

305 | 1974

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

H. Keil

Die hydrodynamischen Kräfte bei der periodischen Bewegung zweidimensionaler Körper an der Oberfläche flacher Gewässer

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

Die hydrodynamischen Kräfte bei der periodischen Bewegung zweidimensionaler Körper an der Oberfläche flacher Gewässer

H. Keil,, 1. Auflage, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1974

© Technische Universität Hamburg-Harburg

Schriftenreihe Schiffbau

Schwarzenbergstraße 95c

D-21073 Hamburg

<http://www.tuhh.de/vss>

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Mitarbeit im Sonderforschungsbereich 98 . Dabei wurde ich von Prof. Grim durch fördernde Kritik unterstützt. Dafür und für manche persönliche Aufmunterung danke ich ihm.

Ich erkläre, daß ich diese Arbeit in Themenstellung und Durchführung selbständig bearbeitet und außer der angegebenen Literatur und einem Großrechner keine Hilfsmittel in Anspruch genommen habe.

Die Arbeit ist weder zu Prüfungszwecken verwandt worden noch ist sie veröffentlicht.

Ein Promotionsgesuch ist von mir früher nicht gestellt worden.

Harald Linn

1. Einleitung	S. 3
2. Stand der Forschung	S. 4
3. Aufgabenstellung	S. 6
4. Lösung für die Vertikalbewegung	
4.1 Voraussetzungen, Koordinatensystem, Vorzeichen	S. 7
4.2 Vom Lösungsansatz zu erfüllende Bedingungen	S. 7
4.3 Ansatz für das komplexe Potential	
4.3.1 Das dreidimensionale Strahlungspotential	S. 10
4.3.2 Das zweidimensionale Strahlungspotential	S. 12
4.3.3 Andere Ableitung des Strahlungspotentials	S. 15
4.3.4 Das zweidimensionale Vielpolpotential	S. 16
4.3.5 Das Gesamtpotential	S. 17
4.4 Entwicklung der Teilpotentiale	S. 18
4.5 Die Funktion $G(t)$	S. 21
4.6 Hydrodynamische Kräfte	
4.6.1 Trägheitskraft und Dämpfungskraft in Glattwasser	S. 24
4.6.2 Erregende Kraft durch eine Welle	S. 27
4.7 Numerische Behandlung	
4.7.1 Darstellung der Körperform	S. 29
4.7.2 Bestimmung der Quellstärken A_n	S. 30
4.7.3 Genauigkeiten	S. 31
4.7.4 Beispiele	S. 31
5. Lösung für die Horizontalbewegung	
5.1 Randbedingungen	S. 32
5.2 Ansatz für das komplexe Potential	
5.2.1 Das zweidimensionale Strahlungspotential	S. 33
5.2.2 Das zweidimensionale Vielpolpotential	S. 33
5.2.3 Das Gesamtpotential	S. 34
5.3 Entwicklung der Teilpotentiale	S. 35
5.4 Das Potential für verschwindende Frequenz	S. 36
5.5 Hydrodynamische Kräfte und Momente	
5.5.1 Kräfte und Momente in Glattwasser	S. 37
5.5.2 Erregende Kräfte und Momente durch eine Welle	S. 38
5.6 Numerische Behandlung und Beispiele	S. 39
6. Anwendung auf Schiffe mit Hilfe der Streifenmethode	S. 40
7. Zusammenfassung	S. 41
8. Literatur	S. 42
9. Symbolliste	S. 47
Abbildungen	
Anhänge	

1. Einleitung

In den letzten Jahren ist die Bedeutung der in den vergangenen zwei Jahrzehnten gewonnenen Erkenntnisse über die Bewegungen und Belastungen eines Schiffes im Seegang offensichtlich auch in der schiffbaulichen Praxis erkannt worden. Die Zahl der Schiffe, für die Seegangsuntersuchungen durchgeführt wurden, hat jedenfalls stark zugenommen. Da in vielen Anwendungsfällen der Einfluß nichtlinearer Glieder gering ist, hat dabei die theoretische Bestimmung der Übertragungsfunktionen ihren festen Platz neben dem Modellversuch. In verschiedener Hinsicht ist sie ihm sogar überlegen. So ist es z.B. im normalen Tank nicht möglich, ein in schräglaufenden Wellen fahrendes Modell zu untersuchen, die Theorie erlaubt jedoch wenigstens eine näherungsweise Berechnung der Bewegungen.

Durch die immer noch wachsenden Schiffsgrößen ist es notwendig geworden, den Einfluß von Fahrwasserbeschränkungen auf das Bewegungsverhalten zu untersuchen.

In der vorliegenden Arbeit wird deshalb versucht, die Kräfte auf einen an der Oberfläche eines Gewässers endlicher Wassertiefe im glatten Wasser schwingenden oder einer ankommenden Welle ausgesetzten zweidimensionalen Körper zu berechnen. Dabei wird sowohl die Vertikalbewegung (Tauchen) als auch die Horizontalbewegung (Querbewegung und Rollen) untersucht. Die Anwendung der zweidimensionalen Ergebnisse auf Schiffe mit Hilfe der Streifenmethode wird in einem Beispiel behandelt.

2. Stand der Forschung

Die Behandlung der periodischen Bewegungen eines zweidimensionalen Körpers an der Oberfläche eines unendlich tiefen Gewässers und die Berechnung des durch diese Bewegung oder eine ankommende Welle an der Körperoberfläche erzeugten hydrodynamischen Drucks kann man nun schon als klassisch bezeichnen. Für die praktische Anwendung interessieren dabei die beiden Grenzfälle sehr hoher und sehr niedriger Frequenz der Bewegung. Dem ersten Fall sind die Vibrationen zuzuordnen [1,2,3], dem zweiten Fall die Seegangsbewegungen. Dieser zweite Fall, der hier interessiert, ist sowohl für die Vertikalbewegung [4 bis 15] als auch für die Horizontalbewegung [16 bis 18] ausführlich behandelt. Es sind Lösungen für den in glattem Wasser schwingenden als auch den festgehalten einer querlaufenden Welle ausgesetzten Körper sowie Näherungen für den Körper in einer schräglaufenden Welle bekannt. Dabei werden vorwiegend Lewis-Spantformen benutzt. In einer neuen Arbeit [14] wird der Körper durch entlang der Kontur innerhalb des Körpers angeordnete Vielpole erzeugt, wodurch auch Wulstspanten darstellbar sind.

In der ersten Arbeit über die Schwingungen eines Körpers in flachem Wasser [19] wird ein Rotationsellipsoid bei hohen Frequenzen untersucht. Yu und Ursell [20] benutzten ein bereits von Porter [9] angegebenes, aber nicht ausgewertetes Potential zur Berechnung der hydrodynamischen Masse und Dämpfung eines Kreiszyllinders. Die numerischen Ergebnisse sind in Abb. 1 und 2 dargestellt. Monacella [21] berechnete mit Hilfe der Slender-Body Theorie die Kräfte, die ein Rotationsellipsoid in Wellen auf den Flüssigkeitsboden ausübt, da seine Ansätze die Berechnung des Drucks an der Körperoberfläche nicht erlauben. Dabei wird die Einschränkung gemacht, daß die Wassertiefe groß gegenüber Breite und Tiefgang des Körpers ist. Interessant sind jedoch gerade kleine Tiefen. Für ein Mariner Modell auf verschiedenen Wassertiefen bestimmten Freakes und Keay [22] für verschiedene Froude-Zahlen hydrodynamische Massen und Dämpfungen,

indem sie die Kräfte an einem Modell maßen, das entweder nur tauchen oder nur stampfen konnte. Wang [23] berechnete die hydrodynamischen Kräfte an einer halbgetauchten Kugel. Einige einfache Gedanken über die Übertragbarkeit von Modelluntersuchungen auf flachem Wasser auf die Großausführung macht sich Fisher [24].

Eine Anwendung der von Porter [9] und Yu-Ursell [20] angegebenen Potentiale auf Lewis-Formen ist die Arbeit von Kim [25], die den Anstoß zu der vorliegenden Arbeit gab, da die von Kim veröffentlichten Ergebnisse eine Nachberechnung wünschenswert erscheinen ließen. Kims Ergebnisse für den Kreiszylinder zeigt Abb. 3. Fortsetzungen durch Anwendung der Streifenmethode für ein Series 60-Schiff und einen T2-Tanker sind [26] und [27]. Tuck [28] gibt auf der Slender-Body Theorie basierende Potentiale für die Bewegung eines dreidimensionalen Körpers ohne Fahrt in sechs Freiheitsgraden an, die von Beck [30] und Tuck und Beck [29] für zwei Series 60-Schiffe ausgewertet wurden. In diesen Arbeiten wird auch der Einfluß der Kopplung zwischen surge und Tauchen bzw. Stampfen untersucht. In einem mittleren Frequenzbereich ($1.0 \leq \lambda/L \leq 2.0$) zeigen die Ergebnisse ohne Kopplung gute Übereinstimmung mit Kim [26].

3. Aufgabenstellung

Ist es zunächst schwierig zu beurteilen, ob das von Yu-Ursell angegebene Verhalten der hydrodynamischen Masse bei der periodischen Tauchbewegung auf flachem Wasser bei sehr kleinen Frequenzen (Abb.1) physikalisch sinnvoll ist, so läßt sich mit Sicherheit sagen, daß der von Kim berechnete Verlauf (Abb.3) nicht der Wirklichkeit entsprechen kann. Um entscheiden zu können, ob der Fehler in der Entwicklung der Potentiale oder in der numerischen Auswertung zu suchen ist, müssen die Potentiale neu abgeleitet und auf die Erfüllung der Randbedingungen überprüft werden. Sodann muß eine physikalische Interpretation der Ergebnisse versucht werden.

Bei der Horizontalbewegung, für die außer denen von Kim noch keine Ergebnisse vorliegen, besteht die Möglichkeit, die hydrodynamischen Massen und Trägheitsmomente durch ihr asymptotisches Verhalten bei Frequenzen gegen Null - für diesen Fall der Horizontalbewegung liegt eine exakte, jedoch bisher nicht ausgewertete Lösung von Grim [6] vor - auf ihre Richtigkeit zu überprüfen.

4. Lösung für die Vertikalbewegung

4.1 Voraussetzungen, Koordinatensystem, Vorzeichen

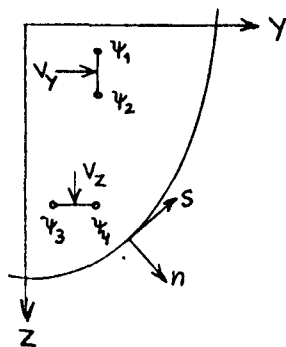
Vorausgesetzt wird eine inkompressible, reibungsfreie Flüssigkeit, in der die durch die Bewegung erzeugte Strömung durch ein Potential beschrieben werden kann. Weiter wird davon ausgegangen, daß das Problem linearisiert werden kann, d.h. daß Einflüsse höherer Ordnung bei der Erfüllung der Randbedingungen vernachlässigbar sind. Physikalisch bedeutet dies, daß die Lösungen nur für Bewegungen mit kleiner Amplitude gelten.

Das benutzte raumfeste Koordinatensystem zeigt Abb. 4. Da dieses Koordinatensystem von dem in der Hydrodynamik üblichen abweicht, ist es notwendig, das Vorzeichen der Stromfunktion zu vereinbaren. Geschwindigkeiten sind selbstverständlich dann positiv, wenn sie in positive Richtung der Koordinatenachsen gerichtet sind.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = v_y \quad , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = v_z$$

Im Gegensatz zur üblichen Vereinbarung soll der Wert der Stromfunktion zunehmen, wenn beim Fortschreiten in positiver Wegrichtung Flüssigkeit von rechts nach links strömt.

Dann folgt:



$$\begin{aligned} \psi_1 < \psi_2 &\longrightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial z} \\ \psi_3 > \psi_4 &\longrightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial z} = - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ &\frac{\partial \Phi}{\partial n} = - \frac{\partial \Psi}{\partial s} \\ &\frac{\partial \Phi}{\partial s} = \frac{\partial \Psi}{\partial n} \end{aligned}$$

Zur Kennzeichnung von Imaginärteilen werden die Buchstaben i und j benutzt, und zwar i für geometrische Variablen (Stromfunktion - Potential) und j bei Funktionen der Zeit.

4.2 Vom Lösungsansatz zu erfüllende Bedingungen

a) Das gesuchte Potential muß natürlich die Kontinuitätsbedingung erfüllen:

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

- b) Der Druck an der freien Wasseroberfläche muß unabhängig von der Zeit sein. Daraus ergibt sich die linearisierte Oberflächenbedingung:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \rho \left[g \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right]_{z=0} = 0 \quad \longrightarrow \quad \left[v \Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]_{z=0} = 0 \quad (2)$$

mit $v = \frac{\omega^2}{g}$. $|y| \geq \frac{B}{2}$ $|y| \geq \frac{B}{2}$

- c) Damit keine Flüssigkeit durch den Gewässerboden tritt, muß die Normalgeschwindigkeit dort verschwinden:

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]_{z=h} = 0 \quad (3)$$

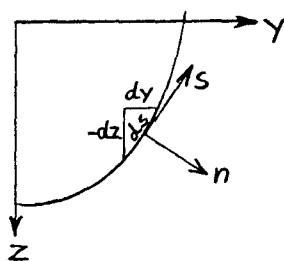
- d) Der schwingende Körper erzeugt eine von ihm fortlaufende Oberflächenwelle. Eine solche Strömung erfüllt die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{|y|} \left[\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re}(\Phi) - v_0 \operatorname{Im}(\Phi) \right] \right\} = 0 \quad (4)$$

$v_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ ist die Wellenzahl der ablaufenden Oberflächenwelle. Der Zusammenhang zwischen Wellenzahl und Kreisfrequenz einer Flachwasserwelle ist gegeben durch

$$v = \frac{\omega^2}{g} = \frac{2\pi}{\lambda} \tanh \frac{2\pi h}{\lambda} = v_0 \tanh(v_0 h) \quad .$$

- e) Soll keine Flüssigkeit in den Körper ein- oder aus ihm austreten, muß die Strömungsgeschwindigkeit an der Körperoberfläche gleich der Körpergeschwindigkeit sein:



$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right]_{\text{Rand}} = v_n \text{Rand} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dz}{ds} \right]_{\text{Rand}} = - \left[\frac{d\psi}{ds} \right]_{\text{Rand}} \quad (5)$$

Da hier zwei verschiedene Fälle untersucht werden, nämlich

- α) die auf den im Glatzwasser vertikal mit der Geschwindigkeit $V \cdot e^{j\omega t}$ schwingenden Körper wirkende Kraft und
- β) die Vertikalkraft auf den festgehaltenen einer ankommenden Welle ausgesetzten Körper,

müssen aus (5) auch zwei Randbedingungen an der Körperoberfläche formuliert werden.

Die Randbedingung für den Fall α) ergibt sich zu:

$$-\left[\frac{d\Psi}{ds}\right]_{\text{Rand}} = V \cdot \left[\frac{dy}{ds}\right]_{\text{Rand}} e^{j\omega t} \longrightarrow \Psi_{\text{Rand}}(y,z,t) = -V e^{j\omega t} y_{\text{Rand}} + C \quad (5a)$$

Im Fall β) setzt sich das Potential der Strömung zusammen aus dem Potential der Welle Φ_W und dem Potential der Störströmung Φ_S , die durch die Anwesenheit des festgehaltenen Körpers erzeugt wird. Da der Körper in Ruhe ist, folgt aus der Randbedingung (5) an der Körperoberfläche:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \Phi_W}{\partial n} + \frac{\partial \Phi_S}{\partial n}\right]_{\text{Rand}} &= \left[\frac{\partial \Phi_W}{\partial z} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial \Phi_W}{\partial y} \frac{dz}{ds} + \frac{\partial \Phi_S}{\partial z} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial \Phi_S}{\partial y} \frac{dz}{ds}\right]_{\text{Rand}} = 0 \\ &= -\left[\frac{d\Psi_W}{ds} + \frac{d\Psi_S}{ds}\right]_{\text{Rand}} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\longrightarrow d\Psi_{S\text{Rand}}(y,z,t) = -d\Psi_{W\text{Rand}}(y,z,t) = \left[\frac{\partial \Phi_W}{\partial z} dy - \frac{\partial \Phi_W}{\partial y} dz\right]_{\text{Rand}}$$

Die sich daraus ergebende Stromfunktion ist leicht anzugeben, wenn die ankommende Welle senkrecht zur Körperlängsachse läuft. Hierbei ist, da nur die Kraft in vertikaler Richtung berechnet werden soll, nur der in y symmetrische Teil des Potentials der Welle bzw. der in y punktsymmetrische Teil der Stromfunktion zu berücksichtigen:

$$\Psi_{S\text{Rand}}(y,z,t) = -\Psi_{W\text{Rand}}(y,z,t) = \frac{\bar{\epsilon}\omega}{v} e^{j\omega t} \left\{ \left[\sinh(v_0 z) - \tanh(v_0 h) \cosh(v_0 z) \right] \sin(v_0 y) \right\}_{\text{Rand}} \quad (6a)$$

Das komplexe Potential der Welle ist in Anhang 1 abgeleitet.

Läuft die Welle in einer anderen Richtung (Abb. 5), handelt es sich um ein dreidimensionales Problem und eine Stromfunktion ist nicht anschreibbar. Die Randbedingung (6) liefert aber eine Pseudostromfunktion $\tilde{\Psi}_S$; das ist die Flüssigkeitsmenge, die je Längeneinheit aus dem Körper austreten müßte, damit infolge der Welle keine Flüssigkeit in den Körper eintritt. Da hierbei Strömungen in Körperlängsrichtung vernachlässigt werden, stellt die in der schrägläufigen Welle berechnete Kraft nur eine Näherung dar.

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{S\text{Rand}}(x,y,z,t) &= \left[\int_0^{y_1} \frac{\partial \Phi_W}{\partial z} dy - \int_{z_0}^z \frac{\partial \Phi_W}{\partial y} dz \right]_{\text{Rand}} \\ &= \frac{\bar{\epsilon}\omega}{v} e^{j\omega t} \cos(v_0 x \cos \mu) \left\{ \sin \mu \sin(v_0 y_1 \sin \mu) \left[\sinh(v_0 z) - \tanh(v_0 h) \cosh(v_0 z) \right] \right. \\ &\quad \left. + v_0 (1 - \sin^2 \mu) \int_0^{y_1} \cos(v_0 y \sin \mu) \left[\sinh(v_0 z) - \tanh(v_0 h) \cosh(v_0 z) \right] dy \right\} \end{aligned} \quad (6b)$$

4.3 Ansatz für das komplexe Potential

4.3.1 Das dreidimensionale Strahlungspotential

Gegeben sei ein dreidimensionaler schwingender Körper. Um das Potential der dadurch erzeugten Strömung zu finden, nimmt man anstelle des Körpers an der Flüssigkeitsoberfläche einen periodischen Druck p unbekannter Amplitude $\bar{p}$ an und versucht, durch die Erfüllung der Randbedingungen diese Amplitude $\bar{p}$ zu bestimmen. Der Druck soll nun nicht auf der ganzen Körperbreite, sondern nur in einem kleinen Bereich Δy um $y = 0$, aber auf der gesamten Körperlänge wirken:

$$p(x, y, z=z_0, t) = -j e^{j\omega t} \bar{p}(x, y, z=z_0) \quad z_0 = \text{z-Koordinate der Flüssigkeitsoberfläche}$$

$$\bar{p}(x, y, z=z_0) = 0 \quad \text{für} \quad |y| \geq \frac{\Delta y}{2} \quad \text{und} \quad |x| \geq \frac{L}{2} \quad (7)$$

Die von diesem Druck in z-Richtung bewirkte Kraft P soll endlich sein:

$$\bar{P} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \bar{p}(x, y, z=z_0) dy dx = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \bar{P}'(x) dx < \infty \quad (7a)$$

Die Bedingung (7) ist von einem Druck $\bar{p}(x, y, z=z_0)$ zu erfüllen, der sich aus unendlich vielen überlagerten Teildrücken unterschiedlicher Amplituden und Wellenzahlen zusammensetzt. Die Fourierentwicklung dieses Druckes läßt sich mit Hilfe des Fourier-Theorems

$$\bar{p}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}(\xi) \cos[m(x-\xi)] d\xi dm$$

angeben, wenn $\bar{p}(x)$ absolut integrabel ist, was durch (7a) erfüllt ist. Da $\bar{p}$ hier von zwei Variablen abhängt, muß die Fourierentwicklung auch zweidimensional sein:

$$\bar{p}(x, y, z=z_0) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}(\xi, \eta) \cos[k(y-\eta)] \cos[m(x-\xi)] d\eta d\xi dk dm$$

Hierin ist m = Wellenzahl in x-Richtung

k = Wellenzahl in y-Richtung

Da $\bar{p}$ für $|y| \geq \frac{\Delta y}{2}$ und $|x| \geq \frac{L}{2}$ verschwindet, wird:

$$\bar{p}(x, y, z=z_0) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \bar{p}(\xi, \eta) \cos[k(y-\eta)] \cos[m(x-\xi)] d\eta d\xi dk dm$$

Δy ist als klein vorausgesetzt, so daß auch η klein bleibt und man $\cos[k(y-\eta)] = \cos(ky)$ setzen kann und erhält:

$$\begin{aligned}\bar{p}(x, y, z=z_0) &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \bar{p}(\xi, \eta) d\eta \cos[m(x-\xi)] d\xi \cos(ky) dk dm \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \cos(ky) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \bar{p}'(\xi) \cos[m(x-\xi)] d\xi dk dm\end{aligned}\quad (7b)$$

Als Ansatz für das Potential der Strömung wird gewählt

$$\bar{\phi}_{\text{str}}(x, y, z, t) = e^{j\omega t} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty C(m, k) \frac{\cosh[\sqrt{m^2+k^2}(z-h)]}{\sinh[\sqrt{m^2+k^2}h]} \cos(ky) \cos[m(x-\xi)] dm dk d\xi \quad (8)$$

Die Funktion $C(m, k)$ ist noch unbekannt.

Die Kontinuitätsbedingung

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial z^2} = 0$$

ist durch diesen Ansatz erfüllt.

Der durch eine Strömung mit dem Potential (8) an der Flüssigkeitsoberfläche erzeugte periodische Druck p_1 ergibt sich durch Integration der aus der Bernoulli-Gleichung erhaltenen zeitlichen Druckänderung

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = e^{j\omega t} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty C(m, k) \cos(ky) \cos[m(x-\xi)] \frac{\omega^2 - g\sqrt{m^2+k^2} \tanh[\sqrt{m^2+k^2}h]}{\tanh[\sqrt{m^2+k^2}h]} dm dk d\xi \quad (8a)$$

$$p_1(x, y, z=z_0, t) = -j e^{j\omega t} \bar{p}_1(x, y, z=0)$$

$$\bar{p}_1(x, y, z=z_0) = \frac{g}{\omega} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty C(m, k) \cos(ky) \cos[m(x-\xi)] \frac{\omega^2 - g\sqrt{m^2+k^2} \tanh[\sqrt{m^2+k^2}h]}{\tanh[\sqrt{m^2+k^2}h]} dm dk d\xi \quad (8b)$$

Wenn $\bar{p}_1$ gleich der gesuchten Amplitude $\bar{p}$ sein soll, ergibt sich aus der Kombination von (7b) und (8b) die unbekannte Funktion $C(m, k)$.

$$\begin{aligned}\bar{p}(x, y, z=z_0) &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \cos(ky) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \bar{p}'(\xi) \cos[m(x-\xi)] d\xi dk dm \\ &= \bar{p}_1(x, y, z=z_0) = \frac{g}{\omega} \int_0^\infty \int_0^\infty \cos(ky) \int_0^\infty C(m, k) \cos[m(x-\xi)] \frac{\omega^2 - \sqrt{k^2+m^2} \tanh[\sqrt{k^2+m^2}h]}{\tanh[\sqrt{k^2+m^2}h]} dk dm d\xi\end{aligned}$$

Der Vergleich der Integranden ergibt

$$\int_0^{\infty} C(m, k) \cos[m(x-\xi)] \frac{s \cdot g}{\omega} \frac{v - \sqrt{m^2 + k^2} \tanh[\sqrt{m^2 + k^2} h]}{\tanh[\sqrt{m^2 + k^2} h]} d\xi = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \bar{P}'(\xi) \cos[m(x-\xi)] d\xi$$

$$\int_0^{\infty} C(m, k) \cos[m(x-\xi)] d\xi = \frac{\tanh[\sqrt{m^2 + k^2} h]}{v - \sqrt{m^2 + k^2} \tanh[\sqrt{m^2 + k^2} h]} \frac{\omega}{s g \pi^2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \bar{P}'(\xi) \cos[m(x-\xi)] d\xi \quad (9)$$

Setzt man noch $\frac{\omega \cdot \bar{P}'(\xi)}{s g \pi^2} = A_o(\xi)$ und setzt (9) in (8) ein, so wird das Potential

$$\Phi_{or}(x, y, z, t) = e^{j\omega t} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} A_o(\xi) \int_0^{\infty} \cos[m(x-\xi)] \int_0^{\infty} \frac{\cosh[\sqrt{m^2 + k^2}(z-h)] \cos(ky)}{v \cosh[\sqrt{m^2 + k^2} h] - \sqrt{m^2 + k^2} \sinh[\sqrt{m^2 + k^2} h]} dk dm d\xi \quad (10)$$

Dieses Potential erfüllt noch nicht die Ausstrahlungsbedingung und die Randbedingung an der Körperoberfläche.

4.3.2 Das zweidimensionale Strahlungspotential

Bei der Bewegung eines zweidimensionalen Körpers laufen keine Wellen in x-Richtung, d.h. $m = 0$. Es muß dann die Belegung $A(\xi)$ über die ganze Körperlänge von $\xi = -\infty$ bis $\xi = \infty$ konstant sein, so daß sich das Strahlungspotential (10) vereinfacht zu

$$\Phi_{or}(y, z, t) = e^{j\omega t} A_o \int_0^{\infty} \frac{\cosh[k(z-h)] \cos(ky)}{v \cosh(kh) - k \sinh(kh)} dk \quad (11)$$

Damit auch die Ausstrahlungsbedingung (4) erfüllt ist, muß hierzu noch ein Term addiert werden. Zu dessen Bestimmung wird der Wert des Potentials (11) in großer Entfernung vom Körper benötigt:

$$\Phi_{or}(y, z, t) = e^{j\omega t} A_o \int_0^{\infty} \frac{\cosh[k(z-h)] \cos(ky)}{v \cosh(kh) - k \sinh(kh)} dk = e^{j\omega t} A_o \cdot \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{\infty} F(k) e^{iky} dk + \int_0^{\infty} F(k) e^{-iky} dk \right\}$$

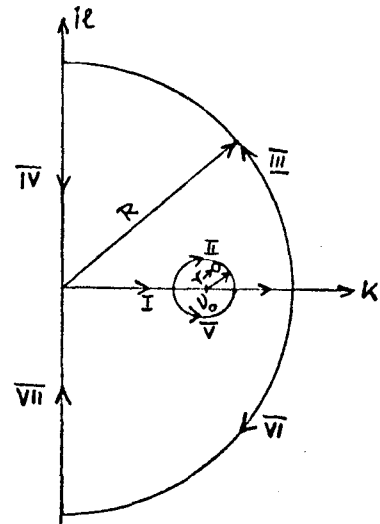
$$F(k) = \frac{\cosh[k(z-h)]}{v \cosh(kh) - k \sinh(kh)}$$

Substituiert man für k $u = k + il$ und integriert für $y > 0$ das erste Integral über die geschlossene Linie I-II-III-IV im ersten Quadranten der komplexen Ebene und das zweite Integral über die geschlossene Linie I-V-VI-VII im vierten Quadranten, so erhält man:

$$\oint F(u) e^{iuy} du = \int_0^R \dots dk + \int_{II} \dots du + \int_{III} \dots du + \int_{IV} \dots du$$

$$= J_I + J_{II} + J_{III} + J_{IV} = 0$$

$$\int_0^\infty F(k) e^{iky} dk = -\lim_{R \rightarrow \infty} [J_{II} + J_{III} + J_{IV}]$$



Die Lage des Pols ergibt sich aus
 $v \cosh(v_0 h) - v_0 \sinh(v_0 h) = 0$.

Da $\lim_{R \rightarrow \infty} J_{III} = 0$ und für große y auch J_{IV} verschwindet, liefert nur der Pol einen Beitrag

$$J_{II} = -i\pi \operatorname{Res}(v_0) = -i\pi \frac{\cosh[v_0(z-h)] e^{iv_0 y}}{v_0 h \sinh(v_0 h) - \sinh(v_0 h) - v_0 h \cosh(v_0 h)}$$

$$= i\pi \frac{\cosh[v_0(z-h)] \cosh(v_0 h) e^{iv_0 y}}{v_0 h + \sinh(v_0 h) \cosh(v_0 h)}$$

und das gesuchte Integral wird für $y \rightarrow \infty$:

$$\int_0^\infty F(k) e^{iky} dk = -i\pi \frac{\cosh(v_0 h) \cosh[v_0(z-h)] e^{iv_0 y}}{v_0 h + \sinh(v_0 h) \cosh(v_0 h)}$$

$$\oint F(u) e^{-iuy} du = \int_0^R \dots dk + \int_V \dots du + \int_{VI} \dots du + \int_{VII} \dots du = J_I + J_V + J_{VI} + J_{VII} = 0$$

$$\int_0^\infty F(k) e^{-iky} dk = -\lim_{R \rightarrow \infty} [J_V + J_{VI} + J_{VII}]$$

Da $\lim_{R \rightarrow \infty} J_{VII} = 0$ und auch J_{VII} für große y verschwindet, liefert in diesem Fall ebenfalls der Pol nur einen Beitrag

$$J_V = i\pi \operatorname{Res}(v_0) = -i\pi \frac{\cosh(v_0 h) \cosh[v_0(z-h)] e^{-iv_0 y}}{v_0 h + \sinh(v_0 h) \cosh(v_0 h)}$$

und das gesuchte Integral wird für $y \rightarrow \infty$:

$$\int_0^\infty F(k) e^{-iky} dk = i\pi \frac{\cosh(v_0 h) \cosh[v_0(z-h)] e^{-iv_0 y}}{v_0 h + \sinh(v_0 h) \cosh(v_0 h)}$$

Damit ergibt sich für das Potential (11) bei $y \rightarrow \infty$:

$$\bar{\Phi}_{or}(\gamma, z, t) = e^{j\omega t} A_0 \pi \frac{\cosh(v_0 h) \cosh[v_0(z-h)]}{v_0 h + \sinh(v_0 h) \cosh(v_0 h)} \sin(v_0 \gamma) \quad (11a)$$

Die Ausstrahlungsbedingung (4) ist erfüllt, wenn man setzt:

$$e^{j\omega t} A_0 \pi v_0 \frac{\cosh(v_0 h) \cosh[v_0(z-h)]}{v_0 h + \sinh(v_0 h) \cosh(v_0 h)} \cos(v_0 \gamma) - v_0 \mathcal{J}_m \{ \bar{\Phi}_o(\gamma, z, t) \} = 0$$

$$\mathcal{J}_m \{ \bar{\Phi}_o(\gamma, z, t) \} = \bar{\Phi}_{oj}(\gamma, z, t) = e^{j\omega t} A_0 \pi \frac{\cosh(v_0 h) \cosh[v_0(z-h)]}{v_0 h + \sinh(v_0 h) \cosh(v_0 h)} \cos(v_0 \gamma) \quad (11b)$$

Damit wird das Strahlungspotential

$$\bar{\Phi}_{or}(\gamma, z, t) + j \bar{\Phi}_{oj}(\gamma, z, t) = e^{j\omega t} A_0 \left\{ \int_0^\infty \frac{\cosh[k(z-h)] \cos(k\gamma)}{v \cosh(kh) - k \sinh(kh)} dk + j \pi \frac{\cosh(v_0 h) \cosh[v_0(z-h)] \cos(v_0 \gamma)}{v_0 h + \sinh(v_0 h) \cosh(v_0 h)} \right\} \quad (12)$$

Für $y \rightarrow \infty$ wird daraus

$$\bar{\Phi}_o(\gamma \rightarrow \infty, z, t) = e^{j\omega t} A_0 j \pi \frac{\cosh(v_0 h) \cosh[v_0(z-h)]}{v_0 h + \sinh(v_0 h) \cosh(v_0 h)} e^{-j v_0 \gamma},$$

d.h. das Potential (12) beschreibt eine Strömung, bei der Wellen mit der Amplitude

$$\bar{\zeta} = A_0 \frac{\omega \pi}{g} \frac{\cosh^2(v_0 h)}{v_0 h + \sinh(v_0 h) \cosh(v_0 h)} \quad (12c)$$

nach beiden Seiten vom Körper weglafen.

