses Instabilitätspunktes jeweils ein zweiter angefachter Eigenwert auftritt, dessen Anfachung allerdings deutlich geringer ist. Dieser zweite Instabilitätspunkt liegt bei einer kleineren Störwellenzahl $\alpha\delta^*$. Bei höheren reduzierten Frequenzen k treten dann noch weitere angefachte Moden auf, deren Instabilitätspunkte stets bei wiederum kleineren Störwellenzahlen auftreten.

Die Schwierigkeit bei der Ermittlung solcher Neutralkurven besteht nun darin, die jeweils für eine Kombination von $\alpha\delta$ und Re_δ gefundenen angefachten Eigenwertlösungen der Gl. 4.51 für $\dot{B}_\mathfrak{R}$ den entsprechenden Moden zuzuordnen. Dies ist im Einzelfall nur möglich, wenn man auch die jeweils zugehörigen Realteile betrachtet, denn es zeigt sich, daß die weiteren Moden stets deutlich höhere Frequenzen $\dot{B}_\mathfrak{R}$ haben, so daß sich $\dot{B}_\mathfrak{R}$ einer weiteren, hinzukommenden Mode eindeutig von den bisher angefachten unterscheidet. Außerdem nimmt die Frequenz $\dot{B}_\mathfrak{R}$ mit zunehmender Störwellenzahl $\alpha\delta$ zu, so daß im unteren Ast der Neutralkurve die Störungen niedriger Frequenz liegen, im oberen Ast die hochfrequenten. Mit zunehmender Reynoldszahl Re_δ steigen ebenfalls die Frequenzen der angefachten Störungen, so daß die Störung im jeweiligen Neutralpunkt diejenige mit der niedrigsten auftretenden Frequenz ist. Diese Frequenz liegt nun immer etwa eine Größenordnung über der Kreisfrequenz ω der Tragflügelschwingung, so daß dadurch eine klare Trennung zwischen dem instationären Anteil der Grundströmung und der Störungsbewegung möglich ist.

Unter dem Instabilitätspunkt der betrachteten Grenzschichtströmung wird nun im folgenden stets derjenige der ersten angefachten Mode verstanden, da stromaufwärts dieses Punktes nur noch gedämpfte Störungen auftreten.

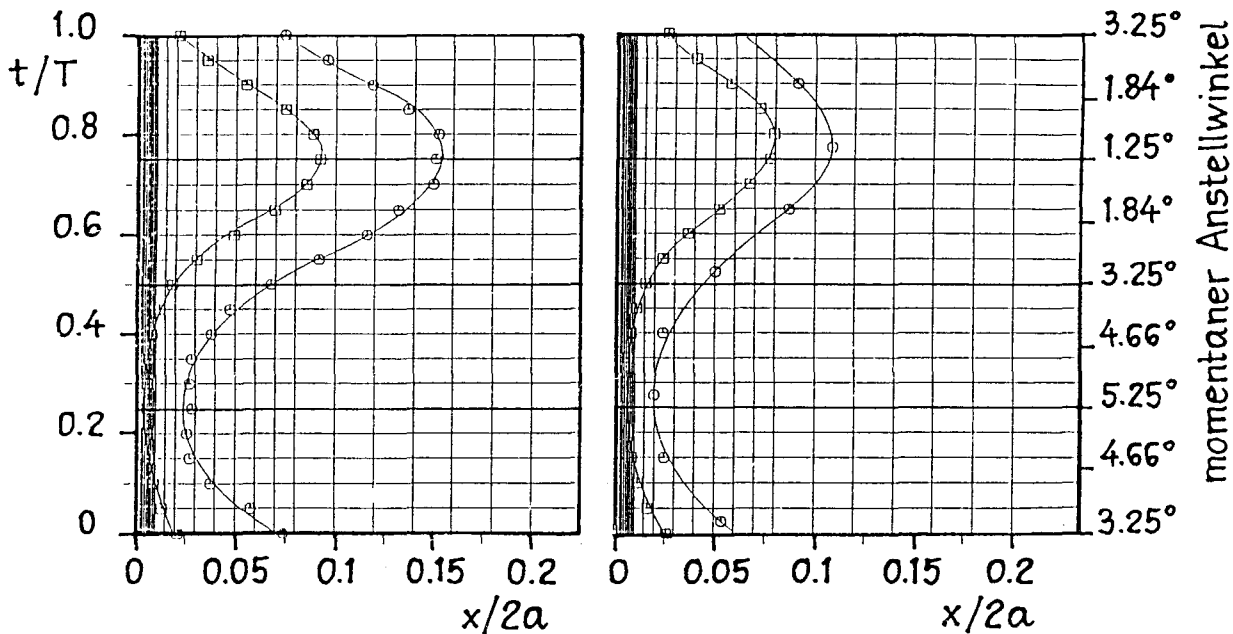


Abbildung 4.13: Instabilität (○) und Druckminimum (□), Profil J 105, $\beta_s = 3.25^\circ$, $\beta_i = 2^\circ$, $Re = 5 \cdot 10^5$, $x_0/2a = 0.25$, links: quasistationär, rechts: $k = 0.1$

Eine weitere wesentliche Frage betrifft nun die Lage des so bestimmten Instabilitätspunktes in Relation zu einer quasistationären Betrachtungsweise. Deshalb wurden für das oben behandelte Joukowski-Profil J 105 die Instabilitätspunkte für verschiedene Profilreynoldszahlen ($Re = 5 \cdot 10^5, 1 \cdot 10^6, 2 \cdot 10^6$) für die Frequenz $k = 0.1$ berechnet und mit denen der quasistationären Lösung verglichen. In den Abb. 4.13 bis 4.15 sind die Ergebnisse dieser Rechnungen zusammengestellt. Dabei zeigt sich stets, daß der instationäre Instabilitätspunkt im Mittel eindeutig vor dem quasistationären liegt. Ferner läßt sich bei allen instationären Lösungen eine deutliche Phasenverschiebung feststellen, die Extremwerte des Instabilitätspunktes treten zu späteren Zeitpunkten als diejenigen der Anstellwinkeländerung auf. Außerdem ist die Amplitude der Schwingung des instationären Instabilitätspunktes deutlich geringer als diejenige des stationären.

Bezüglich der Lage des Instabilitätspunktes in Relation zum Druckminimum läßt sich ganz allgemein sagen, daß er im Mittel näher am potentialtheoretischen Druckminimum liegt als bei der quasistationären Betrachtungsweise, auf alle Fälle dann, wenn die quasistationäre Rechnung ergibt, daß der Instabilitätspunkt hinter dem Druckminimum liegt. Kann bei stationärer Belastung das Druckminimum als erste Abschätzung des Instabilitätspunktes dienen, dann gilt dies auch immer für einen vergleichbaren instationären Fall.

