106 | Januar 1962

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

G. Collatz

Die auf einen elliptischen Zylinder in instationärer Potentialströmung wirkenden Kräfte und Momente

TUHH
Technische Universität Hamburg-Harburg

Die auf einen elliptischen Zylinder in instationärer Potentialströmung wirkenden Kräfte und Momente

G. Collatz, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1962

Schriftenreihe Schiffbau
Schwarzenbergstraße 95c
D-21073 Hamburg

http://www.tuhh.de/vss

NAT 520
R5 B

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Prof. Dr.Ing. Dr.Ing.e.H. G. Weinblum

Die auf einen elliptischen Zylinder in instationärer Potentialströmung wirkenden Kräfte und Momente.

(Erweiterung der Sätze von Lagally und Cummins für den Spezialfall eines elliptischen Zylinders.)

von Dipl.Ing. Günter Collatz

Januar 1962

1. Zusammenfassung.

Es ist bekannt, dass man Körper, die sich in einer Potentialströmung befinden, darstellen kann durch Singularitäten, die sowohl im Innern des Körpers als auch auf der Oberfläche liegen können. Im Falle stationärer Strömung lassen sich die auf den Körper wirkenden Kräfte und Momente nach Lagally [1] aus den Singularitäten und der ungestörten relativen Anströmung ermitteln. Ist die Anströmung instationär, so kommen, wie Cummins [2] gezeigt hat, zu den so ermittelten Kräften und Momenten noch instationäre Zusatzterme hinzu. Der Zusatzterm für die Kraft lässt sich direkt durch die zeitliche Änderung der Singularitäten ausdrücken. Es gelingt hingegen nicht, auch für den Zusatzterm des Momentes auf entsprechende Weise einen Ausdruck aufzustellen, der nur noch die zeitliche Änderung der Singularitäten enthält. Daher ist es bei instationärer Strömung im allgemeinen erforderlich, die zeitliche Änderung des Gesamtpotentials (Potential der ungestörten Grundströmung plus Potential der von den Singularitäten induzierten Strömung) auszurechnen, um daraus mittels einer Oberflächenintegration den instationären Momentenanteil bestimmen zu können.

In dieser Arbeit wird ein Zylinder (ebenes Problem) mit elliptischer Kontur betrachtet, der durch eine kontinuierliche Quell- Senken- Oberflächenbelegung dargestellt ist. Es wird gezeigt, dass es in diesem Sonderfall doch gelingt, den instationären Zusatzterm für das Moment auf ähnliche Weise wie den Zusatzterm für die Kraft direkt aus der zeitlichen Änderung der Quellbelegung zu ermitteln. Damit ist die Bestimmung des Gesamtpotentials nicht mehr erforderlich.

Ferner wird gezeigt, wie man aus der Quellbelegung des elliptischen Zylinders auf die ungestörte relative Anströmung schliessen kann. Es wird dadurch möglich, auch die stationären Kraft- und Momentenanteile nach Lagally direkt aus der Quellbelegung, d.h. ohne Kenntnis der Grundströmung auszurechnen. Inwiefern letzteres von Vorteil sein kann, wird im nächsten Abschnitt kurz angedeutet und am Schluss der Arbeit näher ausgeführt.

2. Problemstellung.

Ein elliptischer Zylinder mit den Halbachsen a und b bewege sich in einer Flüssigkeit senkrecht zur Achse mit der zeitlich veränderlichen Geschwindigkeit $\vec{u}(t)$. Gleichzeitig führe es um seine Achse eine Drehbewegung mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}(t)$ aus.

Von der Flüssigkeit sei angenommen, dass sie reibungsfrei und inkompressibel sei. Die ungestörte Grundströmung sei instationär, sie sei im Unendlichen als ruhend angenommen, von einem Potential ableitbar und besitze innerhalb des betrachteten Zylinders keine Singularitäten. Es sei ferner angenommen, dass auf die Flüssigkeit keine äusseren Massenkräfte wirken.

Der Zylinder sei durch eine kontinuierliche Quell-Senken-Belegung (Dimension: Ergiebigkeit pro Flächeneinheit = Geschwindigkeit) auf der Kontur S dargestellt. Die Funktion der Quellbelegung $q = q(S)$ sei bekannt, ebenso die zeitliche Ableitung $\frac{dq}{dt} = \dot{q}(S)$.

Es wird nun gefragt, ob es unter den eben getroffenen Voraussetzungen möglich ist, die auf den Zylinder wirkende Kraft und das Moment direkt aus $q(S)$ und $\dot{q}(S)$ zu bestimmen, ohne dass dabei die Kenntnis der ungestörten Grundströmung erforderlich ist.

Diese Fragestellung erscheint auf den ersten Blick nicht sehr sinnvoll, da im allgemeinen die Kenntnis der Grundströmung eine Voraussetzung für die Bestimmung der Quellbelegung ist. Es gibt jedoch Fälle, für die diese Fragestellung von Bedeutung ist.

Befinden sich z.B. in einer als ruhend angenommenen Flüssigkeit mehrere Körper, die beliebige Bewegungen ausführen, so ist es zweckmässig, die Körper durch Oberflächenquellbelegungen darzustellen. Die Bestimmung der Quellbelegungen führt dann auf ein System von so vielen Integralgleichungen, wie Körper vorhanden sind. Nach Lösung des Integralgleichungssystems sind zunächst nur die Quellbelegungen bekannt. Will man die auf einen dieser Körper wirkenden Kräfte und Momente ermitteln, so ist, wie oben bereits angedeutet, die Kenntnis der relativen Anströmung sowie der zeitlichen Ableitung des Gesamtpotentials erforderlich. Man muss also - im allgemeinen unter verhältnismässig grossem numerischen Aufwand - die von den Quellbelegungen aller Körper induzierten Strömungen und deren Potentiale bestimmen. Gelingt es dagegen, die auf einen Körper wirkenden Kräfte und Momente direkt aus der Quellbelegung dieses Körpers zu berechnen, und das ist beim elliptischen Zylinder der Fall, so bedeutet das einen wesentlichen Vorteil.

3. Allgemeine Sätze über die Kräfte und Momente auf einen zylindrischen Körper.

Als Bezugssystem wird ein im Raum feststehendes kartesisches Koordinatensystem eingeführt. Der Ursprung falle im betrachteten Zeitpunkt mit dem Ellipsenmittelpunkt zusammen, die x-Achse weise in die Richtung der grossen Halbachse a.

Es sei mit

$$\phi_g \text{ und } \vec{v}_g,$$

das Potential und die Geschwindigkeit der ungestörten Grundströmung, mit

$$\phi_s \text{ und } \vec{V}_s$$

das Potential und die Geschwindigkeit der von der Quellbelegung induzierten Störströmung und mit

$$\phi = \phi_g + \phi_s \text{ und } \vec{V} = \vec{V}_g + \vec{V}_s$$

das Potential und die Geschwindigkeit der Gesamtströmung bezeichnet.

Die Geschwindigkeit der ungestörten relativen Anströmung (relativ zu einem mit dem Körper mitbewegten System) ist dann gegeben durch:

$$\vec{V}_r = \vec{V}_g - \vec{u} - [\vec{\omega} \times \vec{r}] \qquad (1)$$

Der zweite und dritte Term entspricht einer Translationsbzw. Drehbewegung des Zylinders in einer ruhenden Flüssigkeit. $\vec{r}$ ist ein Ortsvektor bezogen auf den Mittelpunkt (Drehachse).

Bei Nichtvorhandensein äusserer Massenkräfte lautet die Bernoulli'sche Druckgleichung für instationäre Strömung,

$$\frac{\varrho}{2} v^2 + p + \varrho \frac{d\phi}{dt} = F(t)$$

wobei die Konstante auf der rechten Seite im allgemeinen noch eine Funktion der Zeit ist. Da jedoch einerseits die Grundströmung im Unendlichen als ruhend angenommen wurde, andererseits die vom Körper hervorgerufene Störströmung nach Unendlich hin abgeklungen ist, ist die Konstante für den betrachteten Fall von der Zeit unabhängig und gleich dem weit vom Körper entfernt herrschenden Druck p_0 .

$$p = p_0 - \frac{\varrho}{2} v^2 - \varrho \frac{d\phi}{dt} \qquad (2)$$

Bezeichnet $\vec{n}$ den nach aussen gerichteten Einheitsnormalenvektor der Kontur, so ist die auf den Zylinder wirkende Kraft (pro Längeneinheit des Zylinders) gegeben durch:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= -\int_S p\,\vec{n}\,dS \\ &= -p_0\int_S \vec{n}\,dS + \frac{\varrho}{2}\int_S v^2\vec{n}\,dS + \varrho\int_S \frac{d\phi}{dt}\,\vec{n}\,dS \end{aligned} \tag{3}$$

Für das Moment pro Längeneinheit gilt:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= -\int_S p\,[\vec{r}\times\vec{n}]\,dS \\ &= -p_0\int_S [\vec{r}\times\vec{n}]\,dS + \frac{\varrho}{2}\int_S v^2[\vec{r}\times\vec{n}]\,dS + \varrho\int_S \frac{d\phi}{dt}[\vec{r}\times\vec{n}]\,dS \end{aligned} \tag{4}$$

Das erste Integral im Ausdruck für die Kraft verschwindet, da bekanntlich

$$\int_S \vec{n}\,dS = 0$$

ist. Dass auch das erste Integral im Ausdruck für das Moment verschwindet, lässt sich leicht zeigen. Da die Normal- und Tangentialeinheitsvektoren $\vec{n}$ und $\vec{t}$ senkrecht aufeinander stehen, ist,

$$[\vec{r}\times\vec{n}] = (\vec{r}\cdot\vec{t})\cdot\vec{k}$$

wenn mit $\vec{k}$ der Einheitsvektor in Richtung der Zylinderachse bezeichnet wird. Ist F die von S umschlossene Querschnittsfläche des Zylinders, so folgt nach dem Stoke'sehen Integralsatz:

$$\int_S [\vec{r}\times\vec{n}]\,dS = \vec{k}\int_S \vec{r}\cdot\vec{t}\,dS = \vec{k}\iint_F \operatorname{rot}\vec{r}\cdot\vec{k}\,dS = 0$$

Der Integrand des rechten Integrals ist identisch Null, da die Rotation eines Ortsvektors Null ist.

