

158 | Juli 1965

## SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Cheung Hun Kim

# Über den Einfluß nichtlinearer Effekte auf hydrodynamische Kräfte bei erzwungenen Tauchbewegungen prismatischer Körper

**TUHH**

Technische Universität Hamburg-Harburg

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Über den Einfluß nichtlinearer Effekte auf hydro-  
dynamische Kräfte bei erzwungenen Tauchbewegungen  
prismatischer Körper.

Der Fakultät für Maschinenwesen  
der Technischen Hochschule Hannover  
vorgelegte und genehmigte Dissertation des  
Cheung Hun K I M

Hauptreferent Prof. Dr.-Ing. Otto G r i m  
Korreferent Prof. Dr.-Ing. Kurt W e n d e l

Juli 1965

# INHALTSVERZEICHNIS

=====

|                                                                                                        | Seite |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Allgemeine Einleitung                                                                                  | 1     |
| 1. Grimsches komplexes Potential für die Tauchbewegung                                                 | 4     |
| 1.1. Beschreibung                                                                                      | 4     |
| 1.2. Komplexes Potential für die lineare Tauchbewegung                                                 | 4     |
| 1.3. Teilkomponenten des Geschwindigkeitspotentials und der Stromfunktion                              | 6     |
| 2. Eine genauere Lösung für Keilformen in Tauchbewegung mit endlicher Amplitude wenn $v \rightarrow 0$ | 10    |
| 2.1. Einleitung                                                                                        | 10    |
| 2.2. Komplexes Potential                                                                               | 10    |
| 2.3. Darstellung der Keilform in Tauchbewegung                                                         | 12    |
| 2.4. Bestimmung der Koeffizienten                                                                      | 12    |
| 2.5. Hydrodynamische Kräfte                                                                            | 15    |
| 2.5.1. Geschwindigkeitspotential                                                                       | 15    |
| 2.5.2. Hydrodynamischer Druck                                                                          | 16    |
| 2.5.3. Hydrodynamische Kräfte                                                                          | 17    |
| 2.6. Numerische Beispiele                                                                              | 21    |
| 2.6.1. Beschreibung der Modelle                                                                        | 21    |
| 2.6.2. Hydrodynamische Kräfte im linearen Fall                                                         | 23    |
| 2.6.3. Hydrodynamische Kräfte im nicht linearen Fall                                                   | 24    |

|                                        | Seite |
|----------------------------------------|-------|
| 2.6.4. Hydrodynamische Druckverteilung | 27    |
| 2.6.5. Diskussion                      | 27    |

#### Bilder 2.3 - 2.11

|        |                                                                                       |    |
|--------|---------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.     | Annähernde numerische Lösung für die<br>nicht lineare Tauchbewegung für<br>kleine $v$ | 28 |
| 3.1.   | Einleitung                                                                            | 28 |
| 3.2.   | Komplexes Potential                                                                   | 28 |
| 3.3.   | Hydrodynamische Kräfte                                                                | 31 |
| 3.4.   | Numerische Lösung                                                                     | 33 |
| 3.4.1. | Darstellung des Profils                                                               | 33 |
| 3.4.2. | Bestimmung der unbekannten Koeffizien-<br>ten                                         | 33 |
| 3.4.3. | Hydrodynamische Kräfte                                                                | 35 |
| 3.4.4. | Fehlerkontrolle                                                                       | 36 |
| 3.5.   | Darstellung der Ergebnisse                                                            | 37 |
| 3.5.1. | $\left( A_{os} \right) \frac{\pi}{B}$                                                 | 37 |
| 3.5.2. | $C$ und $\bar{A}$                                                                     | 37 |
| 3.5.3. | $\frac{K_{inst}}{\rho \cdot g \cdot c \cdot B}$                                       | 38 |

#### Bilder 3.3 - 3.10

|      |                                                                                               |    |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.   | Berücksichtigung der nicht linearen<br>Glieder in der Bedingung an der frei-<br>en Oberfläche | 39 |
| 4.1. | Einleitung                                                                                    | 39 |
| 4.2. | Korrekturpotential $\phi^{(2)}$                                                               | 39 |
| 4.3. | Annäherung der Iterationsformel (4)                                                           | 40 |
| 4.4. | Lösung für $\phi^{(2)}$                                                                       | 45 |

|                                       | Seite |
|---------------------------------------|-------|
| 4.5 Asymptotische Werte der Integrale | 50    |
| 4.6. Hydrodynamische Kräfte           | 53    |
| 4.7. Diskussion                       | 54    |
| Bilder 4.2. - 4.14                    |       |
| 5. Zusammenfassung und Ausblick       | 57    |
| SCHRIFTTUM                            | 58    |
| VERZEICHNIS DER VERWENDETEN SYMBOLE   | 59    |
| ANHANG A (zu Kapitel 3 und 4)         |       |
| ANHANG B (zu Kapitel 4)               |       |

### Allgemeine Einleitung.

Untersucht wird das Problem eines teilweise eingetauchten horizontalen Zylinders, welcher erzwungene harmonische Tauchbewegungen ausführt.

Diese Bewegung erzeugt eine Störung der freien Wasseroberfläche, welche in großer Entfernung vom Körper als ablaufende Welle erscheint.

Wir fragen nach den hydrodynamischen Drücken an der Körperoberfläche und damit nach den Kräften, welche zur Erhaltung der Schwingung erforderlich sind.

Wenn die Amplitude der Schwingung im Vergleich zur Breite des Körpers infinitesimal ist, wird das Problem in üblicher Weise unter den linearisierten Voraussetzungen gelöst.

Im Folgenden wird diese Lösung durch Erfassung nicht linearer Einflüsse auf den Fall endlicher Amplituden ausgedehnt.

Für die Lösung des linearen Problems waren die folgenden drei Linearisierungen erforderlich:

- 1) Linearisierung der Randbedingung an der freien Wasseroberfläche,
- 2) Erfüllung der Randbedingung an der Körperoberfläche in Ruhelage, d.h. lineare Randbedingung an der Körperoberfläche,
- 3) Näherungsverfahren für den hydrodynamischen Druck durch die Vernachlässigung des quadratischen Gliedes der Druckgleichung.

Entsprechend den obigen Linearisierungen sollen im Problem der nicht linearen Tauchbewegung folgende Nichtlinearitäten berücksichtigt werden:

- 1) Erfüllung der Randbedingung an der freien Oberfläche und Berücksichtigung des Gliedes zweiter Ordnung,
- 2) die Randbedingung an der Körperoberfläche ist nicht in Ruhelage, sondern in einigen davon abweichenden tatsächlichen Positionen der Körperoberfläche zu erfüllen,
- 3) für die Kraftberechnung ist nicht nur das lineare Glied, sondern auch das quadratische Glied des Druckes zu berücksichtigen.

Da die vorhandene Arbeit hauptsächlich von dem Beitrag von Grim über lineare Tauchbewegung abhängig ist, wurde das Grimsche komplexe Potential für die lineare Tauchbewegung im ersten Kapitel eingesetzt.

In Kapitel 2 wird eine genauere Lösung für Keilformen in Tauchbewegung endlicher Amplituden für den Grenzfall verschwindender Frequenz der Schwingung behandelt. Diese asymptotische Lösung soll als Kontrolle für unsere Rechnungen im Fall endlicher Frequenz dienen. Für diesen Fall spielen die nicht linearen Glieder in der Randbedingung an der freien Wasseroberfläche keine Rolle; diese Randbedingung bleibt einfach zu erfüllen. An der Körperoberfläche muß jedoch die exakte Randbedingung erfüllt werden. Die hydrodynamischen Drücke und die Kräfte für verschiedene Keilformen, Frequenzen und Amplituden wurden berechnet und aufgetragen.

In Kapitel 3 haben wir eine angenäherte Lösung numerisch ausgeführt. Ebenso wie in Kapitel 2 wurde die Randbe-

dingung an der freien Wasseroberfläche nur in linearisierter Form erfüllt. Die Randbedingung an der Körperoberfläche wurde an einigen vorgegebenen Punkten der Körperoberfläche zu verschiedenen vorgegebenen Zeitpunkten während einer Periode erfüllt. Für die Quellstärken wurden neben der Grundschwingung noch zwei Komponenten hoher Frequenz berechnet. Für den Grenzfall verschwindender Frequenz ergab sich eine gute Übereinstimmung mit den in Kapitel 2 erhaltenen Ergebnissen.

In Kapitel 4 wurde die Erfüllung der nicht linearen Randbedingung an der freien Wasseroberfläche durch eine Iteration verbessert. Das Geschwindigkeitspotential zweiter Ordnung erfüllt eine inhomogene Randbedingung, deren rechte Seite durch das Potential erster Ordnung bestimmt wird. Die Beiträge des Potentials zweiter Ordnung zu den hydrodynamischen Kräften waren sehr gering.



## 1. Grimsches komplexes Potential für die Tauchbewegung.

### 1.1. Beschreibung.

Grim hat die auf die zweidimensionalen tauchbewegenden Körper wirkenden hydrodynamischen Kräfte in glattem Wasser berechnet. [1], [2], [3], [4]

Das Ziel des Problems ist es, die erzeugenden Kräfte, welche für die Tauchbewegung gebraucht werden, zu berechnen.

Das in [4] entwickelte Potential konvergiert sehr gut im Gebiet der niedrigen Frequenzen, welche in der Praxis besonders wichtig sind.

Eine für hohe Frequenzen eingeführte Entwicklung des komplexen Potentials konvergiert sehr gut auch im ganzen Bereich der Frequenz.

Wir verwenden das Potential für das nicht lineare Problem der Tauchbewegung.

### 1.2. Komplexes Potential für die lineare Tauchbewegung.

Der Ursprung des Koordinatensystems liegt in Bezug auf die Mittel- bzw. Ruhelage in der Wasserlinie und in der Profilmitte. Die x-Achse liegt horizontal, die y-Achse vertikal nach unten.

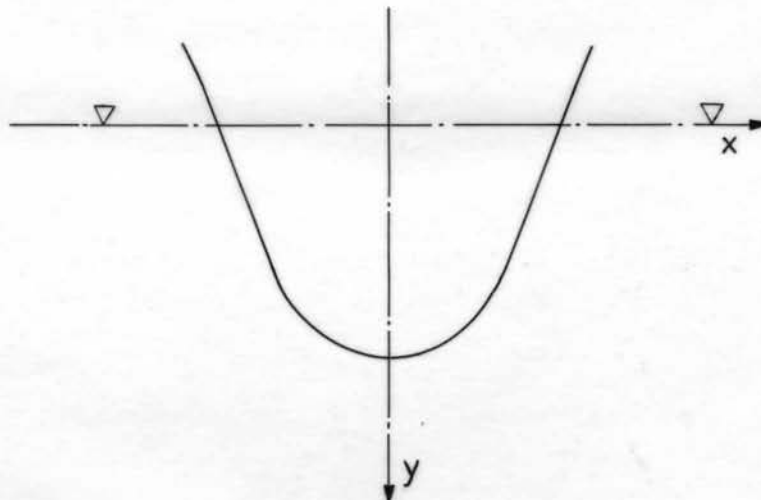


Bild 1.1

Dieses Koordinatensystem wird den ganzen Bericht hindurch benutzt.

Das Potential lautet:

$$\Phi + i\Psi = Ue^{i\omega t} \left[ A_0 \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{e^{ik(x+iy)}}{k - \nu + i\mu} dk + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^{\infty} k^{2(n-1)} (k + \nu) e^{ik(x+iy)} dk \right]$$

wobei  $U$  die Amplitude der Schwingungsgeschwindigkeit,  $\omega$  die Kreisfrequenz der Schwingung,  $\nu = \frac{\omega^2}{g}$  die Wellenzahl der erzeugten Oberflächenwellen und  $A_0$  und  $A_n$  die Unbekannte bezeichnet. Geschwindigkeitspotential und Stromfunktion sind

$$\phi = \text{Re} [\Phi], \quad \psi = \text{Re} [\Psi]$$

$\phi$  und  $\psi$  erfüllen je die Kontinuitätsbedingung und die linearisierte Bedingung an der freien Wasseroberfläche. Die Bedingung am Profilrand lautet:

$$\psi_{\text{ist}} = Ux \cdot \cos \omega t$$

Die Koeffizienten  $A$  werden durch die Erfüllung der Bedingung am Profilrand, d. h.

$$\psi = \psi_{\text{ist}}$$

bestimmt werden. Diese Koeffizienten sind komplexe Zahlen.

### 1.3. Teilkomponenten des Geschwindigkeitspotentials und der Stromfunktion.

Geschwindigkeitspotential  $\phi$  und Stromfunktion  $\psi$  können in der Form der unendlichen Reihe der Teilpotentiale und Teilstromfunktionen wie folgt entwickelt werden:

$$\phi = U \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[ (A_n)_r (\phi_n)_r - (A_n)_i (\phi_n)_i \right] \cos \omega t - \left[ (A_n)_i (\phi_n)_r + (A_n)_r (\phi_n)_i \right] \sin \omega t \right\},$$

$$\psi = U \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[ (A_n)_r (\psi_n)_r - (A_n)_i (\psi_n)_i \right] \cos \omega t - \left[ (A_n)_i (\psi_n)_r + (A_n)_r (\psi_n)_i \right] \sin \omega t \right\},$$

wobei  $r$  den realen und  $i$  den imaginären Teil bezeichnet.

Die Teilkomponenten  $(\phi_n)_r$  und  $(\phi_n)_i$  bzw.  $(\psi_n)_r$  und  $(\psi_n)_i$  werden in folgenden Formen dargestellt:

$$\phi_0 = (\phi_0)_r + i (\phi_0)_i = \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ky} \cos(kx)}{k - \nu + i\mu} dk$$

$$\psi_0 = (\psi_0)_r + i (\psi_0)_i = \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ky} \sin(kx)}{k - \nu + i\mu} dk ,$$

$$\begin{aligned} \phi_n &= (\phi_n)_r + i \cdot 0 = \operatorname{Re} \left[ \int_0^{\infty} k^{2(n-1)} (k + \nu) e^{ik(x+iy)} dk \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{(x+iy)^{2n}} - \frac{i\nu}{(x+iy)^{2n-1}(2n-1)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_n &= (\psi_n)_r + i \cdot 0 = \operatorname{Im} \left[ \int_0^{\infty} k^{2(n-1)} (k + \nu) e^{ik(x+iy)} dk \right] \\ &= \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{(x+iy)^{2n}} - \frac{i\nu}{(x+iy)^{2n-1}(2n-1)} \right] \end{aligned}$$

wobei  $n = 1, 2, 3, \dots$

Das sogenannte Wellenquellpotential

$$\phi_0 + i \psi_0 = \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ky} e^{ikx}}{k - \nu + i\mu} dk$$

kann durch folgende Formeln explizite dargestellt werden:

Wenn  $v \sqrt{x^2 + y^2}$  klein ist,

$$\begin{aligned} (\phi_o)_r = e^{-vy} \cdot \cos(vx) \cdot \left\{ -\ln(1.781 \cdot v \sqrt{x^2 + y^2}) \right. \\ \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(v \sqrt{x^2 + y^2})^n \cdot \cos(n\theta)}{n \cdot n!} \right\} \\ + e^{-vy} \cdot \sin(vx) \cdot \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(v \sqrt{x^2 + y^2})^n \sin(n\theta)}{n \cdot n!} - \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right\}, \end{aligned}$$

$$(\phi_o)_i = -\pi e^{-vy} \cdot \cos(vx),$$

$$\begin{aligned} (\psi_o)_r = e^{-vy} \cdot \cos(vx) \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(v \sqrt{x^2 + y^2})^n \sin(n\theta)}{n \cdot n!} + \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right\} \\ + e^{-vy} \cdot \sin vx \cdot \left\{ -\ln(1.781 v \sqrt{x^2 + y^2}) - \right. \\ \left. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(v \sqrt{x^2 + y^2})^n \cdot \cos(n\theta)}{n \cdot n!} \right\}, \end{aligned}$$

$$(\psi_o)_i = -\pi e^{-vy} \cdot \sin(vx),$$

wobei  $\theta = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ .

Wenn  $v \sqrt{x^2 + y^2}$  groß ist,

$$(\phi_o)_r = -\frac{i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{v^n} \left\{ \frac{(y+ix)^n + (y-ix)^n}{(y^2 + x^2)^n} \right\} - \pi e^{-vy} \cdot \text{sign}(x) \cdot \sin(v|x|),$$

$$(\phi_o)_i = -\pi e^{-vy} \cdot \cos(vx),$$

$$(\psi_o)_r = \frac{i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{v^n} \left\{ \frac{(y+ix)^n - (y-ix)^n}{(y^2 + x^2)^n} \right\} + \pi e^{-vy} \cdot \text{sign}(x) \cdot \cos(vx),$$

$$(\psi_o)_i = -\pi e^{-vy} \cdot \sin(vx).$$

Das als Quellpotential höherer Ordnung bekannte Potential  $(\phi_n + i\psi_n)$  für  $n = 1, 2, 3, \dots$ , wird in Polarkoordinaten wie folgt angegeben:

$$\phi_n + i\psi_n = \frac{e^{-i2n\varphi}}{r^{2n}} - \frac{ive^{-i(2n-1)\varphi}}{(2n-1)r^{2n-1}}$$

wobei  $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

## 2. Eine genauere Lösung für Keilformen in Tauchbewegung mit endlicher Amplitude wenn $v \rightarrow 0$ .

### 2.1. Einleitung.

Um das Problem mathematisch zu vereinfachen, wählt man die keilförmigen Profile. Man erwartet, daß die asymptotische Lösung ( $v \rightarrow 0$ ), als eine gewisse helfende Kontrolle, für die annähernde Lösung ( $v \neq 0$ ) gebraucht werden kann.

### 2.2. Komplexes Potential.

Wenn  $v$  gegen Null geht, wird das Grimsche komplexe Potential für die lineare Tauchbewegung in folgender Form dargestellt:

$$\phi + i\psi = Ue^{i\omega t} \left\{ A_0 \left[ -\ln(\gamma v \sqrt{x+iy}) - i\pi \right] + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{1}{(x+iy)^{2n}} \right\}$$

wobei  $\gamma$  die Eulersche Konstante bzw. 1,781 ist.

Um die nicht lineare Randbedingung an der Körperoberfläche zu erfüllen, nimmt man die folgende Form als das komplexe Potential an:

$$\begin{aligned} \phi + i\psi = U \left\{ e^{i\omega t} A_{o1} \left[ -\ln(\gamma v \sqrt{x+iy}) - i\pi \right] + e^{i2\omega t} A_{o2} \left[ -\ln(4\gamma v \sqrt{x+iy}) - i\pi \right] \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \cdot A_n \frac{1}{(x+iy)^{2n}} \right\} \end{aligned}$$

worin  $A_{o1}$ ,  $A_{o2}$ ,  $F_n(t)$  und  $A_n$  die Unbekannten bedeuten.

Das obige Potential erfüllt die Bedingung der Kontinuität und die linearisierte Randbedingung an der freien Oberfläche. In diesem Fall werden Geschwindigkeitspotential und Stromfunktion in die folgenden Formen gebracht:



$$\phi = \text{URe} \left\{ e^{i\omega t} A_{o1} \left[ (\phi_{o1})_r + i (\phi_{o1})_i \right] + e^{i2\omega t} A_{o2} \left[ (\phi_{o2})_r + i (\phi_{o2})_i \right] + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \cdot A_n \cdot \left( \frac{1}{(x+iy)^{2n}} \right)_r \right\}, \quad (1)$$

$$\psi = \text{URe} \left\{ e^{i\omega t} A_{o1} \left[ (\psi_{o1})_r + i (\psi_{o1})_i \right] + e^{i2\omega t} A_{o2} \left[ (\psi_{o2})_r + i (\psi_{o2})_i \right] + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \cdot A_n \cdot \left( \frac{1}{(x+iy)^{2n}} \right)_i \right\}, \quad (2)$$

wobei die Teilkomponenten der Funktionen im Polarkoordinatensystem wie folgt geschrieben werden:

$$(\phi_{o1})_r = -\ln(\gamma v r)$$

$$(\phi_{o1})_i = -\pi$$

$$(\phi_{o2})_r = -\ln(4 \gamma v r)$$

$$(\phi_{o2})_i = -\pi$$

$$(\psi_{o1})_r = -\theta$$

$$(\psi_{o1})_i = 0$$

$$(\psi_{o2})_r = -\theta$$

$$(\psi_{o2})_i = 0$$

$$\left( \frac{1}{(x+iy)^{2n}} \right)_r = \frac{\cos(2n\theta)}{r^{2n}}$$

$$\left( \frac{1}{(x+iy)^{2n}} \right)_i = -\frac{\sin(2n\theta)}{r^{2n}}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \text{arctg} \frac{y}{x}$$



### 2.3. Darstellung der Keilform in Tauchbewegung.

Unser Problem ist symmetrisch um die Achse  $y$  vorausgesetzt, d.h., man nimmt die Darstellung des Profils in der folgenden Form an:

$$y = -ax + b + c \cdot \cos(\omega t), \quad (3)$$

wobei

a Verhältnis von Tiefgang in der Mittellage und Halbbreite

b Tiefgang in der Mittellage

c Amplitude der Tauchbewegung bezeichnet.

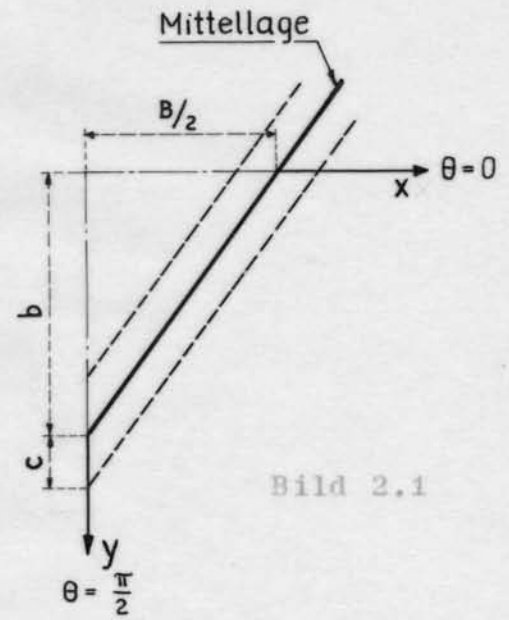


Bild 2.1

Somit schreibt man die Randbedingung an dem Profil wie folgt:

$$\psi_{\text{ist}} = -U \cdot x \cdot \sin(\omega t) \quad (4)$$

Für unseren Zweck stellt man die Gleichungen (3) und (4) im Polarkoordinatensystem dar:

$$r_p = \frac{b + c \cdot \cos(\omega t)}{\sin \theta + a \cos \theta} \quad (3)'$$

$$\psi_{\text{ist}} = -U r_p \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\omega t) \quad (4)'$$

### 2.4. Bestimmung der Koeffizienten.

Durch die Gegenüberstellung von  $\psi$  und  $\psi_{\text{ist}}$  bestimmt man die unbekannten Koeffizienten  $A_n$ , d.h.

$$\psi = \psi_{ist} \quad (5)$$

- 1). Am Punkt  $\theta = \frac{\pi}{2}$  des Profilrandes muß (auch aus Gründen der Symmetrie) die Stromfunktion gleich Null sein. Die Beziehung (5) wird erfüllt werden, wenn man zu  $(\psi_{01})_r$  und  $(\psi_{02})_r$  die Konstante  $\frac{\pi}{2}$  addiert. Die neuen Stromfunktionen sollen jetzt wie folgt festgestellt werden:

$$(\psi_{01})_r = \frac{\pi}{2} - \theta, \quad (\psi_{02})_r = \frac{\pi}{2} - \theta$$

- 2). Am Punkt  $\theta = 0$  des Profilrandes. Durch die Erfüllung von Gleichung (5) errechnet man die Unbekannten  $A_{01}$  und  $A_{02}$  wie folgt:

$$A_{01} = \frac{2b}{\pi a} i, \quad A_{02} = \frac{c}{\pi a} i,$$

- 3). Am beliebigen Punkt  $\theta$  lautet die Gleichung (5):

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot (\sin \theta + a \cdot \cos \theta)^{2n} \cdot \sin(2n \theta) \frac{F_n(t)}{(b + c \cdot \cos(\omega t))^{2n}} \\ = \left\{ \frac{\cos \theta}{\sin \theta + a \cos \theta} - \frac{1}{a} \left( 1 - \frac{2}{\pi} \theta \right) \right\} \cdot \left\{ (b + c \cdot \cos \omega t) \cdot \sin(\omega t) \right\}$$

Daraus erhält man die zwei Beziehungen:

$$F_n(t) = (b + c \cdot \cos(\omega t))^{2n+1} \cdot \sin(\omega t)$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n (\sin \theta + a \cdot \cos \theta)^{2n+1} \cdot \sin(2n \theta) = \cos \theta - \frac{1}{a} \left( 1 - \frac{2}{\pi} \theta \right) (\sin \theta + a \cos \theta)$$

Da auch die rechte Seite dieser Gleichung für  $\theta = 0$  und  $\theta = \frac{\pi}{2}$  verschwindet, wird auch sie in eine Reihe gerader Sinus-Funktionen verwandelt. Die Entwicklung wird nach N Gliedern abgebrochen.

Nun braucht man nur die Koeffizienten  $A_n$  zu bestimmen. Von der Reihenentwicklung der beiden Seiten in der Form der geraden Sinus-Funktionen  $\sin(2m\theta)$  erhält man  $A_n$  in folgender Weise:

$$(\sin \theta + a \cdot \cos \theta)^{2n+1} \sin(2n\theta) = \sum_{m=1}^N B_{mn} \cdot \sin(2m\theta)$$

und

$$\cos \theta - \frac{1}{a} \left(1 - \frac{2}{\pi} \theta\right) (\sin \theta + a \cdot \cos \theta) = \sum_{m=1}^N C_m \sin(2m\theta)$$

wobei

$$B_{mn} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta + a \cdot \cos \theta)^{2n+1} \sin(2n\theta) \cdot \sin(2m\theta) \cdot d\theta$$

$$C_m = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \cos \theta - \frac{1}{a} \left(1 - \frac{2}{\pi} \theta\right) (\sin \theta + a \cdot \cos \theta) \right\} \sin(2m\theta) d\theta$$

Damit erhält man das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N A_n B_{mn} = \sum_{m=1}^N C_m$$

durch welches man  $A_n$  bestimmen kann.

Die oberen Integrationen ergeben sich in den folgenden Formen:

$$B_{mn} = - \left( \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2^{2n-5}} \cdot m \cdot n \cdot (a^2 + 1)^{\frac{2n+1}{2}} \right) \cdot \sum_{k=0}^n \left\{ \binom{2n+1}{k} \cdot \right.$$

$$\cdot \left[ (-1)^{m-k} \cdot \cos \left[ (2n+1-2k) \arctg \frac{1}{a} \right] + \sin \left[ (2n+1-2k) \arctg \frac{1}{a} \right] \right]$$

$$\cdot \left[ \frac{(2n+1-2k)}{((4n-2k+1)^2 - 4m^2)((2k-1)^2 - 4m^2)} \right] \Bigg\}$$

und

$$C_m = \frac{8}{\pi^2} \left[ \left( (-1)^{m+1} - \frac{1}{a} \right) \frac{4m}{(4m^2 - 1)^2} \right]$$

## 2.5. Hydrodynamische Kräfte.

### 2.5.1. Geschwindigkeitspotential.

Durch Einsatz der bisher errechneten Koeffizienten in die Beziehung (1) erhält man das Geschwindigkeitspotential, das die Randbedingung an der Körperoberfläche erfüllt.

$$\begin{aligned} \phi = U \left\{ \frac{2b}{\pi a} \ln(\gamma \nu r) \cdot \sin(\omega t) + \frac{c}{\pi a} \ln(4 \gamma \nu r) \cdot \sin 2(\omega t) + 2\left(\frac{b}{a}\right) \cdot \cos(\omega t) + \frac{c}{a} \cdot \cos(2\omega t) \right. \\ + A_1 \cdot (b + c \cdot \cos(\omega t))^3 \cdot \sin(\omega t) \cdot \frac{\cos(2\theta)}{r^2} \\ + A_2 \cdot (b + c \cdot \cos(\omega t))^5 \cdot \sin(\omega t) \cdot \frac{\cos(4\theta)}{r^4} \\ + A_3 \cdot (b + c \cdot \cos(\omega t))^7 \cdot \sin(\omega t) \cdot \frac{\cos(6\theta)}{r^6} \\ + A_4 \cdot (b + c \cdot \cos(\omega t))^9 \cdot \sin(\omega t) \cdot \frac{\cos(8\theta)}{r^8} \\ + \dots \dots \dots \left. \right\} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \phi = U \left\{ \frac{B}{\pi} \ln(\gamma \nu r) \cdot \sin(\omega t) + \frac{1}{2} \frac{B}{\pi} \left(\frac{c}{b}\right) \cdot \ln(4 \gamma \nu r) \cdot \sin(2\omega t) \right. \\ + B \cos(\omega t) + \frac{B}{2} \left(\frac{c}{b}\right) \cdot \cos(2\omega t) \\ + A_1 \cdot (b + c \cdot \cos(\omega t))^3 \cdot \sin(\omega t) \cdot \frac{\cos(2\theta)}{r^2} \\ + A_2 \cdot (b + c \cdot \cos(\omega t))^5 \cdot \sin(\omega t) \cdot \frac{\cos(4\theta)}{r^4} \\ + A_3 \cdot (b + c \cdot \cos(\omega t))^7 \cdot \sin(\omega t) \cdot \frac{\cos(6\theta)}{r^6} \\ + A_4 \cdot (b + c \cdot \cos(\omega t))^9 \cdot \sin(\omega t) \cdot \frac{\cos(8\theta)}{r^8} \\ + \dots \dots \dots \left. \right\} \end{aligned}$$

### 2.5.2. Hydrodynamischer Druck.

Die beiden Glieder des hydrodynamischen Druckes in der Druckgleichung bzw.

$$p = \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho (\nabla \phi)^2 = \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho \left\{ \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)^2 \right\}$$

werden berücksichtigt.

$$\begin{aligned} 1) \quad \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{\text{Rand}} &= \rho U \omega \left\{ \frac{B}{\pi} \ln(\gamma v r_p) \cdot \cos(\omega t) + \frac{B}{\pi} \left( \frac{c}{b} \right) \ln(4 \gamma v r_p) \cdot \cos(2 \omega t) \right. \\ &\quad - B \sin(\omega t) - B \left( \frac{c}{b} \right) \cdot \sin(2 \omega t) \\ &\quad + A_1 \cos(2 \theta) (\sin \theta + a \cdot \cos \theta)^2 \left[ -3c \cdot \sin^2(\omega t) + (b + c \cdot \cos \omega t) \cdot \cos(\omega t) \right] \\ &\quad + A_2 \cos(4 \theta) (\sin \theta + a \cdot \cos \theta)^4 \left[ -5c \cdot \sin^2(\omega t) + (b + c \cdot \cos \omega t) \cdot \cos(\omega t) \right] \\ &\quad + A_3 \cos(6 \theta) (\sin \theta + a \cdot \cos \theta)^6 \left[ -7c \cdot \sin^2(\omega t) + (b + c \cdot \cos \omega t) \cdot \cos(\omega t) \right] \\ &\quad + A_4 \cos(8 \theta) (\sin \theta + a \cdot \cos \theta)^8 \left[ -9c \cdot \sin^2(\omega t) + (b + c \cdot \cos \omega t) \cdot \cos(\omega t) \right] \\ &\quad + \dots \left. \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad - \frac{1}{2} \rho \left\{ \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)^2 \right\} \Big|_{\text{Rand}} &= \\ &= - \frac{1}{2} \rho U^2 \left\{ \left[ \frac{B^2}{\pi^2} \frac{\sin^2(\omega t)}{(b + c \cdot \cos \omega t)^2} + \frac{B^2}{\pi^2} \left( \frac{c}{b} \right) \frac{\sin(\omega t) \cdot \sin(2 \omega t)}{(b + c \cdot \cos \omega t)^2} + \frac{1}{4} \frac{B^2}{\pi^2} \left( \frac{c}{b} \right)^2 \frac{\sin^2(\omega t)}{(b + c \cdot \cos \omega t)^2} \right] \right. \\ &\quad \cdot (\sin \theta + a \cdot \cos \theta)^2 \\ &\quad - 4 A_1 \left[ \frac{B}{\pi} \frac{\sin^2(\omega t)}{(b + c \cdot \cos \omega t)} + \frac{1}{2} \frac{B}{\pi} \left( \frac{c}{b} \right) \frac{\sin(\omega t) \cdot \sin(2 \omega t)}{(b + c \cdot \cos \omega t)} \right] \cdot \cos(2 \theta) \cdot (\sin \theta + a \cos \theta)^4 \\ &\quad - 8 A_2 \left[ \begin{array}{c} \text{''} \\ \text{''} \end{array} \right] \cdot \cos(4 \theta) \cdot (\sin \theta + a \cos \theta)^6 \\ &\quad - 12 A_3 \left[ \begin{array}{c} \text{''} \\ \text{''} \end{array} \right] \cdot \cos(6 \theta) \cdot (\sin \theta + a \cos \theta)^8 \\ &\quad - 16 A_4 \left[ \begin{array}{c} \text{''} \\ \text{''} \end{array} \right] \cdot \cos(8 \theta) \cdot (\sin \theta + a \cos \theta)^{10} \\ &\quad + \dots \left. \right\} \end{aligned}$$



### 2.5.3. Hydrodynamische Kräfte.

Man integriert die hydrodynamischen Drücke entlang des Profils zu einem beliebigen Zeitpunkt und definiert wie folgt:

$$K_{\text{instationär}} = \rho \int_{\text{Rand}} \frac{\partial \phi}{\partial t} ds$$

und

$$K_{\text{quasistationär}} = -\frac{1}{2} \rho \int_{\text{Rand}} (\nabla \phi)^2 ds$$

Da  $x = r_p \cdot \cos \theta$  und  $dx = -\frac{b+c \cdot \cos(\omega t)}{(\sin \theta + a \cdot \cos \theta)^2} d\theta$ , folgt

$$\rho \int_{\text{Rand}} \frac{\partial \phi}{\partial t} ds = 2 \rho \int_0^{\pi/2} \frac{\partial \phi}{\partial t} dx = 2 \rho \int_0^{\pi/2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{b+c \cdot \cos(\omega t)}{(\sin \theta + a \cdot \cos \theta)^2} d\theta$$

und in gleicher Weise

$$-\frac{1}{2} \rho \int_{\text{Rand}} (\nabla \phi)^2 ds = -\rho \int_0^{\pi/2} (\nabla \phi)_{\text{Rand}}^2 \frac{b+c \cdot \cos(\omega t)}{(\sin \theta + a \cdot \cos \theta)^2} d\theta$$

1).  $K_{\text{inst}}$  :

$$\begin{aligned} K_{\text{inst}} = \rho U \omega & \left\{ \left[ \frac{2B}{\pi} \ln [\gamma v (b+c \cdot \cos \omega t)] \cos(\omega t) \cdot (b+c \cdot \cos \omega t) \right. \right. \\ & + \frac{2B}{\pi} \left( \frac{c}{b} \right) \cdot \ln [4 \gamma v (b+c \cdot \cos \omega t)] \cos(2\omega t) \cdot (b+c \cdot \cos \omega t) \\ & - 2B \sin(\omega t) \cdot (b+c \cdot \cos \omega t) \\ & \left. - 2B \left( \frac{c}{b} \right) \cdot \sin(2\omega t) (b+c \cdot \cos \omega t) \right] \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(\sin \theta + a \cdot \cos \theta)^2} \\ & - \left[ \frac{2B}{\pi} \cdot \cos(\omega t) (b+c \cdot \cos \omega t) \right. \\ & \left. + \frac{2B}{\pi} \cdot \left( \frac{c}{b} \right) \cdot \cos(2\omega t) (b+c \cdot \cos \omega t) \right] \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin \theta + a \cdot \cos \theta)}{(\sin \theta + a \cdot \cos \theta)^2} d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + A_1 (b + c \cdot \cos \omega t) \left[ -3c \cdot \sin^2 \omega t + (b + c \cdot \cos \omega t) \cdot \cos \omega t \right] \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\theta) d\theta \\
 & + A_2 (b + c \cdot \cos \omega t) \left[ -5c \cdot \sin^2 \omega t + (b + c \cdot \cos \omega t) \cdot \cos \omega t \right] \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(4\theta) (\sin \theta + a \cos \theta)^2 d\theta \\
 & + A_3 (b + c \cdot \cos \omega t) \left[ -7c \cdot \sin^2 \omega t + (b + c \cdot \cos \omega t) \cdot \cos \omega t \right] \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(6\theta) (\sin \theta + a \cos \theta)^4 d\theta \\
 & + A_4 (b + c \cdot \cos \omega t) \left[ -9c \cdot \sin^2 \omega t + (b + c \cdot \cos \omega t) \cdot \cos \omega t \right] \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(8\theta) (\sin \theta + a \cos \theta)^6 d\theta \}
 \end{aligned}$$

wobei die Integrationen wie folgt lauten:

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(\sin \theta + a \cos \theta)^2} = \frac{1}{a}$$

$$S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin \theta + a \cos \theta)}{(\sin \theta + a \cos \theta)^2} d\theta$$

$$= \frac{a}{1+a^2} \ln \left[ \sqrt{1+a^2} \cdot \sin \left( \arctg \frac{1}{a} \right) \right]$$

$$+ \frac{1}{a(1+a^2)} \cdot \ln \left[ \sqrt{1+a^2} \cdot \cos \left( \arctg \frac{1}{a} \right) \right]$$

$$+ \frac{1}{1+a^2} \left( a + \frac{1}{a} - \frac{\pi}{2} \right),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\theta) d\theta = 0,$$

$$S_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(4\theta) \cdot (\sin \theta + a \cos \theta)^2 d\theta = -\frac{a}{3},$$

$$S_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(6\theta) \cdot (\sin \theta + a \cos \theta)^4 d\theta = \frac{1}{5} a (1-a^2),$$

$$S_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(8\theta) \cdot (\sin \theta + a \cos \theta)^6 d\theta = \frac{1}{7} a (-1+a^2-a^4),$$

Die numerischen Rechnungen zeigen, daß die Entwicklung über  $n$  bis  $N = 4$  abgebrochen werden kann.

Man setzt  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$  in die Gleichung von  $K_{\text{inst}}$  ein und entwickelt sie in den trigonometrischen Reihen bis zur dritten Ordnung (d.h. die Abhängigkeit von der Zeit  $t$  ist durch trigonometrische Funktionen dargestellt und diese Reihe ist bei der Kreisfrequenz  $3\omega$  abgebrochen). Diese Reihe wird in der folgenden Form dargestellt:

$$\begin{aligned}
 K_{\text{inst}} = \rho U \omega \left\{ \frac{B}{\pi} \left[ S_1 \left( c \cdot \ln(b \gamma v) + c + \frac{1}{8} c \left( \frac{c}{b} \right)^2 + \frac{1}{6} c \left( \frac{c}{b} \right)^4 \right) - \frac{B}{\pi} \cdot S_2 \cdot c \right. \right. \\
 - \frac{1}{2} bc \cdot (3 A_2 S_3 + 5 A_3 S_4 + 7 A_4 S_5) \Big] \\
 + \left[ \frac{B}{\pi} S_1 \left( 2b \cdot \ln(b \gamma v) + c \left( \frac{c}{b} \right) \ln(4 \gamma v b) + \frac{7}{4} c \cdot \left( \frac{c}{b} \right) + \frac{1}{4} c \left( \frac{c}{b} \right)^3 \right) \right. \\
 - \frac{B}{\pi} S_2 \left( 2b + c \cdot \left( \frac{c}{b} \right) \right) + b^2 (A_2 S_3 + A_3 S_4 + A_4 S_5) \\
 - \frac{1}{2} c^2 (A_2 S_3 + 2 A_3 S_4 + 3 A_4 S_5) \Big] \cdot \cos(\omega t) \\
 - \left[ B S_1 \left( 2b + c \left( \frac{c}{b} \right) \right) \right] \cdot \sin(\omega t) \\
 + \left[ \frac{B}{\pi} S_1 \left( c \cdot \ln(b \gamma v) + 2c \cdot \ln(4 b \gamma v) + c + \frac{1}{3} c \left( \frac{c}{b} \right)^2 + \frac{7}{24} c \left( \frac{c}{b} \right)^4 \right) \right. \\
 - \frac{B}{\pi} S_2 (3c) + \frac{1}{2} bc (7 A_2 S_3 + 9 A_3 S_4 + 11 A_4 S_5) \Big] \cdot \cos(2\omega t) \\
 - \left[ B S_1 (3c) \right] \cdot \sin(2\omega t) \\
 + \left[ \frac{B}{\pi} S_1 \left( c \cdot \left( \frac{c}{b} \right) \ln(4 b \gamma v) + \frac{5}{4} c \left( \frac{c}{b} \right) + \frac{1}{12} c \left( \frac{c}{b} \right)^3 \right) \right. \\
 - \frac{B}{\pi} S_2 \left( c \cdot \left( \frac{c}{b} \right) \right) + \frac{1}{2} c^2 (3 A_2 S_3 + 4 A_3 S_4 + 5 A_4 S_5) \Big] \cos(3\omega t) \\
 \left. - \left[ B S_1 \left( c \cdot \left( \frac{c}{b} \right) \right) \right] \sin(3\omega t) \right\}
 \end{aligned}$$



$K_{\text{quasi}}$  :

Auf die gleiche Weise erhält man die zweite Kraft.

$$K_{\text{quasi}} = -\rho U^2 B \left\{ \left[ \frac{1}{\pi a} \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \left( \frac{c}{b} \right)^3 + \frac{3}{4} \left( \frac{c}{b} \right)^4 + \frac{5}{128} \left( \frac{c}{b} \right)^6 \right) \right. \right. \\ + \left[ \frac{1}{\pi a} \left( \frac{1}{4} \left( \frac{c}{b} \right) + \frac{5}{32} \left( \frac{c}{b} \right)^3 + \frac{5}{64} \left( \frac{c}{b} \right)^5 \right) - \frac{S}{\pi} \left( \frac{c}{b} \right) \right] \cos(\omega t) \\ + \left[ \frac{1}{\pi a} \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{32} \left( \frac{c}{b} \right)^6 \right) + \frac{2S}{\pi} \right] \cos(2\omega t) \\ \left. \left. + \left[ \frac{1}{\pi a} \left( -\frac{1}{4} \left( \frac{c}{b} \right) - \frac{1}{64} \left( \frac{c}{b} \right)^5 \right) + \frac{S}{\pi} \left( \frac{c}{b} \right) \right] \cos(3\omega t) \right] \right\}$$

wobei  $S = A_1 J_1 + 2 A_2 J_2 + 3 A_3 J_3 + 4 A_4 J_4$  und  $J_1, J_2, J_3$  und  $J_4$  folgende Integration darstellen:

$$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\theta) \cdot (\sin \theta + a \cdot \cos \theta)^2 d\theta = \frac{\pi}{4} (a^2 - 1),$$

$$J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(4\theta) \cdot (\sin \theta + a \cdot \cos \theta)^4 d\theta \\ = -\frac{1}{3} (a + a^3) + \frac{\pi}{32} (1 - 6a^2 + a^4),$$

$$J_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(6\theta) \cdot (\sin \theta + a \cdot \cos \theta)^6 d\theta \\ = \frac{3}{10} (a - a^5) + \frac{\pi}{128} (-1 + 15a^2 - 15a^4 + a^6),$$

$$J_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(8\theta) \cdot (\sin \theta + a \cdot \cos \theta)^8 d\theta \\ = \frac{1}{5} (a^3 + a^5) - \frac{23}{105} (a + a^7) + \frac{\pi}{512} (1 - 28a^2 + 70a^4 - 28a^6 + a^8)$$

## 2.6. Numerische Beispiele.

### 2.6.1. Beschreibung der Modelle.

Durch die Feststellung der Breiten der Modelle in den mittleren Positionen und auch durch die Varrierung der Keilwinkel erhält man verschiedene Modelle mit dem gleichen Völligkeitskoeffizient. Man wählt drei Modelle und stellt sie in der Tabelle wie folgt dar:

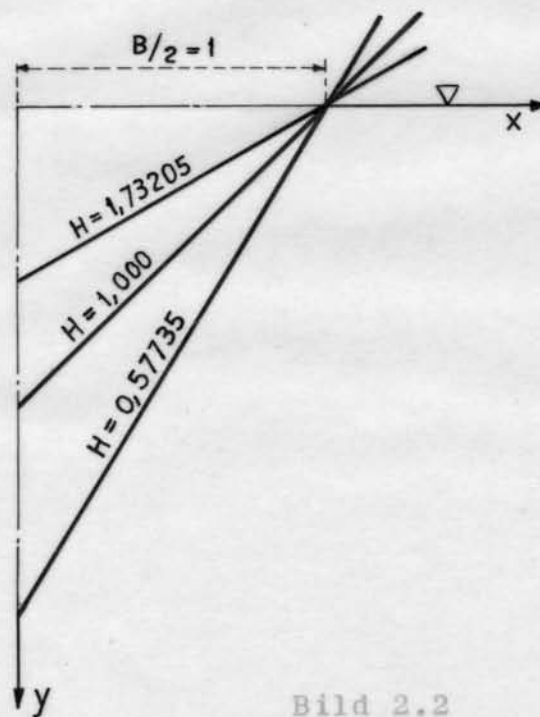


Bild 2.2

| $\alpha$ | $H$     | $\beta$ |
|----------|---------|---------|
| 0,57735  | 1,73205 | 0,5     |
| 1,0000   | 1,0000  | 0,5     |
| 1,73205  | 0,57735 | 0,5     |

Die berechneten Werte der Koeffizienten  $A_n$  und der Integrationen  $S$  und  $J$  für die Modelle sind in folgenden Tafeln angegeben:

|          |                                             |          |           |
|----------|---------------------------------------------|----------|-----------|
| H        | 1,73205                                     | 1,0000   | 0,57735   |
| $A_{01}$ | $\frac{B}{\pi} i$                           | "        | "         |
| $A_{02}$ | $\frac{c \cdot H}{b} \cdot \frac{B}{\pi} i$ | "        | "         |
| $A_1$    | - 0,2912                                    | 0        | - 0,0390  |
| $A_2$    | - 0,1877                                    | - 0,0184 | 0,0084    |
| $A_3$    | - 0,1091                                    | 0        | - 0,0011  |
| $A_4$    | - 0,0605                                    | - 0,0021 | 0,0003    |
| $S_1$    | 1,73205                                     | 1,0000   | 0,57735   |
| $S_2$    | - 0,1604                                    | 0,2146   | 0,2638    |
| $S_3$    | - 0,1924                                    | - 0,3333 | - 0,5773  |
| $S_4$    | 0,0769                                      | 0        | - 0,6928  |
| $S_5$    | - 0,0641                                    | - 0,1429 | - 1,7320  |
| L        | 0,0316                                      | 0,0064   | - 0,0046  |
| $J_1$    | - 0,5235                                    | 0        | 1,5708    |
| $J_2$    | - 0,3437                                    | - 1,0592 | - 3,0946  |
| $J_3$    | 0,2119                                      | 0        | - 5,7247  |
| $J_4$    | - 0,1368                                    | - 0,3674 | - 11,0877 |
| S        | 0,2449                                      | 0,0416   | - 0,1076  |

wobei

$$L = A_2 S_3 + A_3 S_4 + A_4 S_5 ,$$

$$S = A_1 J_1 + 2 A_2 J_2 + 3 A_3 J_3 + 4 A_4 J_4$$

## 2.6.2. Hydrodynamische Kräfte im linearen Fall.

Da im linearen Fall die Amplitude  $c$  gleich Null ist, lautet die Kraft wie folgt:

$$K = \rho U \omega B^2 \left[ \frac{1}{\pi} \ln \left( \frac{B}{2} a \gamma v \right) - \frac{S_2 a}{\pi} + \frac{a^2}{4} L \right] \cos(\omega t) - \rho U \omega B^2 \sin(\omega t)$$

Man setzt den dimensionslosen Frequenzparameter  $F = \frac{v \cdot B}{2}$  in diese Beziehung, somit

$$K = \rho U \omega B^2 \left[ \frac{1}{\pi} \ln F + \frac{1}{\pi} \ln(a \gamma) - \frac{S_2 a}{\pi} + \frac{a^2}{4} L \right] \cos(\omega t) - \rho U \omega B^2 \sin(\omega t)$$

Da Geschwindigkeit und Beschleunigung des Körpers je  $-U \sin(\omega t)$  und  $-U \omega \cos(\omega t)$  sind, werden hydrodynamische Masse  $m''$  und Dämpfungskoeffizient  $N$  wie folgt dargestellt:

$$m'' = -\rho B^2 \left[ \frac{1}{\pi} \ln F + \frac{1}{\pi} \ln(a \gamma) - \frac{S_2 a}{\pi} + \frac{a^2}{4} L \right],$$

$$N = \rho \omega B^2$$

Somit werden Koeffizient der hydrodynamischen Masse  $C$  und Amplitudenverhältnis von der ablaufenden Welle und der Tauchbewegung  $\bar{A}$  wie folgt angegeben:

$$C = -\frac{8}{\pi^2} \cdot \ln F - \frac{8}{\pi} \left[ \frac{1}{\pi} \ln(a \gamma) - \frac{S_2 a}{\pi} + \frac{a^2}{4} L \right]$$

$$\bar{A} = B \cdot v = 2 F$$

Die errechneten Werte von  $C$  und  $\bar{A}$  werden in Bild 2.3 aufgetragen.

