

Stationäre, laminare, inkompressible Nachlauf-Fernfeld-Strömungen

Diplomarbeit
Universität Hamburg
Fachbereich Angewandte Mathematik

Florian Bünger

12. Dezember 2007

Stationäre, laminare, inkompressible Nachlauf- Fernfeld-Strömungen

Florian Bünger

Nichts ist getan, wenn noch etwas zu tun übrig ist.

Carl Friedrich Gauß

Einleitung

Die vorliegende Arbeit behandelt klassische Fragestellungen der Strömungsmechanik zur Beschreibung einer stationären, laminaren, inkompressiblen Strömung hinter einem mit konstanter Geschwindigkeit angeströmten achsensymmetrischen Körper, wobei die strömende Substanz ein Newton'sches Fluid (wie z.B. Wasser oder Luft) sei.

Die Strömung hinter dem Körper wird Nachlauf-Strömung (engl.: wake) genannt. Direkt hinter dem Körper kann es in Abhängigkeit von der Körpergeometrie und den auftretenden Reynoldszahlen zu komplizierten Strömungen mit Wirbelbildungen kommen. Dieser Bereich heißt Nachlauf-Nahfeld (engl.: near wake). In weiter Entfernung stromabwärts hinter dem Körper ist jedoch zu erwarten, dass die Strömungssituation wieder einfach wird, d.h. die Strömung sollte wieder laminar werden und nur noch gering von der konstanten Anströmgeschwindigkeit abweichen. Dieser Bereich wird Nachlauf-Fernfeld genannt (engl.: far wake) und ist Gegenstand der Arbeit.

Das Ziel war ursprünglich eine Ausarbeitung und Formalisierung des Abschnittes „Wakes“ in dem Strömungsmechanik-Standard-Referenzwerk „An Introduction to Fluid-Dynamics“ von G.K. Batchelor [2] S.348-353. Interesse am Thema in Verbindung mit einer ausführlichen Literaturrecherche hat dann aber zur Aufnahme weiterer Inhalte geführt. Als wesentliche Quellen seien dabei besonders die Arbeiten von Goldstein [20] (1930), [21] (1933), Tollmien [56] (1931), Ting [55] (1968), Libby und Fox [38] (1963) und das Buch „Laminar Wakes“ von Berger [3] (1971) hervorgehoben. Experimentelle Ergebnisse wurden zu Vergleichszwecken von Nishioka & Sato [43] (1972), [44] (1974) und Nishioka & Miyagi [45] (1978) übernommen.

Die zugrunde liegende mathematische Modellierung von Nachlauf-Fernfeld-Strömungen fällt in den Bereich der sogenannten Grenzschicht-Theorie (engl.: boundary layer theory). Dies mag den mit der Materie weniger vertrauten Leser insofern überraschen, da man jene meist nur mit Strömungen in der unmittelbaren Umgebung einer festen Oberfläche (der Grenzschicht) verbindet, während das Nachlauf-Fernfeld aber gerade sehr weit von dem Hindernis entfernt ist. Die Annahmen der Grenzschicht-Theorie sind allerdings unabhängig vom Vorhandensein einer konkreten Oberfläche im Fernfeld trotzdem erfüllt, weswegen man häufig von „freien“ Grenzschicht-Strömungen spricht. Der Inhalt gliedert sich in vier Kapitel und lautet grob folgendermaßen:

Kapitel 1 enthält die Notation und Grundlagen wie Navier-Stokes-Gleichungen, Entdimensionierung, Prandtl'sche Grenzschichtgleichungen und eine ausführlichere Darstellung von laminaren Plattengrenzschichtströmungen.

Kapitel 2 behandelt Wärmeleitungsgleichungen, weil Nachlauf-Fernfeld-Strömungen über (Systeme von)

Wärmeleitungsgleichungen beschrieben werden können. Die Methode der Separation der Variablen führt bei Wärmeleitungsgleichungen auf natürliche Weise auf Hermite - Differentialgleichungen, welche ausführlich analysiert werden.

Kapitel 3 enthält Modellierungen und zugehörige asymptotische „Lösungen“ von Nachlauf-Fernfeld-Strömungen sowie deren Vergleich mit den experimentellen Messungen von Nishioka, Sato, Miyagi und numerischen Berechnungen, welche mit dem CFD Programm ANSYS CFX (Version 11.01) durchgeführt wurden. Dem Kapitel ist eine ausführliche Einleitung vorangestellt, in der auch historische Eckpunkte der Entwicklung der Theorie angegeben sind. Der an Theorie weniger interessierte Anwender sei besonders auf die kompakte formelmäßige Darstellung (3.6.74) bis (3.6.77), S. 90, der asymptotischen Entwicklung dritter Näherung einer zweidimensionalen Nachlauf-Fernfeld-Strömung hingewiesen. Jene lässt sich allein aus der Kenntnis des Strömungswiderstandes des Körpers, der beispielsweise durch einen bekannten c_W -Wert gegeben ist, bestimmen, und hängt nicht von der speziellen Geometrie des Körpers ab.

Kapitel 4 beschreibt Nachlauf-Fernfeld-Strömungen innerhalb einer bodennahen Grenzschicht, d.h. das umströmte Hindernis befindet sich innerhalb der Grenzschicht einer (halb-)unendlich ausgehenden flachen Platte. Auch dieses Kapitel besitzt eine ausführliche Einleitung, in der insbesondere detailliert auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede zu den freien Nachlauf-Strömungen aus Kapitel 3 eingegangen wird.

Schwerpunkte und Ausführlichkeit der Darstellung sind nach eigenem Interesse und Kenntnisstand gewählt worden nach dem Prinzip, dass alles, was mir nicht bekannt war, möglichst genau hergeleitet und bewiesen wurde, während mir bekannte Zusammenhänge nur kurz oder mit Referenzen angegeben sind. Dem Leser können deswegen einige gängige Sachverhalte zu ausführlich dargestellt erscheinen, wie zum Beispiel die Ausführungen zu laminaren Plattengrenzschichtströmungen in Kapitel 1 oder die Erläuterungen zu Hermite-Polynomen und Hermite-Differentialgleichungen in Kapitel 2.

Ich hoffe jedoch auch dort, dem fortgeschrittenen Leser ein paar interessante Aspekte bieten zu können, wie etwa den Beweis der Existenz- und Eindeutigkeit der Blasius-Lösung der laminaren Plattengrenzschichtströmungen nach Weyl (s. Satz 1.5.1, S.15) und deren asymptotisches Verhalten nach Coppel (s. Lemma 1.5.2, S.18), oder eine elementare Abschätzung des asymptotischen Verhaltens der exponentiell wachsenden Lösungen von Hermite-Differentialgleichungen (s. Satz 2.2.5, S.33).

Abschließend möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. J. Struckmeier bedanken, der mich für dieses Thema interessiert und die Arbeit betreut hat. Weiterhin danke ich herzlich Herrn Dr. S. Heitmann für hilfreiche Literaturhinweise auf experimentelle Messergebnisse von Nachlauf-Fernfeld-Strömungen sowie für eine kritische Durchsicht der Arbeit und Fehlerkorrekturen.

Inhaltsverzeichnis

1	Navier-Stokes-Gleichungen	1
1.1	Stationäre, inkompressible, dimensionsbehaftete Navier-Stokes-Gleichungen	1
1.2	Referenzgrößen und Entdimensionierung	2
1.3	Zylinderkoordinaten	3
1.4	Stromfunktion, von Mises-Variablen	8
1.5	Blasius-Lösung der laminaren Grenzschichtströmung entlang einer halbunendlichen Platte	11
2	Asymptotische Entwicklungen der Ganzraumlösungen von Wärmeleitungsgleichungen	21
2.1	Grundlagen	21
2.2	Hermite-Polynome und -Differentialgleichung	28
2.3	Fehlerfunktion	39
2.4	Homogene Wärmeleitungsgleichung auf dem Ganzraum	43
3	Laminare, inkompressible Nachlauf-Fernfeld-Strömungen	55
3.1	Einleitung	55
3.2	Nachlauf-Fernfeld-Gleichungen	57
3.3	Analytische Lösungen der Nachlauf-Fernfeld-Gleichungen	61
3.4	Asymptotische Lösungen der Nachlauf-Fernfeld-Gleichungen für rotationssymmetrische Strömungen	62
3.5	Widerstandskraft im Nachlauf-Fernfeld-Modell	67
3.6	Nachlauf-Fernfeld-Gleichungen höherer Ordnung für zweidimensionale achsensymmetrische Strömungen	71
3.6.1	Rekursionsformel	74
3.6.2	Berechnung von $\tilde{u}^{(1)}$	76
3.6.3	Berechnung von $\tilde{u}^{(2)}$	77
3.6.4	Berechnung von $\tilde{u}^{(3)}$	79
3.6.5	Prinzipielle Gestalt von $\tilde{u}^{(i)}$, $i > 3$	82
3.6.6	Zusammenfassung der Ergebnisse	85

3.6.7	Umrechnung in kartesische Koordinaten	86
3.7	Ursprung- und Startpunktbestimmung der asymptotischen Nachlauf-Fernfeld-Lösungen	94
3.8	Periodisierung	118
4	Nachlauf-Fernfeld-Strömungen in Bodennähe	121
4.1	Einleitung	121
4.2	gestörte Plattengrenzschichtströmungen	123
4.3	Zusammenhang mit einer irregulären Sturm-Liouville Differentialgleichung	127
4.4	Berechnung von $f^{(1)}$	134
4.5	Berechnung von $f^{(i)}$, $i \geq 2$	135
4.6	Nicht-Auftreten logarithmischer Terme	138
4.7	Ursprungsbestimmung, optimale 1-Term-Asymptotik	141

Kapitel 1

Navier-Stokes-Gleichungen

1.1 Stationäre, inkompressible, dimensionsbehaftete Navier-Stokes-Gleichungen

Die n -dimensionalen, stationären, inkompressiblen, dimensionsbehafteten Navier-Stokes-Gleichungen ($n \in \mathbb{N}$) für Newton'sche Fluide lauten in kartesischen Koordinaten

$$\operatorname{div} \mathbf{v}^* = \nabla^* \cdot \mathbf{v}^* = 0 \text{ in } \Omega^* \quad (1.1.1)$$

$$-\nu^* \Delta^* \mathbf{v}^* + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^* + \frac{1}{\rho^*} \nabla^* p^* = f^* \text{ in } \Omega^* \quad (1.1.2)$$

physikalische Größe	Symbol	Einheit ¹
Beobachtungsgebiet	Ω^*	m
Position	$\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in \Omega^*$	m
Geschwindigkeitsfeld	$\mathbf{v}^* = \mathbf{v}(x^*) = (v_1^*(x^*), \dots, v_n^*(x^*))$	m/s
Druck	$p^* = p^*(x^*)$	$Pa = kg/(ms^2)$
äußeres Kraftfeld (pro Masse)	$f^* = f^*(x^*) = (f_1^*(x^*), \dots, f_n^*(x^*))$	$N/kg = m/s^2$
Dichte	ρ^*	kg/m^3
kinematische Viskosität	ν^*	m^2/s

¹ Die Einheit einer Menge/eines Tupels sei hier die seiner Elemente/Komponenten.

$$\nabla^* := \left(\frac{\partial}{\partial x_1^*}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n^*} \right)$$

$$\Delta^* := \frac{\partial^2}{\partial x_1^{*2}} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^{*2}}.$$

Der Index * kennzeichnet dimensionsbehaftete Größen. Er soll zur deutlichen Unterscheidung von den im nächsten Abschnitt eingeführten dimensionslosen Größen dienen.

Eine Herleitung der Gleichungen (1.1.1) und (1.1.2) findet man in jedem Buch über Grundlagen der Strömungsmechanik und kann beispielsweise in den Werken [15] Kapitel 1.2, [40] Kapitel 1 oder [23] Kapitel 4.7 nachgeschlagen werden.

Gleichung (1.1.1) beschreibt die Inkompressibilität und wird deswegen häufig Inkompressibilitätsbedingung oder Kontinuitätsgleichung genannt. Für stationäre Strömungen mit konstanter Dichte ist sie äquivalent zur Massenerhaltung. Das Gleichungssystem (1.1.2) besteht aus n Gleichungen, die Impulsbilanzen in jeder Koordinatenrichtung darstellen.

Für den in dieser Arbeit ausschließlich betrachteten zwei- und dreidimensionalen Fall ($n \in \{2, 3\}$) benutzen wir folgende üblichen, alternativen Notationen, um Dimensionsindices zu vermeiden bzw. um die Erdanziehungskraft mit dem Druck zusammenzufassen:

physikalische Größe	Symbol
Position	$\mathbf{x}^* = (x^*, y^*, z^*)$
Geschwindigkeitsfeld	$\mathbf{v}^* = (u^*, v^*, w^*)$
statischer Druck	$p_{stat}^*(x^*, y^*, z^*) = p_0^* - \rho^* g^* y^*$, $p_0^* = const.$
modifizierter Druck	$p_{mod}^* = p - p_{stat} = p^*(x^*, y^*, z^*) - p_0^* + \rho^* g^* y^*$
Erdbeschleunigung	$g^* = 9,81 \text{ m/s}^2$

Die dreidimensionalen, stationären, inkompressiblen, dimensionsbehafteten Navier-Stokes-Gleichungen mit der Erdanziehungskraft als einziger äußerer Kraft

$$f^*(x^*, y^*, z^*) = (0, -\rho^* g^* y^*, 0) \quad (1.1.3)$$

lauten dann

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0 \text{ in } \Omega^* \quad (1.1.4)$$

$$-\nu^* \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right) + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p_{mod}^*}{\partial x^*} = 0 \text{ in } \Omega^* \quad (1.1.5)$$

$$-\nu^* \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^{*2}} \right) + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p_{mod}^*}{\partial y^*} = 0 \text{ in } \Omega^* \quad (1.1.6)$$

$$-\nu^* \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}} \right) + u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial w^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} + \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p_{mod}^*}{\partial z^*} = 0 \text{ in } \Omega^* \quad (1.1.7)$$

Implizit wurde dabei die übliche Annahme getroffen, dass die Erdanziehung in negative y -Richtung wirkt.

1.2 Referenzgrößen und Entdimensionierung

Um zu dimensionslosen Gleichungen zu kommen, müssen die betrachteten physikalischen Größen Position x^* , Geschwindigkeit \mathbf{v}^* , Dichte ρ^* , modifizierter Druck p_{mod}^* , Viskosität ν^* auf Referenzgrößen bezogen werden. Sind L_B^* (Einheit m), U_B^* (Einheit m/s) und ρ_B^* (Einheit kg/m^3) eine typische Länge, Geschwindigkeit und Dichte des betrachteten Problems, so wird üblicherweise folgende Entdimensionierung vorgenommen:

physikalische Größe	Symbol	Bezugsgröße	dimensionslose Variable
Position	$\mathbf{x}^* = (x^*, y^*, z^*)$	L_B^*	$\mathbf{x} = (x, y, z) := (\frac{x^*}{L_B^*}, \frac{y^*}{L_B^*}, \frac{z^*}{L_B^*})$
Beobachtungsgebiet	Ω^*	-	$\Omega := \{x x^* \in \Omega^*\} \subseteq \mathbb{R}^3$
Geschwindigkeit	$\mathbf{v}^* = (u^*, v^*, w^*)$	U_B^*	$\mathbf{v} = (u, v, w) := (\frac{u^*}{U_B^*}, \frac{v^*}{U_B^*}, \frac{w^*}{U_B^*})$
Dichte	ρ^*	ρ_B^*	$\rho := \frac{\rho^*}{\rho_B^*}$
modifizierter Druck	p_{mod}^*	$p_B^* := \rho_B^* U_B^{*2}$	$p := \frac{p_{mod}^*}{p_B^*} = \frac{p_{mod}^*}{\rho_B^* U_B^{*2}}$
kinematische Viskosität	ν^*	$\nu_B^* := U_B^* L_B^*$	$\nu := \frac{\nu^*}{\nu_B^*} = \frac{\nu^*}{U_B^* L_B^*} =: \text{Re}^{-1}$

Die Gleichungen (1.1.4), ..., (1.1.7) nehmen dann folgende dimensionslose Gestalt an:

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \text{ in } \Omega \quad (1.2.1)$$

$$-\nu \Delta \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \text{ in } \Omega \quad (1.2.2)$$

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

oder ausführlich (mit Indexnotation der partiellen Ableitungen):

$$u_x + v_y + w_z = 0 \text{ in } \Omega \quad (1.2.3)$$

$$-\nu(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + uu_x + vv_y + ww_z + \frac{1}{\rho} p_x = 0 \text{ in } \Omega \quad (1.2.4)$$

$$-\nu(v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}) + uv_x + vv_y + ww_z + \frac{1}{\rho} p_y = 0 \text{ in } \Omega \quad (1.2.5)$$

$$-\nu(w_{xx} + w_{yy} + w_{zz}) + uw_x + vv_y + ww_z + \frac{1}{\rho} p_z = 0 \text{ in } \Omega. \quad (1.2.6)$$

Falls die Strömung nicht nur inkompressibel ist (d.h. $\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho = 0$ in Ω), sondern eine konstante Dichte besitzt, kann $\rho_B^* = \rho^* = \text{const.}$ gewählt werden, woraus $\rho = 1$ folgt. In diesem Fall fällt der Faktor $\frac{1}{\rho}$ vor dem Druckgradienten in den Gleichungen (1.2.2), (1.2.4), (1.2.5), (1.2.6) weg.

1.3 Zylinderkoordinaten

Häufig ist es sinnvoll, ein der konkreten Strömungssituation angepasstes Koordinatensystem zu wählen. Ein Beispiel hierfür ist die dreidimensionale, horizontale Anströmung eines x-achsensymmetrischen Körpers. Man kann dann insgesamt von einer x-achsensymmetrischen Strömung ausgehen, so dass eine Beschreibung in Zylinderkoordinaten nahe liegt. Die Navier-Stokes-Gleichungen müssen entsprechend transformiert werden. Diese Transformation ist Standard. Sie wird hier trotzdem ausführlich hergeleitet, weil sie einerseits in späteren Kapiteln benutzt wird und andererseits in der Literatur meist nur ohne Beweis angegeben ist. Die folgenden Rechnungen sind aber für das tiefere Verständnis dieser Arbeit nicht wichtig und man kann ggf. lediglich das Ergebnis (1.3.17), (1.3.18), (1.3.19) auf Seite 8 zur Kenntnis nehmen.