Die jeweils zweiten Integrale der Gleichungen (3) und (4) stellen die auf den Zylinder wirkenden stationären Kraft-und Momentenanteile dar. Für den hier betrachteten Fall, bei dem der Zylinder durch eine Quellbelegung auf der Kontur dargestellt ist, kann man dafür nach Lagally auch schreiben:

$$\frac{\rho}{2}\int_S v^2 \vec{n}\, dS = \Delta \vec{P}_{stat.} = -\rho \int_S q(S)\, \vec{v}_r\, dS \tag{5}$$

$$\frac{\rho}{2}\int_S v^2 [\vec{r} \times \vec{n}]\, dS = \Delta \vec{M}_{stat.} = -\rho \int_S q(S)\, [\vec{r} \times \vec{v}_r]\, dS \tag{6}$$

Auf die Sätze von Lagally soll hier nicht näher eingegangen werden, da sie als bekannt vorausgesetzt werden können.

Die restlichen beiden Integrale in (3) und (4) stellen die instationären Zusatzterme dar.

$$\rho \int_S \frac{d\phi}{dt}\, \vec{n}\, dS = \Delta \vec{P}_{inst.} = -\rho \int_S \dot{q}(S)\, \vec{r}\, dS + \rho F \frac{d\vec{u}}{dt} \tag{7}$$

$$\rho \int_S \frac{d\phi}{dt} [\vec{r} \times \vec{n}]\, dS = \Delta \vec{M}_{inst.} \tag{8}$$

Dabei ist auf der rechten Seite von Gl.(7) der Ausdruck angegeben, den man nach Cummins für den instationären Kraftanteil im Falle einer Oberflächenbelegung erhält.

Bis hierher handelt es sich um bekannte Dinge. Nun soll gezeigt werden, dass der elliptische Zylinder einen Sonderfall darstellt, bei dem man noch zu weitgehenderen Aussagen gelangen kann. Dazu sind jedoch, damit der Gang der eigentlichen Beweisführung nicht allzuoft durch Zwischenbetrachtungen unterbrochen wird, einige vorbereitende Überlegungen notwendig.

4. Einführung elliptischer Koordinaten.

Zusätzlich zu dem oben eingeführten, im Raum feststehenden Bezugssystem (x,y) wird noch ein mit dem Zylinder fest verbundenes System eingeführt. Da hier nur der Spezialfall einer elliptischen Kontur behandelt werden soll, ist es zweckmässig, dafür elliptische (Lamé'sche) Koordinaten (ϑ, φ) zu wählen. Im betrachteten Zeitpunkt t_0 soll der Ursprung des feststehenden Bezugssystems mit dem Ellipsenmittelpunkt zusammenfallen, und die x-Achse die Richtung der grossen Halbachse a haben. Dann ist der Zusammenhang beider Koordinatensysteme gegeben durch:

$$\begin{aligned} x &= c \,\mathrm{ch}\,\vartheta \cos\varphi & \vartheta &\geq 0 \\ y &= c \,\mathrm{sh}\,\vartheta \sin\varphi & 0 &\leq \varphi < 2\pi \end{aligned} \qquad t = t_0 \tag{9}$$

Die Linien ϑ = konst. stellen konvokale Ellipsen, die Linien φ = konst. konvokale Hyperbeln mit den Brennpunkten ($x = \pm c$, $y = 0$) dar. Es handelt sich um ein orthogonales Koordinatensystem, d.h. die Linien ϑ = konst. stehen senkrecht auf den Linien φ = konst..

Für die partiellen Ableitungen gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\vartheta}{\partial x} &= \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\mathrm{sh}\,\vartheta \cos\varphi}{c(\mathrm{sh}^2\vartheta + \sin^2\varphi)} \\ \frac{\partial\vartheta}{\partial y} &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\mathrm{ch}\,\vartheta \sin\varphi}{c(\mathrm{sh}^2\vartheta + \sin^2\varphi)} \end{aligned} \tag{10}$$

Ferner gilt, wenn $f(\vartheta, \varphi)$ eine skalare Funktion und $\vec{n}$ und $\vec{t}$ die Einheitsvektoren normal und tangential zu den Kurven ϑ = konst. sind:

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \frac{1}{c\sqrt{\mathrm{sh}^2\vartheta + \sin^2\varphi}} \left(\vec{n} \frac{\partial f}{\partial\vartheta} + \vec{t} \frac{\partial f}{\partial\varphi} \right) \tag{11}$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \Delta f = \frac{1}{c^2(\mathrm{sh}^2\vartheta + \sin^2\varphi)} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} \right) \tag{12}$$

Ist eine Ellipse durch $\vartheta = \vartheta_0 =$ konst. gegeben, und hat diese Ellipse die Halbachsen a und b, so folgen aus (9) und

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cos\varphi \\ y &= b \sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad \text{also :} \quad \begin{aligned} a &= c\,\mathrm{ch}\,\vartheta_0 \\ b &= c\,\mathrm{sh}\,\vartheta_0 \end{aligned}$$

unter Zuhilfenahme der Additionstheoreme

$$\mathrm{ch}^2\vartheta_0 - \mathrm{sh}^2\vartheta_0 = 1$$
$$\mathrm{ch}\,\vartheta_0 + \mathrm{sh}\,\vartheta_0 = e^{\vartheta_0}$$

die Beziehungen:

$$c^2 = a^2 - b^2 \longrightarrow c = \sqrt{a^2-b^2}$$

$$c\,e^{\vartheta_0} = a+b \longrightarrow e^{\vartheta_0} = \frac{a+b}{\sqrt{(a+b)(a-b)}} = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \tag{13}$$

Im weiteren Verlauf der Arbeit tritt häufig der Faktor $e^{-2\vartheta_0}$ auf. Er sei der Einfachheit halber mit λ bezeichnet.

$$e^{-2\vartheta_0} = \lambda = \frac{a-b}{a+b} \tag{14}$$

Für das Linienelement der durch $\vartheta_0 =$ konst. gegebenen Ellipse erhält man:

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{dx^2+dy^2} \\ &= \sqrt{(-c\,\mathrm{ch}\,\vartheta_0 \sin\varphi\, d\varphi)^2 + (c\,\mathrm{sh}\,\vartheta_0 \cos\varphi\, d\varphi)^2} \\ &= c\sqrt{\mathrm{ch}^2\vartheta_0 \sin^2\varphi + \mathrm{sh}^2\vartheta_0 \cos^2\varphi}\; d\varphi \\ &= c\sqrt{(1+\mathrm{sh}^2\vartheta_0)\sin^2\varphi + \mathrm{sh}^2\vartheta_0(1-\sin^2\varphi)}\; d\varphi \\ &= c\sqrt{\mathrm{sh}^2\vartheta_0 + \sin^2\varphi}\; d\varphi \end{aligned} \tag{15}$$

Bezeichnet man den Winkel zwischen der x-Achse und dem nach aussen gerichteten Einheitsnormalenvektor $\vec{n}$ der Kontur $\vartheta = \vartheta_0$ mit (n,x), so ist:

$$\cos(n,x) = \frac{dy}{ds} = \frac{b}{c} \cdot \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\mathrm{sh}^2\vartheta_0 + \sin^2\varphi}}$$
$$\sin(n,x) = -\frac{dx}{ds} = \frac{a}{c} \cdot \frac{\sin\varphi}{\sqrt{\mathrm{sh}^2\vartheta_0 + \sin^2\varphi}} \tag{16}$$

Schliesslich gilt für die im weiteren Verlauf der Arbeit benötigten vektoriellen Produkte:

$$[\vec{r} \times \vec{n}] = [x \sin(n,x) - y \cos(n,x)]\,\vec{k}$$
$$= \frac{a^2-b^2}{c}\,\frac{\cos\varphi \sin\varphi}{\sqrt{\mathrm{sh}^2\vartheta_0 + \sin^2\varphi}}\,\vec{k} = \frac{c}{2}\,\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\mathrm{sh}^2\vartheta_0 + \sin^2\varphi}}\,\vec{k} \tag{17}$$
$$[\vec{r} \times \vec{t}] = [x \cos(n,x) + y \sin(n,x)]\,\vec{k}$$
$$= \frac{a \cdot b}{c}\,\frac{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{\sqrt{\mathrm{sh}^2\vartheta_0 + \sin^2\varphi}}\,\vec{k} = \frac{a \cdot b}{c\sqrt{\mathrm{sh}^2\vartheta_0 + \sin^2\varphi}}\,\vec{k}$$

5. Potentialfunktionen in elliptischen Koordinaten.

Lösungen der Potentialgleichung $\Delta f = 0$ in elliptischen Koordinaten sind, wie man leicht durch Einsetzen in Gl.(12) bestätigen kann, die Funktionen

$$f_\nu = e^{\pm\nu(\vartheta \pm i\varphi)} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots) \tag{18}$$

sowie deren Real- und Imaginärteile allein. Diese sind in den Brennpunkten ($\vartheta = 0$, $\varphi = 0$) und ($\vartheta = 0$, $\varphi = \pi$) singulär, da hier $\sqrt{\mathrm{sh}^2\vartheta + \sin^2\varphi} = 0$ ist, also der Nenner des Gradienten verschwindet.

