

Zur Theorie des Propellers
=====
mit aus dem Wasser
=====
herausschlagenden Flügeln
=====

Von W. H. Isay

1. Einleitung

Der Einfluss der Wasseroberfläche wurde bisher nur bei voll getauchten Propellern berücksichtigt, und zwar auch dann nur in dem praktisch wichtigen Fall grosser Froudescher Zahlen, d.h. bei Vernachlässigung des Schwereinflusses.¹⁾ Man kommt dann für die Erfüllung der Randbedingung an der Wasseroberfläche mit dem einfachen Spiegelungsprinzip aus. Wie Vergleiche mit der Theorie senkrechter Unterwassertragflügel gezeigt haben, dürfte eine Berücksichtigung der Schwerkraft mit Erfüllung der vollen Oberflächenrandbedingung kaum wesentliche neue Erkenntnisse liefern; die Entwicklung einer solchen Theorie erscheint somit nicht vordringlich, zumal der Formalismus extem kompliziert sein würde. Praktisch bedeutsam erscheint dagegen die Behandlung des Problems des nicht mehr voll getauchten Propellers, dessen Flügel also aus dem Wasser herausschlagen, und zwar ebenfalls unter Vernachlässigung des Schwereinflusses.

Ein solcher Propeller befindet sich also in zwei Strömungsmedien von wesentlich verschiedener Dichte. An sich bildet sich natürlich sowohl im Wasserbereich als auch im Luftbereich an den Flügeln eine Zirkulationsströmung aus. Infolge der geringen Luftdichte führt die Zirkulationsverteilung des Luftbereiches aber praktisch nicht zu einem Drucksprung an den Flügeln, und somit liefert der aus dem Wasser herausschlagende Flügelteil auch keine Kraft. An der Grenzfläche zwischen Wasser und Luft bewirken die von den Luftwirbeln des Propellers induzierten Geschwindigkeiten wegen der geringen Luftdichte praktisch keine Druckschwankungen; somit bleibt die Bedingung konstanten Druckes an der Wasseroberfläche bestehen. Aus diesem Grund beeinflussen die Luftwirbel des Propellers das Strömungsfeld des Wasserbereiches nicht.

Es erscheint somit naheliegend, die aus dem Wasser herausschlagenden

¹⁾ W.H. Isay: Propellertheorie, Hydrodynamische Probleme, Springer-Verlag Berlin-Göttingen-Heidelberg 1964, S.231-232.

Propellerflügel in der Weise theoretisch zu behandeln, dass die Zirkulation der Flügel in den herausschlagenden Teilen zu Null angenommen wird.

Beschränkt man sich auf das Formelsystem der Traglinientheorie, so ist es zweckmässig, die Flügelzirkulation Γ in folgender Form anzusetzen:

$$(1) \quad \Gamma(s, \psi) = \sum_{\nu=-M}^M \sum_{\lambda=1}^L \Gamma_{\nu\lambda} \sin \lambda \delta e^{i\nu\psi} \quad , \quad \begin{matrix} (0 \leq \psi < \infty (2\pi)) \\ (0 \leq \delta \leq \pi) \end{matrix}$$

mit

$$(2) \quad s = \frac{R(\psi) + R_i}{2} - \frac{R(\psi) - R_i}{2} \cos \delta \quad ; \quad \sin \delta = \sqrt{1 - \left(\frac{2s - R(\psi) - R_i}{R(\psi) - R_i} \right)^2}$$

Dabei ist $R(\psi)$ der vom Umfangswinkel ψ abhängige Radius des im Wasser befindlichen Teils der Propellerflügel. $R(\psi)$ hat die Periode 2π und ist in eine Fourierreihe entwickelbar. Es gilt für den Bereich $0 \leq \psi \leq 2\pi$:

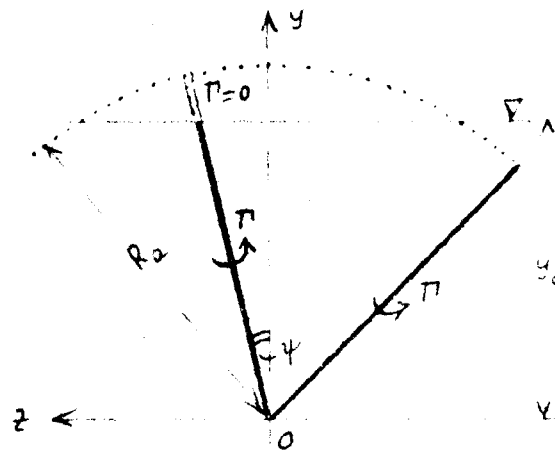
$$R(\psi) = R_a \text{ für } \arctg \frac{y_0}{R_a} < \psi < 2\pi - \arctg \frac{y_0}{R_a} ,$$

und

$$R(\psi) = \frac{y_0}{\cos \psi} \text{ für } \psi \leq \arctg \frac{y_0}{R_a} \text{ sowie } \psi \geq 2\pi - \arctg \frac{y_0}{R_a} .$$

Der Ansatz (1), (2) hat bereits die Eigenschaft, dass die Zirkulation Γ nur im Wasserbereich existiert; im Luftbereich mit $s > \frac{y_0}{\cos \psi}$ würde

$\sin \lambda \delta$ imaginär, und bei der Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten aus den bekannten Formeln²⁾ des Biot-Savartschen Gesetzes ist für Γ im Bereich Luft der Wert Null einzusetzen.



2. Randbedingung am Propellerflügel

Im Rahmen der Traglinientheorie ist es naheliegend zwei Typen von Randbedingungen am Propellerflügel zu untersuchen. Einmal nach der erweiterten Traglinientheorie die Strömungsrandbedingung längs der radialen 3/4-Linie³⁾ $\varphi = \varphi_0 + \alpha^*$; $x = R_1 \alpha^*$.

²⁾ Vgl. Propellertheorie S.2-7 und 232; die in der vorliegenden Untersuchung verwendeten Formeln stimmen hinsichtlich ihrer Bezeichnungswiese mit derjenigen des Buches überein.

³⁾ Vgl. Propellertheorie S.34

Zum anderen die Bedingung, daß die durch die resultierende Anströmung am gebundenen Wirbel induzierte hydrodynamische Steigung derjenigen einer regulären Schraubenfläche mit dem Steigungsparameter k_0 entspricht. Letzteres ist natürlich nur näherungsweise zutreffend in Anbetracht der Tatsache, daß die induzierten Geschwindigkeiten von der momentanen Flügelstellung abhängen. Jedoch dürfte für einen freifahrenden Propeller mässiger Belastung diese Annahme einer konstanten hydrodynamischen Steigung k_0 noch zulässig sein.

Wir betrachten nunmehr die vom Wirbelsystem des Originalpropellers 1 und des gespiegelten Propellers 2 im Punkt $x = k_1 x^*$, $\varphi = \varphi_0 + x^*$, $z = z$ induzierten Geschwindigkeiten²⁾, wie wir sie für die Randbedingung benötigen. (Im zweiten oben erwähnten Fall ist nur $\alpha^* = 0$ zu setzen):