4.3.4 Transition instationärer Grenzschichten

Die Vorhersage des Umschlages instationärer Grenzschichten kann in ihren Grundzügen genau wie im stationären Fall erfolgen, wenn jetzt für jeden diskreten Zeitpunkt die Gl. 4.51 gelöst wird. Für instationäre Grenzschichten existieren nun allerdings mehrere angefaltete Moden mit je einem eigenen Stabilitätsbereich. Im Sinne des in Abschnitt 4.2.6

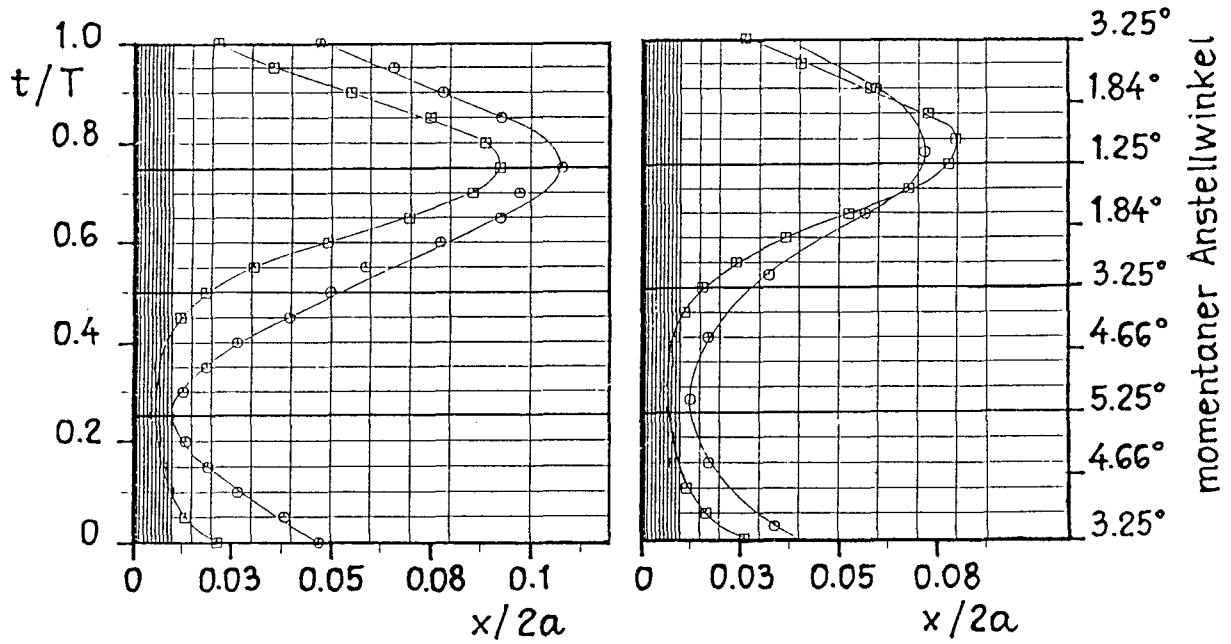


Abbildung 4.14: Instabilität (○) und Druckminimum (□), Profil J 105, $\beta_s = 3.25^\circ$, $\beta_i = 2^\circ$, $Re = 1 \cdot 10^6$, $x_0/2a = 0.25$, links: quasistationär, rechts: $k = 0.1$

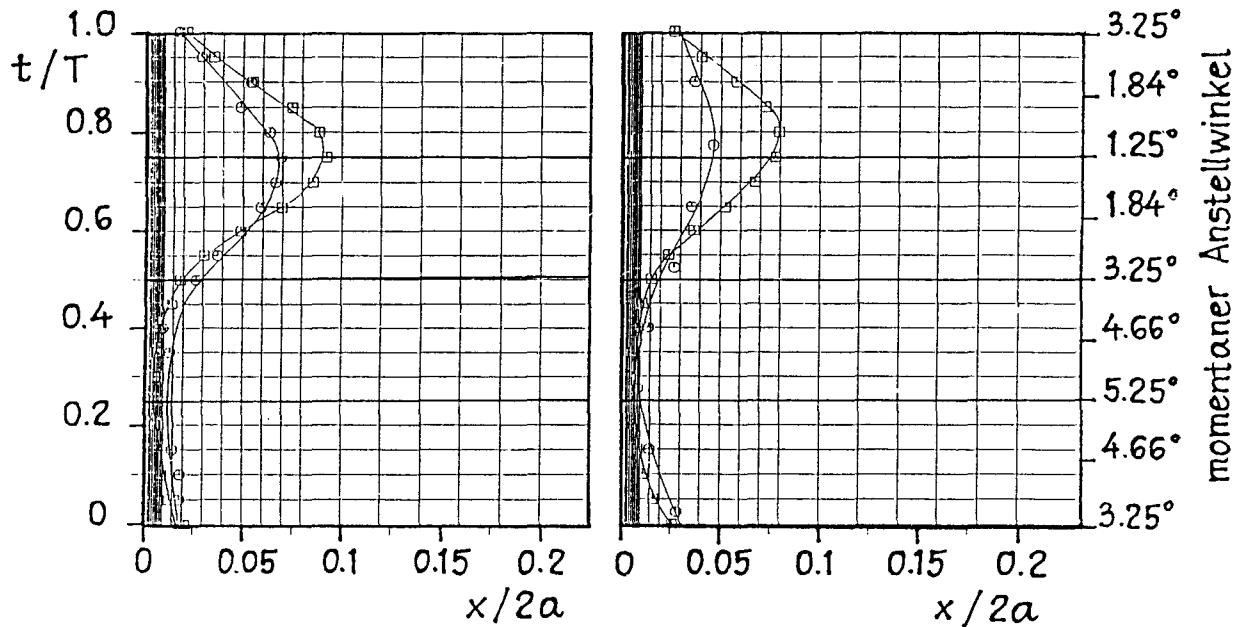


Abbildung 4.15: Instabilität (○) und Druckminimum (□), Profil J 105, $\beta_s = 3.25^\circ$, $\beta_i = 2^\circ$, $Re = 2 \cdot 10^6$, $x_0/2a = 0.25$, links: quasistationär, rechts: $k = 0.1$

vorgestellten integralen Anfachungskonzeptes erscheint es konsequent, auch die weiteren Moden mit in die Berechnung der Anfachungsrate $\ln A^*$ einzubeziehen und die Lage des Transitionspunktes weiterhin nach Gl. 4.31 zu bestimmen. Dabei haben die Anfachungsraten der höheren Moden lediglich einen Korrekturcharakter, die Größe der integralen Anfachungsrate $\ln A^*$ wird im wesentlichen durch die erste Mode bestimmt. Dann lautet die Gl. 4.29 im instationären Fall mit ρ als Anzahl der angefachten Moden:

$$\ln A^*(x, t_i) = \sum_{r=1}^{\rho} \int_{x_I}^x \frac{1}{\alpha_{o_r}(x, t_i) - \alpha_{u_r}(x, t_i)} \int_{\alpha_{u_r}(x, t_i)}^{\alpha_{o_r}(x, t_i)} \frac{\dot{B}_{\mathfrak{R}_r}(x, t_i) \alpha(x, t_i)}{\dot{B}_{\mathfrak{R}_r}(x, t_i)} d\alpha dx \quad (4.53)$$

Diese Vorgehensweise erscheint zulässig, wenn man bedenkt, daß die angefachten Störungen mit der Frequenz $\dot{B}_{\mathfrak{R}}$ und die Grundströmung mit ω periodisch ist, wobei gilt:

$$\frac{2\pi}{\dot{B}_{\mathfrak{R}}} \ll \frac{2\pi}{\omega} \quad (4.54)$$

Das Transitionsverhalten instationärer Grenzschichten wird im folgenden Kapitel in Zusammenhang mit der laminaren Ablösung erörtert.