Aus der Orthogonalitätsbedingung $\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \gamma} = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial z}$ folgt die Stromfunktion zu

$$\bar{\Psi}_{or}(\gamma, z, t) + j \bar{\Psi}_{oj}(\gamma, z, t) = -e^{j\omega t} A_0 \left\{ \int_0^\infty \frac{\sinh[k(z-h)] \sin(k\gamma)}{v \cosh(kh) - k \sinh(kh)} dk + j \pi \frac{\cosh(v_0 h) \sinh[v_0(z-h)] \sin(v_0 \gamma)}{v_0 h + \sinh(v_0 h) \cosh(v_0 h)} \right\} \quad (13)$$

Für unendlich tiefes Wasser gehen (12) und (13) über in die bekannten Ausdrücke

$$\bar{\Phi}_{or\infty}(\gamma, z, t) + j \bar{\Phi}_{oj\infty}(\gamma, z, t) = e^{j\omega t} A_0 \left\{ \int_0^\infty \frac{e^{-kz} \cos(k\gamma)}{v - k} dk + j \pi e^{-vz} \cos(v\gamma) \right\} \quad (12a)$$

$$\bar{\Psi}_{or\infty}(\gamma, z, t) + j \bar{\Psi}_{oj\infty}(\gamma, z, t) = e^{j\omega t} A_0 \left\{ \int_0^\infty \frac{e^{-kz} \sin(k\gamma)}{v - k} dk + j \pi e^{-vz} \sin(v\gamma) \right\} \quad (13a)$$

Potential und Stromfunktion sollen nun in der Form

$$\bar{\Phi}_o = \bar{\Phi}_{orad} + \bar{\Phi}_{orad} + j \bar{\Phi}_{oj} = e^{j\omega t} A_0 \left\{ \int_0^\infty \frac{e^{-kz} \cos(k\gamma)}{v - k} dk + \int_0^\infty \frac{e^{-kh} \cos(k\gamma)}{v - k} \frac{v \sinh(kz) - k \cosh(kz)}{v \cosh(kh) - k \sinh(kh)} dk + j \pi \frac{\cosh(v_0 h) \cosh[v_0(z-h)] \cos(v_0 \gamma)}{v_0 h + \sinh(v_0 h) \cosh(v_0 h)} \right\} \quad (12b)$$

$$\bar{\Psi}_o = \bar{\Psi}_{orad} + \bar{\Psi}_{orad} + j \bar{\Psi}_{oj} = e^{j\omega t} A_0 \left\{ \int_0^\infty \frac{e^{-kz} \sin(k\gamma)}{v - k} dk - \int_0^\infty \frac{e^{-kh} \sin(k\gamma)}{v - k} \frac{v \cosh(kz) - k \sinh(kz)}{v \cosh(kh) - k \sinh(kh)} dk - j \pi \frac{\cosh(v_0 h) \sinh[v_0(z-h)] \sin(v_0 \gamma)}{v_0 h + \sinh(v_0 h) \cosh(v_0 h)} \right\} \quad (13b)$$

geschrieben werden, wobei $\bar{\Phi}_{r\infty}$ das Potential auf tiefem Wasser und $\bar{\Phi}_{rad}$ das Zusatzpotential auf flachem Wasser bedeuten.

$\bar{\Phi}_j$ setzt sich auch aus dem imaginären Tiefwasserpotential und einem Zusatzterm auf flachem Wasser zusammen; die Terme sollen aber hier nicht getrennt angeschrieben werden.

4.3.3 Andere Ableitung des Strahlungspotentials:

Eine andere Ableitung des zweidimensionalen Potentials gibt Porter [9] an. Dabei wird vorausgesetzt, daß der Realteil des Potentials auf tiefem Wasser $\bar{\Phi}_{r\infty}$ bekannt ist. Das in flachem Wasser hinzukommende Potential $\bar{\Phi}_{rad}$ wird so bestimmt, daß es die Bedingung an der freien Oberfläche und zusammen mit $\bar{\Phi}_{r\infty}$ die Bedingung am Boden erfüllt.

Als Ansatz für das reelle Zusatz-Strahlungspotential wird gewählt:

$$\bar{\Phi}_{orad}(y,z,t) = e^{j\omega t} A_0 \int_0^{\infty} \{c_1(k) \sinh(kz) + c_2(k) \cosh[k(z-h)]\} \cos(ky) dk \quad (14)$$

Aus der Oberflächenbedingung (2) folgt für $|y| \geq \frac{B}{2}$:

$$e^{j\omega t} A_0 \int_0^{\infty} [v c_2(k) \cosh(kh) + c_1(k) \cdot k - c_2(k) \cdot k \cdot \sinh(kh)] \cos(ky) dk = 0$$

Die Lösung dieser Fourierschen Integralgleichung

$$\int_0^{\infty} f(k) \cos(k\xi) dk = g(\xi)$$

ist bekannt:

$$f(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} g(\xi) \cos(k\xi) d\xi$$

Man erhält also

$$f(k) = c_1(k) \cdot k + c_2(k) [v \cosh(kh) - k \sinh(kh)] = 0$$

$$\rightarrow c_2(k) = - \frac{k}{v \cosh(kh) - k \sinh(kh)} c_1(k)$$

Damit wird

$$\bar{\Phi}_{orad}(y,z,t) = e^{j\omega t} A_0 \int_0^{\infty} c_1(k) \left[\sinh(kz) - \frac{k \cdot \cosh[k(z-h)]}{v \cosh(kh) - k \sinh(kh)} \right] \cos(ky) dk$$

Die unbekannte Funktion $C_1(k)$ berechnet sich aus der Bodenbedingung (3):

$$\left[\frac{\partial \Phi_{\text{orad}}}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_{\text{orad}}}{\partial z} \right]_{z=h} = 0 = e^{j\omega t} A_0 \left\{ - \int_0^{\infty} \frac{k e^{-kh} \cos(ky)}{v-k} dk + \int_0^{\infty} c_1(k) \cdot k \cosh(kh) \cos(ky) dk \right\}$$

$$\rightarrow c_1(k) = \frac{e^{-kh}}{(v-k) \cosh(kh)} \quad ; \quad c_2(k) = - \frac{k e^{-kh}}{(v-k) [v \cosh(kh) - k \sinh(kh)] \cosh(kh)}$$

Damit wird das reelle Zusatz-Strahlungspotential wie in (12b):

$$\Phi_{\text{orad}}(y, z, t) = e^{j\omega t} A_0 \int_0^{\infty} \frac{e^{-kh}}{v-k} \frac{v \sinh(kz) - k \cosh(kz)}{v \cosh(kh) - k \sinh(kh)} \cos(ky) dk \quad (14a)$$

Den Imaginärteil erhält man wie in 4.3.2 oder auf dem in Anhang 3 beschriebenen Weg.

4.3.4 Das zweidimensionale Vielpolpotential

Mit dem Potential (12b) bzw. der Stromfunktion (13b) allein als Störpotential sind die Bedingungen an der Körperoberfläche nicht zu erfüllen. Es müssen daher noch weitere Potentiale Φ_n addiert werden, die die Bedingungen (1) bis (4) nicht verletzen, zusammen mit Φ_0 aber die Randbedingungen (5) oder (6) erfüllen.

$$\Phi(y, z, t) = A_0 \Phi'_0(y, z, t) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \Phi'_n(y, z, t)$$

$$= A_0 [\Phi'_{\text{orad}}(y, z, t) + \Phi'_{\text{orad}}(y, z, t) + j \Phi'_{\text{oj}}(y, z, t)] + \sum_{n=1}^{\infty} A_n [\Phi'_{\text{nrad}}(y, z, t) + \Phi'_{\text{nrad}}(y, z, t) + j \Phi'_{\text{nj}}(y, z, t)] \quad (15)$$

Es werden nun die von Grim [6] angegebenen Vielpolpotentiale benutzt und nach der in 4.3.3 angegebenen Methode die reellen Zusatzpotentiale Φ_{nrad} sowie unter Anwendung der Ausstrahlungsbedingung wie in 4.3.2 die Imaginärteile Φ_{nj} bestimmt.

Man erhält dann:

$$\Phi_{\text{nrad}}(y, z, t) = e^{j\omega t} A_n \int_0^{\infty} (k+v) k^{2(n-1)} e^{-kz} \cos(ky) dk \quad (16)$$

$$\Phi_{\text{nrad}}(y, z, t) = e^{j\omega t} A_n \int_0^{\infty} (k+v) k^{2(n-1)} e^{-kh} \frac{v \sinh(kz) - k \cosh(kz)}{v \cosh(kh) - k \sinh(kh)} \cos(ky) dk \quad (16a)$$

$$\Phi_{\text{nj}}(y, z, t) = -e^{j\omega t} A_n \frac{\pi v_0^{2n}}{\cosh(v_0 h)} \frac{\cosh[v_0(z-h)] \cos(v_0 y)}{v_0 h + \sinh(v_0 h) \cosh(v_0 h)} \quad (16b)$$

Die Orthogonalitätsbedingung liefert daraus die Stromfunktionen:

$$\Psi_{n\tau\infty}(\gamma, z, t) = e^{j\omega t} A_n \int_0^{\infty} (k+v) k^{2(n-1)} e^{-kz} \sin(ky) dk \quad (17)$$

$$\Psi_{nrad}(\gamma, z, t) = -e^{j\omega t} A_n \int_0^{\infty} (k+v) k^{2(n-1)} e^{-kh} \frac{v \cosh(kz) - k \sinh(kz)}{v \cosh(kh) - k \sinh(kh)} \sin(ky) dk \quad (17a)$$

$$\Psi_{nj}(\gamma, z, t) = e^{j\omega t} A_n \frac{\pi v_0^{2n}}{\cosh(v_0 h)} \frac{\sinh[v_0(z-h)] \sin(v_0 y)}{v_0 h + \sinh(v_0 h) \cosh(v_0 h)} \quad (17b)$$

Für unendlich tiefes Wasser verschwinden Φ_{nj} und Φ_{nrad} .

4.3.5 Das Gesamtpotential

Damit ist bis auf die komplexen Konstanten A_n ($0 \leq n \leq \infty$) das Potential der durch die Schwingungen des zweidimensionalen Körpers erzeugten Strömung bekannt:

$$\begin{aligned} \Phi(\gamma, z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} [A_{n\tau} + j A_{nj}] [\Phi'_{n\tau\infty}(\gamma, z, t) + \Phi'_{nrad}(\gamma, z, t) + j \Phi'_{nj}(\gamma, z, t)] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \{ A_{n\tau} [\Phi'_{n\tau\infty} + \Phi'_{nrad}] - A_{nj} \Phi'_{nj} + j [A_{nj} (\Phi'_{n\tau\infty} + \Phi'_{nrad}) + A_{n\tau} \Phi'_{nj}] \} \\ &= e^{j\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \{ A_{n\tau} (\varphi_{n\tau\infty} + \varphi_{nrad}) - A_{nj} \varphi_{nj} + j [A_{nj} (\varphi_{n\tau\infty} + \varphi_{nrad}) + A_{n\tau} \varphi_{nj}] \} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \Psi(\gamma, z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} [A_{n\tau} + j A_{nj}] [\Psi'_{n\tau\infty}(\gamma, z, t) + \Psi'_{nrad}(\gamma, z, t) + j \Psi'_{nj}(\gamma, z, t)] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \{ A_{n\tau} [\Psi'_{n\tau\infty} + \Psi'_{nrad}] - A_{nj} \Psi'_{nj} + j [A_{nj} (\Psi'_{n\tau\infty} + \Psi'_{nrad}) + A_{n\tau} \Psi'_{nj}] \} \\ &= e^{j\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \{ A_{n\tau} (\psi_{n\tau\infty} + \psi_{nrad}) - A_{nj} \psi_{nj} + j [A_{nj} (\psi_{n\tau\infty} + \psi_{nrad}) + A_{n\tau} \psi_{nj}] \} \end{aligned} \quad (19)$$

Zusammengefasst kann das komplexe Gesamtpotential wie folgt angeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \Phi(\gamma, z, t) + i \Psi(\gamma, z, t) &= e^{j\omega t} [A_{0\tau} + j A_{0j}] \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\cos\{k[\gamma + i(z-h)]\}}{v \cosh(kh) - k \sinh(kh)} dk + j \pi \frac{\cosh(v_0 h) \cos\{v_0[\gamma + i(z-h)]\}}{v_0 h + \sinh(v_0 h) \cosh(v_0 h)} \right\} \\ &\quad + e^{j\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} [A_{n\tau} + j A_{nj}] \left\{ \int_0^{\infty} (v^2 - k^2) k^{2(n-1)} \frac{\cos\{k[\gamma + i(z-h)]\}}{v \cosh(kh) - k \sinh(kh)} dk - j \frac{\pi v_0^{2n}}{\cosh(v_0 h)} \frac{\cos\{v_0[\gamma + i(z-h)]\}}{v_0 h + \sinh(v_0 h) \cosh(v_0 h)} \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

Die Koeffizienten A_{nr} und A_{nj} ($0 \leq n \leq \infty$) werden so bestimmt, dass die jeweilige Bedingung an der Körperkontur erfüllt ist (4.7.2). Sie sind dimensionsbehaftet. Es ist für die Auswertung praktisch, sie auf die Amplitude der Strömungsgeschwindigkeit zu beziehen, auch wenn sie dann immer noch die Dimension Länge²ⁿ⁺¹ haben:

$$A_r + jA_j = V \frac{A_r + jA_j}{V} = V [A'_r + jA'_j]$$

$A'_n \varphi_n$ und $A'_n \psi_n$ haben dann die Dimension einer Länge.

4.4 Entwicklung der Teilpotentiale

Die Entwicklung der Teilpotentiale für unendlich tiefes Wasser ist von Grim [43] angegeben:

Für $vr = v\sqrt{y^2 + z^2} \rightarrow 0$:

$$\varphi_{0r\infty} = e^{-vz} \left\{ \cos(vy) \left[\gamma + \ln(vr) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{v^m \operatorname{Re}\{(z+iy)^m\}}{m \cdot m!} \right] + \sin(vy) \left[\arctan \frac{y}{z} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{v^m \operatorname{Im}\{(z+iy)^m\}}{m \cdot m!} \right] \right\} \quad (21)$$

$$\psi_{0r\infty} = e^{-vz} \left\{ \sin(vy) \left[\gamma + \ln(vr) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{v^m \operatorname{Re}\{(z+iy)^m\}}{m \cdot m!} \right] - \cos(vy) \left[\arctan \frac{y}{z} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{v^m \operatorname{Im}\{(z+iy)^m\}}{m \cdot m!} \right] \right\} \quad (21a)$$

mit $\gamma = .57722$ (Eulersche Konstante).

Für $vr = v\sqrt{y^2 + z^2} \rightarrow \infty$

$$\varphi_{0r\infty} = \sum_{m=1}^M \frac{(m-1)!}{v^m y^{2m}} \operatorname{Re}\{(z+iy)^m\} + \pi e^{-vz} \sin(vy) \cdot \operatorname{sign}(y)$$

$$\psi_{0r\infty} = \sum_{m=1}^M \frac{(m-1)!}{v^m y^{2m}} \operatorname{Im}\{(z+iy)^m\} - \pi e^{-vz} \cos(vy) \cdot \operatorname{sign}(y)$$

Dabei ist zu beachten, dass $\frac{(m-1)!}{v^m y^{2m}} (z+iy)^m$ semikonvergent ist.

$$\varphi_{nr\infty} = (-1)^n (2n-1)! \left\{ \operatorname{Re}[(y+iz)^{-2n}] + \frac{v}{2n-1} \operatorname{Im}[(y+iz)^{-(2n-1)}] \right\} \quad (22)$$

$$\psi_{nr\infty} = (-1)^n (2n-1)! \left\{ \operatorname{Im}[(y+iz)^{-2n}] - \frac{v}{2n-1} \operatorname{Re}[(y+iz)^{-(2n-1)}] \right\} \quad (22a)$$

Bei der Entwicklung der übrigen Teilpotentiale wird von folgenden Beziehungen (Anhang 2) Gebrauch gemacht:

$$\cosh(kz)\cos(ky) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{k^{2t}}{(2t)!} \operatorname{Re}[(z+iy)^{2t}]$$

$$\sinh(kz)\sin(ky) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{k^{2t}}{(2t)!} \operatorname{Im}[(z+iy)^{2t}]$$

$$\sinh(kz)\cos(ky) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{k^{2t+1}}{(2t+1)!} \operatorname{Re}[(z+iy)^{2t+1}]$$

$$\cosh(kz)\sin(ky) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{k^{2t+1}}{(2t+1)!} \operatorname{Im}[(z+iy)^{2t+1}]$$

Damit wird aus (14a):

$$\begin{aligned} \psi_{\text{orad}} &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-kh} dk}{(v-k)[v\cosh(kh)-k\sinh(kh)]} \left\{ v \sum_{t=0}^{\infty} \frac{k^{2t+1}}{(2t+1)!} \operatorname{Re}[(z+iy)^{2t+1}] - k \sum_{t=0}^{\infty} \frac{k^{2t}}{(2t)!} \operatorname{Re}[(z+iy)^{2t}] \right\} \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(2t+1)!} \int_0^{\infty} \frac{k^{2t+1} e^{-kh} dk}{(v-k)[v\cosh(kh)-k\sinh(kh)]} \left\{ v \operatorname{Re}[(z+iy)^{2t+1}] - (2t+1) \operatorname{Re}[(z+iy)^{2t}] \right\} \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} - \frac{G(2t+1)}{(2t+1)!} \left\{ v \operatorname{Re}[(z+iy)^{2t+1}] - (2t+1) \operatorname{Re}[(z+iy)^{2t}] \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

Entsprechend wird:

$$\psi_{\text{orad}} = \sum_{t=0}^{\infty} - \frac{G(2t+1)}{(2t+1)!} \left\{ (2t+1) \operatorname{Im}[(z+iy)^{2t}] - v \operatorname{Im}[(z+iy)^{2t+1}] \right\} \quad (23a)$$

Die Funktion $G(t) = \int_0^{\infty} \frac{k^t e^{-kh} dk}{(k-v)[v\cosh(kh)-k\sinh(kh)]}$ wird in 4.5 behandelt.

Weiter ergibt sich aus (16a):

$$\begin{aligned} \psi_{\text{inrad}} &= \int_0^{\infty} \frac{(k^2-v^2) k^{2(n-1)} e^{-kh} dk}{(k-v)[v\cosh(kh)-k\sinh(kh)]} \left\{ v \sum_{t=0}^{\infty} \frac{k^{2t+1}}{(2t+1)!} \operatorname{Re}[(z+iy)^{2t+1}] - k \sum_{t=0}^{\infty} \frac{k^{2t}}{(2t)!} \operatorname{Re}[(z+iy)^{2t}] \right\} \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(2t+1)!} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{k^{2t+2n+1} e^{-kh} dk}{(k-v)[v\cosh(kh)-k\sinh(kh)]} - v^2 \int_0^{\infty} \frac{k^{2t+2n-1} e^{-kh} dk}{(k-v)[v\cosh(kh)-k\sinh(kh)]} \right\} \left\{ v \operatorname{Re}[(z+iy)^{2t+1}] - (2t+1) \operatorname{Re}[(z+iy)^{2t}] \right\} \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{G(2t+2n+1) - v^2 G(2t+2n-1)}{(2t+1)!} \left\{ v \operatorname{Re}[(z+iy)^{2t+1}] - (2t+1) \operatorname{Re}[(z+iy)^{2t}] \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

Entsprechend wird:

$$\psi_{\text{nrad}} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{G(2t+2n+1) - v^2 G(2t+2n-1)}{(2t+1)!} \left\{ (2t+1) \operatorname{Im}[(z+iy)^{2t}] - v \operatorname{Im}[(z+iy)^{2t+1}] \right\} \quad (24a)$$

Für die Imaginärteile kann geschrieben werden:

$$\varphi_{0j} = \pi \frac{\cosh^2(v_{0h})}{v_{0h} + \sinh(v_{0h}) \cosh(v_{0h})} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \frac{v_0^{2t}}{(2t)!} \operatorname{Re}[(z+iy)^{2t}] - \tanh(v_{0h}) \sum_{t=0}^{\infty} \frac{v_0^{2t+1}}{(2t+1)!} \operatorname{Re}[(z+iy)^{2t+1}] \right\} \quad (25)$$

$$\psi_{0j} = -\pi \frac{\cosh^2(v_{0h})}{v_{0h} + \sinh(v_{0h}) \cosh(v_{0h})} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \frac{v_0^{2t}}{(2t)!} \operatorname{Im}[(z+iy)^{2t}] - \tanh(v_{0h}) \sum_{t=0}^{\infty} \frac{v_0^{2t+1}}{(2t+1)!} \operatorname{Im}[(z+iy)^{2t+1}] \right\} \quad (25a)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{nj} &= - \frac{\pi v_0^{2n}}{v_{0h} + \sinh(v_{0h}) \cosh(v_{0h})} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \frac{v_0^{2t}}{(2t)!} \operatorname{Re}[(z+iy)^{2t}] - \tanh(v_{0h}) \sum_{t=0}^{\infty} \frac{v_0^{2t+1}}{(2t+1)!} \operatorname{Re}[(z+iy)^{2t+1}] \right\} \\ &= -v_0^{2(n-1)} (v_0^2 - v^2) \varphi_{0j} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \psi_{nj} &= \frac{\pi v_0^{2n}}{v_{0h} + \sinh(v_{0h}) \cosh(v_{0h})} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \frac{v_0^{2t}}{(2t)!} \operatorname{Im}[(z+iy)^{2t}] - \tanh(v_{0h}) \sum_{t=0}^{\infty} \frac{v_0^{2t+1}}{(2t+1)!} \operatorname{Im}[(z+iy)^{2t+1}] \right\} \\ &= -v_0^{2(n-1)} (v_0^2 - v^2) \psi_{0j} \end{aligned} \quad (26a)$$

4.5 Die Funktion $G(t)$

Die Funktion

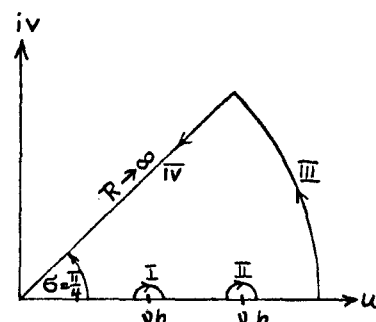
$$G(t) = \int_0^{\infty} \frac{k^t \cdot e^{-kh}}{(k-v) [v \cosh(kh) - k \sinh(kh)]} dk \quad [\text{Länge}^{1-t}]$$

weist im Integranden zwei Pole bei $k = v$ und $k = v_0$ auf. Es ist nicht möglich, dieses Integral geschlossen zu lösen. Es gelingt aber [23], es in ein anderes überzuführen, dessen Integrand stetig ist. Dazu wird das Integral zunächst normiert:

$$G'(t) = G(t) \cdot h^{t-1} = \int_0^{\infty} \frac{u^t e^{-u}}{(u-vh)(vh \cosh u - u \sinh u)} du \quad (27)$$

Mit der Substitution $w = u+iv = \frac{\sigma}{2} \sqrt{2} \cdot e^{i\sigma}$ wird

$$\begin{aligned} J &= \oint \frac{w^t e^{-w} dw}{(w-vh)(vh \cosh w - w \sinh w)} = \int_0^{\infty} \dots du + \int_I \dots dw + \int_{II} \dots dw + \int_{III} \dots dw + \int_{IV} \dots dw \\ &= \int_0^{\infty} \dots du + J_I + J_{II} + J_{III} + J_{IV} = 0 \end{aligned} \quad (27a)$$



$$\rightarrow \int_0^{\infty} \frac{u^t e^{-u}}{(u-vh)(vh \cosh u - u \sinh u)} du = -\operatorname{Re} \{ J_I + J_{II} + J_{III} + J_{IV} \}$$

J_I und J_{II} sind imaginär, da sie die Residuen sind, $J_{III} = 0$ für $R \rightarrow \infty$.

Es bleibt also:

$$\int_0^{\infty} \frac{u^t e^{-u}}{(u-vh)(vh \cosh u - u \sinh u)} du = -\operatorname{Re} \{ J_{IV} \} = -\operatorname{Re} \left\{ \int_{IV} \frac{w^t \cdot e^{-w}}{(w-vh)(vh \cosh w - w \sinh w)} dw \right\}$$

Macht man den Nenner des Integranden durch Erweitern mit der konjugiert komplexen Funktion $(\tilde{w}-vh)(vh \cosh \tilde{w} - \tilde{w} \sinh \tilde{w})$ mit $\tilde{w} = \frac{\sigma}{2} \sqrt{2} e^{-i\sigma}$ reell, so erhält man

$$G'(t) = -\operatorname{Re} \left\{ \int_{IV} \frac{w^t e^{-w} (\tilde{w}-vh)(vh \cosh \tilde{w} - \tilde{w} \sinh \tilde{w}) dw}{(w-vh)(\tilde{w}-vh)(vh \cosh w - w \sinh w)(vh \cosh \tilde{w} - \tilde{w} \sinh \tilde{w})} \right\} \quad (28)$$

$$= -\cos \frac{t\pi}{4} \int_0^{\infty} \frac{\left[\frac{\sigma}{2} \right]^t \frac{2(vh)^2 [(1-\tan \frac{t\pi}{4})(\cos \sigma + e^3) + (1+\tan \frac{t\pi}{4}) \sin \sigma] - 4vh\sigma [\cos \sigma + \tan \frac{t\pi}{4} \sin \sigma] + \sigma^2 [(1+\tan \frac{t\pi}{4})(\cos \sigma - e^3) - (1-\tan \frac{t\pi}{4}) \sin \sigma]}{[\sigma^2 - 2vh(\sigma - vh)] [\cosh \sigma (2v^2 h^2 + \sigma^2 - 2vh\sigma \tanh \sigma) + (2v^2 h^2 - \sigma^2) \cos \sigma + 2vh\sigma \sin \sigma]} d\sigma$$

Da t immer ungerade ist, wird

$$G'(t) = -\cos \frac{t\pi}{4} \int_0^{\infty} \frac{4(vh)^2 \sin s + 2s^2 (\cos s - e^{-s}) - 4vh s (\cos s + \sin s)}{\text{Nenner}} \left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^t ds \text{ für } t = 1, 5, 9, \dots$$

$$= -\cos \frac{t\pi}{4} \int_0^{\infty} \frac{4(vh)^2 (\cos s + e^{-s}) - 2s^2 \sin s - 4vh s (\cos s - \sin s)}{\text{Nenner}} \left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^t ds \text{ für } t = 3, 7, 11, \dots$$

Abb. 6 zeigt für einige t $G'(t)$ in Abhängigkeit von vh . $G(1)$ weicht bei kleinen vh entscheidend von den von Kim angegebenen Werten ab. Es wurde deshalb nicht nur das Integral (28) hinreichend auf seine Konvergenz durch verschiedene Integrationsintervalle und -schritte untersucht, sondern auch das Integral (27) nach Abspalten der Pole durch eine Laguerre-Quadratur [34, 35] berechnet. Je nach Schrittweite und damit Rechenzeitaufwand kann die Übereinstimmung beliebig weit getrieben werden. Hier wurde Übereinstimmung in acht Ziffern als hinreichend betrachtet.