Der dimensionslose Kraftkoeffizient  $\frac{K}{\rho \cdot g \cdot c \cdot B}$  für die Modelle von  $H = 1,73205$  und  $H = 0,57735$  an den Frequenzen  $F = 0,01$  und  $0,04$  lautet wie folgt:

| H        | $\left( \frac{K}{\rho \cdot g \cdot c \cdot B} \right) F = 0,01$ |
|----------|------------------------------------------------------------------|
| 1,73 205 | - 0,0285 cos (wt) - 0,02 sin (wt)                                |
| 0,57 735 | - 0,0251 cos (wt) - 0,02 sin (wt)                                |

| H        | $\left( \frac{K}{\rho \cdot g \cdot c \cdot B} \right) F = 0,04$ |
|----------|------------------------------------------------------------------|
| 1,73 205 | - 0,0787 cos (wt) - 0,08 sin (wt)                                |
| 0,57 735 | - 0,0651 cos (wt) - 0,08 sin (wt)                                |

siehe Bild 2.4. und 2.5.

### 2.6.3. Hydrodynamische Kräfte im nicht linearen Fall.

Im nicht linearen Fall wird angesetzt:

$$\begin{aligned} \frac{K_{inst}}{\rho \cdot g \cdot c \cdot B} &= x_0 + x_1 \cos(\omega t) + x_2 \sin(\omega t) \\ &+ x_3 \cos(2\omega t) + x_4 \sin(2\omega t) \\ &+ x_5 \cos(3\omega t) + x_6 \sin(3\omega t) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{K_{quasi}}{\rho \cdot g \cdot c \cdot B} &= x'_0 + x'_1 \cos(\omega t) \\ &+ x'_3 \cos(2\omega t) \\ &+ x'_5 \cos(3\omega t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{K}{\rho \cdot g \cdot c \cdot B} &= (x_0 + x'_0) + (x_1 + x'_1) \cos(\omega t) + x_2 \sin(\omega t) \\ &+ (x_3 + x'_3) \cos(2\omega t) + x_4 \sin(2\omega t) \\ &+ (x_5 + x'_5) \cos(3\omega t) + x_6 \sin(3\omega t) \end{aligned}$$

Die berechneten Koeffizienten  $x$  und  $x'$  werden in folgender Tabelle angegeben und die Kraftkoeffizienten in Bild 2.4. bis 2.9. aufgetragen.



$c = 0,2$

| F    | H        | $\alpha_0$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ | $\alpha_4$ | $\alpha_5$ | $\alpha_6$ |
|------|----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 0,01 | 1,73 205 | -0,0038    | -0,0290    | -0,0211    | -0,0105    | -0,0103    | -0,0006    | -0,0012    |
|      | 1,0000   | -0,0020    | -0,0271    | -0,0203    | -0,0056    | -0,0060    | -0,0001    | -0,0003    |
|      | 0,57735  | -0,0010    | -0,0245    | -0,0201    | -0,0029    | -0,0034    | -0,0000    | -0,0001    |
| 0,04 | 1,73205  | -0,0092    | -0,0786    | -0,0847    | -0,0239    | -0,0415    | -0,0006    | -0,0047    |
|      | 1,0000   | -0,0047    | -0,0724    | -0,0815    | -0,0120    | -0,0240    | -0,0000    | -0,0015    |
|      | 0,57735  | -0,0022    | -0,0650    | -0,0805    | -0,0058    | -0,0138    | -0,0000    | -0,0005    |

$c = 0,4$

| F    | H        | $\alpha_0$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ | $\alpha_4$ | $\alpha_5$ | $\alpha_6$ |
|------|----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 0,01 | 1,73 205 | -0,0075    | -0,0304    | -0,0247    | -0,0207    | -0,0207    | -0,0027    | -0,0047    |
|      | 1,0000   | -0,0041    | -0,0275    | -0,0215    | -0,0112    | -0,0120    | -0,0008    | -0,0015    |
|      | 0,57735  | -0,0020    | -0,0246    | -0,0205    | -0,0058    | -0,0069    | -0,0002    | -0,0005    |
| 0,04 | 1,73205  | -0,0178    | -0,0777    | -0,0991    | -0,0462    | -0,0831    | -0,0024    | -0,0191    |
|      | 1,0000   | -0,0094    | -0,0719    | -0,0863    | -0,0239    | -0,0480    | -0,0003    | -0,0063    |
|      | 0,57735  | -0,0044    | -0,0647    | -0,0821    | -0,0115    | -0,0277    | -0,0000    | -0,0021    |

$c = 0,2$

| F    | H        | $\alpha_0'$ | $\alpha_1'$ | $\alpha_3'$ | $\alpha_5'$ |
|------|----------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 0,01 | 1,73 205 | -0,0002     | -0,0000     | +0,0002     | +0,0000     |
|      | 1,0000   | -0,0002     | -0,0000     | +0,0002     | +0,0000     |
|      | 0,57735  | -0,0003     | -0,0000     | +0,0003     | +0,0000     |
| 0,04 | 1,73205  | -0,0008     | -0,0002     | +0,0009     | +0,0001     |
|      | 1,0000   | -0,0010     | -0,0001     | +0,0010     | +0,0001     |
|      | 0,57735  | -0,0012     | -0,0000     | +0,0012     | +0,0000     |

$c = 0,4$

| F    | H        | $\alpha_0'$ | $\alpha_1'$ | $\alpha_3'$ | $\alpha_5'$ |
|------|----------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 0,01 | 1,73 205 | -0,0003     | -0,0003     | +0,0004     | +0,0001     |
|      | 1,0000   | -0,0005     | -0,0001     | +0,0005     | +0,0001     |
|      | 0,57735  | -0,0006     | -0,0000     | +0,0006     | +0,0000     |
| 0,04 | 1,73205  | -0,0013     | -0,0012     | +0,0018     | +0,0006     |
|      | 1,0000   | -0,0019     | -0,0004     | +0,0021     | +0,0004     |
|      | 0,57735  | -0,0025     | -0,0003     | +0,0025     | +0,0003     |

$c = 0,2$

| F    | H       | $x_0 + x'_0$ | $x_1 + x'_1$ | $x_2$   | $x_3 + x'_3$ | $x_4$   | $x_5 + x'_5$ | $x_6$   |
|------|---------|--------------|--------------|---------|--------------|---------|--------------|---------|
| 0,01 | 1,73205 | -0,0040      | -0,0290      | -0,0211 | -0,0103      | -0,0103 | -0,0006      | -0,0012 |
|      | 1,0000  | -0,0022      | -0,0271      | -0,0203 | -0,0054      | -0,0060 | -0,0001      | -0,0003 |
|      | 0,57735 | -0,0013      | -0,0245      | -0,0201 | -0,0026      | -0,0034 | -0,0000      | -0,0001 |
| 0,04 | 1,73205 | -0,0100      | -0,0788      | -0,0847 | -0,0230      | -0,0415 | -0,0005      | -0,0047 |
|      | 1,0000  | -0,0057      | -0,0725      | -0,0815 | -0,0110      | -0,0240 | +0,0001      | -0,0015 |
|      | 0,57735 | -0,0034      | -0,0650      | -0,0805 | -0,0046      | -0,0138 | -0,0000      | -0,0005 |

$c = 0,4$

| F    | H       | $x_0 + x'_0$ | $x_1 + x'_1$ | $x_2$   | $x_3 + x'_3$ | $x_4$   | $x_5 + x'_5$ | $x_6$   |
|------|---------|--------------|--------------|---------|--------------|---------|--------------|---------|
| 0,01 | 1,73205 | -0,0078      | -0,0307      | -0,0247 | -0,0203      | -0,0207 | -0,0026      | -0,0047 |
|      | 1,0000  | -0,0046      | -0,0276      | -0,0215 | -0,0107      | -0,0120 | -0,0007      | -0,0015 |
|      | 0,57735 | -0,0026      | -0,0246      | -0,0205 | -0,0052      | -0,0063 | -0,0002      | -0,0005 |
| 0,04 | 1,73205 | -0,0191      | -0,0789      | -0,0991 | -0,0444      | -0,0831 | -0,0018      | -0,0191 |
|      | 1,0000  | -0,0113      | -0,0723      | -0,0863 | -0,0217      | -0,0480 | +0,0001      | -0,0063 |
|      | 0,57735 | -0,0069      | -0,0650      | -0,0821 | -0,0090      | -0,0277 | 0,0003       | -0,0021 |



#### 2.6.4. Hydrodynamische Druckverteilung.

Im linearen Fall wird der dimensionslose Druckkoeffizient in folgender Form dargestellt:

$$\left(\frac{P}{\rho g c}\right)_{\text{Rand}} = v \left[ \frac{B}{\pi} \ln(b r v) - \frac{B}{\pi} \ln(\sin \theta + a \cos \theta) + A_1 b \cdot \cos(2\theta) \cdot (\sin \theta + a \cdot \cos \theta)^2 + A_2 b \cdot \cos(4\theta) \cdot (\sin \theta + a \cdot \cos \theta)^4 + A_3 b \cdot \cos(6\theta) \cdot (\sin \theta + a \cdot \cos \theta)^6 + A_4 b \cdot \cos(8\theta) \cdot (\sin \theta + a \cdot \cos \theta)^8 \right] \cos(\omega t) + v \cdot B \cdot \sin(\omega t)$$

wobei C die Amplitude der Schwingung bezeichnet.

Im nichtlinearen Fall wird die rechte Seite abhängig von der Amplitude.

Man berechnet die Druckverteilungen  $\frac{P_{\text{inst}}}{\rho g c}$  am Profilrand des Modells von  $H = 1,73205$  in zwei momentanen Positionen d.h.  $\omega t = \frac{3}{2}\pi$  und  $\frac{7}{4}\pi$ . Für die fünf Punkte des Profils  $\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$  und  $\frac{\pi}{2}$ , für die Frequenz 0,04 und für die Amplitude 0,4 sind die Drücke errechnet und in Bild 2.10. und 2.11. aufgetragen worden.

#### 2.6.5. Diskussion.

- 1) Da der Koeffizient  $\frac{K_{\text{quasi}}}{\rho \cdot g \cdot c \cdot B}$  im Vergleich mit dem Koeffizienten  $\frac{K_{\text{inst}}}{\rho \cdot g \cdot c \cdot B}$  sehr gering ist, kann er im asymptotischen Falle vernachlässigt werden. Wesentlich ist, daß das Vorzeichen des Koeffizienten  $\frac{K_{\text{quasi}}}{\rho \cdot g \cdot c \cdot B}$  immer minus ist. Das positive Vorzeichen in Bild 2.9. ist durch das Abbrechen nach einer begrenzten Zahl von Gliedern der trigonometrischen Reihe verursacht.
- 2) Durch die Druckverteilung an einigen Punkten der Körperoberfläche zu den Zeitpunkten  $\omega t = \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi$  (Bild 2.10. u. 2.11.) wird bewiesen, daß die in

#### 2.6.4. Hydrodynamische Druckverteilung.

Im linearen Fall wird der dimensionslose Druckkoeffizient in folgender Form dargestellt:

$$\left( \frac{P}{\rho g c} \right)_{\text{Rand}} = v \left[ \frac{B}{\pi} \ln (b r v) - \frac{B}{\pi} \ln (\sin \theta + a \cos \theta) + A_1 b \cdot \cos (2 \theta) \cdot (\sin \theta + a \cdot \cos \theta)^2 + A_2 b \cdot \cos (4 \theta) \cdot (\sin \theta + a \cdot \cos \theta)^4 + A_3 b \cdot \cos (6 \theta) \cdot (\sin \theta + a \cdot \cos \theta)^6 + A_4 b \cdot \cos (8 \theta) \cdot (\sin \theta + a \cdot \cos \theta)^8 \right] \cos (\omega t) + v \cdot B \cdot \sin (\omega t)$$

wobei C die Amplitude der Schwingung bezeichnet.

Im nichtlinearen Fall wird die rechte Seite abhängig von der Amplitude.

Man berechnet die Druckverteilungen  $\frac{P_{\text{inst}}}{\rho g c}$  am Profilrand des Modells von  $H = 1,73205$  in zwei momentanen Positionen d.h.  $\omega t = \frac{3}{2} \pi$  und  $\frac{7}{4} \pi$ . Für die fünf Punkte des Profils  $\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$  und  $\frac{\pi}{2}$ , für die Frequenz 0,04 und für die Amplitude 0,4 sind die Drücke errechnet und in Bild 2.10. und 2.11. aufgetragen worden.

#### 2.6.5. Diskussion.

- 1) Da der Koeffizient  $\frac{K_{\text{quasi}}}{\rho \cdot g \cdot c \cdot B}$  im Vergleich mit dem Koeffizienten  $\frac{K_{\text{inst}}}{\rho \cdot g \cdot c \cdot B}$  sehr gering ist, kann er im asymptotischen Falle vernachlässigt werden. Wesentlich ist, daß das Vorzeichen des Koeffizienten  $\frac{K_{\text{quasi}}}{\rho \cdot g \cdot c \cdot B}$  immer minus ist. Das positive Vorzeichen in Bild 2.9. ist durch das Abbrechen nach einer begrenzten Zahl von Gliedern der trigonometrischen Reihe verursacht.
- 2) Durch die Druckverteilung an einigen Punkten der Körperoberfläche zu den Zeitpunkten  $\omega t = \frac{3}{2} \pi, \frac{7}{4} \pi$  (Bild 2.10. u. 2.11.) wird bewiesen, daß die in den Bildern 2.4. bis 2.9. aufgetragenen Kraftkoeffi-

#### 2.6.4. Hydrodynamische Druckverteilung.

Im linearen Fall wird der dimensionslose Druckkoeffizient in folgender Form dargestellt:

$$\left( \frac{P}{\rho g c} \right)_{\text{Rand}} = v \left[ \frac{B}{\pi} \ln(b r v) - \frac{B}{\pi} \ln(\sin \theta + a \cos \theta) + A_1 b \cdot \cos(2\theta) \cdot (\sin \theta + a \cdot \cos \theta)^2 + A_2 b \cdot \cos(4\theta) \cdot (\sin \theta + a \cdot \cos \theta)^4 + A_3 b \cdot \cos(6\theta) \cdot (\sin \theta + a \cdot \cos \theta)^6 + A_4 \cdot b \cdot \cos(8\theta) \cdot (\sin \theta + a \cdot \cos \theta)^8 \right] \cos(\omega t) + v \cdot B \cdot \sin(\omega t)$$

wobei  $C$  die Amplitude der Schwingung bezeichnet.

Im nichtlinearen Fall wird die rechte Seite abhängig von der Amplitude.

Man berechnet die Druckverteilungen  $\frac{P_{\text{inst}}}{\rho g c}$  am Profilrand des Modells von  $H = 1,73205$  in zwei momentanen Positionen d.h.  $\omega t = \frac{3}{2}\pi$  und  $\frac{7}{4}\pi$ . Für die fünf Punkte des Profils  $\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$  und  $\frac{\pi}{2}$ , für die Frequenz 0,04 und für die Amplitude 0,4 sind die Drücke errechnet und in Bild 2.10. und 2.11. aufgetragen worden.

#### 2.6.5. Diskussion.

- 1) Da der Koeffizient  $\frac{K_{\text{quasi}}}{\rho \cdot g \cdot c \cdot B}$  im Vergleich mit dem Koeffizienten  $\frac{K_{\text{inst}}}{\rho \cdot g \cdot c \cdot B}$  sehr gering ist, kann er im asymptotischen Falle vernachlässigt werden. Wesentlich ist, daß das Vorzeichen des Koeffizienten  $\frac{K_{\text{quasi}}}{\rho \cdot g \cdot c \cdot B}$  immer minus ist. Das positive Vorzeichen in Bild 2.9. ist durch das Abbrechen nach einer begrenzten Zahl von Gliedern der trigonometrischen Reihe verursacht.
- 2) Durch die Druckverteilung an einigen Punkten der Körperoberfläche zu den Zeitpunkten  $\omega t = \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi$  (Bild 2.10. u. 2.11.) wird bewiesen, daß die in den Bildern 2.4. bis 2.9. aufgetragenen Kraftkoeffizienten richtig sind.

**Bild 2.3.**

**Koeffizient der hydrodynamischen Masse  $C$   
und Amplitudenverhältnis  $\bar{A}$**

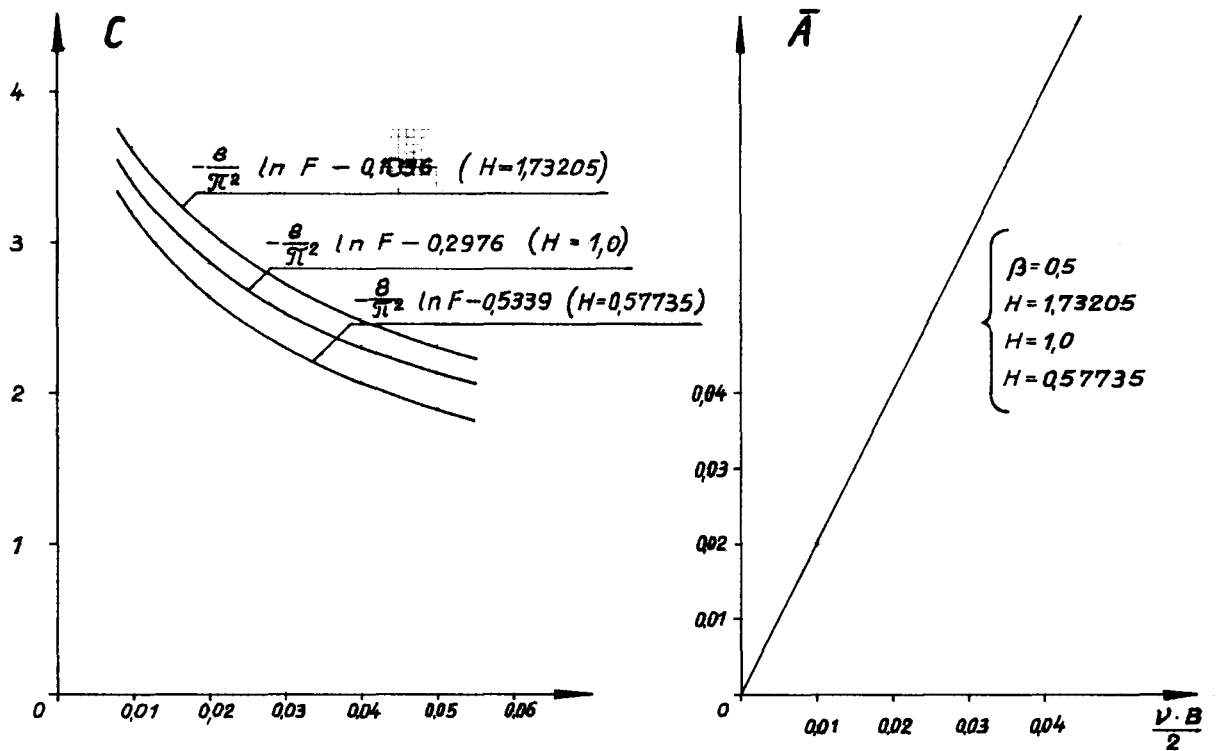


Bild 2.4.

Kraftkoeffizient  
im linearen Fall

$$\beta = 0,5$$

$$H = 1,73 \text{ 205}$$

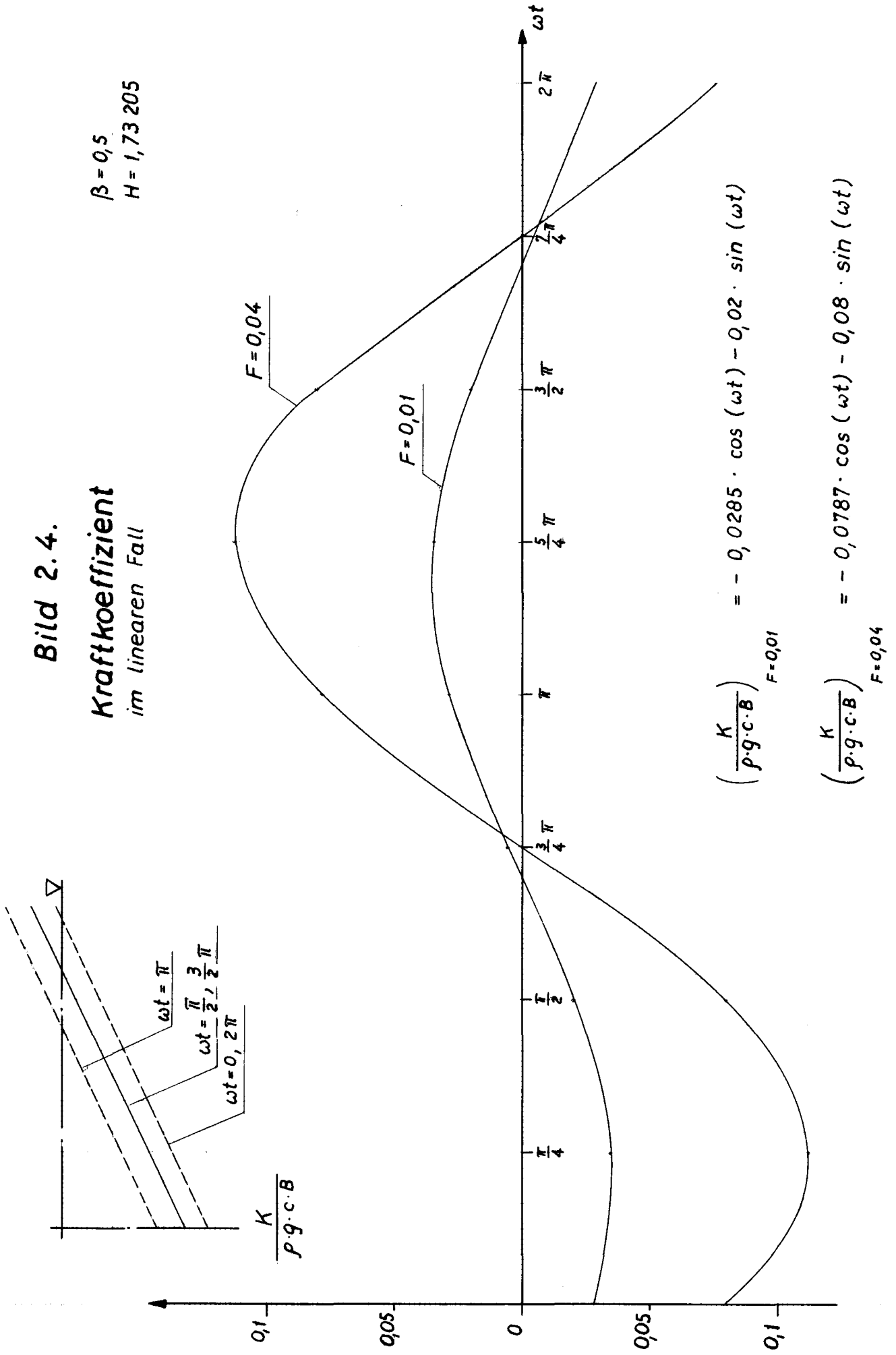


Bild 2.5.

# Kraftkoeffizient im linearen Fall

$$\beta = 0,5$$

$$H = 0,57735$$

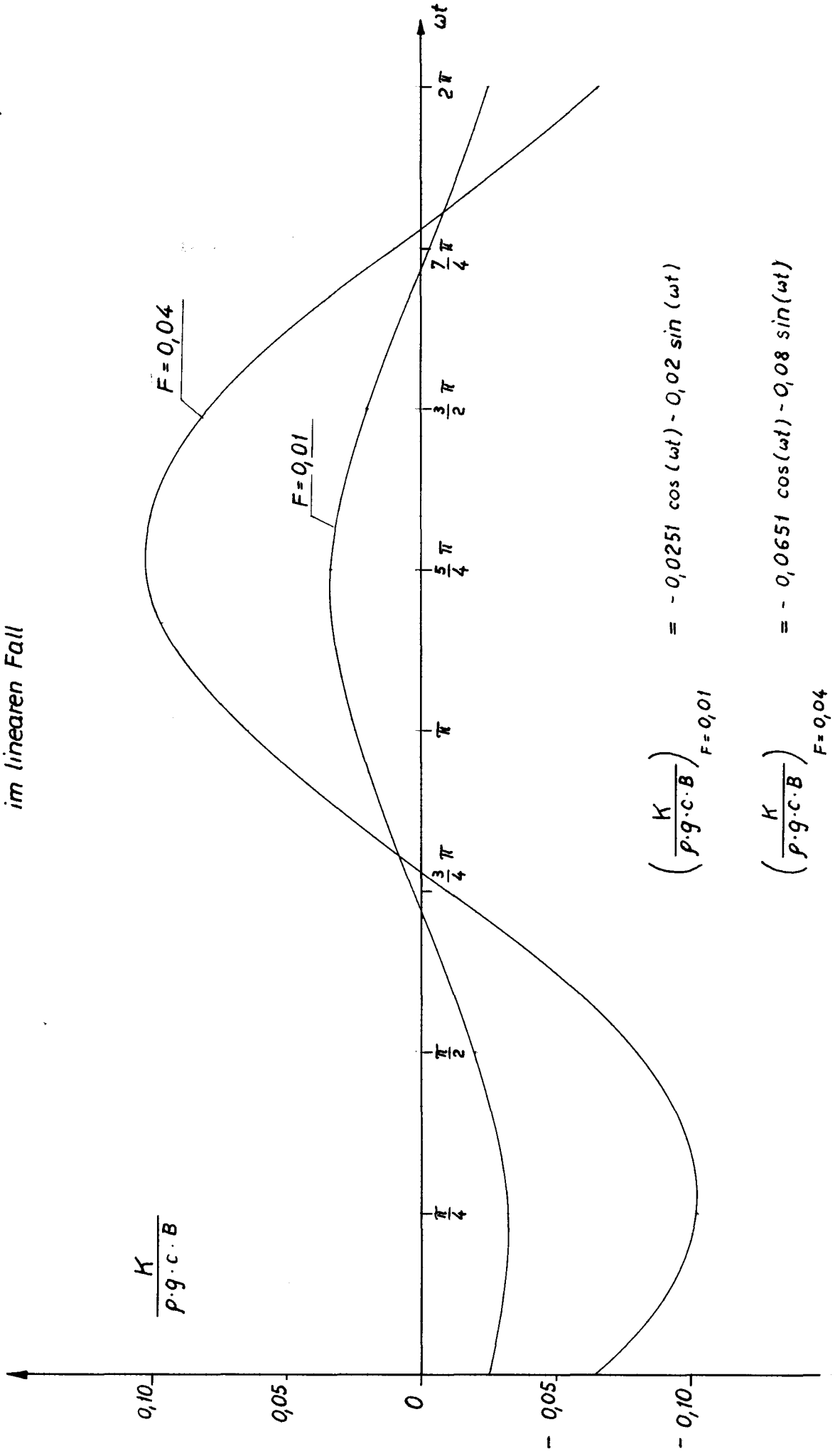
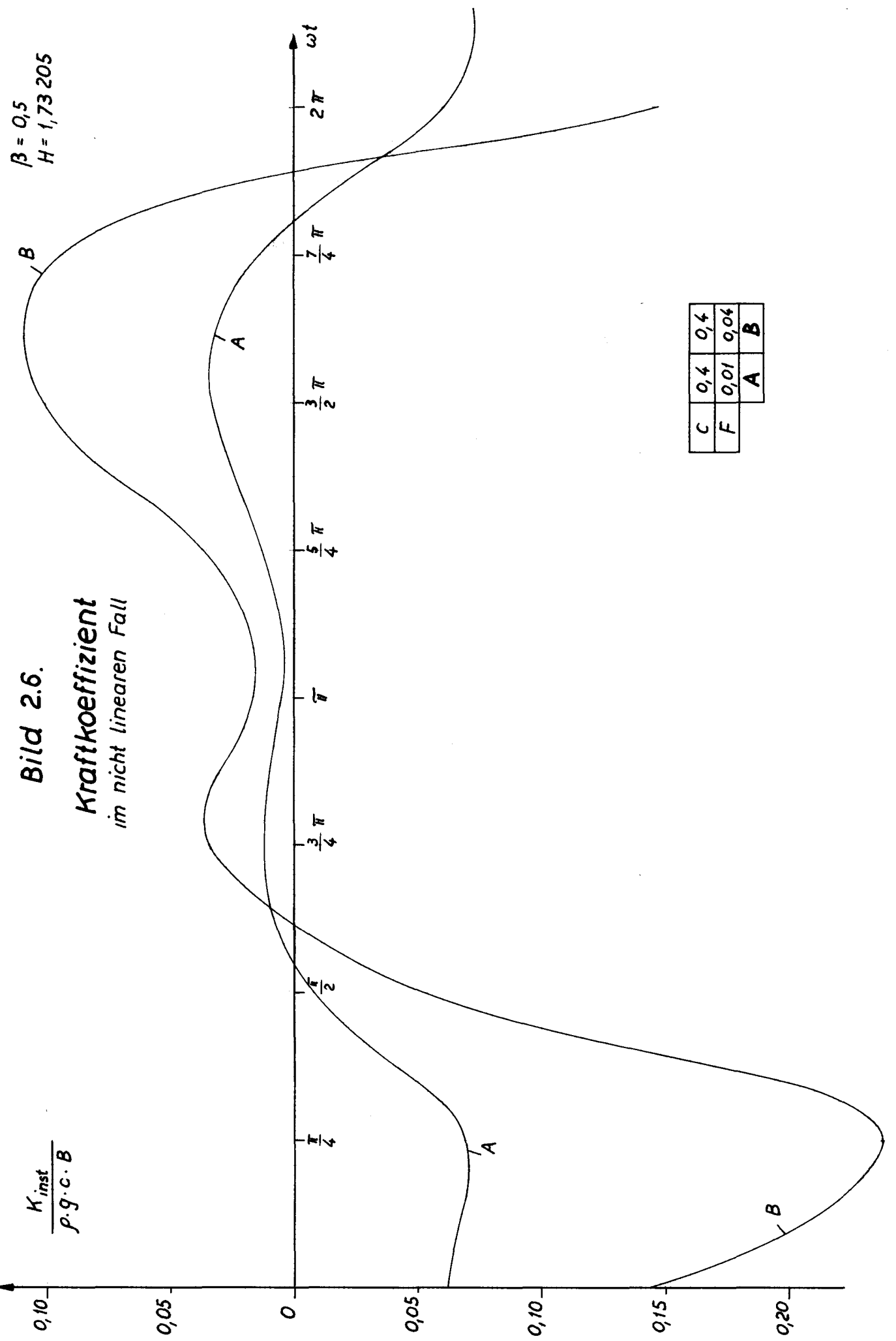




Bild 2.6.

Kraftkoeffizient  
im nicht linearen Fall

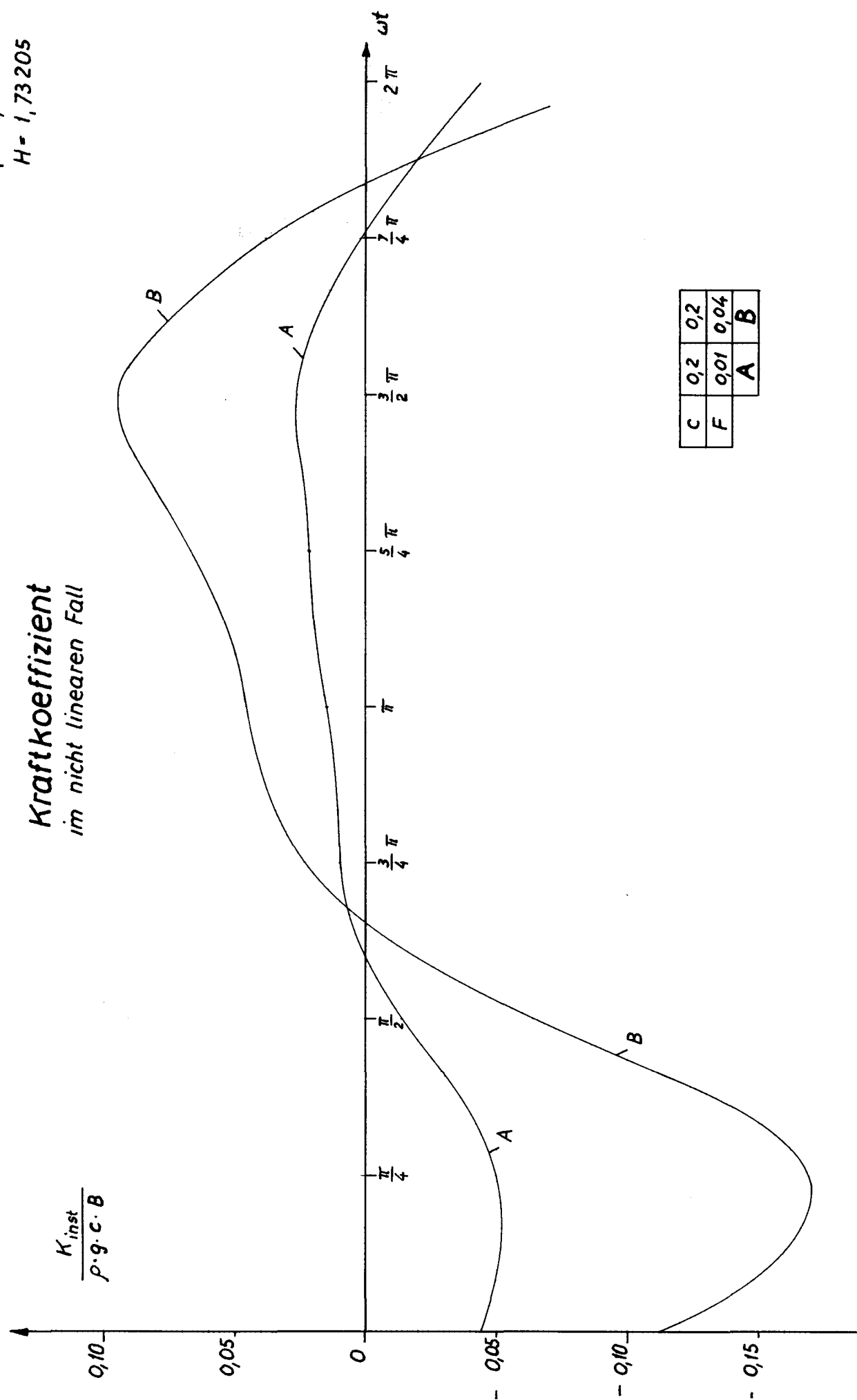


$\beta = 0,5$   
 $H = 1,73 \cdot 205$

|   |      |      |
|---|------|------|
| C | 0,4  | 0,4  |
| F | 0,01 | 0,04 |
|   | A    | B    |

**Bild 2.7.**  
**Kraftkoeffizient**  
 im nicht linearen Fall

$\beta = 0,5$   
 $H = 1,73205$



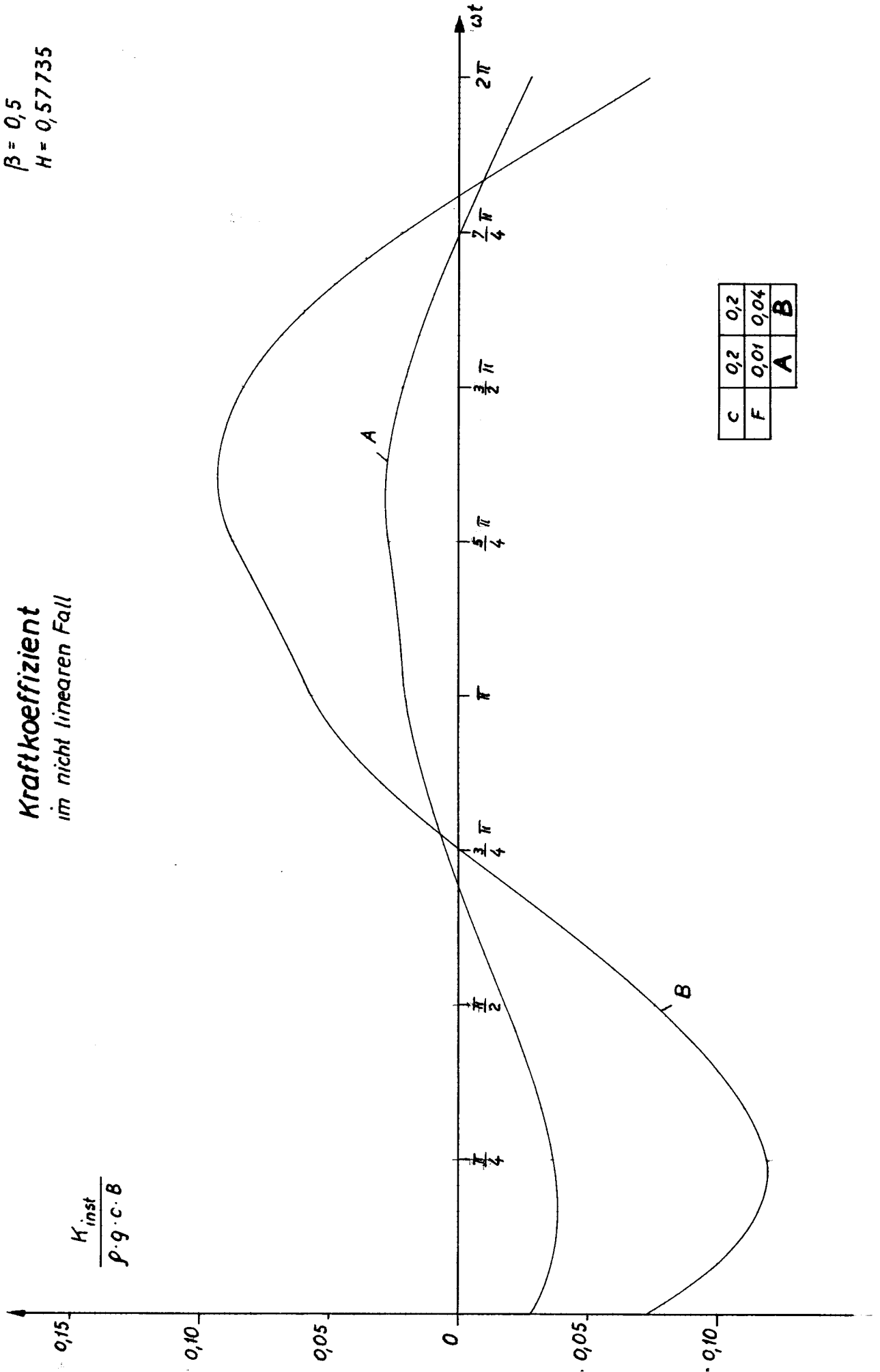
|   |      |      |
|---|------|------|
| C | 0,2  | 0,2  |
| F | 0,01 | 0,04 |
|   |      | A    |
|   |      | B    |

Bild 2.8.