Es sei

$$\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (\xi, r, \alpha) \mapsto (\xi, r \cos(\alpha), r \sin(\alpha))$$

die Koordinatentransformation von Zylinderkoordinaten (ξ, r, α) in kartesische Koordinaten $(x, y, z) = (\xi, r \cos(\alpha), r \sin(\alpha))$. Die x -Achse in kartesischen Koordinaten entspricht also der Symmetrieachse in Zylinderkoordinaten, der Radius r gibt den Abstand $\sqrt{y^2 + z^2}$ des Punktes (x, y, z) von der x -Achse an und α stellt den Winkel mit der x, y -Ebene dar. Für jeden Punkt (ξ, r, α) in Polarkoordinaten bilden die Vektoren

$$\begin{aligned} e^\xi(\xi, r, \alpha) &:= (1, 0, 0) \\ e^r(\xi, r, \alpha) &:= (0, \cos(\alpha), \sin(\alpha)) \\ e^\alpha(\xi, r, \alpha) &:= (0, -\sin(\alpha), \cos(\alpha)) \end{aligned}$$

eine euklidische Orthonormalbasis des \mathbb{R}^3 , die durch Drehung der euklidischen Standardbasis um die x -Achse um den Winkel α entgegen dem Uhrzeigersinn entsteht. Der Vektor e^ξ liegt auf der Symmetrieachse der Polarkoordinaten, der Vektor $e^r(\xi, r, \alpha)$ zeigt von der x -Achse aus in Richtung des Punktes $(x, y, z) = (\xi, r \cos(\alpha), r \sin(\alpha)) = \xi e^\xi(\xi, r, \alpha) + r e^r(\xi, r, \alpha)$ und der Vektor e^α ist um 90° gegenüber e^r in der y, z -Ebene gedreht. Dementsprechend werden e^ξ Axialkomponente, e^r Radialkomponente und e^α Tangentialkomponente des Basisvektorfeldes $e := (e^\xi, e^r, e^\alpha)$ genannt. Definiere abkürzend die Matrixfunktion $M = M(\xi, r, \alpha)$ durch:

$$M := \begin{pmatrix} e^\xi \\ e^r \\ e^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \frac{\partial e^r}{\partial \alpha}(\xi, r, \alpha) &= \frac{\partial}{\partial \alpha}(0, \cos(\alpha), \sin(\alpha)) = (0, -\sin(\alpha), \cos(\alpha)) = e^\alpha(\xi, r, \alpha) \\ \frac{\partial e^\alpha}{\partial \alpha}(\xi, r, \alpha) &= \frac{\partial}{\partial \alpha}(0, -\sin(\alpha), \cos(\alpha)) = (0, -\cos(\alpha), -\sin(\alpha)) = -e^r(\xi, r, \alpha) \end{aligned}$$

für alle (ξ, r, α) gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial e^r}{\partial \alpha} &= e^\alpha \\ \frac{\partial e^\alpha}{\partial \alpha} &= -e^r \\ \frac{\partial e^\eta}{\partial \zeta} &= (0, 0, 0) \quad \forall (\eta, \zeta) \in \{\xi, r, \alpha\}^2 \setminus \{(r, \alpha), (\alpha, \alpha)\}. \end{aligned}$$

Aus der Basiseigenschaft von e folgt, dass es zu jedem Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ in kartesischen Koordinaten eindeutig bestimmte Funktionen $f^\xi, f^r, f^\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f \circ \phi = f^\xi e^\xi + f^r e^r + f^\alpha e^\alpha = (f^\xi, f^r, f^\alpha) M \Leftrightarrow (f^\xi, f^r, f^\alpha) = (f \circ \phi) M^{-1}.$$

Man nennt

$$f_{\text{zyl}} := (f^\xi, f^r, f^\alpha)$$

die Darstellung von f in Zylinderkoordinaten.

Die Umrechnung von $f = (f^x, f^y, f^z)$ in kartesischen Koordinaten in Zylinderkoordinaten $f_{zyl} = (f^\xi, f^r, f^\alpha)$ lautet somit ausführlich:

$$f^x \circ \phi = f^\xi \quad (1.3.1)$$

$$f^y \circ \phi = f^r \cos(\alpha) - f^\alpha \sin(\alpha) \quad (1.3.2)$$

$$f^z \circ \phi = f^r \sin(\alpha) + f^\alpha \cos(\alpha) \quad (1.3.3)$$

$$f^\xi = f^\xi \circ \phi \quad (1.3.4)$$

$$f^r = (f^y \circ \phi) \cos(\alpha) - (f^z \circ \phi) \sin(\alpha) \quad (1.3.5)$$

$$f^\alpha = (-f^y \circ \phi) \sin(\alpha) + (f^z \circ \phi) \cos(\alpha). \quad (1.3.6)$$

Es werden nun die in den Navier-Stokes-Gleichungen auftretenden Differentialoperatoren in Zylinderkoordinaten transformiert. Die Jacobi-Matrix von ϕ lautet:

$$D\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \phi_1}{\partial r} & \frac{\partial \phi_1}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} & \frac{\partial \phi_2}{\partial r} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial \xi} & \frac{\partial \phi_3}{\partial r} & \frac{\partial \phi_3}{\partial \alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -r \sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & r \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$(D\phi)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha)/r & \cos(\alpha)/r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\xi \\ e^r \\ \frac{1}{r}e^\alpha \end{pmatrix}.$$

Es seien $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $\tilde{\nabla} := (\frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \alpha})$ der Gradientenoperator in Zylinderkoordinaten. Mit der Kettenregel berechnet man:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} g &= \nabla g D\phi \\ \Leftrightarrow \\ (g_x, g_y, g_z) &= \nabla g = \tilde{\nabla} g \cdot (D\phi)^{-1} = (g_\xi, g_r, g_\alpha) \begin{pmatrix} e^\xi \\ e^r \\ \frac{1}{r}e^\alpha \end{pmatrix} \\ &= e^\xi g_\xi + e^r g_r + \frac{1}{r}e^\alpha g_\alpha. \end{aligned}$$

Folglich hat der euklidische Gradientenoperator $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ in Zylinderkoordinaten die Gestalt

$$\nabla = e^\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + e^r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}e^\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}. \quad (1.3.7)$$

Die euklidische Divergenz eines Vektorfeldes f berechnet man demnach folgendermaßen

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} f &= \nabla \cdot f = \left(e^\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + e^r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} e^\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \cdot (f^\xi e^\xi + f^r e^r + f^\alpha e^\alpha) \\
&= e^\xi \cdot \left(\frac{\partial f^\xi e^\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial f^r e^r}{\partial \xi} + \frac{\partial f^\alpha e^\alpha}{\partial \xi} \right) + e^r \cdot \left(\frac{\partial f^\xi e^\xi}{\partial r} + \frac{\partial f^r e^r}{\partial r} + \frac{\partial f^\alpha e^\alpha}{\partial r} \right) + \\
&\quad \frac{1}{r} e^\alpha \cdot \left(\frac{\partial f^\xi e^\xi}{\partial \alpha} + \frac{\partial f^r e^r}{\partial \alpha} + \frac{\partial f^\alpha e^\alpha}{\partial \alpha} \right) \\
&= e^\xi \cdot \left(\frac{\partial f^\xi}{\partial \xi} e^\xi + \frac{\partial f^r}{\partial \xi} e^r + \frac{\partial f^\alpha}{\partial \xi} e^\alpha \right) + e^r \cdot \left(\frac{\partial f^\xi}{\partial r} e^\xi + \frac{\partial f^r}{\partial r} e^r + \frac{\partial f^\alpha}{\partial r} e^\alpha \right) + \\
&\quad \frac{1}{r} e^\alpha \cdot \left(\frac{\partial f^\xi}{\partial \alpha} e^\xi + \frac{\partial f^r}{\partial \alpha} e^r + f^r e^\alpha + \frac{\partial f^\alpha}{\partial \alpha} e^\alpha - f^\alpha e^r \right) \\
&= \frac{\partial f^\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial f^r}{\partial r} + \frac{1}{r} f^r + \frac{1}{r} \frac{\partial f^\alpha}{\partial \alpha}. \tag{1.3.8}
\end{aligned}$$

Ähnlich erhält man den euklidischen Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \nabla \cdot \nabla = \left(e^\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + e^r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} e^\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \cdot \left(e^\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + e^r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} e^\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \\
&= e^\xi \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left(e^\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(e^r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(e^\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \right) + \\
&\quad e^r \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(e^\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(e^r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(e^\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{r^2} e^\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \\
&\quad \frac{1}{r} e^\alpha \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(e^\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(e^r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(e^\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \right) \\
&= e^\xi \cdot \left(e^\xi \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + e^r \frac{\partial^2}{\partial r \partial \xi} + \frac{1}{r} e^\alpha \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \xi} \right) + e^r \cdot \left(e^\xi \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial r} + e^r \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} e^\alpha \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial r} - \frac{1}{r^2} e^\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \\
&\quad \frac{1}{r} e^\alpha \cdot \left(e^\xi \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \alpha} + e^\alpha \frac{\partial}{\partial r} + e^r \frac{\partial^2}{\partial r \partial \alpha} + \frac{1}{r} \left(-e^r + e^\alpha \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \right) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}. \tag{1.3.9}
\end{aligned}$$

Für reellwertige Funktionen g bzw. dreidimensionale Vektorfelder f bedeutet dies:

$$\begin{aligned}
\Delta g &= \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \alpha^2} \tag{1.3.10} \\
\Delta f &= \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) (f^\xi e^\xi + f^r e^r + f^\alpha e^\alpha) \\
&= \left(\frac{\partial^2 f^\xi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f^\xi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f^\xi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f^\xi}{\partial \alpha^2} \right) e^\xi + \left(\frac{\partial^2 f^r}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f^r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f^r}{\partial r} \right) e^r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f^r e^r}{\partial \alpha^2} + \\
&\quad \left(\frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f^\alpha}{\partial r} \right) e^\alpha + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f^\alpha e^\alpha}{\partial \alpha^2} \\
&= \left(\frac{\partial^2 f^\xi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f^\xi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f^\xi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f^\xi}{\partial \alpha^2} \right) e^\xi + \left(\frac{\partial^2 f^r}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f^r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f^r}{\partial r} \right) e^r + \\
&\quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial f^r}{\partial \alpha} e^r + f^r e^\alpha \right) + \left(\frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f^\alpha}{\partial r} \right) e^\alpha + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial \alpha} e^\alpha - f^\alpha e^r \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial^2 f^\xi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f^\xi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f^\xi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f^\xi}{\partial \alpha^2} \right) e^\xi + \left(\frac{\partial^2 f^r}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f^r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f^r}{\partial r} \right) e^r + \\
&\quad \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 f^r}{\partial \alpha^2} e^r + 2 \frac{\partial f^r}{\partial \alpha} e^\alpha - f^r e^r \right) + \left(\frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f^\alpha}{\partial r} \right) e^\alpha + \\
&\quad \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial \alpha^2} e^\alpha - 2 \frac{\partial f^\alpha}{\partial \alpha} e^r - f^\alpha e^\alpha \right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 f^\xi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f^\xi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f^\xi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f^\xi}{\partial \alpha^2} \right) e^\xi + \\
&\quad \left(\frac{\partial^2 f^r}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f^r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f^r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f^r}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{r^2} f^r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial f^\alpha}{\partial \alpha} \right) e^r + \\
&\quad \left(\frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f^\alpha}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{r^2} f^\alpha + \frac{2}{r^2} \frac{\partial f^r}{\partial \alpha} \right) e^\alpha. \tag{1.3.11}
\end{aligned}$$

Letztendlich ergibt sich die konvektive Ableitung $(f \cdot \nabla)f$ eines Vektorfeldes folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
(f \cdot \nabla)f &= ((f^\xi e^\xi + f^r e^r + f^\alpha e^\alpha) \cdot (e^\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + e^r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} e^\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha})) (f^\xi e^\xi + f^r e^r + f^\alpha e^\alpha) \\
&= (f^\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + f^r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} f^\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}) (f^\xi e^\xi + f^r e^r + f^\alpha e^\alpha) \\
&= (f^\xi \frac{\partial f^\xi}{\partial \xi} + f^r \frac{\partial f^\xi}{\partial r} + \frac{1}{r} f^\alpha \frac{\partial f^\xi}{\partial \alpha}) e^\xi + (f^\xi \frac{\partial f^r}{\partial \xi} + f^r \frac{\partial f^r}{\partial r} + \frac{1}{r} f^\alpha \frac{\partial f^r}{\partial \alpha}) e^r + \frac{1}{r} f^\alpha f^r e^\alpha + \\
&\quad (f^\xi \frac{\partial f^\alpha}{\partial \xi} + f^r \frac{\partial f^\alpha}{\partial r} + \frac{1}{r} f^\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial \alpha}) e^\alpha - \frac{1}{r} f^{\alpha 2} e^r \\
&= (f^\xi \frac{\partial f^\xi}{\partial \xi} + f^r \frac{\partial f^\xi}{\partial r} + \frac{1}{r} f^\alpha \frac{\partial f^\xi}{\partial \alpha}) e^\xi + (f^\xi \frac{\partial f^r}{\partial \xi} + f^r \frac{\partial f^r}{\partial r} + \frac{1}{r} f^\alpha \frac{\partial f^r}{\partial \alpha} - \frac{1}{r} f^{\alpha 2}) e^r + \\
&\quad (f^\xi \frac{\partial f^\alpha}{\partial \xi} + f^r \frac{\partial f^\alpha}{\partial r} + \frac{1}{r} f^\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{r} f^\alpha f^r) e^\alpha. \tag{1.3.12}
\end{aligned}$$

Für $f = \mathbf{v}$ und $g = p$ erhält man durch Einsetzen von (1.3.7), (1.3.8), (1.3.11), (1.3.12) in die Navier-Stokes-Gleichungen (1.2.1), (1.2.2):

$$\begin{aligned}
0 &= \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}^\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{v}^r}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{v}^r + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{v}^\alpha}{\partial \alpha} \\
0 &= -\nu \Delta \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p \\
&= -\nu \left[\left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}^\xi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}^\xi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{v}^\xi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathbf{v}^\xi}{\partial \alpha^2} \right) e^\xi + \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}^r}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}^r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{v}^r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathbf{v}^r}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{r^2} \mathbf{v}^r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \mathbf{v}^\alpha}{\partial \alpha} \right) e^r + \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}^\alpha}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}^\alpha}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{v}^\alpha}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathbf{v}^\alpha}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{r^2} \mathbf{v}^\alpha + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \mathbf{v}^r}{\partial \alpha} \right) e^\alpha \right] + \\
&\quad (\mathbf{v}^\xi \frac{\partial \mathbf{v}^\xi}{\partial \xi} + \mathbf{v}^r \frac{\partial \mathbf{v}^\xi}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{v}^\alpha \frac{\partial \mathbf{v}^\xi}{\partial \alpha}) e^\xi + (\mathbf{v}^\xi \frac{\partial \mathbf{v}^r}{\partial \xi} + \mathbf{v}^r \frac{\partial \mathbf{v}^r}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{v}^\alpha \frac{\partial \mathbf{v}^r}{\partial \alpha} - \frac{1}{r} \mathbf{v}^{\alpha 2}) e^r + \\
&\quad (\mathbf{v}^\xi \frac{\partial \mathbf{v}^\alpha}{\partial \xi} + \mathbf{v}^r \frac{\partial \mathbf{v}^\alpha}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{v}^\alpha \frac{\partial \mathbf{v}^\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{r} \mathbf{v}^\alpha \mathbf{v}^r) e^\alpha + e^\xi \frac{\partial p}{\partial \xi} + e^r \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} e^\alpha \frac{\partial p}{\partial \alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & \left[-\nu \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}^\xi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}^\xi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{v}^\xi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathbf{v}^\xi}{\partial \alpha^2} \right) + \mathbf{v}^\xi \frac{\partial \mathbf{v}^\xi}{\partial \xi} + \mathbf{v}^r \frac{\partial \mathbf{v}^\xi}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{v}^\alpha \frac{\partial \mathbf{v}^\xi}{\partial \alpha} + \frac{\partial p}{\partial \xi} \right] e^\xi + \\
& \left[-\nu \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}^r}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}^r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{v}^r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathbf{v}^r}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{r^2} \mathbf{v}^r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \mathbf{v}^\alpha}{\partial \alpha} \right) + \right. \\
& \left. \mathbf{v}^\xi \frac{\partial \mathbf{v}^r}{\partial \xi} + \mathbf{v}^r \frac{\partial \mathbf{v}^r}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{v}^\alpha \frac{\partial \mathbf{v}^r}{\partial \alpha} - \frac{1}{r} \mathbf{v}^{\alpha^2} + \frac{\partial p}{\partial r} \right] e^r + \\
& \left[-\nu \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}^\alpha}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}^\alpha}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{v}^\alpha}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathbf{v}^\alpha}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{r^2} \mathbf{v}^\alpha + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \mathbf{v}^r}{\partial \alpha} \right) + \right. \\
& \left. \mathbf{v}^\xi \frac{\partial \mathbf{v}^\alpha}{\partial \xi} + \mathbf{v}^r \frac{\partial \mathbf{v}^\alpha}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{v}^\alpha \frac{\partial \mathbf{v}^\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{r} \mathbf{v}^\alpha \mathbf{v}^r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \alpha} \right] e^\alpha.
\end{aligned}$$

Weil (e^ξ, e^r, e^α) ein Basisvektorfeld ist, müssen die Faktoren in eckigen Klammern verschwinden. Man erhält die dreidimensionalen, stationären, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen in Zylinderkoordinaten (mit Indexnotation der partiellen Ableitungen):

$$0 = \mathbf{v}^\xi_\xi + \mathbf{v}^r_r + \frac{1}{r} \mathbf{v}^r + \frac{1}{r} \mathbf{v}^\alpha_\alpha \quad (1.3.13)$$

$$0 = -\nu(\mathbf{v}^\xi_{\xi\xi} + \mathbf{v}^\xi_{rr} + \frac{1}{r} \mathbf{v}^\xi_r + \frac{1}{r^2} \mathbf{v}^\xi_{\alpha\alpha}) + \mathbf{v}^\xi \mathbf{v}^\xi_\xi + \mathbf{v}^r \mathbf{v}^\xi_r + \frac{1}{r} \mathbf{v}^\alpha \mathbf{v}^\xi_\alpha + p_\xi \quad (1.3.14)$$

$$\begin{aligned}
0 = & -\nu(\mathbf{v}^r_{\xi\xi} + \mathbf{v}^r_{rr} + \frac{1}{r} \mathbf{v}^r_r + \frac{1}{r^2} \mathbf{v}^r_{\alpha\alpha} - \frac{1}{r^2} \mathbf{v}^r - \frac{2}{r^2} \mathbf{v}^\alpha_\alpha) + \\
& \mathbf{v}^\xi \mathbf{v}^r_\xi + \mathbf{v}^r \mathbf{v}^r_r + \frac{1}{r} \mathbf{v}^\alpha \mathbf{v}^r_\alpha - \frac{1}{r} \mathbf{v}^{\alpha^2} + p_r \quad (1.3.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & -\nu(\mathbf{v}^\alpha_{\xi\xi} + \mathbf{v}^\alpha_{rr} + \frac{1}{r} \mathbf{v}^\alpha_r + \frac{1}{r^2} \mathbf{v}^\alpha_{\alpha\alpha} - \frac{1}{r^2} \mathbf{v}^\alpha + \frac{2}{r^2} \mathbf{v}^r_\alpha) + \\
& \mathbf{v}^\xi \mathbf{v}^\alpha_\xi + \mathbf{v}^r \mathbf{v}^\alpha_r + \frac{1}{r} \mathbf{v}^\alpha \mathbf{v}^\alpha_\alpha + \frac{1}{r} \mathbf{v}^\alpha \mathbf{v}^r + \frac{1}{r} p_\alpha. \quad (1.3.16)
\end{aligned}$$

Falls das Strömungsfeld rotationsinvariant (unabhängig von α) ist und keine Rotation vorliegt, fallen die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial \alpha}$ nach der Winkelkoordinate weg und es gilt $\mathbf{v}^\alpha \equiv 0$.