Betrachtet man dagegen die Kombinationen,

$$
\begin{aligned}
f_{1\nu} &= \tfrac{1}{2} e^{\nu\alpha} \cos\nu\varphi + \tfrac{1}{2} e^{-\nu\alpha} \cos\nu\varphi = \operatorname{ch}\nu\alpha \cos\nu\varphi \\
f_{2\nu} &= \tfrac{1}{2} e^{\nu\alpha} \sin\nu\varphi - \tfrac{1}{2} e^{-\nu\alpha} \sin\nu\varphi = \operatorname{sh}\nu\alpha \sin\nu\varphi \\
f_{3\nu} &= \tfrac{1}{2} e^{\nu\alpha} \cos\nu\varphi - \tfrac{1}{2} e^{-\nu\alpha} \cos\nu\varphi = \operatorname{sh}\nu\alpha \cos\nu\varphi \\
f_{4\nu} &= \tfrac{1}{2} e^{\nu\alpha} \sin\nu\varphi + \tfrac{1}{2} e^{-\nu\alpha} \sin\nu\varphi = \operatorname{ch}\nu\alpha \sin\nu\varphi
\end{aligned}
\tag{19}
$$

so weisen nur $f_{3\nu}$ und $f_{4\nu}$ in den Brennpunkten Singularitäten auf. So gilt z.B. für die α-Komponente des Gradienten von $f_{3\nu}$ im Punkt(0,0) :

$$\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \varphi\to 0}} \operatorname{grad}_\alpha f_{3\nu} = \lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \varphi\to 0}} \frac{\nu \operatorname{ch}\nu\alpha \cos\nu\varphi}{c\sqrt{\operatorname{sh}^2\alpha + \sin^2\varphi}} = +\infty$$

Die Bestimmung der Gradienten von $f_{1\nu}$ und $f_{2\nu}$ dagegen führt in den Brennpunkten auf die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$.

Für $\nu = 1$ folgt aus den Beziehungen mit den kartesischen Koordinaten:

$$f_{11} = \operatorname{ch}\alpha \cos\varphi = \frac{x}{c}$$

$$f_{21} = \operatorname{sh}\alpha \sin\varphi = \frac{y}{c}$$

Es ist also f_{11} das Potential einer Parallelströmung in x-Richtung, f_{21} das einer Parallelströmung in y-Richtung vom Betrage $\frac{1}{c}$.

Für $\nu > 1$ lassen sich die den Potentialen $f_{1\nu}$ und $f_{2\nu}$ zugehörigen Strömungen nicht mehr in so einfacher Weise angeben. Da jedoch die Kenntnis dieser Strömungen im folgenden nicht erforderlich ist, genügt es nachzuweisen, dass die Funktionen $\operatorname{ch}\nu\alpha \cos\nu\varphi$ und $\operatorname{sh}\nu\alpha \sin\nu\varphi$ auch in den Brennpunkten regulär sind. D.h., dass diese Funktionen auch in den Brennpunkten stetige Gradienten haben, und das dort auch die Divergenz der Gradienten Null ist.

Der Beweis ergibt sich durch sukzessive Grenzübergänge. Er soll hier nur für die ϑ-Komponente des Gradianten von $f_{1\nu} = \operatorname{ch}\nu\vartheta \cos\nu\varphi$ durchgeführt werden. Für alle anderen Grössen ist der Beweis analog.

Einerseits ist für $\vartheta = 0$ und $\varphi \neq 0$ bzw. $\varphi \neq \pi$:

$$\operatorname{grad}_{\vartheta} f_{1\nu}(0,\varphi) = \left.\frac{\nu \operatorname{sh}\nu\vartheta \cos\nu\varphi}{c\sqrt{\operatorname{sh}^2\vartheta + \sin^2\varphi}}\right|_{\vartheta=0} \equiv 0$$

Also:
$$\lim_{\substack{\varphi\to 0\\ \text{bzw. } \varphi\to\pi}} \left(\lim_{\vartheta\to 0} \operatorname{grad}_{\vartheta} f_{1\nu} \right) = 0$$

Der gleiche Grenzwert ergibt sich, wenn man $\varphi = 0$ bzw. $\varphi = \pi$ festhält, und ϑ gegen Null gehen lässt, da für $\nu > 1$ $\operatorname{sh}\nu\vartheta$ stärker gegen Null strebt als $\operatorname{sh}\vartheta$.

$$\lim_{\vartheta\to 0} \left(\lim_{\substack{\varphi\to 0\\ \text{bzw. } \varphi\to\pi}} \operatorname{grad}_{\vartheta} f_{1\nu} \right) = \frac{\nu \operatorname{sh}\nu\vartheta}{c \operatorname{sh}\vartheta} = 0$$

(Übrigens haben bis auf $\nu = 1$ alle auftretenden unbestimmten Formen den Grenzwert Null. D.h., dass nicht nur die Divergenz der Gradienten, sondern auch die Gradienten selber für alle Funktionen $f_{1\nu}$ und $f_{2\nu}$ ($\nu > 1$) in den Brennpunkten verschwinden.)

Aus der Tatsache, dass die Funktionen $f_{1\nu} = \operatorname{ch}\nu\vartheta \cos\nu\varphi$ und $f_{2\nu} = \operatorname{sh}\nu\vartheta \sin\nu\varphi$ in der ganzen ϑ-φ-Ebene regulär sind, ergibt sich der nachfolgende Satz:

Weiss man von einer Strömung, dass sie innerhalb des Bereiches $\vartheta < \vartheta_1$ keine Singularitäten besitzt, und ist das Potential dieser Strömung auf der Ellipse $\vartheta_0 = $ konst. ($\vartheta_0 < \vartheta_1$) durch die Fourierreihe

$$\phi(\vartheta_0, \varphi) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos\nu\varphi + b_\nu \sin\nu\varphi) \tag{20}$$

gegeben, so ist die Reihe

$$a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(a_\nu \frac{\operatorname{ch}\nu\vartheta}{\operatorname{ch}\nu\vartheta_0} \cos\nu\varphi + b_\nu \frac{\operatorname{sh}\nu\vartheta}{\operatorname{sh}\nu\vartheta_0} \sin\nu\varphi\right) \tag{21}$$

innerhalb des Bereiches $\vartheta < \vartheta_1$ beschränkt und stellt dort das Strömungspotential $\Phi\,(\vartheta, \varphi)$ dar, da es nach bekannten Sätzen der Potentialtheorie nur eine einzige Potentialfunktion gibt, die innerhalb eines Bereiches regulär ist und auf dem Rand vorgeschriebene Werte annimmt.

6. Das Potential der Quellbelegung und die induzierten Geschwindigkeitskomponenten.

Da der Parameter φ beim Umlauf um die Kontur die Werte von 0 bis 2π annimmt, so muss, wenn man die als bekannt vorausgesetzte Quellbelegung q als Funktion von φ angibt, $q(\varphi)$ die Periode 2π haben. Es sei nun angenommen, dass $q(\varphi)$ durch die Reihenentwicklung

$$q(\varphi) = \frac{1}{c\sqrt{\mathrm{sh}^2\vartheta_0 + \sin^2\varphi}} \sum_{\nu=1}^{\infty} (\gamma_\nu \cos\nu\varphi + \delta_\nu \sin\nu\varphi) \qquad (22)$$

dargestellt ist. (Ein konstantes Glied γ_0 kann nicht auftreten, da infolge der Schliessbedingung die Integration der Quellbelegung über die Kontur Null ergeben muss, wobei die vor das Summenzeichen gezogene Funktion 1 : $c\sqrt{\mathrm{sh}^2\vartheta_0 + \sin^2\varphi}$ sich gegen die im Linienelement $dS = c\sqrt{\mathrm{sh}^2\vartheta_0 + \sin^2\varphi}\; d\varphi$ auftretende Funktion herauskürzt.)

Gefragt ist nach dem Potential dieser Quellbelegung sowie nach den von dieser Quellbelegung induzierten Geschwindigkeitskomponenten.

Für das Potential gilt:

$$\Phi_s = \frac{1}{2\pi} \int_S q(\varphi) \ln R \, d\sigma \qquad (23)$$

Dabei bedeutet R der Abstand vom Quellelement $q\,d\sigma$ zum Aufpunkt.