Kraftkoeffizient  
im nicht linearen Fall

$$\beta = 0,5$$

$$H = 0,57735$$



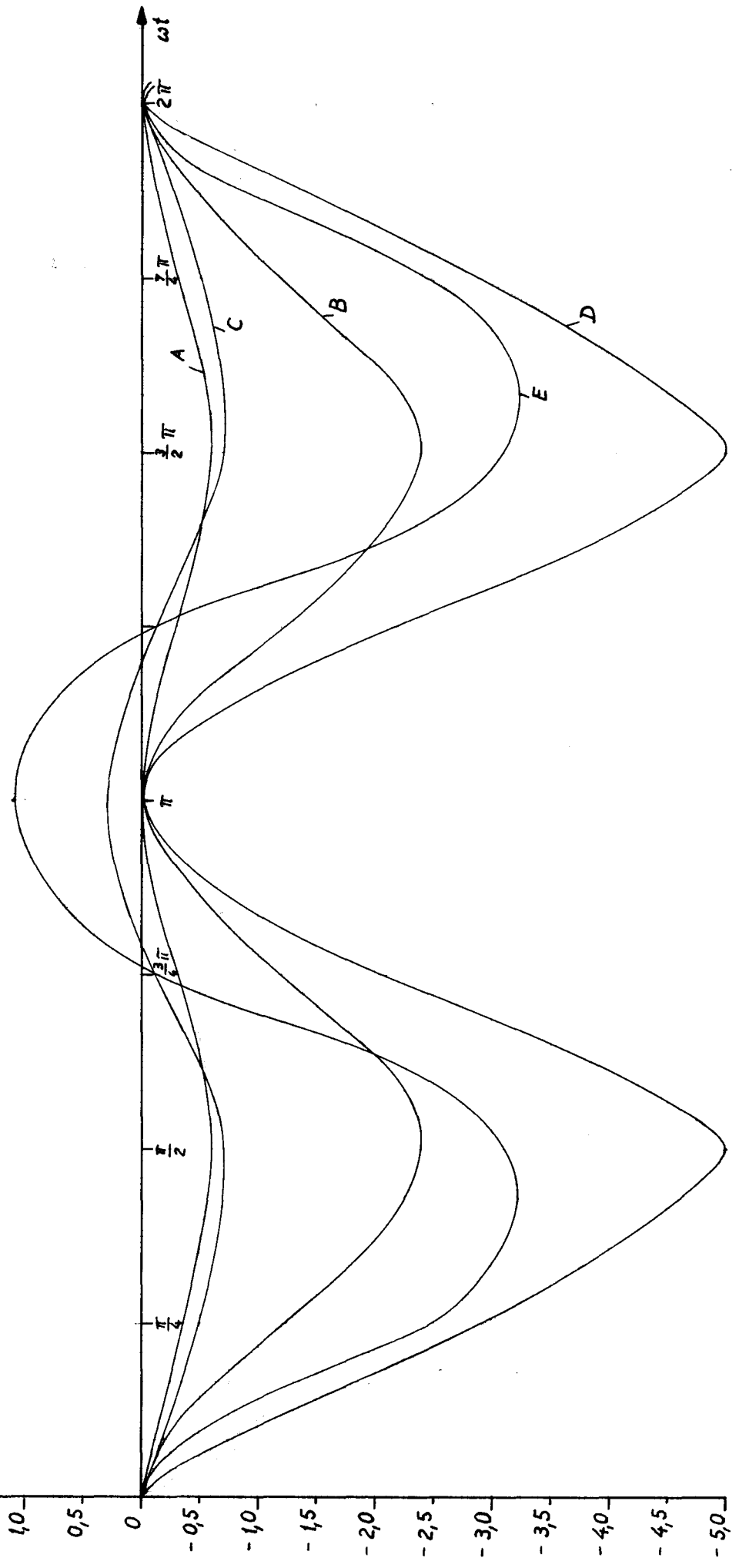
|   |      |      |
|---|------|------|
| c | 0,2  | 0,2  |
| F | 0,01 | 0,04 |
|   | A    | B    |

$\beta = 0,5$

**Bild 2.9.**  
**Kraftkoeffizient**  
 im nicht linearen Fall

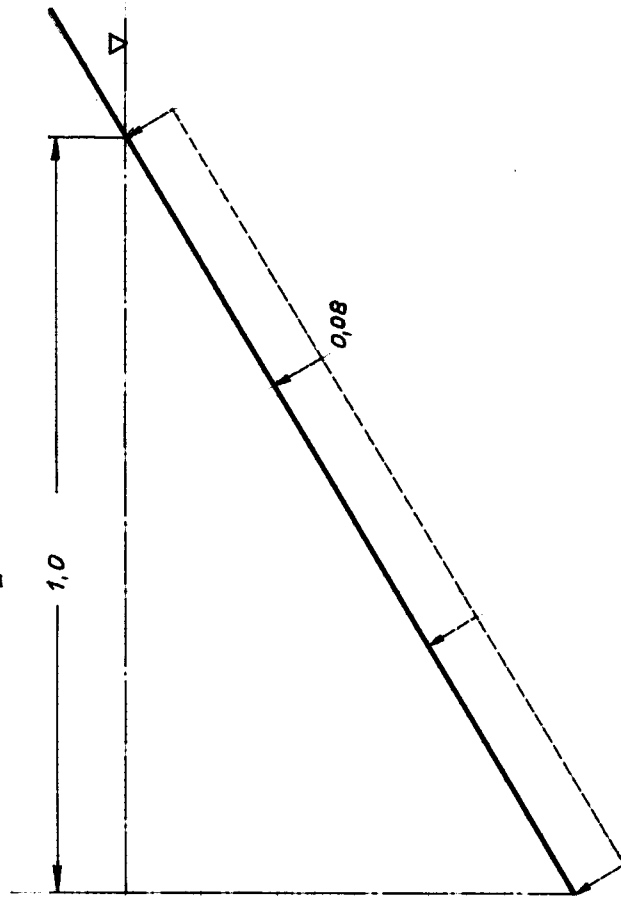
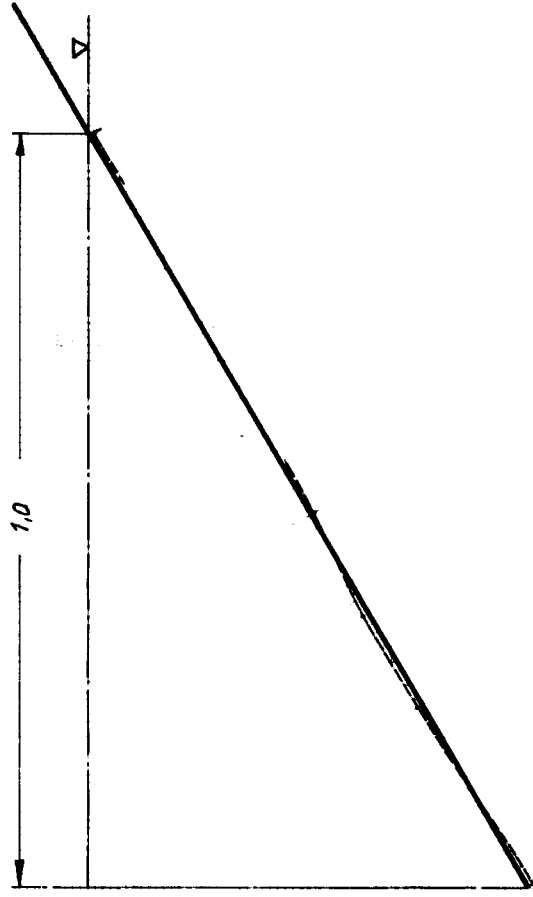
$$\frac{K_{quasi}}{\rho \cdot g \cdot c \cdot B}$$

|   |         |         |
|---|---------|---------|
| H | 0,57735 | 1,73205 |
| c | 0,2     | 0,4     |
| F | 0,01    | 0,04    |
|   | A       | B       |
|   | C       | D       |
|   | E       |         |



**Druckverteilung**  $\frac{P_{inst}}{p_{gc}}$

**H = 1,73205**

$$\omega t = \frac{3}{2}\pi$$

$$\omega t = \frac{7}{4}\pi$$


$$\frac{K_{\text{inst}}}{\rho \cdot g \cdot c \cdot B} = \frac{2}{B} \int_0^{B/2} \left( \frac{P_{\text{inst}}}{\rho \cdot g \cdot c} \right) dx = 0,08$$

Bild 2.11.

# Druckverteilung $\frac{P_{inst}}{\rho g c}$

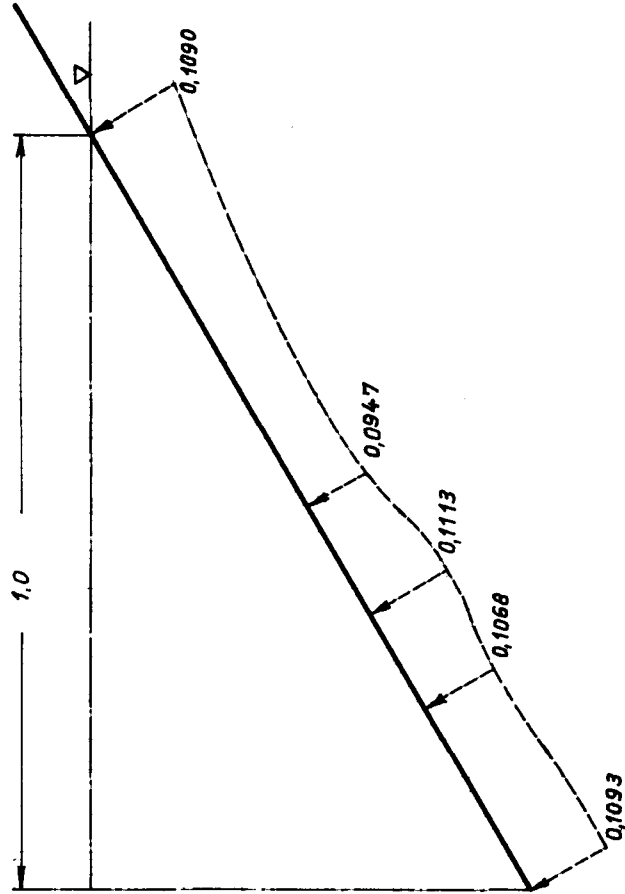
im nicht linearen Fall

$$H = 1,73205$$

$$c = 0,4$$

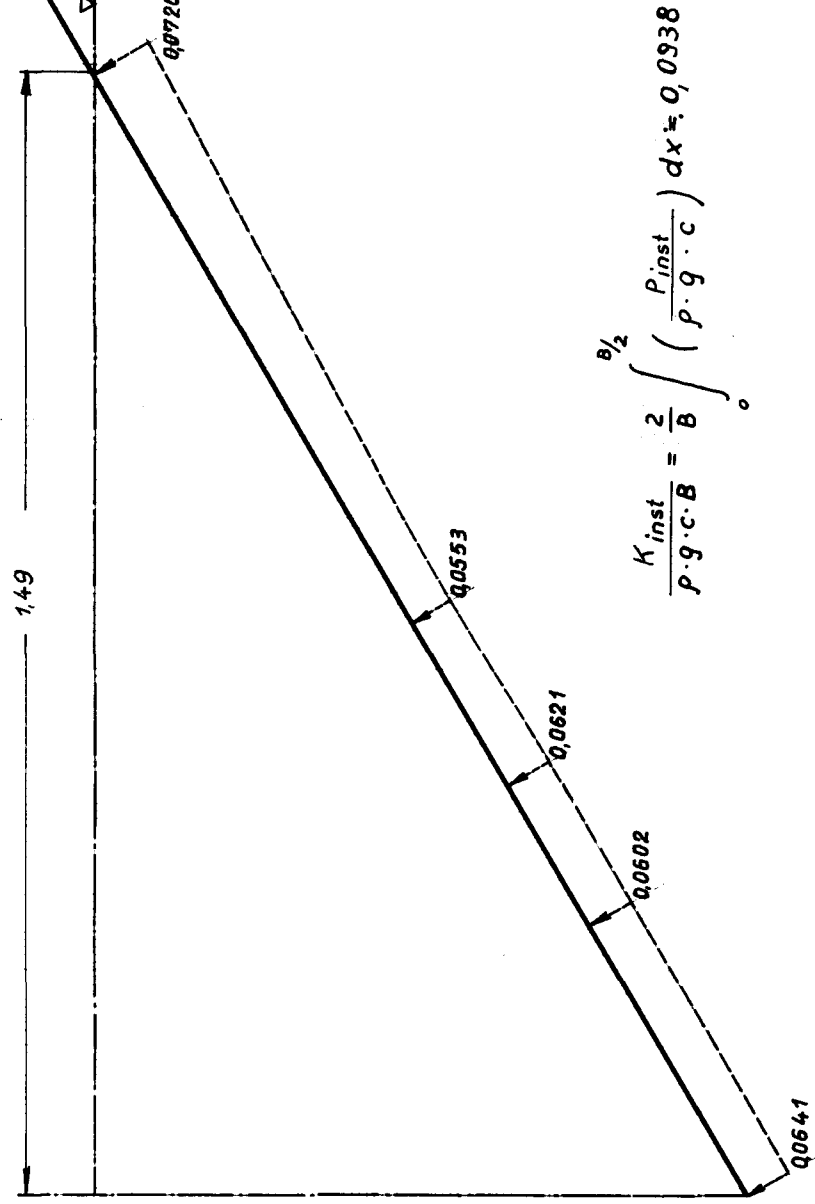
$$F = 0,04$$

$$\omega t = \frac{3}{2} \pi$$



$$\frac{K_{inst}}{\rho \cdot g \cdot c \cdot B} = \frac{2}{B} \int_0^{B/2} \left( \frac{P_{inst}}{\rho \cdot g \cdot c} \right) dx \approx 0,108$$

$$\omega t = \frac{7}{4} \pi$$



$$\frac{K_{inst}}{\rho \cdot g \cdot c \cdot B} = \frac{2}{B} \int_0^{B/2} \left( \frac{P_{inst}}{\rho \cdot g \cdot c} \right) dx \approx 0,0938$$



### 3. Annähernde numerische Lösung für die nicht lineare Tauchbewegung für kleine $\nu$ .

#### 3.1. Einleitung.

Eine der wichtigsten Voraussetzungen für die Lösung der linearen Tauchbewegung in glattem Wasser ist die linearisierte Randbedingung des tauchbewegenden Körpers, d.h. die Erfüllung der Randbedingung der Potentialströmung an der Oberfläche des Körpers in der Mittellage der Schwingung.

Wenn die Tauchbewegung nicht linear ist, bzw. die Amplitude groß ist, dann muß die Randbedingung der Strömung an der rein sinusförmig bewegten Oberfläche des Körpers, der nicht wie im linearen Fall in der Mittellage bleibt, erfüllt werden.

Dieses nicht lineare Problem soll mit einer Näherungsmethode untersucht werden.

Die theoretisch entwickelten Formeln sind auf ALGOL programmiert und von der TR4 im Rechenzentrum der Universität Hamburg berechnet worden. Das Programm ist im Anhang A angegeben. Als Beispiele sind die gleichen mathematischen Modelle wie in Kapitel 2 benutzt worden.

#### 3.2. Komplexes Potential.

Um die nichtlinearen Randbedingungen numerisch erfüllen zu können, kombiniert man die den höheren Ordnungen der Schwingung entsprechenden Potentiale mit dem Grimschen Potential. Da in dem komplexen Potential des asymptotischen Falles ( Kapitel 2 ) die Zeit  $t$  durch die Funktion  $F_n(t)$  in den Quellpotentialen höherer Ordnung enthalten ist und damit die nichtlinearen Randbedingungen gut erfüllt wurden, wurde nun auch für endliche Frequenzen eine analoge Zeitfunktion beibehalten. Vergleichsrechnungen, die auch mit harmonischen Zeitfunktionen ausgeführt wurden, konvergierten schlechter.

$$\begin{aligned} \Phi + i\Psi = U & \left\{ e^{i\omega t} \left[ A_{01} \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{e^{ik(x+iy)}}{k - \nu + i\mu} dk \right. \right. \\ & + \sum_{n=1}^{N-1} A_{n1} \left( \frac{f_n(t)}{(x+iy)^{2n}} - \frac{i\nu G_{n1}(t)}{(x+iy)^{2n-1}(2n-1)} \right) \Big] \\ & + e^{i2\omega t} \left[ A_{02} \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{e^{ik(x+iy)}}{k - 4\nu + i\mu} dk \right. \\ & + \sum_{n=1}^{N-1} A_{n2} \left( \frac{f_n(t)}{(x+iy)^{2n}} - \frac{i4\nu G_{n2}(t)}{(x+iy)^{2n-1}(2n-1)} \right) \Big] \\ & + e^{i3\omega t} \left[ A_{03} \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{e^{ik(x+iy)}}{k - 9\nu + i\mu} dk \right. \\ & + \sum_{n=1}^{N-1} A_{n3} \left( \frac{f_n(t)}{(x+iy)^{2n}} - \frac{i9\nu G_{n3}(t)}{(x+iy)^{2n-1}(2n-1)} \right) \Big] \Big\} \end{aligned}$$

wobei die Funktionen  $f_n(t)$  und  $G_{ns}(t)$   
wie folgt definiert werden:

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \left[ 1 + \frac{c}{b} \sin(\omega t) \right]^{2n+1} \\ G_{ns}(t) &= f_n(t) - \frac{2i}{s\omega} f'_n(t) - \frac{f''_n(t)}{s^2 \omega^2}, \quad s = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

und die Symbole folgendes bedeuten:

|                                  |                                          |
|----------------------------------|------------------------------------------|
| $A_{01}, A_{n1}, A_{02}, A_{n2}$ | Unbekannte                               |
| $U$                              | Amplitude der Schwingungsgeschwindigkeit |
| $c$                              | Amplitude der Tauchbewegung              |
| $b$                              | Tiefgang des Profils                     |
| $\omega$                         | Kreisfrequenz der Schwingung             |
| $\nu$                            | Wellenzahl                               |

Geschwindigkeitspotential  $\phi$  und Stromfunktion  $\psi$  werden in die folgenden Formen gebracht.

$$\begin{aligned} \phi = U \cdot \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{N-1} (A_{ns})_r \left[ \cos(s\omega t) (\phi_{ns})_r - \sin(s\omega t) \cdot (\phi_{ns})_i \right] \\ + (A_{ns})_i \left[ -\cos(s\omega t) (\phi_{ns})_i - \sin(s\omega t) \cdot (\phi_{ns})_r \right] \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \psi = U \cdot \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{N-1} (A_{ns})_r \left[ \cos(s\omega t) (\psi_{ns})_r - \sin(s\omega t) \cdot (\psi_{ns})_i \right] \\ + (A_{ns})_i \left[ -\cos(s\omega t) (\psi_{ns})_i - \sin(s\omega t) \cdot (\psi_{ns})_r \right] \end{aligned} \quad (2)$$

Die obigen Teilpotentiale und Teilstromfunktionen werden, analog wie in Kapitel 1, ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \phi_{ns} + i\psi_{ns} &= \phi_{os} + i\psi_{os} + \sum_{n=1}^{N-1} (\phi_{ns} + i\psi_{ns}) \\ &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{e^{ik(x+iy)}}{k - s^2\nu + i\mu} dk \\ &\quad + \sum_{n=1}^{N-1} \left[ \frac{f_n(t)}{(x+iy)^{2n}} - \frac{is^2\nu G_{ns}(t)}{(2n-1) \cdot (x+iy)^{2n-1}} \right] \end{aligned}$$

wobei das der Grundschwingung entsprechende Wellenquellpotential  $[\phi_{o1} + i\psi_{o1}]$  in Kapitel 1 ausführlich angegeben ist, und die den höheren Schwingungsordnungen entsprechenden Wellenpotentiale  $(\phi_{o2} + i\psi_{o2})$  und  $(\phi_{o3} + i\psi_{o3})$  analog wie  $(\phi_{o1} + i\psi_{o1})$  geschrieben werden können.

Die Buchstaben  $r$  und  $i$  bezeichnen je den realen und den imaginären Teil der Geschwindigkeitspotentiale und Stromfunktionen.

Das komplexe Potential  $(\phi + i\psi)$  erfüllt die Bedingung der Kontinuität und die linearisierte Randbedingung an der freien Wasseroberfläche.

$$\left( \phi_{tt} - g\phi_y \right) = 0 \quad \text{für } y = 0$$

Die Randbedingung der Potentialströmung lautet wie folgt:

$$\psi_{ist} = Ux \cos(\omega t) \quad (3)$$

Die  $6 \times N$  unbekannten Koeffizienten  $(A_{ns})_r$  und  $(A_{ns})_i$  werden durch die Erfüllung der Bedingung der Strömung d.h.

$$\psi = \psi_{ist} \quad (4)$$

bestimmt.

### 3.3. Hydrodynamische Kräfte.

Da die Koeffizienten bzw. das Geschwindigkeitspotential bestimmt worden sind, berechnet man nun die hydrodynamischen Drücke am Profilrand zu einem beliebigen Zeitpunkt. Dann erhält man die entsprechenden hydrodynamischen Kräfte durch die Integration der Drücke entlang des Profils.

Die gesamten hydrodynamischen Drücke sind, wie in Kapitel 2, errechnet worden. Der instationäre Druck wird einfach in folgender Form dargestellt:

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = \rho \omega U \sum_{s=1}^3 \sum_{n=1}^{N-1} s \left\{ (A_{ns})_r \left[ -\sin(s\omega t)(\phi_{ns})_r - \cos(s\omega t)(\phi_{ns})_i \right] + (A_{ns})_i \left[ \sin(s\omega t)(\phi_{ns})_i - \cos(s\omega t)(\phi_{ns})_r \right] \right\}$$

Aber für den quasistationären Druck

$-\frac{1}{2} \rho (\nabla \phi)^2$  müssen zuerst die Komponenten der Geschwindigkeit errechnet werden:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = U \operatorname{Re} \left\{ \sum_{s=1}^3 \sum_{n=1}^{N-1} \left( e^{i s \omega t} \cdot A_{ns} \cdot \frac{\partial \phi_{ns}}{\partial x} \right) \right\}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = U \operatorname{Re} \left\{ \sum_{s=1}^3 \sum_{n=1}^{N-1} \left( e^{i s \omega t} \cdot A_{ns} \cdot \frac{\partial \phi_{ns}}{\partial y} \right) \right\}$$

wobei man die Komponenten  $\frac{\partial \phi_{ns}}{\partial x}$  und  $\frac{\partial \phi_{ns}}{\partial y}$  in folgender Weise erhält:

$$\text{Da } \phi_{os} = \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ky} \cos kx}{k - s^2 v + i\mu} dk$$

$$\psi_{os} = \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ky} \sin kx}{k - s^2 v + i\mu} dk$$

$$\phi_{ns} + i \psi_{ns} = \frac{e^{-i 2 \cdot n \varphi \cdot f_n(t)}}{r^{2n}} - \frac{i s^2 v e^{-i(2n-1)\varphi} \cdot G_{ns}(t)}{(2n-1) r^{2n-1}}$$

ergibt sich durch Differentiation:

$$\frac{\partial \phi_{os}}{\partial x} = - \frac{x}{x^2 + y^2} - s^2 v \psi_{os}$$

$$\frac{\partial \phi_{os}}{\partial y} = - \frac{y}{x^2 + y^2} - s^2 v \phi_{os}$$

$$\frac{\partial \phi_{ns}}{\partial x} = - \frac{2n \cdot \cos[(2n+1)\varphi] \cdot f_n(t)}{r^{2n+1}} + \frac{s^2 v \cdot \sin(2n\varphi) \cdot G_{ns}(t)}{r^{2n}}$$

$$\text{und } \frac{\partial \phi_{ns}}{\partial y} = - \frac{2n \cdot \sin[(2n+1)\varphi] \cdot f_n(t)}{r^{2n+1}} - \frac{s^2 v \cdot \cos(2n\varphi) \cdot G_{ns}(t)}{r^{2n}}$$

Die hydrodynamische Kraft K lautet wie folgt:

$$K = 2\rho \int_0^{B/2} \frac{\partial \phi}{\partial t} dx - \rho \int_0^{B/2} (\nabla \phi)^2 dx$$

wobei  $B/2$  die Halbbreite des Körpers zu beliebigem Zeitpunkt an der x-Achse bezeichnet.



### 3.4. Numerische Lösung.

#### 3.4.1. Darstellung des Profils.

Weil für die Randbedingung  $\psi_{ist} = Ux \cos \omega t$  vorausgesetzt ist, muß das Profil in der folgenden Form dargestellt werden:

$$r_P = \frac{b + c \cdot \sin(\omega t)}{\sin \theta + a \cdot \cos \theta} \quad (5)$$

wobei  $b$  Tiefgang des Profils in der Mittellage,  $c$  Amplitude und  $a$  Verhältnis von Tiefgang und Halbbreite in der Mittellage bezeichnet.

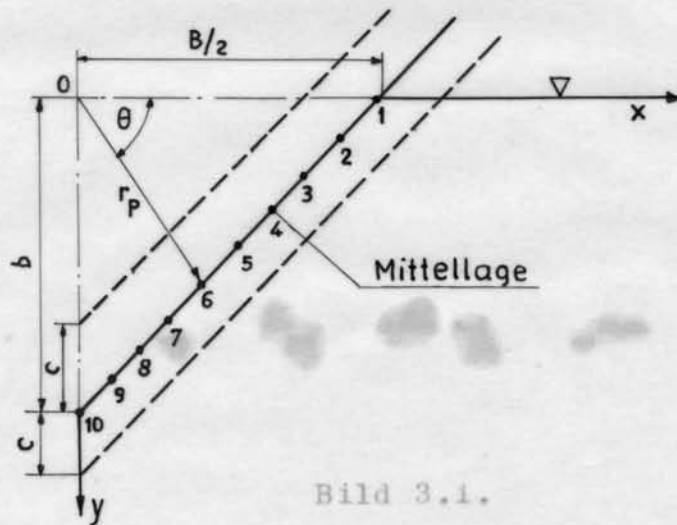


Bild 3.1.

#### 3.4.2. Bestimmung der unbekannten Koeffizienten.

Hier wird die Beziehung (4) ausführlich wiederholt:

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ (A_{ns})_r \left[ \cos(s\omega t) \cdot (\psi_{ns})_r - \sin(s\omega t) \cdot (\psi_{ns})_i \right] \right. \\ & \quad \left. + (A_{ns})_i \left[ -\cos(s\omega t) \cdot (\psi_{ns})_i - \sin(s\omega t) \cdot (\psi_{ns})_r \right] \right\} \\ & = x \cdot \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (4)$$

Um die  $6 \times N$  Unbekannten  $(A_{ns})_r$  und  $(A_{ns})_l$  zu bestimmen, muß man  $6 \times N$  lineare Gleichungen, deren Determinante nicht verschwinden darf, bauen.

Für diesen Zweck wählt man zuerst 6 Positionen der Schwingung, die den Zeitpunkten  $\omega t = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}$  und  $\frac{3\pi}{2}$  entsprechen. Dann teilt man die benetzte Länge des Profils in jeder Position durch die Radien, die von der gleichen Teilung des Winkels  $\frac{\pi}{2}$  durch neun erhalten werden. Somit werden zehn Punkte am Profilrand bestimmt (siehe Bild 3.1.). Die Koordinaten der fünf Punkte 1, 3, 5, 7, 9 des Profils von jeder Position werden in die Beziehung (4) eingesetzt und damit kann man 30 lineare Gleichungen, deren Determinante nicht zu klein werden wird, bauen.

Damit erhält man das Geschwindigkeitspotential, das nun an den Punkten 1, 3, 5, 7 und 9 in jeder der sechs Positionen  $\omega t = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}$  und  $\frac{3\pi}{2}$  die Randbedingung (4) genau erfüllt (siehe Bild 3.2.)

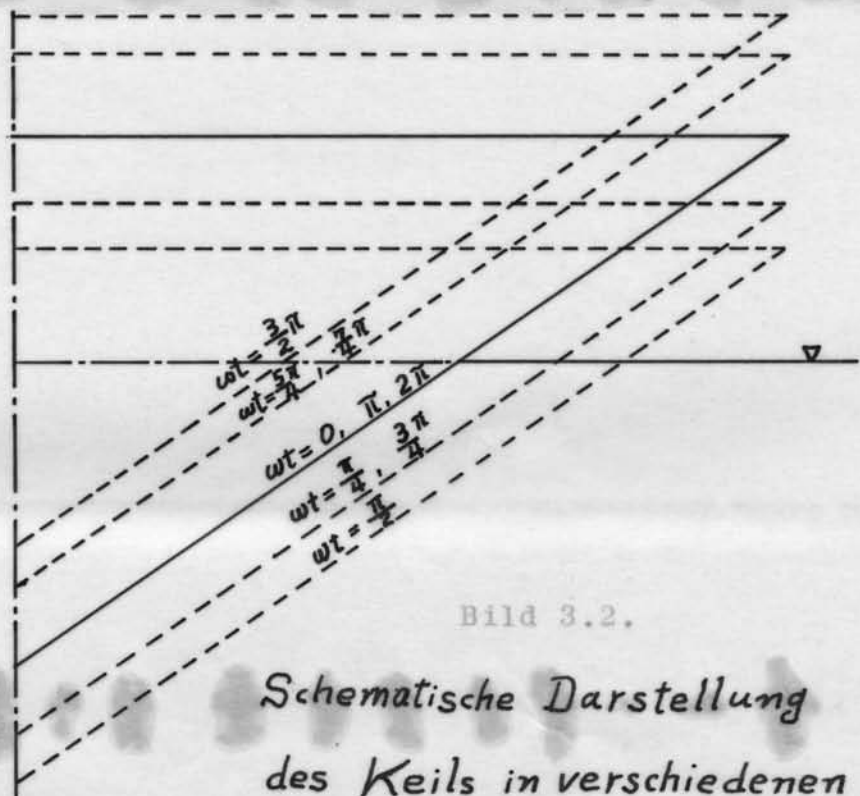


Bild 3.2.

Schematische Darstellung  
des Keils in verschiedenen  
Positionen



### 3.4.3: Hydrodynamische Kräfte.

Von dem oben erhaltenen Geschwindigkeitspotential kann man einfach die hydrodynamischen Drücke an den Punkten 1, 2, 3, ....., 10 für jede Position berechnen.

Die Verteilung der hydrodynamischen Kräfte im Gebiet einer Periode der Schwingung sind harmonisch analysiert, d.h.

$$\begin{aligned} \frac{K}{\rho \cdot g \cdot c \cdot B} = & \alpha_0 + \alpha_1 \cos(\omega t) + \alpha_2 \sin(\omega t) \\ & + \alpha_3 \cos(2\omega t) + \alpha_4 \sin(2\omega t) \\ & + \alpha_5 \cos(3\omega t) + \alpha_6 \sin(3\omega t) \end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten  $\alpha$  in folgenden Formen dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{4} (F_2 + F_3 + F_5 + F_7) \\ \alpha_1 &= \frac{1}{4} (F_1 - F_2) + \frac{1}{5 \cdot 656} (F_2 - F_3 - F_5 + F_7) \\ \alpha_2 &= \frac{1}{4} (-F_1 + F_2 + F_3 - F_4 + F_5 - 2F_6 + F_7) \\ &+ \frac{1}{5 \cdot 656} (F_2 + F_3 - F_5 - F_7) \\ \alpha_3 &= \frac{1}{4} \cdot (2F_1 - F_2 - F_3 + 2F_4 - F_5 - F_7) \\ \alpha_4 &= \frac{1}{4} \cdot (F_2 - F_3 + F_5 - F_7) \\ \alpha_5 &= \frac{1}{4} (F_1 - F_4) + \frac{1}{5 \cdot 656} (-F_2 + F_3 + F_5 - F_7) \\ \alpha_6 &= \frac{1}{4} (F_1 - F_2 - F_3 + F_4 - F_5 + 2F_6 - F_7) \\ &+ \frac{1}{5 \cdot 656} (F_2 + F_3 - F_5 - F_7) \end{aligned}$$

wobei  $F_1, F_2, \dots, F_7$  je den Kraftkoeffizienten  $\left(\frac{K}{\rho \cdot g \cdot c \cdot B}\right)$  einer jeden Position bezeichnen.

#### 3.4.4. Fehlerkontrolle.

##### a) Fehler in der Randbedingung am Körper.

Da durch den Ansatz (4) die Randbedingung nur in den Punkten 1, 3, 5, 7 und 9 zu den vorgegebenen Zeitpunkten exakt erfüllt wird, gibt die Abweichung der Stromfunktion von dem vorgeschriebenen Wert an den Punkten 2, 4, 6, 8 und 10 eine Kontrolle. Diese Fehler in der Erfüllung der Randbedingung werden in jedem Fall berechnet.

Nach dem Studium dieses Fehlers für verschiedene Unterteilungen wurde die in Absatz 3.4.2. erklärte Unterteilung als die relativ beste ausgewählt.

##### b) Gesamtdruck und "Taucht aus".

Da im nicht linearen Fall die Wasseroberfläche die Profilkontur nicht in dem Punkt 1 trifft, wurde, um ein Urteil hierüber zu bekommen, auch der Gesamtdruck an den Punkten 1 bis 10 berechnet:

Gesamtdruck = hydrodynamischer Druck + hydrostatischer Druck.

Da, wo dieser Gesamtdruck gleich dem atmosphärischen Druck ist, ist der Schnittpunkt zwischen der Profilkontur und der Wasseroberfläche. Die Integration des Druckes über  $dx$  zur Bestimmung der hydrodynamischen Kraft wurde nur bis zu diesem Punkt geführt.

Wenn der Gesamtdruck an allen Punkten 1 bis 10 kleiner als der atmosphärische Druck blieb, wurde im Rechenprogramm der Schreibbefehl "Taucht aus" gegeben und die weitere Rechnung für diesen Fall abgebrochen.

### 3.5. Darstellung der Ergebnisse.

#### 3.5.1. $\left( A_{os} \right) \frac{\pi}{B}$

Die Quellenstärken der Wellenquellpotentiale  $A_{os}$  sind in dimensionsloser Form  $\left( A_{os} \right) \frac{\pi}{B}$  in Bild 3.3.-3.6. bezeichnet. Die Stärken sind abhängig von der Frequenz und Amplitude der Schwingung und der Form des Profils.

Im nicht linearen Fall führt die benutzte Methode für den asymptotischen Fall ( $\omega \rightarrow 0$ ) zu den gleichen Ergebnissen wie die in Kapitel 2 behandelte Methode, nämlich

$$A_{03} = 0$$

$$A_{01} \frac{\pi}{B} = 1$$

$$A_{02} \frac{\pi}{B} = -1 \cdot \frac{C}{\alpha B}$$

Für die Amplitude  $\frac{C}{B} = 0,3$  beginnen die Ergebnisse bei der Frequenz  $F = 0,6$  unsicher zu werden. Weitere numerische Rechnungen wären nötig, um diese Unsicherheit aufzuklären.

#### 3.5.2. C und $\bar{A}$ .

Koeffizient C der hydrodynamischen Masse und Amplitudenverhältnis  $\bar{A}$  sind für den linearen Fall für den Frequenzbereich  $F = 0$  bis 1,4 berechnet. Diese Werte unterscheiden sich nur wenig von den in [4] für Lewis-Profile berechneten Werten (siehe Bild 3.7. und 3.8.).

3.5.3.  $\frac{K_{\text{inst}}}{\rho \cdot g \cdot c \cdot B}$

Der dimensionslose Kraftkoeffizient  $\frac{K_{\text{inst}}}{\rho \cdot g \cdot c \cdot B}$  ist für das Modell  $H = 1,73 \ 205$ , die Frequenzen  $F = 0,04$  und  $F = 0,4$  und für die Amplituden  $\frac{2c}{B} = 0$ ,  $0,115$ ,  $0,2$  und  $0,288$  in Bild 3.9. und 3.10. aufgetragen. In Bild 3.9. ist auch ein Ergebnis für dasselbe Modell nach der asymptotischen Lösung zum Vergleich aufgetragen.

Die Differenzen zwischen den beiden Lösungen können dadurch verursacht sein, daß die asymptotische Lösung für die endliche Frequenz  $F = 0,04$  nicht mehr ausreichend genau ist.

Bild 3.3

Quellstärken abhängig von der Frequenz  
im linearen Fall

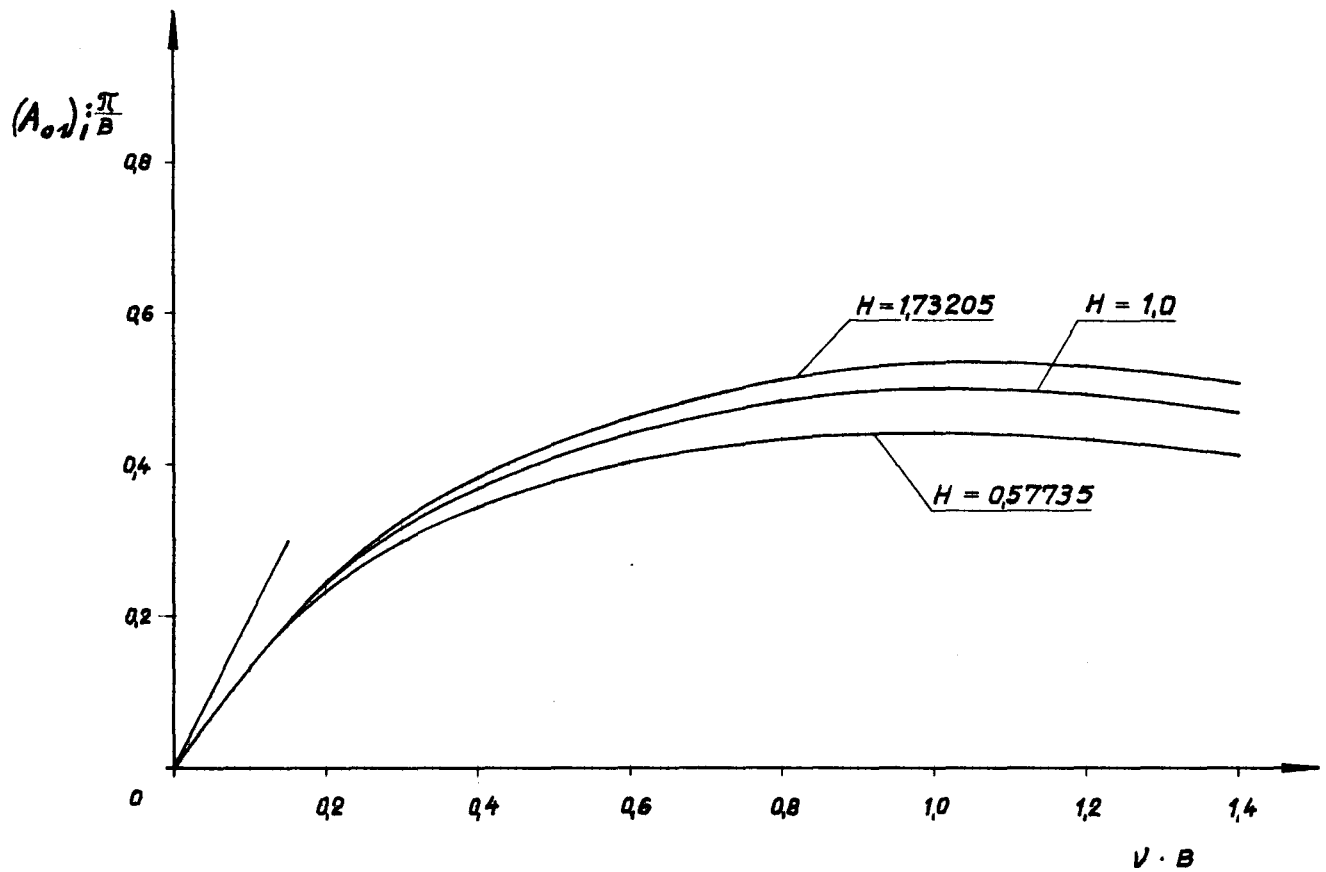
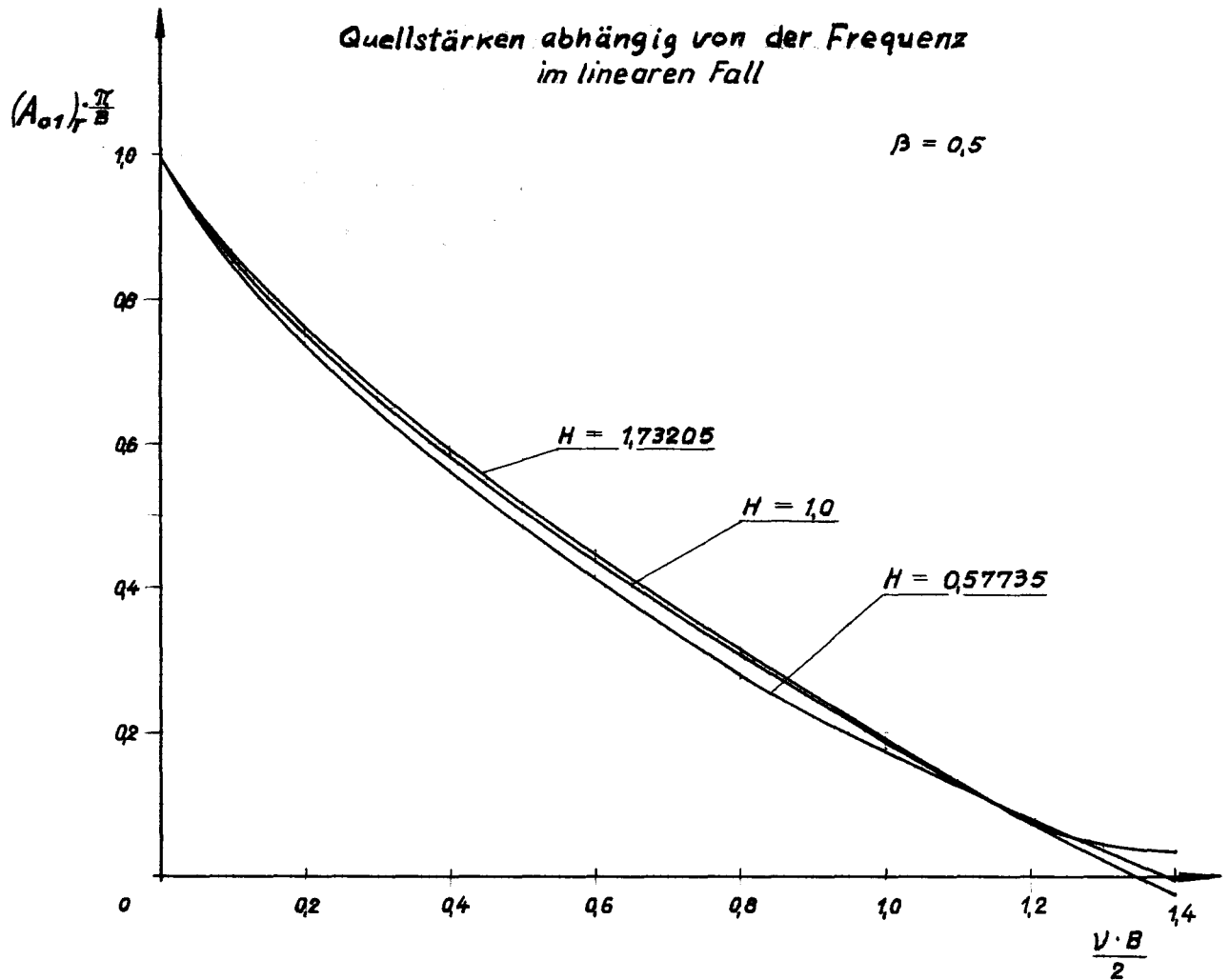


Bild 3.4

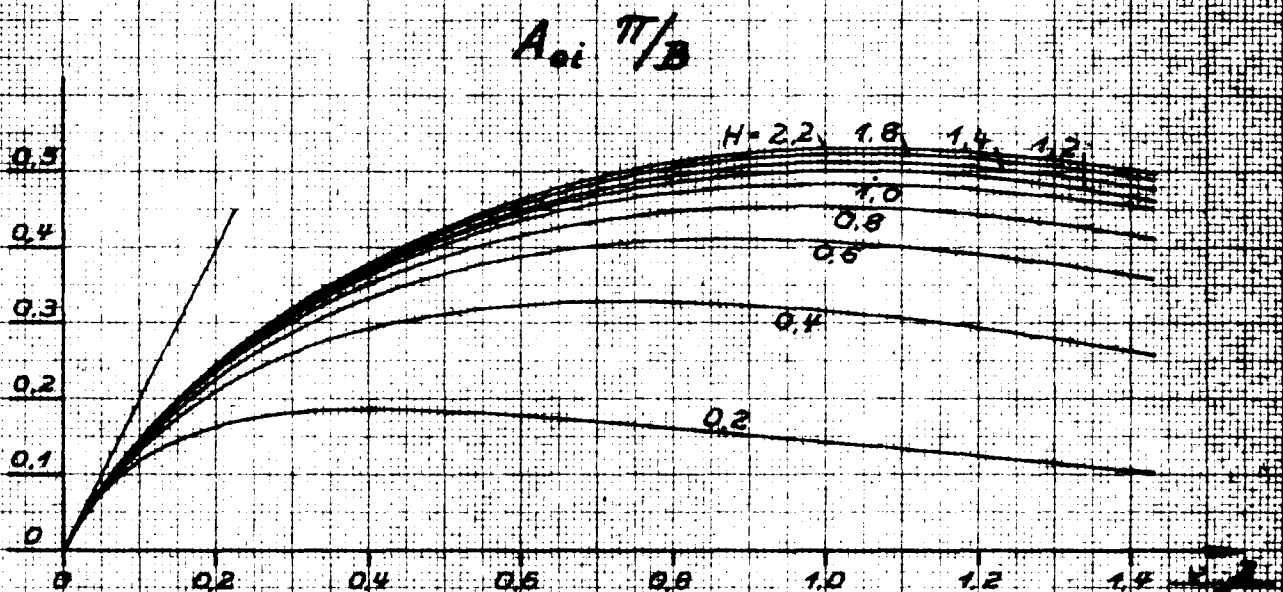
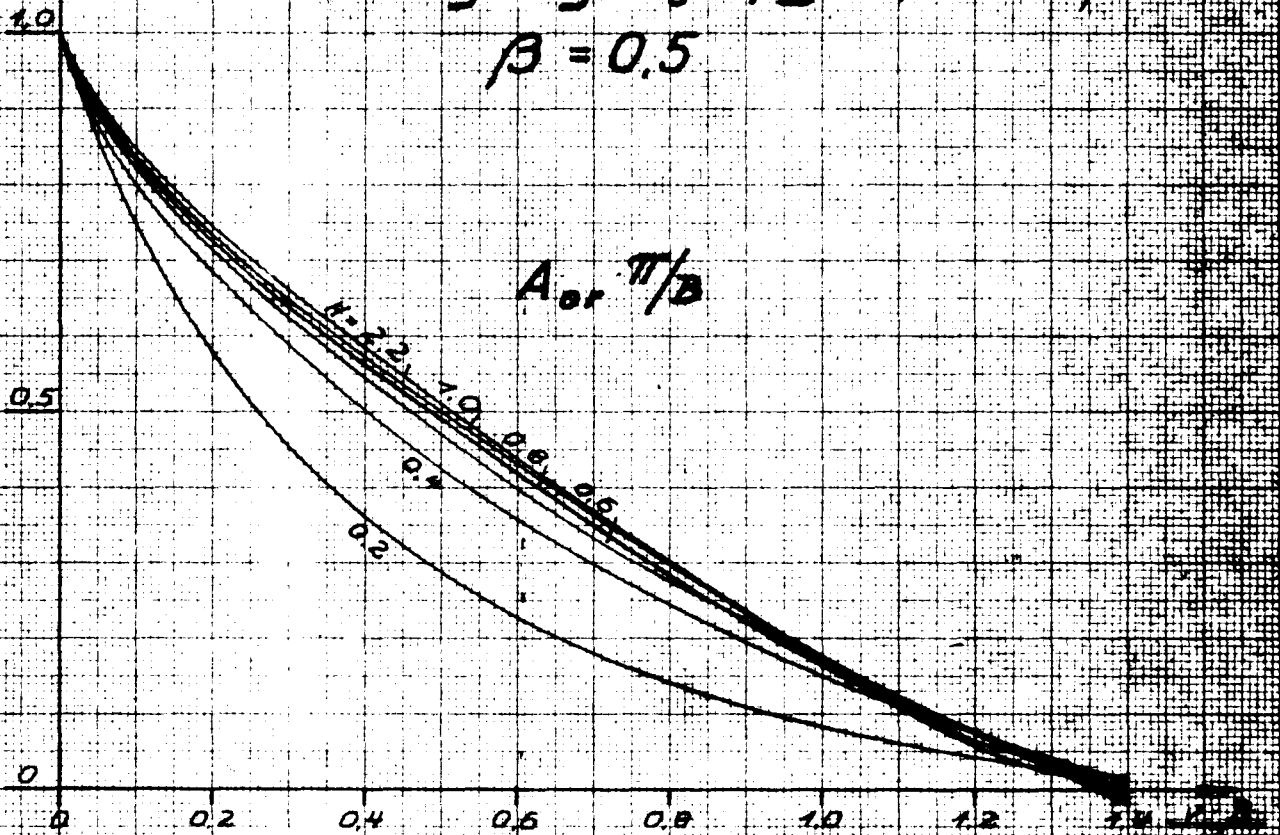
Hearing motion