Für $t > 1$ nimmt $G'(t)$ endliche Werte an. $G'(1)$ hingegen konvergiert für $vh \rightarrow 0$ nicht, da der Integrand mit abnehmendem vh monoton wächst (Abb. 7). Es soll deshalb das asymptotische Verhalten für $vh \rightarrow 0$ untersucht werden.

$$G'(1) = G(1) = \int_0^{\infty} \frac{u \cdot e^{-u} \cdot du}{(u - vh) \cdot (vh \cdot \cosh u - u \cdot \sinh u)} \quad (28a)$$

Für kleine vh konvergiert der Integrand in (28a) schnell (Abb. 8). Deshalb können anstelle der Hyperbelfunktionen die ersten Glieder ihrer Reihenentwicklungen gesetzt werden. Als Näherung für (28a) wird also gesetzt:

$$\lim_{vh \rightarrow 0} G_1(1) = \int_0^{\infty} \frac{u \cdot e^{-u} \cdot du}{(u - vh) \cdot (vh - u^2)} \quad (29)$$

Durch Partialbruchzerlegung erhält man hierfür:

$$\lim_{vh \rightarrow 0} G_1(1) = \lim_{vh \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{1 - vh} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u} du}{u - vh} + \frac{1}{2\sqrt{vh}(\sqrt{vh} - 1)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u} du}{u - \sqrt{vh}} + \frac{1}{2\sqrt{vh}(\sqrt{vh} + 1)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u} du}{u + \sqrt{vh}} \right\}$$

Nun ist

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-u} \cdot du}{u-a} = -e^{-a} \cdot \left[\gamma + \ln|a| + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m}{m \cdot m!} \right],$$

so daß man erhält:

$$\begin{aligned} \lim_{vh \rightarrow 0} G_1(1) &= \lim_{vh \rightarrow 0} \left\{ -\frac{e^{-vh}}{1-vh} \left[\gamma + \ln(vh) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(vh)^m}{m \cdot m!} \right] + \frac{e^{-\sqrt{vh}}}{2\sqrt{vh}(1-\sqrt{vh})} \left[\gamma + \frac{1}{2} \ln(vh) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(vh)^{\frac{m}{2}}}{m \cdot m!} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{\sqrt{vh}}}{2\sqrt{vh}(1+\sqrt{vh})} \left[\gamma + \frac{1}{2} \ln(vh) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (vh)^{\frac{m}{2}}}{m \cdot m!} \right] \right\} \\ &= \lim_{vh \rightarrow 0} \left\{ -\frac{e^{-vh}}{1-vh} \left[\gamma + \ln(vh) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(vh)^m}{m \cdot m!} \right] + \frac{(1+\sqrt{vh}) e^{-\sqrt{vh}}}{2\sqrt{vh}(1-vh)} \left[\gamma + \frac{1}{2} \ln(vh) + \sqrt{vh} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(vh)^{\frac{m}{2}}}{m \cdot m!} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{(1-\sqrt{vh}) e^{\sqrt{vh}}}{2\sqrt{vh}(1-vh)} \left[\gamma + \frac{1}{2} \ln(vh) - \sqrt{vh} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m (vh)^{\frac{m}{2}}}{m \cdot m!} \right] \right\} \\ &= \lim_{vh \rightarrow 0} \left\{ -\frac{e^{-vh}}{1-vh} \left[\gamma + \ln(vh) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(vh)^m}{m \cdot m!} \right] + \frac{1}{1-vh} \left[\cosh \sqrt{vh} - \frac{\sinh \sqrt{vh}}{\sqrt{vh}} \right] \left[\gamma + \frac{1}{2} \ln(vh) \right] + \frac{\cosh \sqrt{vh}}{1-vh} - \frac{\sinh \sqrt{vh}}{1-vh} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2(1-vh)} \left[e^{-\sqrt{vh}} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(vh)^{\frac{m-1}{2}}}{m \cdot m!} + e^{-\sqrt{vh}} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(vh)^{\frac{m}{2}}}{m \cdot m!} - e^{\sqrt{vh}} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m (vh)^{\frac{m-1}{2}}}{m \cdot m!} + e^{\sqrt{vh}} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m (vh)^{\frac{m}{2}}}{m \cdot m!} \right] \right\} \\ &= 1 - \gamma - \ln(vh) \end{aligned} \quad (29a)$$

In Abb. 9 ist diese Näherung dem exakten Wert des Integrals berechnet nach (28) gegenübergestellt.

Die Bedeutung des Imaginärteils des Integrals (27a) ist in Anhang 3 behandelt.

4.6 Hydrodynamische Kräfte

4.6.1 Trägheitskraft und Dämpfungskraft in Glatzwasser

Ist das Potential Φ der Strömung gegeben, so folgt aus der Bernoulli-Gleichung der lineare Teil des instationären Drucks:

$$p_{dyn} = p - p_{stat} = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -j \omega \rho \Phi$$

Das Potential Φ ist mit der Schwingungsgeschwindigkeit in Phase. Will man die Phase des Drucks auf den Schwingungsweg beziehen, so muss die Phase um 90° reduziert werden, was einer Multiplikation mit $-j$ entspricht.

Der Druck ist also dann:

$$p_{dyn} = -\rho \omega \Phi$$

Die hydrodynamische Kraft, die das Wasser auf den Körper ausübt, ist gleich dem Integral des Drucks über die Körperkontur. Im zweidimensionalen Fall handelt es sich um eine Kraft je Längeneinheit. Für die Kraft in vertikaler Richtung erhält man:

$$\begin{aligned} F_v &= F_{vr} + j F_{vj} = \int_s p dy = \int_s p dy = \rho \omega V [F'_{vr} + j F'_{vj}] \\ &= -\rho \omega V e^{j\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \int_s [A'_{nr} \varphi_{nr} - A'_{nj} \varphi_{nj} + j (A'_{nr} \varphi_{nj} + A'_{nj} \varphi_{nr})] dy \end{aligned} \quad (30)$$

Der Realteil der Kraft ist gleich hydrodynamische Masse mal Schwingungsbeschleunigung, woraus für die hydrodynamische Masse folgt:

$$m'' = \frac{F_{vr}}{b} = \frac{\bar{F}_{vr}}{\omega V}$$

Dimensionslos:

$$C_v = \frac{m''}{\rho \frac{\pi}{8} B^2} = \frac{\bar{F}_{vr}}{\rho \frac{\pi}{8} B^2 \omega V} \quad (30a)$$

Der Imaginärteil der Kraft muss gleich sein der hydrodynamischen Dämpfungskonstante mal Schwingungsgeschwindigkeit. Dann ist die Dämpfungskonstante:

$$N_v = \frac{|\bar{F}_{vj}|}{V}$$

Anstelle dieser Dämpfungskonstante wird normalerweise das Verhältnis der Amplituden von entstehender Welle $\bar{z}$ und Bewegung $\bar{z}$ angegeben. Dafür erhält man durch Gleichsetzen der Energien bzw. Leistungen:

$$\begin{aligned}\bar{A}_V^2 &= \frac{\bar{E}^2}{\bar{Z}^2} = \frac{\omega^2}{g^2} \frac{N_V}{2 C_{\text{Gruppe}}} = \frac{\omega v_0}{g^2} \frac{\sinh(2v_0 h)}{2v_0 h + \sinh(2v_0 h)} N_V \\ &= \frac{v^2}{g \omega V} \frac{\cosh^2(v_0 h)}{v_0 h + \sinh(v_0 h) \cosh(v_0 h)} \bar{F}_{Vj}\end{aligned}\quad (30b)$$

Auf tiefem Wasser wird die hydrodynamische Masse bekanntlich für $v \rightarrow 0$ unendlich groß, da das Potential (21) in

$$\lim_{v \rightarrow 0} \varphi_{\text{or} \infty} = \gamma + \ln(vr) \quad (30c)$$

übergeht und man für die dimensionslose hydrodynamische Masse des Kreises erhält [6]:

$$\lim_{v \rightarrow 0} C_V = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{m''}{g \frac{\pi}{8} B^2} = \frac{8}{\pi^2} \left[-\gamma - \ln(vr) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(4n^2-1)} \right]$$

Für das Amplitudenverhältnis gilt in diesem Fall:

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{d\bar{A}_V}{dv} = B$$

Auf flachem Wasser bleibt die hydrodynamische Masse für $v \rightarrow 0$ endlich. Da die Vielpolpotentiale ebenso wie auf tiefem Wasser nur endliche Beiträge leisten, braucht man hier nur das Strahlungspotential zu diskutieren, das bei unendlich tiefem Wasser für das Ergebnis - unendliche Masse - maßgebend ist. Für dieses Strahlungspotential liefert der Grenzübergang auf flachem Wasser:

$$\lim_{v \rightarrow 0} [\varphi_{\text{or} \infty} + \varphi_{\text{or} \text{fl}}] = \gamma + \ln(vr) - \ln(vh) = \gamma + \ln\left(\frac{r}{h}\right)$$

Für tiefes Wasser liefert (30d) natürlich ebenso einen unendlichen Wert wie (30c).

Für das Amplitudenverhältnis auf flachem Wasser ergibt sich - wenn man die Beiträge der Vielpolpotentiale, die im hier interessierenden Grenzfall $v \rightarrow 0$ verschwinden, außer acht läßt - aus (12c)

$$\begin{aligned}\bar{A}_V &= \frac{\bar{E}}{\bar{Z}} = A_0 \frac{\omega \pi}{g \bar{Z}} \frac{\cosh^2(v_0 h)}{v_0 h + \sinh(v_0 h) \cosh(v_0 h)} = A_0 \frac{v \pi}{\omega \bar{Z}} \frac{\cosh^2(v_0 h)}{v_0 h + \sinh(v_0 h) \cosh(v_0 h)} \\ &= \frac{A_0 \pi v}{V} \frac{\cosh^2(v_0 h)}{v_0 h + \sinh(v_0 h) \cosh(v_0 h)} = A'_0 \pi \frac{v_0 \sinh(v_0 h) \cosh(v_0 h)}{v_0 h + \sinh(v_0 h) \cosh(v_0 h)}\end{aligned}$$

Da $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{A'_0 \pi}{B} = 1$, wird

$$\lim_{v \rightarrow 0} \bar{A}_V = B \frac{v_0 \sinh(v_0 h) \cosh(v_0 h)}{v_0 h + \sinh(v_0 h) \cosh(v_0 h)}$$

$$\text{und } \lim_{v \rightarrow 0} \frac{d\bar{A}_v}{dv} = \lim_{v_0 \rightarrow 0} \frac{d\bar{A}_v}{dv_0} \frac{dv_0}{dv} = \frac{B}{2} \lim_{v_0 \rightarrow 0} \frac{1}{v_0 h + \sinh(v_0 h) \cosh(v_0 h)} = \infty$$

$\bar{A}_v(\frac{vB}{2})$ muß also bei $\frac{vB}{2}=0$ eine vertikale Tangente haben.

Die Tatsache, daß die hydrodynamische Masse für tiefes Wasser für $v \rightarrow 0$ unendlich wird, läßt sich physikalisch wie folgt erklären. Je kleiner die Frequenz der Bewegung wird, desto länger wird die ablaufende Welle und desto schneller läuft diese vom Körper fort. Im Grenzfall $v=0$ ist diese Welle unendlich lang und breitet sich ebenso wie der Druck -da Inkompressibilität vorausgesetzt war- mit unendlicher Geschwindigkeit aus. Das bedeutet, daß alle Flüssigkeitsteilchen in Phase mit der Bewegung des Körpers sind. Daraus folgt, daß auch die hydrodynamische Kraft in Phase mit der Beschleunigung des Körpers sein muß. Also gilt:

$$\varepsilon_{HT=\infty} = \arctan \frac{\bar{F}_{vj}}{\bar{F}_{vr}} = \arctan \frac{\bar{F}'_{vj}}{\bar{F}'_{vr}} = 0$$

Diese Bedingung ist nur erfüllt, wenn $\bar{F}'_{vj}$ gleich Null oder $\bar{F}'_{vr} = m'' : g$ unendlich wird. $\bar{F}'_{vj}$ ist aber endlich (Abb. 10):

$$\bar{F}'_{vj} = \frac{\bar{F}_{vj}}{g\omega v} = \frac{N_v}{g\omega} = \frac{g^2}{\omega^4} \bar{A}_v^2 = \frac{\bar{A}_v^2}{v^2}$$

Da $\lim_{v \rightarrow 0} \bar{A}_v = Bv$, folgt $\lim_{v \rightarrow 0} \bar{F}'_{vj} = B^2$. Also muß $\bar{F}'_{vr} = m'' : g$ unendlich sein.

Der endliche Wert der hydrodynamischen Masse auf flachem Wasser ist physikalisch schwieriger zu interpretieren. Eine vollständige Erklärung kann hier nicht gegeben werden. Es soll aber wenigstens versucht werden zu zeigen, daß das Ergebnis nicht unsinnig ist. Auf flachem Wasser kann die Welle auch in inkompressibler Flüssigkeit nicht mit unendlicher Geschwindigkeit laufen, sondern höchstens Schwallgeschwindigkeit erreichen. Bei langen Wellen auf flachem Wasser wird auch die Energie mit dieser Geschwindigkeit transportiert. Daraus ist zu schließen, daß für kleine Frequenzen mit abnehmender Frequenz der Dämpfungsanteil der hydrodynamischen Kraft relativ zunimmt. Dies zeigt auch Abb. 10. Das heißt aber:

$$\varepsilon_{HT \neq \infty} = \arctan \frac{\bar{F}'_{vj}}{\bar{F}'_{vr}} \neq 0$$

Also muß $\bar{F}'_{vr} = m'' : g$ endlich sein.

4.6.2 Erregende Kraft durch eine Welle

Die auf den festgehaltenen einer ankommenden Welle ausgesetzten Körper wirkende hydrodynamische Kraft setzt sich zusammen aus der Kraft durch die ungestörte Welle (Froude-Kriloff-Hypothese) F_1 und der Kraft infolge der Störung der Welle durch den Körper, die in einen in Phase mit der Beschleunigung oszillierenden Anteil F_2 und einen Anteil F_3 aufzuteilen ist, der in Phase mit der Geschwindigkeit ist.

$$F_E = F_1 + F_2 + jF_3$$

Berechnet werden diese Kräfte aus dem Potential der Welle Φ_w und dem Potential der Störung Φ_s . Dabei stellt, wie erwähnt, für $\mu \neq 90^\circ$ die berechnete Kraft nur eine Näherung der erregenden Kraft dar.

$$\begin{aligned} F_E = F_1 + F_2 + jF_3 &= -\rho \cdot \omega \int_S [\Phi_w + \Phi_s] dy \\ &= -\rho \omega e^{j\omega t} \int_S \left\{ \frac{\bar{\epsilon} \omega}{v} e^{-jv_0 x \cos \mu} [\cosh(v_0 z) - \tanh(v_0 h) \sinh(v_0 z)] \cos(v_0 y \sin \mu) \right. \\ &\quad \left. + V \sum_{n=0}^{\infty} [A'_{nr} \varphi_{nr} - A'_{nj} \varphi_{nj} + j(A'_{nr} \varphi_{nj} + A'_{nj} \varphi_{nr})] \right\} dy \end{aligned} \quad (31)$$

Hierin ist

$$F_1 = -\frac{\rho \omega^2 \bar{\epsilon}}{v} e^{j(\omega t - v_0 x \cos \mu)} \int_S [\cosh(v_0 z) - \tanh(v_0 h) \sinh(v_0 z)] \cos(v_0 y \sin \mu) dy$$

$$F_2 = -\rho \omega V e^{j\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \int_S [A'_{nr} \varphi_{nr} - A'_{nj} \varphi_{nj}] dy$$

$$F_3 = -\rho \omega V e^{j\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \int_S [A'_{nr} \varphi_{nj} + A'_{nj} \varphi_{nr}] dy$$

Die dimensionslosen Amplituden werden mit $V = \bar{\epsilon} \cdot \omega$:

$$\begin{aligned} \bar{E}_1 &= \frac{\bar{F}_1}{\rho \cdot g \cdot \bar{\epsilon} \cdot B} = -\frac{1}{B} \int_S [\cosh(v_0 z) - \tanh(v_0 h) \sinh(v_0 z)] \cos(v_0 y \sin \mu) dy \\ \bar{E}_2 &= \frac{\bar{F}_2}{\rho \cdot g \cdot \bar{\epsilon} \cdot B} = -\frac{v}{B} \sum_{n=0}^{\infty} \int_S [A'_{nr} \varphi_{nr} - A'_{nj} \varphi_{nj}] dy \\ \bar{E}_3 &= \frac{\bar{F}_3}{\rho \cdot g \cdot \bar{\epsilon} \cdot B} = -\frac{v}{B} \sum_{n=0}^{\infty} \int_S [A'_{nr} \varphi_{nj} + A'_{nj} \varphi_{nr}] dy \end{aligned} \quad (31a)$$

Für den Fall $\mu = 90^\circ$, also die querlaufende Welle, können nach Haskind-Newman [37] die Anteile $\bar{E}_1$, $\bar{E}_2$ und $\bar{E}_3$ noch auf andere Weise bestimmt werden:

Ist $\Phi_W = \varphi_W e^{j\omega t}$ das Potential der ankommenden Welle und $\Phi_S = \varphi_S e^{j\omega t}$ das Potential der Störung durch den Körper in weiter Entfernung vom Körper mit der Geschwindigkeitsamplitude $V = 1$, so gilt:

$$F_E = -\rho\omega e^{j\omega t} \int_0^h \left[\varphi_W \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \varphi \frac{\partial \varphi_W}{\partial y} \right] dz \quad (32)$$

Nach Anhang 2 ist

$$\varphi_W = \frac{\bar{\epsilon}\omega}{v} [\cosh(v_0 z) - \tanh(v_0 h) \sinh(v_0 z)] \cos(v_0 y)$$

Aus 4.3.2 und 4.3.4 folgt als asymptotischer Ausdruck für das Störpotential der Tauchbewegung in glattem Wasser mit $V = 1$

$$\varphi_{y \rightarrow \infty} = \frac{\pi \cosh^2(v_0 h)}{v_0 h + \sinh(v_0 h) \cosh(v_0 h)} [\cosh(v_0 z) - \tanh(v_0 h) \sinh(v_0 z)] \sin(v_0 y) \left[A'_{0r} + j A'_{0j} - (v_0^2 - v^2) \sum_{n=1}^{\infty} (A'_{nr} + j A'_{nj}) v_0^{2(n-1)} \right]$$

Dieses in (32) eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned} F_E &= -\rho g \bar{\epsilon} v_0 e^{j\omega t} \frac{2\pi \cosh^2(v_0 h)}{v_0 h + \sinh(v_0 h) \cosh(v_0 h)} \int_0^h [\cosh(v_0 z) - \tanh(v_0 h) \sinh(v_0 z)]^2 dz \left[A'_{0r} + j A'_{0j} - (v_0^2 - v^2) \sum_{n=1}^{\infty} (A'_{nr} + j A'_{nj}) v_0^{2(n-1)} \right] \\ &= -\rho g \bar{\epsilon} \pi e^{j\omega t} \left[A'_{0r} + j A'_{0j} - (v_0^2 - v^2) \sum_{n=1}^{\infty} (A'_{nr} + j A'_{nj}) v_0^{2(n-1)} \right] \end{aligned}$$

Dimensionslos:

$$\begin{aligned} \bar{E}_1 + \bar{E}_2 &= \frac{\operatorname{Re}\{\bar{F}_E\}}{\rho g \bar{\epsilon} B} = -\frac{\pi}{B} \left[A'_{0r} - (v_0^2 - v^2) \sum_{n=1}^{\infty} A'_{nr} v_0^{2(n-1)} \right] \\ \bar{E}_3 &= \frac{\operatorname{Im}\{\bar{F}_E\}}{\rho g \bar{\epsilon} B} = -\frac{\pi}{B} \left[A'_{0j} - (v_0^2 - v^2) \sum_{n=1}^{\infty} A'_{nj} v_0^{2(n-1)} \right] \end{aligned} \quad (32a)$$

4.7 Numerische Behandlung

4.7.1 Darstellung der Körperform

Es werden Querschnittsformen behandelt, die durch die Lewis-Transformation

$$y + iz = e^{i\theta} + a e^{-i\theta} + b e^{-i3\theta} \quad (33)$$

auf den Kreis abbildbar sind. Dies stellt eine Einschränkung dar, da Wulstspanten dadurch nicht dargestellt werden können, erleichtert die Bestimmung der noch unbekannten komplexen Koeffizienten A_n aber sehr und schränkt den Rechenzeitaufwand ein.

Die Körperkoordinaten sind dann

$$\begin{aligned} y &= (1+a) \cos\theta + b \cos(3\theta) \\ z &= (1-a) \sin\theta - b \sin(3\theta) \end{aligned} \quad (33a)$$

Die in den Flachwasserpotentialen auftretende Größe $z + iy$ ist dann

$$z + iy = i(y-iz) = i \left[e^{-i\theta} + a e^{i\theta} + b e^{i3\theta} \right] \quad (33b)$$

Alle Rechnungen werden im Lewis-Raum durchgeführt. Die Umrechnung dimensionsbehafteter Größen ergibt sich aus folgender Tabelle.

Größe	Großausführung	Lewis-Raum	<u>Großausführung</u> Lewis-Raum
Breite	BR	$2(1+a+b)$	$\frac{BR}{2(1+a+b)}$
Tiefgang	TI	$1-a+b$	$\frac{TI}{1-a+b}$
Wassertiefe	HT·TI	$WT = HT(1-a+b)$	$\frac{TI}{1-a+b}$
Wellenzahl	ν_o	$WF = \nu_o \cdot \frac{TI}{1-a+b}$	$\frac{1-a+b}{TI}$
Beschleunigung	g	g	1
Kräfte	F_G	F	$\left[\frac{TI}{1-a+b} \right]^2$

4.7.2 Bestimmung der Quellstärken A_n

Die noch unbekannten komplexen Koeffizienten A_n ($0 \leq n \leq \infty$), die physikalisch die Quellstärken der die Strömung erzeugenden Singularitäten darstellen, können bestimmt werden, indem die Stromfunktion (19) mit den Koordinaten der Körperoberfläche in die für den jeweiligen Fall geltende Randbedingung (5a) bis (6b) eingesetzt wird.

$$\Psi[(y,z)_{\text{Rand}}, t] = \Psi_{\text{Rand}}[(y,z)_{\text{Rand}}, t] \quad (34)$$

Zur Bestimmung dieser Unbekannten A_n müssen ebenso viele Gleichungen formuliert werden. Da hier nur Lewis-Formen betrachtet werden, bietet sich dafür ein einfacher Weg an.

Alle Teilstromfunktionen und Randbedingungen lassen sich ohne oder mit geringem Rechenzeitaufwand in Fourierreihen

$$\psi_n = \sum_{m=0}^{\infty} \{c_{nm} \cdot \sin(2m\theta) + d_{nm} \cdot \cos[(2m+1)\theta]\}$$

oder mit

$$\cos[(2m+1)\theta] = 1 - \frac{2\theta}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2m+1)^2}{k[4k^2 - (2m+1)^2]} \sin(2k\theta)$$

in

$$\psi_n = a_{n0} + \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \sin(2m\theta)$$

entwickeln.

Die Lösung des durch Koeffizientenvergleich entstehenden komplexen Gleichungssystems liefert die Unbekannten A'_n .

Die Quellstärke des Strahlungspotentials Φ'_0 für den Kreisquerschnitt zeigt Abb. 11.

4.7.3 Genauigkeiten

Die in den angeschriebenen Entwicklungen auftretenden Summationen über n und t erstrecken sich von Null bis unendlich. Die Genauigkeit der Ergebnisse wird also von der Entscheidung beeinflusst, nach wieviel Gliedern die Summation abgebrochen wird. Die Genauigkeit hängt weiter ab von der Schrittweite bei der numerisch durchgeführten Fourieranalyse der Stromfunktion (21a) und (6b) sowie der numerischen Integration bei der Bestimmung des Anteils des reellen Strahlungspotentials φ_{or} an der hydrodynamischen Kraft. Wesentlich beeinflusst wird die Genauigkeit von der ebenfalls numerisch durchzuführenden Integration bei der Berechnung der Funktionen $G(t)$. Da in allen vorhandenen Programmen die Speicherplatzbelegung dynamisch ist, kann der Kompromiß Genauigkeit - Rechenzeit von Fall zu Fall geschlossen werden.

Für alle hier angegebenen Beispiele gilt:

Zahl der Teilpotentiale:	$n_{\max} + 1 = 5$
Zahl der Glieder in Summen über t :	$t_{\max} + 1 = 9$
Zahl der Konturpunkte bei Integration:	$i_{\max} + 1 = 21$
Zahl der richtigen Stellen in $G(t)$:	6

4.7.4 Beispiele

In Abb. 12 bis 14 sind für den Kreiszyylinder auf verschiedenen Wassertiefen die dimensionslosen hydrodynamischen Massen C_V und die Amplitudenverhältnisse $\bar{A}_V$ und in Abb. 15 die dimensionslose erregende Kraft durch eine querlaufende Welle dargestellt. Die Auswahl des Kreises erfolgte nicht, weil dafür die Ergebnisse besser wären als für andere Profile, sondern da die Ergebnisse von Yu-Ursell und Kim für diesen Körper Ausgangspunkt der Arbeit waren. Der Vergleich mit Abb. 1 bis 3 zeigt entscheidende Abweichungen. Es wurde deshalb noch die von Yu-Ursell angegebene Entwicklung und numerische Auswertung der Potentiale nachvollzogen. Die Ergebnisse waren die gleichen wie hier dargestellt. Daraus ist zu schließen, daß sowohl Yu-Ursell als auch Kim die Funktion $G(t)$ nicht exakt bestimmt haben.

5. Lösung für die Horizontalbewegung

5.1 Randbedingungen

Die unter 4.1 getroffenen Vereinbarungen gelten auch für die Horizontalbewegung. Das gesuchte Potential muß natürlich die von der Bewegungsrichtung unabhängigen Bedingungen a) bis d), formuliert in den Gleichungen (1) bis (4) in 4.2 erfüllen. Die Bedingung e) an der Körperoberfläche muß aber neu formuliert werden.

Da hier zwei Bewegungen, nämlich eine Translations- und eine Rotationsbewegung zu betrachten sind, ergeben sich aus

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right]_{\text{Rand}} = v_{n\text{Rand}}$$

auch im glatten Wasser zwei Randbedingungen, nämlich für die Querbewegung

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right]_{\text{Rand}} = v_{n\text{Rand}} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dz}{ds} \right]_{\text{Rand}} = - \left[\frac{d\Psi}{ds} \right]_{\text{Rand}} = -U e^{j\omega t} \left[\frac{dz}{ds} \right]_{\text{Rand}}$$

$$\rightarrow d\Psi_{\text{Rand}} = U e^{j\omega t} dz_{\text{Rand}} \rightarrow \Psi_{\text{Rand}}(y,z,t) = U e^{j\omega t} z_{\text{Rand}} + C \quad (35a)$$

und für die Rollbewegung

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right]_{\text{Rand}} = v_{n\text{Rand}} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dz}{ds} \right]_{\text{Rand}} = - \left[\frac{d\Psi}{ds} \right]_{\text{Rand}} = -\bar{\varphi} \omega e^{j\omega t} \left[\frac{dr}{ds} r \right]_{\text{Rand}}$$

$$\rightarrow d\Psi_{\text{Rand}} = -\bar{\varphi} \omega e^{j\omega t} [r dr]_{\text{Rand}} \rightarrow \Psi_{\text{Rand}}(y,z,t) = -\frac{\bar{\varphi} \omega}{2} e^{j\omega t} [y^2 + z^2]_{\text{Rand}} + C \quad (35b)$$

Für den festgehaltenen Körper in der Welle erhält man analog zu 4.2, wobei hier, da nur die Kraft in horizontaler Richtung und das Moment um die Körperlängsachse berechnet werden sollen, nur der in y punktsymmetrische Teil des Potentials bzw. der in y symmetrische Teil der Stromfunktion der Welle (Anhang 1) zu berücksichtigen ist, in der querlaufenden Welle

$$\Psi_{\text{SRand}}(y,z,t) = \frac{\bar{\varepsilon} \omega}{v} e^{j\omega t} \left\{ [\sinh(v_0 z) - \tanh(v_0 h) \cosh(v_0 z)] \cos(v_0 y) \right\}_{\text{Rand}} \quad (36a)$$

und in der schräglauenden Welle

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{\text{SRand}}(x,y,z,t) = \frac{\bar{\varepsilon} \omega}{v} e^{j\omega t} \sin(v_0 x \cos \mu) \left\{ \sin \mu \cos(v_0 y \sin \mu) [\sinh(v_0 z_1) - \tanh(v_0 h) \cosh(v_0 z_1)] \right. \\ \left. - v_0 (1 - \sin^2 \mu) \int_0^y \sin(v_0 y \sin \mu) [\sinh(v_0 z) - \tanh(v_0 h) \cosh(v_0 z)] dy \right\} \end{aligned} \quad (36b)$$

5.2 Ansatz für das komplexe Potential

5.2.1 Das zweidimensionale Strahlungspotential

Analog 4.3.1 erhält man für das dreidimensionale Strahlungspotential

$$\Phi_{or}(x,y,z,t) = e^{j\omega t} \int_{-\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} A_o(\xi) \int_0^\infty \cos[m(x-\xi)] \int_0^\infty \frac{\sqrt{m^2+k^2} \cosh[\sqrt{m^2+k^2}(z-h)] \sin(ky)}{v \cosh[\sqrt{m^2+k^2}h] - \sqrt{m^2+k^2} \sinh[\sqrt{m^2+k^2}h]} dk dm d\xi, \quad (37)$$

das sich im zweidimensionalen Fall zu

$$\Phi_{or}(y,z,t) = e^{j\omega t} A_o \int_0^\infty \frac{k \cdot \cosh[k(z-h)] \sin(ky)}{v \cosh(kh) - k \sinh(kh)} dk \quad (38)$$

reduziert. Erfüllt man die Ausstrahlungsbedingung (4) entsprechend 4.3.2 oder gemäß Anhang 3, so wird das gesamte Strahlungspotential

$$\Phi_{or}(y,z,t) + j\Phi_{oj}(y,z,t) = e^{j\omega t} A_o \left\{ \int_0^\infty \frac{k \cosh[k(z-h)] \sin(ky)}{v \cosh(kh) - k \sinh(kh)} dk + j\pi v_o \frac{\cosh(v_o h) \cosh[v_o(z-h)] \sin(v_o y)}{v_o h + \sinh(v_o h) \cosh(v_o h)} \right\} \quad (39)$$

und die Stromfunktion

$$\Psi_{or}(y,z,t) + j\Psi_{oj}(y,z,t) = e^{j\omega t} A_o \left\{ \int_0^\infty \frac{k \sinh[k(z-h)] \cos(ky)}{v \cosh(kh) - k \sinh(kh)} dk + j\pi v_o \frac{\cosh(v_o h) \sinh[v_o(z-h)] \cos(v_o y)}{v_o h + \sinh(v_o h) \cosh(v_o h)} \right\} \quad (40)$$

Potential und Stromfunktion sollen wie in 4.3.2 aufgeteilt werden:

$$\Phi_o = \Phi_{orad} + \Phi_{oad} + j\Phi_{oj} = e^{j\omega t} \left\{ \int_0^\infty \frac{k e^{-kz} \sin(ky)}{v-k} dk + \int_0^\infty \frac{k e^{-kh} \sin(ky)}{v-k} \frac{v \sinh(kz) - k \cosh(kz)}{v \cosh(kh) - k \sinh(kh)} dk + j\pi v_o \frac{\cosh(v_o h) \cosh[v_o(z-h)] \sin(v_o y)}{v_o h + \sinh(v_o h) \cosh(v_o h)} \right\} \quad (39a)$$

$$\Psi_o = \Psi_{orad} + \Psi_{oad} + j\Psi_{oj} = e^{j\omega t} \left\{ \int_0^\infty \frac{k e^{-kh} \cos(ky)}{v-k} dk + \int_0^\infty \frac{k e^{-kh} \cos(ky)}{v-k} \frac{v \cosh(kz) - k \sinh(kz)}{v \cosh(kh) - k \sinh(kh)} dk + j\pi v_o \frac{\cosh(v_o h) \sinh[v_o(z-h)] \cos(v_o y)}{v_o h + \sinh(v_o h) \cosh(v_o h)} \right\} \quad (40a)$$

5.2.2 Das zweidimensionale Vielpolpotential

Das zweidimensionale Vielpolpotential wird entsprechend 4.3.4:

$$\Phi_{nr\infty}(y,z,t) = -e^{j\omega t} A_n \int_0^\infty (k+v) k^{2n-1} e^{-kz} \sin(ky) dk \quad (41)$$

$$\Phi_{nrad}(y,z,t) = -e^{j\omega t} A_n \int_0^\infty (k+v) k^{2n-1} e^{-kh} \frac{v \sinh(kz) - k \cosh(kz)}{v \cosh(kh) - k \sinh(kh)} \sin(ky) dk \quad (41a)$$

$$\Phi_{nj}(y,z,t) = e^{j\omega t} A_n \frac{\pi v_o^{2n+1}}{\cosh(v_o h)} \frac{\cosh[v_o(z-h)] \sin(v_o y)}{v_o h + \sinh(v_o h) \cosh(v_o h)} \quad (41b)$$

Die zugehörige Stromfunktion ergibt sich dann zu:

$$\Psi_{nr\infty}(\gamma, z, t) = e^{j\omega t} A_n \int_0^{\infty} (k+v) k^{2n-1} e^{-kz} \cos(ky) dk \quad (42)$$

$$\Psi_{nrad}(\gamma, z, t) = -e^{j\omega t} A_n \int_0^{\infty} (k+v) k^{2n-1} e^{-kh} \frac{v \cosh(kz) - k \sinh(kz)}{v \cosh(kh) - k \sinh(kh)} \cos(ky) dk \quad (42a)$$

$$\Psi_{nj}(\gamma, z, t) = e^{j\omega t} A_n \frac{\pi v_0^{2n+1}}{\cosh(v_0 h)} \frac{\sinh[v_0(z-h)] \cos(v_0 y)}{v_0 h + \sinh(v_0 h) \cosh(v_0 h)} \quad (42b)$$

5.2.3 Das Gesamtpotential

Damit ist bis auf die komplexen Koeffizienten A_n ($0 \leq n \leq \infty$) das komplexe Potential bekannt:

$$\begin{aligned} \Phi(\gamma, z, t) + i \Psi(\gamma, z, t) = e^{j\omega t} [A_{or} + j A_{oj}] & \left[\int_0^{\infty} \frac{k \sin\{k[y+i(z-h)]\} dk}{v \cosh(kh) - k \sinh(kh)} + j \pi v_0 \frac{\cosh(v_0 h) \sin\{v_0[y+i(z-h)]\}}{v_0 h + \sinh(v_0 h) \cosh(v_0 h)} \right] \\ & - e^{j\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} [A_{nr} + j A_{nj}] \left\{ \int_0^{\infty} (v^2 - k^2) k^{2n-1} \frac{\sin\{k[y+i(z-h)]\} dk}{v \cosh(kh) - k \sinh(kh)} - j \frac{\pi v_0^{2n+1}}{\cosh(v_0 h)} \frac{\sin\{v_0[y+i(z-h)]\}}{v_0 h + \sinh(v_0 h) \cosh(v_0 h)} \right\} \end{aligned} \quad (43)$$

Schreibt man dies analog zu 4.3.5, so erhält man:

$$\Phi(\gamma, z, t) = e^{j\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_{nr} (\psi_{nr\infty} + \psi_{nrad}) - A_{nj} \psi_{nj} + j [A_{nj} (\psi_{nr\infty} + \psi_{nrad}) + A_{nr} \psi_{nj}] \right\} \quad (43a)$$

$$\Psi(\gamma, z, t) = e^{j\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_{nr} (\psi_{nrad} + \psi_{nrad}) - A_{nj} \psi_{nj} + j [A_{nj} (\psi_{nr\infty} + \psi_{nrad}) + A_{nr} \psi_{nj}] \right\} \quad (43b)$$

mit $A_r + j A_j = U [A'_r + j A'_j]$ bei der Querbewegung

$\bar{\varphi} \omega [A'_r + j A'_j]$ bei der Rollbewegung.