Als erstes soll ln R in eine Fourierreihe entwickelt werden. Der Ort des Quellelementes sei durch die laufenden Ordinaten

$$\xi = c\,\mathrm{ch}\,\vartheta_0 \cos\psi \qquad \eta = c\,\mathrm{sh}\,\vartheta_0 \sin\psi$$

bezeichnet, ein Aufpunkt ausserhalb der Kontur durch:

$$x = c\,\mathrm{ch}\,\vartheta \cos\varphi \qquad y = c\,\mathrm{sh}\,\vartheta \sin\varphi$$

Dann ist:

$$R = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} = |x-\xi+i(y-\eta)| = |z-\zeta|$$

$$\ln R = \ln\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} = \mathrm{Re}\,\ln(z-\zeta)$$

durch Einsetzen der elliptischen Koordinaten erhält man:

$$z = x+iy = c\,(\mathrm{ch}\,\vartheta\cos\varphi + i\,\mathrm{sh}\,\vartheta\sin\varphi) = c\,\mathrm{ch}\,(\vartheta+i\varphi)$$

$$\zeta = \xi+i\eta = c\,(\mathrm{ch}\,\vartheta_0\cos\psi + i\,\mathrm{sh}\,\vartheta_0\sin\psi) = c\,\mathrm{ch}\,(\vartheta_0+i\psi)$$

Daraus folgt durch Anwendung der Additionstheoreme für Hyperbelfunktionen:

$$z-\zeta = c\,[\mathrm{ch}\,(\vartheta+i\varphi) - \mathrm{ch}\,(\vartheta_0+i\psi)]$$

$$= c\,2\,\mathrm{sh}\,\tfrac{1}{2}[(\vartheta+i\varphi)+(\vartheta_0+i\psi)]\,\mathrm{sh}\,\tfrac{1}{2}[(\vartheta+i\varphi)-(\vartheta_0+i\psi)]$$

Nun gilt allgemein:

$$\mathrm{sh}\,\frac{a+b}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{a-b}{2} = \frac{1}{4}\left\{e^{\frac{a+b}{2}} - e^{-\frac{a+b}{2}}\right\}\left\{e^{\frac{a-b}{2}} - e^{-\frac{a-b}{2}}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}e^{a}\left\{1-e^{-[a+b]}\right\}\left\{1-e^{-[a-b]}\right\}$$

Also ist:

$$z-\zeta = \frac{c}{2}\,e^{(\vartheta+i\varphi)}\left\{1-e^{-[(\vartheta+i\varphi)+(\vartheta_0+i\psi)]}\right\}\left\{1-e^{-[(\vartheta+i\varphi)-(\vartheta_0+i\psi)]}\right\}$$

Daraus wiederum folgt:

$$\ln(z-\zeta) = \ln\frac{c}{2} + \vartheta + i\varphi +$$

$$+ \ln\left\{1-e^{-[(\vartheta+i\varphi)+(\vartheta_0+i\psi)]}\right\} +$$

$$+ \ln\left\{1-e^{-[(\vartheta+i\varphi)-(\vartheta_0+i\psi)]}\right\}$$

Da der Aufpunkt ausserhalb der Kontur liegen soll, ist $\vartheta > \vartheta_0 > 0$, also sowohl,

$$\left| e^{-[(\vartheta + i\varphi) + (\vartheta_0 + i\psi)]} \right| = e^{-(\vartheta + \vartheta_0)} < 1$$

als auch:

$$\left| e^{-[(\vartheta + i\varphi) - (\vartheta_0 + i\psi)]} \right| = e^{-(\vartheta - \vartheta_0)} < 1$$

D.h. man kann die bekannte Reihenentwicklung für den Logarithmus

$$\ln(1-a) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} a^{\nu} \qquad |a| < 1$$

anwenden, und erhält:

$$\begin{aligned} \ln(z-\zeta) = \ln\frac{c}{2} + \vartheta + i\varphi & - \\ & - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} e^{-\nu(\vartheta + \vartheta_0)} e^{-i\nu(\varphi + \psi)} - \\ & - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} e^{-\nu(\vartheta - \vartheta_0)} e^{-i\nu(\varphi - \psi)} \end{aligned}$$

Schliesslich ergibt sich für den Realteil, also für ln R:

$$\ln R = \ln\frac{c}{2} + \vartheta - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \left[e^{-\nu(\vartheta + \vartheta_0)} \cos\nu(\varphi + \psi) + e^{-\nu(\vartheta - \vartheta_0)} \cos\nu(\varphi - \psi) \right]$$

$$\begin{aligned} = \ln\frac{c}{2} + \vartheta & - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} e^{-\nu(\vartheta + \vartheta_0)} (\cos\nu\varphi \cos\nu\psi - \sin\nu\varphi \sin\nu\psi) - \\ & - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} e^{-\nu(\vartheta - \vartheta_0)} (\cos\nu\varphi \cos\nu\psi + \sin\nu\varphi \sin\nu\psi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \ln\frac{c}{2} + \vartheta & - 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} e^{-\nu\vartheta} \operatorname{ch}\nu\vartheta_0 \cos\nu\varphi \cos\nu\psi - \\ & - 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} e^{-\nu\vartheta} \operatorname{sh}\nu\vartheta_0 \sin\nu\varphi \sin\nu\psi \end{aligned} \qquad (24)$$

Nach Einsetzen dieser Fourierentwicklung sowie der Entwicklung (22) für die Quellbelegung und der Beziehung (15) für das Linienelement in die Gleichung für das Potential (23) erhält man unter der Annahme genügend guter Konvergenz, sodass Ausmultiplizieren und gliedweises Integrieren erlaubt ist:

$$\phi_s(\vartheta,\varphi) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} e^{-\nu\vartheta} (\gamma_\nu \operatorname{ch}\nu\vartheta_0 \cos\nu\varphi + \delta_\nu \operatorname{sh}\nu\vartheta_0 \sin\nu\varphi) \tag{25}$$

(Es sei bemerkt, dass genügend gute Konvergenz immer gewährleistet ist, wenn q die Quellbelegung eines elliptischen Zylinders ist, der sich in einer Strömung befindet, die innerhalb des Bereiches $\vartheta < \vartheta_0 + \varepsilon\ (\varepsilon > 0)$ keine Singularitäten aufweist. Letzteres ist eine der zu Anfang getroffenen Voraussetzungen.)

Für $\vartheta = \vartheta_0$ gilt nach Einführung der Abkürzung $e^{-2\vartheta_0} = \lambda$,

$$e^{-\nu\vartheta_0} \operatorname{ch}\nu\vartheta_0 = \frac{1}{2}(1 + e^{-2\vartheta_0}) = \frac{1+\lambda^\nu}{2}$$

$$e^{-\nu\vartheta_0} \operatorname{sh}\nu\vartheta_0 = \frac{1}{2}(1 - e^{-2\vartheta_0}) = \frac{1-\lambda^\nu}{2}$$

und man erhält für das Potential der Quellbelegung an der Kontur selbst:

$$\phi_s(\vartheta_0,\varphi) = -\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1+\lambda^\nu}{\nu}\gamma_\nu \cos\nu\varphi + \frac{1-\lambda^\nu}{\nu}\delta_\nu \sin\nu\varphi\right) \tag{26}$$

Die Normalkomponente der von der Quellbelegung induzierten Geschwindigkeit ist die ϑ- Komponente des Gradienten von $\phi_s(\vartheta,\varphi)$ für $\vartheta = \vartheta_0$.

$$\begin{aligned} v_{SN} &= \operatorname{grad}_\vartheta \phi_s \Big|_{\vartheta=\vartheta_0} \\ &= \frac{1}{c\sqrt{\operatorname{sh}^2\vartheta + \sin^2\varphi}} \frac{\partial \phi_s}{\partial\vartheta}\Big|_{\vartheta=\vartheta_0} \\ &= \frac{1}{c\sqrt{\operatorname{sh}^2\vartheta_0 + \sin^2\varphi}} \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\nu\vartheta_0}(\gamma_\nu \operatorname{ch}\nu\vartheta_0 \cos\nu\varphi + \delta_\nu \operatorname{sh}\nu\vartheta_0 \sin\nu\varphi) \qquad (27) \\ &= \frac{1}{c\sqrt{\operatorname{sh}^2\vartheta_0 + \sin^2\varphi}} \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty} [(1+\lambda^\nu)\gamma_\nu \cos\nu\varphi + (1-\lambda^\nu)\delta_\nu \sin\nu\varphi] \end{aligned}$$

Auf entsprechende Weise erhält man für die Tangentialkomponente:

$$v_{ST} = \operatorname{grad}_{\varphi} \Phi_S \big|_{\vartheta=\vartheta_0}$$

$$= \frac{1}{c\sqrt{\operatorname{sh}^2\vartheta_0 + \sin^2\varphi}} \; \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[(1+\lambda^\nu)\gamma_\nu \sin\nu\varphi - (1-\lambda^\nu)\delta_\nu \cos\nu\varphi\right] \tag{28}$$

7. Der Zusammenhang zwischen der ungestörten Grundströmung und der Quellbelegung.

Die den Zylinder darstellende Quellbelegung war als bekannt vorausgesetzt worden. Es soll nun auf die ungestörte Grundströmung geschlossen werden, in der sich dann der Zylinder befinden muss.