Kapitel 5

Instationäre Grenzschichteffekte

5.1 Profil J 105

An einem konkreten Beispiel einer instationären Tragflügelumströmung sollen nun die wesentlichen instationären Grenzschichteffekte untersucht werden, wobei besonderes Gewicht auf den Vergleich zwischen einer instationären mit einer quasistationären Rechnung gelegt wird. Insbesondere wird der Einfluß der Profilreynoldszahl und der reduzierten Frequenz der instationären Belastung auf das Verhalten der Grenzschicht – laminare Ablösung, Stabilität und Umschlag – untersucht. Alle Untersuchungen wurden exemplarisch an einem Joukowski-Profil J 105 mit 10.5% relativer Dicke durchgeführt [53].¹ Das Profil führt Drehschwingungen um die 1/4-Linie und einen mittleren Anstellwinkel von 3.25° durch. Die Amplitude der Schwingung beträgt 2° . Untersucht wurden die Profilreynoldszahlen $5 \cdot 10^5$, $1 \cdot 10^6$ und $2 \cdot 10^6$ sowie die reduzierten Frequenzen 0 (quasistationäre Lösung), 0.1, 0.5 und 0.75. In den Abb. 5.1 bis Abb. 5.6 sind die wesentlichen Ergebnisse dieser Rechnungen zusammengefaßt. Zunächst liefert die laminare Theorie das Verschwinden der Wandschubspannung – im Sinne dieser Arbeit identisch mit der laminaren Ablösung. Für die so erhaltenen laminaren Grenzschichtlösungen werden Stabilitäts- und Anfachungsrechnungen durchgeführt, und man erhält den jeweiligen Instabilitäts- und Umschlagspunkt. Die auf diese Weise gefundenen Ergebnisse sind in den folgenden Abbildungen als x, t -Diagramme dargestellt. Da die Beziehung zwischen potentialtheoretischem Druckminimum und Instabilitätspunkt schon erörtert worden ist, wird aus Gründen der Übersichtlichkeit in den Abbildungen auf die Darstellung des Druckminimums verzichtet. Dort sind über der Zeit bzw. dem momentanen Anstellwinkel jeweils die Orte auf der Profildicke eingetragen, an denen die Theorie laminare Ablösung (\square) und Transition² (\triangle) vorher-sagt, eingetragen. Da auch die Lauflänge vom ersten Auftreten angefachter Störungen bis zum theoretischen Transitionspunkt zeitabhängig ist, sind in den Abbildungen auch die jeweiligen Instabilitätspunkte eingetragen (\odot).

Betrachtet sei zunächst der Fall mit $Re = 0.5 \cdot 10^6$. Die quasistationäre Lösung zeigt nun, daß dieses Profil praktisch über die volle Periode stark in bezug auf laminare Ablösung gefährdet ist. Dies trifft erwartungsgemäß auf den Zeitbereich $0 < t/T < 0.5$ zu, in dem der maximale Anstellwinkel von 5.25° durchlaufen wird. Im Bereich $0.5 < t/T < 1$ ist

¹Die wesentlichen Effekte lassen sich aber wohl auch auf andere, technisch bedeutsamere Profile übertragen.

²Zum besseren Verständnis der Abbildungen sei noch einmal darauf hingewiesen, daß die Rechnung in jedem Falle am laminaren Ablösepunkt enden muß. Kommt es bis dahin nicht zum Umschlag, dann ist dies dadurch angedeutet, daß der laminare Ablösepunkt kurz vor dem Transitionspunkt liegt.

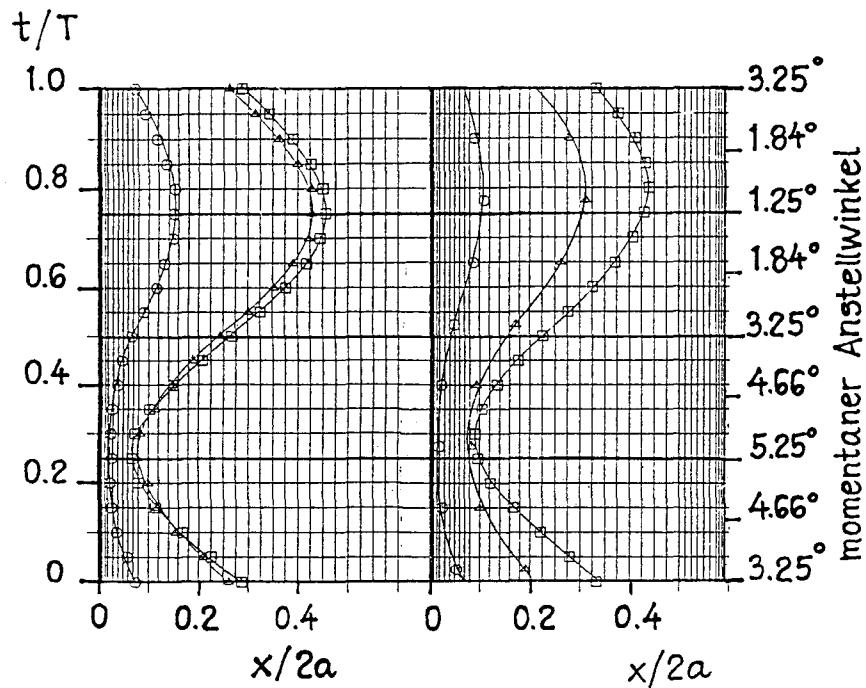


Abbildung 5.1: Grenzschichtcharakteristik Profil J 105, $Re = 5 \cdot 10^5$, links: quasistationär, rechts: $k = 0.10$, \square laminare Ablösung, \circ Instabilität, \triangle Transition

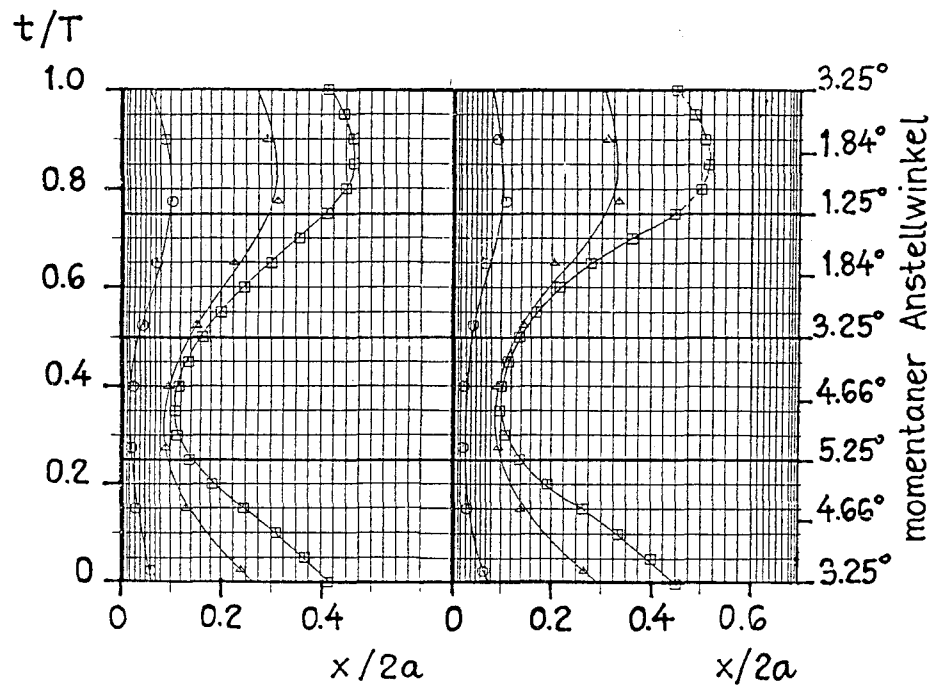


Abbildung 5.2: Grenzschichtcharakteristik Profil J 105, $Re = 5 \cdot 10^5$, links: $k = 0.50$, rechts: $k = 0.75$, \square laminare Ablösung, \circ Instabilität, \triangle Transition