A'_n hat die Dimension Länge²ⁿ⁺². $A'_n \varphi_n$ und $A'_n \psi_n$ haben dann bei der Querbewegung die Dimension Länge und bei der Rollbewegung Länge².

Die Bestimmung der Koeffizienten A'_n erfolgt so, daß die jeweilige Bedingung an der Körperkontur erfüllt ist (5.6).

5.3 Entwicklung der Teilpotentiale

$$vr = v\sqrt{y^2+z^2} \rightarrow 0:$$

$$\varphi_{0rad} = -\frac{y}{y^2+z^2} + ve^{-vz} \left\{ \sin(vy) \left[y + \ln(vr) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{v^m \operatorname{Re}[(z+iy)^m]}{m \cdot m!} \right] - \cos(vy) \left[\arctan \frac{y}{z} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{v^m \operatorname{Im}[(z+iy)^m]}{m \cdot m!} \right] \right\} \quad (44)$$

$$\psi_{0rad} = \frac{z}{y^2+z^2} - ve^{-vz} \left\{ \cos(vy) \left[y + \ln(vr) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{v^m \operatorname{Re}[(z+iy)^m]}{m \cdot m!} \right] + \sin(vy) \left[\arctan \frac{y}{z} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{v^m \operatorname{Im}[(z+iy)^m]}{m \cdot m!} \right] \right\} \quad (44a)$$

$$vr = v\sqrt{y^2+z^2} \rightarrow \infty:$$

$$\varphi_{0rad} = -\frac{y}{y^2+z^2} + v \sum_{m=1}^M \frac{(m-1)! \operatorname{Im}[(z+iy)^m]}{v^m \cdot r^{2m}} - \pi v e^{-vz} \cos(vy) \operatorname{sign}(y)$$

$$\psi_{0rad} = \frac{z}{y^2+z^2} - v \sum_{m=1}^M \frac{(m-1)! \operatorname{Re}[(z+iy)^m]}{v^m \cdot r^{2m}} - \pi v e^{-vz} \sin(vy) \operatorname{sign}(y)$$

$$\varphi_{nrad} = (-1)^{n+1} (2n)! \left\{ \operatorname{Re}[(y+iz)^{-(2n+1)}] + \frac{v}{2n} \operatorname{Im}[(y+iz)^{-2n}] \right\} \quad (45)$$

$$\psi_{nrad} = (-1)^{n+1} (2n)! \left\{ \operatorname{Im}[(y+iz)^{-(2n+1)}] - \frac{v}{2n} \operatorname{Re}[(y+iz)^{-2n}] \right\} \quad (45a)$$

$$\varphi_{0rad} = \sum_{t=0}^{\infty} \left\{ \frac{G(2t+3)}{(2t+1)!} \operatorname{Im}[(z+iy)^{2t+1}] - v \frac{G(2t+1)}{(2t)!} \operatorname{Im}[(z+iy)^{2t}] \right\} \quad (46)$$

$$\psi_{0rad} = \sum_{t=0}^{\infty} \left\{ \frac{G(2t+3)}{(2t+1)!} \operatorname{Re}[(z+iy)^{2t+1}] - v \frac{G(2t+1)}{(2t)!} \operatorname{Re}[(z+iy)^{2t}] \right\} \quad (46a)$$

$$\varphi_{nrad} = \sum_{t=0}^{\infty} \left\{ \frac{G(2t+2n+3) - v^2 G(2t+2n+1)}{(2t+1)!} \operatorname{Im}[(z+iy)^{2t+1}] - v \frac{G(2t+2n+1) - v^2 G(2t+2n-1)}{(2t)!} \operatorname{Im}[(z+iy)^{2t}] \right\} \quad (47)$$

$$\psi_{nrad} = \sum_{t=0}^{\infty} \left\{ \frac{G(2t+2n+3) - v^2 G(2t+2n+1)}{(2t+1)!} \operatorname{Re}[(z+iy)^{2t+1}] - v \frac{G(2t+2n+1) - v^2 G(2t+2n-1)}{(2t)!} \operatorname{Re}[(z+iy)^{2t}] \right\} \quad (47a)$$

$$\varphi_{0j} = \pi v_0 \frac{\cosh^2(v_0 h)}{v_0 h + \sinh(v_0 h) \cosh(v_0 h)} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \frac{v_0^{2t+1}}{(2t+1)!} \operatorname{Im}[(z+iy)^{2t+1}] - \tanh(v_0 h) \sum_{t=0}^{\infty} \frac{v_0^{2t}}{(2t)!} \operatorname{Im}[(z+iy)^{2t}] \right\} \quad (48)$$

$$\psi_{0j} = \pi v_0 \frac{\cosh^2(v_0 h)}{v_0 h + \sinh(v_0 h) \cosh(v_0 h)} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \frac{v_0^{2t+1}}{(2t+1)!} \operatorname{Re}[(z+iy)^{2t+1}] - \tanh(v_0 h) \sum_{t=0}^{\infty} \frac{v_0^{2t}}{(2t)!} \operatorname{Re}[(z+iy)^{2t}] \right\} \quad (48a)$$

$$\varphi_{nj} = v_0^{2(n-1)} (v_0^2 - v^2) \varphi_{0j} \quad (49)$$

$$\psi_{nj} = v_0^{2(n-1)} (v_0^2 - v^2) \psi_{0j} \quad (49a)$$

5.4 Potential für verschwindende Frequenz

Grim [6] gibt für die Horizontalbewegung bei Frequenz Null das komplexe Potential

$$\varphi + i\psi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left\{ (\gamma + iz)^{-(2n+1)} + \sum_{m=1}^{\infty} [(\gamma + iz + i2mh)^{-(2n+1)} + (\gamma + iz - i2mh)^{-(2n+1)}] \right\} \quad (50)$$

an, das bei Anwendung der in 4.7.1 angegebenen Lewis-Formen auf der Profilkontur übergeht in:

$$\begin{aligned} \varphi + i\psi &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left\{ e^{-i(2n+1)\theta} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \binom{2n+p}{p} (ae^{-i2\theta} + be^{-i4\theta})^p + i2 \sum_{m=1}^{\infty} [(i2mh)^{-(2n+1)} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \binom{2p+2n+1}{2p+1} \left(\frac{e^{i\theta} + ae^{-i\theta} + be^{-i3\theta}}{2mh} \right)^{2p+1}] \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} [(-1)^p \sum_{\ell=0}^p \binom{2n+p}{\ell} \binom{p}{\ell} a^{p-\ell} b^{\ell} e^{-i(2n+2p+2\ell+1)\theta}] \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+n} [2mh]^{-2(p+n+1)} \sum_{\ell=0}^{2p+1} \sum_{k=0}^{\ell} \binom{2n+2p+1}{2p+1} \binom{2p+1}{\ell} \binom{\ell}{k} a^{p-k} b^k e^{i(2p-2\ell-2k+1)\theta}] \right\} \end{aligned} \quad (50a)$$

Diese Summen konvergieren, solange gilt:

$$\frac{e^{i\theta} + ae^{-i\theta} + be^{-i3\theta}}{2mH} = \frac{e^{i\theta} + ae^{-i\theta} + be^{-i3\theta}}{2m \cdot HT \cdot (1-a+b)} < 1 \quad (51)$$

Daraus folgt, da $m \geq 1$:

$$2HT \geq \frac{1 + ae^{-i2\theta} + be^{-i4\theta}}{1-a+b}$$

Das Potential konvergiert also, wenn

$$2HT \geq \frac{1+a+b}{1-a+b} = \frac{B}{2T} \quad (51a)$$

$$\text{Körperbreite} \leq 4 \times \text{Wassertiefe} \quad (51b)$$

5.5 Hydrodynamische Kräfte und Momente

5.5.1 Kräfte und Momente in Glattwasser

Im glatten Wasser ist die hydrodynamische Querkraft bei der Querbewegung

$$\bar{F}_Q = \bar{F}_{Qr} + j \bar{F}_{Qj} = -\rho \omega U e^{j\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \left[A'_{nr} \varphi_{nr} - A'_{nj} \varphi_{nj} + j (A'_{nr} \varphi_{nj} + A'_{nj} \varphi_{nr}) \right] dz \quad (52)$$

und bei der Rollbewegung

$$\bar{F}_R = \bar{F}_{Rr} + j \bar{F}_{Rj} = -\rho \bar{\varphi} \omega^2 e^{j\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \left[A'_{nr} \varphi_{nr} - A'_{nj} \varphi_{nj} + j (A'_{nr} \varphi_{nj} + A'_{nj} \varphi_{nr}) \right] dz \quad (52a)$$

Das hydrodynamische Moment im glatten Wasser wird bei der Querbewegung

$$\bar{M}_Q = \bar{M}_{Qr} + j \bar{M}_{Qj} = -\rho \omega U e^{j\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \left[A'_{nr} \varphi_{nr} - A'_{nj} \varphi_{nj} + j (A'_{nr} \varphi_{nj} + A'_{nj} \varphi_{nr}) \right] [\gamma dy + z dz] \quad (53)$$

und bei der Rollbewegung

$$\bar{M}_R = \bar{M}_{Rr} + j \bar{M}_{Rj} = -\rho \bar{\varphi} \omega^2 e^{j\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \left[A'_{nr} \varphi_{nr} - A'_{nj} \varphi_{nj} + j (A'_{nr} \varphi_{nj} + A'_{nj} \varphi_{nr}) \right] [\gamma dy + z dz] \quad (53a)$$

Die Koeffizienten A'_{nr} und A'_{nj} sind natürlich bei der Rollbewegung andere als bei der Querbewegung.

Es ist üblich, anstelle der Kraft bei der Rollbewegung und des Momentes bei der Querbewegung fiktive Hebelarme anzugeben, die wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} \bar{H}_{Qr} &= \frac{\bar{M}_{Qr}}{U \omega m''} & \bar{H}_{Qj} &= \frac{\bar{M}_{Qj}}{U N_Q} \\ \bar{H}_{Rr} &= \frac{J'' \omega^2 \bar{\varphi}}{\bar{F}_{Rr}} & \bar{H}_{Rj} &= \frac{N_R \omega B \bar{\varphi}}{2 \bar{F}_{Rj}} \end{aligned}$$

Dimensionslos ergibt sich dann

bei der Querbewegung

$$\begin{aligned} C_H &= \frac{m''}{\rho \frac{\pi}{2} T^2} = \frac{\bar{F}_{Qr}}{\rho \omega U \frac{\pi}{2} T^2} \\ \bar{A}_Q^2 &= \frac{\bar{\varepsilon}^2}{\bar{\gamma}^2} = \frac{v^2}{\rho \omega U} \frac{\cosh^2(v_{oh})}{v_{oh} + \cosh(v_{oh}) \sinh(v_{oh})} \bar{F}_{Qj} \\ \frac{\bar{H}_{Qr}}{T} &= \frac{\bar{M}_{Qr}}{T \cdot \bar{F}_{Qr}} & \frac{\bar{H}_{Qj}}{T} &= \frac{\bar{M}_{Qj}}{T \cdot \bar{F}_{Qj}} \end{aligned} \quad (54)$$

und bei der Rollbewegung

$$\begin{aligned} C_R &= \frac{J''}{\rho \frac{\pi}{8} T^4} = \frac{\bar{M}_{Rr}}{\rho \omega^2 \frac{\pi}{8} T^4 \bar{\varphi}} \\ \bar{A}_R^2 &= \frac{\bar{\varepsilon}^2}{\bar{\varphi}^2 \frac{B^2}{4}} = \frac{4 v^2}{\rho \omega^2 \bar{\varphi} B^2} \frac{\cosh^2(v_{oh})}{v_{oh} + \sinh(v_{oh}) \cosh(v_{oh})} \bar{M}_{Rj} \\ \frac{\bar{H}_{Rr}}{T} &= \frac{\bar{M}_{Rr}}{T \cdot \bar{F}_{Rr}} & \frac{\bar{H}_{Rj}}{T} &= \frac{\bar{M}_{Rj}}{T \cdot \bar{F}_{Rj}} \end{aligned} \quad (54a)$$

5.5.2 Erregende Kräfte und Momente durch eine Welle

Teilt man die auf den festgehaltenen einer ankommenden Welle ausgesetzten Körper wirkende hydrodynamische Kraft bzw. das hydrodynamische Moment wie in 4.6.2 auf in die Anteile aus der ungestörten Welle und der Störung durch den Körper, so erhält man:

$$\begin{aligned} F_E = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + j\bar{F}_3 &= -\rho\omega \int_S [\Phi_w + \Phi_s] dz \\ &= -\rho\omega e^{j\omega t} \left\{ \left\{ -\frac{\bar{\epsilon}\omega}{v} e^{-jv_0 x \cos\mu} [\cosh(v_0 z) - \tanh(v_0 h) \sinh(v_0 z)] \sin(v_0 y \sin\mu) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + U \sum_{n=0}^{\infty} [A'_{nr} \varphi_{nr} - A'_{nj} \varphi_{nj} + j(A'_{nr} \varphi_{nj} + A'_{nj} \varphi_{nr})] \right\} dz \right. \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} M_E = M_1 + M_2 + jM_3 &= -\rho\omega e^{j\omega t} \left\{ \left\{ -\frac{\bar{\epsilon}\omega}{v} e^{-jv_0 x \cos\mu} [\cosh(v_0 z) - \tanh(v_0 h) \sinh(v_0 z)] \sin(v_0 y \sin\mu) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + U \sum_{n=0}^{\infty} [A'_{nr} \varphi_{nr} - A'_{nj} \varphi_{nj} + j(A'_{nr} \varphi_{nj} + A'_{nj} \varphi_{nr})] \right\} [y dy + z dz] \right. \end{aligned} \quad (56)$$

Die einzelnen Anteile ergeben sich hieraus zu:

$$F_1 = \frac{\rho \bar{\epsilon} \omega^2}{v} e^{j(\omega t - v_0 x \cos\mu)} \int_S [\cosh(v_0 z) - \tanh(v_0 h) \sinh(v_0 z)] \sin(v_0 y \sin\mu) dz$$

$$F_2 = -\rho\omega U e^{j\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \int_S [A'_{nr} \varphi_{nr} - A'_{nj} \varphi_{nj}] dz$$

$$F_3 = -\rho\omega U e^{j\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \int_S [A'_{nr} \varphi_{nj} + A'_{nj} \varphi_{nr}] dz$$

$$M_1 = \frac{\rho \bar{\epsilon} \omega^2}{v} e^{j(\omega t - v_0 x \cos\mu)} \int_S [\cosh(v_0 z) - \tanh(v_0 h) \sinh(v_0 z)] \sin(v_0 y \sin\mu) [y dy + z dz]$$

$$M_2 = -\rho\omega U e^{j\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \int_S [A'_{nr} \varphi_{nr} - A'_{nj} \varphi_{nj}] [y dy + z dz]$$

$$M_3 = -\rho\omega U e^{j\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \int_S [A'_{nr} \varphi_{nj} + A'_{nj} \varphi_{nr}] [y dy + z dz]$$

Macht man die Kräfte durch Spantfläche mal maximale Wellenschräge dimensionslos und gibt die Momente durch die fiktiven Hebel an, folgt:

$$\begin{aligned}\bar{E}_1 &= \frac{\bar{F}_1}{99 \bar{E}_0 \psi} = \frac{\tanh(v_0 h)}{v \psi} \int_0^s [\cosh(v_0 z) - \tanh(v_0 h) \sinh(v_0 z)] \sin(v_0 y \sin \mu) dz \\ \bar{E}_2 &= \frac{\bar{F}_2}{99 \bar{E}_0 \psi} = - \frac{\tanh(v_0 h)}{\psi} \sum_{n=0}^{\infty} [A'_{nr} \psi_{nr} - A'_{nj} \psi_{nj}] dz\end{aligned}\quad (55a)$$

$$\begin{aligned}\bar{E}_3 &= \frac{\bar{F}_3}{99 \bar{E}_0 \psi} = - \frac{\tanh(v_0 h)}{\psi} \sum_{n=0}^{\infty} [A'_{nr} \psi_{nj} + A'_{nj} \psi_{nr}] dz \\ \frac{\bar{H}_{wr}}{T} &= \frac{\bar{M}_1 + \bar{M}_2}{T(\bar{F}_1 + \bar{F}_2)} \quad ; \quad \frac{\bar{H}_{wj}}{T} = \frac{\bar{M}_3}{T \cdot \bar{F}_3}\end{aligned}\quad (56a)$$

Die Haskind-Newman-Beziehung [37] für die durch eine Querwelle erzeugte Kraft gilt hier ebenso wie bei der Vertikalbewegung:

$$\begin{aligned}\bar{E}_1 + \bar{E}_2 &= \frac{\operatorname{Re}\{\bar{F}_E\}}{99 \bar{E}_0 \psi} = \frac{\pi}{\psi} \left\{ A'_{or} + (v_0^2 - v^2) \sum_{n=1}^{\infty} A'_{nr} v_0^{2(n-1)} \right\} \\ \bar{E}_3 &= \frac{\operatorname{Im}\{\bar{F}_E\}}{99 \bar{E}_0 \psi} = \frac{\pi}{\psi} \left\{ A'_{oj} + (v_0^2 - v^2) \sum_{n=1}^{\infty} A'_{nj} v_0^{2(n-1)} \right\}\end{aligned}\quad (55b)$$

5.6 Numerische Behandlung und Beispiele

Wie bei der Vertikalbewegung werden hier nur Lewis-Formen betrachtet (4.7.1).

Die Koeffizienten A'_n werden analog 4.7.2 berechnet, wobei die Teilstromfunktionen in Fourierreihen

$$\psi_n = \sum_{m=0}^{\infty} \{c_{nm} \sin[(2m+1)\theta] + d_{nm} \cos(2m\theta)\}$$

entwickelt und mit Hilfe von

$$\cos(2m\theta) = 1 + \frac{16}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^2}{(2k+2m+1)(2k-2m+1)(2k+1)} \sin[(2k+1)\theta]$$

übergeführt werden in:

$$\psi_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} \sin[(2m+1)\theta]$$

Für die bei der numerischen Behandlung erreichbaren Genauigkeiten gilt das in 4.7.3 Gesagte entsprechend. Die Berechnung der Kennwerte bei verschwindender Frequenz nach 5.4 kann ohne großen Rechenzeitaufwand beliebig genau erfolgen.

Als Beispiel wurde ein Lewis-Profil der Völligkeit 1,0 gewählt. Die hydrodynamische Masse dieses Profils bei verschwindender Frequenz ist für verschiedene Breiten-Tiefgangs-Verhältnisse in Abb. 16 dimensionslos als Funktion der Wassertiefe aufgetragen. Das hydrodynamische Trägheitsmoment weist eine entsprechende Abhängigkeit von der Wassertiefe auf.

Für ein Lewis-Profil der Völligkeit 1,0 und $B:T = 2,0$ sind die dimensionslose hydrodynamische Masse und das dimensionslose hydrodynamische Trägheitsmoment für zwei Wassertiefen in Abb. 17 dargestellt. Mit abnehmender Frequenz nähern sich die hydrodynamische Masse und das hydrodynamische Trägheitsmoment den für verschwindende Frequenz berechneten Werten. Abb. 18 zeigt die dazugehörigen Amplitudenverhältnisse. Die von einer querlaufenden Welle auf den Querschnitt ausgeübte Kraft ist dimensionslos Abb. 19 zu entnehmen. Die Berechnung erfolgte unter Berücksichtigung von vier Teilpotentialen.

6. Anwendung auf Schiffe mit Hilfe der Streifenmethode

Für die Anwendung der zweidimensional berechneten hydrodynamischen Größen auf dreidimensionale Körper mit Hilfe der Streifenmethode bringt die beschränkte Wassertiefe keine zusätzliche Einschränkung. Es ist u.a. darauf zu achten, daß auf flachem Wasser $\frac{\omega^2}{g} \neq \frac{2\pi}{\lambda}$.

An zwei Beispielen, einem schlanken Container-Schiff und einem Schiff der Series 60 mit einer Völligkeit von 0.7, wird der Einfluß der Wassertiefe auf die Übertragungsfunktionen gezeigt. In den Abb. 20 bis 22 für das Container-Schiff und Abb. 23 bis 25 für das Series-60-Schiff sind für unendliche Tiefe und Wassertiefe gleich doppeltem Tiefgang und jeweils zwei Froudesche Zahlen die Übertragungsfunktionen für die Tauchbewegung, die Stampfbewegung und das Längsbiegemoment im Hauptspant aufgetragen. Es zeigt sich, daß die Verringerung der Wassertiefe eine Erhöhung des Biegemomentes mit sich bringt.

7. Zusammenfassung

Es wurde, ausgehend von zwei Arbeiten von Yu-Ursell [20] und Kim [25], der Einfluß der Wassertiefe auf die hydrodynamischen Kräfte an einem an der Oberfläche vertikal und horizontal oszillierenden zweidimensionalen Körper im glatten Wasser und in Wellen untersucht. Dabei wurde besonders das asymptotische Verhalten bei sehr kleinen Frequenzen betrachtet. Für die Tauchbewegung wurde bei verschwindender Frequenz eine endliche hydrodynamische Masse erhalten. Eine vollbefriedigende physikalische Erklärung dieses überraschenden Ergebnisses konnte nicht gegeben werden. Die numerischen Ergebnisse zeigen, daß für den Bereich sehr kleiner Frequenzen sowohl die von Yu-Ursell angegebenen Werte als auch die von Kim für die Vertikalbewegung nicht zutreffend und die von Kim für die Horizontalbewegung - vermutlich infolge einer ungenauen numerischen Auswertung - ungenau sind. Die Horizontalbewegung wurde nur knapp behandelt, da die meisten Ableitungen und Betrachtungen analog der ausführlich dargestellten Lösung für die Vertikalbewegung sind. Rechenprogramme unter Verwendung von Lewis-Formen sind ausgearbeitet und geprüft und stehen zur Verfügung.

Als Ausblick wurden die zweidimensionalen Werte zur Berechnung der Übertragungsfunktionen eines Schiffes mit Hilfe der Streifenmethode benutzt.