Singularity distribution  $A_0 \pi/B$

Tauchbewegung

Belegung  $A_0 \pi/B$  (von Grim, 1960)

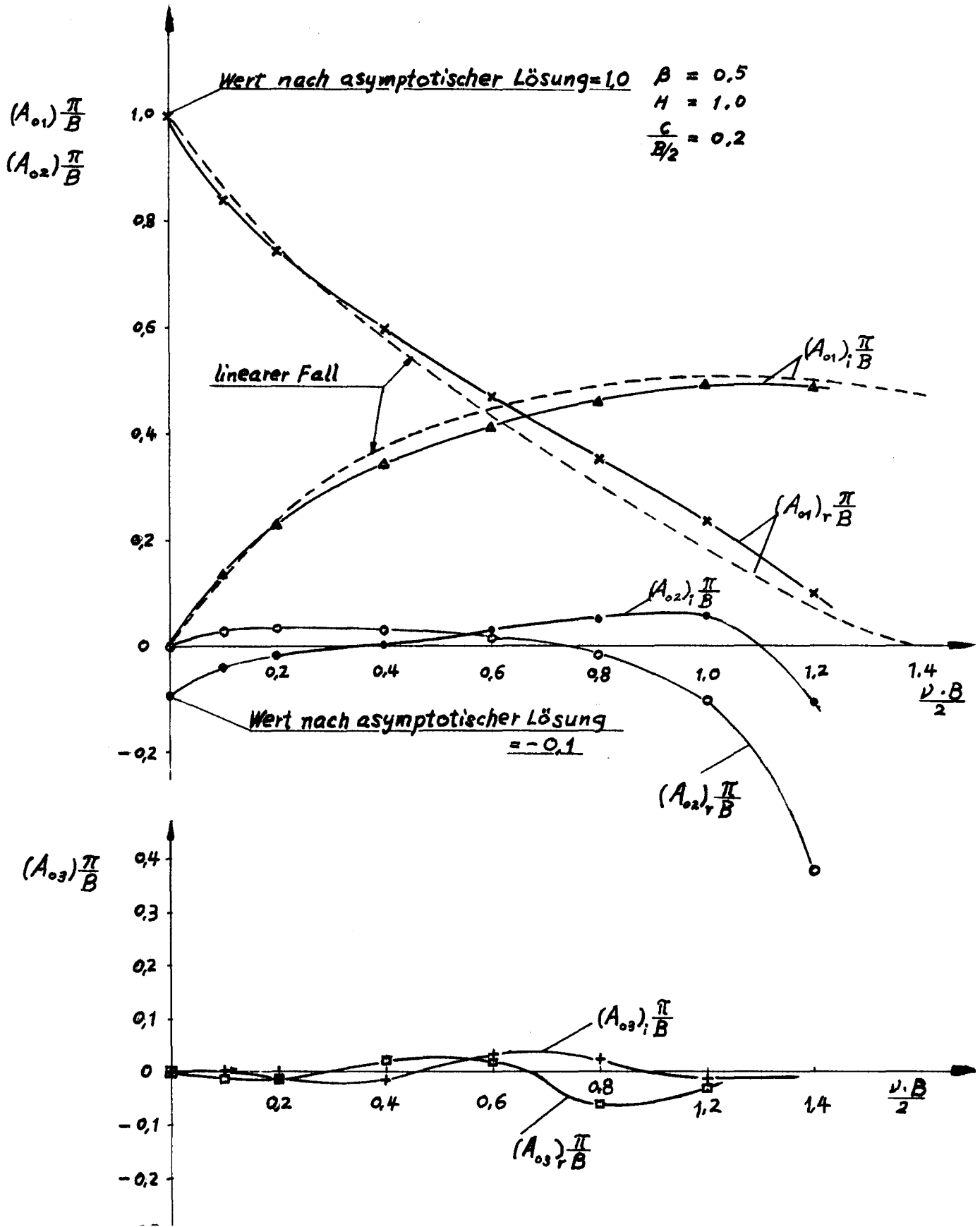
$\beta = 0.5$



# Bild 3.5

Quellstärken abhängig von

Frequenz und Amplitude :  $(A_{03}) \frac{\pi}{B}$





# Bild 3.6

Quellstärken abhängig von

Frequenz und Amplitude:  $(A_{0s}) \frac{\pi}{B}$

$(A_{01}) \frac{\pi}{B}$

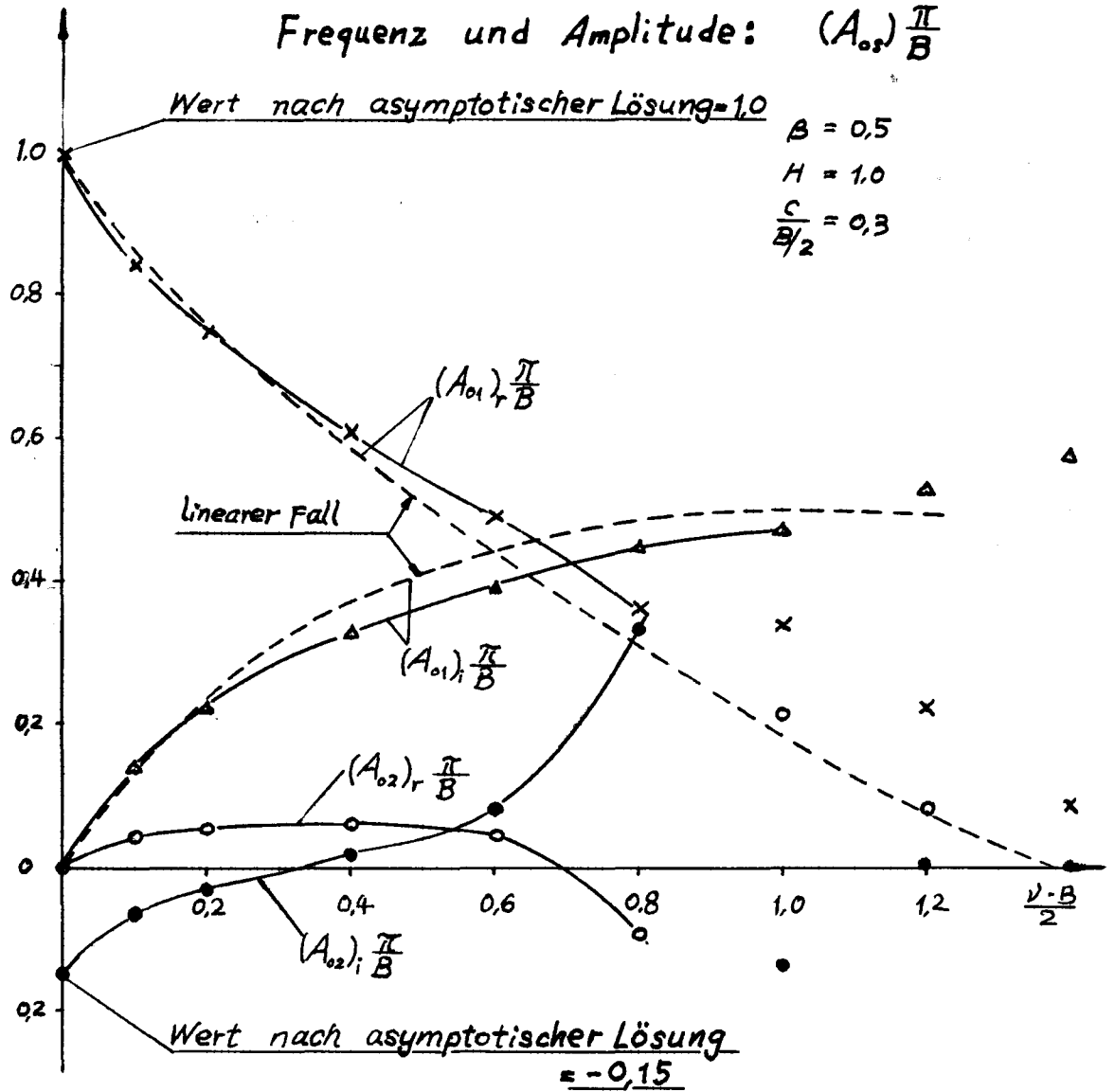
$(A_{02}) \frac{\pi}{B}$

Wert nach asymptotischer Lösung = 1,0

$\beta = 0,5$

$H = 1,0$

$\frac{c}{B/2} = 0,3$



$(A_{03}) \frac{\pi}{B}$

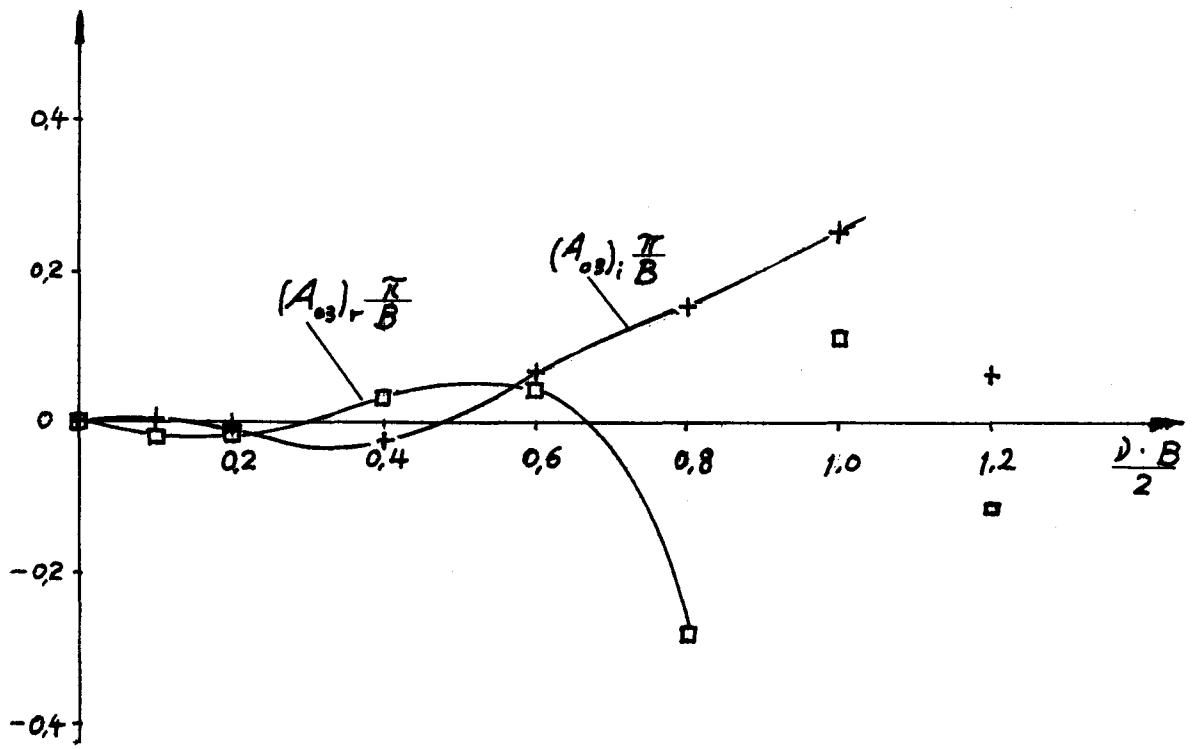
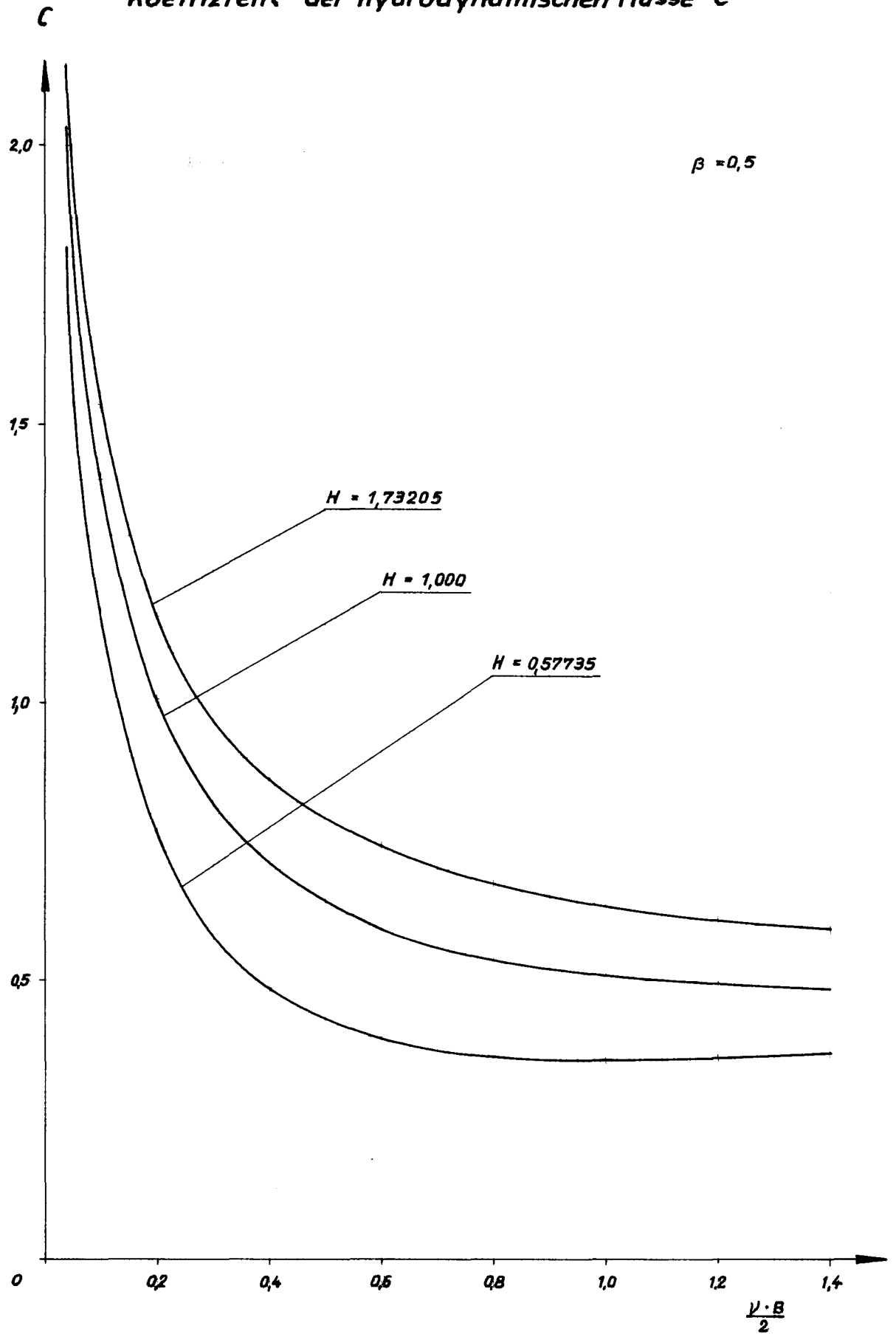


Bild 3.7

Koeffizient der hydrodynamischen Masse  $C$



**Bild 3.8**

**Amplitudenverhältnis  $\bar{A}$**

$\beta = 0,5$

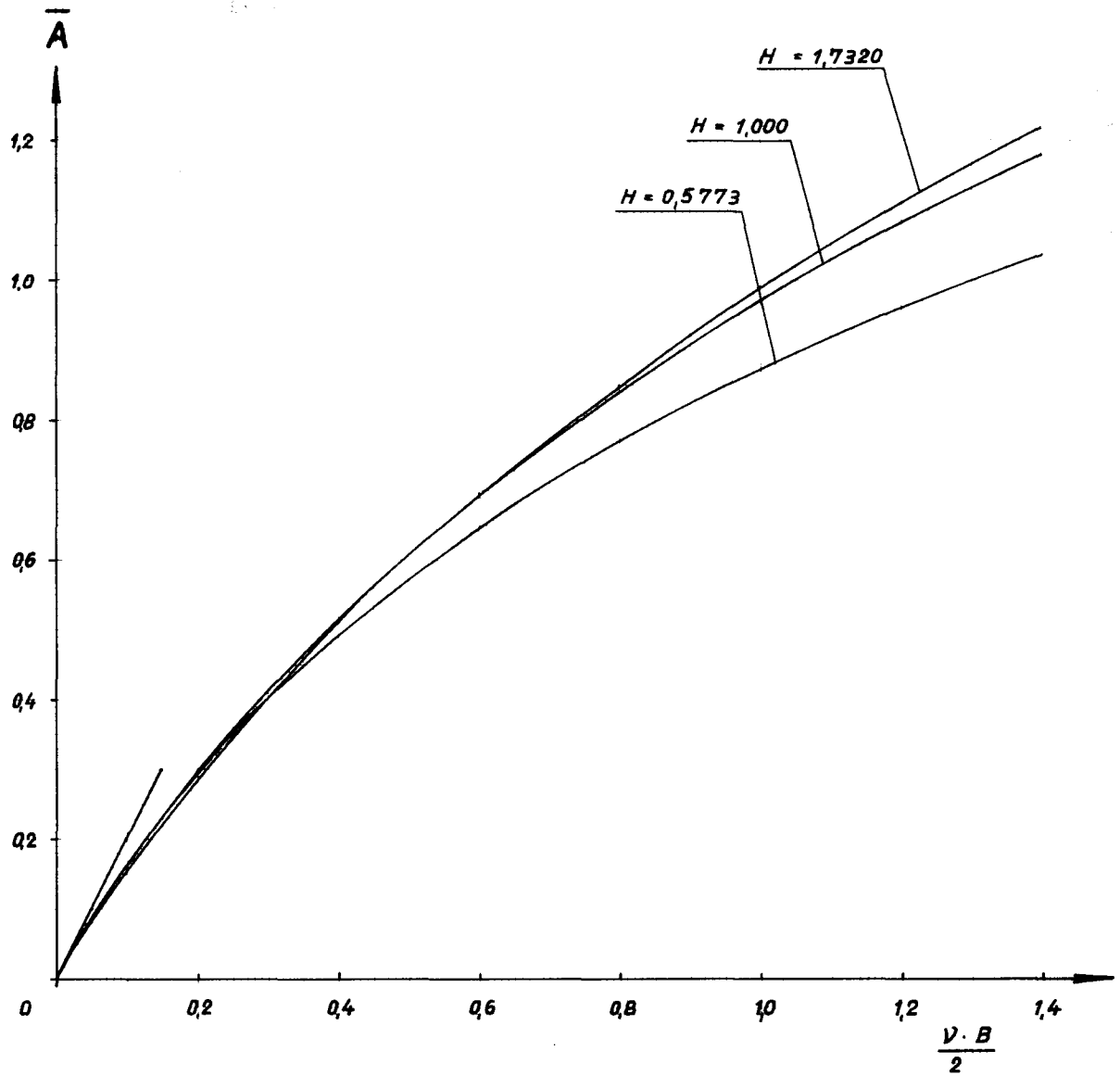
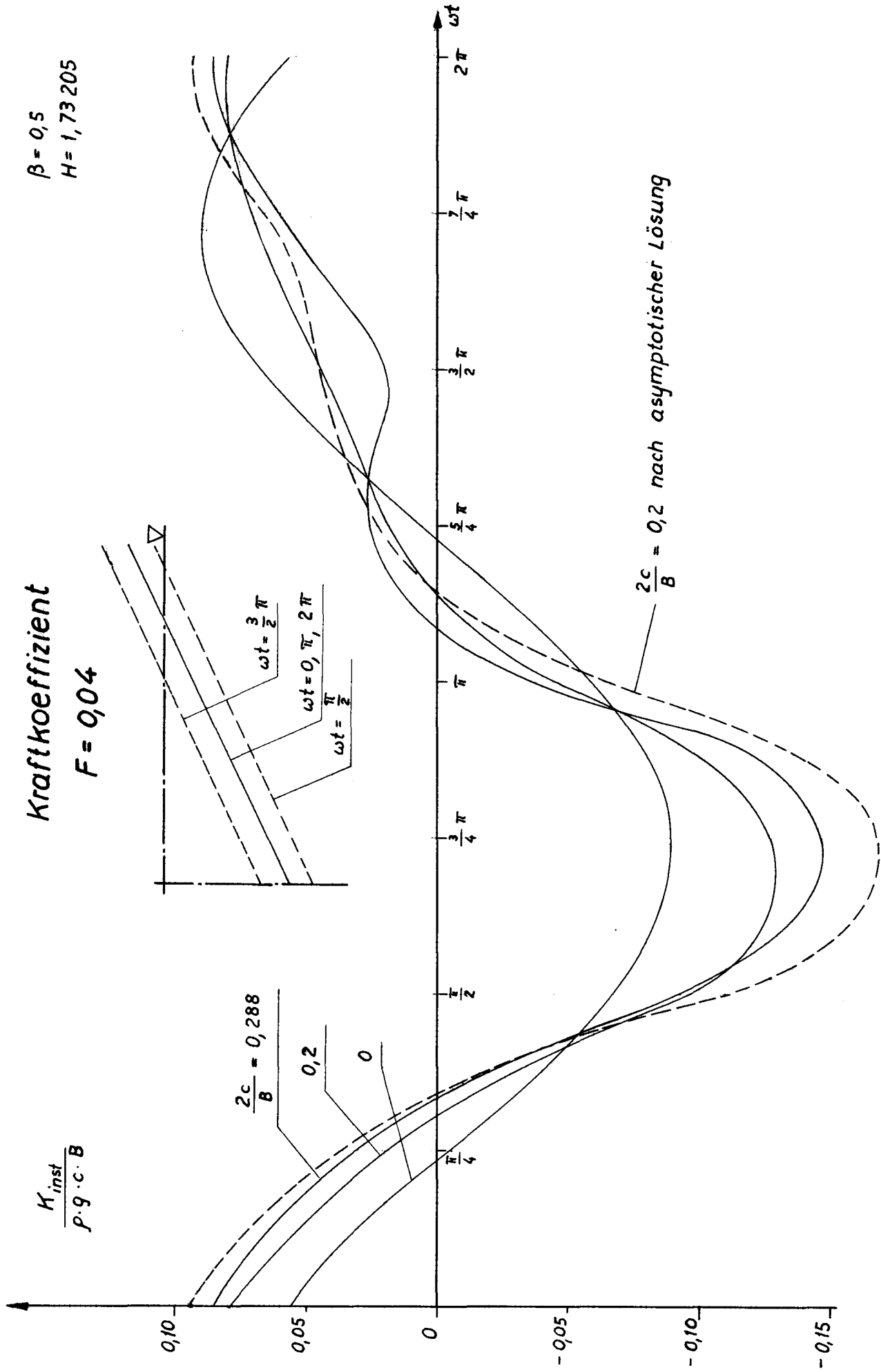


Bild 3.9

Kraftkoeffizient

$F = 0,04$

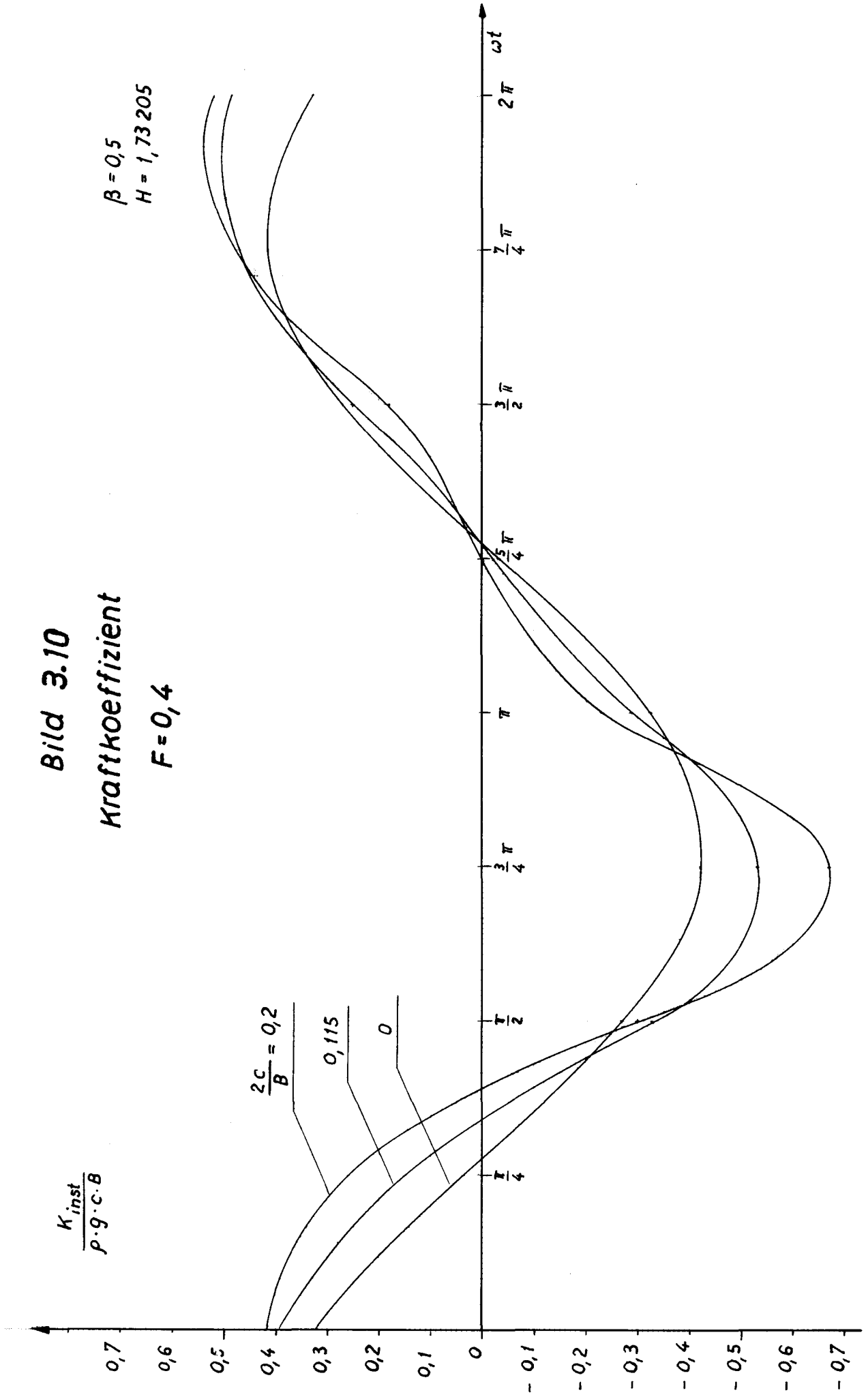
$\beta = 0,5$   
 $H = 1,73205$



**Bild 3.10**  
**Kraftkoeffizient**

$\beta = 0,5$   
 $H = 1,73205$

$F = 0,4$



#### 4. Berücksichtigung der nicht linearen Glieder in der Bedingung an der freien Oberfläche.

##### 4.1. Einleitung.

Wenn die Amplitude der Schwingung nicht klein ist, erwartet man leicht, daß die dadurch erzeugten Wellen ebenfalls nicht klein sein werden.

Im vorigen Kapitel waren aber kleine Wellen an der freien Wasseroberfläche vorausgesetzt worden.

Daher soll es unsere letzte Aufgabe sein, die nicht linearen Glieder in der Bedingung an der freien Oberfläche zu berücksichtigen. Durch eine Iteration kann man eine Korrektur d.h. ein Potential zweiter Ordnung erhalten, so daß der Fehler, welcher durch die nicht linearen Glieder in der Oberflächenbedingung für das Potential erster Ordnung entstanden ist, aufgehoben wird.

##### 4.2. Korrekturpotential $\phi^{(2)}$

Das Geschwindigkeitspotential  $\phi$ , welches die linearisierte Oberflächenbedingung und die nicht lineare Randbedingung auf der Oberfläche des Profils erfüllt hat, nennt man jetzt das Potential der ersten Ordnung und bezeichnet es mit  $\phi^{(1)}$ . Somit stellt man das ganze Potential  $\phi$ , daß die nicht lineare Randbedingung an der Körperoberfläche und die nicht lineare Bedingung an der freien Wasseroberfläche erfüllen wird, wie folgt dar:

$$\phi = \phi^{(1)} + \phi^{(2)}$$

und in ähnlicher Weise die Stromfunktion  $\psi$

$$\psi = \psi^{(1)} + \psi^{(2)}$$

wobei  $\phi^{(2)}$  und  $\psi^{(2)}$  je das Korrekturpotential und die Korrekturstromfunktion bezeichnen.

Die Iterationsformel von Wehausen [5] ist hier wiederholt.

Die linearisierte Oberflächenbedingung lautet wie folgt: ( $\eta$  = Verschiebung der Wasseroberfläche in vertikaler Richtung)

$$\left. \begin{aligned} \eta_t^{(1)} + \phi_y^{(1)} &= 0 \\ g\eta^{(1)} + \phi_t^{(1)} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ für } y = 0 \quad (1)$$

durch die Elimination von  $\eta^{(1)}$

$$\phi_{tt}^{(1)} - g\phi_y^{(1)} = 0 \quad \text{für } y = 0 \quad (2)$$

Das Korrekturglied d.h. das Potential zweiter Ordnung, wird in folgender Weise dargestellt:

$$\left. \begin{aligned} \eta_t^{(2)} + \phi_y^{(2)} &= -\eta^{(1)} \phi_{yy}^{(1)} + \eta_x^{(1)} \phi_x^{(1)} \\ g\eta^{(2)} + \phi_t^{(2)} &= -\eta^{(1)} \phi_{ty}^{(1)} + \frac{1}{2} (\nabla \phi^{(1)})^2 \end{aligned} \right\} \text{ für } y = 0 \quad (3)$$

und durch die Elimination von  $\eta^{(2)}$  erhält man die letzte Beziehung wie folgt:

$$\phi_{tt}^{(2)} - g\phi_y^{(2)} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi^{(1)})^2 - \phi_t^{(1)} \left( \phi_{yy}^{(1)} - \frac{1}{g} \phi_{tty}^{(1)} \right) \quad \text{für } y = 0 \quad (4)$$

#### 4.3. Annäherung der Iterationsformel (4).

Um die Eigenschaften der Glieder auf der rechten Seite der Beziehung (4) zu berücksichtigen, betrachten wir  $\phi^{(1)}$ :

Wenn  $x$  groß ist, wird unser Potential sehr kurz geschrieben d.h., es bleiben nur die abwandernden Wellen

$$\phi^{(1)} \approx U \operatorname{Re} \left\{ -i\pi (A_{01}) \cdot e^{-\nu y - i(\nu x - \omega t)} - i\pi (A_{02}) \cdot e^{-4\nu y - i(4\nu x - 2\omega t)} - i\pi (A_{03}) \cdot e^{-9\nu y - i(9\nu x - 3\omega t)} \right\} \quad (5)$$

wobei die Koeffizienten ( $A_{01}$ ), ( $A_{02}$ ) und ( $A_{03}$ ) schon in Kapitel 3 berechnet wurden.



Durch Differentiation werden die Geschwindigkeitskomponenten  $\phi_x^{(1)}$  und  $\phi_y^{(1)}$  in folgende Formen gebracht:

$$\begin{aligned}\phi_x^{(1)} = & -U\pi v \left[ e^{-vy} \left( (A_{o1})_r \cdot \cos(vx - \omega t) + (A_{o1})_i \cdot \sin(vx - \omega t) \right) \right. \\ & + 4e^{-4vy} \left( (A_{o2})_r \cdot \cos(4vx - 2\omega t) + (A_{o2})_i \cdot \sin(4vx - 2\omega t) \right) \\ & \left. + 9e^{-9vy} \left( (A_{o3})_r \cdot \cos(9vx - 3\omega t) + (A_{o3})_i \cdot \sin(9vx - 3\omega t) \right) \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_y^{(1)} = & U\pi v \left[ e^{-vy} \left( -(A_{o1})_i \cdot \cos(vx - \omega t) + (A_{o1})_r \cdot \sin(vx - \omega t) \right) \right. \\ & + 4e^{-4vy} \left( -(A_{o2})_i \cdot \cos(4vx - 2\omega t) + (A_{o2})_r \cdot \sin(4vx - 2\omega t) \right) \\ & \left. + 9e^{-9vy} \left( -(A_{o3})_i \cdot \cos(9vx - 3\omega t) + (A_{o3})_r \cdot \sin(9vx - 3\omega t) \right) \right]\end{aligned}$$

somit

$$\begin{aligned}\left( \phi_x^{(1)2} + \phi_y^{(1)2} \right)_{y=0} = & U^2 \pi^2 v^2 \left\{ (A_{o1})_r^2 + (A_{o1})_i^2 + 16 \left( (A_{o2})_r^2 + (A_{o2})_i^2 \right) \right. \\ & \left. + 81 \left( (A_{o3})_r^2 + (A_{o3})_i^2 \right) \right. \\ & + 8 \left[ \left( (A_{o1})_r \cdot (A_{o2})_r + (A_{o1})_i \cdot (A_{o2})_i \right) \cdot \cos(3vx - \omega t) \right. \\ & \left. + \left( (A_{o1})_r \cdot (A_{o2})_i - (A_{o2})_r \cdot (A_{o1})_i \right) \cdot \sin(3vx - \omega t) \right] \\ & + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 18 \left[ \left( (A_{o1})_r \cdot (A_{o3})_r + (A_{o1})_i \cdot (A_{o3})_i \right) \cdot \cos (8 \nu x - 2 \omega t) \right. \\
 & \quad \left. + \left( (A_{o1})_r \cdot (A_{o3})_i - (A_{o3})_r \cdot (A_{o1})_i \right) \cdot \sin (8 \nu x - 2 \omega t) \right] \\
 & + 72 \left[ \left( (A_{o2})_r \cdot (A_{o3})_r + (A_{o2})_i \cdot (A_{o3})_i \right) \cdot \cos (5 \nu x - \omega t) \right. \\
 & \quad \left. + \left( (A_{o2})_r \cdot (A_{o3})_i - (A_{o3})_r \cdot (A_{o2})_i \right) \cdot \sin (5 \nu x - \omega t) \right] \Bigg\} \quad (6)
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla \phi^{(1)} \right)_{y=0}^2 &= U^2 \omega \pi^2 \nu^2 \left\{ 8 \left[ \left( (A_{o1})_r \cdot (A_{o2})_r + (A_{o1})_i \cdot (A_{o2})_i \right) \sin (3 \nu x - \omega t) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \left( (A_{o1})_r \cdot (A_{o2})_i - (A_{o2})_r \cdot (A_{o1})_i \right) \cos (3 \nu x - \omega t) \right] \right. \\
 & + 36 \left[ \left( (A_{o1})_r \cdot (A_{o3})_r + (A_{o1})_i \cdot (A_{o3})_i \right) \sin (8 \nu x - 2 \omega t) \right. \\
 & \quad \left. - \left( (A_{o1})_r \cdot (A_{o3})_i - (A_{o3})_r \cdot (A_{o1})_i \right) \cos (8 \nu x - 2 \omega t) \right] \\
 & + 72 \left[ \left( (A_{o2})_r \cdot (A_{o3})_r + (A_{o2})_i \cdot (A_{o3})_i \right) \sin (5 \nu x - \omega t) \right. \\
 & \quad \left. - \left( (A_{o2})_r \cdot (A_{o3})_i - (A_{o3})_r \cdot (A_{o2})_i \right) \cos (5 \nu x - \omega t) \right] \Bigg\}
 \end{aligned} \quad (7)$$

Das zweite Glied der rechten Seite (4) verschwindet für große  $x$ , d.h.

$$\left( \phi_{yy}^{'''} - \frac{1}{g} \phi_{tty}^{'''} \right) = 0 \quad \text{für das Potential (5).}$$

Von den bisherigen Ergebnissen kann man hoffen, daß das zweite Glied im ganzen Bereich der freien Wasseroberfläche vernachlässigt werden kann. Aber es ist noch nicht sicher genug, ob der Beitrag des zweiten Gliedes zur rechten Seite der Beziehung (4) in der Nähe des Körpers wirklich klein sein wird. Um diese Frage zu lösen, muß man zuerst mit Hilfe der Rechenmaschine die Werte jedes Gliedes im ganzen Bereich von  $x$  d.h., von der Wand des Körpers bis unendlich, berechnen. Das Rechenprogramm ist im Anhang B angegeben.

Die Ergebnisse der Rechnung sind in Bild 4.2. bis 4.7. aufgetragen.

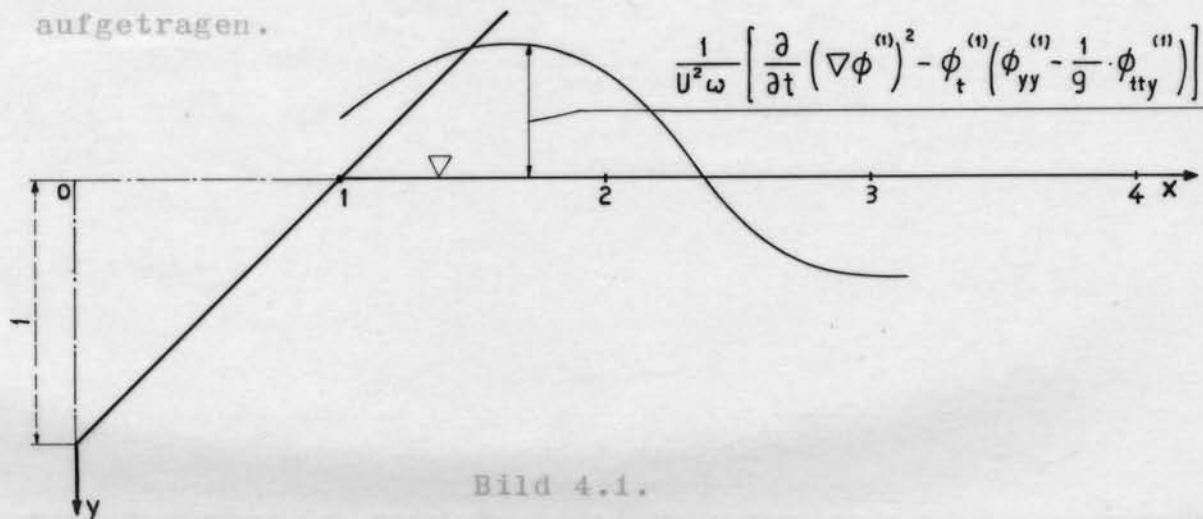


Bild 4.1.

$P_t$  bezeichnet in den Bildern die Form  $\frac{1}{U^2 \omega} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi^{''})^2 - \phi_t^{''} \left( \phi_{yy}^{''} - \frac{1}{g} \phi_{tty}^{''} \right) \right]$ , welche physikalisch die Zeitableitung einer Druckverteilung in dimensionsloser Form darstellt.

Daraus ergibt sich:

- 1) Im allgemeinen sind die Werte des zweiten Gliedes im Vergleich mit den Werten des ersten Gliedes sehr klein.
- 2) je weiter die Punkte an der freien Wasseroberfläche vom Körper entfernt liegen, desto kleiner wird das zweite Glied.
- 3) daß zu seiner Berechnung der Ansatz (5) kaum eine Abweichung gegenüber dem vollständigen Ansatz  $\phi^{(1)}$  bringt,
- 4) daß der Anteil der Frequenz  $2\omega$  in der Formel (7)

$$\text{d.h. } \pi^2 v^2 \cdot 36 \cdot \left[ \left( (A_{01})_r \cdot (A_{03})_r + (A_{01})_i \cdot (A_{03})_i \right) \sin(8vx - 2\omega t) \right. \\ \left. - \left( (A_{01})_r \cdot (A_{03})_i - (A_{03})_r \cdot (A_{03})_i \right) \cos(8vx - 2\omega t) \right]$$

der wesentliche Beitrag ist. (Dieser Anteil ist in den Bildern 4.2.-4.7. durch gestrichelte Linien dargestellt.)

und wir setzen (mit dem angenäherten Wert  $\phi^{(1)}$  nach Formel (7)):

$$\phi_{tt}^{(2)} - g \phi_y^{(2)} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla \phi^{(1)} \right)^2 \quad \text{für } y=0 \quad (8)$$

#### 4.4. Lösung für $\phi^{(2)}$ .

Man setzt die rechte Seite der Gleichung (7) in die linke Seite der Formel (8) ein und damit wird unsere Differentialgleichung konkret wie folgt dargestellt:

$$\begin{aligned} \left( \phi_{tt}^{(2)} - g \phi_y^{(2)} \right)_{y=0} &= U^2 \omega^2 v^2 \left[ A_1^* \cdot \cos(3vx \mp \omega t) \pm B_1^* \sin(3vx \mp \omega t) \right. \\ &\quad + A_2^* \cdot \cos(8vx \mp 2\omega t) \pm B_2^* \sin(8vx \mp 2\omega t) \\ &\quad \left. + A_3^* \cdot \cos(5vx \mp \omega t) \pm B_3^* \sin(5vx \mp \omega t) \right] \end{aligned} \quad (9)$$

wobei das obere Vorzeichen für  $x > 0$  und das untere Vorzeichen für  $x < 0$  sein soll und

$$\begin{aligned} A_1^* &= 8 \left\{ - \left[ (A_{01})_r \cdot (A_{02})_i - (A_{02})_r \cdot (A_{01})_i \right] \right\} \\ B_1^* &= 8 \left\{ \left[ (A_{01})_r \cdot (A_{02})_i + (A_{01})_i \cdot (A_{02})_r \right] \right\} \\ A_2^* &= 36 \left\{ - \left[ (A_{01})_r \cdot (A_{03})_i - (A_{03})_r \cdot (A_{01})_i \right] \right\} \\ B_2^* &= 36 \left\{ \left[ (A_{01})_r \cdot (A_{03})_i + (A_{01})_i \cdot (A_{03})_r \right] \right\} \\ A_3^* &= 72 \left\{ - \left[ (A_{02})_r \cdot (A_{03})_i - (A_{03})_r \cdot (A_{02})_i \right] \right\} \\ B_3^* &= 72 \left\{ \left[ (A_{02})_r \cdot (A_{03})_i + (A_{02})_i \cdot (A_{03})_r \right] \right\} . \end{aligned} \quad (10)$$



Die rechte Seite von (9) besteht aus Formeln der Form:

$$\begin{aligned} (\varphi_{tt} - g\varphi_y)_{y=0} &= A^* \cos(rx \mp st) \pm B^* \sin(rx \mp st) \\ &= \cos(rx) \cdot [A^* \cos(st) - B^* \sin(st)] \pm \\ &\quad \sin(rx) \cdot [A^* \sin(st) + B^* \cos(st)] \end{aligned} \quad (11)$$

wobei  $r$  und  $s$  beide die Beziehung  $s^2 - gr \neq 0$  erfüllen, und das obere Vorzeichen für  $x > 0$  und das untere für  $x < 0$  gelten soll.

Nun kann man die Lösung  $\varphi$  der Gleichung (11) wie folgt voraussetzen:

$$\varphi = \varphi^a + \varphi^b$$

und

$$\begin{aligned} \varphi^a &= - \frac{A^* \cos(st) - B^* \sin(st)}{\pi(s^2 - gr)} \cdot \pi e^{-ry} \cos(rx) \\ &\quad - [A^* \cos(st) - B^* \sin(st)] \cdot D \int_0^\infty \frac{e^{-ky} \cos(kx)}{k - \frac{s^2}{g} + i\mu} dk \\ \varphi^b &= - \frac{A^* \sin(st) + B^* \cos(st)}{\pi} \left[ C \int_0^\infty \frac{e^{-ky} \cos(kx)}{k - \frac{s^2}{g} + i\mu} dk \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{s^2 + gr} \int_0^\infty \frac{e^{-ky} \cos(kx)}{k + r} dk \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{s^2 - gr} \int_0^\infty \frac{e^{-ky} \cos(kx)}{k - r} dk \right] \end{aligned} \quad (12)$$

wobei  $C$  und  $D$  beliebige Konstante sein können.

Es wird in folgender Weise bewiesen, daß die Voraussetzung richtig ist.