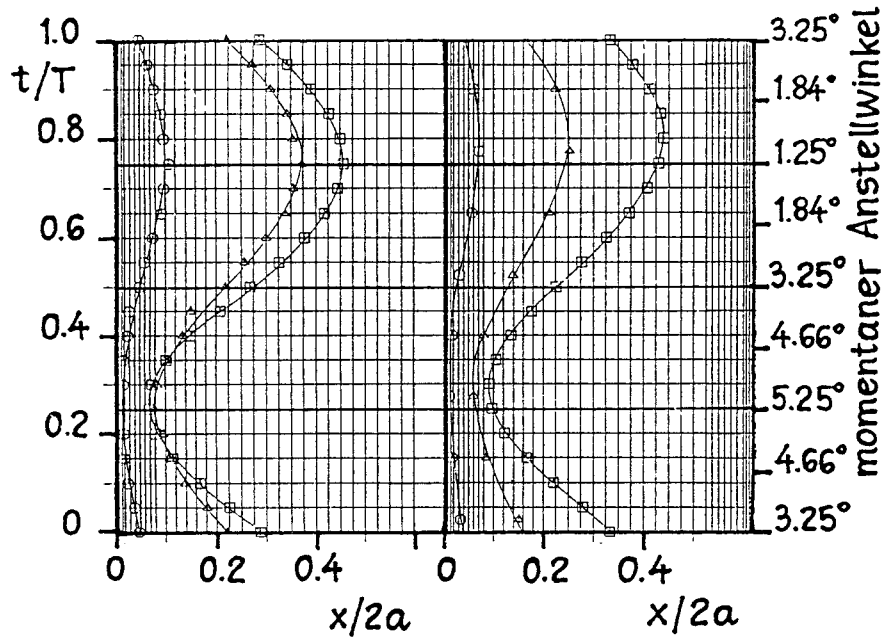


Abbildung 5.3: Grenzschichtcharakteristik Profil J 105, $Re = 1 \cdot 10^6$, links: quasistationär, rechts: $k = 0.10$, \square laminare Ablösung, \circ Instabilität, \triangle Transition

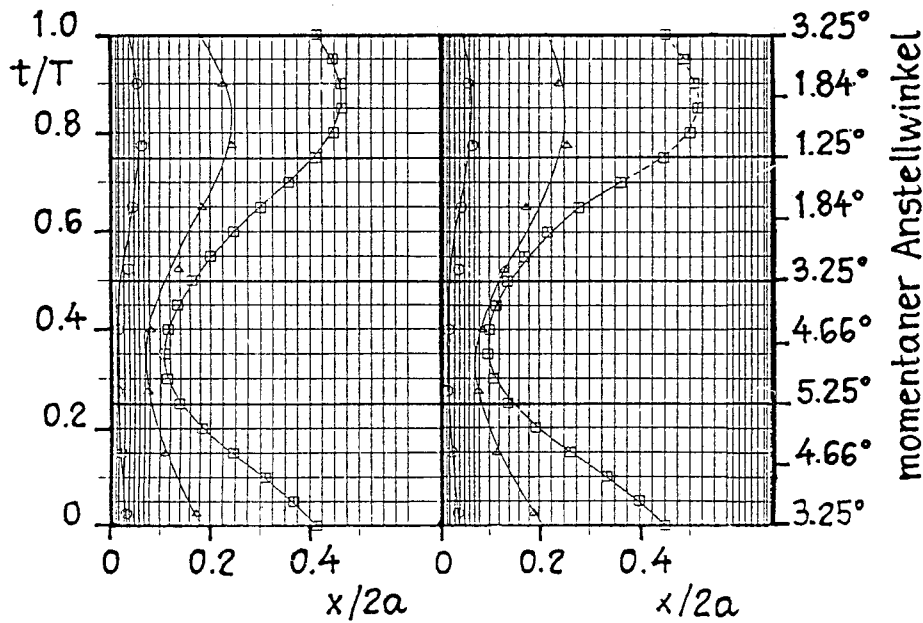


Abbildung 5.4: Grenzschichtcharakteristik Profil J 105, $Re = 1 \cdot 10^6$, links: $k = 0.50$, rechts: $k = 0.75$, \square laminare Ablösung, \circ Instabilität, \triangle Transition

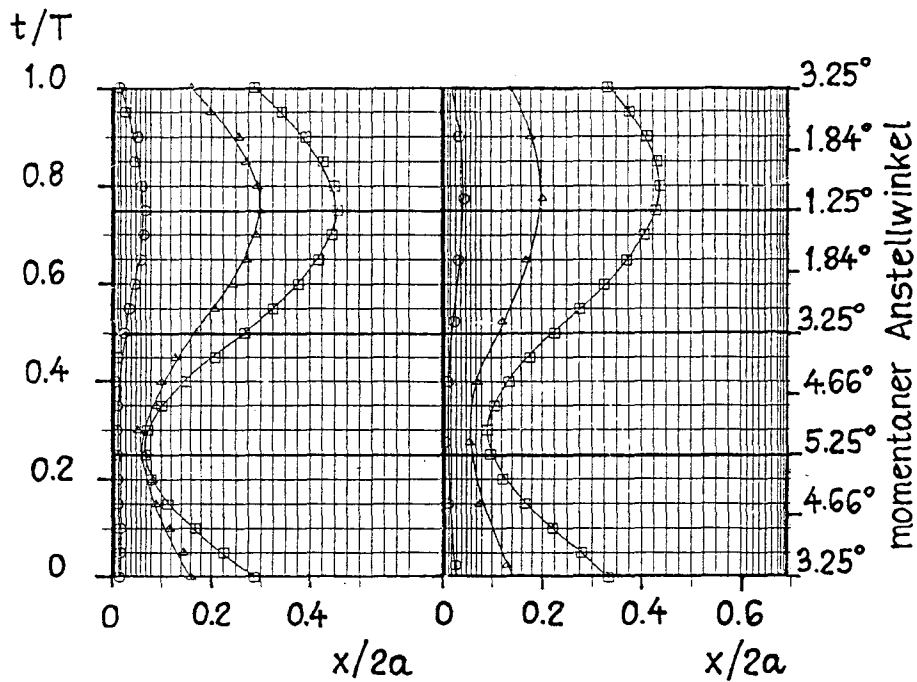


Abbildung 5.5: Grenzschichtcharakteristik Profil J 105, $Re = 2 \cdot 10^6$, links: quasistationär, rechts: $k = 0.10$, \square laminare Ablösung, \circ Instabilität, \triangle Transition