Wie die Quellbelegung, so muss auch das Potential Φ_g der Grundströmung auf der Kontur die Periode 2π haben. Man kann es daher in Form der Fourierreihe

$$\Phi_g(\vartheta_0, \varphi) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos\nu\varphi + b_\nu \sin\nu\varphi) \tag{29}$$

ansetzen, wobei die Koeffizienten a_ν und b_ν zunächst noch unbekannt sind. Nach Abschnitt 5, Gl.(21) gibt es nur eine einzige mögliche analytische Fortsetzung,

$$\Phi_g(\vartheta, \varphi) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(a_\nu \frac{\operatorname{ch}\nu\vartheta}{\operatorname{ch}\nu\vartheta_0} \cos\nu\varphi + b_\nu \frac{\operatorname{sh}\nu\vartheta}{\operatorname{sh}\nu\vartheta_0} \sin\nu\varphi\right) \tag{30}$$

die innerhalb des Zylinders regulär ist, und man erhält daraus für die Normal- und Tangentialkomponenten der Grundströmung:

$$v_{gN} = \operatorname{grad}_{\vartheta} \Phi_g \big|_{\vartheta=\vartheta_0} =$$

$$= \frac{1}{c\sqrt{\operatorname{sh}^2\vartheta_0 + \sin^2\varphi}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \left(a_\nu \operatorname{Th}\nu\vartheta_0 \cos\nu\varphi + b_\nu \operatorname{Cth}\nu\vartheta_0 \sin\nu\varphi\right) \tag{31}$$

$$V_{gT} = \operatorname{grad}_\varphi \Phi_g \big|_{\vartheta=\vartheta_0} =$$

$$= \frac{1}{c\sqrt{\operatorname{sh}^2\vartheta_0 + \sin^2\varphi}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \left(b_\nu \cos\nu\varphi - a_\nu \sin\nu\varphi \right) \tag{32}$$

Für die Normalkomponente kann man, da

$$\operatorname{th}\nu\vartheta_0 = \frac{1-e^{-2\nu\vartheta_0}}{1+e^{-2\nu\vartheta_0}} = \frac{1-\lambda^\nu}{1+\lambda^\nu}$$

und entsprechend

$$\operatorname{cth}\nu\vartheta_0 = \frac{1+\lambda^\nu}{1-\lambda^\nu}$$

ist, auch schreiben:

$$V_{gN} = \frac{1}{c\sqrt{\operatorname{sh}^2\vartheta_0 + \sin^2\varphi}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \left(\frac{1-\lambda^\nu}{1+\lambda^\nu} a_\nu \cos\nu\varphi + \frac{1+\lambda^\nu}{1-\lambda^\nu} b_\nu \sin\nu\varphi \right) \tag{33}$$

Ist V_{rN} die Normalkomponente der relativen Anströmung, so muss infolge der Randbedingung, die besagt, dass durch die Zylinder-oberfläche keine Flüssigkeit hindurchfliessen kann,

$$V_{sN} + V_{rN} = 0$$

sein, beziehungsweise (siehe auch Gl.(1)):

$$V_{sN} + V_{gN} = \vec{u}\cdot\vec{n} + [\vec{\omega}\times\vec{r}]\cdot\vec{n} \tag{34}$$

Sind u_x und u_y die x- bzw. y-Komponenten der Translations-geschwindigkeit $\vec{u}$, so ist:

$$\vec{u}\cdot\vec{n} = u_x \cos(n,x) + u_y \sin(n,x)$$

$$= \frac{1}{c\sqrt{\operatorname{sh}^2\vartheta_0 + \sin^2\varphi}} \left(b\,u_x \cos\varphi + a\,u_y \sin\varphi \right)$$

Für das Spatprodukt $[\vec{\omega}\times\vec{r}]\cdot\vec{n}$ erhält man durch zyklische Vertauschung:

$$[\vec{\omega}\times\vec{r}]\cdot\vec{n} = \vec{\omega}\,[\vec{r}\times\vec{n}]$$

Da $\vec{\omega}$ und $[\vec{r}\times\vec{n}]$ gleichgerichtete Vektoren sind, folgt für dieses Produkt mit Hilfe von Gleichung (17):

$$[\vec{\omega}\times\vec{r}]\cdot\vec{n} = |\vec{\omega}|\cdot|\vec{r}\times\vec{n}| = \frac{1}{c\sqrt{\sinh^2\vartheta_0+\sin^2\varphi}}\,\frac{c^2}{2}\,\omega\sin 2\varphi$$

Die Randbedingung Gl.(34) lautet dann voll ausgeschrieben:

$$\frac{1}{c\sqrt{\sinh^2\vartheta_0+\sin^2\varphi}}\left\{\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[(1+\lambda^\nu)\gamma_\nu\cos\nu\varphi+(1-\lambda^\nu)\delta_\nu\sin\nu\varphi\right]+\right.$$
$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu\left[\frac{1-\lambda^\nu}{1+\lambda^\nu}a_\nu\cos\nu\varphi+\frac{1+\lambda^\nu}{1-\lambda^\nu}b_\nu\sin\nu\varphi\right]=$$
$$\left.=b\,u_x\cos\varphi+a\,u_y\sin\varphi+\frac{c^2}{2}\omega\sin 2\varphi\right\}$$

Daraus folgt durch Koeffizientenvergleich:

$$\frac{1}{2}(1+\lambda)\gamma_1+\frac{1-\lambda}{1+\lambda}a_1=b\,u_x \longrightarrow a_1=-\frac{1}{2}\frac{(1+\lambda)^2}{1-\lambda}\gamma_1+b\frac{1+\lambda}{1-\lambda}u_x$$

$$\frac{1}{2}(1+\lambda^\nu)\gamma_\nu+\nu\frac{1-\lambda^\nu}{1+\lambda^\nu}a_\nu=0 \longrightarrow a_\nu=-\frac{1}{2\nu}\frac{(1+\lambda^\nu)^2}{1-\lambda^\nu}\gamma_\nu \qquad (\nu>1)$$

$$\frac{1}{2}(1-\lambda)\delta_1+\frac{1+\lambda}{1-\lambda}b_1=a\,u_y \longrightarrow b_1=-\frac{1}{2}\frac{(1-\lambda)^2}{1+\lambda}\delta_1+a\frac{1-\lambda}{1+\lambda}u_y \qquad (35)$$

$$\frac{1}{2}(1-\lambda^2)\delta_2+2\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}b_2=\frac{c^2}{2}\omega \longrightarrow b_2=-\frac{1}{4}\frac{(1-\lambda^2)^2}{1+\lambda^2}\delta_2+\frac{c^2}{4}\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}$$

$$\frac{1}{2}(1-\lambda^\nu)\delta_\nu+\nu\frac{1+\lambda^\nu}{1-\lambda^\nu}b_\nu=0 \longrightarrow b_\nu=-\frac{1}{2\nu}\frac{(1-\lambda^\nu)^2}{1+\lambda^\nu}\delta_\nu \qquad (\nu>2)$$

Setzt man diese Beziehungen in Gl.(29) ein, so erhält man für das Potential der ungestörten Grundströmung in Abhängigkeit von den Koeffizienten der Quellbelegung: (Nur die Konstante a_0 ist nicht bestimmt, was aber ohne Bedeutung ist.)

$$\phi_g(\vartheta_0,\varphi)=a_0-\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\left[\frac{(1+\lambda^\nu)^2}{1-\lambda^\nu}\gamma_\nu\cos\nu\varphi+\frac{(1-\lambda^\nu)^2}{1+\lambda^\nu}\delta_\nu\sin\nu\varphi\right]+$$
$$+b\frac{1+\lambda}{1-\lambda}u_x\cos\varphi+a\frac{1-\lambda}{1+\lambda}u_y\sin\varphi+\frac{c^2}{4}\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}\omega\sin 2\varphi \qquad (36)$$

Daraus ergibt sich nach Addition von Gl.(26) mit

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+\lambda^\nu)^2}{1-\lambda^\nu}+\frac{1}{2}(1+\lambda^\nu)=\frac{1}{2}(1+\lambda^\nu)\left(\frac{1+\lambda^\nu}{1-\lambda^\nu}+1\right)=\frac{1+\lambda^\nu}{1-\lambda^\nu}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-\lambda^\nu)^2}{1+\lambda^\nu}+\frac{1}{2}(1-\lambda^\nu)=\frac{1}{2}(1-\lambda^\nu)\left(\frac{1-\lambda^\nu}{1+\lambda^\nu}+1\right)=\frac{1-\lambda^\nu}{1+\lambda^\nu}$$

für das Gesamtpotential:

$$\begin{aligned}\phi(\vartheta_0,\varphi)=\phi_g+\phi_s=a_0-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\left(\frac{1+\lambda^\nu}{1-\lambda^\nu}\gamma_\nu\cos\nu\varphi+\frac{1-\lambda^\nu}{1+\lambda^\nu}\delta_\nu\sin\nu\varphi\right)+\\+b\frac{1+\lambda}{1-\lambda}u_x\cos\varphi+a\frac{1-\lambda}{1+\lambda}u_y\sin\varphi+\frac{c^2}{4}\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}w\sin2\varphi\end{aligned}\tag{37}$$