8. Literatur

- [1] Lewis, F.M.:
The Inertia of the Water Surrounding
a Vibrating Ship
Trans. SNAME vol. 37, 1929
- [2] Wendel, K.:
Hydrodynamische Massen und hydrodynamische
Massenträgheitsmomente
Jahrb. STG 44. Band, 1950
- [3] Landweber, L. und M.C. de Macagno:
Added Mass of Two-Dimensional Forms Oscillating
in a Free Surface
Journ. Ship Res. vol. 1, 1957, and vol. 2, 1959
- [4] Ursell, F.:
On the Heaving Motion of a Circular Cylinder
on the Surface of a Fluid
Quart.Journ.Mech.Appl.Math. vol. 2, 1949
- [5] Grim, O.:
Berechnung der durch Schwingungen eines Schiffskörpers erzeugten hydrodynamischen Kräfte
Jahrb. STG 47. Band, 1953
- [6] Grim, O.:
Die Schwingungen von schwimmenden zweidimensionalen Körpern
HSVA-Berichte 1090 und 1171, 1956/57
- [7] Grim, O.:
Durch Wellen an einem Schiffskörper erregte Kräfte
Symposium on the Behaviour of Ships in a Seaway,
Wageningen 1957
- [8] Grim, O.:
A Method for a More Precise Computation of
Heaving and Pitching Motions Both in Smooth Water
and in Waves
3. Symp. Nav.Hydrodyn., Scheveningen 1960

- [9] Porter, W.R.:
Pressure Distributions, Added Mass and Damping
Coefficients for Cylinders Oscillating in
a Free Surface
Rep.Inst.Eng.Res. University of California,
Berkeley, 1960
- [10] Abels, F.:
Die Druckverteilung an einem festgehaltenen
Schiffsmodell in regelmäßigem Seegang
Jahrb. STG 53. Band, 1959
- [11] Tasai, F.:
Formula for Calculating the Hydrodynamic Force
of a Cylinder Heaving on a Free Surface
(n-Parameter Family)
Rep.Res.Inst.Appl.Mech. Kyushu University,
vol. VIII, No. 31, 1960
- [12] Tasai, F.:
On the Damping Force and Added Mass of Ships
Heaving and Pitching
Rep.Res.Inst.Appl.Mech. Kyushu University,
vol. VII, No. 26, 1959 and vol. VIII, No. 41, 1960
- [13] Kim, C.H.:
Über den Einfluß nichtlinearer Effekte auf
hydrodynamische Kräfte bei erzwungenen
Tauchbewegungen prismatischer Körper
Schiffstechnik, Band 14, 1967
- [14] Söding, H.:
The Flow Around Ship Sections in Waves
Schiffstechnik, Band 20, 1973
- [15] Kirsch, M.:
Zur Tauch- und Stampfbewegung eines Schiffes
Schiffstechnik, Band 16, 1969
- [16] Tamura, K.:
The Calculation of Hydrodynamical Forces
in Horizontal Direction and the Moments Acting
on the Two-Dimensional Body
HSVA-Bericht 1235, 1961, und Journ. Seibu Zosen Kai,
No. 26, 1963

- [17] Tasai, F.:
Hydrodynamic Force and Moment Produced by Swaying
and Rolling Oscillation of Cylinders on the
Free Surface
Rep.Res.Inst.Appl.Mech. Kyushu University,
vol. IX, No. 35, 1961
- [18] Grim, O. und Y. Takaishi:
Das Rollmoment in schräglaufer Welle
Schiff und Hafen, Jahrg. 17, 1965
- [19] Havelock, T.H.:
Ship Vibrations: The Virtual Inertia of a Spheroid
in Shallow Water
Trans.Ins.Nav.Arch. vol. 95, 1953
- [20] Yu, Y.S. und F. Ursell:
Surface Waves Generated by an Oscillating Circular
Cylinder on Water of Finite Depth: Theory and
Experiment
Journ.Fluid Mech. vol. 11, 1961
- [21] Monacella, V.J.:
The Disturbance Due to a Slender Ship Oscillating
in Waves in a Fluid of Finite Depth
Journ.Ship.Res. vol. 10, 1966
- [22] Freakes, W. und K.L. Keay:
Effects of Shallow Water on Ship Motion Parameters
in Heave and Pitch
MIT Dept.Nav.Arch.Mar.Eng. Rep. No. 66-7, 1966
- [23] Wang, S.:
The Hydrodynamic Forces and Pressure Distributions
for an Oscillating Sphere in a Fluid of Finite Depth
Dissertation MIT, 1966
- [24] Fisher, K.W.:
Ship Motions in Shallow Water: Scaling Techniques
Including Viscous Effects
Int.Shipb.Progress vol. 17, 1970
- [25] Kim, C.H.:
Hydrodynamic Forces and Moments for Heaving, Swaying
and Rolling Cylinders on Water of Finite Depth
Journ.Ship.Res. vol. 13, 1969

- [26] Kim, C.H.:
The Influence of Water Depth on the Heaving and
Pitching Motions of a Ship in Longitudinal Regular
Head Waves
Schiffstechnik, Band 15, 1968
- [27] Kim, C.H.:
The Influence of Water Depth on the Midship
Bending Moments of a Ship Moving in Longitudinal
Regular Head Waves
Europ.Shipb. vol. 18, 1969
- [28] Tuck, E.O.:
Ship Motions in Shallow Water
Journ.Ship.Res. vol. 14, 1970
- [29] Beck, R.F. und E.O. Tuck:
Computation of Shallow Water Ship Motions
9. Symp. Nav.Hydrodyn., Paris 1972
- [30] Beck, R.F.:
Present Status of the Slender-Body Theory
for Ship Motions in Shallow Water
Workshop on Slender-Body Theory, Ann Arbor 1973
- [31] Thorne, R.C.:
Multipole Expansions in the Theory of Surface Waves
Proc. Cambridge Phil. Soc. vol. 49, No. 4, 1953
- [32] Kotik, J. und V. Mangulis:
On the Kramer-Kronig Relations for Ship Motions
Int.Shipb.Progress, vol. 9, 1962
- [33] Ryshik, J.M. und J.S. Gradstein:
Summen-, Produkt- und Integraltafeln
VEB Deutsch.Verlag der Wissensch., Berlin 1957
- [34] Abramowitz, M. und J.A. Stegun:
Handbook of Mathematical Functions
Nat. Bureau of Standards, Washington 1965
- [35] Stroud, A.H. und D. Secrest:
Gaussian Quadrature Formulas
Princeton-Hall Inc., Englewood Cliffs

- [36] Isay, W.-H.:
Propellertheorie: Hydrodynamische Probleme
Springer-Verlag, Berlin - Göttingen - Heidelberg
1964
- [37] Newman, J.N.:
The Exciting Forces on Fixed Bodies in Waves
Journ.Ship.Res. vol. 6, 1962
- [38] Haskind, M.D.:
Two Papers on the Hydrodynamic Theory of Heaving
and Pitching of a Ship
Techn.Res. Bulletin I-12, SNAME, 1953
- [39] Kotchin, N.E.:
The Theory of Waves Generated by Oscillations
of a Body Under the Free Surface of a Heavy
Incompressible Fluid
Techn.Res. Bulletin I-10, SNAME, 1952
- [40] Kotchin, N.E., J.A. Kibel und N.W. Rose:
Theoretische Hydrodynamik
Akademie-Verlag, Berlin 1954
- [41] Lamb, H.:
Hydrodynamics
Cambridge Univ.Press, 1932
- [42] Grim, O. und P. Schenzle:
Zur Vorhersage der Torsionsbelastung, der lateralen
Biegebelastung und der horizontalen Schubbelastung
eines Schiffes im Seegang
Schiffstechnik, Band 18, 1971
- [43] Kirsch, M.:
Die Berechnung der Bewegungsgrößen der gekoppelten
Tauch- und Stampfeschwingungen nach der erweiterten
Streifenmethode von Grim und die Berechnung der
Wahrscheinlichkeit für das Überschreiten bestimmter
Schranken durch diese Größen
IfS-Bericht 241, 1969
- [44] Grim, O. und P. Schenzle:
Bewegungen und Belastungen eines Schiffes
in regelmäßigem Seegang
3. Kontaktstudium, IfS, 1973

9. Symbolliste

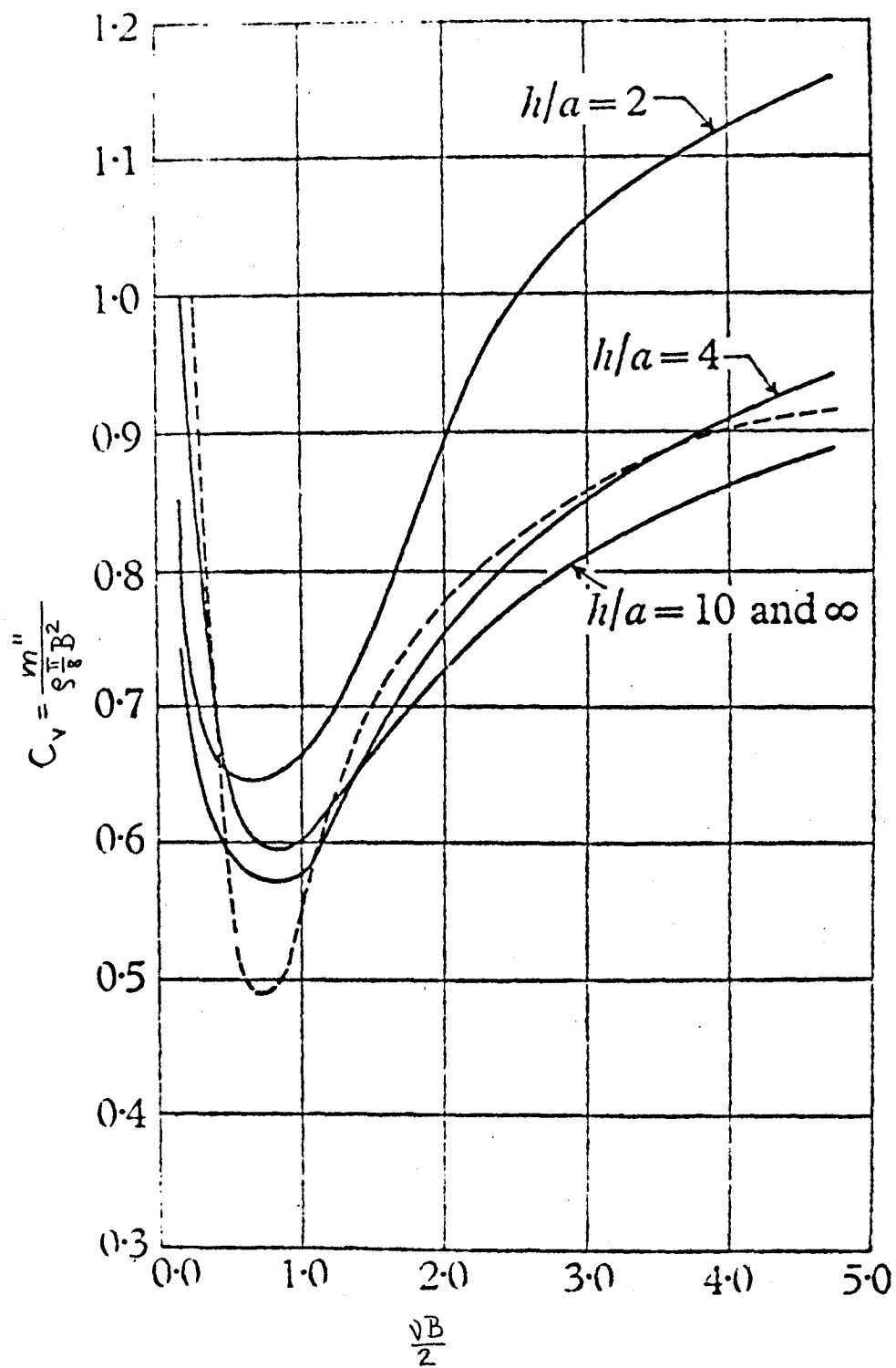
a	Lewis-Koeffizient
A _{index}	Quellstärke
$\bar{A}_{\text{index}}$	Amplitudenverhältnis
b	Lewis-Koeffizient
B	Körperbreite
c	Wellengeschwindigkeit
C _{index}	dimensionslose Kraft bzw. Moment
E _{index}	dimensionslose erregende Kraft bzw. Moment
F _{indices}	hydrodynamische Kraft
g	Erdbeschleunigung
G	Hilfsfunktion (Realteil)
h	Wassertiefe
H	Hilfsfunktion (Imaginärteil)
H _{indices}	fiktiver Hebelarm
HT	Wassertiefe/Körpertiefgang
I''	hydrodynamisches Trägheitsmoment
k	Wellenzahl in y-Richtung
m	Wellenzahl in x-Richtung
m''	hydrodynamische Masse
M _{indices}	hydrodynamisches Moment
N _{index}	hydrodynamische Dämpfungskonstante
p	Druck
$r = \sqrt{y^2 + z^2}$	Polarkoordinate
t	Zeit
T	Körpertiefgang
U	Amplitude der Horizontalgeschwindigkeit
V	Amplitude der Vertikalgeschwindigkeit
V	Querschnittsfläche der Körpers
x } y } z }	raumfeste Koordinaten
Y _{indices}	

γ	Eulersche Konstante (.57722)
ε	Phasenwinkel
$\bar{\varepsilon}$	Wellenamplitude
Θ	1. Polarkoordinate 2. Stampfwinkel
λ	Wellenlänge
μ	Begegnungswinkel
$\nu = \frac{\omega^2}{g}$	Wellenzahl bei tiefem Wasser
$\nu_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$	Wellenzahl
ρ	Dichte der Flüssigkeit
φ	Rollwinkel
φ_{indices}	Teilpotential
Φ_{indices}	zeitabhängiges Potential
ψ_{indices}	Teilstromfunktion
Ψ_{indices}	zeitabhängige Stromfunktion
ω	Kreisfrequenz der Bewegung

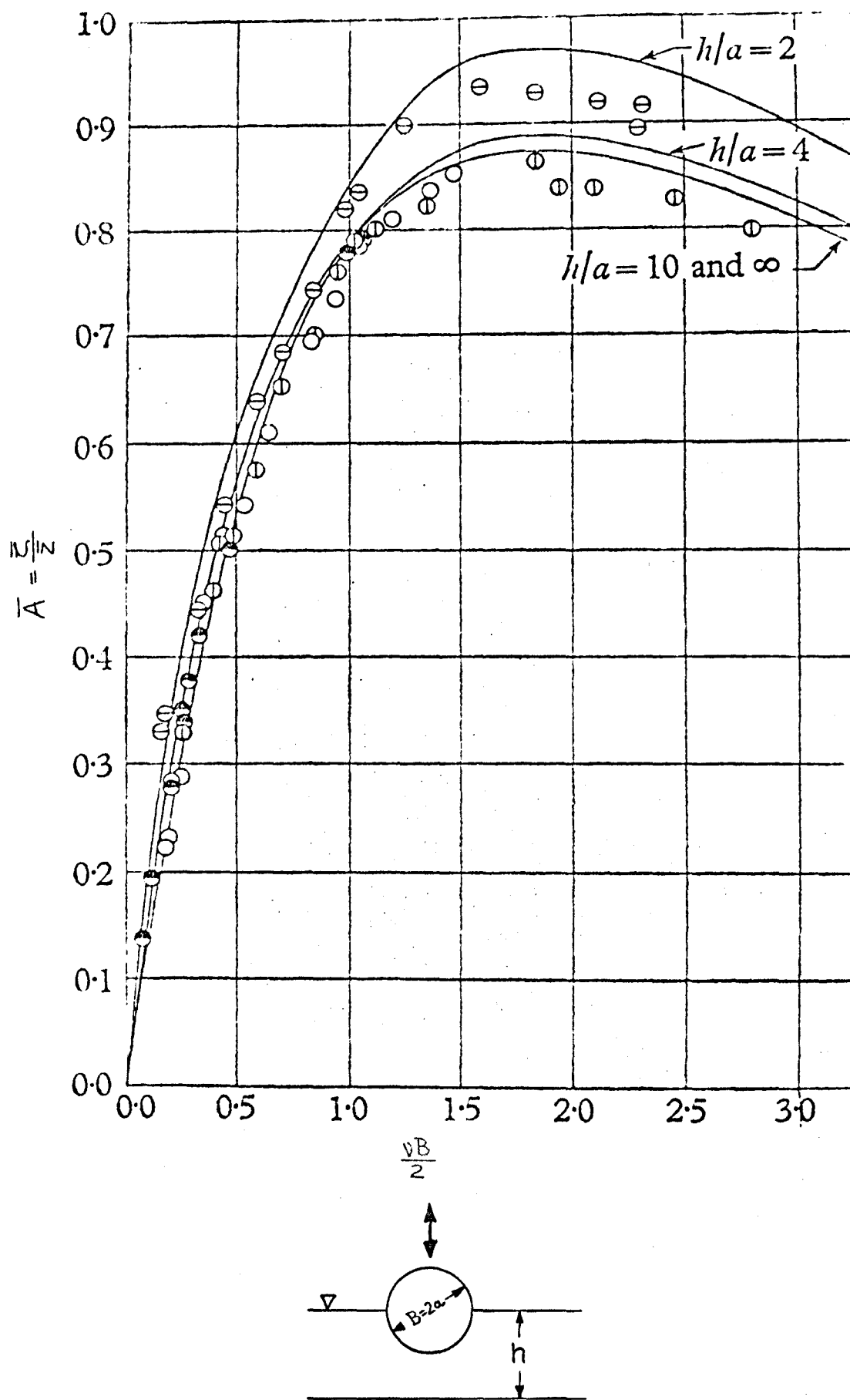
Indices:

E	zur Erregung gehörig
H	Horizontal-, zur Horizontalbewegung gehörig
j	Imaginärteil
n	Nummerierung der Teilpotentiale
Q	zur Querbewegung gehörig
r	Realteil
R	zur Rollbewegung gehörig
V	Vertikal-, zur Vertikalbewegung gehörig
W	zur Welle gehörig

Hydrodynamische Masse bei der Tauchbewegung
eines Kreisprofils nach Yu-Ursell



Amplitudenverhältnis bei der Tauchbewegung
eines Kreisprofils nach Yu-Ursell



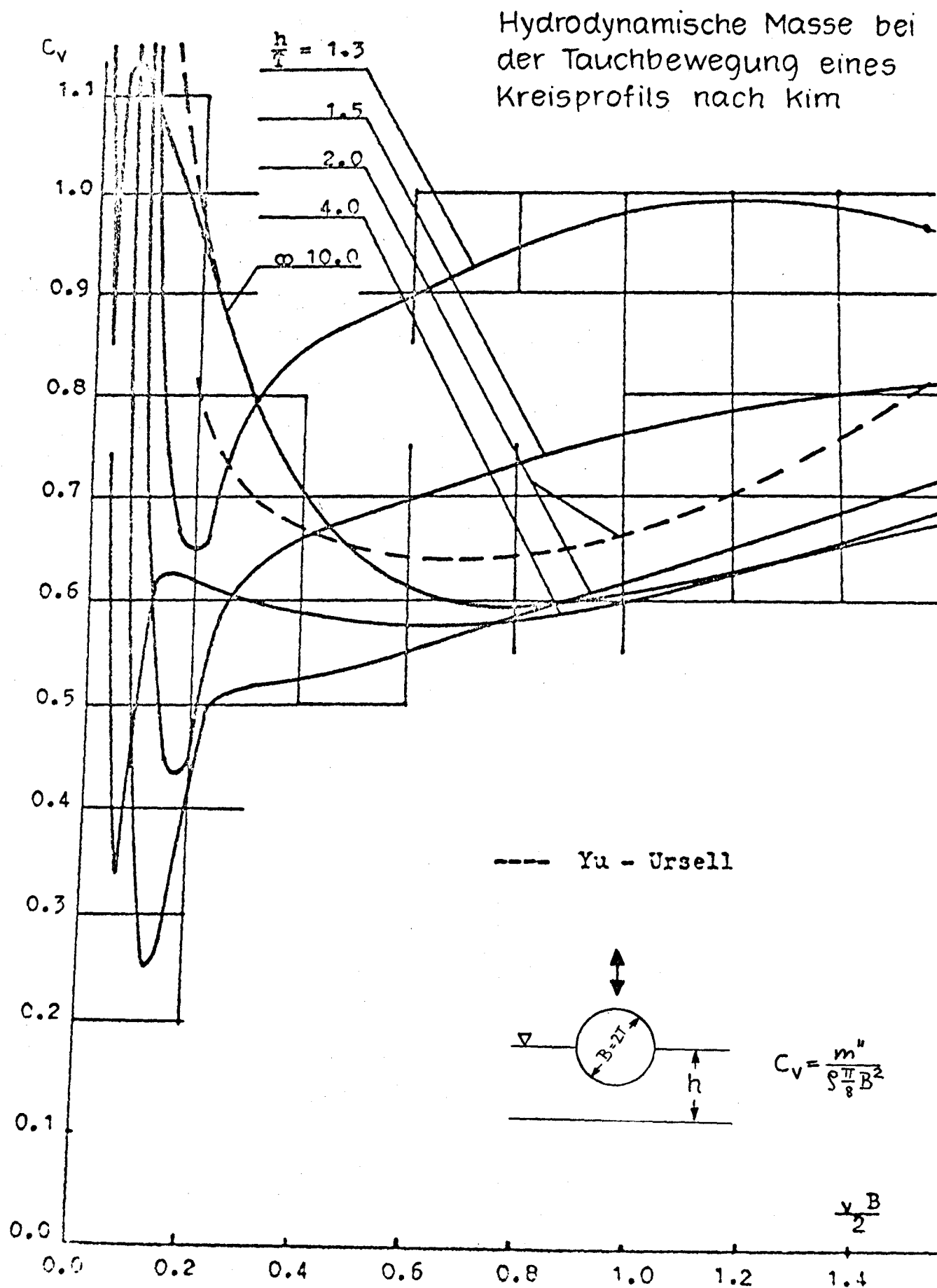
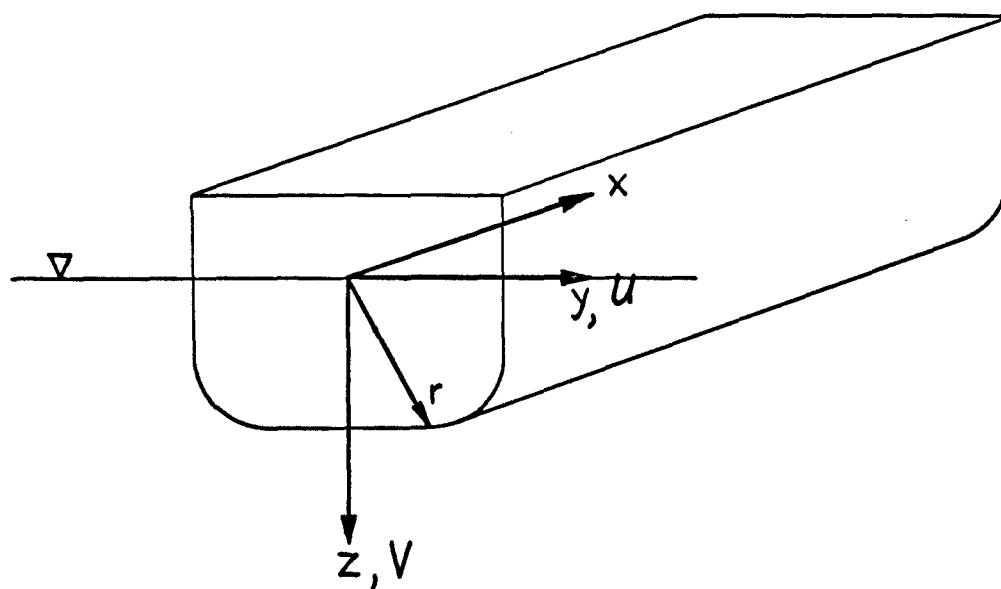
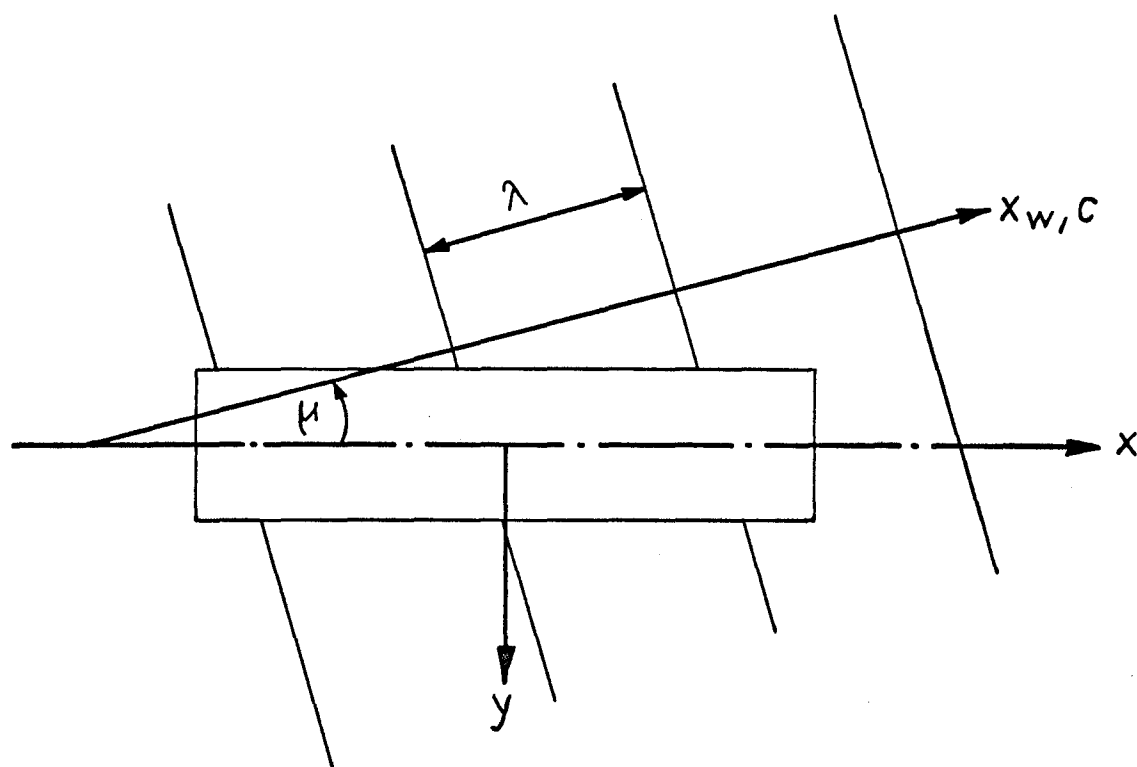