Da  $e^{ist} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ky} \cos(kx)}{k - \frac{s^2}{g} + i\mu} dk$  die lineare Randbedingung an der freien Wasseroberfläche erfüllt,

$$\left[ \varphi_{tt}^a - g \varphi_y^a \right]_{y=0, x \neq 0} = \frac{A^* \cos(st) - B^* \sin(st)}{s^2 - gr} \cos(rx) (s^2 - gr)$$

$$= [A^* \cos(st) - B^* \sin(st)] \cos(rx),$$

$$\left[ \varphi_{tt}^b - g \varphi_y^b \right]_{y=0, x \neq 0} = \frac{A^* \sin(st) + B^* \cos(st)}{\pi} \left\{ \frac{1}{s^2 + gr} \int_0^{\infty} e^{-ky} \cos(kx) \frac{s^2 - gr}{k+r} dk - \frac{1}{s^2 - gr} \int_0^{\infty} e^{-ky} \cos(kx) \frac{s^2 - gr}{k-r} dk \right\}$$

Daraus ergeben sich die Integrale:

$$\begin{aligned} [J]_{y=0, x \neq 0} &= \frac{1}{s^2 + gr} \int_0^{\infty} e^{-ky} \cos(kx) \frac{s^2 - gr}{k+r} dk - \frac{1}{s^2 - gr} \int_0^{\infty} e^{-ky} \cos(kx) \frac{s^2 - gr}{k-r} dk \\ &= \frac{1}{s^2 + gr} \int_0^{\infty} e^{-ky} \cos(kx) \left[ \frac{s^2 + gr}{k+r} - g \right] dk - \frac{1}{s^2 - gr} \int_0^{\infty} e^{-ky} \cos(kx) \left[ \frac{s^2 - gr}{k-r} - g \right] dk \end{aligned}$$



Da  $\int_0^{\infty} e^{-ky} \cos(kx) dk$  für  $y = 0$  und  $x \neq 0$  null ist, wird das Integral  $J$  wie folgt reduziert:

$$[J]_{\substack{y=0 \\ x \neq 0}} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ky} \cos(kx)}{k+r} dk - \int_0^{\infty} \frac{e^{-ky} \cos kx}{k-r} dk$$

Durch die Transformation der Variablen  $k+r=u$  und  $k-r=u$  berechnet man das Integral  $J$  wie folgt:

$$\begin{aligned} [J]_{\substack{y=0 \\ x \neq 0}} &= \int_r^{\infty} \frac{\cos [x(u-r)]}{u} du - \int_{-r}^{\infty} \frac{\cos [x(u+r)]}{u} du \\ &= \cos(rx) \cdot \left[ \int_r^{\infty} \frac{\cos(ux)}{u} du - \int_{-r}^{\infty} \frac{\cos(ux)}{u} du \right] \\ &\quad + \sin(rx) \cdot \left[ \int_r^{\infty} \frac{\sin(ux)}{u} du + \int_{-r}^{\infty} \frac{\sin(ux)}{u} du \right] \\ &= \sin(rx) \cdot \left\{ \pm \frac{\pi}{2} - \text{Si}(rx) \pm \frac{\pi}{2} + \text{Si}(rx) \right\} \end{aligned}$$

somit

$$\left[ \varphi_{tt}^b - g \varphi_y^b \right]_{\substack{y=0 \\ x \neq 0}} = \pm \left[ A^* \sin(st) + B^* \cos(st) \right] \sin(rx)$$

worin das obere Vorzeichen für  $x > 0$  und das untere für  $x < 0$  gelten soll.

Der Beweis ist hiermit beendet. Da das Potential  $\varphi$  die Bedingung der Kontinuität und die Randbedingung (11) an der freien Wasseroberfläche, wie oben gezeigt, erfüllt, wird es jetzt als unser Korrekturpotential gebraucht werden können.

Wenn man die beliebigen Konstanten in (12)  $C = D = 0$  annimmt, wird das Potential  $\varphi$  in allgemeiner Form wie folgt dargestellt:

$$\varphi = - \left\{ \frac{A^* \cos(st) - B^* \sin(st)}{\pi(s^2 - gr)} \pi e^{-ry} \cos(rx) + \frac{A^* \sin(st) + B^* \cos(st)}{\pi} \left[ \frac{1}{s^2 + gr} \int_0^\infty \frac{e^{-ky} \cos(kx)}{k+r} dk - \frac{1}{s^2 - gr} \int_0^\infty \frac{e^{-ky} \cos(kx)}{k-r} dk \right] \right\}$$

Wir können durch lineare Superposition einen Ausdruck für  $\phi^{(2)}$  finden, welcher der Bedingung (9) genügt, indem wir setzen:

$$\begin{aligned} \phi^{(2)} = & - \frac{\omega U^2 v \pi^2}{g} \left\{ \left[ A_1^* \cos(\omega t) - B_1^* \sin(\omega t) \right] \cdot \frac{\pi}{(-2)} \cdot e^{-3vy} \cos(3vx) \right. \\ & + \left[ A_2^* \cos(2\omega t) - B_2^* \sin(2\omega t) \right] \cdot \frac{\pi}{(-4)} \cdot e^{-8vy} \cos(8vx) \\ & + \left[ A_3^* \cos(\omega t) - B_2^* \sin(\omega t) \right] \cdot \frac{\pi}{(-4)} \cdot e^{-5vy} \cos(5vx) \\ & + \left[ A_1^* \sin(\omega t) + B_1^* \cos(\omega t) \right] \cdot \left[ \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{e^{-ky} \cos(kx)}{k+3v} dk + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-ky} \cos(kx)}{k-3v} dk \right] \\ & + \left[ A_2^* \sin(2\omega t) + B_2^* \cos(2\omega t) \right] \cdot \left[ \frac{1}{12} \int_0^\infty \frac{e^{-ky} \cos(kx)}{k+8v} dk + \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{e^{-ky} \cos(kx)}{k-8v} dk \right] \\ & + \left[ A_3^* \sin(\omega t) + B_3^* \cos(\omega t) \right] \cdot \left[ \frac{1}{6} \int_0^\infty \frac{e^{-ky} \cos(kx)}{k+5v} dk + \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{e^{-ky} \cos(kx)}{k-5v} dk \right] \left. \right\} \end{aligned}$$

und entsprechend für die Stromfunktion:

$$\begin{aligned} \psi^{(2)} = & - \frac{\omega U^2 \nu \pi^2}{g} \left\{ \left[ A_1^* \cos(\omega t) - B_1^* \sin(\omega t) \right] \cdot \frac{\pi}{(-2)} \cdot e^{-3\nu y} \sin(3\nu x) \right. \\ & + \left[ A_2^* \cos(2\omega t) - B_2^* \sin(2\omega t) \right] \cdot \frac{\pi}{(-4)} \cdot e^{-8\nu y} \sin(8\nu x) \\ & + \left[ A_3^* \cos(\omega t) - B_3^* \sin(\omega t) \right] \cdot \frac{\pi}{(-4)} \cdot e^{-5\nu y} \sin(5\nu x) \\ & + \left[ A_1^* \sin(\omega t) + B_1^* \cos(\omega t) \right] \cdot \left[ \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{e^{-ky} \sin(kx)}{k+3\nu} dk + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-ky} \sin(kx)}{k-3\nu} dk \right] \\ & + \left[ A_2^* \sin(2\omega t) + B_2^* \cos(2\omega t) \right] \cdot \left[ \frac{1}{12} \int_0^\infty \frac{e^{-ky} \sin(kx)}{k+8\nu} dk + \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{e^{-ky} \sin(kx)}{k-8\nu} dk \right] \\ & + \left[ A_3^* \sin(\omega t) + B_3^* \cos(\omega t) \right] \cdot \left[ \frac{1}{6} \int_0^\infty \frac{e^{-ky} \sin(kx)}{k+5\nu} dk + \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{e^{-ky} \sin(kx)}{k-5\nu} dk \right] \end{aligned} \quad (14)$$

#### 4.5. Asymptotische Werte der Integrale.

Die asymptotischen Werte der Integrale

$$\int_0^\infty \frac{e^{ik(x+iy)}}{k-r} dk \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \frac{e^{ik(x+iy)}}{k+r} dk$$

werden wie folgt dargestellt:

Das erste Integral wurde von Abschnitt 1.3. eingeführt d.h.

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{e^{ik(x+iy)}}{k-r+i\mu} dk = \left[ (\phi_o)_r + i(\psi_o)_r \right] + i \left[ (\phi_o)_i + i(\psi_o)_i \right]$$

und daraus ergibt sich

$$\int_0^\infty \frac{e^{ik(x+iy)}}{k-r} dk = (\phi_o)_r + i(\psi_o)_r$$

Wenn  $r\sqrt{x^2+y^2}$  klein ist erhält man

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ky} e^{ikx}}{k-r} dk = e^{-ry+irx} \left\{ -\ln[y r \sqrt{x^2+y^2}] - \sum_{n=1}^\infty \frac{[r(y-ix)]^n}{n \cdot n!} + i \arctg \frac{x}{y} \right\}$$

$$= e^{-ry+irx} \left\{ -\ln[y r \sqrt{x^2+y^2}] - \sum_{n=1}^\infty \frac{(r\sqrt{x^2+y^2})^n \cdot e^{-i n \arctg \frac{x}{y}}}{n \cdot n!} + i \arctg \frac{x}{y} \right\}$$

und wenn  $r\sqrt{x^2+y^2}$  groß ist erhält man

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ky} e^{ikx}}{k-r} dk = - \sum_{n=1}^\infty \frac{e^{i n \arctg \frac{x}{y}}}{n! [r\sqrt{y^2+x^2}]^n} + i \pi e^{-ry} \operatorname{sign}(x) e^{irx}$$

Für das zweite Integral

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ky} e^{ikx}}{k+r} dk$$

braucht man nur das Vorzeichen von  $r$  zu ändern,  
d.h.:

Wenn  $r\sqrt{x^2+y^2}$  klein ist

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ky} e^{ikx}}{k+r} dk = e^{ry-irx} \left\{ -\ln[y \sqrt{r^2(x^2+y^2)}] - \sum_{n=1}^\infty \frac{[(-r)(y-ix)]^n}{n \cdot n!} + i \arctg \frac{x}{y} \right\}$$

und wenn  $r\sqrt{x^2+y^2}$  groß ist

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ky} e^{ikx}}{k+r} dk = - \sum_{n=1}^\infty \frac{e^{i n \arctg \frac{x}{y}}}{n! [-r\sqrt{x^2+y^2}]^n}$$

Wenn in Gleichung (13)  $\nu \sqrt{x^2 + y^2}$  klein ist, wird der Faktor  $\frac{U^2 \omega \pi^2 \nu}{g}$  klein sein und damit wird das Potential  $\phi^{(2)}$  ebenfalls klein sein. Wenn aber  $\nu \sqrt{x^2 + y^2}$  groß ist, wird die Annäherung für die Integrale d.h.  $i\pi e^{-ry} \operatorname{sign}(x) \cdot e^{irx}$  bleiben. Daher kann man die Annäherung wie folgt benutzen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{e^{-ky} \cos(kx)}{k+3\nu} dk + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-ky} \cos(kx)}{k-3\nu} dk &\approx -\frac{\pi}{2} e^{-3\nu y} \operatorname{sign}(x) \cdot \sin(3\nu x) \\ \frac{1}{12} \int_0^\infty \frac{e^{-ky} \cos(kx)}{k+8\nu} dk + \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{e^{-ky} \cos(kx)}{k-8\nu} dk &\approx -\frac{\pi}{4} e^{-8\nu y} \operatorname{sign}(x) \cdot \sin(8\nu x) \\ \frac{1}{6} \int_0^\infty \frac{e^{-ky} \cos(kx)}{k+5\nu} dk + \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{e^{-ky} \cos(kx)}{k-5\nu} dk &\approx -\frac{\pi}{4} e^{-5\nu y} \operatorname{sign}(x) \cdot \sin(5\nu x) \end{aligned}$$

Das allerletzte angenäherte Korrekturpotential  $\phi^{(2)}$  stellt man wie folgt dar:

$$\begin{aligned} \phi^{(2)} = -\frac{U^2 \omega \nu \pi^2}{2 \cdot g} &\left\{ \begin{aligned} &[-A_1^* \cos(\omega t) + B_1^* \sin(\omega t)] \cdot e^{-3\nu y} \cos(3\nu x) \\ &+ [-A_2^* \cos(2\omega t) + B_2^* \sin(2\omega t)] \cdot \frac{1}{2} e^{-8\nu y} \cos(8\nu x) \\ &+ [-A_3^* \cos(\omega t) + B_3^* \sin(\omega t)] \cdot \frac{1}{2} e^{-5\nu y} \cos(5\nu x) \\ &+ [-A_1^* \sin(\omega t) - B_1^* \cos(\omega t)] \cdot e^{-3\nu y} \operatorname{sign}(x) \cdot \sin(3\nu x) \\ &+ [-A_2^* \sin(2\omega t) - B_2^* \cos(2\omega t)] \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-8\nu y} \operatorname{sign}(x) \cdot \sin(8\nu x) \\ &+ [-A_3^* \sin(\omega t) - B_3^* \cos(\omega t)] \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-5\nu y} \operatorname{sign}(x) \cdot \sin(5\nu x) \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten  $A_1^*, A_2^*$  usw.,  $B_1^*, B_2^*$  usw. (15) in (10) gegeben sind.

Durch die Einsetzung von  $\sin(rx)$  statt  $\cos(rx)$  und  $[-\cos(rx)]$  statt  $\sin(rx)$  in  $\phi^{(2)}$  erhält man die entsprechende Korrekturstromfunktion  $\psi^{(2)}$ .



#### 4.6. Hydrodynamische Kräfte.

Nun korrigieren wir die in Kapitel 3 berechneten hydrodynamischen Drücke und Kräfte mit dem Korrekturpotential  $\phi^{(2)} + i\psi^{(2)}$ .

Die Randbedingung an der Körperoberfläche lautet jetzt wie folgt:

$$\psi_{\text{ist}}^{(1)k} = Ux \cos \omega t - \psi^{(2)} \quad (16)$$

Wir setzen die aus  $\phi^{(1)}$  wie vorstehend beschrieben berechnete Stromfunktion  $\psi^{(2)}$  ein, beginnen die Berechnung von vorne und rechnen ein korrigiertes Potential  $\phi^{(1)k}$  und damit ein korrigiertes Potential  $\phi^{(2)k}$  aus.

Durch die Erfüllung der Beziehung (16) erhält man die unbekannten Korrekturkoeffizienten  $A_{ns}^k$  und durch Einsetzen von  $A_{ns}^k$  in die Koeffizienten  $A_{ns}$  der Potentiale

$$\phi^{(1)} + \phi^{(2)}$$

erhält man das völlig korrigierte Potential  $\phi^{(1)k} + \phi^{(2)k}$ .

Die Gleichung (6) zeigt, daß  $(\nabla \phi^{(1)})^2$  für  $y = 0$  und  $x \rightarrow \infty$  einen von der Zeit  $t$  und der Koordinaten  $x$  unabhängigen, d.h. konstanten Teil

$$\left( \nabla \phi^{(1)} \right)_{\text{mitt. } x \rightarrow \infty, y=0}^2 = U^2 \pi^2 v^2 \left\{ \left( (A_{01})_r^2 + (A_{01})_i^2 \right) + 16 \left( (A_{02})_r^2 + (A_{02})_i^2 \right) + 81 \left( (A_{03})_r^2 + (A_{03})_i^2 \right) \right\}$$

sowie periodische Teile enthält. Der konstante Teil ist in der Korrekturrandbedingung (8) infolge der Ableitung nach der Zeit unberücksichtigt geblieben. Nur die periodischen Teile sind durch das Potential der zweiten Ordnung berücksichtigt.

Da an der freien Wasseroberfläche nicht nur die Ableitung  $\frac{Dp}{Dt}$  verschwinden, sondern außerdem der Druck gleich dem atmosphärischen Druck sein muß, muß der konstante Teil  $\frac{1}{2} \rho (\nabla \phi^{(1)})_{\text{mittel}}^2$  für  $x \rightarrow \infty, y=0$  an jedem Punkt der Körperoberfläche addiert werden.

Daher werden die hydrodynamischen Drücke am Profilrand wie folgt dargestellt:

$$p = \rho \frac{\partial \phi^k}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho (\nabla \phi^k)^2 + \frac{1}{2} \rho (\nabla \phi^k)^2 \quad \text{mittel für } \begin{matrix} x \rightarrow \infty \\ y = 0 \end{matrix}$$

wobei  $\phi^k = \phi^{(1)k} + \phi^{(2)k}$  bedeutet.

Durch Integration der Drücke am Profilrand ergeben sich die hydrodynamischen Kräfte. Das Rechenprogramm für solche Korrektur befindet sich in Anhang A.

#### 4.7. Diskussion.

Die errechneten Ergebnisse zeigen, daß geringe Unterschiede zwischen den korrigierten und nicht korrigierten Kraftkoeffizienten  $\frac{K_{\text{inst}}}{\rho \cdot g \cdot c \cdot B}$  bestehen.

Die Koeffizienten  $\alpha_0, \alpha_1$  usw. der Formel

$$\frac{K}{\rho \cdot g \cdot c \cdot B} = \alpha_0 + \alpha_1 \cos(\omega t) + \alpha_2 \sin(\omega t) + \alpha_3 \cos(2\omega t) + \alpha_4 \sin(2\omega t)$$

wurden nach der Methode des kleinsten Quadrates bestimmt. Sie sind in Bild 4.8. bis 4.12. aufgetragen. Für die Amplitude  $\frac{2c}{B} = 0,3$  beginnen die Ergebnisse bei der Frequenz  $F = 0,6$  unsicher zu werden. Weitere numerische Rechnungen wären nötig, um diese Unsicherheit aufzuklären.



Die dimensionslose Druckverteilung am Profilrand für das Profil  $H = 1,73205$ ,  $\beta = 0,5$  und die Position  $\omega t = \frac{7}{4}\pi$  ist in Bild 4.13a aufgetragen; für zwei verschiedene Amplitudenverhältnisse  $\frac{c}{B/2} = 0,05, 0,15$  und drei verschiedene Frequenzen  $F = 0,4, 0,6$  und  $0,8$ . Das Bild zeigt, daß je größer die Amplituden der Schwingung und je höher die Frequenzen sind, desto höher und größer sind die Drücke und die Schwankungen des Verlaufs. Die wichtigste Tatsache hierbei ist die Erkenntnis, daß der maximale Druck in jedem Falle an dem Punkt angreift, wo sich der Profilrand mit der glatten Wasserlinie kreuzt. Die maximalen Drücke  $\frac{P_{\max}}{\rho g c}$  für die Profile  $H = 1,0$  und  $1,73205$  sind über dem Amplitudenverhältnis  $\frac{c}{B/2}$  für die Frequenzen  $F = 0,2, 0,3, 0,4, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8$  in Bild 4.13b und 4.13c aufgetragen, wobei die Zahlen I, II und III auf die Punkte hinweisen, an denen der maximale Druck entsteht. Die Bilder zeigen, daß der Punkt des maximalen Druckes immer dann mit dem Punkt I übereinstimmt, wenn die Amplitude groß und die Frequenz hoch ist. Je größer die Amplitude und je höher die Frequenzen sind, desto größer werden die maximalen Drücke.

Nun berücksichtigen wir den Verlauf des maximalen Druckes  $\frac{P_{\max}}{\rho/2 U^2}$  (Bild 4.14a). Aus dem Bild kann man erkennen, daß die Drücke im allgemeinen von Amplituden und Frequenzen abhängen. Jedoch scheint der dimensionslose Wert für den maximalen hydrodynamischen Druck  $\frac{P_{\max}}{\rho/2 U^2}$  mit zunehmender Amplitude und Frequenz einem asymptotischen Wert zuzustreben. Es ist interessant, den Wert, der für die größten Amplituden und Frequenzen berechnet ist, mit dem Ergebnis von Wagner für den Stoßdruck eines in einer Wasseroberfläche eindringenden Keils zu vergleichen (Bild 4.14b). Die Theorie Wagners gilt gut für den Keilwinkel  $\alpha$  zwischen  $20^\circ$  und  $30^\circ$  [6]. Unsere Lösung

gilt für den Bereich  $\alpha$  zwischen  $25^\circ$  und  $50^\circ$ . Wagner hat allerdings für die konstante Geschwindigkeit des Keils gegen ruhiges Wasser gerechnet, während unsere Geschwindigkeit als harmonische Funktion  $U \cos(\omega t)$  gegeben und dafür der maximale Druck in dem Zeitpunkt  $\omega t = \frac{7}{4}\pi$  errechnet ist.

Bild 4.2

Zeitabteilung der Druckverteilung an der freien Oberfläche

$c = 0,4$   
 $F = 0,2$   
 $H = 1,0$

----- Anteil der Frequenz  $2\omega$  in Formel (7)

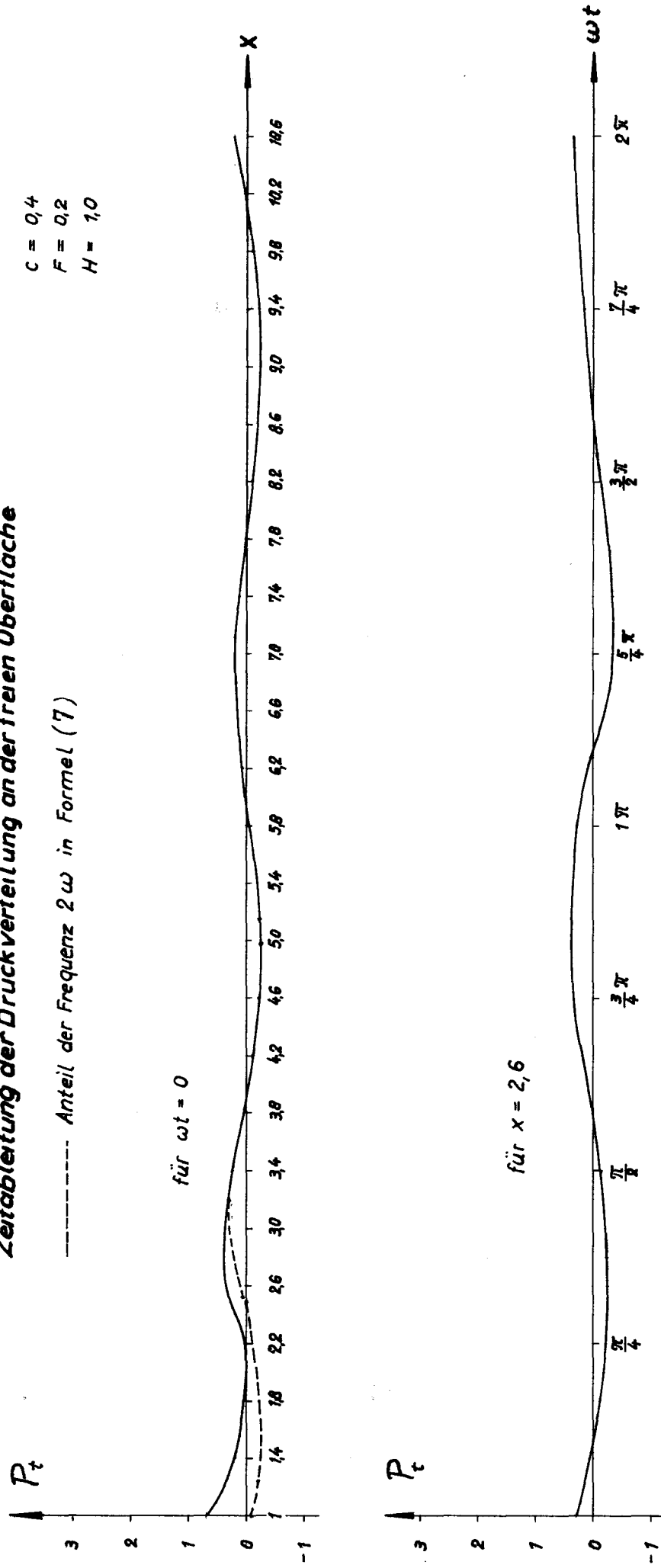


Bild 4.3

Zeitabteilung der Druckverteilung an der freien Oberfläche

$c = 0,3$   
 $F = 0,4$   
 $H = 1,0$

----- Anteil der Frequenz  $2\omega$  in Formel (7)

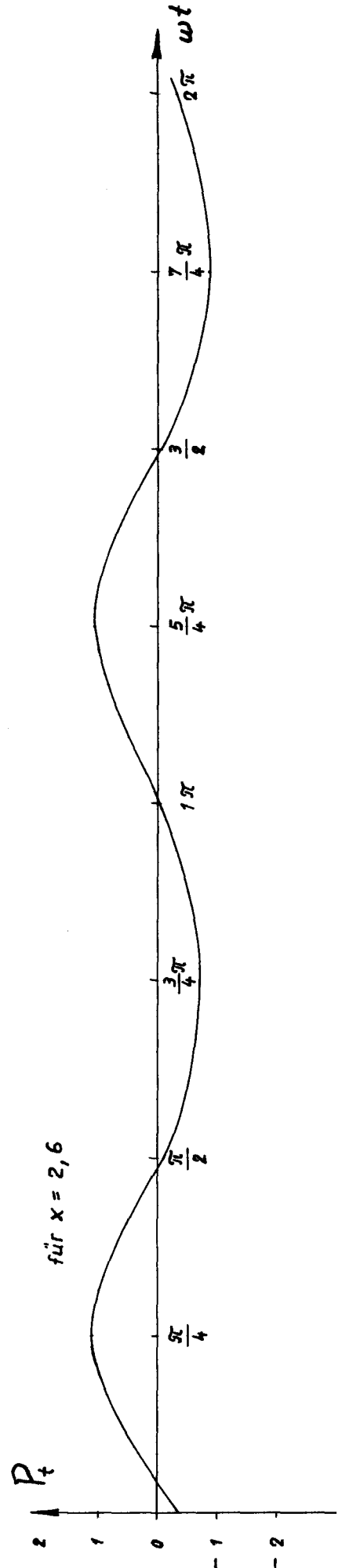
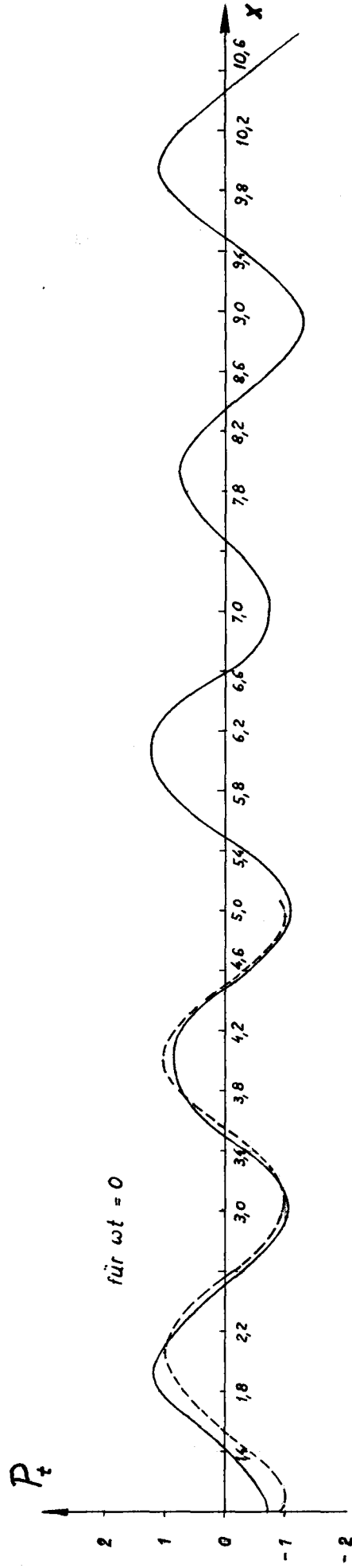


Bild 4.4

Zeitabteilung der Druckverteilung an der freien Oberfläche

$$\begin{aligned} c &= 0,4 \\ F &= 0,4 \\ &= 0,4 \end{aligned}$$

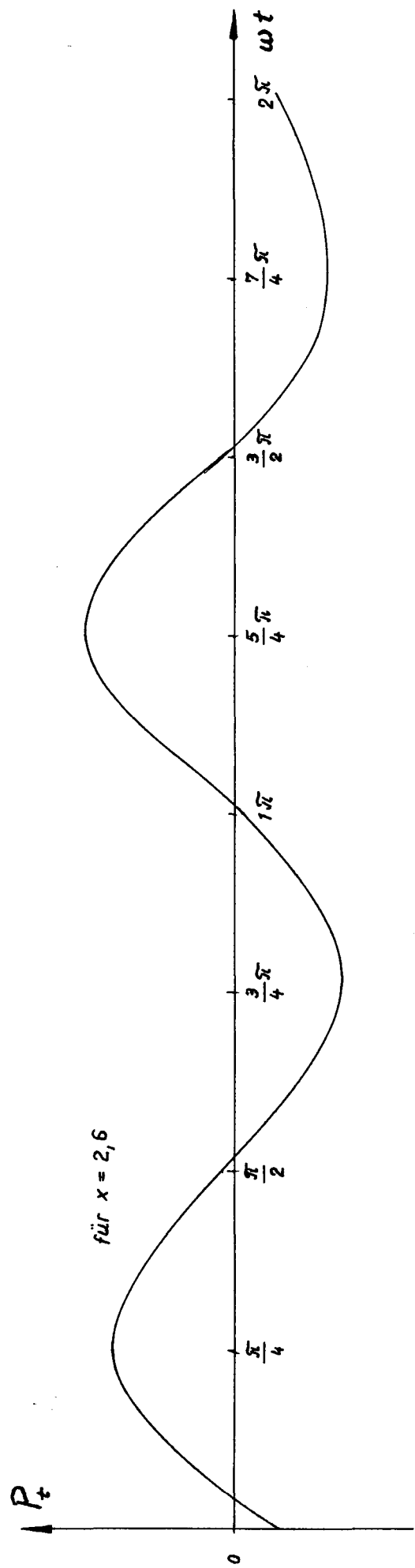
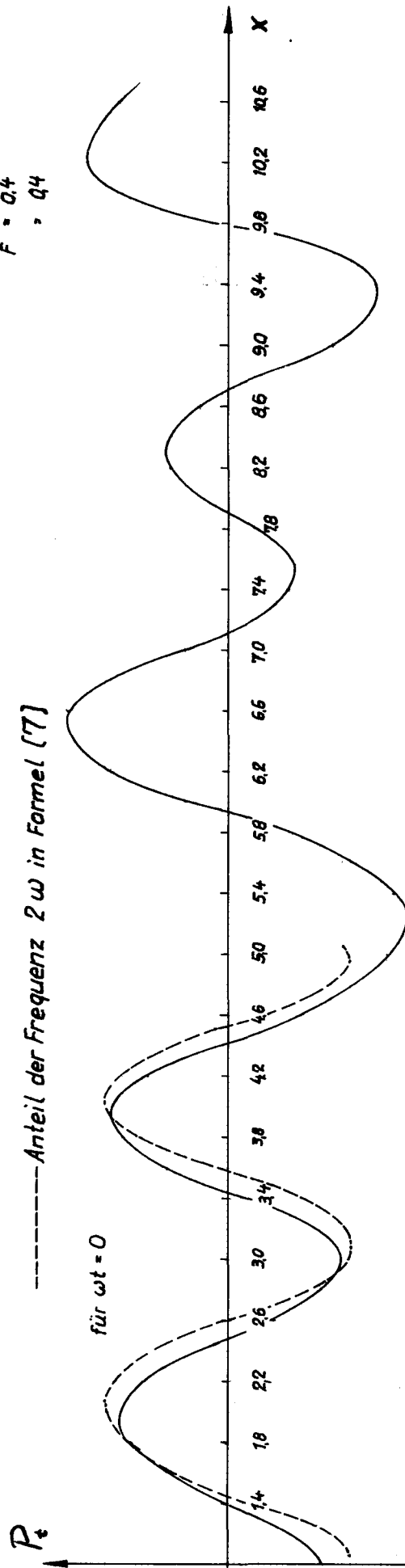
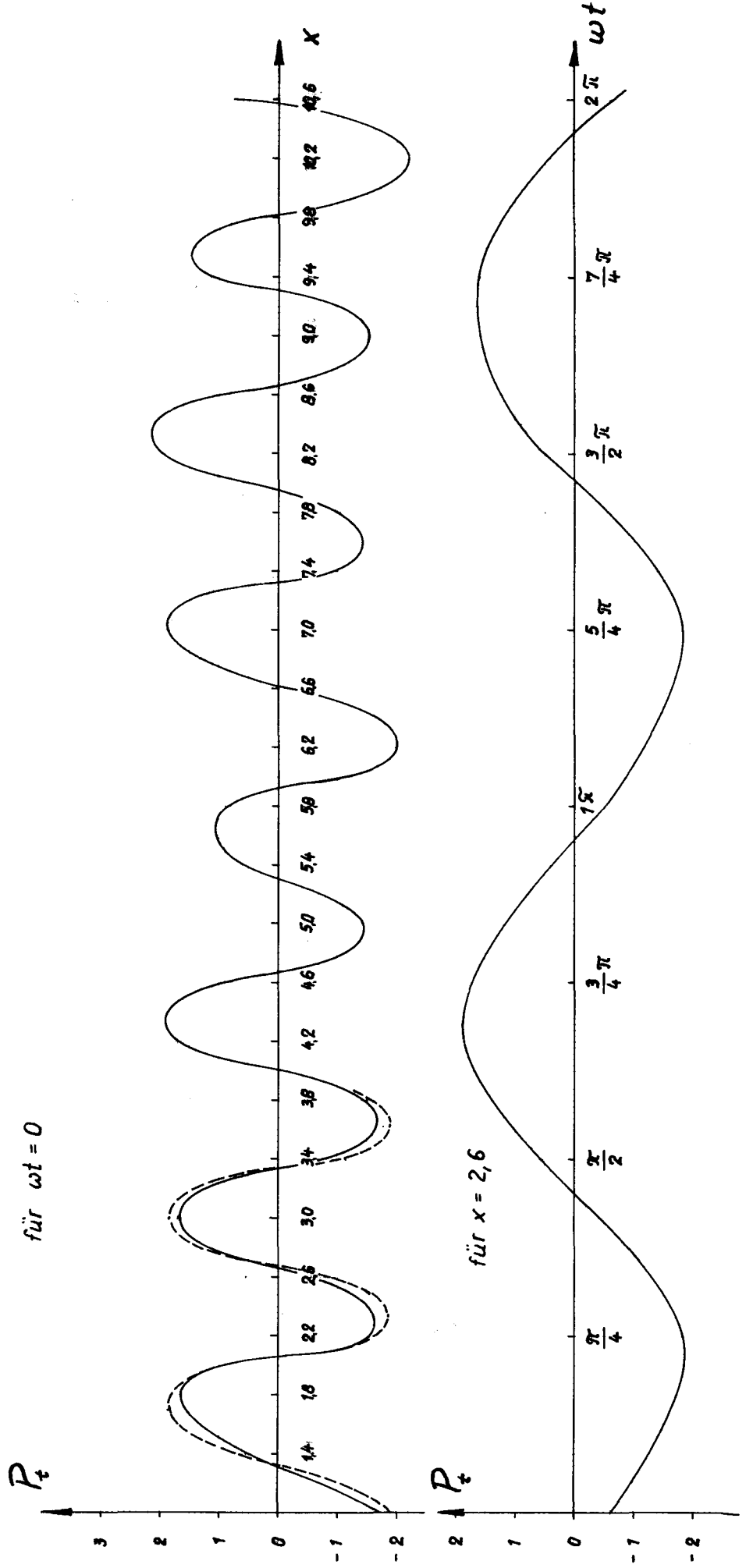


Bild 4.5

Zeitverteilung der Druckverteilung an der freien Oberfläche

$$\begin{aligned} c &= 0,2 \\ F &= 0,6 \\ H &= 1,0 \end{aligned}$$

----- Anteil der Frequenz  $2\omega$  in Formel (7)



**Bild 4.6 a**

**Zeitabteilung der Druckverteilung an der freien Oberfläche**

-----Anteil der Frequenz  $2\omega$  in Formel (7)

$c = 0,3$   
 $F = 0,6$   
 $H = 1,0$

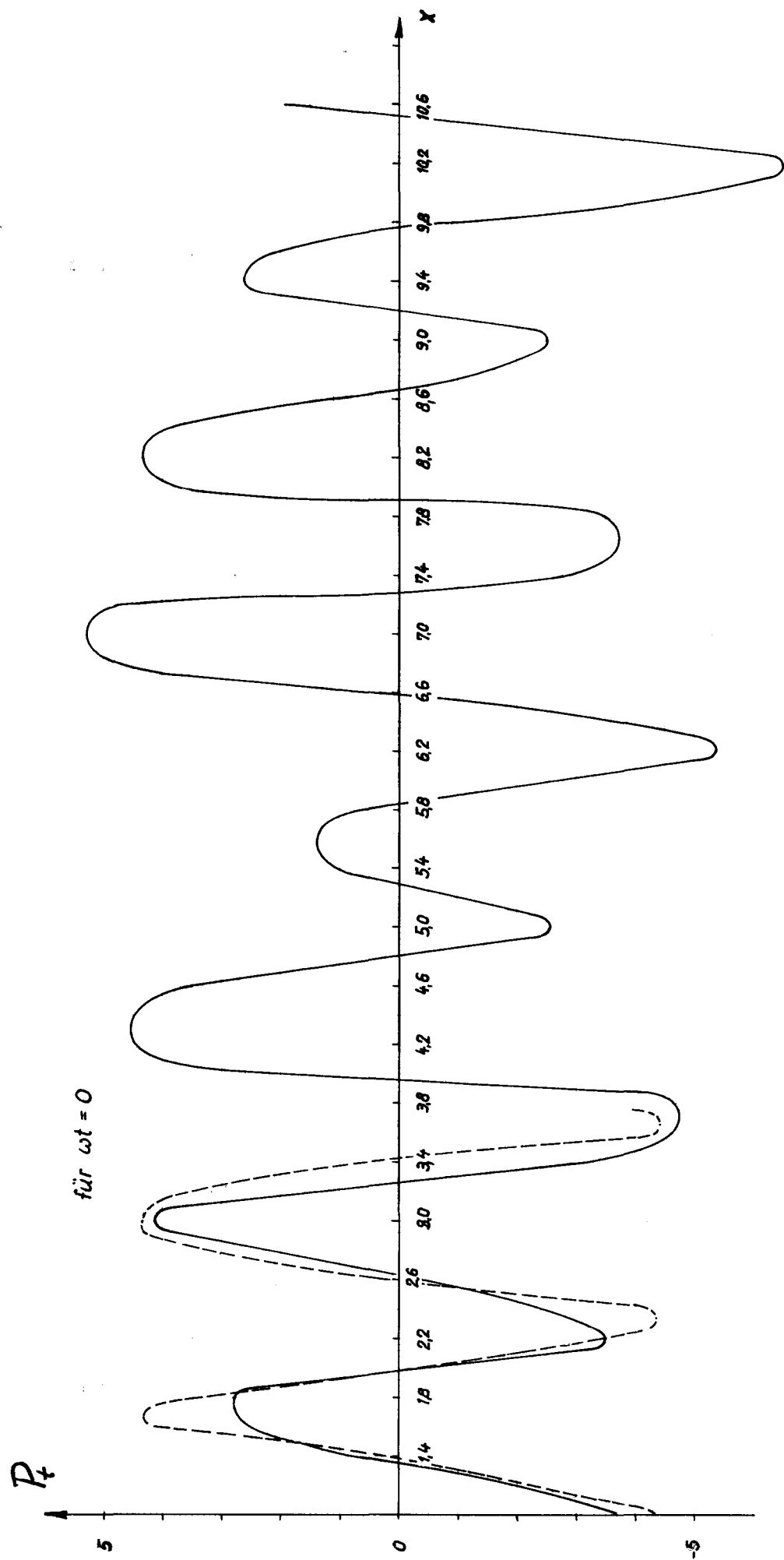


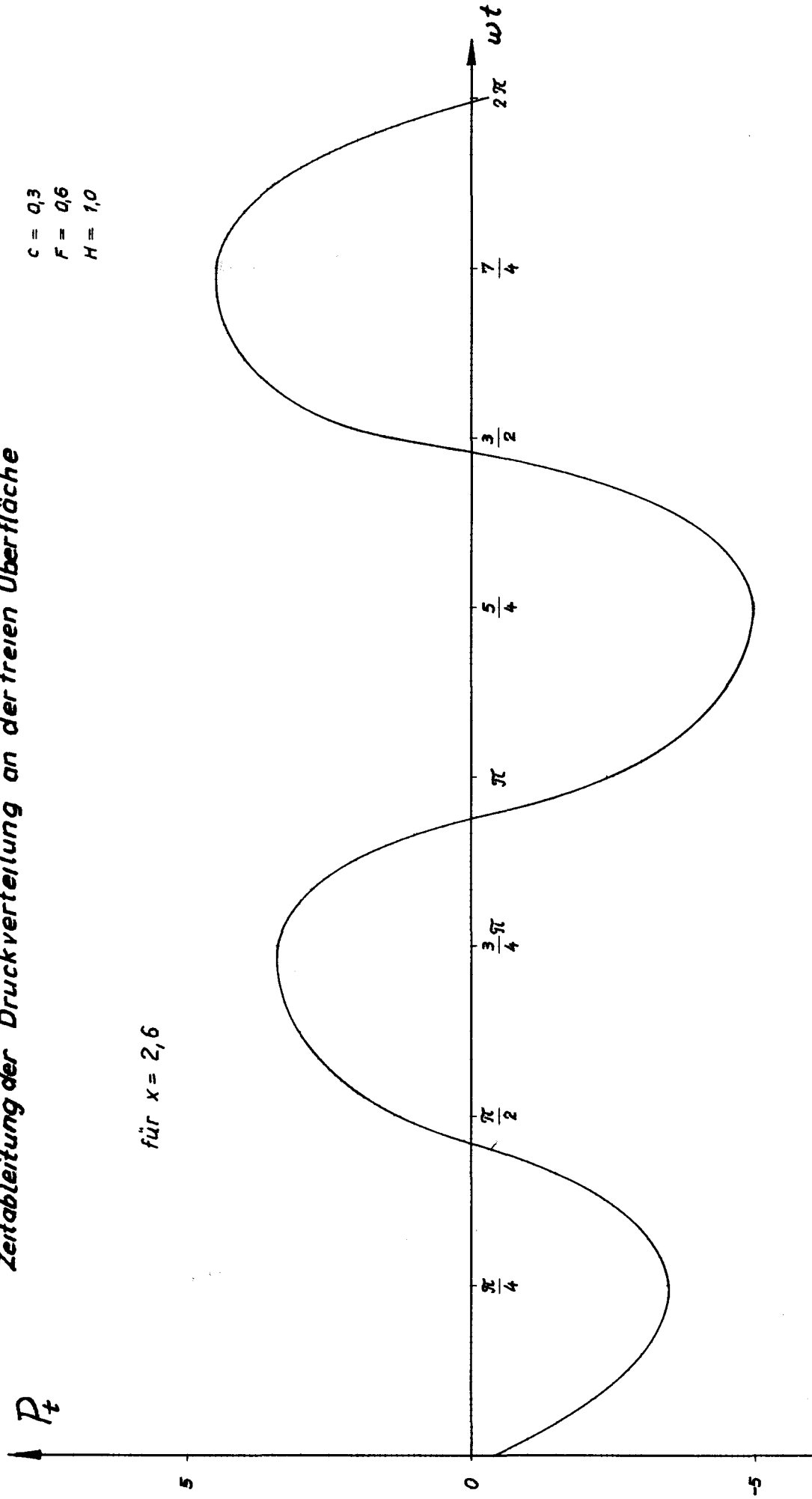


Bild 4.6 b

Zeitabteilung der Druckverteilung an der freien Oberfläche

$$\begin{aligned} c &= 0,3 \\ F &= 0,6 \\ H &= 1,0 \end{aligned}$$

für  $x = 2,6$



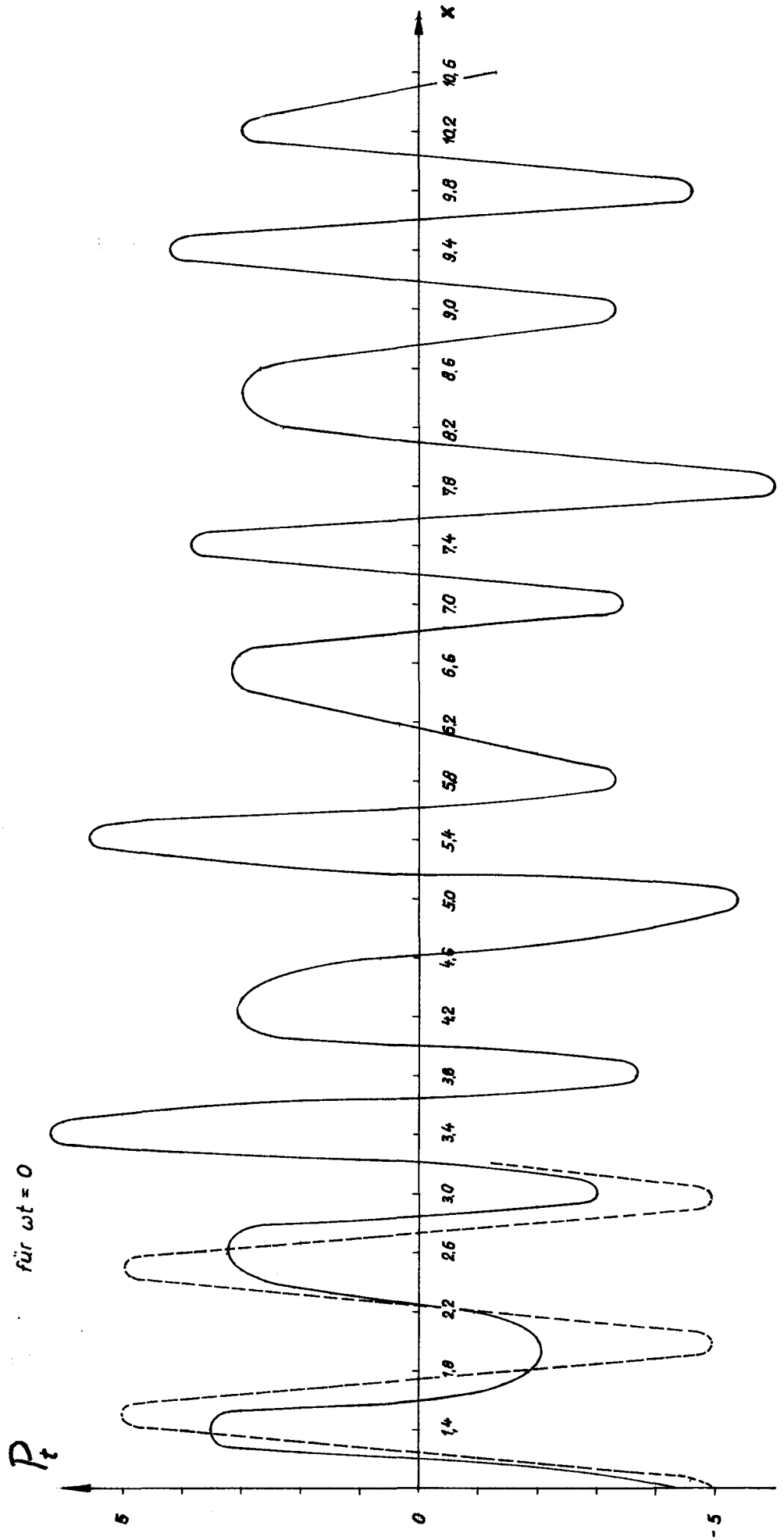
**Bild 4.7 a**

**Zeitverteilung der Druckverteilung an der freien Oberfläche**

$C = 0,2$   
 $F = 0,8$   
 $H = 1,0$

----- Anteil der Frequenz  $2\omega$  in Formel (7)