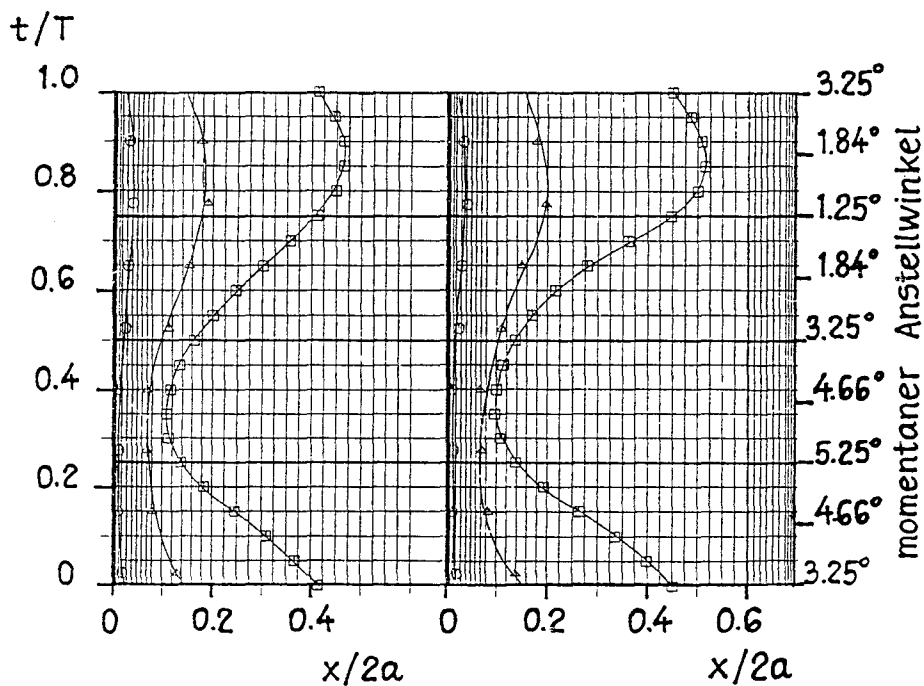


Abbildung 5.6: Grenzschichtcharakteristik Profil J 105, $Re = 2 \cdot 10^6$, links: $k = 0.50$, rechts: $k = 0.75$, \square laminare Ablösung, \circ Instabilität, \triangle Transition

die Gefahr der laminaren Ablösung möglicherweise etwas geringer, da nach dieser Theorie Transition kurz vor der laminaren Ablösung eintritt. Die relative Lage von Transitions- und Instabilitätspunkt vermitteln anschaulich über die unterschiedliche Lauflänge ein Maß für die Heftigkeit der jeweiligen Anfachung. Erwartungsgemäß folgen alle drei Kurven dem Verlauf der Erregung durch die Profilanstellwinkeländerung.

Schon bei einer instationären Belastung geringer Frequenz ($k=0.1$) ändern sich jedoch die Verhältnisse entscheidend: Die jeweilige Instabilität liegt nun im Mittel weiter stromaufwärts, desgleichen die Transitionslinie. Schon bei der Untersuchung des Stabilitätsverhaltens im vorangegangenen Kapitel wurde festgestellt, daß eine instationäre Belastung auf die laminare Grenzschicht in dem Sinne destabilisierend wirkt, daß diese im zeitlichen Mittel gegen die auftretenden Störungen anfälliger ist. Entsprechend ist die Anfachung heftiger; als Folge davon wird der Umschlag in den turbulenten Zustand begünstigt, so daß laminare Ablösung insgesamt unwahrscheinlicher wird. Für den Fall mit $k = 0.1$ ist die Gefahr laminarer Ablösung in weiten Bereichen verschwunden, lediglich für $0.2 < t/T < 0.3$ existiert sie weiterhin. Ferner sind jetzt alle Kurven gegenüber der Erregung und auch gegeneinander phasenverschoben. Die Größe der reduzierten Frequenz hat weniger Einfluß auf die jeweiligen Extremwerte, sondern vor allem auf die relative Phasenlage der einzelnen Kurven. Dies zeigt sich bei den Ergebnissen für höhere reduzierte Frequenzen ($k = 0.5$ und $k = 0.75$), denn jetzt wird die Gefahr der laminaren Ablösung allein durch die unterschiedlichen Phasenlagen bestimmt. Für $k = 0.1$ wurden die bezüglich laminarer Ablösung gefährdeten Bereiche hauptsächlich durch den vorderen Extremwert der laminaren Ablösung – der gegenüber der Erregung schon merklich später eintritt – bestimmt, bei den höheren Frequenzen sind nun hauptsächlich die Zeitbereiche gefährdet, in denen der laminare Ablösepunkt nach hinten wandert. Für $k = 0.5$ ist dies etwa der Zeitbereich $0.4 < t/T < 0.5$, für $k = 0.75$ ungefähr $0.35 < t/T < 0.6$. Zu allen anderen Zeitpunkten hat sich die Gefahr der laminaren Ablösung jedoch verringert.

Bemerkenswert ist, daß die Zeitintervalle, in denen die Gefahr laminarer Ablösung besteht, stets durch einen negativen Anstellwinkelgradienten $\frac{d\beta}{dt}$ gekennzeichnet sind, die untere Grenze dieses Zeitintervalls wird dabei in etwa durch das zeitliche Maximum des Druckgradienten $\frac{\partial p}{\partial x}$ bestimmt. (vgl. dazu Abschnitt 3.5.2.1, Abb. 3.10 bis 3.13). Dieser kritische Zeitbereich wird also durch örtliche und zeitliche Verzögerungseffekte in Grenzschicht und Potentialströmung charakterisiert. Dies erscheint vernünftig, denn die genannten Effekte begünstigen die laminare Ablösung und behindern gleichzeitig den Transitionsvorgang. Im Fall $k = 0.75$ sind diese Effekte so durchschlagend, daß sich der gefährdete Bereich über den mittleren Anstellwinkel von 3.25° hinaus bis etwa 2.5° erstreckt.³ Diese Eigenart der Grenzschicht läßt sich jedoch durch das Verhalten des Druckgradienten der Potentialströmung (vgl. dazu Abschnitt 3.5.2.1, Abb. 3.10 bis 3.13) erklären. Denn dieser nimmt zunächst bei geringen reduzierten Frequenzen gegenüber der quasistationären Lösung ab, aber für größere Werte von k überschreitet er sogar die Maximalamplitude des quasistationären Falles. Dieses Verhalten des Druckgradienten wurde an dem gleichen Profil auch von Shen und Peterson [53] sowohl rechnerisch als auch experimentell festgestellt.

Erhöht man nun die Reynoldszahl auf $1 \cdot 10^6$ (Abb. 5.3 und Abb. 5.4), dann verkleinert sich die laminare Ablösezone naturgemäß dadurch, daß die Transition nach vorne rückt.