Man erhält:

$$0 = \mathbf{v}^\xi_\xi + \mathbf{v}^r_r + \frac{1}{r} \mathbf{v}^r \quad (1.3.17)$$

$$0 = -\nu(\mathbf{v}^\xi_{\xi\xi} + \mathbf{v}^\xi_{rr} + \frac{1}{r} \mathbf{v}^\xi_r) + \mathbf{v}^\xi \mathbf{v}^\xi_\xi + \mathbf{v}^r \mathbf{v}^\xi_r + p_\xi \quad (1.3.18)$$

$$0 = -\nu(\mathbf{v}^r_{\xi\xi} + \mathbf{v}^r_{rr} + \frac{1}{r} \mathbf{v}^r_r - \frac{1}{r^2} \mathbf{v}^r) + \mathbf{v}^\xi \mathbf{v}^r_\xi + \mathbf{v}^r \mathbf{v}^r_r + p_r. \quad (1.3.19)$$

1.4 Stromfunktion, von Mises-Variablen

Im zweidimensionalen Fall, lassen sich Stromlinien - Linien, die in jedem Punkt tangential zur Strömungsgeschwindigkeit verlaufen - von Strömungen (in einem topologisch hinreichend regulären Strömungsgebiet) besonders einfach durch eine (bis auf eine additive Konstante) eindeutige sogenannte Stromfunktion beschreiben, welche genau auf den Stromlinien konstant ist. Auch im dreidimensionalen Fall kann man analog vektorwertige Stromfunktionen einführen, jedoch wird die Notation aufwendiger, s. [23] S.276.

Die Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen lassen sich dann bezüglich Stromfunktionvariablen - sogenannten von Mises-Variablen - in einer einfachen Form darstellen, die erstmals von v. Mises veröffentlicht wurde (s. [48], Abschnitt 7.3.2, S.185 f.).

L. Ting benutzt in seinem Artikel [55] von Mises-Variablen zur Bestimmung der zweidimensionalen Nachlauf-Fernfeld-Gleichungen höherer Ordnung. Seine Ergebnisse werden ausführlich in Kapitel 3 Abschnitt 3.6.64 dargestellt.

Im Folgenden seien $\mathbf{v} = (u, v)$ eine stationäre, zweidimensionale Strömung in dem zusammenhängenden, stückweise glatt berandeten, offenen Strömungsgebiet $D \subseteq \mathbb{R}^2$ sowie

$$i := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Drehmatrix zum Winkel $\frac{\pi}{2}$.

Definition 1.4.1 (Stromfunktion) Eine stetig differenzierbare Abbildung $\psi : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Stromfunktion von \mathbf{v} , falls

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v \quad (1.4.1)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u \quad (1.4.2)$$

$$\Leftrightarrow \nabla \psi = \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = i\mathbf{v}, \quad (1.4.3)$$

d.h. ψ ist ein Potential von $i\mathbf{v}$.

Die Existenz einer Stromfunktion von \mathbf{v} (eines Potentials von $i\mathbf{v}$) folgt aus dem Lemma von Poincaré, das in seiner einfachsten Form folgendermaßen lautet (s. [1], Satz 1.4, Kapitel 1, S.14) :

Lemma 1.4.2 (Poincaré) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ mit $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0$ für $i, j = 1, \dots, n$. Falls jede geschlossene Kurve in Ω zusammenziehbar (nullhomotop) ist, d.h. homotop zu einem Punkt $x_0 \in \Omega$, so existiert ein $\phi \in C^2(\Omega)$ mit $\nabla \phi = f$. Ist Ω zusätzlich wegzusammenhängend (also insgesamt einfach zusammenhängend) und $x_0 \in \Omega$, so haben alle Lösungen die Darstellung

$$\phi(x) = \phi(x_0) + \int_0^1 f(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) \, ds$$

mit $\gamma \in C^1([0, 1], \Omega)$ sowie $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = x$.

Beweis: s. [1], S. 15-17.

In Lemma 1.4.2 wird vom Gebiet Ω die topologische Eigenschaft der Zusammenziehbarkeit aller geschlossenen Kurven (Nullhomotopie) verlangt. Dies setzen wir wie bereits in der Einleitung angedeutet für das betrachtete Strömungsgebiet D voraus. Beispielsweise besitzen konvexe oder allgemeiner sternförmige Gebiete diese Eigenschaft. Weil \mathbf{v} divergenzfrei ist, ist $i\mathbf{v}$ rotationsfrei, denn $\text{rot}(i\mathbf{v}) = \text{rot}(-v, u) = u_x + v_y = \text{div } \mathbf{v} = 0$. Damit sind alle Voraussetzungen von Lemma 1.4.2 für $\Omega = D$ und $f = i\mathbf{v}$ erfüllt, so dass $\psi = \phi$ die (bis auf eine additive Konstante eindeutige) Stromfunktion von \mathbf{v} ist.

Wird umgekehrt die Strömung $\mathbf{v} = (u, v)$ über eine vorgegebene Stromfunktion $\psi \in C^2(D)$ durch $u := \psi_y$ und $v := -\psi_x$ definiert, so ist \mathbf{v} automatisch divergenzfrei, denn $u_x + v_y = \psi_{yx} - \psi_{xy} = 0$.

Definition 1.4.3 (Stromlinie) Es seien I ein offenes Intervall in \mathbb{R} und

$$s : I \rightarrow D, \tau \rightarrow (s_1(\tau), s_2(\tau))$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Die Trajektorie $\{s(\tau); \tau \in I\}$ von s heißt *Stromlinienabschnitt* von \mathbf{v} , wenn

$$s' := (s'_1, s'_2) = (\mathbf{v} \circ s) = (u \circ s, v \circ s) \quad \text{in } I. \quad (1.4.4)$$

Die Trajektorie hat also in jedem Punkt die Geschwindigkeit \mathbf{v} und verläuft damit insbesondere tangential zur Strömung. Die Funktion s wird *Parametrisierung des Stromlinienabschnittes* genannt. Eine *Stromlinie* ist ein bezüglich Inklusion maximaler Stromlinienabschnitt.

Für stationäre Strömungen fallen die Stromlinien mit den Bahnlinien, das sind die Trajektorien der Fluidteilchenbewegungen, zusammen, so dass es für diesen Fall anschaulich leicht verständlich ist, dass jeder Punkt (x, y) auf genau einer Stromlinie liegt und zwei verschiedene Stromlinien sich in keinem Punkt schneiden. Für instationäre Strömungen ist letztere Aussage zu jedem festen Zeitpunkt ebenfalls erfüllt, jedoch stimmen Stromlinien und Bahnlinien im allgemeinen nicht mehr überein!

Bemerkung 1.4.4 (Stromfunktion) Die *Stromfunktion* ψ von \mathbf{v} ist auf jeder Stromlinie von \mathbf{v} konstant.

Beweis: Es sei s ein Stromlinienabschnitt von \mathbf{v} . Man berechnet dann sofort:

$$(\psi \circ s)' = (\psi_x \circ s)s'_1 + (\psi_y \circ s)s'_2 = (-v \circ s)(u \circ s) + (u \circ s)(v \circ s) = 0.$$

■

Die dimensionslosen, zweidimensionalen, stationären Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen lauten ohne Streckung bzw. Stauchung von y^* , v^* mit der Zahl $\sqrt{\text{Re}}$ und ohne Normierung von ρ^* auf 1 durch die Wahl $\rho_B^* = \rho^*$:

$$u_x + v_y = 0 \quad (1.4.5)$$

$$uu_x + vv_y + \frac{1}{\rho} p_x = \nu u_{yy} \quad (1.4.6)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (1.4.7)$$

(s. Schlichting, Gersten [48], Gleichungen (6.7), (6.8), (6.9), S.148. Dort werden jedoch genau umgekehrt zur hier und in [23] verwendeten Notation dimensionslose Größen mit und dimensionsbehaftete Größen ohne Index „*“ angegeben.) Dabei wird die horizontale Außenströmung $U(x) = u(x, y)$, y „außerhalb“ der Grenzschicht, als allein von der horizontalen Koordinate x abhängig angesehen, weswegen in diesem Bereich die partiellen Ableitungen nach y wegfallen und (1.4.6) die Form

$$p_x = -\rho U U_x \quad (1.4.8)$$

bekommt. Diese Darstellung von p_x kann man wiederum in (1.4.6) einsetzen:

$$uu_x + vv_y - U U_x = \nu u_{yy}. \quad (1.4.9)$$

Für eine konstante Außenströmung $U = \text{const.}$ folgt

$$uu_x + vu_y = \nu u_{yy}. \quad (1.4.10)$$

Die von Mises-Transformation ist eine Koordinatentransformation der Impulsgleichung (1.4.6), bei der die kartesischen Koordinaten (x, y) in die von Mises-Koordinaten $(\xi, \eta) := (x, \psi)$ transformiert werden (s. [48] Abschnitt 7.3.2 S.185). Zunächst transformiert man die in (1.4.6) auftretenden Differentialoperatoren $\frac{\partial}{\partial x}$ und $\frac{\partial}{\partial y}$. Hierfür sei $f \in C^1(D)$.

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \psi} = f_\xi - v f_\psi \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \xi} - v \frac{\partial}{\partial \psi} \\ f_y &= \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial \psi} = u \frac{\partial f}{\partial \psi} = u f_\psi \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} &= u \frac{\partial}{\partial \psi} . \end{aligned}$$

Angewandt auf die Terme in (1.4.6) bedeutet dies:

$$p_\psi = \frac{1}{u} p_y \stackrel{(1.4.7)}{=} 0 \quad (1.4.11)$$

$$p_\xi = p_x + v p_\psi = p_x \quad (1.4.12)$$

$$\begin{aligned} u(u_\xi - v u_\psi) + \nu u u_\psi + \frac{1}{\rho} (p_\xi - v \cdot \underbrace{p_\psi}_{=0}) &= \nu u (u u_\psi)_\psi \\ \Leftrightarrow u u_\xi + \frac{1}{\rho} p_\xi &= \nu u (u u_\psi)_\psi . \end{aligned} \quad (1.4.13)$$

Bei verschwindendem Druckgradienten $p_\xi = p_x$, wie es nach (1.4.8) beispielsweise bei konstanter Außenströmung der Fall ist, vereinfacht sich (1.4.13) nach einer Division durch u zu

$$u_\xi = \nu (u u_\psi)_\psi . \quad (1.4.14)$$

Hat man $u(\xi, \psi)$ in von Mises-Koordinaten bestimmt, so kann man das Ergebnis in kartesischen Koordinaten darstellen, indem man die zu (ξ, ψ) gehörige y -Koordinate berechnet. Diese erhält man aus dem Umkehrsatz

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \psi}(\xi, \psi) &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y) \right)^{-1} = u(\xi, \psi)^{-1} \\ \Rightarrow y &= y(\xi, \psi) = \int_{\eta=0}^{\psi} \frac{1}{u(\xi, \eta)} d\eta . \end{aligned} \quad (1.4.15)$$

1.5 Blasius-Lösung der laminaren Grenzschichtströmung entlang einer halbunendlichen Platte

Als führender Term in der asymptotischen Entwicklung von laminaren inkompressiblen 2D-Nachlauf-Fernfeldern hinter bodennahen Hindernissen wird später die sogenannte Blasius-Lösung der Plattengrenzschichtströmung entlang einer halbunendlichen Platte benutzt, weswegen diese

hier kurz eingeführt werden soll, ohne auf Details einzugehen. Solche findet man in [48] Abschnitt 6.5. S.156-159.

Bei einer laminar, inkompressibel, mit einer (dimensionslosen) konstanten Anströmgeschwindigkeit U tangential angeströmten, halbunendlichen Platte macht man folgenden Ähnlichkeitsansatz in separierten Variablen für die Stromfunktion $\psi(x, y)$ (s. [48] S. 157 Gleichungen (6.45), (6.46)):

$$\psi(x, y) := \sqrt{2\nu x U} f\left(y\sqrt{\frac{U}{2\nu x}}\right) = \sqrt{2\nu x U} f(\eta) \quad (1.5.1)$$

$$\eta := y\sqrt{\frac{U}{2\nu x}} \quad \text{Ähnlichkeitsvariable.} \quad (1.5.2)$$

Dabei liegt der Koordinatenursprung des kartesischen Koordinatensystems auf der Vorderkante der halbunendlichen Platte und die positive x -Achse fällt mit dieser zusammen.

Aus der Stromfunktion leitet sich dann folgendes Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v} = (u, v)$ ab (s. [48] S. 157, Gleichungen (6.47), (6.48)):

$$u \stackrel{(1.4.2)}{=} \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial y} = U f'(\eta) \quad (1.5.3)$$

$$v \stackrel{(1.4.1)}{=} -\frac{\partial\psi}{\partial x} = \sqrt{\frac{\nu U}{2x}} (\eta f' - f). \quad (1.5.4)$$

Für die in der Grenzschicht-Impulsgleichung (1.4.6) auftretenden partiellen Ableitungen von u und v bedeutet dies:

$$u_x = U f''(\eta) \eta_x = -\frac{1}{2x} U \eta f''(\eta) \quad (1.5.5)$$

$$u_y = U f''(\eta) \eta_y = U \sqrt{\frac{U}{2\nu x}} f''(\eta) \quad (1.5.6)$$

$$u_{yy} = U \sqrt{\frac{U}{2\nu x}} f''(\eta) \eta_y = \frac{U^2}{2\nu x} f'''(\eta). \quad (1.5.7)$$

Einsetzen in (1.4.6) ergibt bei verschwindendem Druckgradienten p_x (z.B. bei konstanter Außenströmung gemäß (1.4.8)):

$$\begin{aligned} 0 &= uu_x + vu_y - \nu u_{yy} \\ &= -\frac{U^2}{2x} \eta f'(\eta) f''(\eta) + \frac{U^2}{2x} (\eta f' - f) f''(\eta) - \frac{U^2}{2x} f'''(\eta) \\ &= -\frac{U^2}{2x} (f''' + f f'')(\eta). \end{aligned}$$

Mit der Haftbedingung $u(x, 0) = 0 = v(x, 0)$ an der Platte, der Nullstromlinie $\psi(x, 0) = 0$ entlang der Platte und der Außenstrombedingung $\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = U$ für alle $x > 0$ erhält man folgendes Randwertproblem:

$$f''' + f f'' = 0 \quad \text{Blasius-Gleichung} \quad (1.5.8)$$

$$f(0) = 0 \quad (1.5.9)$$

$$f'(0) = 0 \quad (1.5.10)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = 1. \quad (1.5.11)$$

Ein mathematisch korrekter Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis einer Lösung wurde erstmals 1941 von H. Weyl in [58] angegeben. Diese eindeutig bestimmte Lösung f wird nach ihrem Urheber H. Blasius, einem Schüler Prandtls, der sie 1908 in seiner Dissertation [5] gefunden hat, Blasius-Lösung genannt. Der Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis von Weyl ist mit einigen weiteren, später benötigten Aussagen zur Asymptotik der Blasius-Lösung im Beweis von Satz 1.5.1 unten wiedergegeben. Die Blasius-Differentialgleichung ist zwar nicht linear aber ansonsten „gutartig“ (die rechte Seite des zugehörigen Differentialgleichungssystems ist auf jedem kompakten Intervall von $\mathbb{R}_{\geq 0}$ Lipschitzstetig) und lässt sich numerisch problemlos integrieren. Umfangreiche analytische Untersuchungen wurden 1960 von Coppel [11] durchgeführt. Eine auf ganz $\mathbb{R}_{\geq 0}$ konvergente analytische Darstellung der Blasius-Lösung wurde jedoch erst 1998 von S.-J. Liao [37] (S.110 Formel (2.42)) mittels einer interessanten, für die Strömungsmechanik neuartigen Anwendung von topologischer Homotopie-Theorie angegeben. Seine Reihendarstellung enthält allerdings mehrere rekursiv definierte Parameter, deren Definition für sich bereits mehrere Seiten in Anspruch nehmen, so dass jene umständlich zu handhaben ist. Trotzdem ist es eine erstaunliche Leistung, da mit Liao’s Formel beispielsweise auch die Wandschubspannung über den Funktionswert $f''(0)$ analytisch exakt berechnet werden kann.

Die Graphen der Funktionen f , $f' = u/U$, f'' , v sind in Abbildung 1.1 auf Seite 14 dargestellt. Dabei wurde die Blasius-Gleichung in Matlab mit dem Standard-DGL-Löser ODE45 numerisch gelöst, wobei $f''(0) \approx 0,4696$ durch ein Schießverfahren geschätzt werden kann. Die Graphen von u und v entsprechen den Abbildungen aus [48] Bild 6.6 (a), (b) S.159.