für  $\omega t = 0$



**Bild 4.7 b**  
 Zeitabteilung der Druckverteilung an der freien Oberfläche

$c = 0,2$   
 $F = 0,9$   
 $H = 1,0$

für  $x = 2,6$

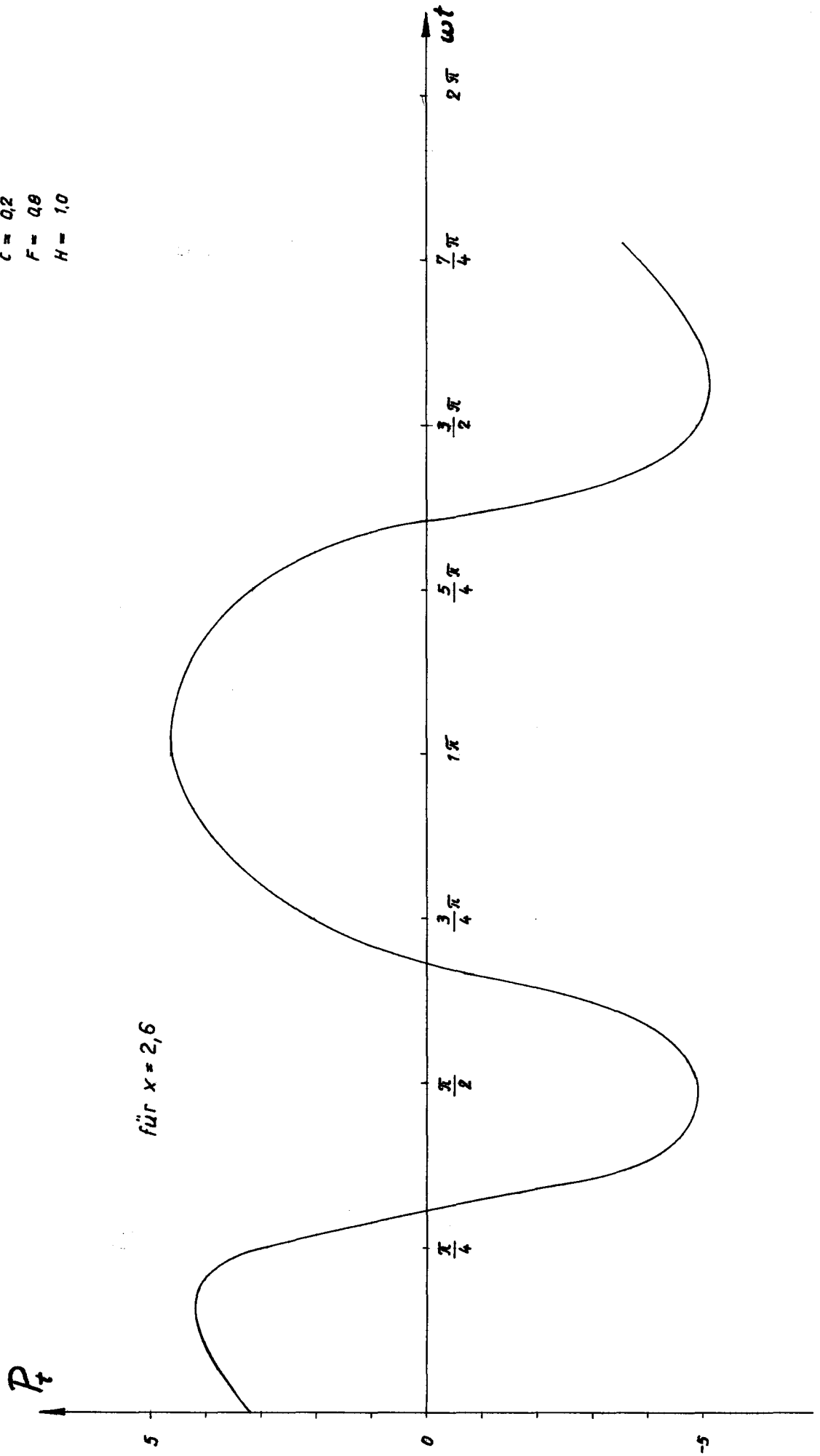


Bild 4.8a

Kraftkoeffizient

$$F = 0,04$$

$$\beta = 0,5$$

$$H = 1,73205$$

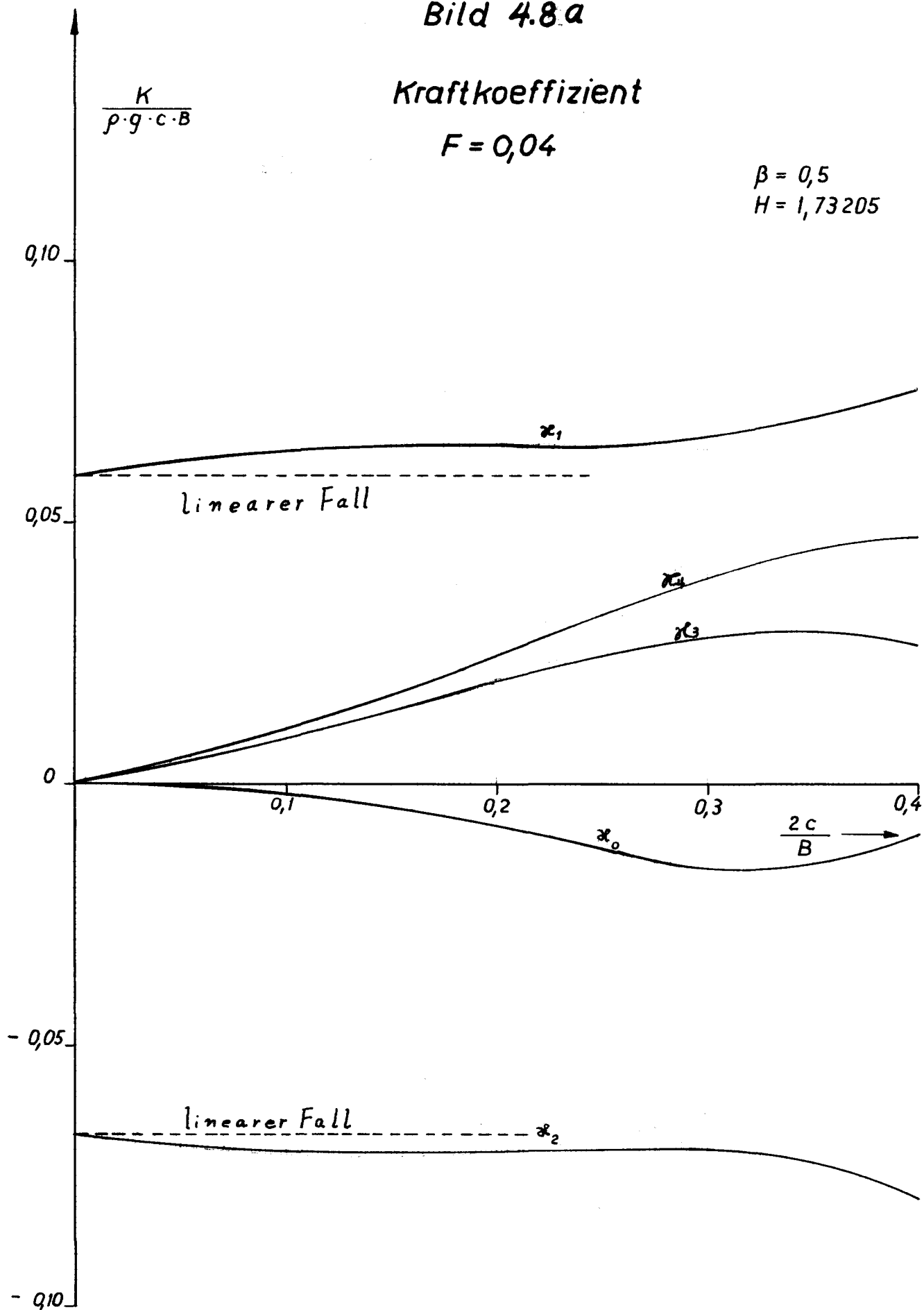


Bild 4.8 b

Kraftkoeffizient

$$F = 0,04$$

$$\beta = 0,5$$

$$H = 1,0$$

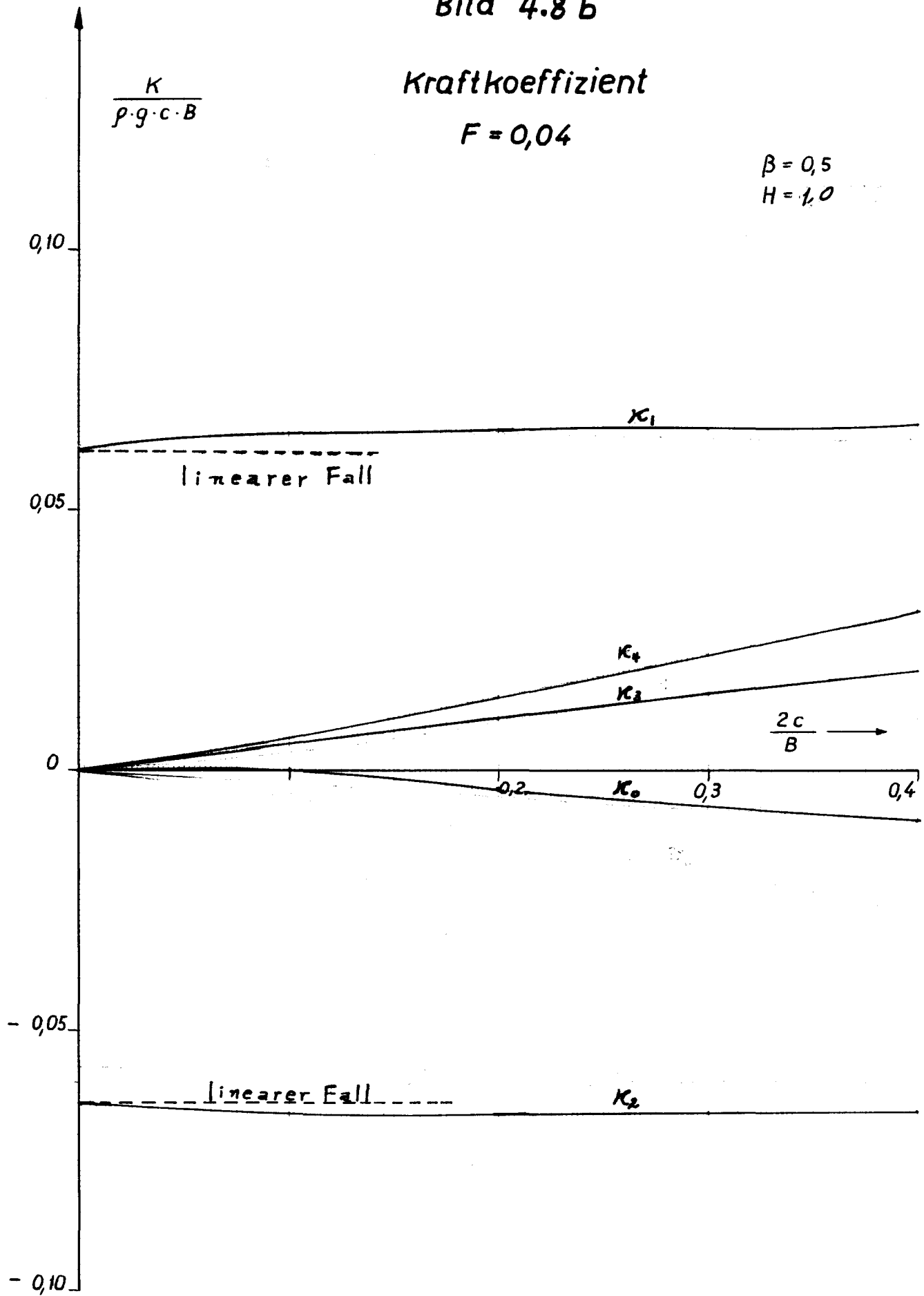


Bild 4.9 a  
Kraftkoeffizient

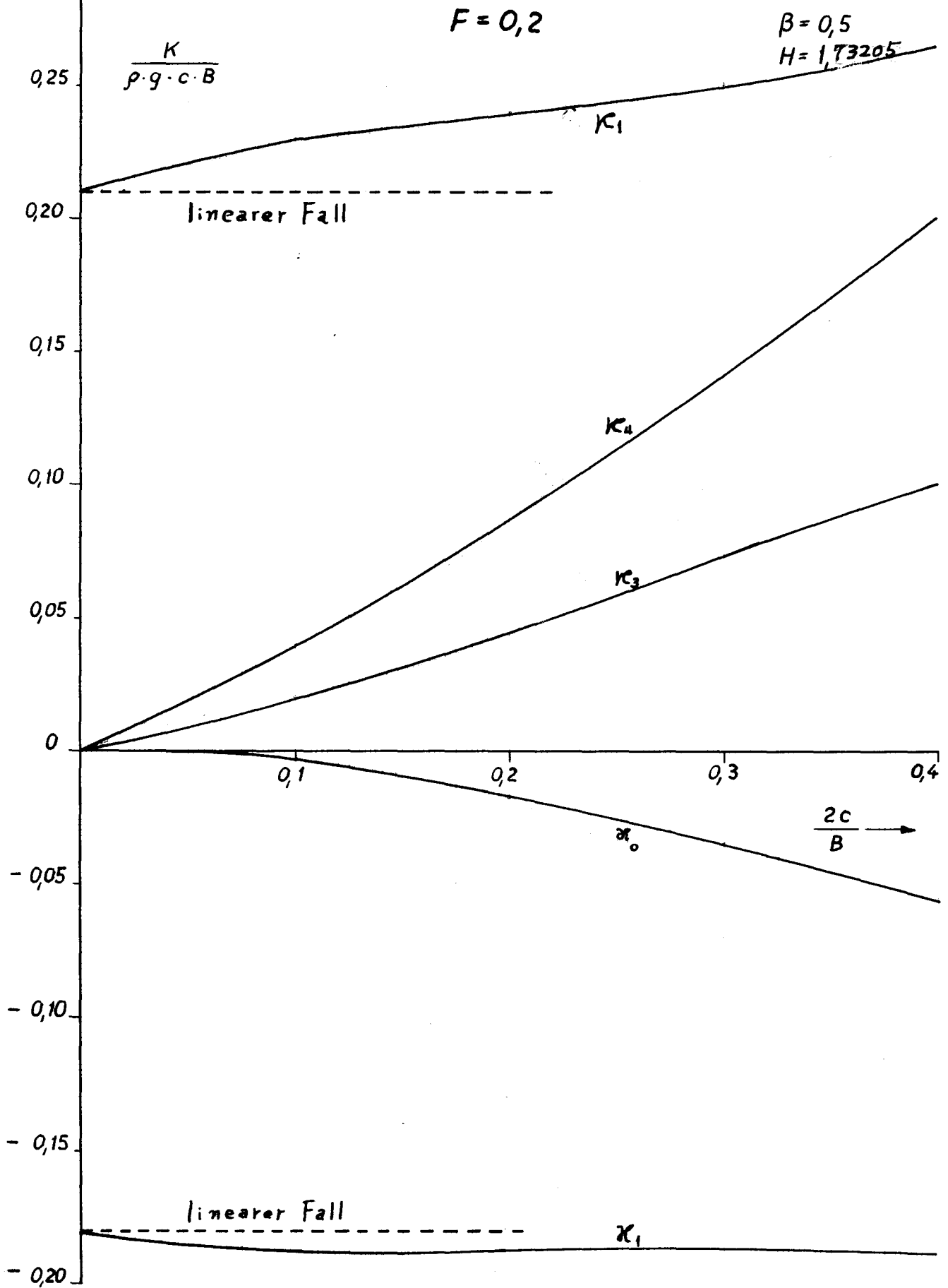


Bild 4.9 b

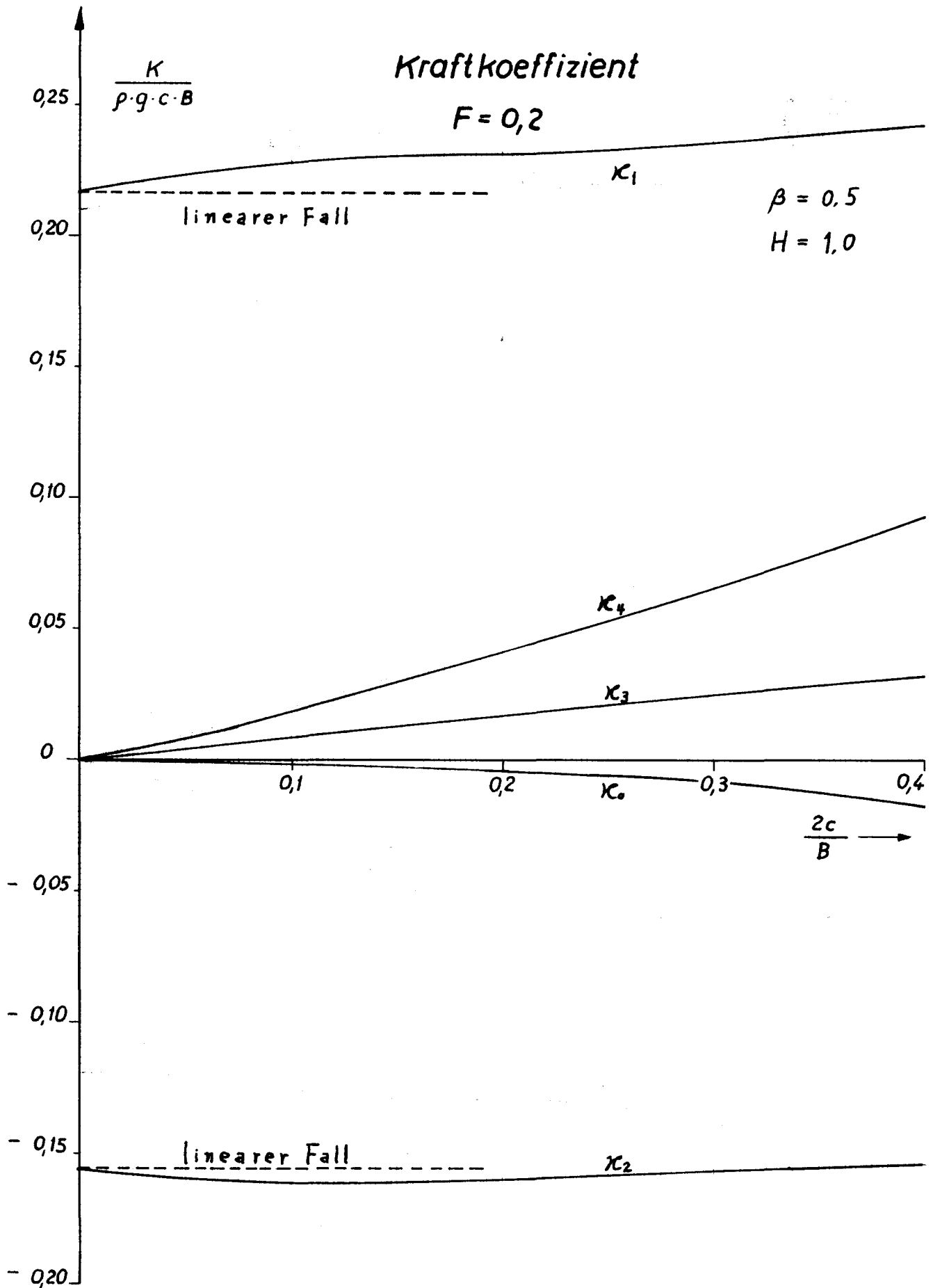




Bild 4.10 a

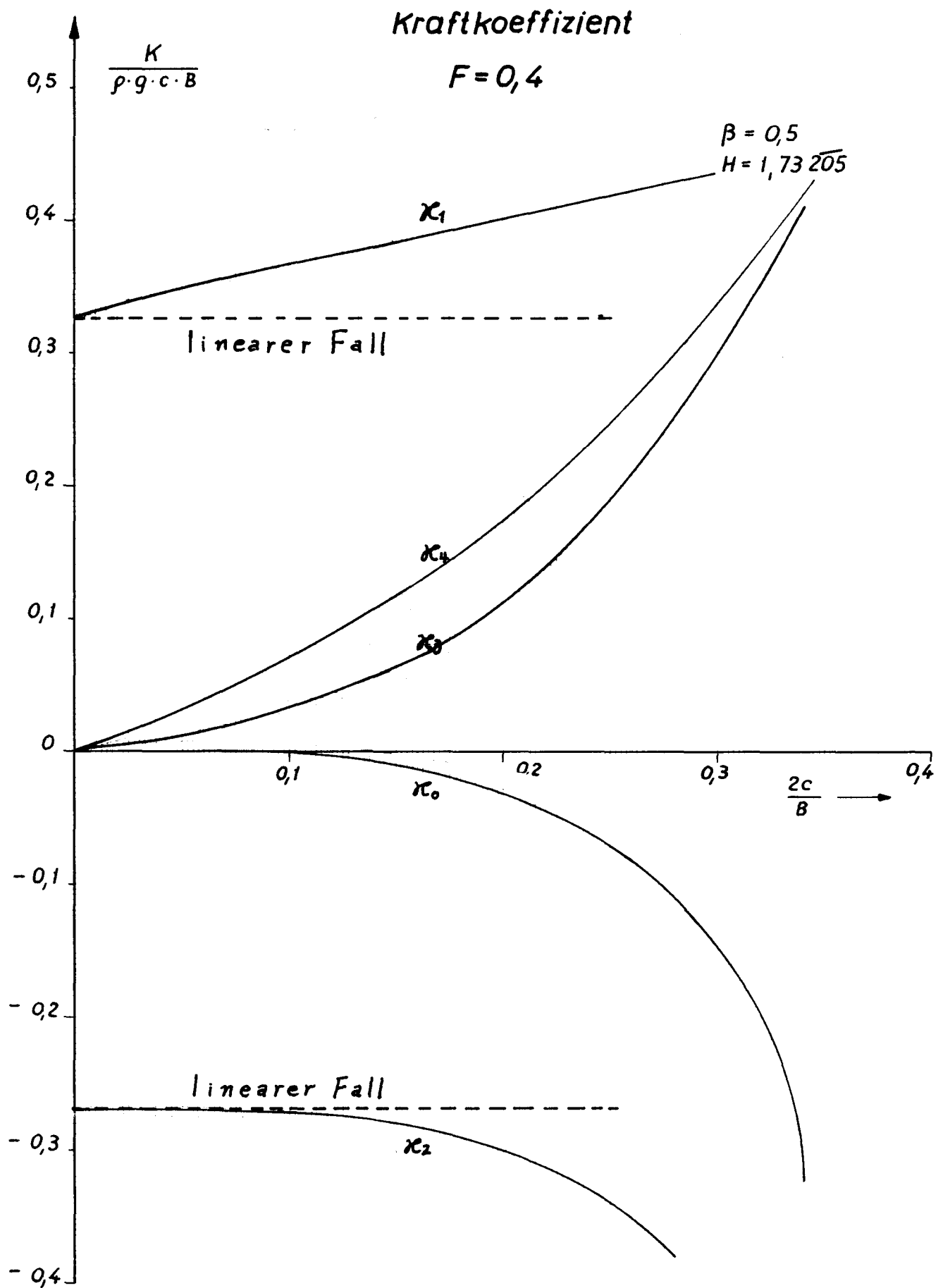


Bild 4.10 b

Kraftkoeffizient

$$F = 0,4$$

$$\beta = 0,5$$

$$H = 1,0$$

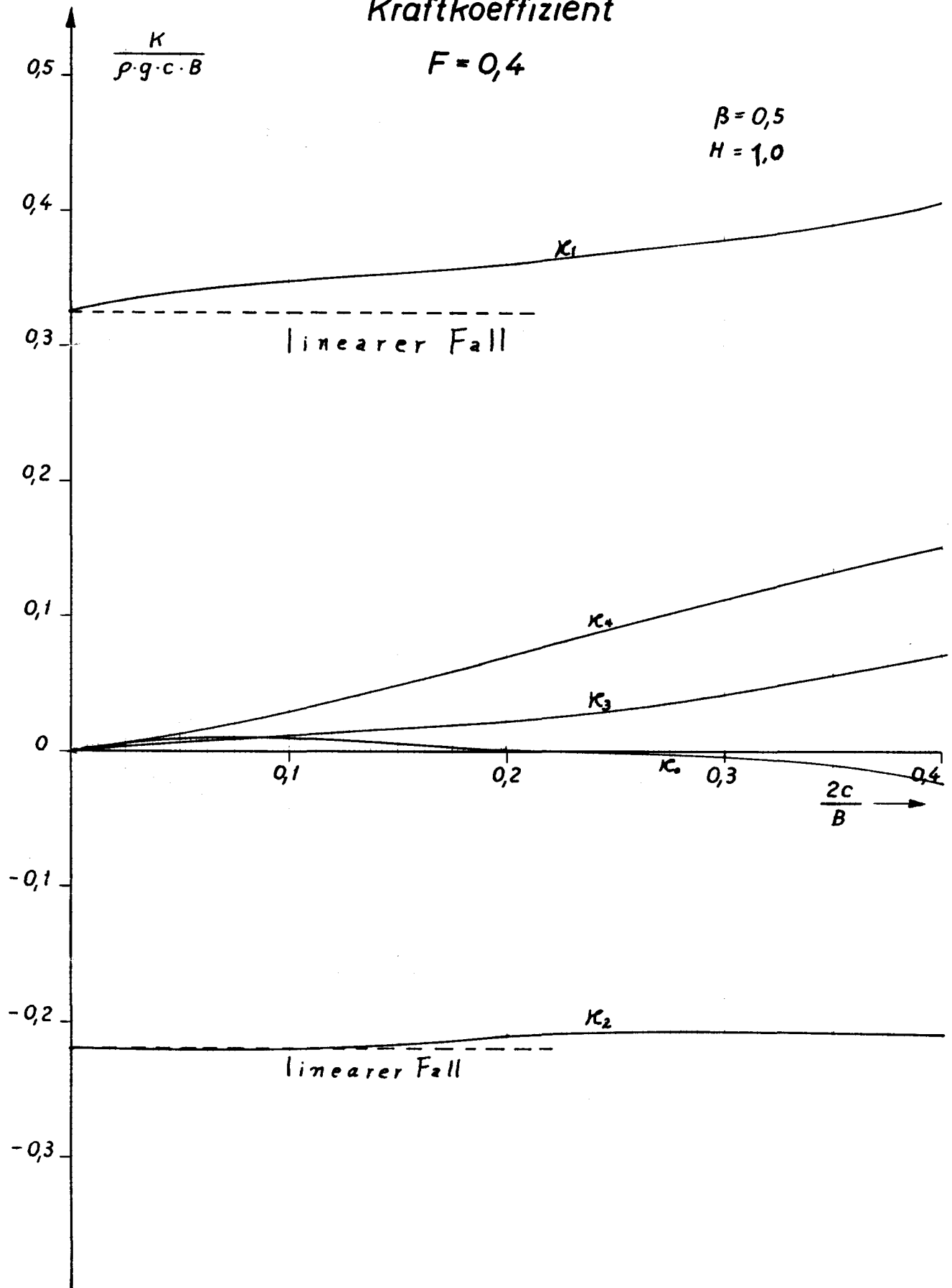


Bild 4.11 a

Kraftkoeffizient

$$F = 0,6$$

$$\beta = 0,5$$

$$H = 1,73 \ 205$$

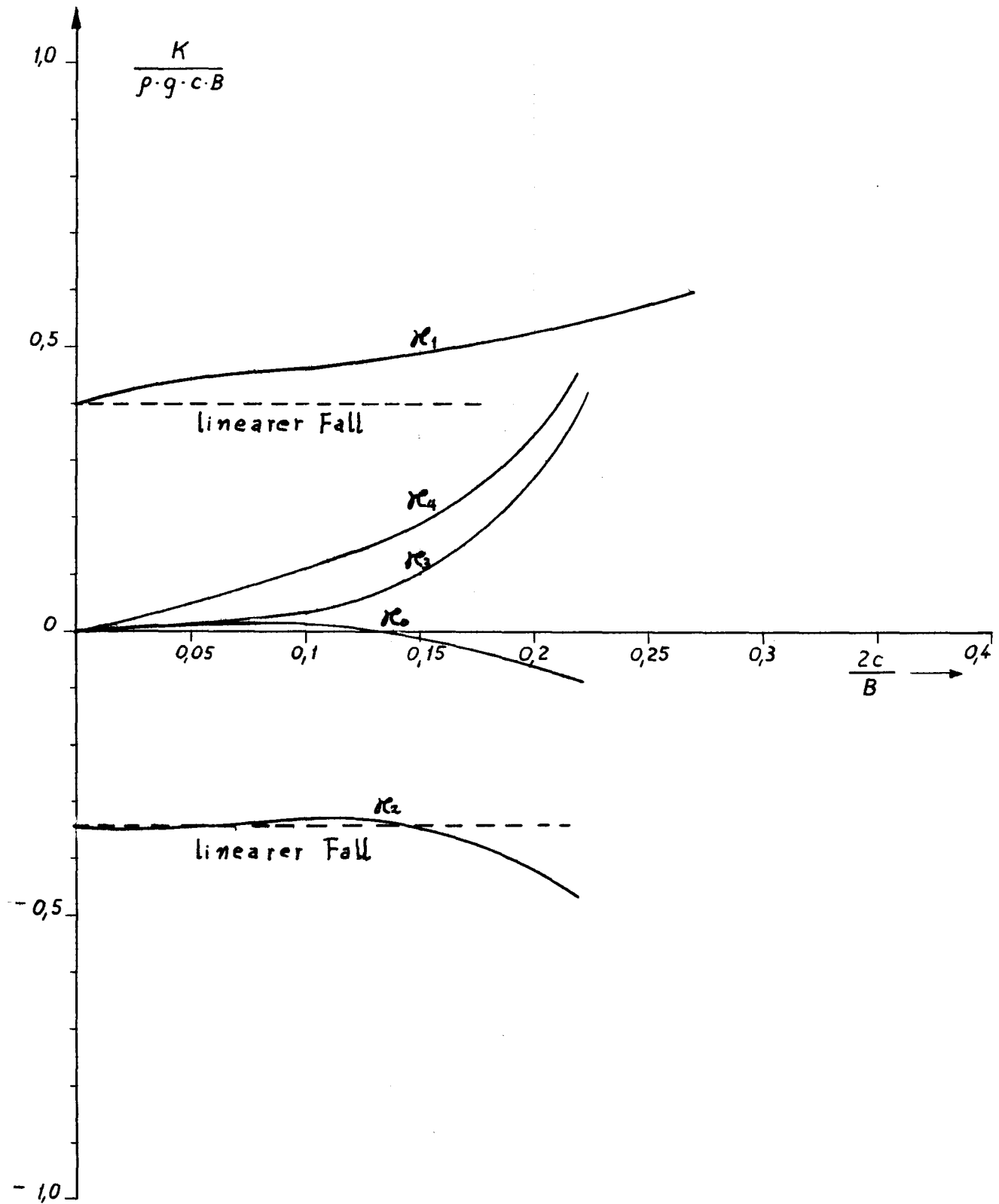


Bild 4.11 b

Kraftkoeffizient

$F = 0,6$

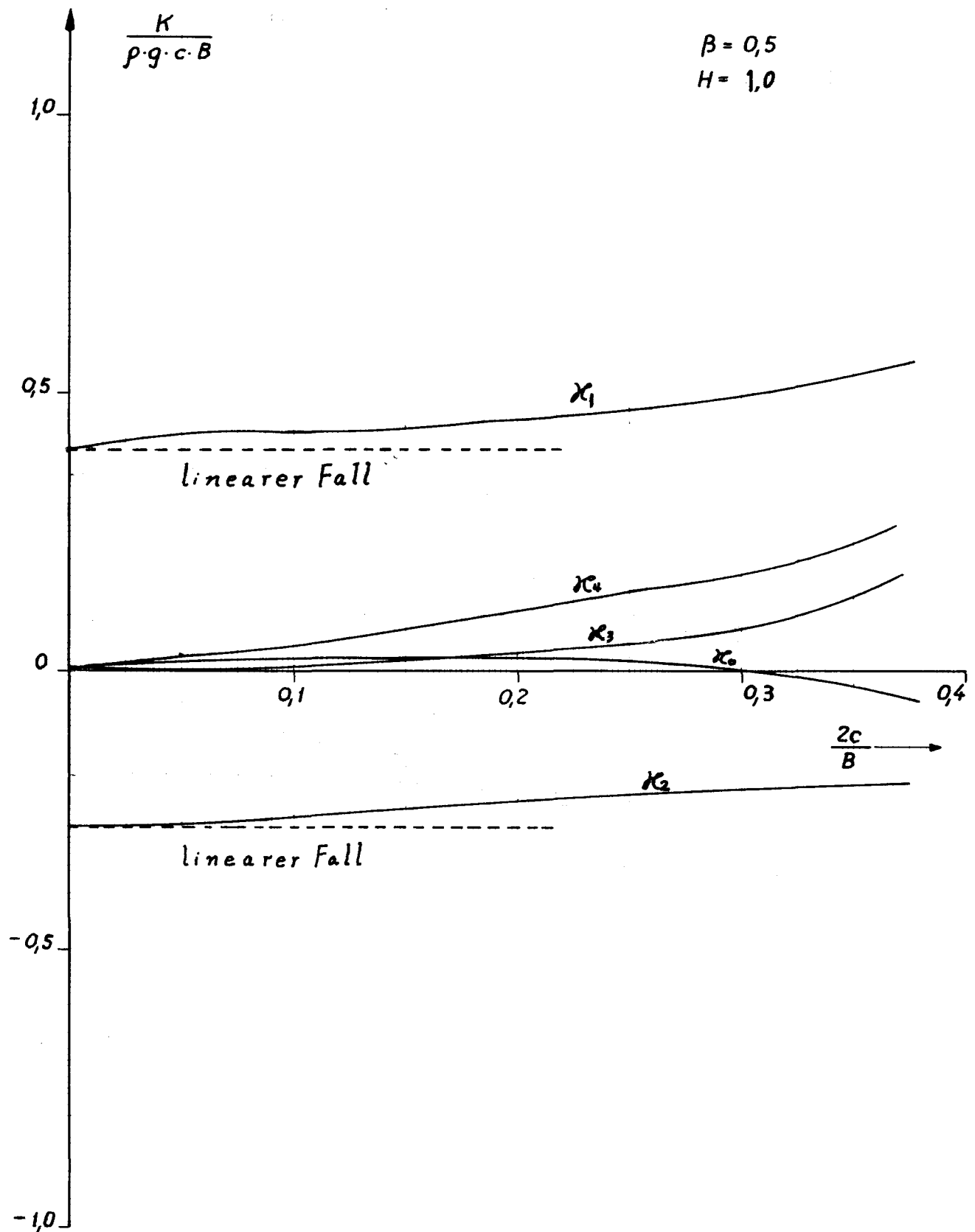


Bild 4.12 a

Kraftkoeffizient

$F = 0,8$

$\beta = 0,5$

$H = 1,73205$

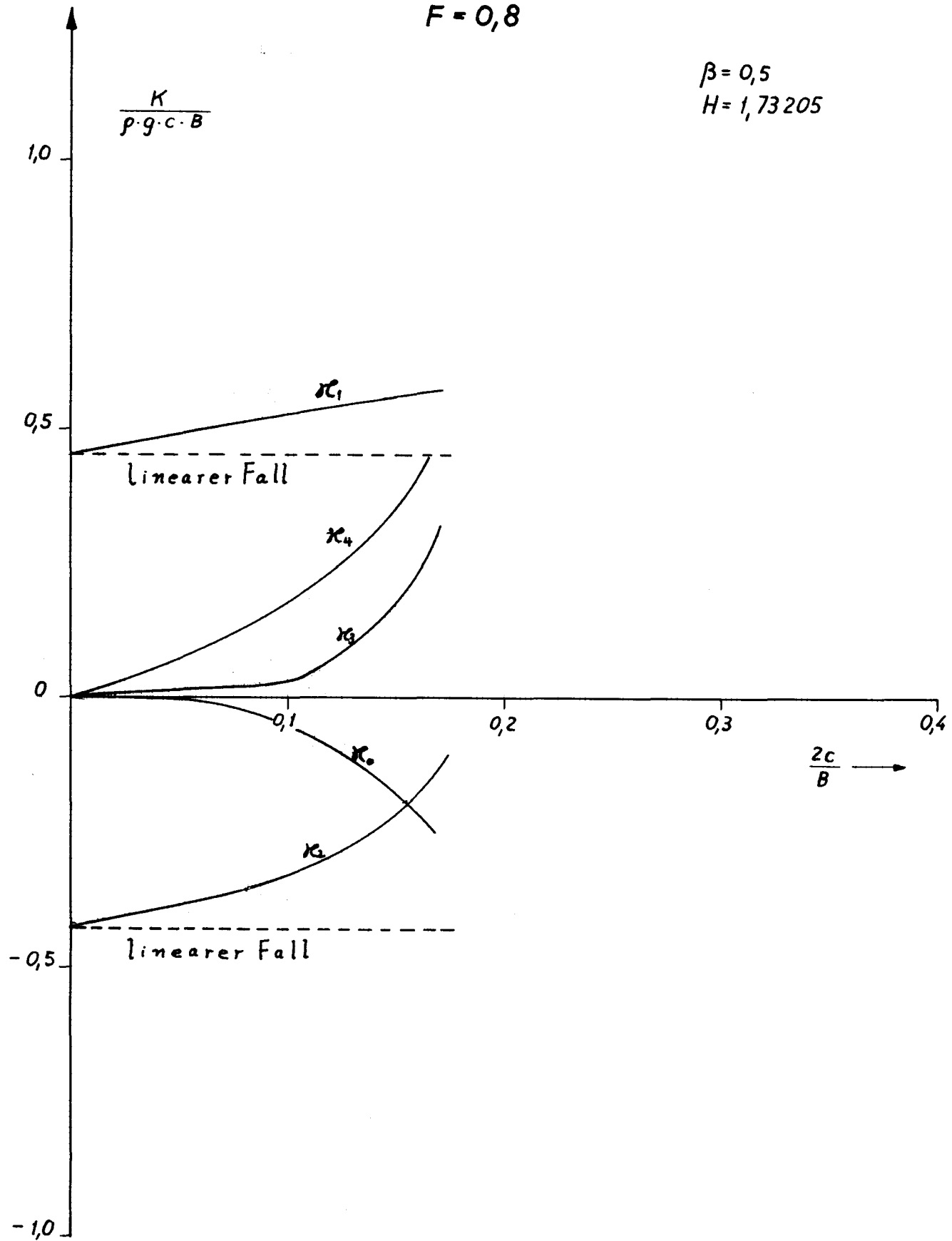


Bild 4.12 b

Kraftkoeffizient

$$F = 0,8$$

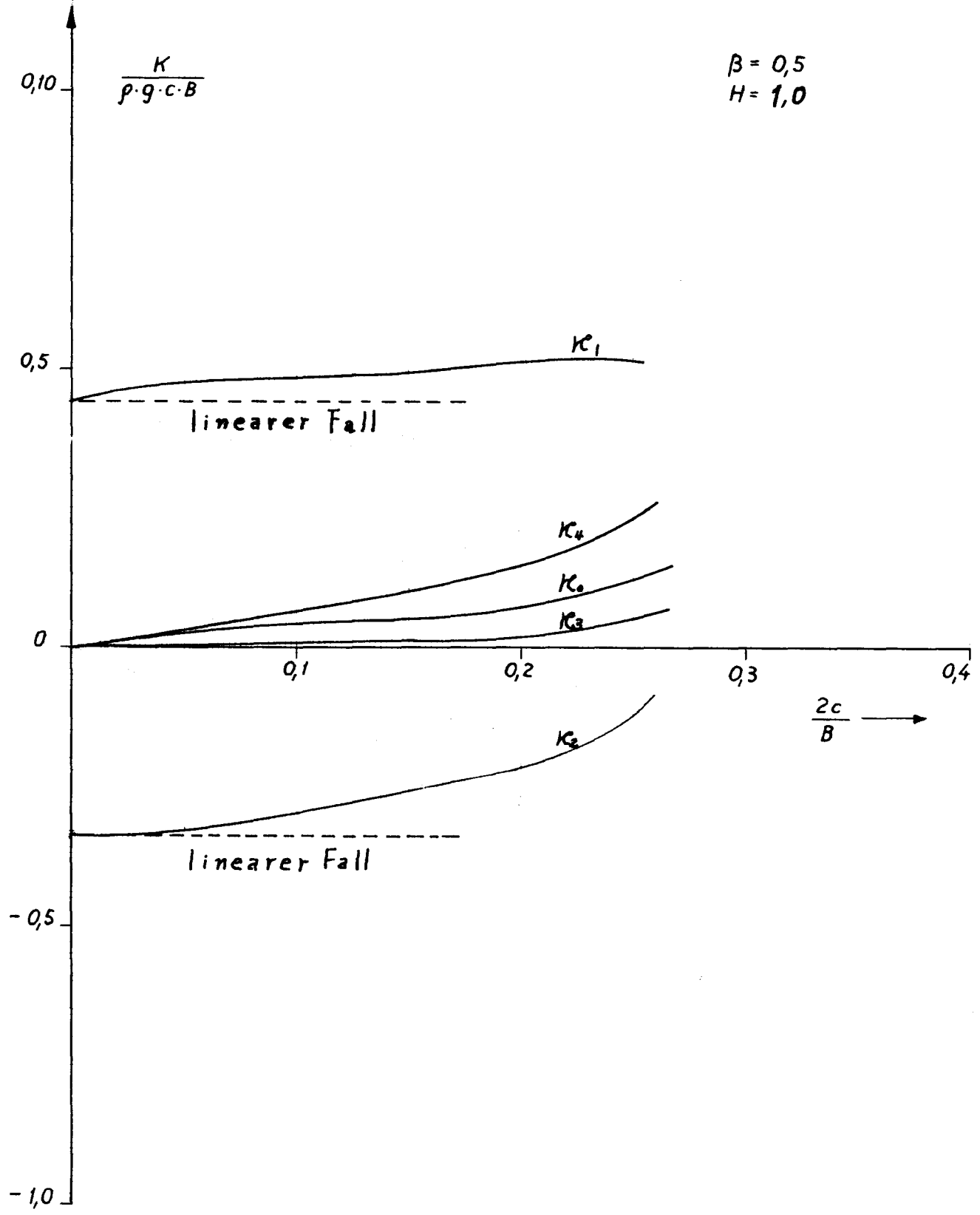


Bild 4.13a

Druckverteilung an der Lage  $wt = \frac{1}{4}\pi$

$$\beta = 0.5$$

$$H = 1.73205$$

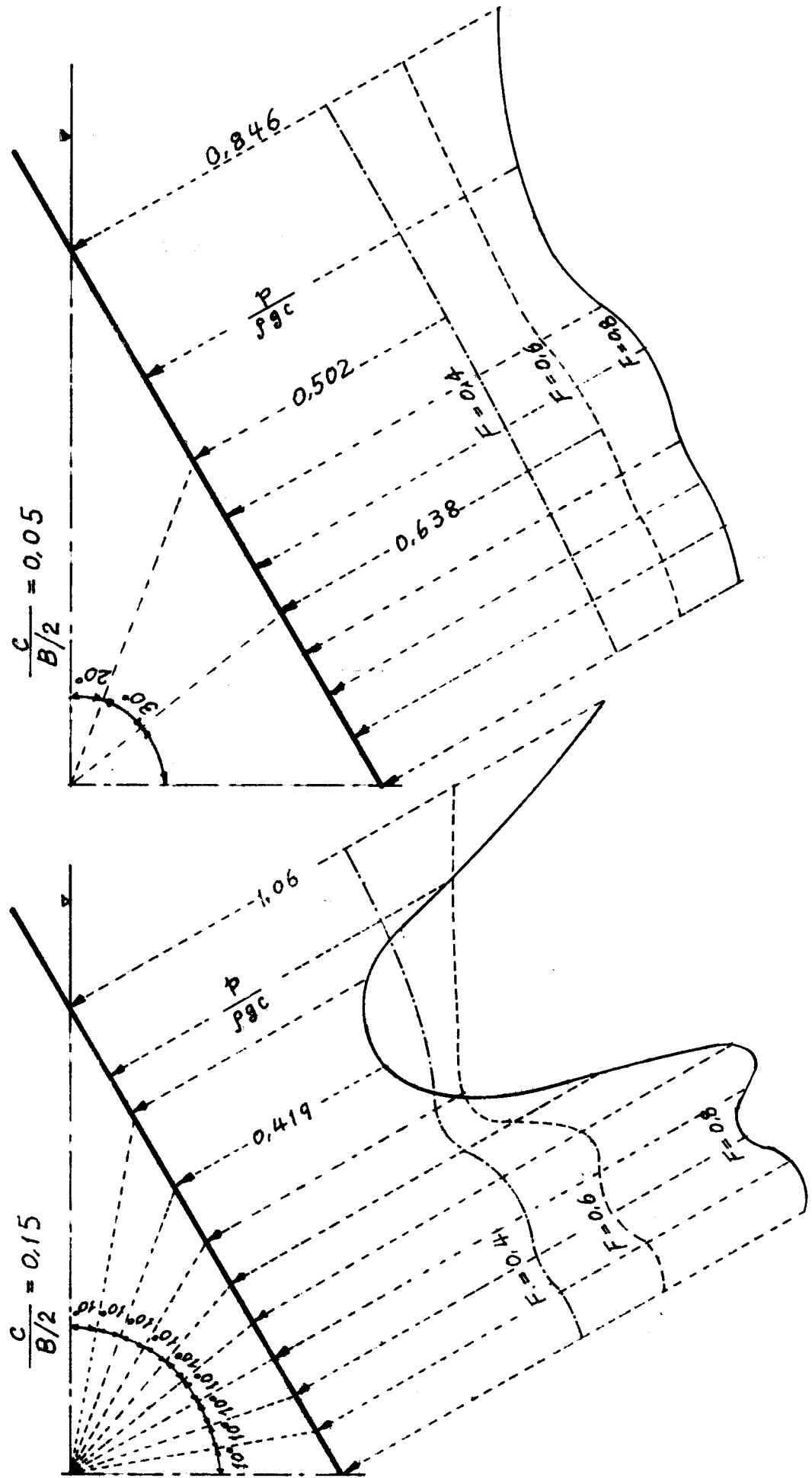


Bild 4.13 b

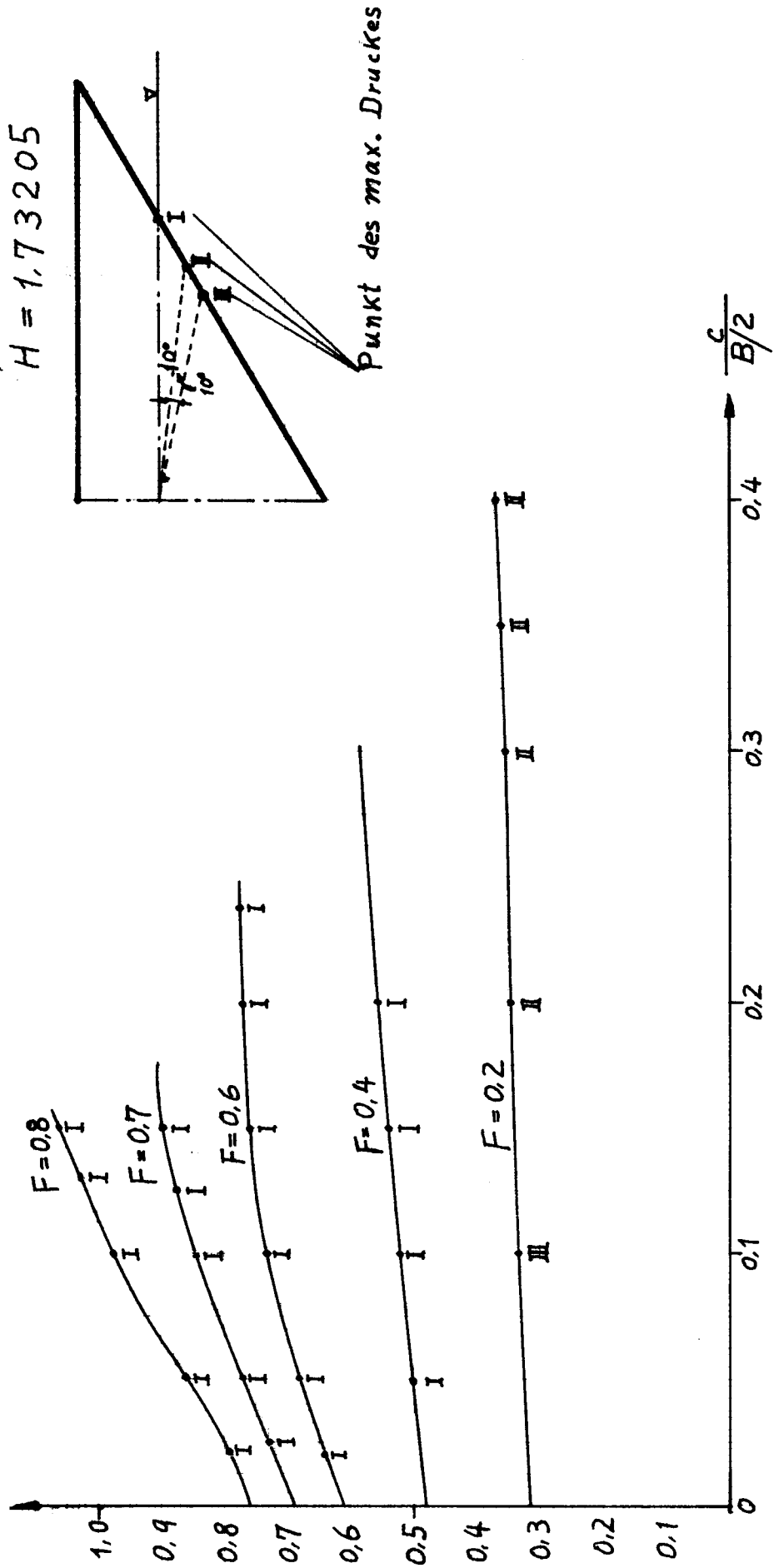
Maximaler hydrodynamischer Druck  
über Amplitudenverhältnis  $\frac{c}{B/2}$   
an der Position  $wt = \frac{7}{4}\pi$