³Hierzu muß man allerdings bemerken, daß das laminare Verfahren bei höheren reduzierten Frequenzen insgesamt schlechteres Konvergenzverhalten zeigt, so daß hier außerdem numerische Ungenauigkeiten in Betracht gezogen werden müssen (vgl. hierzu auch die Fußnote auf S. 25).

Die quasistationäre Lösung liefert einen ablösegefährdeten Zeitbereich von etwa $0.1 < t/T < 0.45$. Schon bei einer instationären Belastung geringer Frequenz ($k = 0.1$) ist die Gefahr der laminaren Ablösung im Rahmen dieser Theorie praktisch verschwunden, gleiches gilt in etwa für $k = 0.5$. Erst bei $k = 0.75$ wird aus den oben angegebenen Gründen laminare Ablösung wieder möglich, und zwar im Zeitintervall $0.40 < t/T < 0.55$, also ein Bereich, der im stationären Fall weniger gefährdet ist. Insgesamt ist für die instationäre Belastung die Möglichkeit der laminaren Ablösung durchweg geringer als bei der quasistationären. Durch die höhere Profilreynoldszahl bedingt, ist die Gefahr der laminaren Ablösung natürlich insgesamt geringer als im Fall $Re = 5 \cdot 10^5$.

Eine weitere Vergrößerung der Profilreynoldszahl auf $2 \cdot 10^6$ reduziert die Gefahr laminarer Ablösung noch weiter, die quasistationäre Rechnung liefert jetzt einen kleinen ablösegefährdeten Zeitbereich in der unmittelbaren Umgebung des maximalen Anstellwinkels von 5.25° . Im Rahmen dieser Theorie sind jetzt alle instationären Fälle frei von laminarer Ablösung, wenn auch für die hohe reduzierte Frequenz die Ablöse- und die Transitionslinie im genannten kritischen Zeitintervall wieder näher zusammenrücken.

5.2 Profil NACA 16–012

Weiterhin soll die hier angegebene Theorie auf das von Franc und Michel ([13]) experimentell untersuchten Profil NACA 16–012, für das bereits Lösungen der laminaren Grenzschicht berechnet wurden (vgl. Abschnitt 3.5.2.2, insbes. Abb. 3.15, S. 35), angewendet werden. Im Rahmen der laminaren Theorie wurde nur der unmittelbare Bereich der Profilverderrkante bis etwa $x/2a = 0.04$ (bezogen auf die Sehnenkoordinate) untersucht. Für den Fall mit 5° mittlerem Anstellwinkel, $k = 0.471$ und $Re = 3 \cdot 10^5$ wurden Stabilitätsrechnungen durchgeführt. Dabei zeigt sich, daß in dem Zeitintervall, für das die laminare Theorie Ablösung ermitteln konnte, also etwa $0.1 < t/T < 0.55$, bis zum Erreichen des laminaren Ablösepunktes keine angefachten Störungen gefunden werden konnten. Daher tritt hier die Besonderheit auf, daß der Instabilitätspunkt hinter dem laminaren Ablösepunkt liegen würde.

Die mit Impulsverlustdicke und Außengeschwindigkeit im Ablösepunkt gebildete örtliche Reynoldszahl liegt zwischen 33 und 45. Dieser Wert bleibt deutlich unterhalb des von Gaster ([15]) für stationäre Verhältnisse angegebenen Grenzwertes für das Aufplatzen der laminaren Ablöseblase mit der Bildung eines offenen Totwassers, $\frac{U_{\theta_{sep}}}{\nu} < 125$. Wenn sich auch dieses Kriterium nicht unmittelbar auf instationäre Verhältnisse übertragen läßt, so sind die in dem vorliegenden Fall auftretenden örtlichen Reynoldszahlen demgegenüber derartig gering, daß tatsächlich ein offenes Totwassergebiet auftreten könnte. Insofern reproduziert diese theoretische Vorhersage in etwa die experimentellen Ergebnisse von Franc und Michel, die innerhalb dieses Zeitintervalls eine abgelöste Zone nachgewiesen haben.

Kapitel 6

Ergebnisse der Theorie

Ein Vergleich der instationären mit der quasistationären Grenzschichttheorie läßt aufgrund der oben diskutierten Beispiele offenbar folgende Schlußfolgerungen zu:

- Die instationäre Belastung wirkt destabilisierend auf eine laminare Grenzschicht, in dem Sinne, daß deren Instabilitätspunkt im zeitlichen Mittel immer stromaufwärts desjenigen einer vergleichbaren stationären Grenzschicht liegt.
- Das Anfachungsverhalten einer instationären Grenzschicht unterscheidet sich insofern von dem einer stationären, daß mehrere angefachte Moden auftreten. Die Zahl dieser angefachten Moden steigt sowohl mit der Profilreynoldszahl als auch mit der Erregerfrequenz der Grundströmung, desgleichen die Intensität der Anfachung. Überhaupt ist die instationäre Anfachung merkbar heftiger als bei stationärer Rechnung.
- Alle angefachten Störungen schwingen mit einer deutlich höheren Frequenz als die Grundströmung.
- Der instationär berechnete Instabilitätspunkt schwingt mit einer geringeren Amplitude, als eine quasistationäre Rechnung ergeben würde. Gleichzeitig ist diese Schwingung phasenverschoben, sie läuft der Erregung durch die Anstellwinkeländerung hinterher.
- Die instationären Effekte stellen sich schon bei geringen Erregerfrequenzen ein, eine Vergrößerung derselben beeinflußt die Extremlagen des Instabilitätspunktes kaum, sondern im wesentlichen die Größe der Phasenverschiebung. Diese nimmt mit steigender Erregerfrequenz zu.
- Sowohl im stationären wie im instationären Fall hat die Lage des potentialtheoretischen Druckminimums wesentlichen Einfluß auf die Lage des Instabilitätspunktes. Es ist stets gerechtfertigt, als erste Näherung für die Lage des Instabilitätspunktes das Druckminimum zu verwenden.
- Ein Profil, das bei quasistationärer Betrachtungsweise keine laminare Ablösung aufweist, ist auch bei entsprechender instationärer Belastung frei von laminarer Ablösung.
- Die instationäre Belastung begünstigt eindeutig den Transitionsprozeß, so daß laminare Ablösung, die im stationären Fall auftritt, verschwinden kann.

- Wenn instationäre laminare Ablösung auftritt, dann hauptsächlich in den Bereichen, die durch zeitliche und örtliche Verzögerung der Strömung gekennzeichnet sind. Die Bedingungen $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0$ und $\frac{d\beta}{dt} < 0$ markieren dabei etwa den möglichen Einsatz der laminaren Ablösung.

Daraus könnte man nun folgern, daß bei instationären Vorgängen das Grenzschichtverhalten weniger wesentlich ist als bei stationären, so daß die potentialtheoretische Rechnung wieder an Bedeutung gewinnt.¹

¹Diese Vermutung wurde auch schon von anderen Autoren geäußert, insbesondere in Zusammenhang mit dem Kavitationsverhalten ([53], s.d. Verweis auf [32]).

Symbolverzeichnis

Im folgenden sind diejenigen Formelgrößen zusammengestellt, die in der Arbeit nicht explizit definiert werden.