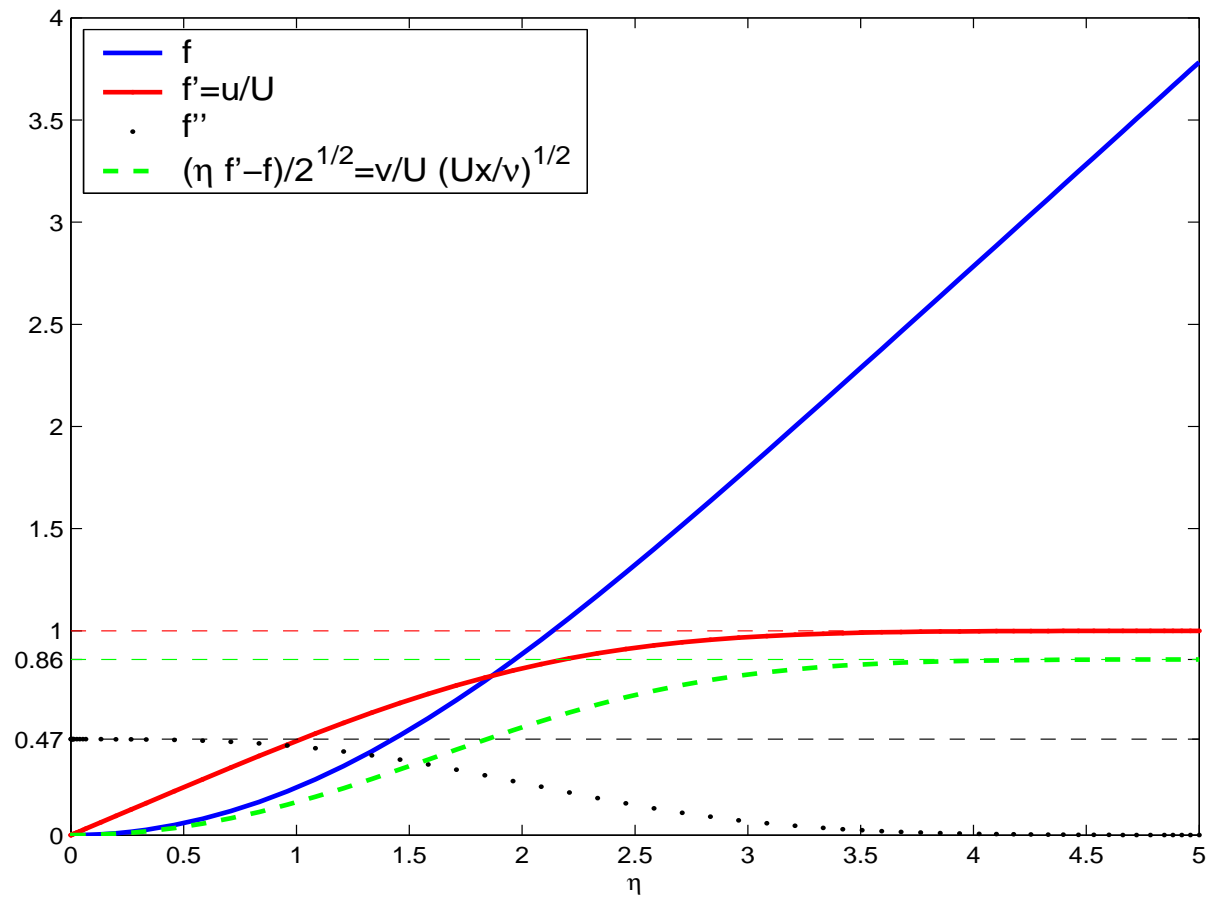


Abbildung 1.1: Blasius-Lösung der laminaren Grenzschichtströmung entlang einer tangential an-
geströmten halbunendlichen Platte

Satz 1.5.1 (H. Weyl)

a) Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y''' + 2yy'' &= 0 \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0 \\ y''(0) &= 1 \end{aligned}$$

besitzt auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ eine eindeutige Lösung $h \in C^3(\mathbb{R}_{\geq 0})$.¹

b) Die Funktion

$$\Phi : C(\mathbb{R}_{\geq 0}) \rightarrow C(\mathbb{R}_{\geq 0}), \quad \Phi(g)(z) := \exp\left(-\int_0^z (z-\zeta)^2 g(\zeta) d\zeta\right)$$

ist monoton fallend, d.h. für $g_1, g_2 \in C(\mathbb{R}_{\geq 0})$ mit $g_1 \leq g_2$ gilt $\Phi(g_1) \geq \Phi(g_2)$.

c) Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $g_n := \Phi^n(0)$. Die Teilfolge $(g_{2n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist monoton wachsend und $(g_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist monoton fallend, wobei $0 = g_0 \leq g_{2n} \leq g_{2n+1} \leq g_1 = 1$. Für $z \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$|g_{n+1}(z) - g_n(z)| \leq \frac{(2z^3)^n}{(3n)!}. \quad (1.5.12)$$

d) Die Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert punktweise gegen $g := h''$, wobei

$$\begin{aligned} 0 &\leq g_{2n} \uparrow g \downarrow g_{2n+1} \leq 1 \\ |g(z) - g_n(z)| &\leq \frac{(2z^3)^n}{(3n)!} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{R}_{\geq 0}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist die Konvergenz auf jedem kompakten Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ gleichmäßig mit

$$\|g - g_n\|_{\infty} \leq \frac{(2b^3)^n}{(3n)!}.$$

e) h' ist monoton wachsend und beschränkt, so dass

$$\lim_{z \rightarrow \infty} h'(z) = \int_0^z g(z) dz =: a \in \mathbb{R}_{>0}.$$

f) $f(\eta) := \sqrt{\frac{2}{a}} h(\sqrt{\frac{1}{2a}} \eta)$ ist die gesuchte eindeutig bestimmte Blasius-Lösung von (1.5.8), ..., (1.5.11).

Beweis: a) Das zugehörige System erster Ordnung lautet $Y' = F(Y) = (Y_2, Y_3, -2Y_1Y_3)$ mit $Y = (Y_1, Y_2, Y_3) = (y, y', y'')$. Die rechte Seite F ist stetig differenzierbar und damit insbesondere lokal Lipschitz-stetig. Die Behauptung folgt daher aus einer einfachen Erweiterung des Existenz- und Eindeigkeitsatzes von Picard-Lindelöf, wie man sie beispielsweise in [60] Abschnitt VII auf Seite 61 unten nachschlagen kann.

¹Weyl betrachtet in [58] die Differentialgleichung $y''' + 2yy'' = 0$ anstatt $y''' + yy'' = 0$. In Teil f) verschwindet der Faktor 2 bei einer ohnehin notwendigen Transformation.

b) Die Monotonie von Φ folgt sofort aus der Monotonie der Exponentialfunktion und der des Integrals sowie der Positivität des Faktors $(z - \zeta)^2$.

c) Es ist $g_0 = \Phi^0(0) = 0 \leq 1 = \Phi(0) = g_1$. Weil Φ gemäß b) monoton fällt, ist Φ^2 monoton wachsend, so dass

$$g_{2n} = \Phi^{2n}(0) \leq \Phi^{2n}(1) = \Phi^{2n}(\Phi(0)) = \Phi^{2n+1}(0) = g_{2n+1}.$$

Wegen $0 \leq \exp(-x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ erhält man aus der Definition von Φ mit einer trivialen Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$ sofort $0 \leq \Phi^n(0) = g_n \leq 1$. Dies bedeutet aber insbesondere $g_0 = 0 \leq g_2$ und $g_3 \leq 1 = g_1$, so dass wiederum aus der Monotonie von Φ^2 folgt:

$$\begin{aligned} g_{2n} &= \Phi^{2n}(0) \leq \Phi^{2n}(g_2) = g_{2(n+1)} \\ g_{2n+3} &= \Phi^{2n+3}(0) = \Phi^{2n}(g_3) \leq \Phi^{2n}(g_1) = g_{2n+1}. \end{aligned}$$

Folglich ist $(g_{2n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ monoton wachsend und $(g_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}_0}$ monoton fallend. Es sei nun $z \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Die Ungleichung

$$|g_{n+1}(z) - g_n(z)| \leq \frac{(2z^3)^n}{(3n)!}$$

soll per Induktion über n gezeigt werden.

Induktionsanfang: $n = 0$. $|g_1(z) - g_0(z)| = 1 - 0 = 1 = \frac{(2z^3)^0}{(3 \cdot 0)!}$.

Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$. Nach c) gilt $g_n \leq g_{n+1}$ oder $g_{n+1} \leq g_n$. Um diesbezüglich eine Fallunterscheidung zu vermeiden setze $u := \min(g_{n+1}, g_n)$ und $v := \max(g_{n+1}, g_n)$ und

$$U(z) := \int_0^z (z - \zeta)^2 u(\zeta) d\zeta \leq \int_0^z (z - \zeta)^2 v(\zeta) d\zeta =: V(z). \quad (1.5.13)$$

Nach Induktionsvoraussetzung berechnet man mit partieller Integration:

$$\begin{aligned} 0 &\leq V(z) - U(z) = \int_0^z (z - \zeta)^2 (v(\zeta) - u(\zeta)) d\zeta \leq \int_0^z (z - \zeta)^2 \frac{(2\zeta^3)^n}{(3n)!} d\zeta \\ &= \underbrace{\left[(z - \zeta)^2 \frac{2^n \zeta^{3n+1}}{(3n+1)!} \right]_0^z}_{=0} + \int_0^z (z - \zeta) \frac{2^{n+1} \zeta^{3n+1}}{(3n+1)!} d\zeta = \underbrace{\left[(z - \zeta) \frac{2^{n+1} \zeta^{3n+2}}{(3n+2)!} \right]_0^z}_{=0} + \int_0^z \frac{2^{n+1} \zeta^{3n+2}}{(3n+2)!} d\zeta \\ &= \frac{(2z)^{3(n+1)}}{(3(n+1))!}. \end{aligned} \quad (1.5.14)$$

Für $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt

$$0 \leq a(x) := 1 - e^{-x} \leq x =: b(x), \quad (1.5.15)$$

da $a(0) = 0 = b(0)$ und $a'(x) = e^{-x} \leq 1 = b'(x)$. Mit diesen Vorbereitungen leitet man nun die gewünschte Abschätzung her:

$$\begin{aligned} |g_{n+2}(z) - g_{n+1}(z)| &= |\Phi(g_{n+1})(z) - \Phi(g_n)(z)| = |\Phi(u)(z) - \Phi(v)(z)| \\ &= |\exp(-U(z)) - \exp(-V(z))| \\ &= \underbrace{\exp(-U(z))}_{\leq 1} \underbrace{(1 - \exp(-(V(z) - U(z))))}_{\geq 0, \text{ da } V(z) \geq U(z)} \\ &\stackrel{(1.5.15)}{\leq} V(z) - U(z) \stackrel{(1.5.14)}{\leq} \frac{(2z)^{3(n+1)}}{(3(n+1))!}. \end{aligned}$$

d) Nach c) konvergiert die Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ punktweise. Es ist daher nur $g_{2n} \leq g \leq g_{2n+1}$ zu zeigen. Zunächst sieht man, dass $g = h''$ nach Konstruktion von Φ ein Fixpunkt von Φ ist:

$$\begin{aligned}\Phi(g)(z) &= \exp\left(-\int_0^z (z-\zeta)^2 h''(\zeta) d\zeta\right) = \exp\left(\underbrace{[-(z-\zeta)^2 h'(\zeta)]_0^z}_{=0, \text{ da } h'(0)=0} - 2 \int_0^z (z-\zeta) h'(\zeta) d\zeta\right) \\ &= \exp\left(\underbrace{[-2(z-\zeta)h(\zeta)]_0^z}_{=0, \text{ da } h(0)=0} - 2 \int_0^z h(\zeta) d\zeta\right) = \exp\left(-2 \int_0^z h(\zeta) d\zeta\right) \\ \Rightarrow \Phi(g)'(z) &= -2h(z)\Phi(g)(z) \\ \Phi(g)(0) &= \exp(0) = 1.\end{aligned}$$

Folglich löst die Funktion $\Phi(g)$ das Anfangswertproblem $y' = -2hy$, $y(0) = 1$. Andererseits ist aber gemäß a) $g = h''$ die eindeutige Lösung dieses Problems, so dass $\Phi(g) = g$ gelten muss, d.h.: g ist ein Fixpunkt von Φ . Dies bedeutet aber $0 \leq \Phi(g) = g$. Weil Φ monoton fällt, hat man auch $g = \Phi(g) \leq \Phi(0) = 1$. Die Monotonie von Φ^2 liefert nun die gewünschte Einschließung

$$g_{2n} = \Phi^{2n}(0) \leq \Phi^{2n}(g) = g = \Phi^{2n+1}(g) \leq \Phi^{2n}(1) = \Phi^{2n+1}(0) = g_{2n+1}.$$

e) Weil $g = h''$ nach d) positiv ist, muss h' monoton wachsen. Man berechnet

$$\begin{aligned}g_2(z) &= \Phi(1)(z) = \exp\left(-\int_0^z (z-\zeta)^2 d\zeta\right) = e^{-\frac{z^3}{3}} \\ g_3(z) &= \Phi(g_2)(z) = \exp\left(-\int_0^z (z-\zeta)^2 e^{-\frac{\zeta^3}{3}} d\zeta\right) \\ &= \exp\left(-z^2 \int_0^z e^{-\frac{\zeta^3}{3}} d\zeta + 2z \int_0^z \zeta e^{-\frac{\zeta^3}{3}} d\zeta - \int_0^z \zeta^2 e^{-\frac{\zeta^3}{3}} d\zeta\right) \\ &= \exp\left(-z^2 \int_0^z e^{-\frac{\zeta^3}{3}} d\zeta + 2z \int_0^z \zeta e^{-\frac{\zeta^3}{3}} d\zeta - (1 - e^{-\frac{z^3}{3}})\right).\end{aligned}\tag{1.5.16}$$

Gemäß d) gilt $h'' = g \leq g_3$, weswegen

$$h'(z) = h'(z) - h'(0) = \int_0^z h''(\zeta) d\zeta \leq \int_0^z g_3(\zeta) d\zeta.$$

Es genügt daher zu zeigen, dass g_3 integrierbar ist, d.h. $\int_0^\infty g_3(\zeta) d\zeta < +\infty$. Die Funktionen $e^{-\frac{\zeta^3}{3}}$ und $\zeta e^{-\frac{\zeta^3}{3}}$ sind auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ integrierbar. Setze

$$\begin{aligned}\alpha &:= \int_0^\infty e^{-\frac{\zeta^3}{3}} d\zeta \in \mathbb{R}_{>0} \\ \beta &:= \int_0^\infty \zeta e^{-\frac{\zeta^3}{3}} d\zeta \in \mathbb{R}_{>0}\end{aligned}$$

und wähle $\gamma \in]0, \alpha[$. Es gibt dann ein $z_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass für alle $z \geq z_0$

$$\begin{aligned}\gamma &< \int_0^z e^{-\frac{\zeta^3}{3}} d\zeta \quad \text{und} \\ \gamma z^2 &< z^2 \int_0^z e^{-\frac{\zeta^3}{3}} d\zeta - 2z\beta \\ \Leftrightarrow -\gamma z^2 &> -z^2 \int_0^z e^{-\frac{\zeta^3}{3}} d\zeta + 2z\beta \geq -z^2 \int_0^z e^{-\frac{\zeta^3}{3}} d\zeta + 2z \int_0^z \zeta e^{-\frac{\zeta^3}{3}} d\zeta.\end{aligned}$$

Für $z \geq z_0$ lässt sich dann Gleichung (1.5.16) folgendermaßen nach oben abschätzen:

$$g_3(z) = \exp\left(\underbrace{-z^2 \int_0^z e^{-\frac{\zeta^3}{3}} d\zeta + 2z \int_0^z \zeta e^{-\frac{\zeta^3}{3}} d\zeta - (1 - e^{-\frac{z^3}{3}})}_{< -\gamma z^2}\right) \leq e^{-\gamma z^2} \underbrace{e^{-(1 - e^{-\frac{z^3}{3}})}}_{\leq 1} \leq e^{-\gamma z^2}.$$

Weil die Funktion $e^{-\gamma z^2}$ integrierbar ist, trifft dies auch auf g_3 zu, denn $\chi_{[0, z_0]} g_3 + \chi_{]z_0, +\infty[} e^{-\gamma z^2}$ ist eine integrierbare Majorante von g_3 .

f) Die Funktion $f(\eta) := \sqrt{\frac{2}{a}} h(\sqrt{\frac{1}{2a}} \eta)$ erfüllt (1.5.8), ..., (1.5.11), denn

$$\begin{aligned} f'''(\eta) + f f''(\eta) &= \frac{1}{2a^2} h'''(\sqrt{\frac{1}{2a}} \eta) + \frac{1}{a^2} h(\sqrt{\frac{1}{2a}} \eta) h''(\sqrt{\frac{1}{2a}} \eta) \\ &= \frac{1}{2a^2} \left[h'''(\sqrt{\frac{1}{2a}} \eta) + 2h(\sqrt{\frac{1}{2a}} \eta) h''(\sqrt{\frac{1}{2a}} \eta) \right] = 0 \\ f(0) &= \sqrt{\frac{2}{a}} h(0) = 0 \\ f'(0) &= \sqrt{\frac{2}{a}} h'(\sqrt{\frac{1}{2a}} \eta) = 0 \\ f'(\eta) &= \frac{1}{a} h'(\sqrt{\frac{a}{2}} \eta) \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} 1. \end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit der Blasius-Lösung folgt aus der von h . ■

Das asymptotische Verhalten für $\eta \rightarrow \infty$ der Blasius-Lösung $f(\eta)$ und ihrer ersten beiden Ableitungen wird von Coppel [11] in Abschnitt 4 ab Seite 108 geklärt. Für spätere Anwendungen genügen hier seine elementaren Abschätzungen auf Seite 108:

Lemma 1.5.2 (Coppel) *Für jede Konstante $\theta \in]0, 1[$ gibt es ein $\eta_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass $f, 1 - f', f''$ für alle $\eta \geq \eta_0 + 1$ folgende Schranken besitzen:*

$$\eta - \delta \leq f(\eta) \leq \eta - \delta + f''(\eta_0) e^{-\frac{1}{2}\theta(\eta - \eta_0)^2} \quad (1.5.17)$$

$$0 < 1 - f'(\eta) \leq f''(\eta_0) e^{-\frac{1}{2}\theta(\eta - \eta_0)^2} \quad (1.5.18)$$

$$0 < f''(\eta) \leq f''(\eta_0) e^{-\frac{1}{2}\theta(\eta - \eta_0)^2}, \quad (1.5.19)$$

wobei

$$\delta := \int_0^\infty f'(\eta) d\eta$$

die sogenannte Verdrängungsdicke ist (s. [48] S.154).