$$\frac{P_{\max}}{\rho g c}$$

$$\frac{P_{\max}}{\rho g c}$$

$$\beta = 0,5$$

$$H = 1,73205$$





# Bild 4.13c

Maximaler hydrodynamischer Druck  
über Amplitudenverhältnis  $\frac{c}{B/2}$   
an der Position  $\omega t = \frac{7}{4}\pi$

$$\frac{P_{max}}{\rho g c}$$

$$\frac{P_{max}}{\rho g c}$$

$$\beta = 0.5$$

$$H = 1.0$$

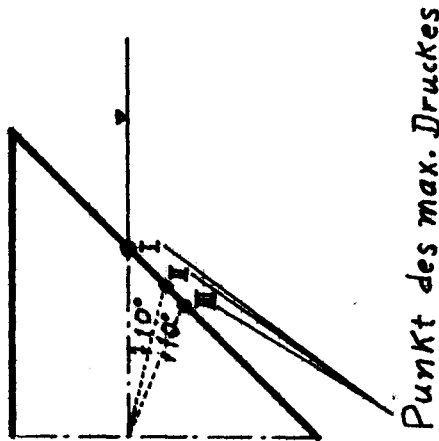
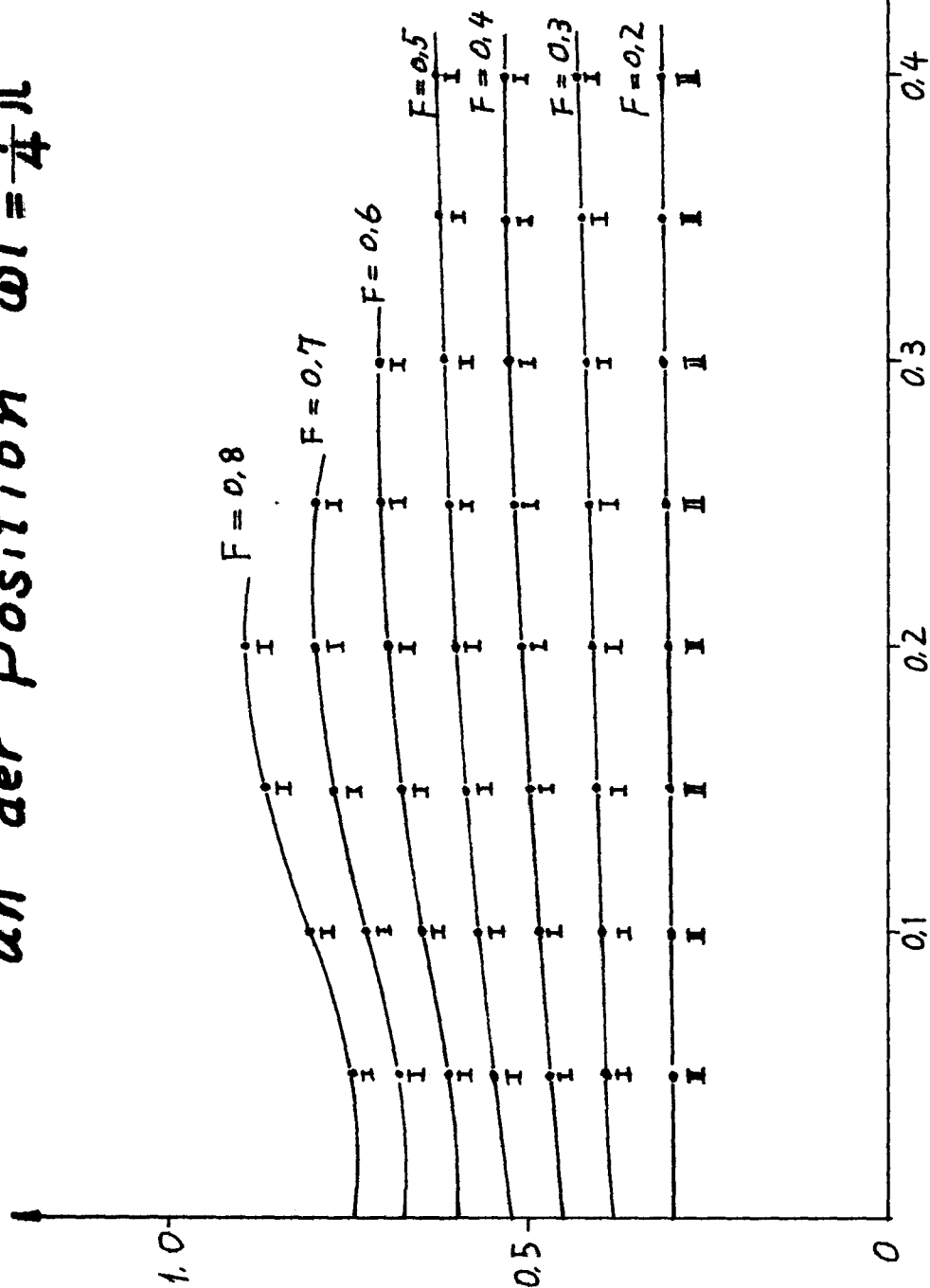
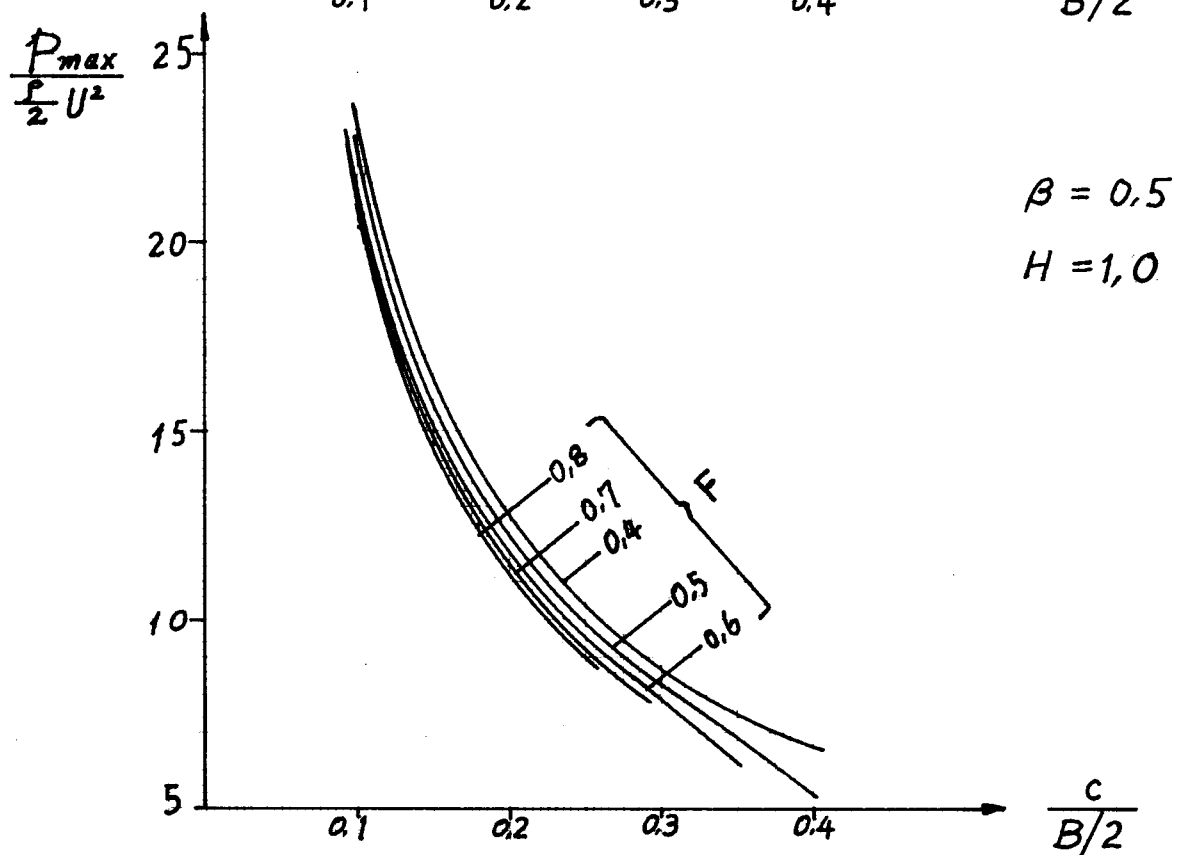
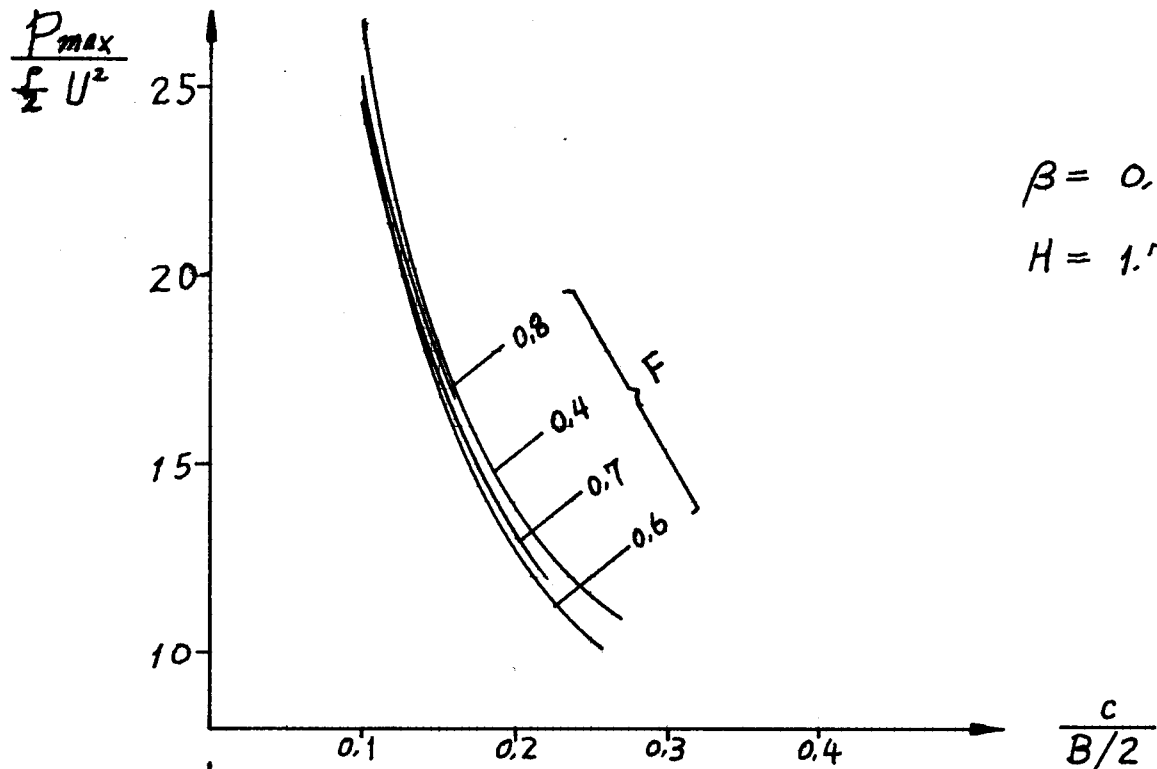


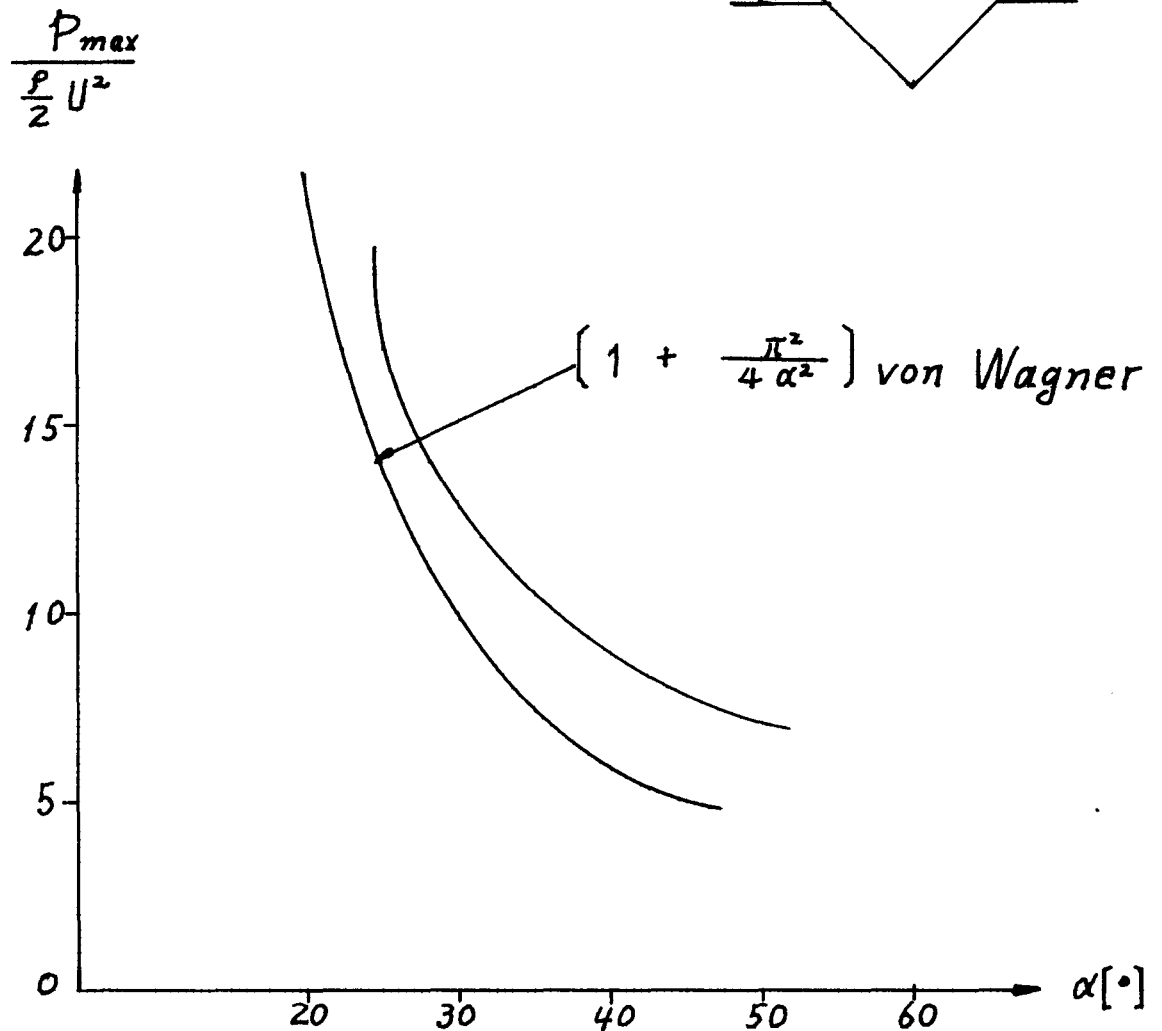
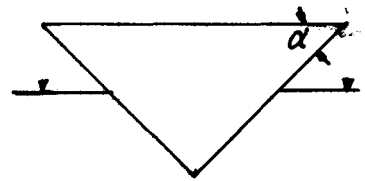
Bild 4.14 a

Maximaler hydrodyn. Druck  $\frac{P_{max}}{\frac{\rho}{2} U^2}$   
 über Amplitudenverhältnis  $\frac{c}{B/2}$



# Bild 4.14 b

Maximaler hydrodyn. Druck  $\frac{p}{\frac{\rho}{2} U^2}$   
über Winkel des Keils  $\alpha$



## 5. Zusammenfassung und Ausblick.

Das Problem der Tauchschwingungen mit endlicher Amplitude eines Zylinders ist noch nicht vollständig gelöst. Zwar ist es gelungen, für kleine Frequenzen und Amplituden bis  $0,3 \times$  halber Breite ausreichende Lösungen zu finden. Für solche Fälle sind Rechnungen durchgeführt und die Ergebnisse dargestellt worden. Diese Ergebnisse zeigen, daß die nicht-linearen Effekte zwar deutlich festzustellen sind, jedoch werden für die Berechnung der Bewegungen eines Schiffes in Seegang die Ergebnisse der linearen Lösung zu ausreichenden Ergebnissen führen.

Die Konvergenzschwierigkeiten, welche bei größeren Frequenzen und Amplituden auftreten, sind wahrscheinlich dadurch verursacht, daß die Profilkontur zu nahe an die bei  $x = 0$  und  $y = 0$  liegenden Singularitäten der benutzten Potentiale herankommt. Der Druckverlauf und die Erfüllung der Randbedingung müßte für diese Positionen (nahe der obersten Position) des Profils eingehender untersucht werden und zwar für eine größere Zahl von Punkten an der Profilkontur. Daraus könnten dann wahrscheinlich Schlüsse gezogen werden für eine Abänderung der Methode, welche dann wahrscheinlich zu ausreichenden Ergebnissen auch für größere Frequenzen und Amplituden führen würden.

Die Methode ist nicht nur für die Dreiecksprofile brauchbar, sie ist ebensogut für beliebige Profile brauchbar, die dann in das Rechenprogramm durch diskrete Punkte eingegeben werden können. Rechnungen sind auch für andere Profile ausgeführt worden. Die Ergebnisse führen jedoch z. Z. zu keinen weiteren interessanten Erkenntnissen, daher ist auf ihre Wiedergabe verzichtet worden.

SCHRIFTTUM  
=====

- [1] O. Grim                    Berechnung der durch Schwingungen  
eines Schiffskörpers erzeugten hydro-  
dynamischen Kräfte. (Jahrbuch STG 1953)
- [2] O. Grim                    Die Schwingungen von schwimmenden zwei-  
dimensionalen Körpern. (HSVA, Bericht  
Nr. 1090, 1956)
- [3] O. Grim                    Die Schwingungen von schwimmenden zwei-  
dimensionalen Körpern. (HSVA, Bericht  
Nr. 1171, 1959)
- [4] O. Grim                    Eine Methode für eine genauere Berechnung  
der Tauch- und Stampfbewegungen in glattem  
Wasser. (HSVA, Bericht Nr. 1217, 1960  
bzw. Beitrag in "Third Symposium  
on Naval Hydrodynamics in  
Scheweningen")
- [5] J.V. Wehausen            Surface Waves. (Handbuch der Physik  
Band IX, Springer Verlag, Berlin, 1960)
- [6] G. Vossers                Resistance, Propulsion and Steering  
of Ships. Behaviour of Ships in Waves.  
(The Technical Publishing Company H. Stam  
N.V., Haarlem, Netherlands, 1962)

# VERZEICHNIS DER VERWENDETEN SYMBOLE

=====

| Zeichen                  | Erklärung                                                                                                             |
|--------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $a$                      | Verhältnis von Tiefgang in der Mittellage und Halbbreite des Profils                                                  |
| $A_n, A_{ns}$            | unbekannte Koeffizienten in komplexen oder realen Zahlen                                                              |
| $(A_n)_r, (A_{ns})_r$    | realer Teil der Unbekannten $A_n$ und $A_{ns}$                                                                        |
| $(A_n)_i, (A_{ns})_i$    | imaginärer Teil der Unbekannten $A_n$ und $A_{ns}$                                                                    |
| $A_1^*$                  | Abkürzung für $8 \cdot \left\{ - \left[ (A_{o1})_r \cdot (A_{o2})_i - (A_{o2})_r \cdot (A_{o1})_i \right] \right\}$   |
| $A_2^*$                  | Abkürzung für $36 \cdot \left\{ - \left[ (A_{o1})_r \cdot (A_{o3})_i - (A_{o3})_r \cdot (A_{o1})_i \right] \right\}$  |
| $A_3^*$                  | Abkürzung für $72 \cdot \left\{ - \left[ (A_{o2})_r \cdot (A_{o3})_i - (A_{o3})_r \cdot (A_{o2})_i \right] \right\}$  |
| $A_{ns}^k$               | unbekannter Koeffizient                                                                                               |
| $\frac{A}{\bar{A}}$      | Amplitudenverhältnis der ablaufenden Welle zur Tauchbewegung                                                          |
| $(A_{os}) \frac{\pi}{B}$ | Quellstärke in dimensionsloser Form                                                                                   |
| $b$                      | Tiefgang des Profils in der Mittellage                                                                                |
| $B$                      | Breite des Profils                                                                                                    |
| $B_{mn}$                 | Fourierkoeffizient                                                                                                    |
| $B_1^*$                  | Abkürzung für $8 \cdot \left\{ \left[ (A_{o1})_r \cdot (A_{o2})_r + (A_{o1})_i \cdot (A_{o2})_i \right] \right\}$     |
| $B_2^*$                  | Abkürzung für $36 \cdot \left\{ \left[ (A_{o1})_r \cdot (A_{o3})_r + (A_{o1})_i \cdot (A_{o3})_i \right] \right\}$    |
| $B_3^*$                  | Abkürzung für $72 \cdot \left\{ \left[ (A_{o2})_r \cdot (A_{o3})_r + (A_{o2})_i \cdot (A_{o3})_i \right] \right\}$    |
| $c$                      | Amplitude der Tauchbewegung                                                                                           |
| $C$                      | Koeffizient der hydrodynamischen Masse bzw. $\frac{m^*}{\rho \frac{\pi}{8} B^2}$ oder beliebige Konstante (Kapitel 4) |
| $C_m$                    | Fourierkoeffizient                                                                                                    |
| $D$                      | beliebige Konstante                                                                                                   |
| $\frac{D}{Dt}$           | substantiale Ableitung                                                                                                |
| $F$                      | dimensionsloser Frequenzparameter bzw. $\frac{v \cdot B}{2}$                                                          |
| $F_1, F_2, \dots, F_7$   | Kraftkoeffizienten $\left( \frac{K}{\rho g c B} \right)$ einer jeden Position                                         |

| Zeichen              | Erklärung                                                                                                                                                             |
|----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $F_n(t)$             | unbekannte Funktion von der Zeit $t$                                                                                                                                  |
| $g$                  | Schwerkraftbeschleunigung                                                                                                                                             |
| $H$                  | Verhältnis von Halbbreite und Tiefgang in der Mittellage des Profils                                                                                                  |
| $J$                  | Abkürzung für die Integrale (Kapitel 4)                                                                                                                               |
| $J_1, J_2, J_3, J_4$ | Abkürzung für die Integrale (Kapitel 2)                                                                                                                               |
| $K$                  | hydrodynamische Kraft                                                                                                                                                 |
| $K_{inst}$           | instationäre hydrodynamische Kraft                                                                                                                                    |
| $K_{quasi}$          | quasistationäre hydrodynamische Kraft                                                                                                                                 |
| $k$                  | ganze Zahl                                                                                                                                                            |
| $L$                  | Abkürzung für $A_2 S_3 + A_3 S_4 + A_4 S_5$                                                                                                                           |
| $m$                  | ganze Zahl                                                                                                                                                            |
| $m''$                | hydrodynamische Masse                                                                                                                                                 |
| $n$                  | ganze Zahl                                                                                                                                                            |
| $N$                  | ganze Zahl                                                                                                                                                            |
| $p$                  | hydrodynamischer Druck                                                                                                                                                |
| $p_{inst}$           | instationärer hydrodynamischer Druck                                                                                                                                  |
| $p_{quasi}$          | quasistationärer hydrodynamischer Druck                                                                                                                               |
| $P_t$                | Abkürzung für $\frac{1}{U^2 \omega} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi^{(n)})^2 - \phi_t^{(n)} (\phi_{yy}^{(n)} - \frac{1}{g} \phi_{tty}^{(n)}) \right]$ |
| $r$                  | reale Zahl                                                                                                                                                            |
| $(r, \theta)$        | Polarkoordinaten; $\theta = \arctg \frac{x}{y}$                                                                                                                       |
| $(r, \varphi)$       | Polarkoordinaten; $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$                                                                                                                      |
| $r_p$                | Radius für den Punkt am Profilrand                                                                                                                                    |
| $s$                  | reale oder ganze Zahl                                                                                                                                                 |
| $ds$                 | Linienelement                                                                                                                                                         |
| $S_1, S_2, S_3, S_4$ | Abkürzung für die Integrale (Kapitel 2)                                                                                                                               |
| $S$                  | Abkürzung für $A_1 J_1 + 2 A_2 J_2 + 3 A_3 J_3 + 4 A_4 J_4$                                                                                                           |
| $t$                  | Zeit                                                                                                                                                                  |
| $U$                  | Amplitude der Schwingungsgeschwindigkeit                                                                                                                              |
| $(x, y)$             | kartesische Koordinaten                                                                                                                                               |
| $\beta$              | Völligkeitskoeffizient des Profils                                                                                                                                    |
| $\gamma$             | Eulersche Konstante                                                                                                                                                   |



Zeichen

Erklärung

|                                                                        |                                                                                                                                                      |
|------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\eta$                                                                 | Verschiebung der Wasseroberfläche in vertikaler Richtung                                                                                             |
| $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}$                                               | Verschiebung der Wasseroberfläche erster und zweiter Ordnung                                                                                         |
| $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ | Koeffizienten der trigonometrischen Reihe, die aus dem Kraftkoeffizienten $\frac{K}{\rho g c B}$ oder $\frac{K_{inst}}{\rho g c B}$ errechnet werden |
| $\alpha'_0, \alpha'_1, \alpha'_3, \alpha'_5$                           | Koeffizienten der trigonometrischen Reihe, die aus $\frac{K_{quasi}}{\rho g c B}$ errechnet werden                                                   |
| $\mu$                                                                  | Reibungskoeffizient nach Rayleigh                                                                                                                    |
| $\nu$                                                                  | Wellennummer bzw. $\frac{\omega^2}{g}$                                                                                                               |
| $\rho$                                                                 | Dichte des Wassers                                                                                                                                   |
| $\Phi$                                                                 | Geschwindigkeitspotential des komplexen Potentials = $\Phi + i \Psi$                                                                                 |
| $\phi$                                                                 | Geschwindigkeitspotential = $\text{Re} (\Phi)$                                                                                                       |
| $\phi_{ns}$                                                            | Teilkomponenten des Geschwindigkeitspotentials                                                                                                       |
| $(\phi_{ns})_r, (\phi_{ns})_i$                                         | realer und imaginärer Teilkomponent von $\phi_{ns}$                                                                                                  |
| $\varphi, \varphi^a, \varphi^b$                                        | Geschwindigkeitspotential                                                                                                                            |
| $\phi^{(1)}, \phi^{(2)}$                                               | Geschwindigkeitspotential erster und zweiter Ordnung                                                                                                 |
| $\phi^{(1)k}, \phi^{(2)k}$                                             | korrigierte Geschwindigkeitspotentiale                                                                                                               |
| $\Psi$                                                                 | Stromfunktion des komplexen Potentials = $\Phi + i \Psi$                                                                                             |
| $\psi$                                                                 | Stromfunktion bzw. $\text{Re} (\Psi)$                                                                                                                |
| $\psi_{ist}$                                                           | Stromfunktion als die Randbedingung an der Körperoberfläche                                                                                          |
| $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}$                                               | Stromfunktion erster und zweiter Ordnung                                                                                                             |
| $\psi_{ns}$                                                            | Teilkomponent der Stromfunktion                                                                                                                      |
| $\psi^{(1)k}$                                                          | korrigierte Stromfunktion                                                                                                                            |
| $\omega$                                                               | Kreisfrequenz der Schwingung                                                                                                                         |



ANHANG A  
=====

( zu Kapitel 3 und 4)

# -STARTUEBERSETZER

SB516 KIM

'BEGIN'

'COMMENT' ZEITABLEITUNG DER DRUCKVERTEILUNG ..

'REAL' NUE, BA, BB, BC, BD, BE, BF, BG, GA, GB, GC, GD, GE,  
AM, UE,

GF, C, S, A, B, BH, GG, RHO, RHO2, RHOJ, PHI ..

'INTEGER' M, N, T, TT, K, I, J, L, Q, E, E1, T1, R, NN, Z, MM, D ..

'PROCEDURE' TRANSP .. 'CODE' ..

'PROCEDURE' ADIVB .. 'CODE' ..

'PROCEDURE' MAMUBT .. 'CODE' ..

NIN..READ (N) ..

READ (UE) ..

E1 = 0 ..

'BEGIN'

'ARRAY' X,Y,XX,AT(1..N),B1,B2,B3,B4,G1,G2,G3(1..N,1..N),

VX,VY,POT,VTX,VTY,VY2,VTY(1..7\*N,1..6\*N) ,

VXX, VYY, PT, VTXR, VTYR, VY2R, VTTYR, C1 ( 1..7\*N),

C2(1..7\*N),

GES( 1..1 , 1..6\*N) ,

S1(1..3) ..

'PROCEDURE' UPKIM ..

'BEGIN'

J= 0 ..

SJ.. J=J+1 ..

LABL1..I = 1 ..

SI.. X(I) = XX(I) ..

B2(I,J) = -3.141592652\*EXP(-NUE\*Y(I))\*SIN(NUE\*X(I)) ..

LA3..G2(I,J) = -3.141592652\*EXP(-NUE\*Y(I))\*COS(NUE\*X(I)) ..

BA = BB = NUE\*SQRT(X(I)\*X(I)+Y(I)\*Y(I)) ..

'IF' Y(I) 'LESS' 0.1\$-3 'THEN' BC = 1.5708\*SIGN(X(I)) 'ELSE'

BC = ARCSIN(NUE\*X(I)/BA) ..

BD = BE = 0 ..

'IF' BA 'LESS' 6 'THEN' 'BEGIN'

MM = 1 ..

LA4..BD = BD+BB\*COS(MM\*BC) ..

BE = BE-BB\*SIN(MM\*BC) ..

BB = BB\*BA\*MM/((MM+1)\*(MM+1)) ..

MM = MM+1 ..

'IF' BB 'GREATER' 0.1\$-5\*BA 'THEN' 'GOTO' LA4..

BD = (-BD-LN(1.781\*BA))\*EXP(-NUE\*Y(I)) ..

BE = (-BE+BC)\*EXP(-NUE\*Y(I)) ..

GA = BD\*COS(NUE\*X(I))-BE\*SIN(NUE\*X(I)) ..

GB = BE\*COS(NUE\*X(I))+BD\*SIN(NUE\*X(I))

'END' BA LESS

'ELSE' 'BEGIN'

'FOR' MM = 1 'STEP' 1 'UNTIL' 5 'DO' 'BEGIN'

BD = BD-COS(MM\*BC)/BB ..

BE = BE-SIN(MM\*BC)/BB ..

BB = BA\*BB/MM

'END' MM ..

GA = BD-3.141592652\*EXP(-NUE\*Y(I))\*SIGN(X(I))\*(SIN(NUE\*X(I))) ..

GB = BE+3.141592652\*EXP(-NUE\*Y(I))\*SIGN(X(I))\*COS(NUE\*X(I))

'END' BA GREATER ..

B1(I,J)= +GB ..

LA5..G1(I,J)= +GA..

B3(I,J) = -(NUE\*Y(I)/(BA\*BA)+ G1(I,J))\*NUE ..

G3(I,J) = -(NUE\*X(I)/(BA\*BA) + B1(I,J))\*NUE ..

B4(I,J)=-NUE\*(B3(I,J)+NUE\*NUE\*NUE\*(X(I)\*X(I)-Y(I)\*Y(I))/  
(BA\*POWER(4) ) ..

I=I+1 .. 'IF' I 'LESS' N+1 'THEN' 'GOTO' SI ..

'FOR' I=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'

'BEGIN' RHO= SQRT(XX(I)\*XX(I)+ Y(I)\*Y(I)) ..

005

006

007

008

010

011

013

017

018

019

021

0211

023 3

02

027

028

029

030

031

032

033

034

035

036

37

038

039

040

041

042

043

044

045

046

047

048

049

050

051

053

054

ANHANG B

=====

(zu Kapitel 4)

```

VTTY(K+T1*N,L+(2*TT-1)*N)=TT*TT*(-C*NUE*G2(K,L)+S*B3(K,L))  .,
'END'  ., 'END'  .,
T1 = T1 + 1  .,
'IF' T1 'LESS' 7 'THEN' 'GOTO' F3  .,
NUE = 9*NUE/4  .,
TT = TT+1  .,
'IF' TT 'LESS' 4.0 'THEN' 'GOTO' KI1  .,
      MAMUBT( GES,VX,VXX) .,
      MAMUBT( GES, VY,VYY )  .,
      MAMUBT( GES, POT, PT)  .,
      MAMUBT( GES, VTX, VTXR)  .,
      MAMUBT( GES, VTY, VTYR)  .,
      MAMUBT( GES,VY2, VY2R)  .,
      MAMUBT( GES, VTTY, VTTYR)  .,
'FOR' K=1 'STEP' 1 'UNTIL' 7*N 'DO'
'BEGIN'
C1( K ) = 2* (VXX(K)*VTXR(K) + VYY(K)*VTYR(K))
          PT(K)*(VY2R(K)-UE*VTTYR(K))  .,
C2(K)=- PT(K)*(VY2R(K)-UE*VTTYR(K))  .,
'END'  .,
OUTPUT( 1, C1, C2)  .,
'GOTO' 9  .,
9.. 'GOTO' NIN  .,
'END'  .,
'END'  .,

```

152

\*

```

5, 0.2, 7, 7.4, 7.8, 8.2, 8.6, 0, 0, 0, 0, 0,
4.82570054988$- 1,-2.57287563358$- 2, 2.52454711974$- 2,
-0.93341622600$- 2, 0.97602740850$- 2, 1.38838304636$- 1,
-0.59171597890$- 2, 0.59928481298$- 2,-2.84836993606$- 3,
2.86408431136$- 3, 4.86863961944$- 2, 3.60450192292$- 3,
1.64641383030$- 3, 0.94920110815$- 4, 1.66111376784$- 4,
-3.07018488438$- 2, 0.85877085628$- 2,-1.45814156112$- 2,
0.56866812001$- 2,-0.77073192860$- 2,-2.40072603057$- 2,
-0.55244781684$- 3,-0.90894135551$- 2, 3.69252726699$- 3,
-0.66862290739$- 2,-2.01747962319$- 2,-0.42052509431$- 2,
0.40115448730$- 2,-1.86186262975$- 3, 2.57668624421$- 3,

```

```

RHOJ = 1
  'IF' XX(I) 'EQUAL' 0 'THEN' PHI=1.5708 'ELSE'
PHI = ARCSIN( Y(I)/RHO)
'FOR' J=2 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
'BEGIN' RHOJ = RHOJ*RHO2
  B1(I,J)= (-SIN(2*(J-1)*PHI)-NUE*COS((2*J-3)*PHI)*RHO/(2*J-3))/
    RHOJ
  G1(I,J)=(COS(2*(J-1)*PHI)-NUE*SIN((2*J-3)*PHI)*RHO/(2*J-3))/
    RHOJ
  B3(I,J)=-((2*(J-1)*SIN((2*J-1)*PHI)/RHO+NUE*COS(2*(J-1)*PHI))/RHOJ,
  G3(I,J)=-((2*(J-1)*COS((2*J-1)*PHI)/RHO-NUE*SIN(2*(J-1)*PHI))/RHOJ,
  B4(I,J) = ((-2*(J-1)*(2*J-1)* COS(2*J*PHI)/RHO*RHO + 2*(J-1)*NUE*
    SIN((2*J-1)*PHI)/RHO)/RHOJ
  B2(I,J)= G2(I,J) = 0
  'END' J
  'END' I
'END' UPKIM
FI .. READ( XX, Y) .. NUE = UE.. READ( GES) ..
T1 = 0
UPKIM
F2 .. 'IF' T1 'GREATER' 1 'THEN' E1 = 1 'ELSE' E1 = 0
  C = COS((T1+E1)*0.785398)
  S = SIN((T1+E1)*0.785398)
  'FOR' K = 1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO' 'BEGIN'
  'FOR' L = 1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO' 'BEGIN'
    VX(K+T1*N,L) = C*G3(K,L) + S*NUE*B2(K,L)
    VX(K+T1*N,L+N) = -S*G3(K,L) + C*NUE*B2(K,L)
    VY(K+T1*N,L) = C*B3(K,L) + S*NUE*G2(K,L)
    VY(K+T1*N,L+N) = -S*B3(K,L) + C*NUE*G2(K,L)
    POT (K+T1*N,L) = -S*G1(K,L)-C*G2(K,L)
    POT(K+T1*N,L+N) = S*G2(K,L)-C*G1(K,L)
    VTX( K+T1*N, L) = -S*G3(K,L) + C*NUE*B2(K,L)
    VTX( K+T1*N, L+N ) = -S*NUE*B2(K,L) - C*G3(K,L)
    VTY(K+T1*N, L) = -S*B3(K,L) + C*NUE*G2( K, L)
    VTY( K+T1*N, L+N ) = -S*NUE*G2(K,L) - C*B3( K, L)
    VY2( K+T1*N, L) = C*B4(K, L) - S*NUE*NUE*G2( K,L)
    VY2( K+T1*N, L+N ) = -C*NUE*NUE*G2(K,L) - S*B4( K,L)
    VTTY(K+T1*N,L) = -C*B3(K,L) -S*NUE*G2(K,L)
    VTTY(K+T1*N,L+N) = -C*NUE*G2(K,L) + S*B3(K,L)
  'END'
  T1 = T1 + 1
  'IF' T1 'LESS' 7 'THEN' 'GOTO' F2
NUE = 4*NUE
TT = 2
KI1 .. UPKIM
T1 = 0
F3 .. 'IF' T1 'GREATER' 1 'THEN' E1 = 1 'ELSE' E1=0
  C = COS(TT*(T1+E1)*0.785398)
  S = SIN(TT*(T1+E1)*0.785398)
  'FOR' K = 1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO' 'BEGIN'
  'FOR' L = 1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO' 'BEGIN'
    VX(K+T1*N,L+2*(TT-1)*N) = C*G3(K,L) + S*NUE*B2(K,L)
    VX(K+T1*N,L+(2*TT-1)*N) = -S*G3(K,L)+C*NUE*B2(K,L)
    VY(K+T1*N,L+2*(TT-1)*N) = C*B3(K,L) + S*NUE*G2(K,L)
    VY(K+T1*N,L+(2*TT-1)*N) = -S*B3(K,L)+ C*NUE*G2(K,L)
    POT(K+T1*N,L+2*(TT-1)*N) = TT*(-S*G1(K,L)-C*G2(K,L))
    POT(K+T1*N,L+(2*TT-1)*N) = TT*(S*G2(K,L)-C*G1(K,L))
    VTX( K+T1*N, L+2*(TT-1)*N ) = TT*(-S*G3(K,L) + C*NUE*B2(K,L))
    VTX(K+T1*N, L+(2*TT-1)*N) = TT*(-S*NUE*B2(K,L) -C*G3(K,L))
    VTY(K+T1*N, L+2*(TT-1)*N) = TT*(-S*B3(K,L) + C*NUE*G2(K,L))
    VTY(K+T1*N, L+(2*TT-1)*N) = TT*(-S*NUE*G2(K,L) -C*B3(K,L))
    VY2(K+T1*N, L+2*(TT-1)*N) = C*B4( K,L) -S*NUE*NUE*G2(K,L)
    VY2(K+T1*N, L+(2*TT-1)*N) = -C*NUE*NUE*G2(K,L) -S*B4(K,L)
    VTTY(K+T1*N, L+2*(TT-1)*N) = TT*TT*(-C*B3(K,L) -S*NUE*G2(K,L))
    VTTY(K+T1*N, L+(2*TT-1)*N) = TT*TT*(C*NUE*G2(K,L) + S*B3(K,L))
  'END'
  T1 = T1 + 1
  'IF' T1 'LESS' 7 'THEN' 'GOTO' F3