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \left. \begin{aligned}
 w_{\Gamma}^{(1)} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{R_i}^{R_a} \Gamma(s, \varphi_0 + \frac{2\pi n}{N}) \left[k_1^2 \alpha^{*2} + z^2 + s^2 - 2zs \cos(\alpha^* \frac{2\pi n}{N}) \right]^{-3/2} \\
 &\cdot \left\{ w_x z \sin(\alpha^* \frac{2\pi n}{N}) - w_\varphi k_1 \alpha^* \cos(\alpha^* \frac{2\pi n}{N}) - w_z k_1 x^* \sin(\alpha^* \frac{2\pi n}{N}) \right\} ds,
 \end{aligned} \right\} \\
 (4) \quad \left. \begin{aligned}
 w_{\varphi}^{(1)} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{R_i}^{R_a} \int_0^\infty \frac{\partial \Gamma(s, \varphi_0 + \frac{2\pi n}{N} + \psi)}{\partial s} \left[(k_1 \alpha^* - k_0 \psi)^2 + z^2 + s^2 - 2zs \cos(\alpha^* \frac{2\pi n}{N} - \psi) \right]^{-3/2} \\
 &\cdot \left\{ w_x \left[zs \cos(\alpha^* \frac{2\pi n}{N} - \psi) - s^2 \right] + w_\varphi \left[k_0 s \cos(\alpha^* \frac{2\pi n}{N} - \psi) - k_0 z + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + s(k_1 x^* - k_0 \psi) \sin(\alpha^* \frac{2\pi n}{N} - \psi) \right] + w_z \left[k_0 s \sin(\alpha^* \frac{2\pi n}{N} - \psi) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - s(k_1 x^* - k_0 \psi) \cos(\alpha^* \frac{2\pi n}{N} - \psi) \right] \right\} d\psi ds,
 \end{aligned} \right\} \\
 (5) \quad \left. \begin{aligned}
 w_z^{(1)} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{R_i}^{R_a} \int_0^\infty \frac{\partial \Gamma(s, \varphi_0 + \frac{2\pi n}{N} + \psi)}{\partial \psi} \left[(k_1 \alpha^* - k_0 \psi)^2 + z^2 + s^2 - 2zs \cos(\alpha^* \frac{2\pi n}{N} - \psi) \right]^{-3/2} \\
 &\cdot \left\{ w_x z \sin(\alpha^* \frac{2\pi n}{N} - \psi) - w_\varphi (k_1 x^* - k_0 \psi) \cos(\alpha^* \frac{2\pi n}{N} - \psi) - \right. \\
 &\quad \left. - w_z (k_1 x^* - k_0 \psi) \sin(\alpha^* \frac{2\pi n}{N} - \psi) \right\} d\psi ds,
 \end{aligned} \right\} \\
 (6) \quad \left. \begin{aligned}
 w_{\Gamma}^{(2)} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{R_i}^{R_a} \Gamma(s, \varphi_0 + \frac{2\pi n}{N}) \left[k_1^2 \alpha^{*2} + z^2 + s^2 + 2zs \cos(2\varphi_0 + \alpha^* + \frac{2\pi n}{N}) + 4y_0^2 - \right. \\
 &\quad \left. - 4y_0 z \cos(\varphi_0 + \alpha^*) - 4y_0 s \cos(\varphi_0 + \frac{2\pi n}{N}) \right]^{-3/2} \cdot \left\{ w_x \left[2y_0 \sin(\varphi_0 + \frac{2\pi n}{N}) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - z \sin(2\varphi_0 + \alpha^* + \frac{2\pi n}{N}) \right] + w_\varphi k_1 \alpha^* \cos(2\varphi_0 + \alpha^* + \frac{2\pi n}{N}) + w_z k_1 x^* \sin(2\varphi_0 + \alpha^* + \frac{2\pi n}{N}) \right\} ds,
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (7) \quad \psi_Q^{(2)} = & \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{R_i}^{R_a} \int_0^{\infty} \frac{\partial \Gamma(s, \varphi_0 + \frac{2\pi n}{N} + \psi)}{\partial s} \left[(k_1 \alpha^* - k_0 \psi)^2 + z^2 + s^2 + 2zs \cos(2\varphi_0 + \alpha^* + \frac{2\pi n}{N} + \psi) \right. \\
 & \left. + 4y_0^2 - 4y_0 z \cos(\varphi_0 + \alpha^*) - 4y_0 s \cos(\varphi_0 + \frac{2\pi n}{N} + \psi) \right]^{-\frac{3}{2}} \left\{ W_x \left[s^2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + s z \cos(2\varphi_0 + \alpha^* + \frac{2\pi n}{N} + \psi) - 2y_0 s \cos(\varphi_0 + \frac{2\pi n}{N} + \psi) \right] + W_y \left[2k_0 y_0 \cos(\varphi_0 + \alpha^*) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - k_0 z - k_0 s \cos(2\varphi_0 + \alpha^* + \frac{2\pi n}{N} + \psi) + s(k_1 \alpha^* - k_0 \psi) \sin(2\varphi_0 + \alpha^* + \frac{2\pi n}{N} + \psi) \right] + \right. \\
 & \left. + W_z \left[2k_0 y_0 \sin(\varphi_0 + \alpha^*) - k_0 s \sin(2\varphi_0 + \alpha^* + \frac{2\pi n}{N} + \psi) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - s(k_1 \alpha^* - k_0 \psi) \cos(2\varphi_0 + \alpha^* + \frac{2\pi n}{N} + \psi) \right] \right\} d\psi ds.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (8) \quad \psi_L^{(2)} = & \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{R_i}^{R_a} \int_0^{\infty} \frac{\partial \Gamma(s, \varphi_0 + \frac{2\pi n}{N} + \psi)}{\partial \psi} \left[(k_1 \alpha^* - k_0 \psi)^2 + z^2 + s^2 + 2zs \cos(2\varphi_0 + \alpha^* + \frac{2\pi n}{N} + \psi) \right. \\
 & \left. + 4y_0^2 - 4y_0 z \cos(\varphi_0 + \alpha^*) - 4y_0 s \cos(\varphi_0 + \frac{2\pi n}{N} + \psi) \right]^{-\frac{3}{2}} \left\{ W_x \left[2y_0 \sin(\varphi_0 + \frac{2\pi n}{N} + \psi) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - z \sin(2\varphi_0 + \alpha^* + \frac{2\pi n}{N} + \psi) \right] + W_y \left[(k_1 \alpha^* - k_0 \psi) \cos(2\varphi_0 + \alpha^* + \frac{2\pi n}{N} + \psi) \right] + \right. \\
 & \left. + W_z \left[(k_1 \alpha^* - k_0 \psi) \sin(2\varphi_0 + \alpha^* + \frac{2\pi n}{N} + \psi) \right] \right\} d\psi ds.
 \end{aligned}$$