Beweis: Die linken Seiten der Ungleichungen (1.5.18) und (1.5.19) erhält man aus Satz 1.5.1 d) und e), nach denen sogar $1 - f'(\eta) > 0 < f''(\eta)$ für alle $\eta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt. Sei $\theta \in]0, 1[$ fest gewählt. Wegen $\lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = 1$ gibt es ein $\eta_0 \in \mathbb{R}$, so dass $f'(\eta) \geq \theta$ für alle $\eta \geq \eta_0$. Für $\eta \geq \eta_0$ leitet

man deshalb folgende Ungleichungen nacheinander her:

$$\begin{aligned}
f(\eta) - f(\eta_0) &= \int_{\eta_0}^{\eta} f'(\eta) \, d\eta \geq \int_{\eta_0}^{\eta} \theta \, d\eta = \theta(\eta - \eta_0) \\
f(\eta) &\geq \theta(\eta - \eta_0) + \underbrace{f(\eta_0)}_{\geq 0} \geq \theta(\eta - \eta_0) \\
f'''(\eta) &= -(f f'')(\eta) \leq -\theta(\eta - \eta_0) f''(\eta) \\
\frac{f'''}{f''}(\eta) &\stackrel{(f'' > 0)}{\leq} -\theta(\eta - \eta_0) \\
\ln(f''(\eta)) - \ln(f''(\eta_0)) &= \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{f'''}{f''}(\eta) \, d\eta \leq \int_{\eta_0}^{\eta} -\theta(\eta - \eta_0) \, d\eta = -\frac{1}{2}(\eta - \eta_0)^2 \\
f''(\eta) &\leq f''(\eta_0) e^{-\frac{1}{2}(\eta - \eta_0)^2}.
\end{aligned}$$

Die letzte Zeile ist die rechte Seite der Ungleichung (1.5.19). Integration liefert nun für $\eta \geq \eta_0 + 1$:

$$\begin{aligned}
1 - f'(\eta) &= \int_{\eta}^{\infty} f''(\eta) \, d\eta \\
&\stackrel{(1.5.19)}{\leq} f''(\eta_0) \int_{\eta}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\eta - \eta_0)^2} \, d\eta \leq f''(\eta_0) \int_{\eta}^{\infty} \underbrace{(\eta - \eta_0)}_{\geq 1} e^{-\frac{1}{2}(\eta - \eta_0)^2} \, d\eta \quad (1.5.20) \\
&= f''(\eta_0) [-e^{-\frac{1}{2}(\eta - \eta_0)^2}]_{\eta}^{\infty} = f''(\eta_0) e^{-\frac{1}{2}(\eta - \eta_0)^2}.
\end{aligned}$$

Das ist die rechte Seite der Ungleichung (1.5.18). Eine weitere Integration ergibt die letzte Ungleichung (1.5.17):

$$\begin{aligned}
0 &\stackrel{(f' \leq 1)}{\leq} \int_0^{\infty} 1 - f'(\eta) \, d\eta - \int_0^{\eta} 1 - f'(\eta) \, d\eta \stackrel{f(0)=0}{=} \delta - (\eta - f(\eta)) \\
&= \int_{\eta}^{\infty} 1 - f'(\eta) \, d\eta \stackrel{(1.5.18)}{\leq} \int_{\eta}^{\infty} f''(\eta_0) e^{-\frac{1}{2}(\eta - \eta_0)^2} \, d\eta \stackrel{(1.5.20)}{\leq} f''(\eta_0) e^{-\frac{1}{2}(\eta - \eta_0)^2} \\
\Rightarrow \quad \eta - \delta &\leq f(\eta) \leq \eta - \delta + f''(\eta_0) e^{-\frac{1}{2}(\eta - \eta_0)^2}.
\end{aligned}$$

■

Abschließend soll kurz der Widerstand einer tangential mit konstanter Geschwindigkeit U^* laminar und inkompressibel angeströmten Platte der Länge l^* und Breite B^* aus der Blasius-Lösung hergeleitet werden, da jener später in Beispielen verwendet wird (vgl. [48] S.159-160). Die Schubspannung an der Position x^* der Platte gemessen von deren Vorderkante ist per Definition der dynamischen Viskosität $\mu^* = \nu^* \rho^*$ des betrachteten Newton'schen Fluids gegeben durch

$$\tau^*(x^*) = \mu^* \frac{\partial u^*(x^*, 0)}{\partial y^*} = \nu^* \rho^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*}(x^*, 0). \quad (1.5.21)$$

Wählt man als Bezugsschubspannung $\tau_B^* := \rho_B^* U_B^{*2}$ und entdimensioniert $\tau := \tau^*/\tau_B^*$, so lautet (1.5.21) in dimensionsloser Form (vgl. (1.2)):

$$\begin{aligned}
\tau(x) &= \nu \rho \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) \stackrel{(1.5.6)}{=} \nu \rho U \sqrt{\frac{U}{2\nu x}} f''(0) \approx 0,4696 \nu \rho U \sqrt{\frac{U}{2\nu x}} \\
&\approx 0,332 \rho U \sqrt{\frac{U\nu}{x}}. \quad (1.5.22)
\end{aligned}$$

Der mit der Bezugskraft $F_B^* := \rho_B^* (U_B^* L_B^*)^2$ entdimensionierte Widerstand $W = W^*/F_B^*$ einer Plattenseite ergibt sich durch Integration der Schubspannung über die Plattenfläche:

$$W = B \int_0^l \tau(x) dx \approx 0,332 B \rho U \sqrt{U \nu} \int_0^l \sqrt{\frac{1}{x}} dx = 0,664 B \rho U \sqrt{U \nu} l. \quad (1.5.23)$$

Der Widerstandsbeiwert einer Plattenseite lautet demnach:

$$c_W = \frac{W}{\frac{\rho}{2} U^2 B l} = \frac{0,664 B \rho U \sqrt{U \nu} l}{\frac{\rho}{2} U^2 B l} = \frac{1,328}{\sqrt{\frac{U l}{\nu}}}. \quad (1.5.24)$$

Für $U_B^* = U^*$, $L_B^* = l^*$ ist $U = 1 = l$, so dass $c_W = 1,328 \sqrt{\nu} = 1,328 / \sqrt{\text{Re}}$. Diese Formel wird Blasius'sches Plattenwiderstandsgesetz genannt.

Kapitel 2

Asymptotische Entwicklungen der Ganzraumlösungen von Wärmeleitungsgleichungen

2.1 Grundlagen

In diesem Abschnitt werden elementare Bezeichnungen der asymptotischen Analysis eingeführt und einige spezielle Aussagen für spätere Abschnitte bereitgestellt. Quellen sind [29] Kapitel 1, [31] Abschnitt 4, [34], [42], [57].

Definition 2.1.1 (O- und o-Notation)

Es seien $X \subseteq \mathbb{R}^m$, $Y \subseteq \mathbb{R}^n$, $m, n \in \mathbb{N}$, und $f, g : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen. Man schreibt

$$f(x; y) = O(g(x; y)) \quad \text{in } Y, \quad (2.1.1)$$

wenn es für jedes $x \in X$ eine Konstante $k(x) \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so dass

$$|f(x; y)| \leq k(x)|g(x; y)| \quad \text{für alle } y \in Y. \quad (2.1.2)$$

Weiterhin seien nun $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$, eine stetige Funktion - meist wird $\varphi = id_{\mathbb{R}^n}$ oder $\varphi = \|\cdot\|$ gelten - und $z_0 \in \overline{\mathbb{R}^k}$ ein Häufungspunkt von $\varphi(Y)$, der nicht notwendig in $\varphi(Y)$ enthalten sein muss. Man schreibt

$$f(x; y) = O(g(x; y)), \quad \varphi(y) \rightarrow z_0, \quad (2.1.3)$$

wenn es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung $U(x)$ von z_0 und eine Konstante $k(x) \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so dass

$$|f(x; y)| \leq k(x)|g(x; y)| \quad \text{für alle } y \in \varphi^{-1}(U(x)) \cap Y. \quad (2.1.4)$$

Man schreibt

$$f(x; y) = o(g(x; y)), \quad \varphi(y) \rightarrow z_0, \quad (2.1.5)$$

wenn es zu jedem $x \in X$ und jedem $\delta > 0$ eine Umgebung $U(x, \delta)$ von z_0 gibt, so dass

$$|f(x; y)| \leq \delta |g(x; y)| \quad \text{für alle } y \in \varphi^{-1}(U(x, \delta)) \cap Y. \quad (2.1.6)$$

Sind in den definierenden Gleichungen (2.1.2), (2.1.4), (2.1.6) die Größen $k(x), U(x), U(x, \delta)$ unabhängig von $x \in X$, so wird den Notationen (2.1.1), (2.1.3), (2.1.5) jeweils das Attribut „gleichmäßig (in X)“ zugefügt. Falls $f = f(y)$ und $g = g(y)$ nur von y und nicht von x abhängen, wird die Variable x in allen Bezeichnungen dem Kontext entsprechend fortgelassen.

Auf kanonische Weise kann man nun Ordnungsrelationen auf den Klassen $O(f(x; y))$ definieren. Ohne sich in Formalismen zu verlieren, seien folgende selbsterklärende Kurznotationen eingeführt:

- $O(f(x; y)) = O(g(x; y)) \quad :\Leftrightarrow \quad f(x; y) = O(g(x; y)) \wedge g(x; y) = O(f(x; y))$
- $O(f(x; y)) < O(g(x; y)) \quad :\Leftrightarrow \quad f(x; y) = O(g(x; y)) \wedge \neg g(x; y) = O(f(x; y))$
- $O(f(x; y)) \leq O(g(x; y)) \quad :\Leftrightarrow \quad O(f(x; y)) < O(g(x; y)) \vee O(g(x; y)) = O(f(x; y)).$

All diese Abkürzungen können die Zusätze „ $\varphi(y) \rightarrow z_0$ “ bzw. „gleichmäßig“ enthalten.

Definition 2.1.2 (asymptotische Folge) Es sei $(\phi^{(i)}(\varepsilon))_{i \in \mathbb{Z}}$ eine Folge reellwertiger Funktionen $\phi^{(i)}$ in einer reellen Variablen ε , deren Definitionsbereiche den Häufungspunkt $\varepsilon_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ besitzen (meist wird $\varepsilon_0 \in \{0, \pm\infty\}$ gelten). Falls

$$\phi^{(i+1)}(\varepsilon) = o(\phi^{(i)}(\varepsilon)), \quad \varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$$

für alle $i \in \mathbb{Z}$, so heißt die Funktionenfolge $(\phi^{(i)}(\varepsilon))_{i \in \mathbb{Z}}$ eine asymptotische Folge für ε gegen ε_0 .

Beispiel 2.1.3 (asymptotische Potenzfolgen) Ist $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ eine streng monoton wachsende Folge in \mathbb{R} , so wird durch

$$\phi^{(i)} : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varepsilon \mapsto \varepsilon^{\alpha_i}$$

eine asymptotische Folge für ε gegen 0 definiert, welche Potenzfolge mit Exponenten α_i heißt. Der Spezialfall $\alpha_i = i$ wird als natürliche oder auch kanonische Potenzfolge bezeichnet.

Definition 2.1.4 (mehrskalige, asymptotische Entwicklung) Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$, $\varepsilon_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ ein Häufungspunkt von I , D eine Teilmenge eines \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$, $f : D \times I \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, eine Funktion, $(\phi^{(i)}(\varepsilon))_{i \in \mathbb{N}_0}$, $(\psi^{(i)}(\varepsilon))_{i \in \mathbb{Z}}$ asymptotische Folgen mit Definitionsbereich I und

$$\phi^{(0)} \equiv 1 \equiv \psi^{(0)}.$$

Weiterhin sei $(f^{(i)}(\varepsilon))_{i \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge von Funktionen $f^{(i)} : D^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}^m$, die höchstens bezüglich endlich vieler Variablen nicht konstant seien. Es bezeichne

$$\psi(\varepsilon)x := (\dots, \psi^{(-1)}(\varepsilon)x, \psi^{(0)}(\varepsilon)x, \psi^{(1)}(\varepsilon)x, \dots) \in D^{\mathbb{Z}}.$$

Für $N \in \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$, heißt die Reihe

$$\sum_{i=0}^N \phi^{(i)}(\varepsilon) f^{(i)}(\psi(\varepsilon)x)$$

eine asymptotische Entwicklung der Stufe N von f mit Amplituden $\phi^{(i)}$, $i = 1 \dots, N$, und Skalen ψ , wenn

$$f(x; \varepsilon) - \sum_{i=0}^M \phi^{(i)}(\varepsilon) f^{(i)}(\psi(\varepsilon)x) = o(\phi^{(M)}(\varepsilon)), \quad \varepsilon \rightarrow \varepsilon_0 \quad (2.1.7)$$

für alle $M \in (\mathbb{N}_0)_{\leq N}$.

Man beachte, dass (2.1.7) m Gleichungen enthält, d.h. die asymptotische Entwicklung aller m Komponenten-Funktionen von f erfolgt einheitlich bezüglich der Amplituden ϕ und Skalen ψ . Eine asymptotische Entwicklung der Stufe $+\infty$ wird einfach asymptotische Entwicklung genannt und man schreibt in diesem Fall formal:

$$f(x; \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \phi^{(i)}(\varepsilon) f^{(i)}(\psi(\varepsilon)x), \quad \varepsilon \rightarrow \varepsilon_0.$$

Falls (2.1.7) gleichmäßig für alle $x \in D$ erfüllt ist (s. Definition 2.1.1), so spricht man von gleichmäßigen asymptotischen Entwicklungen.

Als nächstes sei der Begriff einer schnell fallenden Funktion in Erinnerung gerufen (s.[35], Kapitel VIII, §4, S. 236).

Definition 2.1.5 (schnell fallende Funktion) Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, heißt schnell fallend, falls zu jedem $m \in \mathbb{N}$ Konstanten $c_1(m), c_2(m) \in \mathbb{R}_{>0}$ existieren, so dass

$$(1 + \|x\|)^m |f(x)| < c_2(m) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|x\| > c_1(m), \quad (2.1.8)$$

d.h. die Funktionen $(1 + \|x\|)^m f(x)$ sind für große x stets (nicht notwendig gleichmäßig für alle $m \in \mathbb{N}$) beschränkt. Eine äquivalente Beschreibung ist

$$f(x) = O(x^{-m}), \quad \|x\| \rightarrow \infty \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}. \quad (2.1.9)$$

Die Klasse der schnell fallenden Funktionen enthält bekanntlich die der exponentiell fallenden Funktionen.

Definition 2.1.6 (exponentiell fallende Funktion) Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, heißt exponentiell fallend, falls

$$f(x) = O(e^{-\alpha \|x\|^\beta}), \quad \|x\| \rightarrow \infty \quad (2.1.10)$$

für geeignete $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{>0}$.

Die zentrale im Folgenden hauptsächlich verwendete Eigenschaft schnell fallender Funktionen wird im nächsten Lemma festgehalten.

Lemma 2.1.7 Ist $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $n \in \mathbb{N}$, eine schnell fallende Funktion, so ist für jedes $k \in \mathbb{N}_0^n$ die Funktion $x^k f(x)$ (Lebesgue-) integrierbar, wobei

$$x^k := x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}.$$

Beweis: Setze $|k| := k_1 + \dots + k_n$. Weil f schnell fallend ist, gibt es zu $m := 2n + |k|$ Konstanten $c_1 = c_1(m), c_2 = c_2(m) \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass (2.1.8) erfüllt ist. Weiterhin gibt es wegen $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine Konstante $c_3 \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $|f| \leq c_3$ fast überall. Aus $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ folgt insbesondere auch, dass f messbar ist, weshalb dies auch auf $(x-z)^k f(x)$ zutrifft. Zum Nachweis der Integrierbarkeit muss deswegen nur noch

$$\int |x^k f(x)| dx < +\infty$$

gezeigt werden. Für diese Integralabschätzung seien zunächst folgende elementare Sachverhalte bereitgestellt:

$$(1 + x_1^2) \cdots (1 + x_n^2) \leq (1 + |x|^2)^n \leq (1 + |x|)^{2n} \quad (2.1.11)$$

$$\int_{z \in \mathbb{R}} \frac{1}{1 + z^2} dz = \lim_{z \rightarrow \infty} \arctan(z) - \lim_{z \rightarrow -\infty} \arctan(z) = \pi. \quad (2.1.12)$$

Man schätzt nun ab:

$$\begin{aligned} \int |x^k f(x)| dx &= \int_{\|x\| \leq c_1} |x^k f(x)| dx + \int_{\|x\| > c_1} |x^k f(x)| dx \\ &\leq \underbrace{c_1^{|k|} c_3}_{=: C} \int_{\|x\| \leq c_1} dx + c_2 \int_{\|x\| > c_1} \frac{\|x\|^{|k|}}{(1 + \|x\|)^{2n+k}} dx \\ &\leq C + c_2 \int \frac{1}{(1 + \|x\|)^{2n}} dx \\ &\stackrel{(2.1.11)}{\leq} C + c_2 \int \cdots \int \frac{1}{(1 + x_1^2) \cdots (1 + x_n^2)} dx_1 \cdots dx_n \\ &\stackrel{(2.1.12)}{\leq} C + c_2 \pi^n < +\infty. \end{aligned}$$

■

Korollar 2.1.8 *Es sei $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ eine schnell fallende Funktionen und $k \in \mathbb{N}$.*

a) *Es gibt ein nur von g abhängiges, reelles Polynom p vom Grad k derart, dass*

$$\int |y - z|^k |g(y)| dy \leq p(|z|) \quad (2.1.13)$$

für alle $z \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist für jedes $z \in \mathbb{R}$ die Abbildung $y \mapsto (y - z)^k g(y)$ (Lebesgue-) integrierbar.

b) *Ist $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ eine weitere schnell fallende Funktion, so gilt*