8. Die Bestimmung der relativen Anströmung aus der Quellbelegung.

Durch Einsetzen der Beziehungen (35) in die Gleichungen (33) und (32) erhält man für die Normal- und Tangentialkomponenten der ungestörten Grundströmung:

$$\begin{aligned}v_{gN}=\frac{1}{c\sqrt{\operatorname{sh}^2\vartheta_0+\sin^2\varphi}}\Big\{-\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[(1+\lambda^\nu)\gamma_\nu\cos\nu\varphi+(1-\lambda^\nu)\delta_\nu\sin\nu\varphi\right]+\\+b u_x\cos\varphi+a u_y\sin\varphi+\frac{c^2}{2}w\sin2\varphi\Big\}\end{aligned}\tag{38}$$

$$\begin{aligned}v_{gT}=\frac{1}{c\sqrt{\operatorname{sh}^2\vartheta_0+\sin^2\varphi}}\Big\{-\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{(1-\lambda^\nu)^2}{1+\lambda^\nu}\delta_\nu\cos\nu\varphi-\frac{(1+\lambda^\nu)^2}{1-\lambda^\nu}\gamma_\nu\sin\nu\varphi\right]+\\+a\frac{1-\lambda}{1+\lambda}u_y\cos\varphi+\frac{c^2}{2}\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}w\cos2\varphi-b\frac{1+\lambda}{1-\lambda}u_x\sin\varphi\end{aligned}\tag{39}$$

Für Gl.(39) kann man, da

$$\frac{1-\lambda}{1+\lambda}=\frac{1-\frac{a-b}{a+b}}{1+\frac{a-b}{a+b}}=\frac{b}{a}\quad;\quad\frac{1+\lambda}{1-\lambda}=\frac{a}{b}\tag{40}$$

$$\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}=\frac{1-\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2}{1+\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2}=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a+b)^2+(a-b)^2}=\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

ist, auch schreiben:

$$V_{qT} = \frac{1}{c\sqrt{sh^2\vartheta_0 + \sin^2\varphi}} \Big\{ -\frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \Big[\frac{(1-\lambda^\nu)^2}{1+\lambda^\nu} \delta_\nu \cos\nu\varphi - \frac{(1+\lambda^\nu)^2}{1-\lambda^\nu} \gamma_\nu \sin\nu\varphi \Big] + \\ + b u_y \cos\varphi - a u_x \sin\varphi + \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} ab\omega \cos 2\varphi \Big\} \tag{41}$$

Die Normalkomponente der relativen Anströmung ergibt sich aus $V_{rN} + V_{sN} = 0$ und Gl.(27) zu:

$$V_{rN} = -\frac{1}{c\sqrt{sh^2\vartheta_0 + \sin^2\varphi}} \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \big[(1+\lambda^\nu)\gamma_\nu \cos\nu\varphi + (1-\lambda^\nu)\delta_\nu \sin\nu\varphi \big] \\ = -\frac{1}{2} q - \frac{1}{c\sqrt{sh^2\vartheta_0 + \sin^2\varphi}} \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda^\nu (\gamma_\nu \cos\nu\varphi - \delta_\nu \sin\nu\varphi) \tag{42}$$

Für die Tangentialkomponente der relativen Anströmung gilt:

$$V_{rT} = V_{qT} - \vec{u}\cdot\vec{t} - [\vec{\omega}\times\vec{r}]\cdot\vec{t}$$

Es ist:

$$\vec{u}\cdot\vec{t} = -u_x \sin(n,x) + u_y \cos(n,x)$$

$$= \frac{1}{c\sqrt{sh^2\vartheta_0 + \sin^2\varphi}} (-a u_x \sin\varphi + b u_y \cos\varphi)$$

Mit Hilfe von Gl.(17) erhält man,

$$[\vec{\omega}\times\vec{r}]\cdot\vec{t} = \vec{\omega}[\vec{r}\times\vec{t}] = \frac{1}{c\sqrt{sh^2\vartheta_0 + \sin^2\varphi}} ab\omega$$

sodass schliesslich folgt:

$$V_{rT} = \frac{1}{c\sqrt{sh^2\vartheta_0 + \sin^2\varphi}} \Big\{ -\frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \Big[\frac{(1-\lambda^\nu)^2}{1+\lambda^\nu} \delta_\nu \cos\nu\varphi - \frac{(1+\lambda^\nu)^2}{1-\lambda^\nu} \gamma_\nu \sin\nu\varphi \Big] + \\ + \Big(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \cos 2\varphi - 1 \Big) ab\omega \Big\}$$

Oder auch:

$$V_{rT} = -\frac{1}{c\sqrt{sh^2\vartheta_0 + \sin^2\varphi}} \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \Big[\frac{(1-\lambda^\nu)^2}{1+\lambda^\nu} \delta_\nu \cos\nu\varphi - \frac{(1+\lambda^\nu)^2}{1-\lambda^\nu} \gamma_\nu \sin\nu\varphi \Big] \\ - c\sqrt{sh^2\vartheta_0 + \sin^2\varphi} \cdot \frac{2ab}{a^2+b^2} \omega \tag{43}$$

Bei der letzten Umformung wurde berücksichtigt, dass

$$\cos 2\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi \quad \text{und} \quad b^2 = c^2 \operatorname{sh}^2 \vartheta_0$$

ist, und damit:

$$\begin{aligned} \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cos 2\varphi - 1 &= \frac{1}{a^2+b^2}\left[(a^2-b^2)(1-2\sin^2\varphi) - (a^2-b^2)\right] \\ &= -\frac{2}{a^2+b^2}\left(b^2 + c^2\sin^2\varphi\right) \\ &= -\frac{2}{a^2+b^2}\, c^2\left(\operatorname{sh}^2\vartheta_0 + \sin^2\varphi\right) \end{aligned}$$

Damit sind die Normal- und Tangentialkomponenten sowohl der ungestörten Grundströmung als auch der ungestörten relativen Anströmung in Abhängigkeit von den Koeffizienten der Quellbelegung dargestellt.

Um nun wieder von der Reihenentwicklung der Quellbelegung freizukommen, sei zur Abkürzung

$$q(\varphi)\, c\sqrt{\operatorname{sh}^2\vartheta_0 + \sin^2\varphi} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\gamma_\nu \cos\nu\varphi + \delta_\nu \sin\nu\varphi\right) = g(\varphi) \tag{44}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda^\nu\left(\cos\nu\varphi\cos\nu\psi - \sin\nu\varphi\sin\nu\psi\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda^\nu\cos\nu(\varphi+\psi) = k_N(\varphi,\psi) \tag{45}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{(1-\lambda^\nu)^2}{1+\lambda^\nu}\cos\nu\varphi\sin\nu\psi - \frac{(1+\lambda^\nu)^2}{1-\lambda^\nu}\sin\nu\varphi\cos\nu\psi\right] = k_T(\varphi,\psi) \tag{46}$$

gesetzt. Dann gilt,

$$V_{rN} = -\frac{1}{c\sqrt{\operatorname{sh}^2\vartheta_0 + \sin^2\varphi}}\left(\frac{1}{2}g(\varphi) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_N(\varphi,\psi)\, g(\psi)\, d\psi\right) \tag{47}$$

$$\begin{aligned} V_{rT} = &-\frac{1}{c\sqrt{\operatorname{sh}^2\vartheta_0 + \sin^2\varphi}}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_T(\varphi,\psi)\, g(\psi)\, d\psi - \\ &- c\sqrt{\operatorname{sh}^2\vartheta_0 + \sin^2\varphi}\cdot\frac{2ab}{a^2+b^2}\,\omega \end{aligned} \tag{48}$$

was leicht durch Ausmultiplizieren der Reihen, gliedweises Integrieren und Vergleich mit (42) bzw. (43) bestätigt werden kann. Auf die numerische Auswertung der in den Gleichungen (47) und (48) auftretenden Integrale wird am Schluss dieser Arbeit noch näher eingegangen.

9. Die stationären Kraft- und Momentenanteile.

Es ist:

$$c^2(\mathrm{sh}^2\vartheta_0+\sin^2\varphi) = b^2+(a^2-b^2)\sin^2\varphi$$

Setzt man daher zur Abkürzung,

$$\frac{v_{rN}}{c\sqrt{\mathrm{sh}^2\vartheta_0+\sin^2\varphi}} = -W_N \quad ; \quad \frac{v_{rT}}{c\sqrt{\mathrm{sh}^2\vartheta_0+\sin^2\varphi}} = -W_T$$

so folgt:

$$W_N(\varphi) = \frac{1}{b^2+(a^2-b^2)\sin^2\varphi}\left[\frac{1}{2}g(\varphi)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}k_N(\varphi,\tau)g(\tau)\,d\tau\right] \tag{49}$$

$$W_T(\varphi) = \frac{1}{b^2+(a^2-b^2)\sin^2\varphi}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}k_T(\varphi,\tau)g(\tau)\,d\tau+\frac{2ab}{a^2+b^2}\,\omega \tag{50}$$

Für die x-Komponente von $\vec{v}_r$ gilt:

$$v_{rx} = v_{rN}\cos(n,x)-v_{rT}\sin(n,x) = -b\,W_N\cos\varphi+a\,W_T\sin\varphi$$

Für die y-Komponente gilt:

$$v_{ry} = v_{rN}\sin(n,x)+v_{rT}\cos(n,x) = -a\,W_N\sin\varphi-b\,W_T\cos\varphi$$

Und für das nachfolgende vektorielle Produkt erhält man unter Zuhilfenahme der Gleichungen (17):

$$[\vec{r}\times\vec{v}_r] = [\vec{r}\times\vec{n}]\,v_{rN}+[\vec{r}\times\vec{t}]\,v_{rT} = -\vec{k}\left(\frac{a^2-b^2}{2}W_N\sin2\varphi+ab\,W_T\right)$$