Mit ty_0 als Richtung der Profilskelettlinie im 3/4-Punkt lauten die beiden oben erwähnten Randbedingungen

$$\begin{aligned}
 (9) \quad \omega z ty_0 - u_0 = & \left[u_Q^{(1)} + u_L^{(1)} + u_P^{(1)} + u_Q^{(2)} + u_L^{(2)} + u_P^{(2)} \right] - \\
 & - ty_0 \left[v_Q^{(1)} + v_L^{(1)} + v_P^{(1)} + v_Q^{(2)} + v_L^{(2)} + v_P^{(2)} \right] \\
 & \text{für } x = k_1 \alpha^*, \quad \psi = \varphi_0 + \alpha^*;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{bzw.} \\
 (10) \quad \omega k_0 - u_0 = & \left[u_Q^{(1)} + u_L^{(1)} + \tilde{u}_P^{(1)} + u_Q^{(2)} + u_L^{(2)} + u_P^{(2)} \right] - \\
 & - \frac{k_0}{z} \left[v_Q^{(1)} + v_L^{(1)} + \tilde{v}_P^{(1)} + v_Q^{(2)} + v_L^{(2)} + v_P^{(2)} \right] \\
 & \text{für } x = 0, \quad \psi = \varphi_0.
 \end{aligned}$$

In Gl. (9) und (10) ist $z = \frac{R(\varphi_0) + R_i}{2} - \frac{R(\varphi_0) - R_i}{2} \cos \tau$ ($0 \leq \varphi_0 \leq 2\pi$, $0 \leq \tau \leq \pi$), zu setzen; alle Ausdrücke sind somit Funktionen von φ_0 und τ .

Mit dem Ansatz (1), (2) für Γ lassen sich die Geschwindigkeitskomponenten (3) bis (8) für vorgegebene Werte von φ_0 und τ auswerten. Macht man dieses z.B. für 12 φ_0 -Werte $\frac{m\pi}{6}$ und für 5 τ -Werte $\frac{\ell\pi}{6}$ ($m = 1, \dots, 12$; $\ell = 1, \dots, 5$), so lassen sich mittels harmonischer Analyse die folgenden Darstellungen gewinnen: ($M = 6$; $L = 5$)

$$(11) \left\{ \begin{aligned} \sin \tau \left(u_q^{(1)} - \frac{R_0}{2} V_q^{(1)} \right) &= \sum_{\mu=-6}^6 \sum_{\kappa=1}^5 \sum_{\nu=-6}^6 \sum_{\lambda=1}^5 I_{\mu\kappa,\nu\lambda}^{(Q)} \Gamma_{\nu\lambda} \sin \kappa \tau e^{i\mu\varphi_0} \\ \sin \tau \left(u_q^{(2)} - \frac{R_0}{2} V_q^{(2)} \right) &= \sum_{\mu=-6}^6 \sum_{\kappa=1}^5 \sum_{\nu=-6}^6 \sum_{\lambda=1}^5 J_{\mu\kappa,\nu\lambda}^{(Q)} \Gamma_{\nu\lambda} \sin \kappa \tau e^{i\mu\varphi_0} \end{aligned} \right.$$