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| \int |y - z|^k |g(y)| dy = 0 \quad (2.1.14)$$

$$\int |f(z)| \int |y - z|^k |g(y)| dy dz < \infty. \quad (2.1.15)$$

Beweis: a)

$$\begin{aligned} \int |y - z|^k |g(y)| dy &\leq \int (|y| + |z|)^k |g(y)| dy = \int \sum_{j=0}^k |z|^j |y|^{k-j} |g(y)| dy \\ &= \sum_{j=0}^k |z|^j \underbrace{\int |y|^{k-j} |g(y)| dy}_{=: p_j \in \mathbb{R} \text{ nach 2.1.7}} = p(|z|) \end{aligned}$$

b)

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| \int |y-z|^k |g(y)| dy \stackrel{\text{a)}}{\leq} \lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| p(|z|) = 0 \quad (2.1.16)$$

$$\int |f(z)| \int |y-z|^k |g(y)| dy dz \stackrel{\text{a)}}{\leq} \int |f(z)| p(|z|) dz \stackrel{2.1.7}{\leq} \infty. \quad (2.1.17)$$

■

Der folgende Satz macht eine Aussage über das asymptotische Verhalten von Quotienten von geraden Potenzreihen für $x \rightarrow \infty$. Er korrespondiert mit der trivialen Beziehung

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_n}{q_n} \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

für reelle Polynome $p = \sum_{k=0}^r p_k x^k$, $q = \sum_{k=0}^s q_k x^k$, $p_r \neq 0 \neq q_s$, $n := \max(r, s)$. Es ist ein Zusammenhang der elementaren Analysis, den ich in der angegebenen Formulierung nicht in der einschlägigen Lehrbuchliteratur gefunden habe, weswegen vollständigkeithalber ein Beweis angegeben ist. Es werden die üblichen erweiterten Rechenregeln für $\overline{\mathbb{R}}$

$$\begin{aligned} +\infty + a &:= +\infty && \text{für } a \in]-\infty, +\infty] \\ -\infty + a &:= -\infty && \text{für } a \in [-\infty, +\infty[\\ a \cdot (\pm\infty) &:= \begin{cases} \pm\infty & , \text{ falls } a \in]0, +\infty] \\ 0 & , \text{ falls } a = 0 \\ \mp\infty & , \text{ falls } a \in [-\infty, 0[\end{cases} \\ \frac{a}{\pm\infty} &:= 0 && \text{für } a \in \mathbb{R} \\ \frac{a}{0} &:= \begin{cases} +\infty & , \text{ falls } a \in]0, +\infty] \\ 0 & , \text{ falls } a = 0 \\ -\infty & , \text{ falls } a \in [-\infty, 0[\end{cases} \end{aligned}$$

in einem Fall abgeändert:

$$0 \cdot (\pm\infty) := \pm\infty. \quad (2.1.18)$$

Satz 2.1.9 *Es seien $z \in \mathbb{Z}$ und*

$$f(x) = \sum_{k=z}^{\infty} a_k x^{2k} \quad \text{und} \quad g(x) = \sum_{k=z}^{\infty} b_k x^{2k}$$

zwei reelle, für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergente, gerade Potenzreihen. Die zweite Potenzreihe besitze die Eigenschaften

$$b_k \geq 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0, \quad (2.1.19)$$

$$b_k > 0 \quad \text{für unendlich viele } k \in \mathbb{N}_0. \quad (2.1.20)$$

Dann gilt

$$\alpha := \liminf_{\substack{k \rightarrow \infty \\ (a_k, b_k) \neq (0,0)}} \frac{a_k}{b_k} \leq \liminf_{|x| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{\substack{k \rightarrow \infty \\ (a_k, b_k) \neq (0,0)}} \frac{a_k}{b_k} =: \beta. \quad (2.1.21)$$

Im Fall $\alpha = \beta$ bedeutet dies insbesondere

$$\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ (a_k, b_k) \neq (0,0)}} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}. \quad (2.1.22)$$

Beweis: Aus den beiden Voraussetzungen (2.1.19) und (2.1.20) folgt einerseits, dass die Menge $\{(a_k, b_k) \mid (a_k, b_k) \neq (0,0), k \in \mathbb{N}_0\}$ unendlich viele Elemente enthält, weswegen $\alpha \leq \beta$ gilt, und andererseits $g(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so dass $f(x)/g(x)$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stets wohldefiniert ist. Wähle $C \in \mathbb{R} > 0$ und setze

$$\alpha' := \begin{cases} \alpha & , \text{ falls } \alpha < +\infty \\ C & , \text{ falls } \alpha = +\infty. \end{cases} \quad (2.1.23)$$

Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ findet man ein $N \in \mathbb{N}_{>z}$, so dass

$$\alpha' - \varepsilon \leq \frac{a_k}{b_k} \leq \beta + \varepsilon \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_{\geq N} \text{ mit } (a_k, b_k) \neq (0,0). \quad (2.1.24)$$

Wegen $b_k \geq 0$ (s. (2.1.19)) folgt daraus mit der neuen Konvention (2.1.18):

$$(\alpha' - \varepsilon)b_k \leq a_k \leq (\beta + \varepsilon)b_k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_{\geq N}. \quad (2.1.25)$$

Weiterhin findet man gemäß (2.1.20) ein $K \in \mathbb{N}_{>N}$ mit

$$b_K > 0. \quad (2.1.26)$$

Für $x \neq 0$ folgert man nun

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\sum_{k=z}^{\infty} a_k x^{2k}}{\sum_{k=z}^{\infty} b_k x^{2k}} = \frac{x^{2N} \left(\sum_{k=z}^{N-1} a_k x^{2(k-N)} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+N} x^{2k} \right)}{x^{2N} \left(\sum_{k=z}^{N-1} b_k x^{2(k-N)} + \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+N} x^{2k} \right)} \\ &\stackrel{(2.1.25)}{\geq} \frac{\sum_{k=z}^{N-1} a_k x^{2(k-N)} + (\alpha' - \varepsilon) \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+N} x^{2k}}{\sum_{k=z}^{N-1} b_k x^{2(k-N)} + \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+N} x^{2k}} \\ &= \frac{\left(\sum_{k=z}^{N-1} a_k x^{2(k-N)} / \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+N} x^{2k} \right) + \alpha' - \varepsilon}{\left(\sum_{k=z}^{N-1} b_k x^{2(k-N)} / \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+N} x^{2k} \right) + 1} \\ &\xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \frac{0 + \alpha' - \varepsilon}{0 + 1} = \alpha' - \varepsilon \end{aligned} \quad (2.1.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\sum_{k=z}^{\infty} a_k x^k}{\sum_{k=z}^{\infty} b_k x^k} = \frac{x^{2N} \left(\sum_{k=z}^{N-1} a_k x^{2(k-N)} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+N} x^{2k} \right)}{x^{2N} \left(\sum_{k=z}^{N-1} b_k x^{2(k-N)} + \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+N} x^{2k} \right)} \\ &\stackrel{(2.1.25)}{\leq} \frac{\sum_{k=z}^{N-1} a_k x^{2(k-N)} + (\beta + \varepsilon) \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+N} x^{2k}}{\sum_{k=z}^{N-1} b_k x^{2(k-N)} + \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+N} x^{2k}} \\ &= \frac{\left(\sum_{k=z}^{N-1} a_k x^{2(k-N)} / \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+N} x^{2k} \right) + \beta + \varepsilon}{\left(\sum_{k=z}^{N-1} b_k x^{2(k-N)} / \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+N} x^{2k} \right) + 1} \\ &\xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \frac{0 + \beta + \varepsilon}{0 + 1} = \beta + \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.1.28)$$

Bei den Grenzübergängen in den Zeilen (2.1.27) und (2.1.28) wird ausgenutzt, dass gemäß (2.1.19) und (2.1.26)

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_{k+N} x^{2k} \geq b_K > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| \geq 1.$$

Man erhält also

$$\alpha' - \varepsilon \leq \liminf_{|x| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \beta + \varepsilon.$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ und $C \rightarrow +\infty$ im Fall $\alpha = +\infty$ (s. (2.1.23)) ergibt dies die gewünschte Ungleichung (2.1.21). ■

Korollar 2.1.10 *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.1.9 mit $\alpha = \beta$ erfüllt.*

a) Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt $O(f(x)) = O(g(x))$, $|x| \rightarrow \infty$.

b) Für $\alpha = 0$ gilt $f(x) = o(g(x))$, $|x| \rightarrow \infty$.

c) Für $\alpha \in \{\pm\infty\}$ gilt $g(x) = o(f(x))$, $|x| \rightarrow \infty$.

Beweis: Gleichung (2.1.22) aus Satz 2.1.9 lautet

$$\alpha = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}. \quad (2.1.29)$$

a) Für hinreichend große $|x|$ ist $|f(x)| \leq (|\alpha| + 1)|g(x)|$ und $|g(x)| \leq (\frac{1}{|\alpha|} + 1)|f(x)|$.

b) Aus (2.1.29) mit $\alpha = 0$ folgt direkt $f(x) = o(g(x))$, $|x| \rightarrow \infty$ (s. 2.1.6).

c) Sei $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$. Wegen (2.1.29) gibt es ein $c_0 \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass für $|x| \geq c_0$

$$\frac{|f(x)|}{|g(x)|} > \frac{1}{\delta} \quad \Rightarrow \quad |g(x)| \leq \delta |f(x)|.$$

Im nächsten Abschnitt wird das asymptotische Verhalten spezieller Potenzreihen untersucht, deren Reihenkoeffizienten rekursiv definiert sind. Das folgende Lemma dient dabei als Hilfsmittel.

Lemma 2.1.11 *Es seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reelle Folgen, wobei $b_n \neq 0 \neq B_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte. Die Folgen mögen den Rekursionsvorschriften $a_{n+1} = A_n a_n$ und $b_{n+1} = B_n b_n$ genügen.*

a) Falls es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\frac{|A_n|}{|B_n|} \leq 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_{\geq N},$$

so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

b) Falls es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $a_N \neq 0$ und

$$\frac{|A_n|}{|B_n|} \geq 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_{\geq N},$$

so gilt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|b_n|} > 0.$$

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$ löst man die Rekursion rückwärts bis N auf und erhält:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{|a_n|}{|b_n|} &= \prod_{m=N}^{n-1} \frac{|A_m|}{|B_m|} \frac{|a_N|}{|b_N|} \leq \prod_{m=N}^{n-1} \frac{m-1}{m} \frac{|a_N|}{|b_N|} = \frac{N-1}{n-1} \frac{|a_N|}{|b_N|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \text{b) } \frac{|a_n|}{|b_n|} &= \underbrace{\prod_{m=N}^{n-1} \frac{|A_m|}{|B_m|} \frac{|a_N|}{|b_N|}}_{\geq 1} \geq \frac{|a_N|}{|b_N|} > 0, \quad \text{da } a_N \neq 0 \neq b_N. \end{aligned}$$

■

2.2 Hermite-Polynome und -Differentialgleichung

Definition 2.2.1 (Hermite-Polynome) Für $n \in \mathbb{N}_0$ heißt die Funktion

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-x^2} \quad (2.2.1)$$

das n -te Hermite-Polynom.

Man sieht leicht, dass $H_n(x)$ ein Polynom vom Grad n mit ganzzahligen Koeffizienten ist. Der Vorfaktor $(-1)^n$ bewirkt dabei, dass der führende Koeffizient vor der höchsten x -Potenz positiv ist. Die ersten drei Hermite-Polynome lauten

$$H_0(x) = 1 \quad (2.2.2)$$

$$H_1(x) = 2x = 2xH_0 \quad (2.2.3)$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2 = 2xH_1 - 2H_0. \quad (2.2.4)$$

Graphen der ersten sechs Hermite-Polynome sind in den Abbildungen 2.1 und 2.2 dargestellt. Der folgende Satz enthält Eigenschaften der Hermite-Polynome, die später benötigt werden. Alle diese (und viele weitere interessante) findet man formelmäßig aufgelistet ohne Beweis in [46] Abschnitt 5.6. S.249 ff. Vollständigkeitshalber geben wir hier kurze elementare Beweise an.

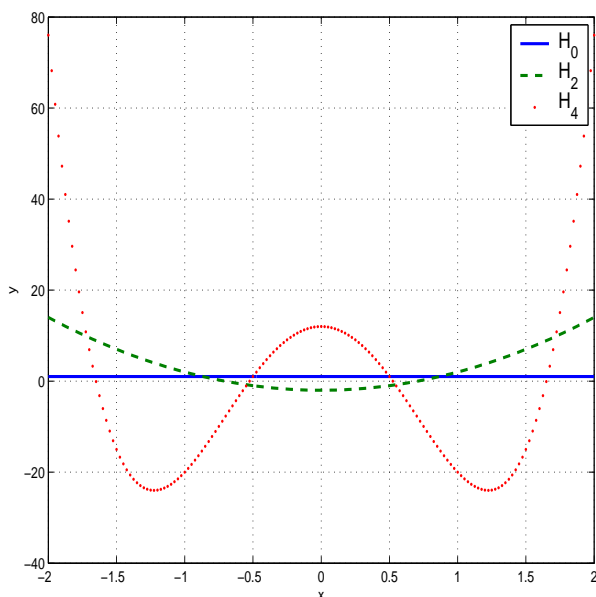


Abbildung 2.1: gerade Hermite-Polynome

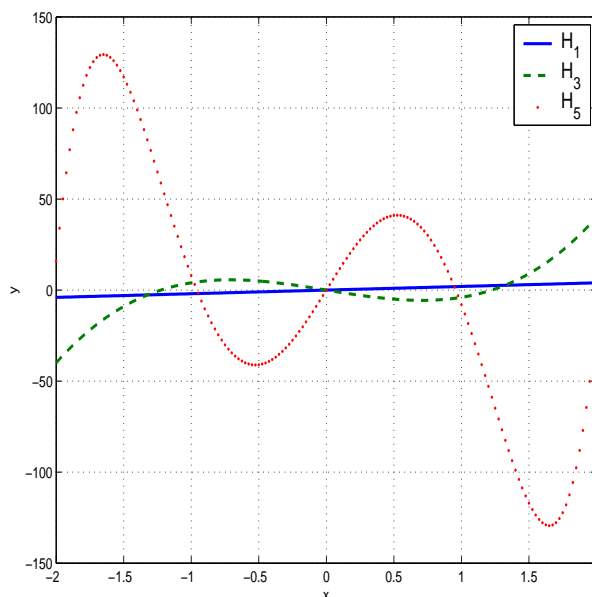


Abbildung 2.2: ungerade Hermite-Polynome

Satz 2.2.2

$$\text{a) } H_{n+1} = 2xH_n - H'_n \quad (2.2.5)$$

$$\text{b) } H_n(x) = n! \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^m (2x)^{n-2m}}{m!(n-2m)!} \quad (2.2.6)$$

$$\text{c) } H'_n = 2nH_{n-1} \quad (2.2.7)$$

$$\text{d) } H_n(0) = \begin{cases} (-1)^{n/2} \frac{n!}{(n/2)!} & , \text{ falls } n \text{ gerade} \\ 0 & , \text{ falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \quad (2.2.8)$$

$$\text{e) } H_{n+1} - 2xH_n + 2nH_{n-1} = 0 \quad (2.2.9)$$

$$\text{f) } H''_n - 2xH'_n + 2nH_n = 0 \quad (2.2.10)$$

$$\text{g) } \int H_n(x)H_m(x) e^{-x^2} dx = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } m \neq n \\ \sqrt{\pi} 2^n n! & , \text{ falls } m = n \end{cases} \quad (2.2.11)$$

$$\text{h) } H_n(-x) = (-1)^n H_n(x) \quad (2.2.12)$$

$$\text{i) } H_n(x+y) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} H_m(x)(2y)^{n-m} \quad (2.2.13)$$

Beweis:

a)

$$\begin{aligned} H'_n(x) &= \frac{\partial}{\partial x} [(-1)^n e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-x^2}] = (-1)^n 2xe^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-x^2} + (-1)^n e^{x^2} \frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} e^{-x^2} \\ &= 2xH_n(x) - H_{n+1}(x) \end{aligned}$$

b) Das Polynom auf der rechten Seite der Gleichung b) sei mit P_n bezeichnet, so dass $H_n = P_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gezeigt werden muss. Zunächst wird bewiesen, dass P_n die Gleichung a) anstelle

von H_n erfüllt:

$$\begin{aligned}
& 2xP_n(x) - P'_n(x) \\
= & n! \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^m (2x)^{n+1-2m}}{m!(n-2m)!} + n! \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^{m+1} 2(2x)^{n-2m-1}}{m!(n-2m-1)!} \\
= & n! \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^m (2x)^{n+1-2m}}{m!(n-2m)!} + n! \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k 2(2x)^{n+1-2k}}{(k-1)!(n+1-2k)!} \quad , \quad [k := m+1] \\
= & n! \left(\frac{(2x)^{n+1}}{n!} + \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^m (2x)^{n+1-2m} \left(\frac{1}{m!(n-2m)!} + \frac{2}{(m-1)!(n+1-2m)!} \right) \right) \\
= & n! \left(\frac{(n+1)(2x)^{n+1}}{(n+1)!} + \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^m (2x)^{n+1-2m} \left(\frac{(n+1-2m)}{m!(n+1-2m)!} + \frac{2m}{m!(n+1-2m)!} \right) \right) \\
= & (n+1)! \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^m (2x)^{n+1-2m}}{m!(n+1-2m)!} = P_{n+1}(x).
\end{aligned}$$

Wegen $H_0 = 1 = P_0$ kann man induktiv $P_n = H_n$ annehmen und muss $H_{n+1} = P_{n+1}$ zeigen. Dies folgt aber sofort aus dem bereits Bewiesenen, da $H_{n+1} = 2xH_n - H'_n = 2xP_n - P'_n = P_{n+1}$.