Ferner ist:

$$q(s)\,ds = g(\varphi)\,d\varphi$$

Damit lauten die Komponenten der stationären Kraft- und Momentenanteile (Lagally):

$$\Delta P_{x\,stat.} = -\rho\int_S q\,v_{rx}\,ds = \rho\int_0^{2\pi}g(\varphi)\,(b\,W_N\cos\varphi-a\,W_T\sin\varphi)\,d\varphi \tag{51}$$

$$\Delta P_{y\,stat.} = -\varrho \int_{S} \varphi\, v_{1y}\, ds = \varrho \int_{0}^{2\pi} g(\varphi)\,(a w_N \sin\varphi + b w_T \cos\varphi)\, d\varphi \tag{52}$$

$$\Delta M_{stat.} = -\varrho \vec{k} \int_{S} \varphi\, [\vec{r} \times \vec{v}_1]\, ds$$

$$= \varrho \int_{0}^{2\pi} g(\varphi)\,\left(\frac{a^2-b^2}{2} w_N \sin 2\varphi + a b w_T\right) d\varphi \tag{53}$$

10. Die instationären Zusatzterme.

Für die instationären Zusatzterme erhält man wesentlich einfachere Ausdrücke. Nach Gl. (37) gilt für das Gesamtpotential an der Kontur:

$$\phi = a_0 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}\left(\frac{1+\lambda^\nu}{1-\lambda^\nu}\gamma_\nu \cos\nu\varphi + \frac{1-\lambda^\nu}{1+\lambda^\nu}\delta_\nu \sin\nu\varphi\right) +$$

$$+ b\,\frac{1+\lambda}{1-\lambda} u_x \cos\varphi + a\,\frac{1-\lambda}{1+\lambda} u_y \sin\varphi + \frac{a^2-b^2}{4}\,\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}\,\omega \sin 2\varphi$$

Da in dieser Gleichung ausser u_x, u_y und ω lediglich die Koeffizienten γ_ν und δ_ν zeitlich veränderlich sein können, ist dann ,

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{da_0}{dt} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}\left(\frac{1+\lambda^\nu}{1-\lambda^\nu}\frac{d\gamma_\nu}{dt} \cos\nu\varphi + \frac{1-\lambda^\nu}{1+\lambda^\nu}\frac{d\delta_\nu}{dt} \sin\nu\varphi\right) +$$

$$+ b\,\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\,\frac{du_x}{dt} \cos\varphi + a\,\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\,\frac{du_y}{dt} \sin\varphi + \frac{a^2-b^2}{4}\,\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}\,\frac{d\omega}{dt} \sin 2\varphi$$

und man erhält für die Komponenten der instationären Zusatzterme:

$$\Delta P_{x\,inst.} = \varrho \int_{S} \frac{d\phi}{dt} \cos(n,x)\, ds = \varrho b \int_{0}^{2\pi} \frac{d\phi}{dt} \cos\varphi\, d\varphi = \varrho b \pi\, \frac{1+\lambda}{1-\lambda}\left(-\frac{d\gamma_1}{dt} + b\frac{du_x}{dt}\right)$$

$$\Delta P_{y\,inst.} = \varrho \int\limits_S \frac{d\phi}{dt} \sin(n,x)\, dS = \varrho a \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\phi}{dt} \sin\varphi\, d\varphi = \varrho a \pi \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \left(-\frac{d\delta_1}{dt} + a \frac{du_y}{dt}\right)$$

$$\Delta M_{inst.} = \varrho \vec{k} \int\limits_S \frac{d\phi}{dt} [\vec{r} \times \vec{n}]\, dS = \varrho \frac{a^2-b^2}{2} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\phi}{dt} \sin 2\varphi\, d\varphi =$$

$$= \varrho \frac{a^2-b^2}{2} \pi \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \left(-\frac{1}{2} \frac{d\delta_2}{dt} + \frac{a^2-b^2}{4} \frac{d\omega}{dt}\right)$$

Dafür kann man nach Einsetzen der Beziehungen (40) auch schreiben:

$$\Delta P_{x\,inst.} = -\varrho a \pi \frac{d\gamma_1}{dt} + \varrho a b \pi \frac{du_x}{dt} \tag{54}$$

$$\Delta P_{y\,inst.} = -\varrho b \pi \frac{d\delta_1}{dt} + \varrho a b \pi \frac{du_y}{dt} \tag{55}$$

$$\Delta M_{inst.} = -\varrho \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \frac{ab}{2} \pi \frac{d\delta_2}{dt} + \varrho \frac{(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2} \cdot \frac{ab}{4} \pi \frac{d\omega}{dt} \tag{56}$$

Mit

$$\pi \frac{d\gamma_\nu}{dt} = \int\limits_0^{2\pi} \dot{g}(\varphi) \cos\nu\varphi\, d\varphi \quad ; \quad \pi \frac{d\delta_\nu}{dt} = \int\limits_0^{2\pi} \dot{g}(\varphi) \sin\nu\varphi\, d\varphi$$

folgt schliesslich:

$$\Delta P_{x\,inst.} = -\varrho a \int\limits_0^{2\pi} \dot{g}(\varphi) \cos\varphi\, d\varphi + \varrho a b \pi \frac{du_x}{dt} \tag{57}$$

$$\Delta P_{y\,inst.} = -\varrho b \int\limits_0^{2\pi} \dot{g}(\varphi) \sin\varphi\, d\varphi + \varrho a b \pi \frac{du_y}{dt} \tag{58}$$

$$\Delta M_{inst.} = -\varrho \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \frac{ab}{2} \int\limits_0^{2\pi} \dot{g}(\varphi) \sin 2\varphi\, d\varphi + \varrho \frac{(a^2-b^2)}{a^2+b^2} \cdot \frac{ab}{4} \pi \frac{d\omega}{dt} \tag{59}$$

Übrigens entsprechen die Gleichungen (57) und (58), da

$$\vec{r} = \{x;y\} = \{a\cos\varphi;\, b\sin\varphi\} \quad , \quad \dot{q}(\varphi)\,d\varphi = \dot{q}(s)\,ds \quad , \quad ab\pi = F$$

ist, genau den Komponenten des Cummins'schen Ausdrucks. (Siehe rechten Term von Gl.(7).)

Dass die Ausdrücke (57) bis (59) eine wesentliche Vereinfachung gegenüber den linken Seiten der Gleichungen (7) und (8) darstellen, ist selbstverständlich, da hierdurch die oft mühsame Bestimmung der zeitlichen Ableitung des Gesamtpotentials nicht mehr erforderlich ist. Die Gleichungen (49) bis (53) für die stationären Kraft- und Momentenanteile dagegen machen auf den ersten Blick den Eindruck, verhältnismässig umständlich zu sein. Daher soll nun zum Schluss noch nachgewiesen werden, dass auch sie in Hinblick auf die numerische Auswertung sehr vorteilhaft sein können.

11. Über die numerische Auswertung der Integrale.

Der Kern $k_N(\varphi,\psi)$ lässt sich in geschlossener Form darstellen, denn es ist,

$$1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda^{\nu} \cos\nu(\varphi+\psi) = \frac{1-\lambda^2}{1-2\lambda\cos(\varphi+\psi)+\lambda^2}$$

und somit:

$$k_N(\varphi,\psi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda^{\nu}\cos\nu(\varphi+\psi) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\lambda^2}{1-2\lambda\cos(\varphi+\psi)+\lambda^2} - 1\right)$$
$$= \frac{-\lambda^2+\lambda\cos(\varphi+\psi)}{1-2\lambda\cos(\varphi+\psi)+\lambda^2} \qquad (60)$$

Für den Kern $k_T(\varphi,\psi)$ hingegen gelingt dergleichen nicht. Auch ist er nicht beschränkt.

Nun ist im allgemeinen die Quellbelegung nicht durch einen geschlossenen Ausdruck gegeben, es sei denn, es handelt sich um eine besonders einfache Grundströmung, wo dann aber die hier durchgeführte Betrachtung nicht erforderlich ist. Häufig, z.B. beim Mehrkörperproblem, sind nach Lösung des Integralgleichungssystems nur einzelne Funktionswerte an einzelnen Stützstellen bekannt. Man ist dann gezwungen, die Integrationen durch Näherungsquadraturen zu ersetzen.

Es sei nun angenommen, $g(\varphi)$ sei an den m äquidistanten Stützstellen

$$\varphi_n = 2\pi \frac{n}{m} \qquad (n = 1, 2, \ldots m) \quad m = \text{gerade Zahl}$$

gegeben. Wie ich in der Arbeit [3] gezeigt habe, erhält man dann für die in den Gleichungen (49) und (50) auftretenden Integrale

$$I_N = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_N(\varphi,\psi)\, g(\psi)\, d\psi \qquad I_T = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_T(\varphi,\psi)\, g(\psi)\, d\psi$$

das genaueste Ergebnis, wenn man die einzelnen Funktionswerte von $g(\psi)$ mit den $\frac{m}{2}$-ten Fourierteilsummen der Kerne multipliziert und auf dieses Produkt die Rechteckregel anwendet. Es ist also kein Nachteil, dass der Kern $k_T(\varphi,\psi)$ nur, sondern eher ein Vorteil, dass er schon in Form einer Fourierreihe vorliegt.