Entsprechend sind die übrigen Ausdrücke. Durch Koeffizientenvergleich der Glieder mit $\sin \kappa \tau e^{i\mu\varphi_0}$ ($\kappa=1, \dots, 5$; $\mu=0, \pm 1, \dots, \pm 6$) ergibt sich dann aus der zuvor mit $\sin \tau$ multiplizierten Randbedingung (10) (und analog (9)) das folgende System von 65 linearen Gleichungen zur Berechnung der gesuchten Zirkulationskoeffizienten $\Gamma_{\nu\lambda}$:

$$(12) \left\{ \begin{aligned} (\omega R_0 - u_0) \delta_{\kappa 1} \delta_{\mu 0} &= \sum_{\nu=-6}^6 \sum_{\lambda=1}^5 \Gamma_{\nu\lambda} \left[I_{\mu\kappa,\nu\lambda}^{(Q)} + \overset{\vee}{I}_{\mu\kappa,\nu\lambda}^{(L)} + \overset{\vee}{I}_{\mu\kappa,\nu\lambda}^{(P)} + \right. \\ &\quad \left. + J_{\mu\kappa,\nu\lambda}^{(Q)} + \overset{\vee}{J}_{\mu\kappa,\nu\lambda}^{(L)} + \overset{\vee}{J}_{\mu\kappa,\nu\lambda}^{(P)} \right] \end{aligned} \right.$$

Das Zeichen \vee in Formel (10) und (12) bedeutet, daß bei den gebundenen Wirbeln des Originalpropellers der Anteil des betrachteten Flügels ($n=0$) wegzulassen ist.

3. Diskussion der Integralformeln

Es bleiben nun noch die in den Randbedingungen (9) und (10) bei der Berechnung der einzelnen Geschwindigkeitskomponenten auftretenden Integrale gemäss Formel (3) bis (8) zu untersuchen.

Die numerische Auswertung dieser Integrale erfolgt getrennt für jeden einzelnen Anteil $\Gamma_{\nu\lambda} \sin \lambda \sigma e^{i\nu\psi}$ des Ansatzes (1), und zwar für jeden einzelnen Aufpunkt φ_0 und τ bzw. τ .

Dieselben Integrale (und zwar wie bei Gl.(10) für $\varphi=\varphi_0$ und $x=0$) werden auch benötigt, wenn man in üblicher Weise nach dem Kutta-Joukowski'schen Satz die momentanen Flügelkräfte berechnen will.

Man erkennt ohne weiteres, daß alle Geschwindigkeitskomponenten des gespiegelten Propellers 2 stetige Integranden haben, so daß die numerische Auswertung im Prinzip ohne weiteres möglich ist. Denn für alle Werte $\tau_\ell = \frac{\ell\pi}{6}$ ($\ell=1, 2, \dots, 5$) bleibt immer $\tau < R(\varphi_0)$.

Somit bleiben nur die Integralausdrücke des Originalpropellers zu diskutieren, d.h. Formel (3), (4), (5).

Formel (3) hat für $\alpha^* \neq 0$ [Randbedingung (9)] einen stetigen Integranden; ebenso für $\alpha^* = 0$, da in diesem Fall der Summand $n=0$ wegzulassen ist. In Formel (4) und (5) ist für $\alpha^* \neq 0$ der Integrand stetig; denn eine Singularität könnte nur für $\psi = \frac{R_0}{R_0} \alpha^*$ und $s=r$ auftreten.