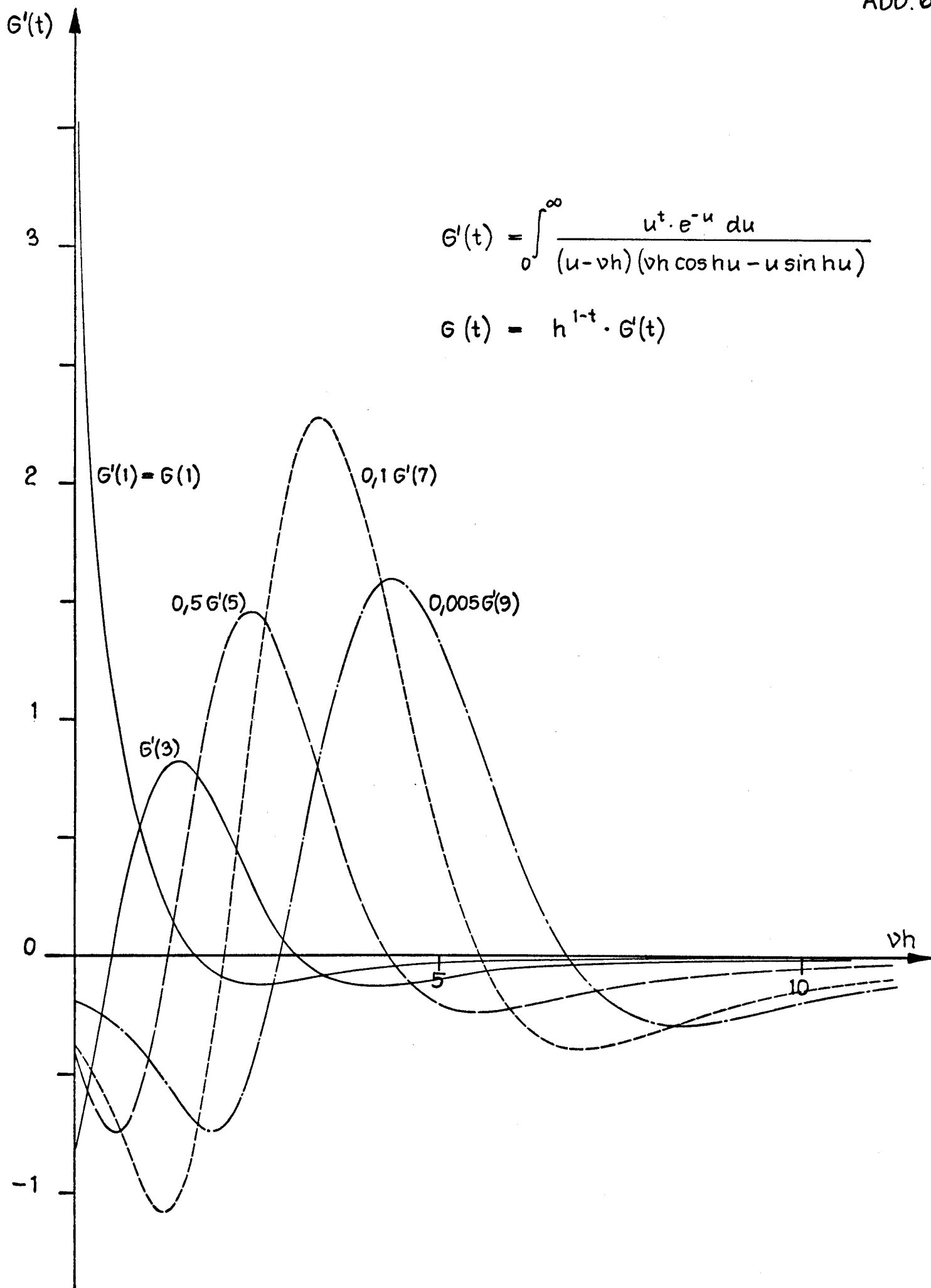
Abb. 4



Koordinatensysteme

Abb. 5





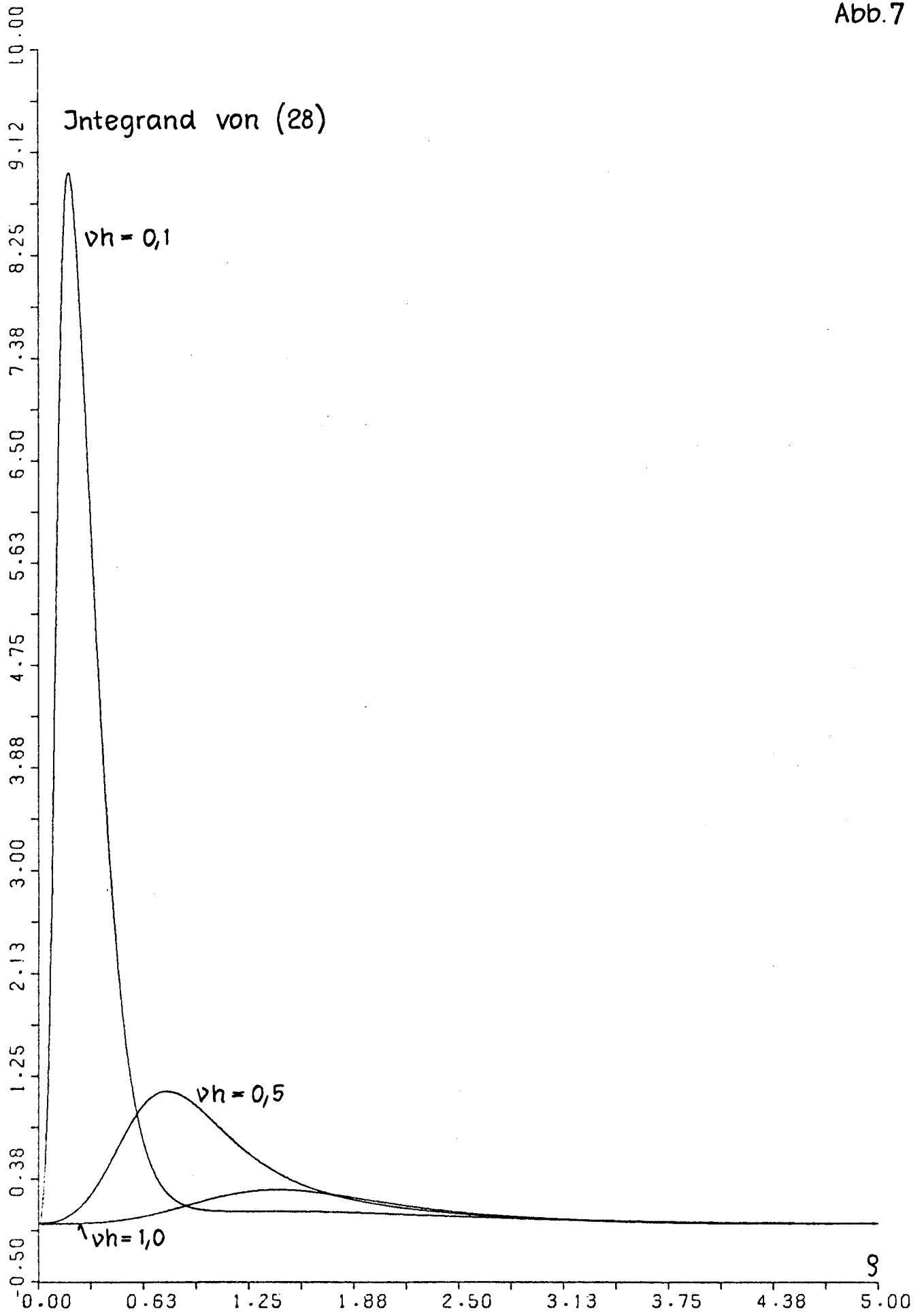
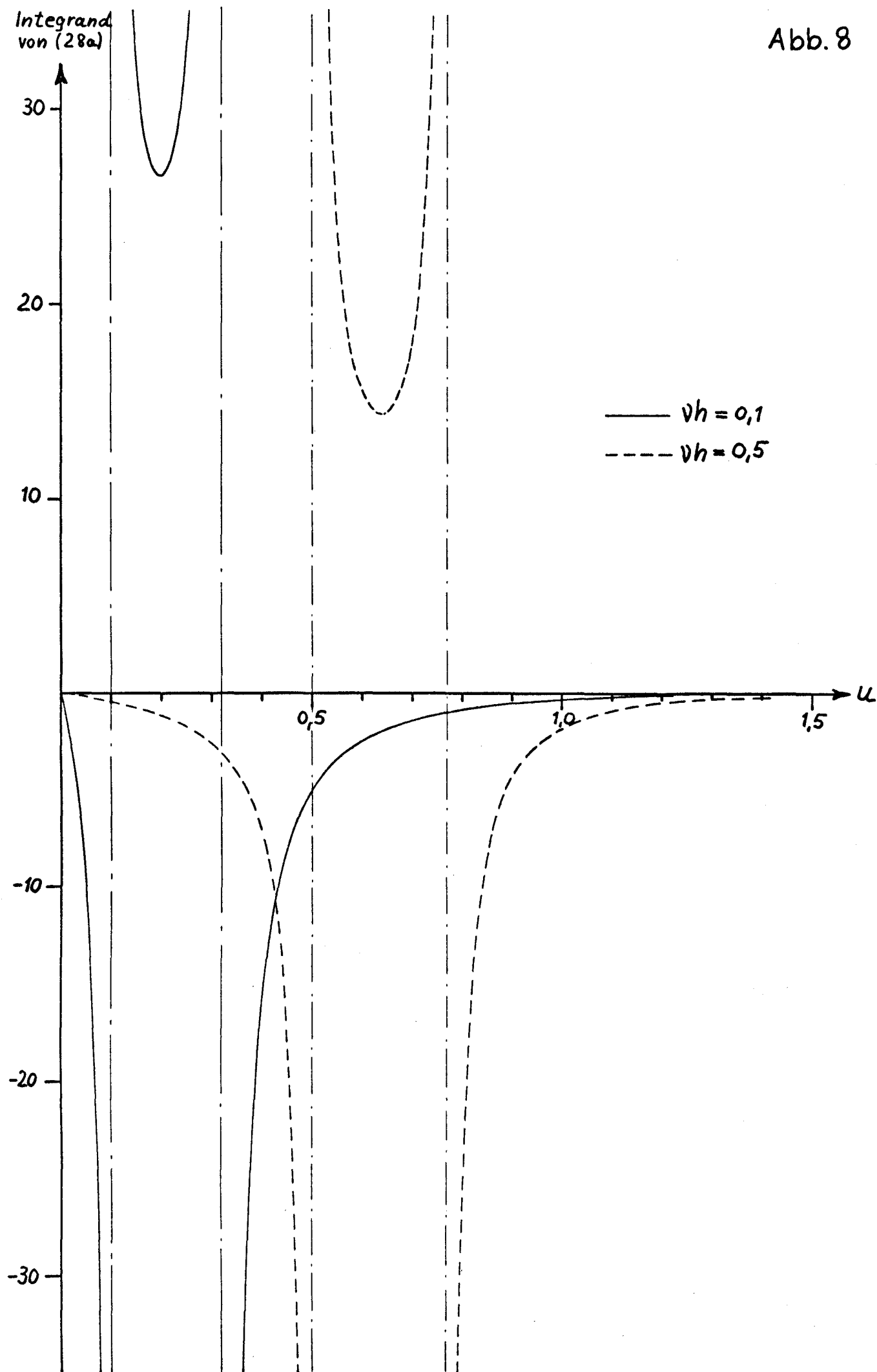
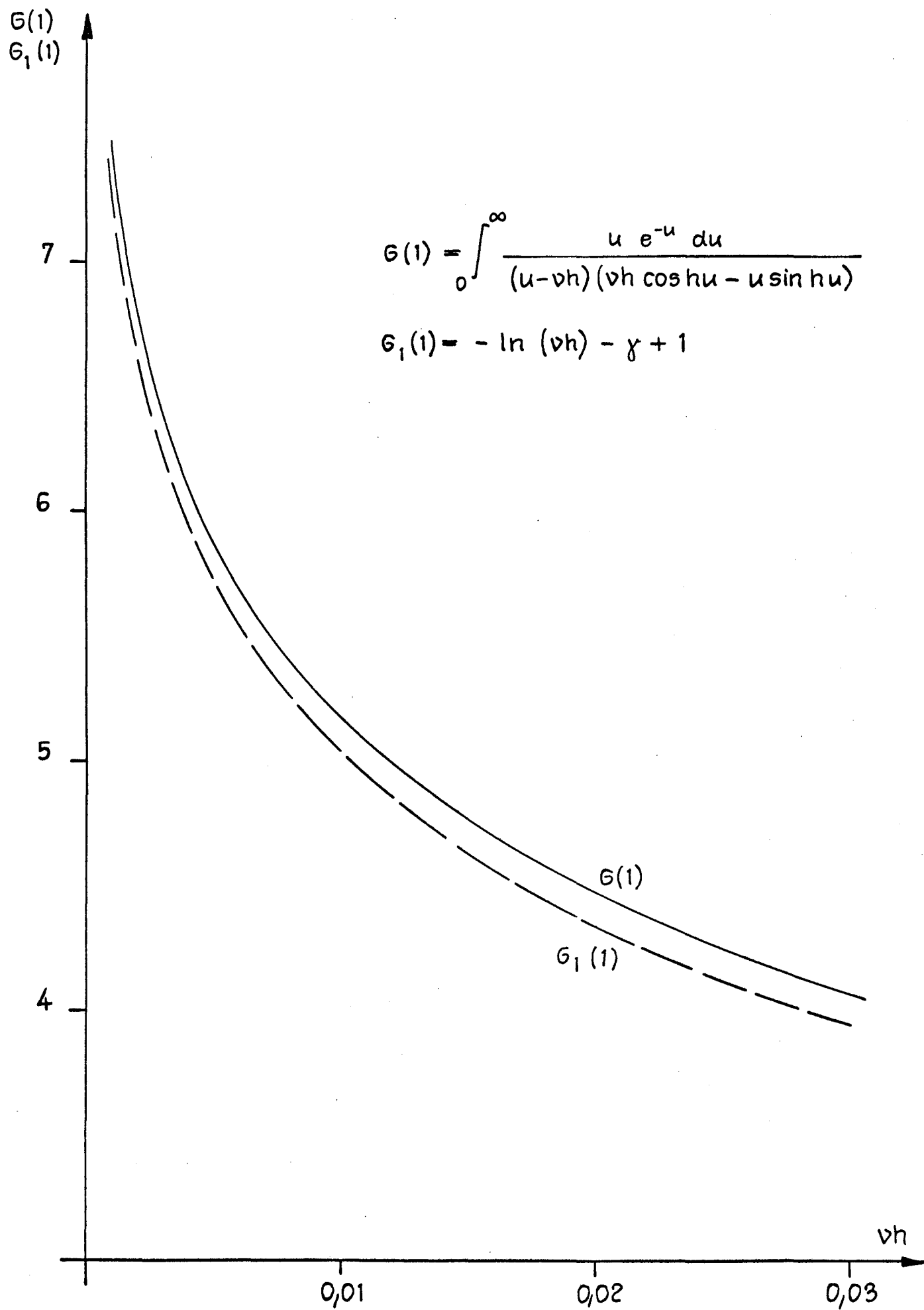
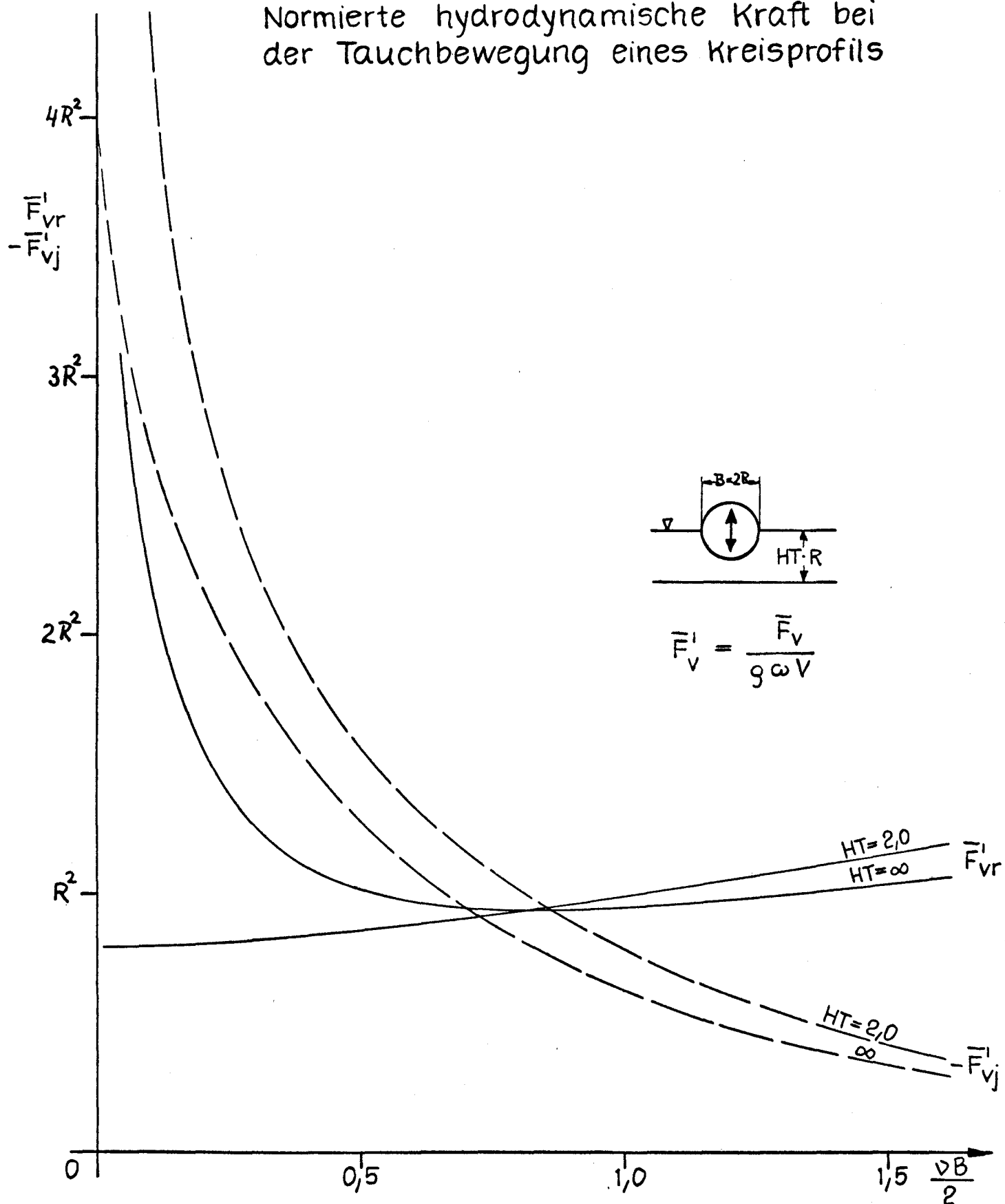


Abb. 8

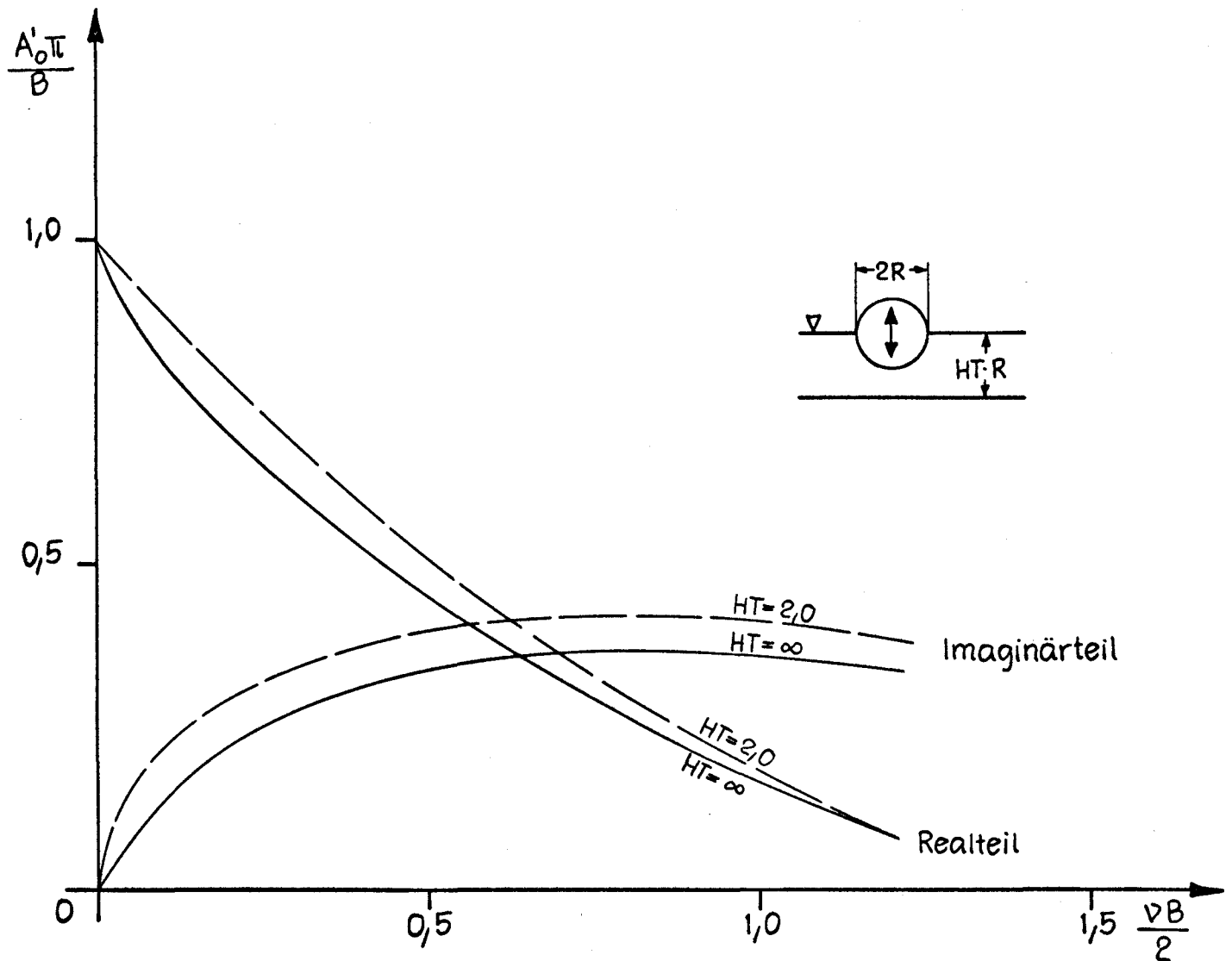




Normierte hydrodynamische Kraft bei
der Tauchbewegung eines Kreisprofils



Quellstärken des Strahlungspotentials der Tauchbewegung eines Kreisprofils



Hydrodynamische Masse bei der Tauchbewegung eines Kreisprofils

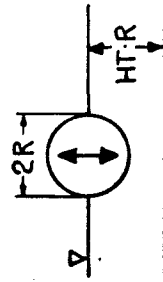
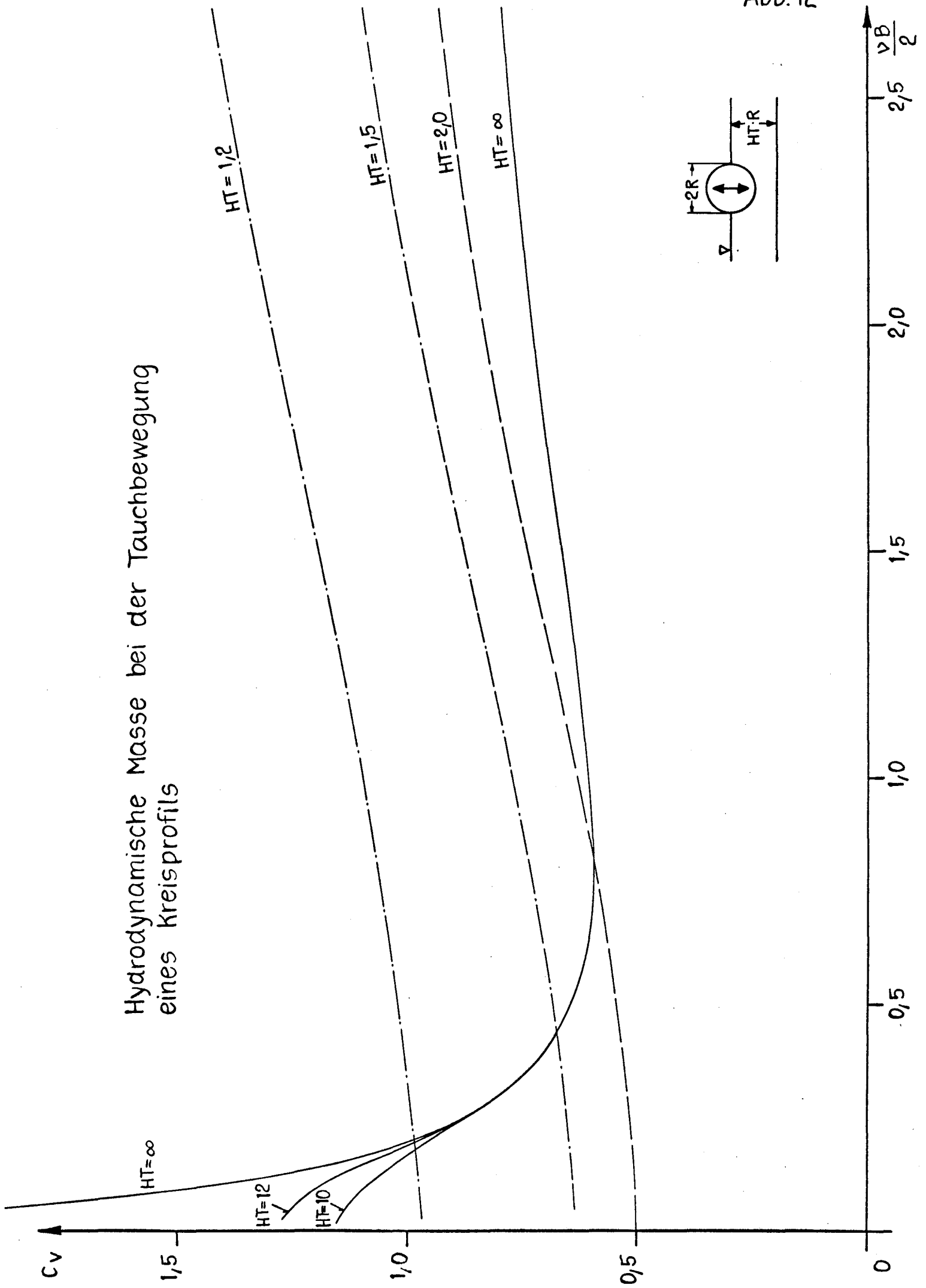


Abb. 12

Amplitudenverhältnis bei der Tauchbewegung eines Kreisprofils

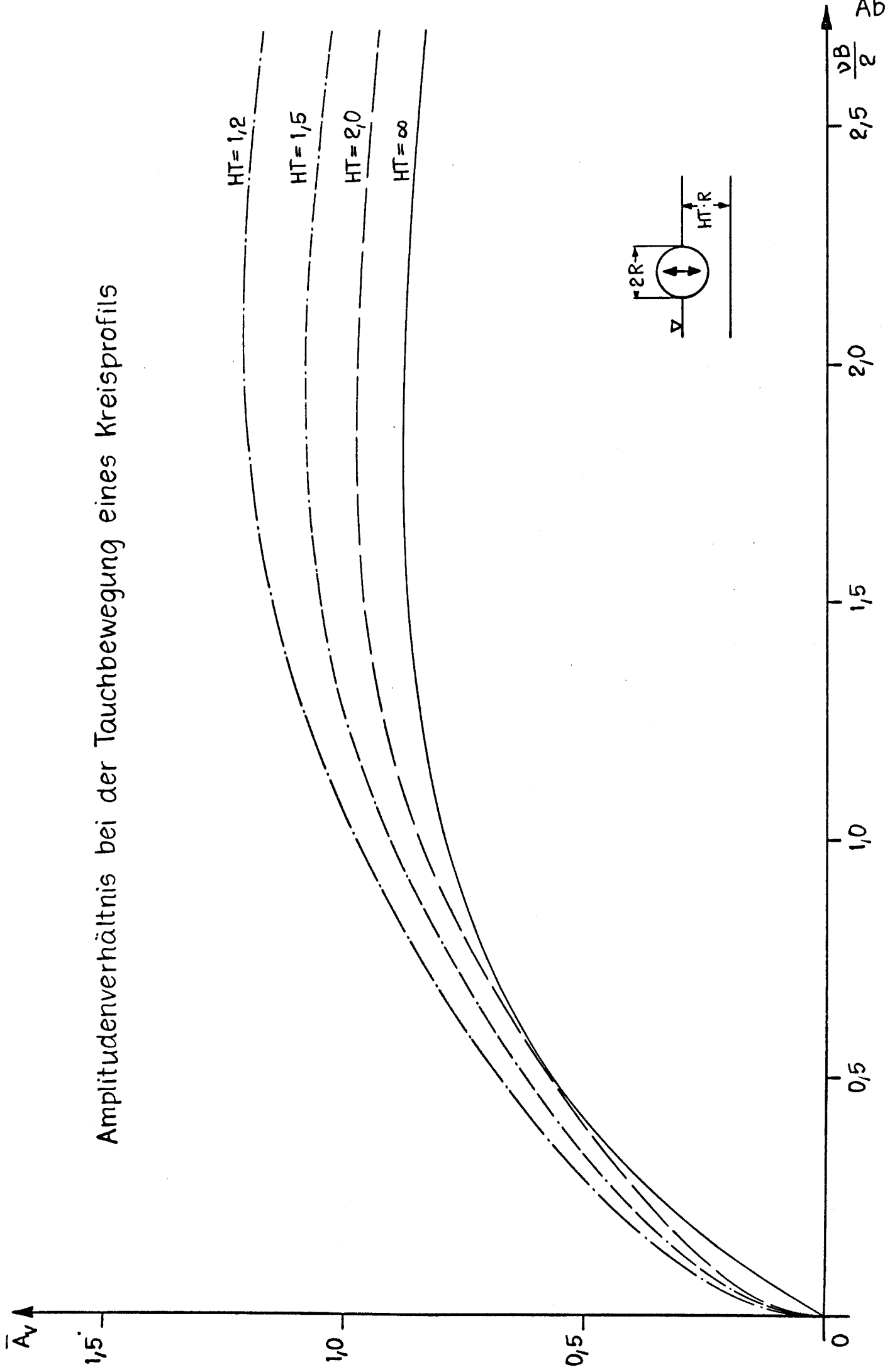
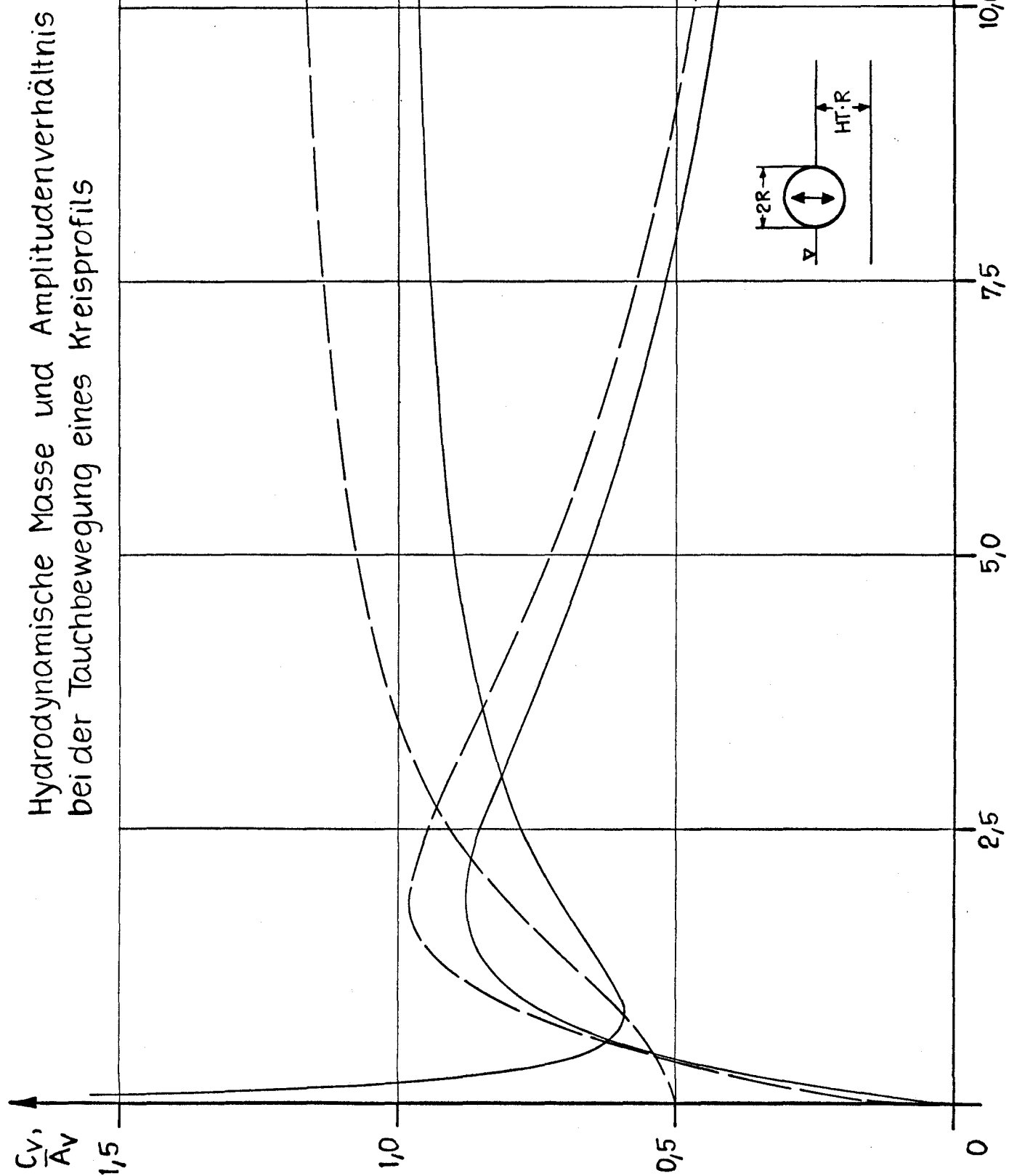
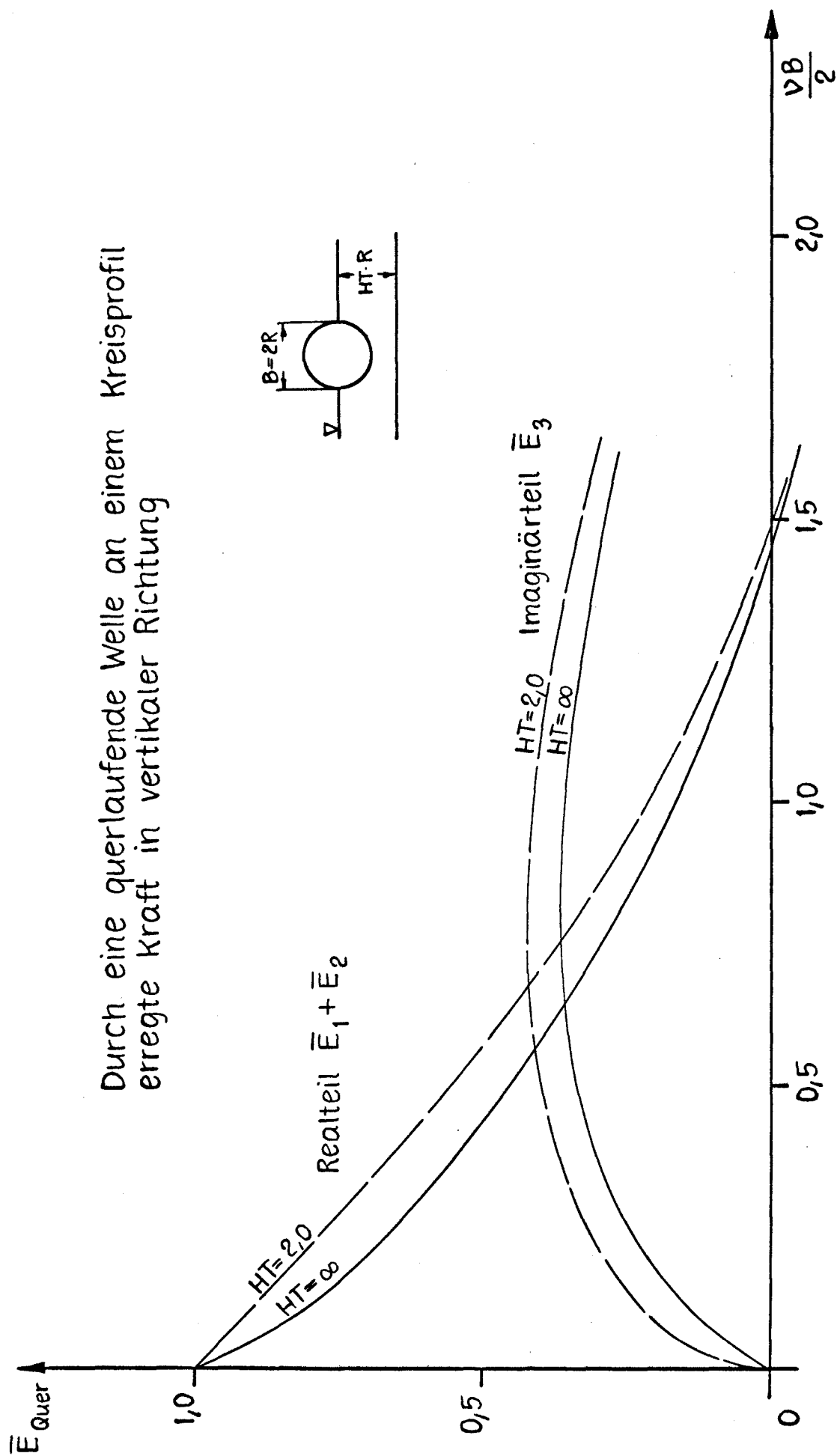
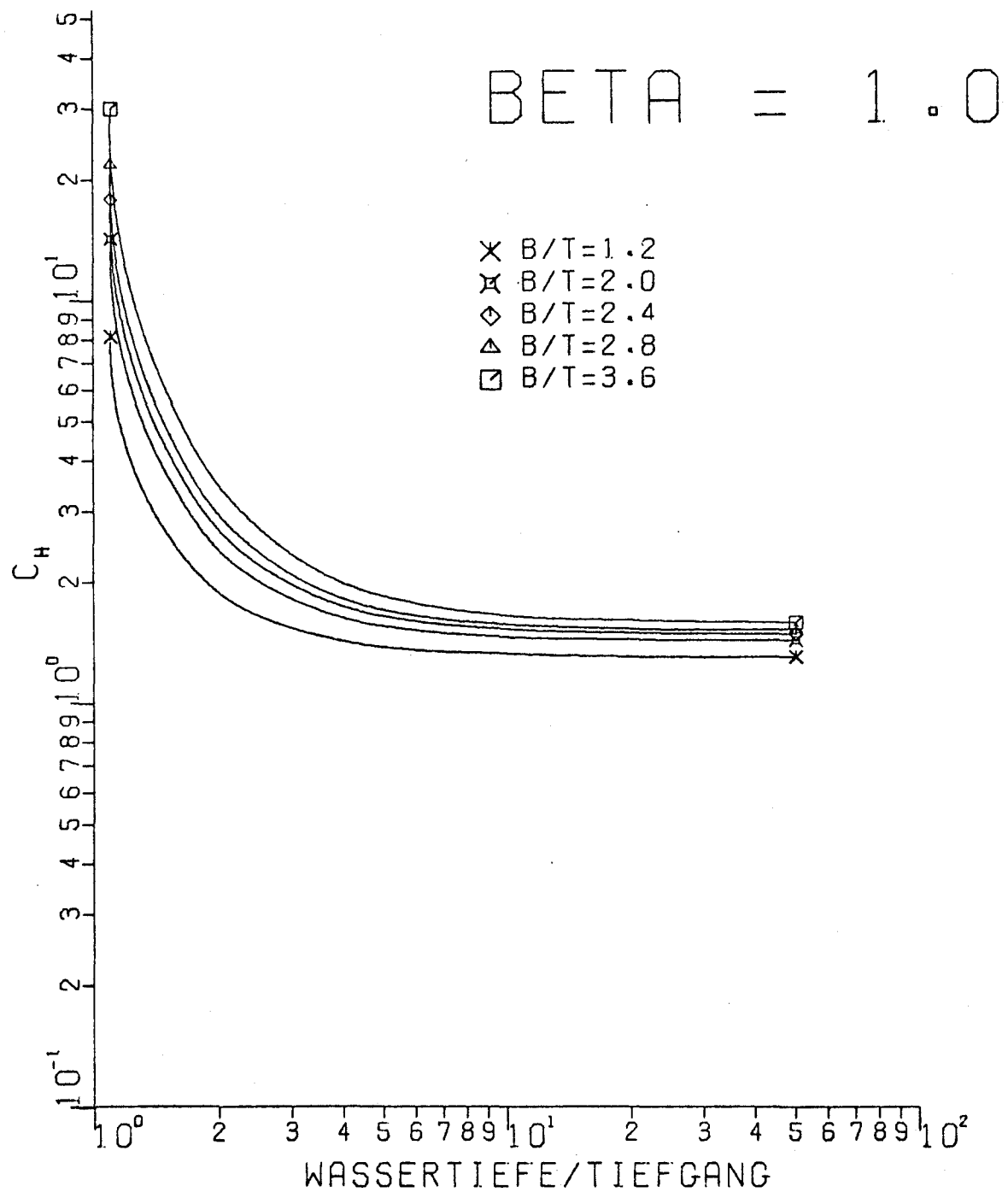