Wie gleich gezeigt wird, ist es zweckmässig, $k_T(\varphi,\psi)$ in zwei Anteile aufzuspalten. Mit Hilfe der Umformungen

$$\frac{(1-\lambda^\nu)^2}{1+\lambda^\nu} = \frac{(1-\lambda^\nu)^3}{1-\lambda^{2\nu}} = \frac{1-3\lambda^\nu+3\lambda^{2\nu}-\lambda^{3\nu}}{1-\lambda^{2\nu}} \qquad \frac{(1+\lambda^\nu)^2}{1-\lambda^\nu} = \frac{(1+\lambda^\nu)^3}{1-\lambda^{2\nu}} = \frac{1+3\lambda^\nu+3\lambda^{2\nu}+\lambda^{3\nu}}{1-\lambda^{2\nu}}$$

erhält man aus Gl.(46):

$$k_T(\varphi,\psi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1+3\lambda^{2\nu}}{1-\lambda^{2\nu}} (\cos\nu\varphi \sin\nu\psi - \sin\nu\varphi\cos\nu\psi) -$$
$$- \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda^\nu \frac{3+\lambda^{2\nu}}{1-\lambda^{2\nu}} (\cos\nu\varphi\sin\nu\psi + \sin\nu\varphi\cos\nu\psi)$$

$$= -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1+3\lambda^{2\nu}}{1-\lambda^{2\nu}} \sin\nu(\varphi-\psi) - \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda^\nu \frac{3+\lambda^{2\nu}}{1-\lambda^{2\nu}} \sin(\varphi+\psi) \qquad (61)$$

Der erste Term von Gl.(61) sei mit $k_{T1}(\varphi,\psi)$, der zweite mit $k_{T2}(\varphi,\psi)$ bezeichnet. Die $\frac{m}{2}$-ten Fourierteilsummen seien durch den Index * gekennzeichnet. Es ist dann also:

$$k_N^*(\varphi_n,\psi_l)=\sum_{\nu=1}^{m/2}\lambda^\nu \cos\left(2\pi\nu\frac{n+l}{m}\right) \tag{62}$$

$$k_{T1}^*(\varphi_n,\psi_l)=-\sum_{\nu=1}^{m/2}\frac{1+3\lambda^{2\nu}}{1-\lambda^{2\nu}}\sin\left(2\pi\nu\frac{n-l}{m}\right) \tag{63}$$

$$k_{T2}^*(\varphi_n,\psi_l)=-\sum_{\nu=1}^{m/2}\lambda^\nu\frac{3+\lambda^{2\nu}}{1-\lambda^{2\nu}}\sin\left(2\pi\nu\frac{n+l}{2}\right) \tag{64}$$

Ordnet man nun die m Funktionswerte der Funktionen $g(\varphi)$, $w_N(\varphi)$ und $w_T(\varphi)$ in Form von Spaltenvektoren an,

$$G=\left\{\begin{matrix} g(\varphi_1)\\ g(\varphi_2)\\ \vdots\\ g(\varphi_n)\\ \vdots\\ g(\varphi_m)\end{matrix}\right\} \qquad W_N=\left\{\begin{matrix} W_N(\varphi_1)\\ W_N(\varphi_2)\\ \vdots\\ W_N(\varphi_n)\\ \vdots\\ W_N(\varphi_m)\end{matrix}\right\} \qquad W_T=\left\{\begin{matrix} W_T(\varphi_1)\\ W_T(\varphi_2)\\ \vdots\\ W_T(\varphi_n)\\ \vdots\\ W_T(\varphi_m)\end{matrix}\right\} \tag{65}$$

die m^2 Funktionswerte der Kernteilsummen in Form von quadratischen Matrizen, z.B.

$$K_N=\left\{\begin{matrix} k_N^*(\varphi_1,\psi_1) & k_N^*(\varphi_1,\psi_2) & \cdots & k_N^*(\varphi_1,\psi_m)\\ k_N^*(\varphi_2,\psi_1) & k_N^*(\varphi_2,\psi_2) & \cdots & k_N^*(\varphi_2,\psi_m)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ k_N^*(\varphi_n,\psi_1) & k_N^*(\varphi_n,\psi_2) & \cdots & k_N^*(\varphi_n,\psi_m)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ k_N^*(\varphi_m,\psi_1) & k_N^*(\varphi_m,\psi_2) & \cdots & k_N^*(\varphi_m,\psi_m)\end{matrix}\right\} \tag{66}$$

(K_{T1} und K_{T2} analog.)

und die Funktionswerte der Funktion

$$f(\varphi) = \frac{1}{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2\varphi}$$

in Form einer Diagonalmatrix,

$$F = \begin{Bmatrix} f(\varphi_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\varphi_2) & & \\ \vdots & & \ddots \; f(\varphi_n) \; \ddots & \\ 0 & & & f(\varphi_m) \end{Bmatrix} \tag{67}$$

so lauten die Gleichungen (49) und (50) in Matrizenschreibweise:

$$W_N = F\left[\frac{1}{2}G + \frac{1}{m}K_N \cdot G\right] \tag{49a}$$

$$W_T = F\left[\frac{1}{m}(K_{T1} + K_{T2}) \cdot G\right] \tag{50a}$$

Aus Gl.(62) folgt:

$$\begin{array}{llcl}
\cos 2\pi\nu \frac{(n+1)+1}{m} = \cos 2\pi\nu \frac{n+2}{m} & \longrightarrow & k_N^*(\varphi_{n+1}, \gamma_1) = k_N^*(\varphi_n, \gamma_2) \\
\cos 2\pi\nu \frac{(n+1)+2}{m} = \cos 2\pi\nu \frac{n+3}{m} & \longrightarrow & k_N^*(\varphi_{n+1}, \gamma_2) = k_N^*(\varphi_n, \gamma_3) \\
\vdots & & \vdots \\
\cos 2\pi\nu \frac{(n+1)+m}{m} = \cos 2\pi\nu \frac{n+1}{m} & \longrightarrow & k_N^*(\varphi_{n+1}, \gamma_m) = k_N^*(\varphi_n, \gamma_1)
\end{array}$$

Bei den Elementen k_{T2}^* ist der Zusammenhang analog.

Für die Elemente k_{T1}^{*} gilt:

$$
\begin{array}{lclcl}
\sin 2\pi\nu \frac{(n+1)-1}{m} & = & \sin 2\pi\nu \frac{n-m}{m} & \longrightarrow & k_{T1}^{*}(\varphi_{n+1},\psi_1) = k_{T1}^{*}(\varphi_n,\psi_m) \\
\sin 2\pi\nu \frac{(n+1)-2}{m} & = & \sin 2\pi\nu \frac{n-1}{m} & \longrightarrow & k_{T1}^{*}(\varphi_{n+1},\psi_2) = k_{T1}^{*}(\varphi_n,\psi_1) \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\sin 2\pi\nu \frac{(n+1)-m}{m} & = & \sin 2\pi\nu \frac{n-(m-1)}{m} & \longrightarrow & k_{T1}^{*}(\varphi_{n+1},\psi_m) = k_{T1}^{*}(\varphi_n,\psi_{m-1})
\end{array}
$$

D.h. man braucht bei allen drei Matrizen K_N, K_{T1} und K_{T2} nur die Elemente einer einzigen Zeile wirklich auszurechnen. Die Elemente aller übrigen Zeilen erhält man bei K_N und K_{T2}, indem man das erste Element der vorherigen Zeile hinter die anderen stellt und alle Elemente um einen Platz nach links verschiebt, bei K_{T1}, indem man das letzte Element der vorherigen Zeile vor die anderen stellt und alle um einen Platz nach rechts verschiebt.

Die Vorteile der hier abgeleiteten Rechnungsweise sind nun folgende:

1. Man braucht nur 3m Elemente für die Matrizen K_N, K_{T1} und K_{T2} zu berechnen. Insbesondere braucht man bei Verwendung eines Digitalrechners auch nur 3m Elemente zu speichern, was u.U. ausschlaggebend sein kann, da man bei umfangreichen Berechnungen leicht an die Grenze der Speicherkapazität der Rechenanlage gelangt.

2. Alle diese Elemente sind nur von λ, d.h. vom Achsenverhältnis a : b abhängig, und haben damit für einen vorgegebenen elliptischen Zylinder immer Gültigkeit, ganz gleich, in welcher Strömung er sich befindet.

Würde man dagegen beim oben angeführten Mehrkörperproblem die relative Anströmung des einen Körpers aus den Quellbelegungen aller anderen Körper bestimmen, so benötigt man für jeden Körper zwei quadratische Matrizen. (Z.B. für die x- und y-Komponente der induzierten Geschwindigkeit.) Die Elemente dieser Matrizen sind im allgemeinen alle voneinander verschieden und ausserdem von der gegenseitigen Lage der Körper abhängig. Sie ändern sich also, und müssen zu jedem Zeitpunkt neu berechnet werden, wenn die Körper sich relativ zueinander bewegen.

Literatur

[1] Lagally, M.: Berechnung der Kräfte und Momente, die strömende Flüssigkeiten auf ihre Begrenzung ausüben. (Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 1922, S. 409-422.)

[2] Cummins, W.E.: The Force and Moment on a Body in a Time - Varying Potential Flow. (Journal of Ship Research , April 1957, S. 7-18.)

[3] Collatz, G.: Über ein spezielles Quadraturverfahren zur numerischen Behandlung Fredholmscher Integralgleichungen periodischer Funktionen. (Bericht des Institutes f. Schiffbau der Universität Hamburg, September 1961.)