ten, und auch dann nur, wenn $(\frac{k_1}{k_0} - 1)\alpha^* \geq \frac{2\pi}{N}$ sein könnte. Letzteres ist aber für praktisch vorkommende Propeller unmöglich. Im Sonderfall $k_1 = k_0$ (linearisierte Traglinientheorie) werden die Integranden von Formel (4) und (5) allerdings für $\psi = \alpha^*$ und $s = r$ singulär, und zwar ⁴⁾

$$\begin{aligned}
 (13) \quad \left. \begin{aligned}
 u_r^{(1)} &\sim \frac{1}{2\pi} \frac{z}{\sqrt{k_0^2 + z^2}} \int_{R_i}^{R_a} \frac{\partial \Gamma(s, \varphi_0)}{\partial s} \frac{ds}{z-s} + \frac{1}{4\pi} \frac{z^2}{\sqrt{k_0^2 + z^2}^3} \int_{R_i}^{R_a} \frac{\partial \Gamma(s, \varphi_0)}{\partial s} \ln \frac{2|z-s|}{R(\varphi_0) - R_i} ds; \\
 v_r^{(1)} &\sim -\frac{1}{2\pi} \frac{k_0}{\sqrt{k_0^2 + z^2}} \int_{R_i}^{R_a} \frac{\partial \Gamma(s, \varphi_0)}{\partial s} \frac{ds}{z-s} - \frac{1}{4\pi} \frac{zk_0}{\sqrt{k_0^2 + z^2}^3} \int_{R_i}^{R_a} \frac{\partial \Gamma(s, \varphi_0)}{\partial s} \ln \frac{2|z-s|}{R(\varphi_0) - R_i} ds; \\
 u_\varphi^{(1)} &\sim \frac{1}{2\pi} \frac{z}{\sqrt{k_0^2 + z^2}^3} \int_{R_i}^{R_a} \frac{\partial \Gamma(s, \varphi_0)}{\partial \varphi_0^2} \ln \frac{2|z-s|}{R(\varphi_0) - R_i} ds; \\
 v_\varphi^{(1)} &\sim -\frac{1}{2\pi} \frac{k_0}{\sqrt{k_0^2 + z^2}^3} \int_{R_i}^{R_a} \frac{\partial \Gamma(s, \varphi_0)}{\partial \varphi_0^2} \ln \frac{2|z-s|}{R(\varphi_0) - R_i} ds.
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

Aus der Darstellung (13) folgt, daß sämtliche Ausdrücke ohne weiteres integrierbar sind.

Schliesslich bleibt für die Randbedingung (10) und die Kraftberechnung für $\alpha^* = 0$ die Axial- und Umfangskomponente in Formel (4) und (5) zu untersuchen. Die Summanden $n \geq 1$ haben stetige Integranden; der Integrand des Anteils $n=0$ ist in der Umgebung der Stelle $\psi = 0$ für $s = r$ singulär. Für eine Diskussion dieser Singularität ist es zweckmässig, die Zirkulation bei $\psi = 0$ in eine Reihe zu entwickeln z. B.

$$(14) \quad \frac{\partial \Gamma(s, \varphi_0 + \psi)}{\partial s} = \frac{\partial \Gamma(s, \varphi_0)}{\partial s} + \psi \frac{\partial^2 \Gamma(s, \varphi_0)}{\partial s \partial \varphi_0} + \frac{\psi^2}{2} \frac{\partial^3 \Gamma(s, \varphi_0)}{\partial s \partial \varphi_0^2} + \dots, \text{ analog } \frac{\partial \Gamma(s, \varphi_0 + \psi)}{\partial \psi}$$

und die folgenden Integralformeln heranzuziehen:

$$(15) \quad \int_0^\xi \frac{d\psi}{\sqrt{(k_0^2 + z^2)\psi^2 + (z-s)^2}^3} = \frac{1}{(z-s)^2} \frac{\xi}{\sqrt{(k_0^2 + z^2)\xi^2 + (z-s)^2}};$$

$$(16) \quad \int_0^\xi \frac{\psi d\psi}{\sqrt{(k_0^2 + z^2)\psi^2 + (z-s)^2}^3} = \frac{1}{k_0^2 + z^2} \left[\frac{1}{\sqrt{(z-s)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(k_0^2 + z^2)\xi^2 + (z-s)^2}} \right];$$

⁴⁾ Eine ausführliche Diskussion dieses Falles findet man bei W. Zwick Theorie zur Berechnung der Zirkulation und der Kräfte eines unter einem kleinen Winkel angeströmten Propellers; Revue Roumaine des Sciences Techniques, Ser. Mecanique Appliquée 9 (1964) S. 169.