c)

$$\begin{aligned}
H'_0 &= 0 \\
H'_n(x) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(n! \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^m (2x)^{n-2m}}{m!(n-2m)!} \right) = n! \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^m 2(n-2m)(2x)^{(n-1)-2m}}{m!(n-2m)!} \\
&= 2n(n-1)! \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^m (2x)^{(n-1)-2m}}{m!((n-1)-2m)!} = 2nH_{n-1} \quad \text{für } n > 0
\end{aligned}$$

d)

$$H_n(0) = n! \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^m (2 \cdot 0)^{n-2m}}{m!(n-2m)!} = \begin{cases} (-1)^{n/2} \frac{n!}{(n/2)!} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

e) Für $n \leq 1$ steht das Gewünschte bereits in (2.2.3) und (2.2.4). Für $n \geq 2$ berechnet man

$$\begin{aligned}
(H_{n+1} - 2xH_n + 2nH_{n-1})' &\stackrel{c)}{=} 2(n+1)H_n - 2H_n - (2n)(2x)H_{n-1} + (2n)(2(n-1))H_{n-2} \\
&= 2n(H_n - 2xH_{n-1} + 2(n-1)H_{n-2}) \\
&= \dots = ((2n) \cdots (2 \cdot 2))(H_2 - 2xH_1 + H_0) \\
&\stackrel{(2.2.4)}{=} 0 \\
(H_{n+1} - 2xH_n + 2nH_{n-1})(0) &= H_{n+1}(0) + 2nH_{n-1}(0) \stackrel{d)}{=} 0 \\
\Rightarrow H_{n+1} - 2xH_n + 2nH_{n-1} &= 0.
\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
H_0'' - 2xH_0' + 2 \cdot 0 \cdot H_0 &= 0 & [H_0 = 1] \\
H_1'' - 2xH_1' + 2 \cdot 1 \cdot H_1 &= -4x + 4x = 0 & [H_1(x) = 2x] \\
H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n &= 4n(n-1)H_{n-2} - 4xnH_{n-1} + 2nH_n \\
&= 2n(H_n - 2xH_{n-1} + 2(n-1)H_{n-2}) \\
&= 0 & \text{für } n \geq 2 \\
& \text{e)}
\end{aligned}$$

g) Es sei zunächst der Fall $m = 0$ und $n > 0$ betrachtet. Man berechnet dann

$$\begin{aligned}
\int H_0(x) e^{-x^2} dx &= \int e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \\
\int H_n(x) e^{-x^2} dx &\stackrel{(2.2.1)}{=} \int (-1)^n \frac{\partial^n e^{-x^2}}{\partial x^n} dx = \left[(-1)^n \frac{\partial^{n-1} e^{-x^2}}{\partial x^{n-1}} \right]_{-\infty}^{\infty} = - \left[H_{n-1}(x) e^{-x^2} \right]_{-\infty}^{\infty} = 0.
\end{aligned}$$

Zum Beweis der restlichen Fälle kann man $n \geq m > 0$ annehmen. Diese führt man durch iterierte partielle Integration auf die anfangs behandelten zurück:

$$\begin{aligned}
\int H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx &= \int \underbrace{(-1)^n \frac{\partial^n e^{-x^2}}{\partial x^n}}_{=:u'} \underbrace{H_m(x)}_{=:v} dx \\
&\stackrel{c)}{=} \left[(-1)^n \frac{\partial^{n-1} e^{-x^2}}{\partial x^{n-1}} H_m(x) \right]_{-\infty}^{\infty} - \int (-1)^n \frac{\partial^{n-1} e^{-x^2}}{\partial x^{n-1}} 2m H_{m-1}(x) dx \\
&= - \underbrace{\left[H_{n-1}(x) H_m(x) e^{-x^2} \right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + 2m \int H_{n-1}(x) H_{m-1}(x) e^{-x^2} dx = \dots \\
&= (2m)(2(m-1)) \cdots 2 \int H_{n-m}(x) H_0(x) dx \\
&= \begin{cases} 0 & , \text{ falls } m \neq n \\ \sqrt{\pi} 2^n n! & , \text{ falls } m = n. \end{cases}
\end{aligned}$$

h) Folgt sofort aus b).

i)

$$\begin{aligned}
H_n(x+y) &\stackrel{b)}{=} n! \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^m (2x+2y)^{n-2m}}{m!(n-2m)!} = n! \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^m}{m!(n-2m)!} \sum_{k=0}^{n-2m} \binom{n-2m}{k} (2x)^k (2y)^{n-2m-k} \\
&= n! \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^{n-2m} \frac{(-1)^m (2x)^k (2y)^{n-k-2m}}{m!(n-k-2m)!k!} = n! \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{k=2m}^n \frac{(-1)^m (2x)^{k-2m} (2y)^{n-k}}{m!(n-k)!(k-2m)!} \\
&= n! \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{(-1)^m (2x)^{k-2m} (2y)^{n-k}}{m!(n-k)!(k-2m)!} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k! \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{(-1)^m (2x)^{k-2m}}{m!(k-2m)!} (2y)^{n-k} \\
&\stackrel{b)}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} H_k(x) (2y)^{n-k}
\end{aligned}$$

■

Die Aussage h) bedeutet, dass die Hermite-Polynome H_n übereinstimmend mit n entweder gerade oder ungerade Funktionen sind. Weiterhin sind sie gemäß g) die bis auf multiplikative Vielfache eindeutig festgelegten Orthogonalpolynome bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle f, g \rangle_\nu := \int fg \, d\nu := \int f(x)g(x) e^{-x^2} dx$$

und stellen deshalb den Ausgangspunkt der Gauß-Integration bezüglich der Dichte e^{-x^2} dar (s. [52] Abschnitt 3.5 S.135). Dabei bezeichne $\nu := e^{-x^2} \lambda$ das Maß mit Dichte e^{-x^2} bezüglich des (eindimensionalen) Lebesgue-Maßes λ . Der von den Hermite-Polynomen erzeugte Untervektorraum von $L^2(\nu)$ liegt sogar dicht in $L^2(\nu)$, d.h. $\{H_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ ist eine orthogonale Schauder-Basis von $L^2(\nu)$ bzw. bilden die normierten Polynome $h_n := H_n / \|H_n\|_{L^2(\nu)}$ eine Hilbertraumbasis von $L^2(\nu)$. Dies wird im folgenden Satz von Wiener mittels Fourier-Transformation bewiesen.

Satz 2.2.3 (Wiener) *Die Hermite-Polynome H_n , $n \in \mathbb{N}_0$, bilden eine orthogonale Schauder-Basis von $L^2(\nu)$, d.h. zu jedem $f \in L^2(\nu)$ gibt es eine eindeutig bestimmte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in $l^2(\mathbb{R})$, so dass $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{H_n}{\|H_n\|_{L^2(\nu)}}$.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass für $f \in L^2(\nu)$ aus

$$0 = \langle f, H_n \rangle_\nu = \int f(x)H_n(x)e^{-x^2} dx \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad (2.2.14)$$

bereits $f = 0$ fast überall folgt. Sei daher $f \in L^2(\nu)$ fest gewählt und es gelte (2.2.14). Weil H_n den Grad n besitzt, bilden die H_n , $n \in \mathbb{N}_0$, eine Basis des reellen Vektorraumes der reellen Polynome. Insbesondere lässt sich jedes Monom x^n , $n \in \mathbb{N}_0$, als Linearkombinationen der H_k , $k \in (\mathbb{N}_0)_{\leq n}$, darstellen, so dass wegen (2.2.14) auch

$$0 = \langle f, x^n \rangle_\nu = \int f(x)x^n e^{-x^2} dx \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad (2.2.15)$$

gilt. Weil f messbar ist und

$$+\infty > \langle f, f \rangle_\nu = \int f^2 e^{-x^2} d\nu = \int (f e^{-\frac{1}{2}x^2})^2 d\nu$$

gilt, gehört die Funktion $g := f e^{-\frac{1}{2}x^2}$ zu $L^2(\lambda)$, wobei λ das eindimensionale Lebesgue-Maß bezeichnet. Wegen $|e^{-\frac{1}{2}x^2}| \leq 1$ gehört auch $h := g e^{-\frac{1}{2}x^2} = f e^{-x^2}$ zu $L^2(\lambda)$, so dass man die Fourier-Transformation auf h anwenden kann. Man erhält dann für festes $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{2\pi} \hat{h}(\xi) = \int h(x) e^{-ix\xi} dx = \int f(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\xi)^k}{k!} x^k e^{-x^2} dx.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ setze $s_n(x) := f(x) \sum_{k=0}^n \frac{(-i\xi)^k}{k!} x^k e^{-x^2}$. Die Funktionenfolge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert per Definition punktweise (überall) gegen die Funktion $h e^{-ix\xi}$. Ferner schätzt man ab:

$$|s_n(x)| \leq |f(x)| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\xi|^k}{k!} |x|^k e^{-x^2} = |g| e^{|\xi||x| - \frac{1}{2}x^2} =: u(x).$$

Weil die Funktionen g und $v(x) := e^{|\xi||x| - \frac{1}{2}x^2}$ zu $L^2(\lambda)$ gehören, liegt $u = gv$ nach der Cauchy-Schwartz-Ungleichung $\|u\|_{L^1(\lambda)} \leq \|g\|_{L^2(\lambda)} \|v\|_{L^2(\lambda)} < +\infty$ in $L^1(\lambda)$. Nach dem Satz von Lebesgue

über majorisierte Konvergenz konvergiert die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $L^1(\lambda)$ gegen $he^{-ix\xi}$. Insbesondere gilt für die Integrale:

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi}\hat{h}(\xi) &= \int h(x)e^{-ix\xi} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-i\xi)^k}{k!} \underbrace{\int f(x)x^k e^{-x^2} dx}_{=0, \text{ s. (2.2.15)}} = 0. \end{aligned}$$

Dies bedeutet aber $\hat{h} \equiv 0$ und die Injektivität der Fourier-Transformation liefert $0 = h = fe^{-x^2}$ und damit auch $f = 0$. ■

Anmerkung: Satz (2.2.3) ist gleichbedeutend damit, dass die Funktionen $\Psi_n(x) := H_n(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}$ eine orthogonale Schauder-Basis von $L^2(\lambda)$ bilden. Sie heißen Hermite-Funktionen und lösen die Differentialgleichungen $\Psi_n'' + (2n + 1 - x^2)\Psi_n = 0$. Die Hermite-Funktionen stellen deshalb die Eigenschwingungen des über die Schrödinger-Differentialgleichung beschriebenen sogenannten harmonischen Oszillators dar. Ist die Anregung - also die rechte Seite der Schrödinger-Differentialgleichung - eine $L^2(\lambda)$ -Funktion, so gehört die Lösung ebenfalls zu $L^2(\lambda)$ und aus der Basis-Eigenschaft der Ψ_n folgt, dass jene sich als Reihe in den Eigenschwingungen entwickeln lässt. Näheres findet man in jeder Einführung in die Quantentheorie, bei der Behandlung des harmonischen Oszillators, siehe aber z.B. auch [50] §40 S. 139-143.

Definition 2.2.4 (Hermite-Differentialgleichung) Für $\vartheta \in \mathbb{R}$ heißt die gewöhnliche, lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung (mit nicht konstanten Koeffizienten)

$$y'' - 2xy' + 2\vartheta y = 0 \quad (2.2.16)$$

Hermite-Differentialgleichung zum Parameter ϑ .

Die Hermite-Differentialgleichung zum Parameter ϑ kann auch als Beschreibung einer freien Schwingung einer Einheitsmasse mit linear wachsender Verstärkung (negativer Dämpfung) $-2x$ und einer - möglicherweise ebenfalls negativen - Federkonstanten 2ϑ angesehen werden.

Nach Satz 2.2.2 e) ist das Hermite-Polynom H_n eine Lösung der Hermite-Differentialgleichung zum Parameter $\vartheta = n \in \mathbb{N}_0$. Der folgende Satz sagt aus, dass es unter einer bestimmten Wachstumsbedingung bis auf multiplikative Vielfache keine weiteren Lösungen geben kann.

Satz 2.2.5 Es sei $\vartheta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

a) Die Funktionen

$$y_{0,\vartheta}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m}{(2m)!} \prod_{j=0}^{m-1} (2j - \vartheta) x^{2m} \quad (2.2.17)$$

$$y_{1,\vartheta}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m}{(2m+1)!} \prod_{j=0}^{m-1} (2j+1 - \vartheta) x^{2m+1}, \quad (2.2.18)$$

bilden ein Fundamentalsystem von Lösungen der Hermite-Differentialgleichung zum Parameter ϑ , d.h. jede Lösung y lässt sich als Linearkombination $y = c_0 y_{0,\vartheta} + c_1 y_{1,\vartheta}$ für geeignete $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ darstellen.

b) Falls $\vartheta = 2n \in 2\mathbb{N}_0$ eine gerade natürliche Zahl ist, gilt

$$y_{0,2n}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(2n)!} H_{2n}(x).$$

Falls $\vartheta = 2n + 1 \in 2\mathbb{N}_0 + 1$ eine ungerade natürliche Zahl ist, gilt

$$y_{0,2n+1}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2(2n+1)!} H_{2n+1}(x).$$

c) Für $\vartheta \notin 2\mathbb{N}_0$ und $r, s \in \mathbb{Z}$ mit $r > (\vartheta + 1)/2$, $s < (\vartheta - 1)/2$ gilt

$$O(x^{-2r} e^{x^2}) \leq O(y_{0,\vartheta}(x)) < O(x^{-2s} e^{x^2}), \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Für $\vartheta \notin 2\mathbb{N}_0 + 1$ und $r, s \in \mathbb{Z}$ mit $r > \vartheta/2 + 1$, $s < \vartheta/2$ gilt

$$O(x^{-2r+1} e^{x^2}) \leq O(y_{1,\vartheta}(x)) < O(x^{-2s+1} e^{x^2}), \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Beweis: [vgl. [50] §39 S.137 ff. und [27] Abschnitt 26.3 S.262]

a) Die Hermite-Differentialgleichung ist formal vom Typ

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0,$$

wobei $a(x) = -2x$ und $b(x) \equiv 2\vartheta$. Insbesondere sind die Koeffizientenfunktionen $a(x)$ und $b(x)$ Polynome und damit trivialerweise in Potenzreihe entwickelbar. Nach einem grundlegenden Sachverhalt gewöhnlicher Differentialgleichungen dieses Typs sind dann auch die Lösungen in Potenzreihe entwickelbar (s. [27] Satz 26.1 S.260). Man macht daher den Lösungsansatz

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k. \quad (2.2.19)$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= y''(x) - 2xy'(x) + 2\vartheta y(x) \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} - 2x \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} + 2\vartheta \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2} x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2k c_k x^k + 2\vartheta \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \\ &= (2c_2 + 2\vartheta c_0) + \sum_{k=1}^{\infty} ((k+2)(k+1)c_{k+2} - 2k c_k + 2\vartheta c_k) x^k \\ \Rightarrow c_{k+2} &= 2 \frac{k - \vartheta}{(k+1)(k+2)} c_k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

In dieser Rekursionsformel vermindert sich der Index in Zweier-Schritten, so dass man zwei Stränge erhält, wobei der eine für gerade Indizes auf c_0 und der andere für ungerade Indizes auf c_1 führt.

Diese beiden Startindices sind unabhängig voneinander und daher frei wählbar. Die Auflösung der Rekursion in eine explizite Darstellung lautet für $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} c_k &\stackrel{(2.2.20)}{=} 2 \frac{(k-2) - \vartheta}{k(k-1)} c_{k-2} = \dots = \prod_{j=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \left(2 \frac{(k-2j) - \vartheta}{(k-2j+2)(k-2j+1)} \right) c_{k-2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \\ &= \frac{2^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}}{k!} \prod_{j=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (k-2j - \vartheta) c_{k-2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

$$c_{2m} = \frac{2^m}{(2m)!} \prod_{j=1}^m (2(m-j) - \vartheta) c_0 = \frac{2^m}{(2m)!} \prod_{j=0}^{m-1} (2j - \vartheta) c_0 \quad (2.2.22)$$

$$c_{2m+1} = \frac{2^m}{(2m+1)!} \prod_{j=1}^m (2(m-j) + 1 - \vartheta) c_1 = \frac{2^m}{(2m+1)!} \prod_{j=0}^{m-1} (2j+1 - \vartheta) c_1 \quad (2.2.23)$$

für alle $m \in \mathbb{N}_0$ (man beachte, dass (2.2.22) und (2.2.23) auch für $m = 0$ gelten). Die Lösung $y(x)$ besitzt demnach folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m} x^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+1} x^{2m+1} \\ &= c_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m}{(2m)!} \prod_{j=0}^{m-1} (2j - \vartheta) x^{2m} + c_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m}{(2m+1)!} \prod_{j=0}^{m-1} (2j+1 - \vartheta) x^{2m+1}. \end{aligned}$$

Zwei spezielle Lösungen für $(c_0, c_1) = (1, 0)$ und $(c_0, c_1) = (0, 1)$ lauten dann

$$y_{0,\vartheta}(x) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m}{(2m)!} \prod_{j=0}^{m-1} (2j - \vartheta) x^{2m} \quad (2.2.24)$$

$$y_{1,\vartheta}(x) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m}{(2m+1)!} \prod_{j=0}^{m-1} (2j+1 - \vartheta) x^{2m+1}, \quad (2.2.25)$$

so dass $y = c_0 y_{0,\vartheta} + c_1 y_{1,\vartheta}$. Die Funktionen $y_{0,\vartheta}, y_{1,\vartheta}$ bilden also ein Fundamentalsystem für die Hermite-Differentialgleichung zum Parameter ϑ . Dabei ist $y_{0,\vartheta}$ eine gerade und $y_{1,\vartheta}$ eine ungerade Funktion.

b) Aus den Produkttermen auf den rechten Seiten von (2.2.24) und (2.2.25) liest man sofort ab, dass y genau dann ein Polynom ist, d.h. eine endliche Reihendarstellung besitzt, wenn einer der beiden folgenden Fälle vorliegt:

A) $\vartheta = 2n$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ und $c_1 = 0$.

B) $\vartheta = 2n + 1$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ und $c_0 = 0$.