Lateinische Buchstaben

| | |
|------------|---|
| A_n | Koeffizienten für den Ansatz der Wirbeldichte |
| a | $\frac{1}{2}$ Sehnenlänge des Profils |
| $a_{(n)}$ | Polynomkoeffizienten des Profilansatzes |
| B | komplexe Frequenzfunktion |
| $B_{(n)}$ | Koeffizienten für den Ansatz der Dickenlinie |
| c_p | Druckbeiwert der Potentialströmung |
| b_σ | Fourierkoeffizienten für instationäre Wirbeldichte |
| f_1, f_2 | Hilfsfunktionen |
| H_m^2 | Hankelsche Funktion zweiter Art |
| k | reduzierte Frequenz |
| p | potentialtheoretischer Druck |
| q | Quellbelegung |
| Re | Reynoldszahl |
| T | Periode |
| U | potentialtheoretische Geschwindigkeit |
| U_0 | mittlere Anströmgeschwindigkeit |
| u, v | Geschwindigkeitskomponenten innerhalb der Grenzschicht in $x - -, y -$ Richtung |
| u', v' | Geschwindigkeitskomponenten der Störungsbewegung in $x - -, y -$ Richtung |
| t | Zeit |
| x | Profilbogenkoordinate |
| Y_D | Dickenlinie des Profils |
| Y_S | Skelettlinie des Profils |
| y | Profilnormale |

Griechische Buchstaben

| | |
|-------------|---|
| α | Störwellenzahl |
| β | komplexe Frequenz der Störwellen |
| β_s | mittlerer Profilanstellwinkel |
| β_i | Winkelamplitude bei Profildrehschwingungen |
| γ | Wirbeldichte |
| δ | Grenzschichtdicke |
| δ^* | Verdrängungsdicke |
| Δ | bezeichnet den Operator $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ |
| ζ | Integrationsvariable in x -Richtung |
| η | dimensionslose Koordinate, $\eta = \frac{y}{\delta}$ |
| θ | Impulsverlustdicke |
| ϑ | trigonometrische Variable |
| κ | 2. Formparameter des Geschwindigkeitsprofils |
| λ | 1. Formparameter des Geschwindigkeitsprofils |
| μ | Zähigkeitsbeiwert |
| ν | kinematische Zähigkeit des Fluids |
| ξ | Integrationsvariable in x -Richtung |
| ρ | Fluiddicke |
| τ | Integrationsvariable in ϑ |
| τ_0 | Wandschubspannung |
| Φ | Potential |
| φ | komplexe Amplitudenfunktion |
| ψ | komplexe Stromfunktion |
| ω | Kreisfrequenz |

Indices und Überstreichungen

| | |
|---------|--|
| i | bezeichnet instationäre Zusatzgrößen |
| I | bezeichnet Größen im Instabilitätspunkt |
| \Im | bezeichnet den Imaginärteil komplexer Größen |
| \Re | bezeichnet den Realteil komplexer Größen |
| s | bezeichnet stationäre Größen |
| sep | bezeichnet Größen im Ablösepunkt |
| st | bezeichnet Größen im Staupunkt |
| tr | bezeichnet Größen im Transitionspunkt |
| \cdot | bezeichnet die erste Ableitung nach der Zeit |

Literaturverzeichnis

- [1] **Abbott, H.I.; Doenhoff, A.E.:** *Theory of Wing Sections*, Dover Publications, New York 1959
- [2] **Alwardt, P.; Chao, K.Y.; Isay, W.H.; Westphal, N.:** *Berechnung der Druckverteilung, der Kavitationserscheinungen sowie der induzierten Druckschwankungen an der Außenhaut für Propeller im Nachstrom*, Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft, 1982, 76. Band, S. 423
- [3] **Alwardt, P.:** *Beitrag zur Berechnung von instationären Kavitationserscheinungen am Tragflügel und Schiffspropeller*, Institut für Schiffbau der Universität Hamburg, Bericht Nr. 432, 1983
- [4] **Briancon-Marjollet, L.; Franc, J.P.; Michel, J.M.:** *Transient bubbles interacting with an attached cavity and the boundary layer*, J. Fluid Mech., Vol. 218, 1990
- [5] **Carter, J.E.; Davis, R.L., Reshotko, E.:** *Analysis of Transitional Separation Bubbles on Infinite Swept Wings*, AIAA- Journal, Vol. 25; No. 3, 1987
- [6] **Cebeci, T.; Khattab, A.A.; Schimke, S.M:** *Separation and reattachment near the leading edge of a thin oscillating airfoil*, J. Fluid Mech., Vol. 188, 1988
- [7] **Cebeci, T.:** *Essential Ingredients of a Method for Low Reynolds-Number Airfoils*, AIAA Journal, Dez. 1989
- [8] **Cebeci, T.; Clark, R.W.; Chang, C.; Halsey; N.D, Lee, K.:** *Airfoils with separation and the resulting wakes*, J. Fluid Mech., Vol. 163, 1986
- [9] **Cebeci, T., Bradshaw P.:** *Momentum Transfer in Boundary layers*, Mc Grawhill, 1977
- [10] **Chia, N.; Tanibayashi, H.:** *Unsteady Cavitation of Oscillating Hydrofoil*, Mitsubishi Technical Bulletin 117, 1977
- [11] **Despard, R.A.; Miller, J.A.:** *Separation in oscillating laminar boundary-layer flows*, J. Fluid Mech., 1971, Vol. 47
- [12] **Fischer, T. M.:** *Ein Spektral-Galerkin-Verfahren zur Untersuchung linearer Instabilität in Grenzschichten*, Institut für Theoretische Strömungsmechanik, DFVLR-AVA, Göttingen, Bericht Nr. IB 221-88- A 10, 1988
- [13] **Franc, J.P.; Michel, J.M.:** *Unsteady attached cavitation on an oscillating hydrofoil*, J. Fluid Mech., Vol. 193, 1988