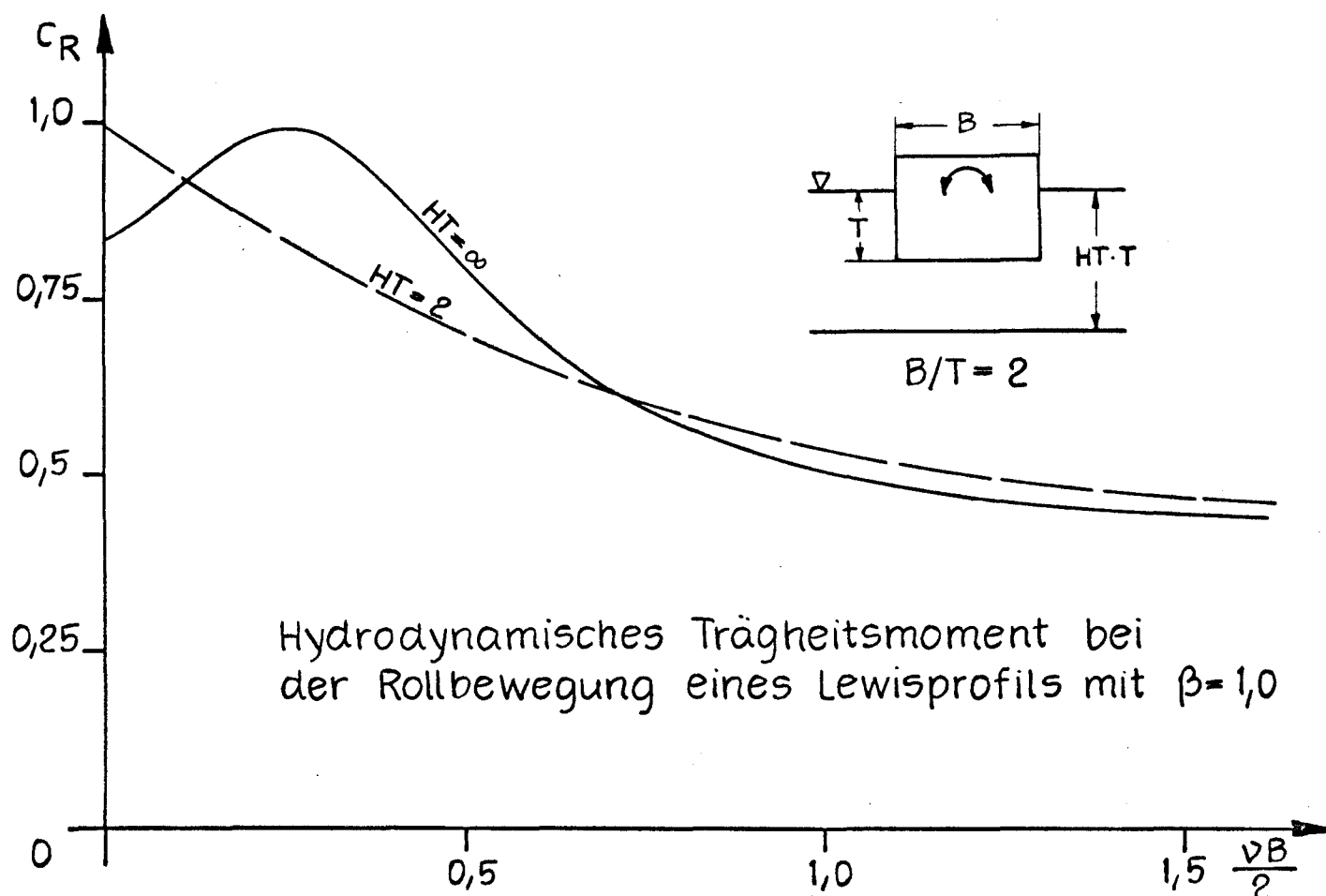
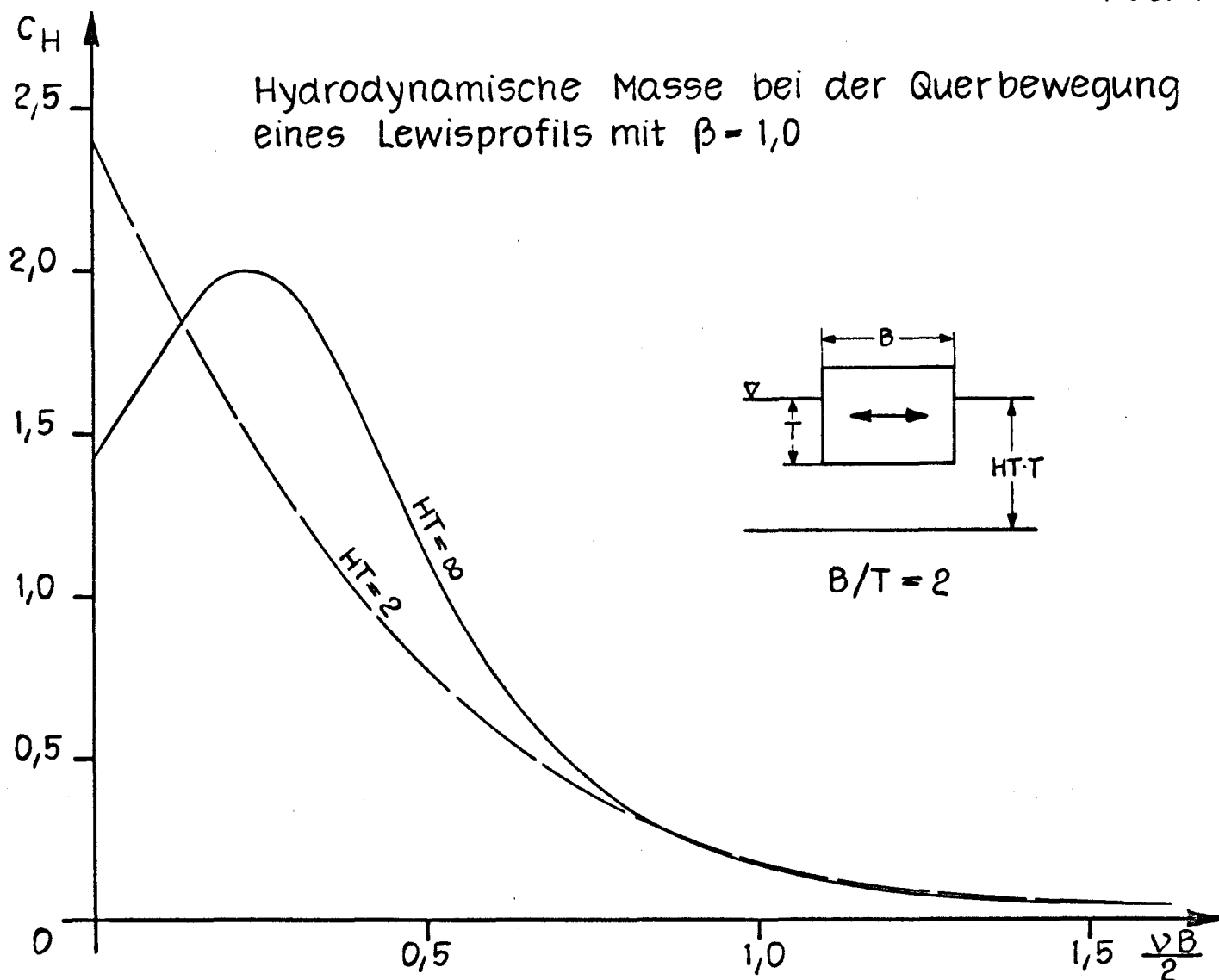
Abb. 14

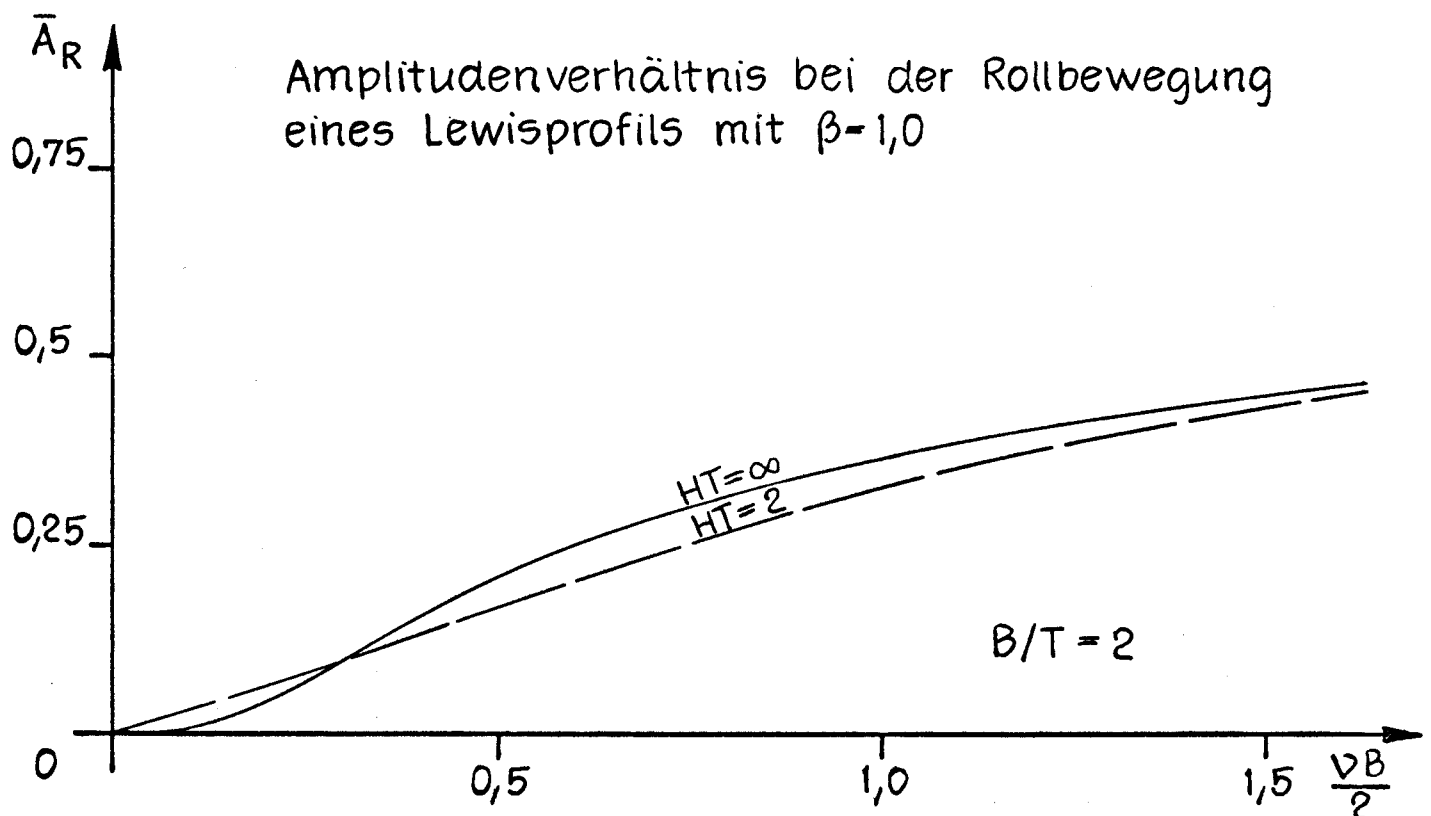
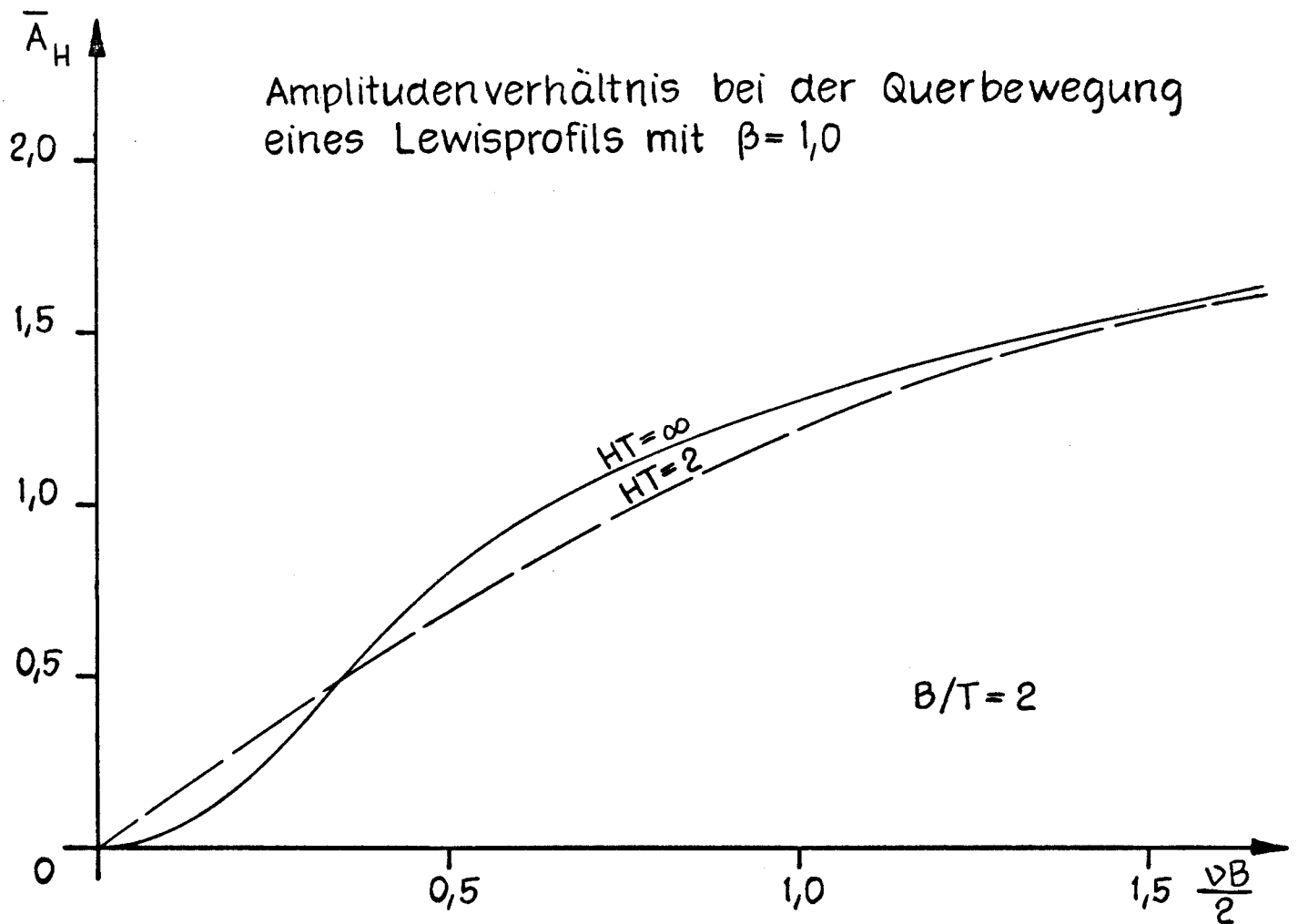




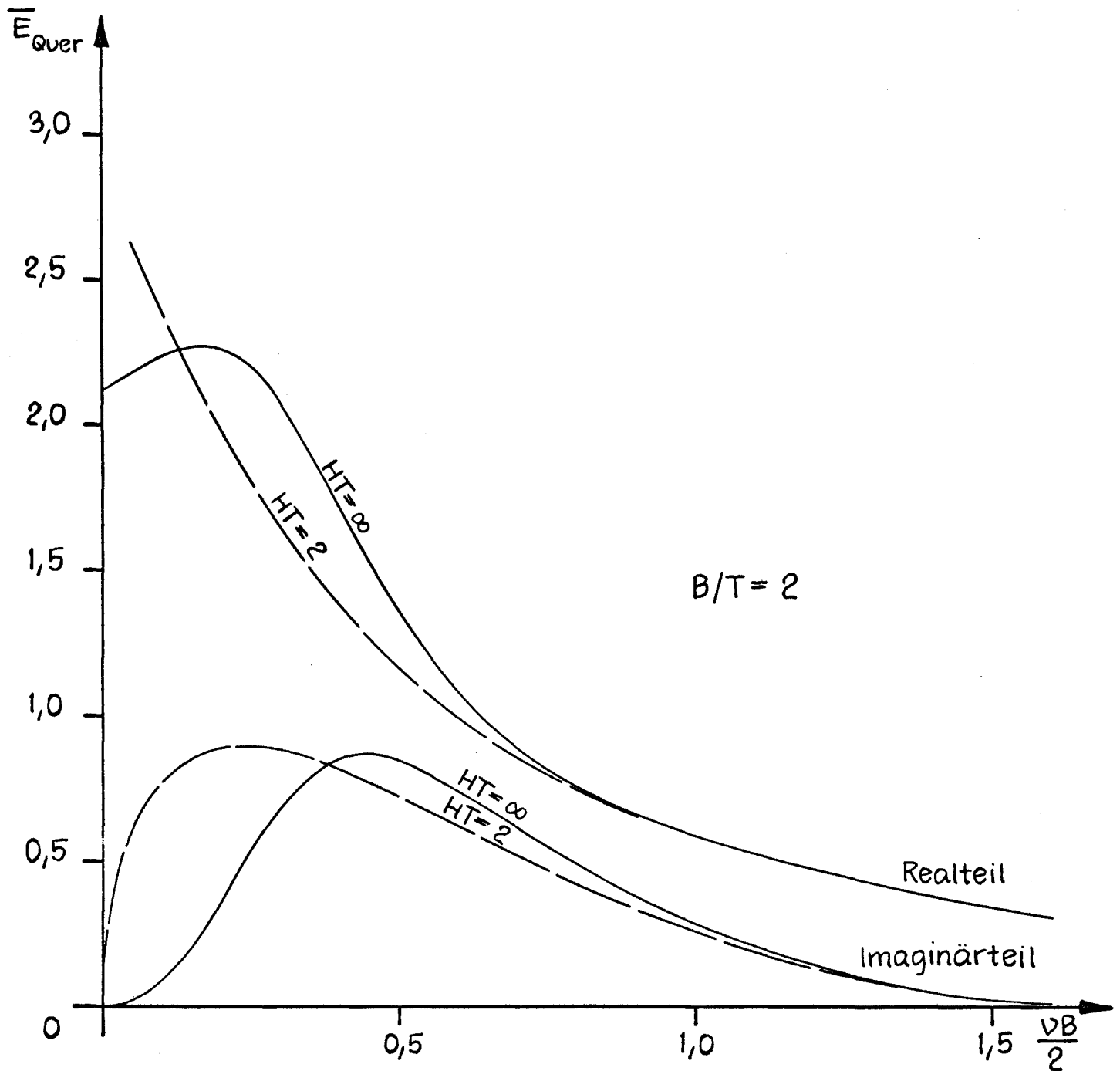
Hydrodynamische Masse bei der Quer-
bewegung von Lewisprofilen mit $\beta=1.0$ bei
verschwindender Frequenz

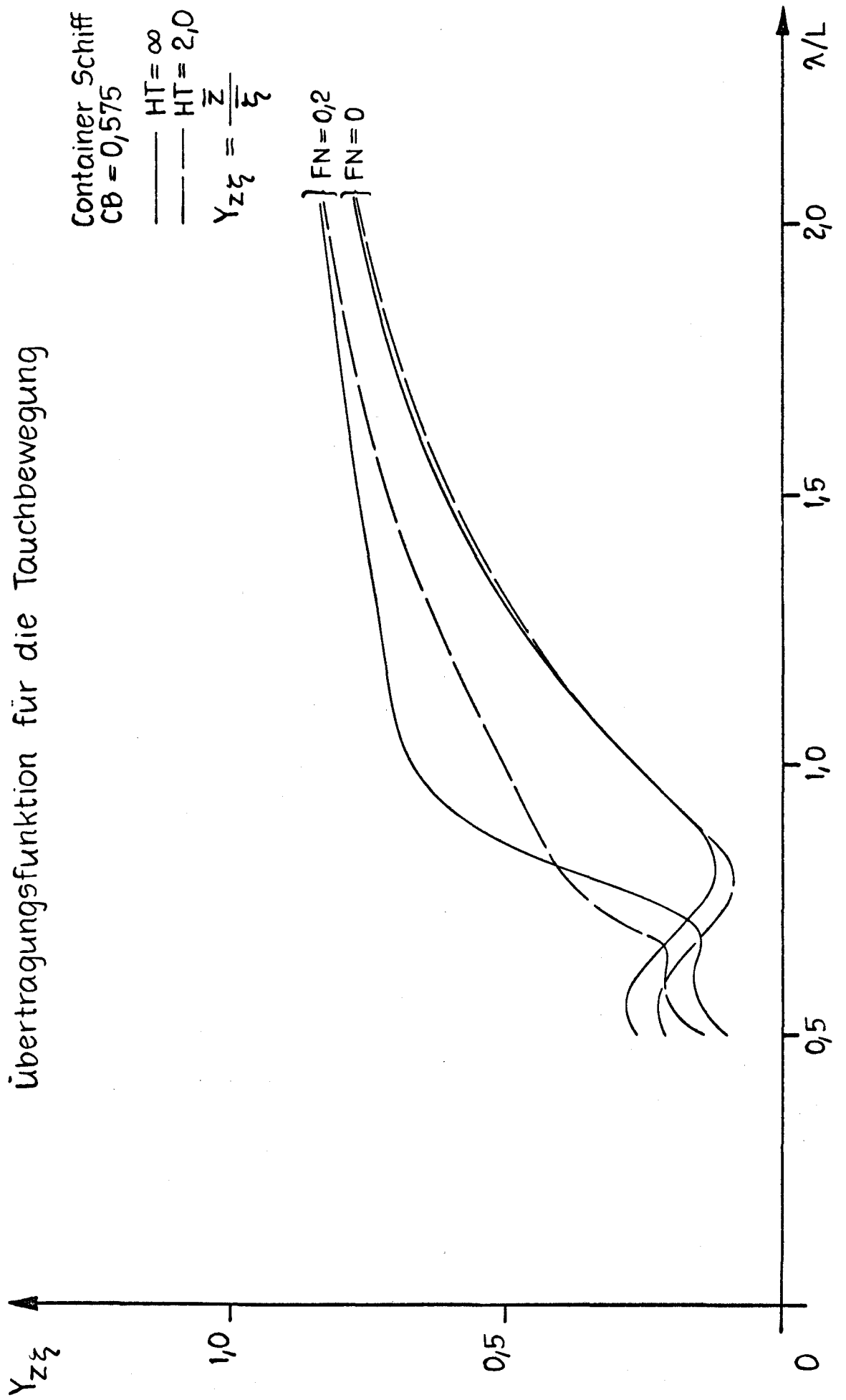






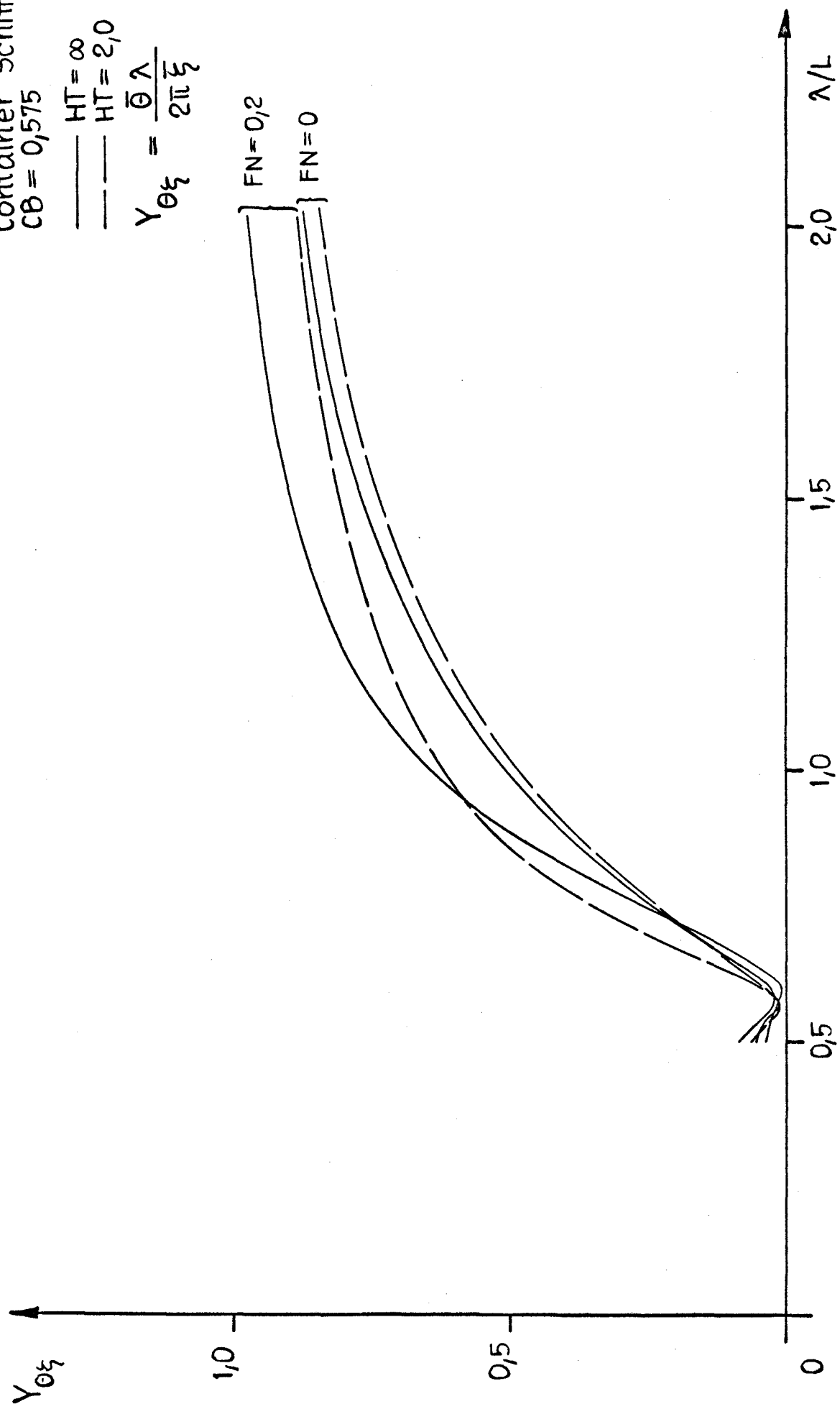
Durch eine querlaufende Welle an
einem Lewisprofil mit $\beta=1,0$ erregte Kraft
in horizontaler Richtung





Übertragungsfunktion der Stampfbewegung

Container Schiff
 $CB = 0,575$
 ——— $HT = \infty$
 - - - $HT = 2,0$
 $Y_{\theta\xi} = \frac{\bar{\theta} \lambda}{2\pi \xi}$