```

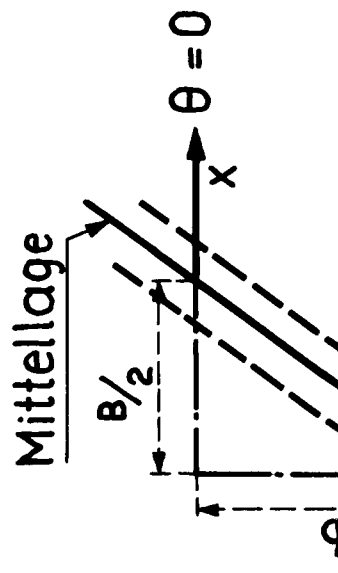
Komplexes Potential:

$$\begin{aligned} \Phi + i\Psi = U \bigg\{ & e^{i\omega t} A_{o1} \left[ -\ln(\gamma v \sqrt{x+iy}) - i\pi \right] \\ & + e^{i2\omega t} A_{o2} \left[ -\ln(4\gamma v \sqrt{x+iy}) - i\pi \right] \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \cdot A_n \frac{1}{(x+iy)^{2n}} \bigg\} \end{aligned}$$

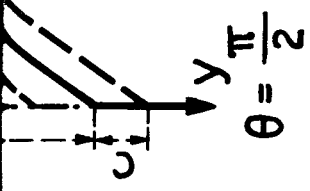
worin  $A_{o1}$ ,  $A_{o2}$ ,  $F_n(t)$  und  $A_n$  die Unbekannten bedeuten.

$$y = -ax + b + c \cdot \cos(\omega t),$$

wobei



- a Verhältnis Tiefgang in der Mittellage zu Halbbreite
  - b Tiefgang in der Mittellage
  - c Amplitude der Tauchbewegung
- Randbedingung am Profilrand



$$\psi_{\text{ist}} = -U \cdot x \cdot \sin(\omega t)$$

$$\psi_{\text{soll}} = \operatorname{Re}(\psi)$$

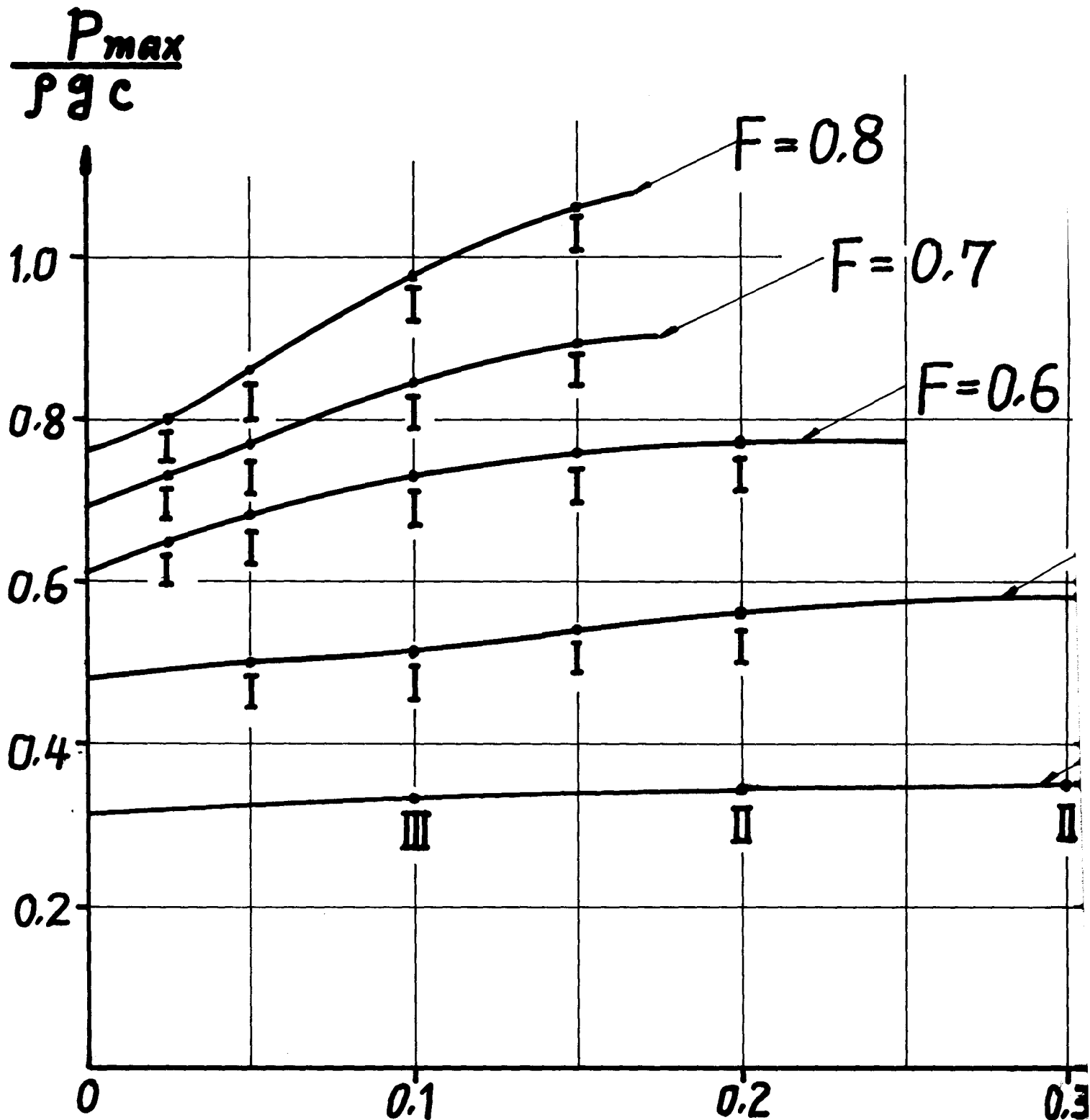
Lösung:

$$A_{o1} = \frac{2b}{\pi a} i, \quad A_{o2} = \frac{c}{\pi a} i$$

$A_n$  = Funktion von  $a$  und  $\omega$

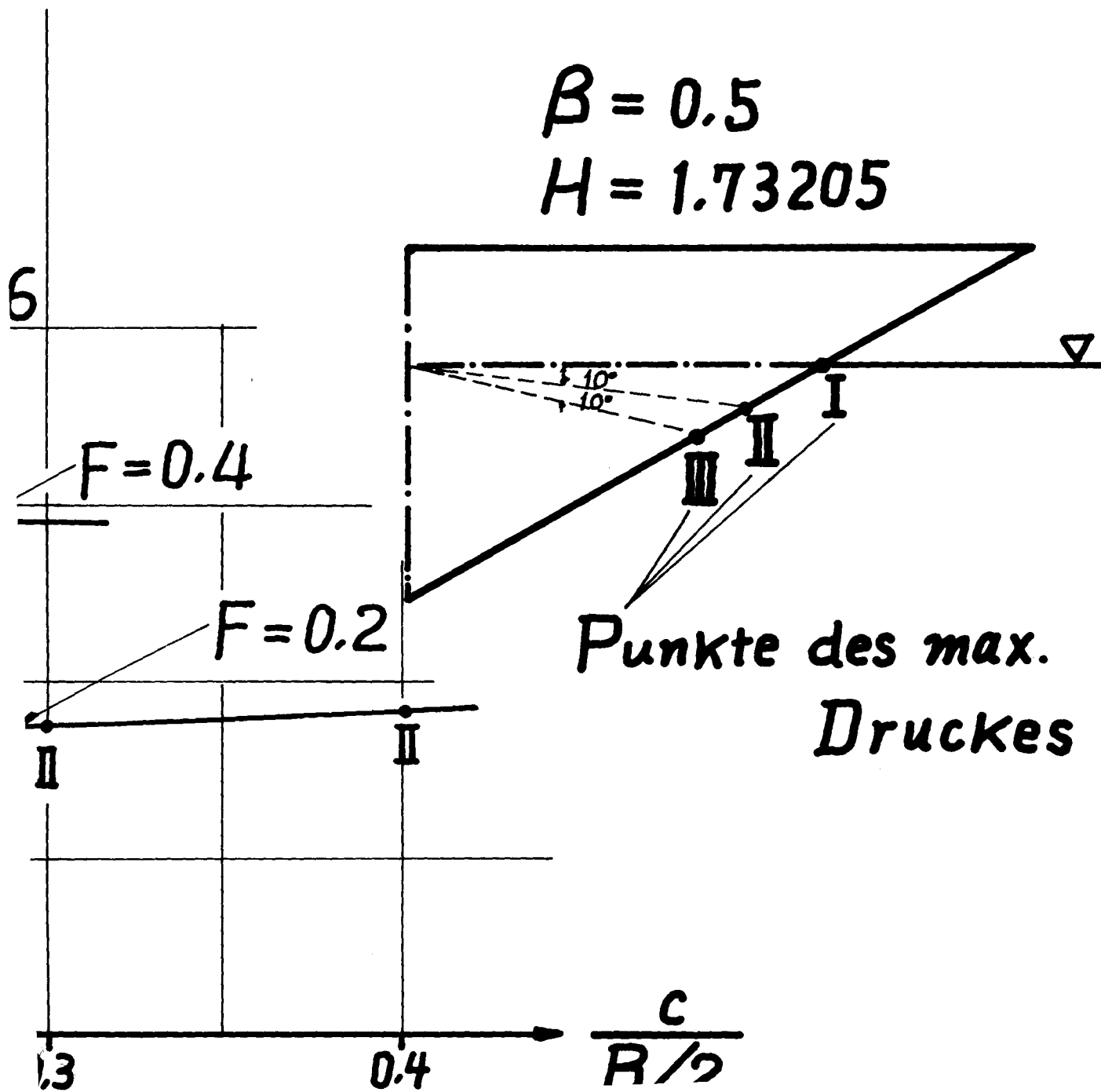
$$F_n(t) = \left[ b + c \cdot \cos(\omega t) \right]^{2n+1} \cdot \sin(\omega t)$$

# Maximaler hydrodynam über Amplitudenver an der Lage





mi scher Druck  $\frac{P_{max}}{\rho g c}$   
 erhält nis  $\frac{c}{B/2}$   
 $\omega t = \frac{7}{4} \pi$

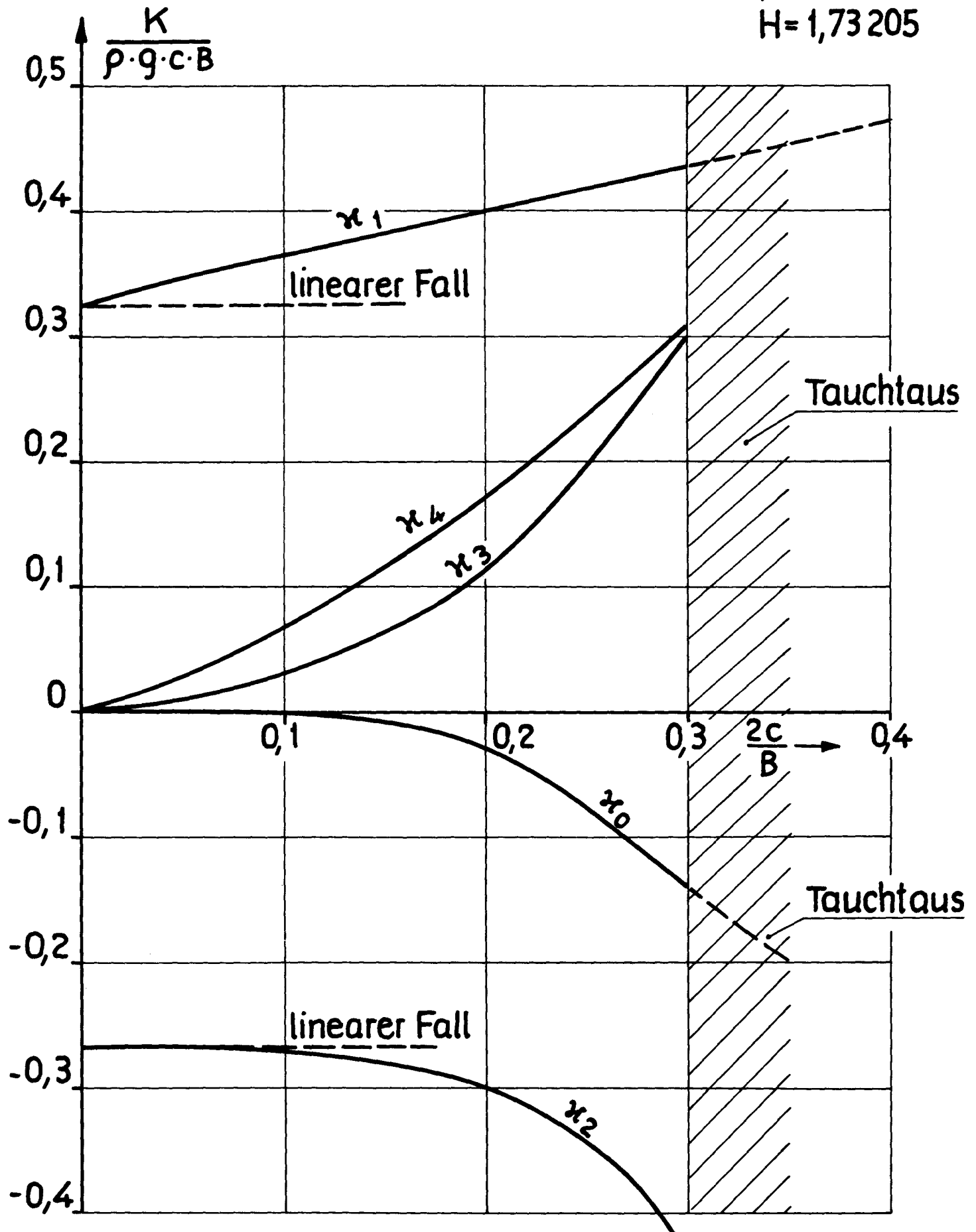


# Kraftkoeffizient

$$F = 0,4$$

$$\beta = 0,5$$

$$H = 1,73205$$

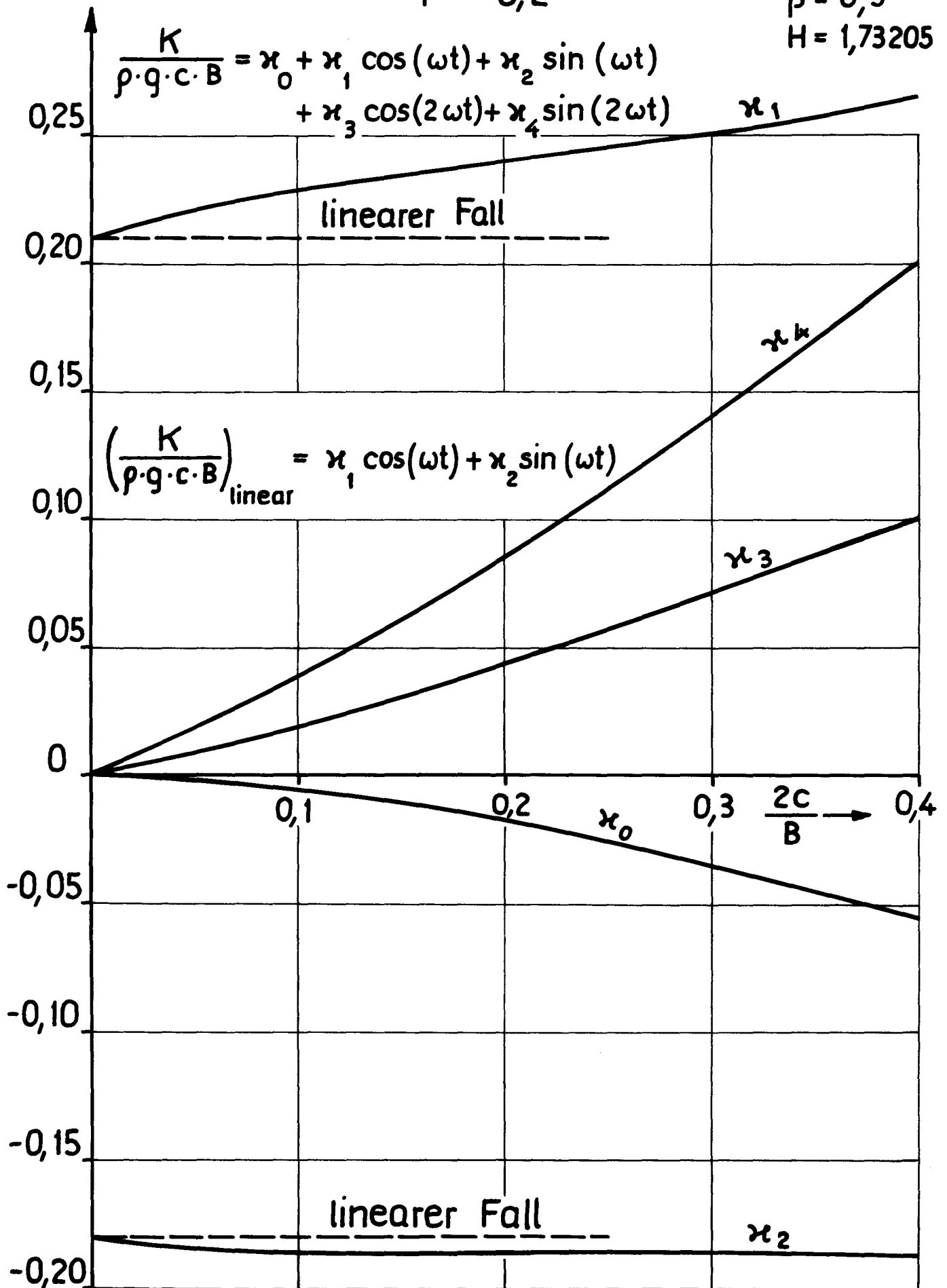


# Kraftkoeffizient

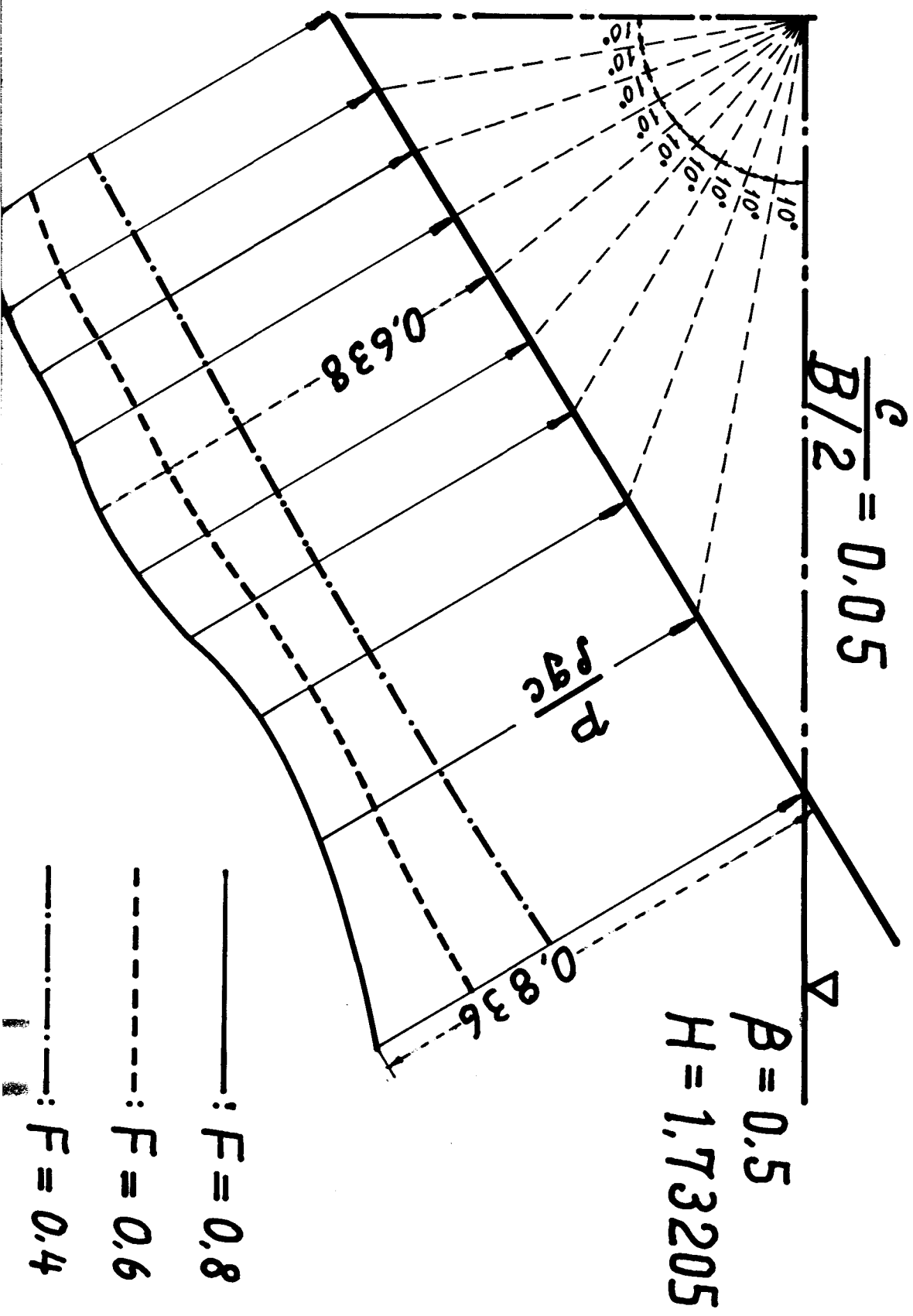
$$F = 0,2$$

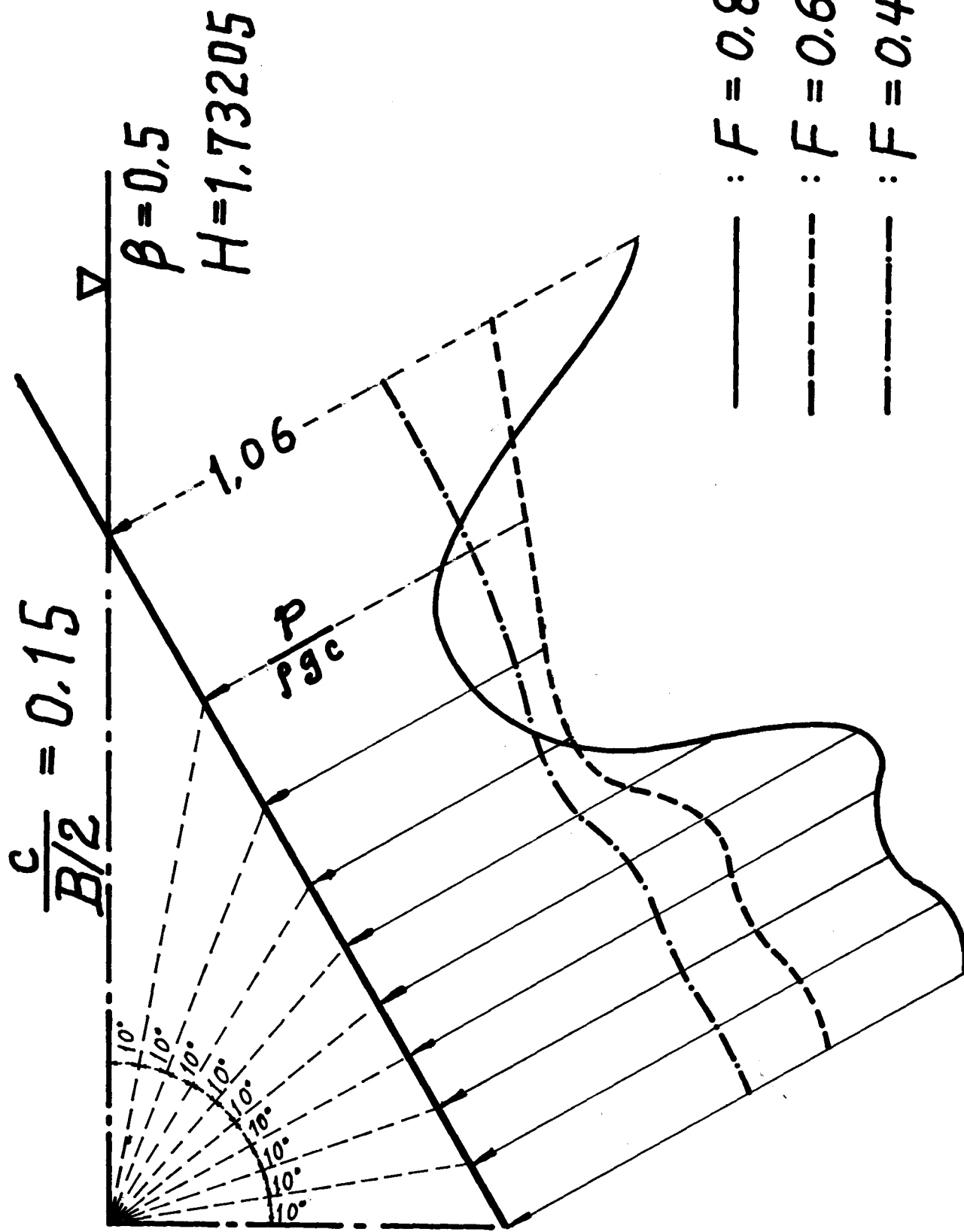
$$\beta = 0,5$$

$$H = 1,73205$$



# Hydrodynamische Druckverteilung $\frac{p}{\rho g c}$ an der Lage $\omega t = \frac{7}{4}\pi$





$$\Phi = \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)}$$

Randbedingung erster Ordnung

$$\Phi_{tt}^{(1)} - g\Phi_y^{(1)} = 0$$

$$\text{für } y=0$$

(1)

Randbedingung zweiter Ordnung

$$\Phi_{tt}^{(2)} - g\Phi_y^{(2)} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi^{(1)})^2 - \Phi_{tt}^{(1)} (\Phi_{yy}^{(1)} - \frac{1}{g} \Phi_{tty}^{(1)})$$

$$\text{für } y=0$$

(2)

$$\Phi^{(1)} \text{ für } x \rightarrow \infty \\ \text{für } y \rightarrow 0$$

$$\approx U \operatorname{Re} \left\{ -i\pi (A_{01}) e^{-\nu y - i(\nu x - \omega t)} - i\pi (A_{02}) e^{-4\nu y - i(4\nu x - 2\omega t)} - i\pi (A_{03}) e^{-9\nu y - i(9\nu x - 3\omega t)} \right\}$$

$$\frac{1}{U^2 \omega} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi^{(1)})^2 \right]_{\text{für } x \rightarrow \infty} = \operatorname{Re} \left\{ C_1 e^{i(3\nu x - \omega t)} + C_2 e^{i(8\nu x - 2\omega t)} + C_3 e^{i(5\nu x - \omega t)} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & \text{für } y \rightarrow 0 \\ & \frac{1}{U^2 \omega} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi^{(1)})^2 \right] \text{ für } x \rightarrow \infty \\ & \text{für } y \rightarrow 0 \end{aligned} \right\} - i\pi (A_{03}) e^{-9\nu y - i(9\nu x - 3\omega t)} \quad (3)$$

$$= \operatorname{Re} \left\{ C_1 e^{i(3\nu x - \omega t)} + C_2 e^{i(8\nu x - 2\omega t)} + C_3 e^{i(5\nu x - \omega t)} \right\}$$

$$\phi_{tt}^{(2)} - g\phi_y^{(2)} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi^{(1)})^2 \quad (4)$$

für  $x \rightarrow \infty$   
für  $y \rightarrow 0$

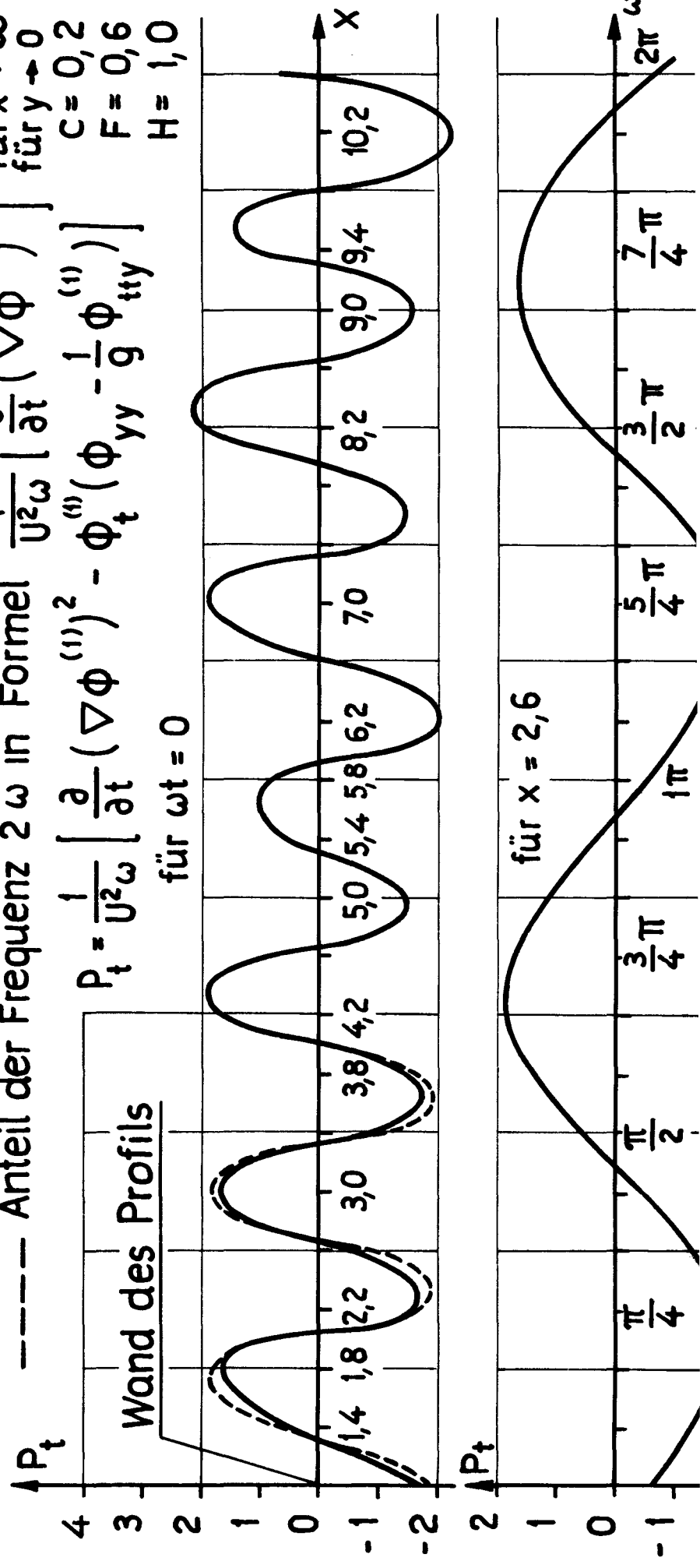
Zeitabteilung der Druckverteilung an der freien Oberfläche

----- Anteil der Frequenz  $2\omega$  in Formel  $\frac{1}{U^2 \omega} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi^{(1)})^2 \right]$  für  $x \rightarrow \infty$   
für  $y \rightarrow 0$

$$P_t = \frac{1}{U^2 \omega} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi^{(1)})^2 - \phi_t^{(4)} \left( \phi_{yy} - \frac{1}{g} \phi_{tty} \right) \right]$$

für  $\omega t = 0$

$C = 0,2$   
 $F = 0,6$   
 $H = 1,0$



# Grimmsches komplexes Potential für die lineare Tauchbewegung

$$\Phi + i\Psi = U \left\{ e^{i\omega t} \left[ A_{01} \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{e^{ik(x+iy)}}{k - \nu + i\mu} dk + \sum_{n=1}^{N-1} A_{n1} \left( \frac{1}{(x+iy)^{2n}} - \frac{i\nu}{(x+iy)^{2n}} \right) \right] \right\}$$

Wellenquellpotential      Quellpotential höherer Ord

$\Phi$  das komplexe Geschwindigkeitspotential

$\Psi$  die komplexe Stromfunktion

$U$  die Amplitude der Schwingungsgeschwindigkeit

$\omega$  die Kreisfrequenz der Schwingung

$\nu = \frac{\omega^2}{g}$  die Wellenzahl

$A_{01}, A_{n1}$  die Unbekannten (komplexe Zahlen)



# Komplexes Potential

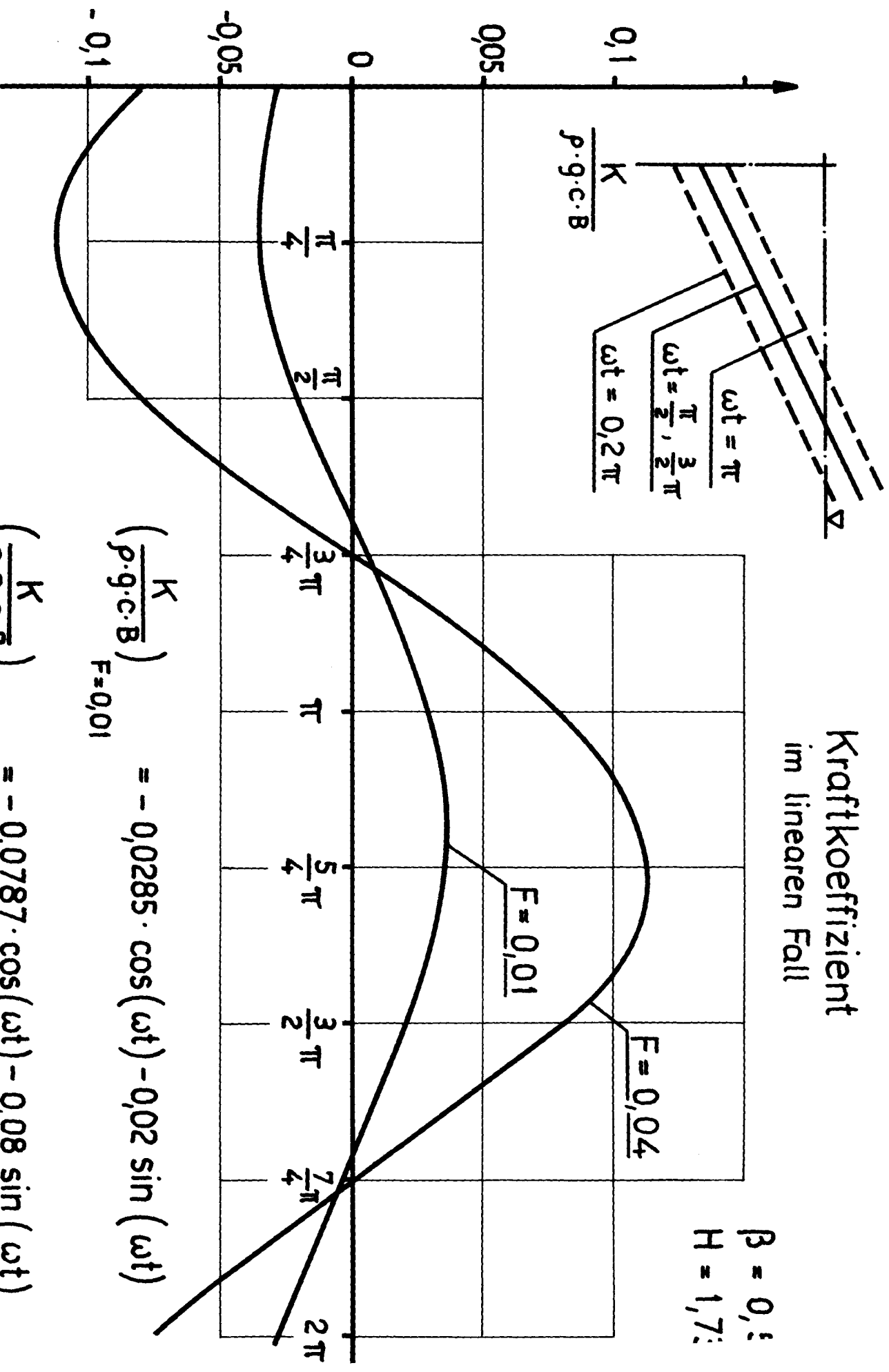
für die nicht lineare Tauchbewegung

$$\begin{aligned}
 \Phi + i\Psi = U & \left\{ e^{i\omega t} \left[ A_{01} \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{e^{ik(x+iy)}}{k-\nu+i\mu} dk \right. \right. \\
 & + \sum_{n=1}^{N-1} A_{n1} \left( \frac{1}{(x+iy)^{2n}} - \frac{i\nu}{(x+iy)^{2n-1}(2n-1)} \right) \Bigg] \\
 & + e^{i2\omega t} \left[ A_{02} \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{e^{ik(x+iy)}}{k-4\nu+i\mu} dk \right. \\
 & + \sum_{n=1}^{N-1} A_{n2} \left( \frac{1}{(x+iy)^{2n}} - \frac{i4\nu}{(x+iy)^{2n-1}(2n-1)} \right) \Bigg] \\
 & + e^{i3\omega t} \left[ A_{03} \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{e^{ik(x+iy)}}{k-9\nu+i\mu} dk \right. \\
 & + \sum_{n=1}^{N-1} A_{n3} \left( \frac{1}{(x+iy)^{2n}} - \frac{i9\nu}{(x+iy)^{2n-1}(2n-1)} \right) \Bigg]
 \end{aligned}$$

# Kraftkoeffizient im linearen Fall

$$\beta = 0,1$$

$$H = 1,7$$

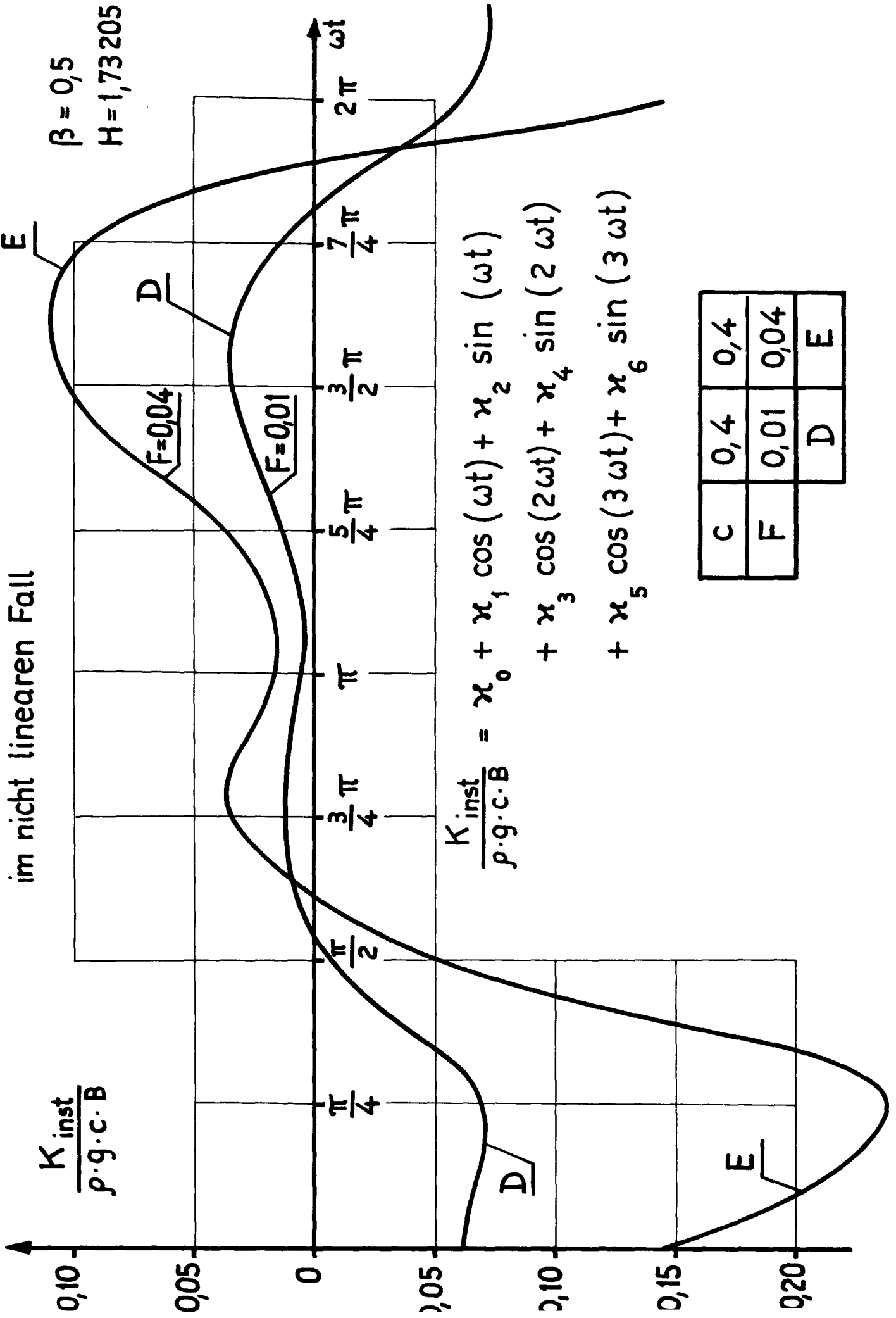


$$\left( \frac{K}{\rho \cdot g \cdot c \cdot B} \right)_{F=0,01} = -0,0285 \cdot \cos(\omega t) - 0,02 \sin(\omega t)$$

$$\left( \frac{K}{\rho \cdot g \cdot c \cdot B} \right)_{F=0,04} = -0,0787 \cdot \cos(\omega t) - 0,08 \sin(\omega t)$$

# Kraftkoeffizient im nicht linearen Fall

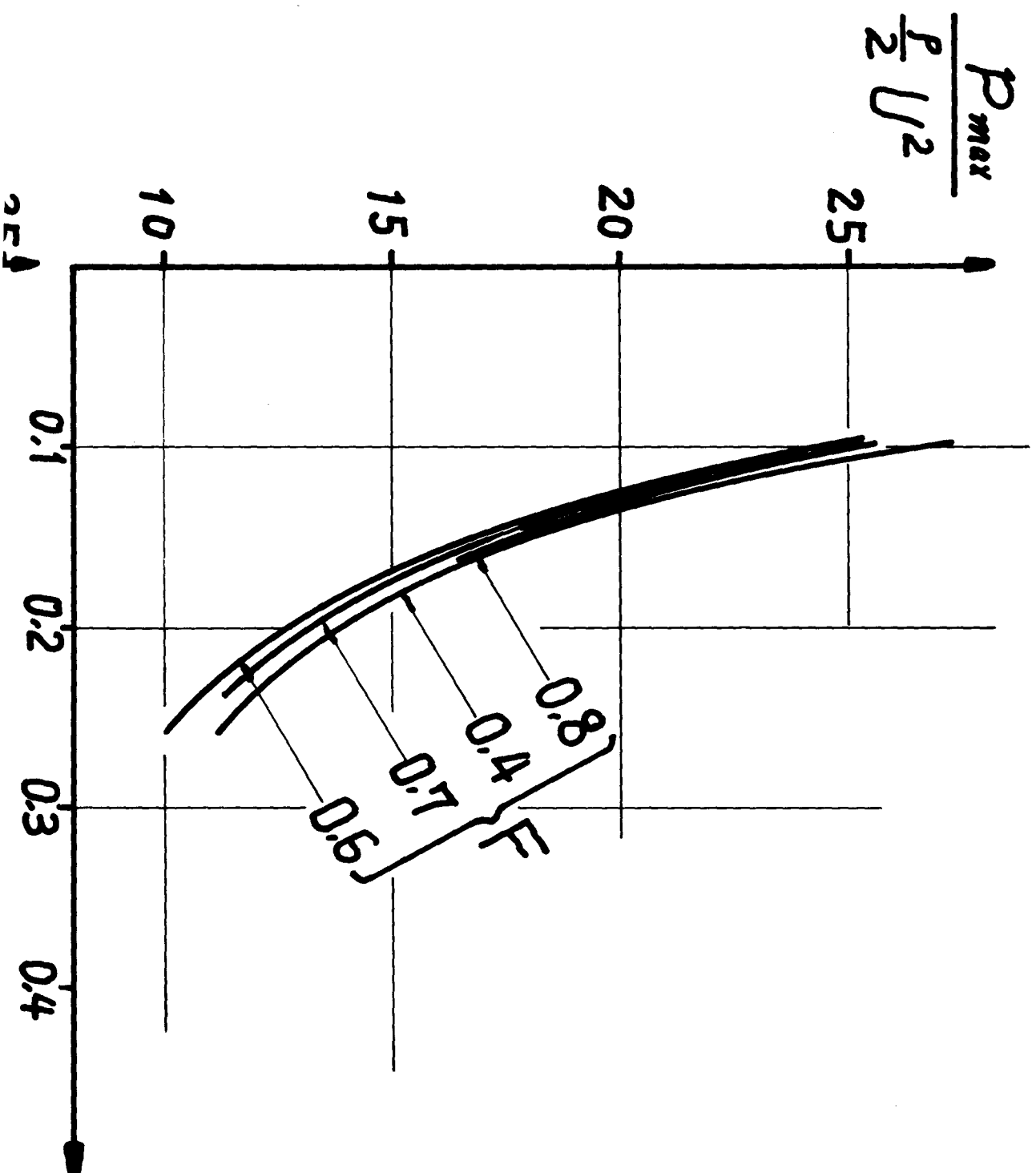
$\beta = 0,5$   
 $H = 1,73205$



$$\begin{aligned} \frac{K_{inst}}{\rho \cdot g \cdot c \cdot B} = & \kappa_0 + \kappa_1 \cos(\omega t) + \kappa_2 \sin(\omega t) \\ & + \kappa_3 \cos(2\omega t) + \kappa_4 \sin(2\omega t) \\ & + \kappa_5 \cos(3\omega t) + \kappa_6 \sin(3\omega t) \end{aligned}$$

|   |      |      |
|---|------|------|
| c | 0,4  | 0,4  |
| F | 0,01 | 0,04 |
|   | D    | E    |

Maximaler hydrodynamischer Druck  
 $\frac{P_{max}}{\rho/2 U^2}$  über Amplitudenverhältnis  $\frac{c}{B/2}$



$$\beta = 0.5$$

$$H = 1.73205$$

$$\frac{c}{B/2}$$

B/2

$B = 0.5$   
 $H = 1.0$