- [14] **Gad-el-Hak, M.; Bushnell, D.M.:** *Separation Control : Review*, Journal of Fluids Engineering, 1991, Vol. 113
- [15] **Gaster, M.:** *Structure and behaviour of laminar separation bubbles*, AGARD Conference Proc. No 4, 1966
- [16] **Gaster, M.:** *On the generation of spatially growing waves in a boundary layer*, J. Fluid Mech., Vol. 22, 1965
- [17] **Gaster, M.:** *The development of three-dimensional wave packets in a boundary layer*, J. Fluid Mech., Vol. 32, 1968
- [18] **Gaster, M.:** *The growth of three-dimensional disturbances in inviscid flows*, J. Fluid Mech., Vol. 43, 1970
- [19] **Gaster, M., Jordinson, R.:** *On the eigenvalues of the Orr-Sommerfeldt equation*, J. Fluid Mech., Vol. 72, 1975
- [20] **Gaster, M.:** *On the effect of boundary-layer growth on flow stability*, J. Fluid Mech., Vol. 66, 1974
- [21] **Gaster, M.:** *A note on the relation between temporally-increasing and spatially increasing disturbances in hydrodynamic stability*, J. Fluid Mech., Vol. 14, 1962
- [22] **Gasau, H.:** *Grenzschichteffekte an Tragflügelprofilen*, Institut für Schiffbau der Universität Hamburg, Bericht Nr. 428, 1983
- [23] **Geissler, W.; Carr, L.W., Cebeci, T.:** *Viscous/Inviscid Interaction Procedure for High-Amplitude Oscillating Airfoils*, ICAAS-88-5.5.1, S. 766
- [24] **Geissler, W.; Carr, L.W., Cebeci, T.:** *Unsteady Separation Characteristics of Airfoils operating under dynamic stall conditions*, 12th European Rotocraft Forum, Garmisch- Partenkirchen, 1986
- [25] **Glauert, M.B.:** *The laminar boundary layer on oscillating plates and cylinders*, J. Fluid Mech., Vol. 1, 156
- [26] **Grosch, C. E.; Salwen, H.:** *The continuous spectrum of the Orr-Sommerfeld equation. Part 1. The spectrum of the eigenfunctions*, J. Fluid Mech., Vol. 87, 1978
- [27] **Kercek, C.:** *The Instability of Oscillatory Boundary Layers*, 12th Symposium of Naval Hydrodynamics, National Academic Press, Washington DC, 1979
- [28] **Kuessner, H.G.:** *Zusammenfassender Bericht über den instationären Auftrieb von Flügeln*, Bericht der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen, Luftfahrtforschung, 13, 1936, S. 410
- [29] **Lehmann, E.:** *Eigenschwingungen linearer Mehrmassenschwinger und Systeme mit verteilten Massen*, Institut für Schiffbau der Universität Hamburg, 19. Fortbildungskurs, 1983
- [30] **Mack, L.M.:** *A numerical study of the temporal eigenvalue spectrum of the Blasius boundary layer*, J. Fluid Mech., Vol. 73, 1976

- [31] Mack, L.M.: *Boundary layer linear stability theory*, In: Special course on stability theory and transition of laminar flow, AGARD Report No. 709, 1984
- [32] Mc. Croskey, W. J.: *Some Current Research in Unsteady Fluid Dynamics*, Trans. ASME Journal of Fluid Engineers, 99, Series 1, No.1, 1977
- [33] Numerical Algorithms Group Ltd.: *NAG Library Introductory Guide*, NAG Central Office, Oxford, 1983
- [34] Nitsche-Kowsky, P.: *Experimentelle Untersuchungen zu Stabilität und Umschlag dreidimensionaler Grenzschichten*, Forschungsbericht DFVLR 86-24, 1986
- [35] O'Meara, M.M.; Mueller, T.J.: *Laminar Separation Bubble Characteristics on an Airfoil at low Reynolds Numbers*, AIAA-Journal, Aug. 1987
- [36] Pauley, L.L; Moin, P.; Reynolds, W.C.: *The structure of two-dimensional separation*, J. Fluid Mech., Vol. 220, 1990
- [37] Pohlhausen, K.: *Zur näherungsweise Integration der laminaren Grenzschicht*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1925
- [38] Isay, W.H.: *Inkompressible Strömungen (Tragflügeltheorie)*, Institut für Schiffbau der Universität Hamburg, Vorlesungsmanuskript, 1972
- [39] Isay, W.H.: *Kavitation*, Schiffahrts-Verlag „Hansa“, Hamburg, 1989
- [40] Kruppa, C.F., Sasse, G.R.: *Cavitation Erosion Tests with Oscillating Foil Sections*, 14th Symposium of Naval Hydrodynamics, National Academic Press, Ann Arbor, 1982
- [41] Marzi, J.: *Ein Berechnungsverfahren zur Behandlung von Profilströmungen mit lokalen Ablösezone und offenen Totwassergebieten*, Institut für Schiffbau der Universität Hamburg, Bericht Nr. 481, 1988
- [42] Moore, F. K.: *On The Separation of the unsteady laminar boundary layer*, ed. H.Goertler, Boundary-Layer Research, Springer Verlag Berlin, 1958
- [43] Parkin, B.R.; Baker, R.B.: *Bubble Dynamics and Cavitation Inception*, Theory. Journ. Ship Research, Vol. 32, 1988
- [44] Phillips, J.H.; Ackerberg, R.C: *A numerical method for integrating the unsteady boundary-layer equations when there are regions of backflow*, J. Fluid Mech., Vol. 58, 1973
- [45] Press, W.; Flannery, P. B.; Teukolsky, S. A., Vetterling, W.T.: *Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990
- [46] Rott, N.: *Unsteady Viscous Flow In The Vicinity of a Stagnation Point*, Quarterly Journal of Applied Mathematics, Vol. 13, 1956
- [47] Schlichting, H.: *Grenzschichttheorie*, Verlag G. Braun, Karlsruhe, 3. Auflage 1958

- [48] **Schlichting, H.; Ulrich, A.:** *Zur Berechnung des Umschlages laminar/turbulent*, Jahrbuch der deutschen Luftfahrtforschung, 1942, S. I 8
- [49] **Schlichting, H.:** *Über die theoretische Berechnung der kritischen Reynoldsschen Zahl einer Reibungsschicht in beschleunigter und verzögerter Strömung*, Jahrbuch der deutschen Luftfahrtforschung, 1940, S. I 97
- [50] **Schlichting, H.; Truckenbrodt E.:** *Aerodynamik des Flugzeuges*, Springer Verlag, 1959, Band 1
- [51] **Sears, W. R.:** *Some Recent Development in Airfoil Theory*, Journal of Aeronautical Sciences, Vol. 23, 1956
- [52] **Sears, W.R.:** *Unsteady Motion of Airfoils with Boundary Layer Separation*, AIAA-Journal, Vol. 14, No.6, 1979
- [53] **Shen, T.; Peterson, F.B.:** *Unsteady Cavitation on an Oscillating Hydrofoil*, 12th Symposium of Naval Hydrodynamics, National Academic Press, Washington DC, 1979
- [54] **Stock, H.W.; Degenhard, E.:** *A simplified e^n method for transition in two-dimensional, incompressible boundary layers*, Z. Flugwiss. Weltraumforsch. 13, 1989
- [55] **Schuh, H.:** *Calculation of Unsteady Boundary Layers in Two-dimensional flow*, Z. f. Flugwiss. 5, 1953
- [56] **Telionis, D.P.; Tsahalis, D.Th.; Werle, M.J.:** *Numerical Investigation of unsteady boundary layer separation*, The Physics of Fluids, Vol. 16, Jul. 1973, S. 968
- [57] **Tsahalis, D.Th.; Telionis, D.P.:** *Oscillating Laminar Boundary Layers and Unsteady Separation*, AIAA Journal, Vol 12, Nov. 1974, S. 1469
- [58] **Visbal, M.R.; Shang, J. S.:** *Investigation of the Flow Structure around a Rapidly Pitching Airfoil*, AIAA- Journal, 1992, Vol. 27
- [59] **Williams, J.C.; Johnson, W.D.:** *Note on Unsteady Boundary Layer Separation*, AIAA- Journal, 1974, Vol. 12
- [60] **Williams, J.C.; Johnson, W.D.:** *Semisimilar Solutions to Unsteady Boundary-Layer Flows Including Separation*, AIAA- Journal, 1974, Vol. 12