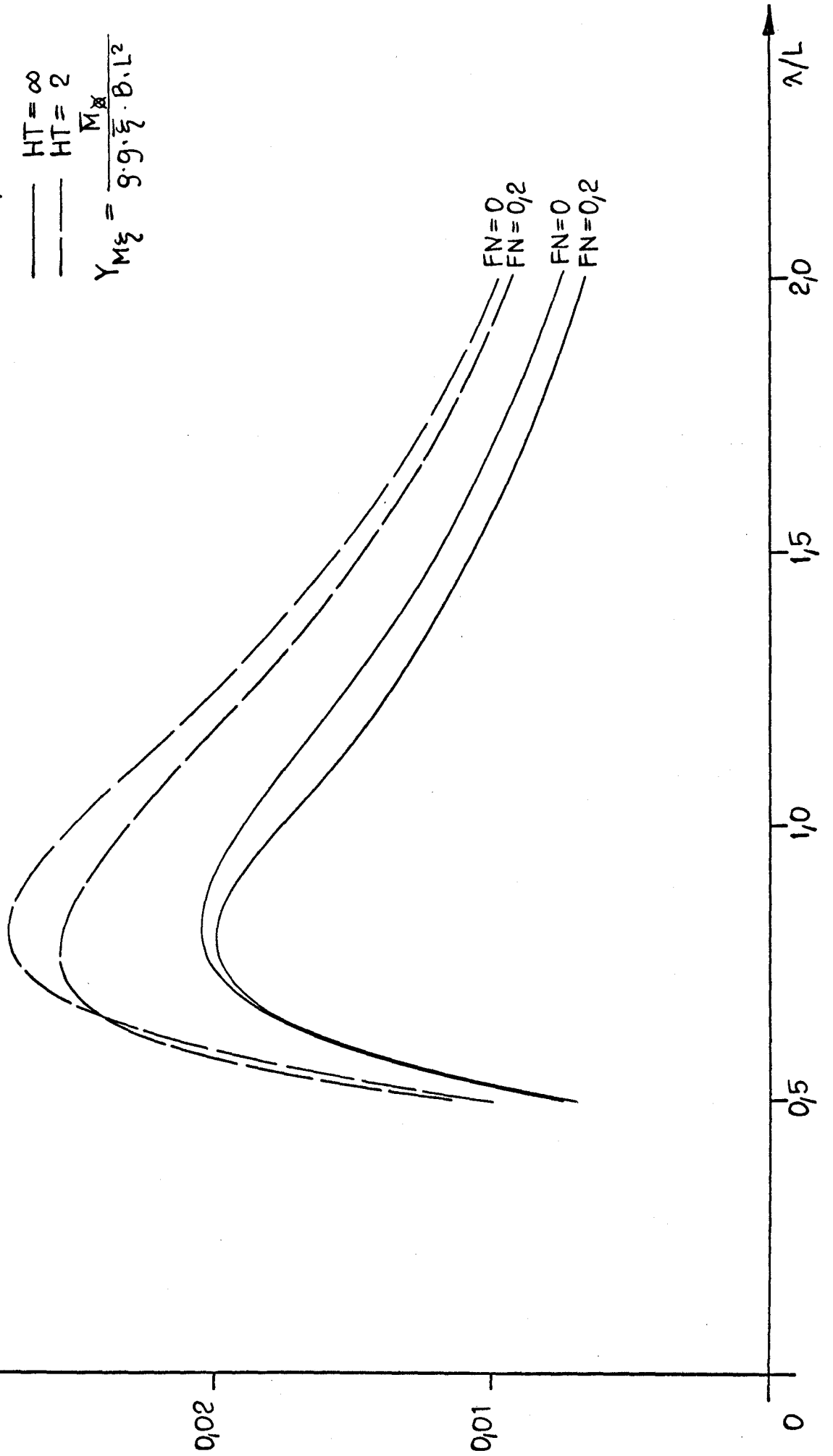
Übertragungsfunktion für das Biegemoment
auf Hauptspant

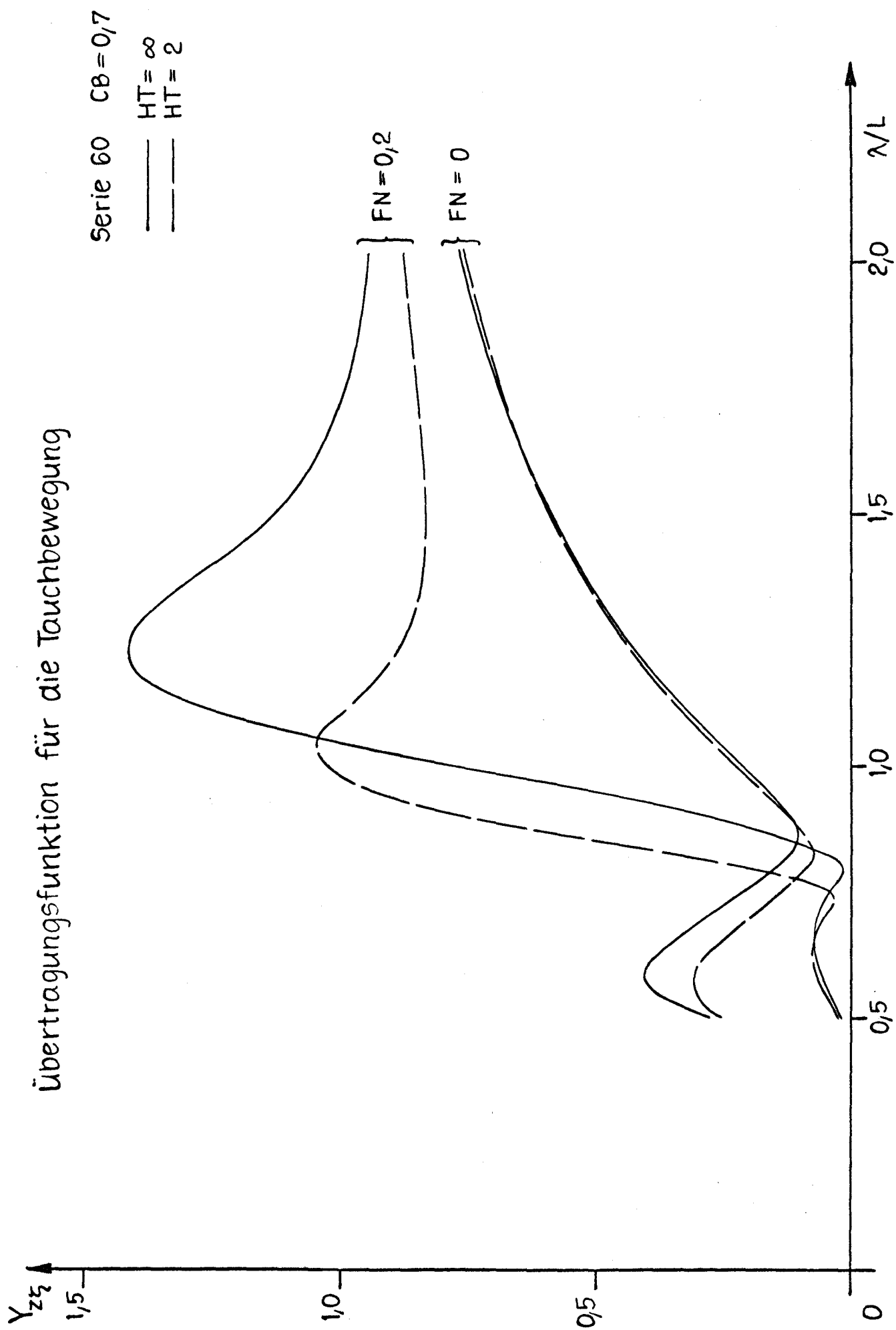
$Y_{M\xi}$

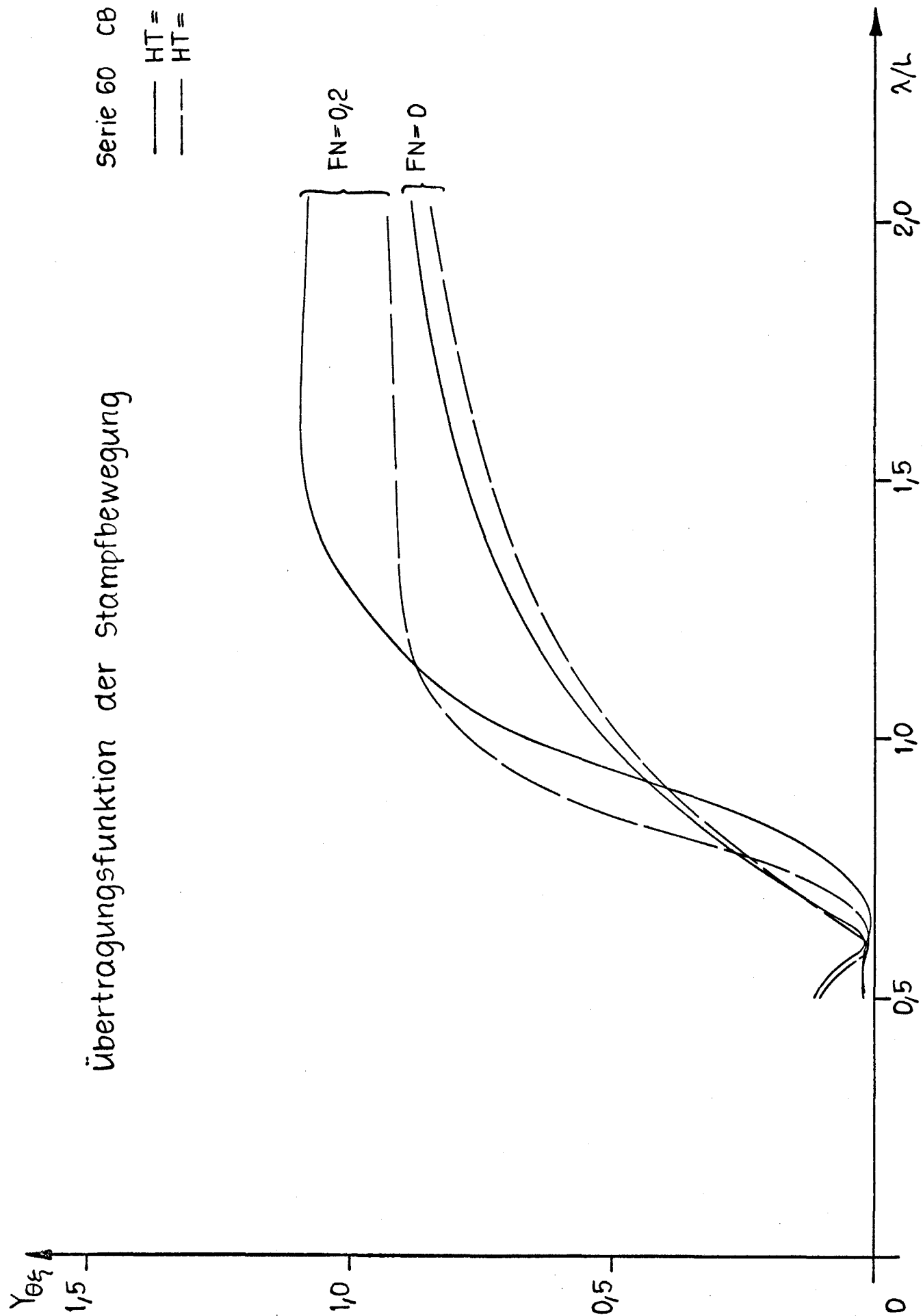
Container Schiff
 $CB = 0,575$

— $HT = \infty$
- - $HT = 2$

$$Y_{M\xi} = \frac{M_{\text{R}}}{9 \cdot g \cdot \xi \cdot B \cdot L^2}$$







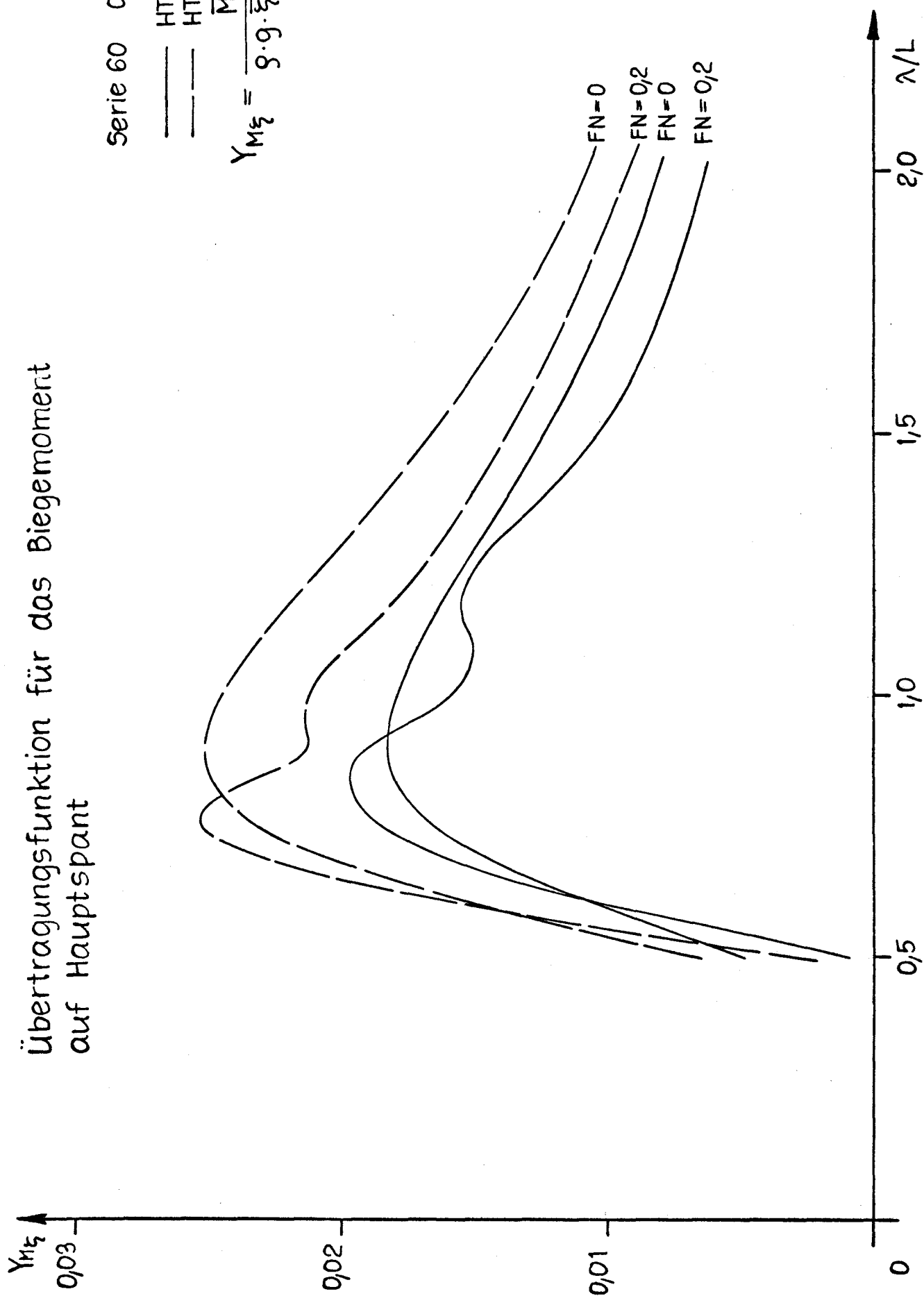
Übertragungsfunktion für das Biegemoment
auf Hauptspant

Serie 60 $CB = 0,7$

— $HT = \infty$

- - $HT = 2$

$$Y_{M\xi} = \frac{\bar{M}_0}{9 \cdot g \cdot \xi \cdot B \cdot L^2}$$



Anhang 1

Das allgemeine komplexe Potential einer in negativer y-Richtung laufenden ebenen Flachwasserwelle ist

$$\Phi_W + i\Psi_W = \bar{\xi} \cdot c \cdot \frac{\cos\{v_0[y+i(z-h)]+\omega t\}}{\sinh(v_0 h)} \quad c = \frac{\omega}{v_0} \quad (A 1)$$

$$= \frac{\bar{\xi} \cdot \omega}{v_0 \sinh(v_0 h)} \left\{ \cosh[v_0(z-h)] \cos(v_0 y + \omega t) - i \sinh[v_0(z-h)] \sin(v_0 y + \omega t) \right\}$$

$$= \frac{\bar{\xi} \cdot \omega}{v \cosh(v_0 h)} \left\{ \cosh[v_0(z-h)] \cos(v_0 y + \omega t) - i \sinh[v_0(z-h)] \sin(v_0 y + \omega t) \right\}$$

$$\Phi_W = \frac{\bar{\xi} \cdot \omega}{v \cosh(v_0 h)} \cosh[v_0(z-h)] \cos(v_0 y + \omega t) = \frac{\bar{\xi} \cdot \omega}{v \cosh(v_0 h)} e^{j\omega t} \cdot \cosh[v_0(z-h)] e^{jv_0 y}$$

$$= \frac{\bar{\xi} \cdot \omega}{v} e^{j\omega t} \left[\cosh(v_0 z) - \tanh(v_0 h) \sinh(v_0 z) \right] e^{jv_0 y}$$

$$\Psi_W = -\frac{\bar{\xi} \cdot \omega}{v \cosh(v_0 h)} \sinh[v_0(z-h)] \sin(v_0 y + \omega t) = j \frac{\bar{\xi} \cdot \omega}{v \cosh(v_0 h)} e^{j\omega t} \cdot \sinh[v_0(z-h)] e^{jv_0 y}$$

$$= j \frac{\bar{\xi} \cdot \omega}{v} e^{j\omega t} \left[\sinh(v_0 z) - \tanh(v_0 h) \cosh(v_0 z) \right] e^{jv_0 y}$$

Für die Vertikalbewegung ist der in y symmetrische Anteil des Potentials maßgebend, für die Horizontalbewegung der in y punktsymmetrische, allerdings multipliziert mit j, also um 90° phasenverschoben.

$$\Phi_{WV} = \frac{\bar{\xi} \cdot \omega}{v} e^{j\omega t} \left[\cosh(v_0 z) - \tanh(v_0 h) \sinh(v_0 z) \right] \cos(v_0 y) \quad (A 2)$$

$$\Psi_{WV} = - \frac{\bar{\xi} \cdot \omega}{v} e^{j\omega t} \left[\sinh(v_0 z) - \tanh(v_0 h) \cosh(v_0 z) \right] \sin(v_0 y) \quad (A 2a)$$

$$\Phi_{WH} = - \frac{\bar{\xi} \cdot \omega}{v} e^{j\omega t} \left[\cosh(v_0 z) - \tanh(v_0 h) \sinh(v_0 z) \right] \sin(v_0 y) \quad (A 3)$$

$$\Psi_{WH} = - \frac{\bar{\xi} \cdot \omega}{v} e^{j\omega t} \left[\sinh(v_0 z) - \tanh(v_0 h) \cosh(v_0 z) \right] \cos(v_0 y) \quad (A 3a)$$

Läuft die Welle in der Richtung x_w (Abb. 5), so wird das Potential

$$\Phi_W = \frac{\bar{\xi} \cdot \omega}{v} e^{j(\omega t - v_0 x_w)} \left[\cosh(v_0 z) - \tanh(v_0 h) \sinh(v_0 z) \right] .$$

Mit $x_w = x \cos \mu - y \sin \mu$

$y_w = x \sin \mu + y \cos \mu$

wird das Potential:

$$\Phi_W = \frac{\bar{\xi} \omega}{v} e^{j\omega t} e^{jv_0(y \sin \mu - x \cos \mu)} \left[\cosh(v_0 z) - \tanh(v_0 h) \sinh(v_0 z) \right]$$

Für die Vertikalbewegung wird daraus

$$\Phi_{WV} = \frac{\bar{\xi} \omega}{v} e^{j(\omega t - v_0 x \cos \mu)} \left[\cosh(v_0 z) - \tanh(v_0 h) \sinh(v_0 z) \right] \cos(v_0 y \sin \mu) \quad (A 4)$$

und für die Horizontalbewegung

$$\Phi_{WH} = - \frac{\bar{\xi} \omega}{v} e^{j(\omega t - v_0 x \cos \mu)} \left[\cosh(v_0 z) - \tanh(v_0 h) \sinh(v_0 z) \right] \sin(v_0 y \sin \mu) \quad (A 5)$$

Anhang 2

Mit $z \pm iy = \sqrt{y^2+z^2} \cdot e^{\pm i \arctan \frac{y}{z}} = r \cdot e^{\pm i\beta}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}\cosh(kz)\cos(ky) &= \cosh(kz) \cdot \cosh(iky) = \frac{1}{2} \left\{ \cosh[k(z+iy)] + \cosh[k(z-iy)] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \cosh[kre^{i\beta}] + \cosh[kre^{-i\beta}] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(kr)^{2t}}{(2t)!} e^{i2t\beta} + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(kr)^{2t}}{(2t)!} e^{-i2t\beta} \right\} \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(kr)^{2t}}{(2t)!} \cos(2t\beta) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{k^{2t}}{(2t)!} \operatorname{Re}[(z+iy)^{2t}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sinh(kz)\cos(ky) &= \sinh(kz) \cdot \cosh(iky) = \frac{1}{2} \left\{ \sinh[k(z+iy)] + \sinh[k(z-iy)] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sinh[kre^{i\beta}] + \sinh[kre^{-i\beta}] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(kr)^{2t+1}}{(2t+1)!} e^{i(2t+1)\beta} + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(kr)^{2t+1}}{(2t+1)!} e^{-i(2t+1)\beta} \right\} \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(kr)^{2t+1}}{(2t+1)!} \cos[(2t+1)\beta] = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{k^{2t+1}}{(2t+1)!} \operatorname{Re}[(z+iy)^{2t+1}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sinh(kz)\sin(ky) &= -i \sinh(kz)\sinh(iky) = -\frac{i}{2} \left\{ \cosh[k(z+iy)] - \cosh[k(z-iy)] \right\} \\ &= -\frac{i}{2} \left\{ \cosh[kre^{i\beta}] - \cosh[kre^{-i\beta}] \right\} \\ &= -\frac{i}{2} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(kr)^{2t}}{(2t)!} e^{i2t\beta} - \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(kr)^{2t}}{(2t)!} e^{-i2t\beta} \right\} \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(kr)^{2t}}{(2t)!} \sin(2t\beta) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{k^{2t}}{(2t)!} \operatorname{Im}[(z+iy)^{2t}]\end{aligned}$$

Die Bestimmung von Φ_{oj} , also des Terms, der zu Φ_{or} in Gleichung (11) zu addieren ist, damit die durch $\Phi_{or} + j\Phi_{oj}$ beschriebene Strömung vom Körper nach beiden Seiten weglaufende Wellen erzeugt, ist noch auf andere Weise möglich. Sie geht auf Rayleigh zurück und ist für den Fall des unendlich tiefen Wassers bei Lamb [41] nachzulesen.

Nach diesem Kunstgriff wird in die Euler-Gleichung eine Zähigkeitskraft $\rho\mu w$ eingeführt, wobei μ die dynamische Zähigkeit und w die Geschwindigkeit bedeuten. Da aber die Flüssigkeit als zähigkeitsfrei vorausgesetzt wurde, wird die Zähigkeit μ später gegen Null gehen gelassen.

Aus der Euler-Gleichung ergibt sich mit dieser Zähigkeitskraft die zeitliche Druckänderung zu

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \rho \lim_{\mu \rightarrow 0} \left[g \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right].$$

Daraus erhält man auf dem zu 4.3.1 analogen Weg für das zweidimensionale Strahlungspotential:

$$\begin{aligned} \Phi_{or}(y,z,t) + j\Phi_{oj}(y,z,t) &= e^{j\omega t} A_0 \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{\cosh[k(z-h)] \cos(ky) dk}{(v-j\frac{\omega\mu}{g}) \cosh(kh) - K \sinh(kh)} \\ &= e^{j\omega t} A_0 \lim_{\mu \rightarrow 0} \left\{ \int_0^\infty \frac{e^{-Kz} \cos(ky) dk}{v-j\frac{\omega\mu}{g} - K} + \int_0^\infty \frac{e^{-Kh}}{v-j\frac{\omega\mu}{g} - K} \frac{(v-j\frac{\omega\mu}{g}) \sinh(Kz) - K \cosh(Kz)}{(v-j\frac{\omega\mu}{g}) \cosh(Kh) - K \sinh(Kh)} \cos(Ky) dK \right\} \\ &= e^{j\omega t} A_0 [\varphi_{or\infty} + j\varphi_{oj\infty} + \varphi_{orad} + j\varphi_{ojad}] \end{aligned}$$

Das erste Integral führt zu (12a) in 4.3.2, das zweite läßt sich gemäß 4.4 wie folgt entwickeln:

$$\begin{aligned} \varphi_{orad} + j\varphi_{ojad} &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{e^{-Kh}}{v-j\frac{\omega\mu}{g} - K} \frac{(v-j\frac{\omega\mu}{g}) \sinh(Kz) - K \cosh(Kz)}{(v-j\frac{\omega\mu}{g}) \cosh(Kh) - K \sinh(Kh)} \cos(Ky) dK \\ &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{t=0}^\infty \left\{ \left[(v-j\frac{\omega\mu}{g}) \frac{\text{Re}[(z+iy)^{2t+1}]}{(2t+1)!} - \frac{\text{Re}[(z+iy)^{2t}]}{(2t)!} \right] \int_0^\infty \frac{e^{-Kh} K^{2t+1} dk}{[v-j\frac{\omega\mu}{g} - K] [(v-j\frac{\omega\mu}{g}) \cosh(Kh) - K \sinh(Kh)]} \right\} \\ &= - \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{t=0}^\infty \left\{ \left[(v-j\frac{\omega\mu}{g}) \frac{\text{Re}[(z+iy)^{2t+1}]}{(2t+1)!} - \frac{\text{Re}[(z+iy)^{2t}]}{(2t)!} \right] [G(2t+1) + jH(2t+1)] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cosh(kz)\sin(ky) &= -i \cosh(kz)\sinh(iky) = -\frac{i}{2} \left\{ \sinh[k(z+iy)] - \sinh[k(z-iy)] \right\} \\
&= -\frac{i}{2} \left\{ \sinh[kre^{i\beta}] - \sinh[Kre^{-i\beta}] \right\} \\
&= -\frac{i}{2} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(kr)^{2t+1}}{(2t+1)!} e^{i(2t+1)\beta} - \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(kr)^{2t+1}}{(2t+1)!} e^{-i(2t+1)\beta} \right\} \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(kr)^{2t+1}}{(2t+1)!} \sin[(2t+1)\beta] = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{k^{2t+1}}{(2t+1)!} \operatorname{Im}[(z+iy)^{2t+1}]
\end{aligned}$$

könnte analog numerisch berechnet werden. Es ist aber möglich, dieses Integral geschlossen zu lösen, indem auf einem anderen Integrationsweg das gleiche Integral erhalten wird:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \oint \frac{w^t e^{-w} dw}{(w-w_1)(w_1 \cosh w - w \sinh w)}$$

$$= \lim_{\mu \rightarrow 0} \{J_{II} + J_{III} + J_{IV}\} = 2\pi i \lim_{\mu \rightarrow 0} \{Res(w_1) + Res(w_2)\}$$

J_{IV} verschwindet für $R \rightarrow \infty$.

Es läßt sich leicht nachweisen, daß

$$\text{Im}\{J_{II}\} = \text{Im}\{J_{III}\} \quad \text{und} \quad \text{Re}\{J_{II}\} = -\text{Re}\{J_{III}\}.$$

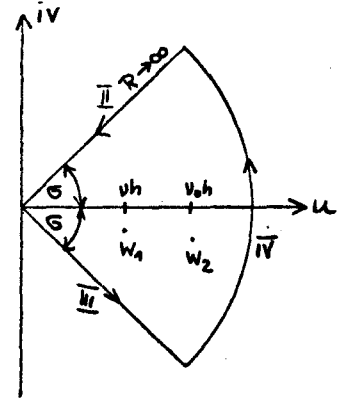
Dann folgt

$$\begin{aligned} H'(t) &= -\text{Im}\left\{\lim_{\mu \rightarrow 0} J_{II}\right\} = -\pi \lim_{\mu \rightarrow 0} [Res(w_1) + Res(w_2)] \\ &= \pi (v_0 h)^{t-1} \left[\frac{\cosh^2(v_0 h)}{v_0 h + \sinh(v_0 h) \cosh(v_0 h)} - \tanh^{t-1}(v_0 h) \right] \end{aligned}$$

und das imaginäre Zusatzpotential wird

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{ojed}} &= \sum_{t=0}^{\infty} H(2t+1) \left[\frac{\text{Re}[(z+iy)^{2t}]}{(2t)!} - v \frac{\text{Re}[(z+iy)^{2t+1}]}{(2t+1)!} \right] \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \pi \left[\frac{v_0^{2t} \cosh^2(v_0 h)}{v_0 h + \sinh(v_0 h) \cosh(v_0 h)} - v^{2t} \right] \left[\frac{\text{Re}[(z+iy)^{2t}]}{(2t)!} - v \frac{\text{Re}[(z+iy)^{2t+1}]}{(2t+1)!} \right] \\ &= \frac{\pi \cosh^2(v_0 h)}{v_0 h + \cosh(v_0 h) \sinh(v_0 h)} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \frac{v_0^{2t}}{(2t)!} \text{Re}[(z+iy)^{2t}] - \tanh(v_0 h) \sum_{t=0}^{\infty} \frac{v_0^{2t+1}}{(2t+1)!} \text{Re}[(z+iy)^{2t+1}] \right\} - \pi e^{-vz} \cos(vy) \end{aligned}$$

Das Gleiche ergibt sich als Differenz von (25) und (12a).



Lebens- und Bildungsgang von Harald Keil

- Herkunft:** Geboren am 18.11.1933 in Striegau/Schles.
als zweites Kind des Vermessungsrates Herbert Keil
und seiner Ehefrau Johanna geb. Goebel
- Schulbesuch:** April 1940 - September 1944 Volksschule in
Frankenstein/Schles.
Oktober 1944 - Dezember 1944 Oberschule in
Frankenstein/Schles.
Januar 1945 - April 1945 kein Schulbesuch wegen
Fronteinwirkung
Mai 1945 - August 1946 kein Schulbesuch wegen Verbots
durch polnische Verwaltung
September 1946 - März 1947 Volksschule in Arpke/Hann.
April 1947 - Juli 1951 Oberschule Lehrte
August 1951 - März 1955 Oberschule Timmendorfer Strand
(Ostern 1952 Versetzung von
Obertertia nach Obersekunda)
März 1955 Reifeprüfung
- Prakt.Ausb.:** Sommer 1955, Frühjahr 1956 und Sommer 1958
bei Lübecker Flenderwerke
Sommer 1956 Seefahrtszeit bei Poseidon Schifffahrt,
Hamburg
Frühjahr 1958 Schiffswerft Hagelstein, Lübeck-Travemünde
- Studium:** WS 1955/56 bis SS 1958 T.H. Hannover im Fach Schiffbau
November 1955 Diplomvorprüfung
WS 1958/59 - WS 1960/61 Universität Hamburg
im Fach Schiffbau
Februar 1961 Diplomhauptprüfung
- Tätigkeiten:** Seit März 1961 wissenschaftlicher Angestellter,
später Wiss. Oberrat am Institut für Schiffbau der
Universität Hamburg.
Mitarbeit am Entwurf des Forschungsschiffes "Meteor",
experimentelle und theoretische Arbeiten über Schiff-
bewegungen, Seegang und Propellervibrationen.
- Familienverh.:** 1961 Eheschließung mit Gabriele Bertram
1963 Sohn Andreas
1965 Tochter Antje