Im übrigen vergleiche man die Untersuchung der induzierten Geschwindigkeiten der stationären Traglinientheorie; Propellertheorie Kap. I, Abschnitt B, S. 17.

$$(17) \quad \int_0^{\xi} \frac{\psi^2 d\psi}{\sqrt{(k_0^2 + 2s)\psi^2 + (r-s)^2}} = -\frac{1}{k_0^2 + 2s} \frac{\xi}{\sqrt{(k_0^2 + 2s)\xi^2 + (r-s)^2}} + \frac{1}{\sqrt{k_0^2 + 2s}} \ln \frac{\sqrt{(k_0^2 + 2s)\xi^2 + (r-s)^2} + \xi \sqrt{k_0^2 + 2s}}{r-s}$$

Es lässt sich dann zeigen,⁵⁾ daß die Singularität der Integranden bei $s=r$ für die betrachteten Geschwindigkeitskomponenten in folgender Form dargestellt bzw. abgespalten werden kann:

$$(18) \quad \left. \begin{aligned} u_{\varphi}^{(1)} &\sim \frac{1}{4\pi} \frac{z}{\sqrt{k_0^2 + z^2}} \int_{R_i}^{R_a} \frac{\partial \Gamma(s, \varphi_0)}{\partial s} \left[\frac{1}{r-s} + \frac{1}{2} \frac{z}{k_0^2 + z^2} \ln \frac{2|r-s|}{R(\varphi_0) - R_i} \right] ds + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{R_i}^{R_a} \frac{\partial^2 \Gamma(s, \varphi_0)}{\partial s \partial \varphi_0} \frac{s}{k_0^2 + 2s} \frac{z-s}{\sqrt{(r-s)^2}} ds ; \\ V_{\varphi}^{(1)} &\sim -\frac{1}{4\pi} \frac{k_0}{\sqrt{k_0^2 + z^2}} \int_{R_i}^{R_a} \frac{\partial \Gamma(s, \varphi_0)}{\partial s} \left[\frac{1}{r-s} + \frac{1}{2} \frac{z}{k_0^2 + z^2} \ln \frac{2|r-s|}{R(\varphi_0) - R_i} \right] ds - \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_{R_i}^{R_a} \frac{\partial^2 \Gamma(s, \varphi_0)}{\partial s \partial \varphi_0} \frac{k_0}{k_0^2 + 2s} \frac{z-s}{\sqrt{(r-s)^2}} ds . \end{aligned} \right\}$$

$$(19) \quad \left. \begin{aligned} u_L^{(1)} &\sim \frac{1}{4\pi} \frac{z}{\sqrt{k_0^2 + z^2}} \int_{R_i}^{R_a} \frac{\partial^2 \Gamma(s, \varphi_0)}{\partial \varphi_0^2} \ln \frac{2|r-s|}{R(\varphi_0) - R_i} ds - \frac{1}{4\pi} \int_{R_i}^{R_a} \frac{\partial^2 \Gamma(s, \varphi_0)}{\partial \varphi_0} \frac{z}{k_0^2 + 2s} \frac{ds}{\sqrt{(r-s)^2}} ; \\ V_L^{(1)} &\sim -\frac{1}{4\pi} \frac{k_0}{\sqrt{k_0^2 + z^2}} \int_{R_i}^{R_a} \frac{\partial^2 \Gamma(s, \varphi_0)}{\partial \varphi_0^2} \ln \frac{2|r-s|}{R(\varphi_0) - R_i} ds + \frac{1}{4\pi} \int_{R_i}^{R_a} \frac{\partial^2 \Gamma(s, \varphi_0)}{\partial \varphi_0} \frac{k_0}{k_0^2 + 2s} \frac{ds}{\sqrt{(r-s)^2}} . \end{aligned} \right\}$$

Während die singulären Integranden in Formel (18) u.a. als Cauchy'sche Hauptwerte ohne Schwierigkeit integriert werden können, existieren die zweiten Integrale bei $u_L^{(1)}$ und $V_L^{(1)}$ in (19) nicht, sie wachsen vielmehr über alle Grenzen. In diesem Fall, d.h. am Ort des gebundenen Wirbels für $x=0$ und $\varphi=\varphi_0$ versagt bekanntlich⁶⁾ das Modell der instationären Traglinientheorie, sofern die freien Wirbel auf diskreten Schraubenflächen angeordnet sind. Diese Schwierigkeit besteht nicht, wenn man die sog. „räumlich kontinuierliche“ Verteilung der freien Wirbel verwendet.⁷⁾ Will man die Verteilung der

5) Die Integrationsgrenze ξ ist dabei so zu wählen, daß mit ausreichender Genauigkeit im Bereich $0 \leq \psi \leq \xi$ gesetzt werden kann $\sin \psi \approx \psi$ und $\cos \psi \approx 1 - 0,5 \psi^2$.

6) Vgl. die genannte Arbeit von W.Zwick.

7) Vgl. Propellertheorie S.52/53.

freien Wirbel auf Schraubenflächen beibehalten, so lässt sich eine physikalisch sachgemässe Interpretation der divergenten Integralausdrücke in (19) nur gewinnen, wenn man bei den betreffenden Integralen vom Modell der tragenden Linie zur tragenden Fläche übergeht. Betrachtet man also statt der tragenden Linie der Zirkulation $\Gamma(s, \varphi_0)$ eine kontinuierliche im Bereich $\chi_v \leq \chi \leq \chi_H$ (χ_v Flügelvorderkante, χ_H Hinterkante) angeordnete Wirbelverteilung $\gamma^*(s, \chi, \varphi_0) = \sqrt{s^2 + R_0^2} \cdot \gamma(s, \chi, \varphi_0)$, so ist das Geschwindigkeitsfeld $w_L^{(1)}$ analog zu (5) aufgebaut; die kritische Stelle des Integranden ist nun nicht mehr durch den Wert $\psi = 0$ sondern $\psi = -\chi$ gegeben. An die Stelle der divergenten Integrale

$$\frac{1}{4\pi} \int_{R_i}^{R_a} \frac{\partial \Gamma(s, \varphi_0)}{\partial \varphi_0} \frac{1}{R_0^2 + z s} \frac{ds}{\sqrt{(z-s)^2}}$$

in Formel (19) treten nun die Ausdrücke

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} d\chi \int_{R_i}^{R_a} \frac{\partial \gamma^*(s, \chi, \varphi_0 - \chi)}{\partial \varphi_0} \frac{1}{R_0^2 + z s} \frac{ds}{\sqrt{(R_0^2 + z s) \chi^2 + (z-s)^2}}$$

bzw. nach geeigneter Umformung

$$(20) \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} d\chi \int_{R_i}^{R_a} \frac{\partial \gamma^*(z, \chi, \varphi_0 - \chi)}{\partial \varphi_0} \frac{1}{R_0^2 + z^2} \frac{ds}{\sqrt{(R_0^2 + z^2) \chi^2 + (z-s)^2}} = \\ & = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{R_0^2 + z^2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\partial \gamma^*(z, \chi, \varphi_0 - \chi)}{\partial \varphi_0} \ln \frac{R_a - z + \sqrt{(R_a - z)^2 + \chi^2 (R_0^2 + z^2)}}{R_i - z + \sqrt{(R_i - z)^2 + \chi^2 (R_0^2 + z^2)}} d\chi \end{aligned} \right.$$

Das Integral (20) hat einen endlichen Wert, der allerdings von dem Verlauf der Wirbelverteilung γ^* im Bereich $-\varepsilon \leq \chi \leq \varepsilon$ abhängt. In vielen Fällen dürfte sicher die Annahme eines konstanten γ^* -wertes genügen. Bei der Integration über χ in Formel (20) ist noch zu beachten, daß (entsprechend der Plattform in der Tragflächentheorie) im allgemeinen $R_a = R_a(\chi)$ eine Funktion von χ sein wird. An den Stellen φ_0 , wo der Flügel aus dem Wasser Herausschlägt, ist ohnehin $R_0 = R(\varphi_0 - \chi)$ zu setzen.