Im Fall A) ist dann $y = c_0 y_{0,2n}$ und $y_{0,2n}$ muss ein Vielfaches des geraden Hermite-Polynoms H_{2n} sein, während im Fall B) $y = c_1 y_{1,2n}$ gilt, wobei $y_{1,2n}$ ein Vielfaches des ungeraden Hermite-Polynoms H_{2n+1} ist. Dies kann man aber auch direkt durch Umformen der Ausdrücke (2.2.24) und

(2.2.25) für $\vartheta = 2n$ bzw. $\vartheta = 2n + 1$ feststellen:

$$\begin{aligned}
y_{0,2n}(x) &\stackrel{(2.2.22)}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m}{(2m)!} \prod_{j=1}^m (2(m-j) - 2n) x^{2m} = \sum_{m=0}^n \frac{2^m}{(2m)!} \prod_{j=1}^m (2(m-j) - 2n) x^{2m} \\
&\stackrel{m \rightarrow n-m}{=} \sum_{m=0}^n \frac{2^{n-m}}{(2(n-m))!} \prod_{j=1}^{n-m} (2(n-m-j) - 2n) x^{2(n-m)} \\
&= \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^{n-m}}{(2(n-m))!} \prod_{j=1}^{n-m} (m+j) (2x)^{2(n-m)} = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^{n-m} n!}{(2(n-m))! m!} (2x)^{2(n-m)} \\
&= \frac{(-1)^n n!}{(2n)!} (2n)! \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m (2x)^{2n-2m}}{m! (2n-2m)!} \stackrel{(2.2.6)}{=} \frac{(-1)^n n!}{(2n)!} H_{2n}(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{1,2n+1}(x) &\stackrel{(2.2.23)}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m}{(2m+1)!} \prod_{j=1}^m (2(m-j) + 1 - (2n+1)) x^{2m+1} \\
&= \sum_{m=0}^n \frac{2^m}{(2m+1)!} \prod_{j=1}^m (2(m-j) + 1 - (2n+1)) x^{2m+1} \\
&\stackrel{m \rightarrow n-m}{=} \sum_{m=0}^n \frac{2^{n-m}}{(2(n-m)+1)!} \prod_{j=1}^{n-m} (2(n-m-j) + 1 - (2n+1)) x^{2(n-m)+1} \\
&= \frac{(-1)^n n!}{2(2n+1)!} (2n+1)! \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m (2x)^{2n+1-2m}}{m! (2n+1-2m)!} \stackrel{(2.2.6)}{=} \frac{(-1)^n n!}{2(2n+1)!} H_{2n+1}(x).
\end{aligned}$$

c) Die beiden Fälle $\vartheta \notin 2\mathbb{N}_0$ und $\vartheta \notin 2\mathbb{N}_0 + 1$ werden gemeinsam behandelt, um den Schreibaufwand in Grenzen zu halten. Hierfür sei ein Unterscheidungsindex $i \in \{0, 1\}$ fest gewählt und es gelte $\vartheta \notin 2\mathbb{N}_0 + i$. Wähle $r, s \in \mathbb{Z}$ mit $r > (\vartheta + 1 + i)/2$ und $s < (\vartheta - 1 + i)/2$ und betrachte die Potenzreihen

$$\begin{aligned}
f(x) &:= x^{-i} y_{i,\vartheta} = x^{-i} \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^{2n+i} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^{2n} \\
f_n &:= c_{2n+i} \\
g(x) &:= x^{-2r} e^{x^2} = x^{-2r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2(n-r)} = \sum_{n=-r}^{\infty} \frac{1}{(n+r)!} x^{2n} = \sum_{n=-r}^{\infty} g_n x^{2n} \\
g_n &:= \frac{1}{(n+r)!} > 0 \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}_{\geq -r} \\
h(x) &:= x^{-2s} e^{x^2} = \sum_{n=-s}^{\infty} h_n x^{2n} \\
h_n &:= \frac{1}{(n+s)!} > 0 \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}_{\geq -s}.
\end{aligned}$$

Die Reihenkoeffizienten erfüllen die Rekursion

$$\begin{aligned}
F_n &:= \frac{2(2n+i-\vartheta)}{(2n+i+1)(2n+i+2)} \neq 0 \quad , \text{ da } \vartheta \notin 2\mathbb{N}_0 + i \\
f_{n+1} &= c_{2(n+1)+j} \stackrel{(2.2.20)}{=} \frac{2(2n+i-\vartheta)}{(2n+i+1)(2n+i+2)} c_{2n+i} = \frac{2(2n+i-\vartheta)}{(2n+i+1)(2n+i+2)} f_n \\
&= F_n f_n \neq 0 \quad , \text{ da } F_n \neq 0 \text{ und } f_0 = 1 \\
G_n &:= \frac{1}{n+1+r} > 0 \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}_{\geq -r} \\
g_{n+1} &= \frac{1}{(n+1+r)!} = \frac{1}{n+1+r} \cdot \frac{1}{(n+r)!} = \frac{1}{n+1+r} g_n = G_n g_n \\
H_n &:= \frac{1}{n+1+s} > 0 \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}_{\geq -s} \\
h_{n+1} &= \frac{1}{(n+1+s)!} = \frac{1}{n+1+s} \cdot \frac{1}{(n+s)!} = \frac{1}{n+1+s} h_n = H_n h_n.
\end{aligned}$$

Als nächstes soll $F_n/G_n \geq 1$ und $F_n/H_n \leq 1 - \frac{1}{n}$ für hinreichend große n gezeigt werden. Hierfür werden zwei Äquivalenzumformungen vorgenommen, an deren Anfang jeweils die gesuchte Aussage und an deren Ende eine wahre Aussage für hinreichend große n stehen wird. Es sei dazu zunächst $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \max(|\vartheta|/2, |r|, |s|)$ gewählt, so dass $F_n, G_n, H_n > 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{F_n}{G_n} &= \frac{2(2n+i-\vartheta)}{(2n+i+1)(2n+i+2)} : \frac{1}{r+n+1} = \frac{2(2n+i-\vartheta)(r+n+1)}{(2n+i+1)(2n+i+2)} \stackrel{!}{\geq} 1 \\
\Leftrightarrow r+n+1 &\stackrel{!}{\geq} \frac{(2n+i+1)(2n+i+2)}{2(2n+i-\vartheta)} \\
\Leftrightarrow r &\geq \frac{(2n+i+1)(2n+i+2)}{2(2n+i-\vartheta)} - (n+1) = \frac{2(\vartheta+1+i)n + (i+1)(i+2) + 2(i-\vartheta)}{4n+2(i-\vartheta)} \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\vartheta+1+i}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{F_n}{H_n} &= \frac{2(2n+i-\vartheta)}{(2n+i+1)(2n+i+2)} : \frac{1}{s+n+1} = \frac{2(2n+i-\vartheta)(s+n+1)}{(2n+i+1)(2n+i+2)} \stackrel{!}{\leq} \frac{n-1}{n} \\
\Leftrightarrow s+n+1 &\stackrel{!}{\leq} \frac{(n-1)(2n+i+1)(2n+i+2)}{2n(2n+i-\vartheta)} \\
\Leftrightarrow s &\leq \frac{(n-1)(2n+i+1)(2n+i+2)}{2n(2n+i-\vartheta)} - (n+1) \\
&= \frac{2(\vartheta-1+i)n^2 + (i^2-3i-4+2\vartheta)n - (i+1)(i+2)}{4n^2+2(i-\vartheta)n} \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\vartheta-1+i}{2} .
\end{aligned}$$

Aus Lemma 2.1.11 folgt nun

$$\begin{aligned}
\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|g_n|} &\stackrel{2.1.11 \text{ b)}}{\in}]0, +\infty] \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{h_n} &\stackrel{2.1.11 \text{ a)}}{=} 0.
\end{aligned}$$

Gemäß Korollar 2.1.10 bedeutet dies einerseits

$$\begin{aligned} x^{-2r} e^{x^2} &= g(x) \stackrel{2.1.10 \text{ a),c)}}{=} O(f(x)) = O(x^{-i} y_{i,\vartheta}(x)), \quad |x| \rightarrow \infty \\ \Leftrightarrow x^{-2r+i} e^{x^2} &= O(y_{i,\vartheta}(x)), \quad |x| \rightarrow \infty \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} x^{-i} y_{i,\vartheta}(x) &= f(x) \stackrel{2.1.11 \text{ a)}}{=} o(h(x)) = o(x^{-2s} e^{x^2}), \quad |x| \rightarrow \infty \\ \Leftrightarrow y_{i,\vartheta}(x) &= o(x^{-2s+i} e^{x^2}), \quad |x| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

■

Es sei angemerkt, dass die Beweisskizze in dem Buch von Sneddon [50] §39 S.137 ff. fehlerhaft ist hinsichtlich der oben in Teil c) durchgeführten Ordnungsabschätzungen für die Fundamentallösungen $y_{i,\vartheta}$, $i \in \{0, 1\}$, $\vartheta \notin 2\mathbb{N}_0 + i$, die dort mit y_1, y_2 bezeichnet werden. Auf Seite 138 heißt es:

„... Mit anderen Worten, die höheren Glieder der Reihen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ unterscheiden sich von jenen für $\exp(x^2)$ nur durch multiplikative Konstanten γ_1, γ_2 . Daher gilt für große Werte von $|x|$

$$y_1(x) \sim \gamma_1 e^{x^2}, \quad y_2(x) \sim \gamma_2 e^{x^2},$$

da für solche Werte die niederen Terme unwesentlich sind. ...“

Korollar 2.2.6 *Es sei $y(x) \neq 0$ eine Lösung der Hermite-Differentialgleichung zum Parameter $\vartheta \in \mathbb{R}$. Falls $y(x)e^{-x^2}$ schnell fallend ist oder gleichbedeutend falls*

$$y(x) = O(x^{-n} e^{x^2}), \quad |x| \rightarrow \infty \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \quad (2.2.26)$$

so gilt $\vartheta \in \mathbb{N}_0$ und $y = cH_\vartheta$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

Beweis: Der Beweis erfolgt über Kontraposition. Schreibe $y(x) = c_1 y_{0,\vartheta}(x) + c_2 y_{1,\vartheta}(x)$ für geeignete $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ mit $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$. Falls $y(x)$ kein Hermite-Polynom ist, muss es nach Satz 2.2.5 b) mindestens ein $i \in \{0, 1\}$ geben, so dass $c_i \neq 0$ und $\vartheta \notin 2\mathbb{N}_0 + i$. Für ein solches i gilt gemäß Satz 2.2.5 c)

$$\begin{aligned} O(x^{-z} e^{x^2}) &\leq O(y_{i,\vartheta}(x)), \quad |x| \rightarrow \infty \\ \Rightarrow O(x^{-(|z|+1)} e^{x^2}) &< O(y_{i,\vartheta}(x)), \quad |x| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

für ein geeignetes $z \in \mathbb{Z}$. Die andere Fundamentallösungen $y_{j,\vartheta}$, $j \in \{0, 1\} \setminus \{i\}$, besitzt in jedem Fall die Eigenschaft

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |y_{j,\vartheta}(x)| = +\infty, \quad (2.2.28)$$

da es sich entweder um ein Polynom oder gemäß Satz 2.2.5 c) ebenfalls um eine exponentiell wachsende Funktionen handelt. Weil $y_{0,\vartheta}$ eine gerade und $y_{1,\vartheta}(x)$ eine ungerade Funktion ist trifft dies jeweils auch auf $c_1 y_{0,\vartheta}(x)$ und $c_2 y_{1,\vartheta}(x)$ zu, so dass diese beiden Funktionen (auch im Fall

$c_j = 0$) entweder für $x \rightarrow +\infty$ oder $x \rightarrow -\infty$ das gleiche Vorzeichen haben, weshalb nach (2.2.27) und (2.2.28) mindestens eine der beiden folgenden Bedingungen für $n := (|z| + 1) \in \mathbb{N}$ erfüllt ist:

$$\begin{aligned} O(x^{-n}e^{x^2}) &< O(y(x)), & x \rightarrow +\infty & \quad \text{oder} \\ O(x^{-n}e^{x^2}) &< O(y(x)), & x \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

In jedem Fall ist die Bedingung (2.2.26) verletzt. ■

Betrachtet man den linearen Differentialoperator $L[f](x) := -\frac{1}{2}f''(x) + xf'(x)$, so besitzen gerade die Lösungen y der Hermite-Differentialgleichung zum Parameter $\vartheta \in \mathbb{R}$ die Eigenschaft $L(y) = \vartheta y$, d.h. sie sind Eigenfunktionen von L zum Eigenwert ϑ . Da es zu jedem $\vartheta \in \mathbb{R}$ Lösungen der Hermite-Differentialgleichung gibt, besitzt L in diesem Sinne ein kontinuierliches Spektrum nämlich ganz \mathbb{R} . Korollar 2.2.6 besagt, dass L unter der Wachstumsbedingung (2.2.26) ein diskretes Spektrum besitzt - nämlich \mathbb{N}_0 - und die Hermite-Polynome H_n , $n \in \mathbb{N}_0$, Eigenfunktionen von L sind, welche die eindimensionalen Eigenräume von L zum Eigenwert n aufspannen.

Die Abzählbarkeit des Spektrums von L lässt sich auch funktionalanalytisch mittels geeigneter Spektralsätze einsehen. L ist unbeschränkt und auf einem dichten Unterraum des Hilbertraumes $L^2(e^{-x^2}dx)$ definiert und dort symmetrisch. Man kann dann das Standardverfahren der Cayley-Transformation anwenden. Eine letztendlich auf das gleiche hinauslaufende, etwas direktere Vorgehensweise ist die Transformation auf ein Sturm-Liouville-Problem, wie sie letztendlich implizit im folgenden Abschnitt stattfindet: Multipliziert man eine Lösung y der Hermite-Differentialgleichung zum Parameter ϑ mit $e^{\frac{1}{2}x^2}$, so erfüllt die neu gewonnene Funktion $z := ye^{\frac{1}{2}x^2}$, die Differentialgleichung

$$z'' - (1 + x^2)z + 2\vartheta z = 0. \quad (2.2.29)$$

Die Funktionen $p := 1 > 0$, $q := -(1 + x^2) \leq -1 < 0$, $r := 2 > 0$ erfüllen also

$$(pz')' + qz + \vartheta rz = 0,$$

so dass es sich um ein klassisches Sturm-Liouville-Eigenwertproblem handelt, bei dem man auf kanonische Weise auf einen zugehörigen kompakten Integral-Operator (Fredholm-Operator) wechseln kann. Die Aussagen der oben erwähnten Spektralsätze lassen sich für diesen dann elementar herleiten.

Der benötigte Begriffsapparat ist für jede dieser beiden übergeordneten Sichtweisen etwas aufwendig und man bekommt letztendlich keine neuen Informationen, so dass auf eine genaue Ausführung verzichtet wird.

2.3 Fehlerfunktion

Häufig werden Lösungen der Wärmeleitungsgleichung, die im nächsten Abschnitt behandelt werden, mittels der sogenannten Fehlerfunktion und deren Ableitungen beschrieben, welche in einem einfachen multiplikativen Zusammenhang mit den Hermite-Polynomen des vorherigen Abschnittes stehen.

Definition 2.3.1 (Fehlerfunktion, komplementäre Fehlerfunktion) Die Funktionen

$$\begin{aligned}\operatorname{erf} &: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow [0, 1], & x &\mapsto \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy \\ \operatorname{erfc} &: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow [0, 1], & \operatorname{erfc}(x) &= 1 - \operatorname{erf}(x)\end{aligned}$$

heißen Fehlerfunktion (engl.: error function) bzw. komplementäre Fehlerfunktion (engl.: complementary error function). Die n -te Ableitung der Fehlerfunktion sei mit

$$\Phi_n := \frac{\partial^n \operatorname{erf}}{\partial x^n} \quad (2.3.1)$$

bezeichnet.

Eine Motivation der Fehlerfunktion im Zusammenhang mit der Lösung der Wärmeleitungsgleichung einer einseitig sprunghaft erwärmten, halbbunendlichen Wand findet man in [7] §2.1, S.50 f. oder in [24] Abschnitt 5.5 S.31-33. Die Graphen der Funktionen Φ_n , $n = 1, \dots, 6$, sind in den Abbildungen 2.3 und 2.4 dargestellt.

Lemma 2.3.2 Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\Phi_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} H_{n-1}(x) \quad (2.3.2)$$

$$= (-1)^{n-1} \Phi_1(x) H_{n-1}(x), \quad (2.3.3)$$

wobei H_n das n -te Hermite-Polynom bezeichne. Insbesondere ist dann

$$\Phi_1(x) = \operatorname{erf}'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \quad (2.3.4)$$

und für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist Φ_n exponentiell fallend.

Beweis: Für $n = 1$ folgt direkt aus (2.3.1)

$$\Phi_1(x) = \operatorname{erf}'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \stackrel{(2.2.2)}{=} \Phi_1(x) H_0(x).$$

Für $n > 1$ erhält man daraus mit Hilfe der Definition (2.2.1) der Hermite-Polynome sofort

$$H_{n-1}(x) = (-1)^{n-1} e^{x^2} \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} e^{-x^2} = (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2} \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \Phi_1(x) = (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2} \Phi_n(x). \blacksquare$$

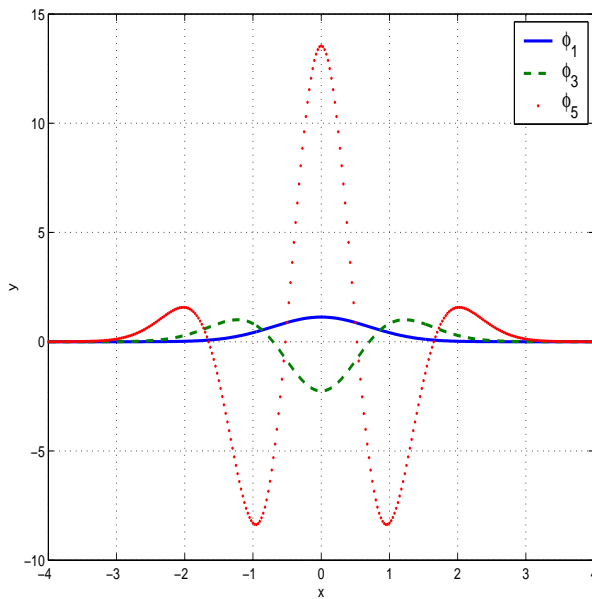
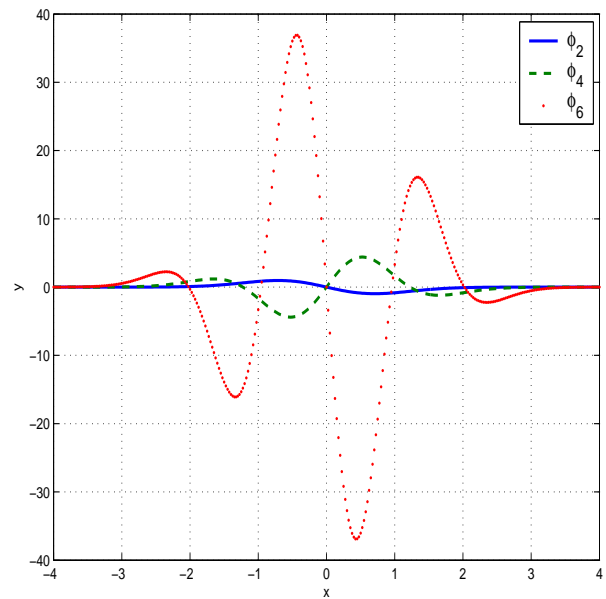
Die in Satz 2.2.2 angegebenen Eigenschaften der Hermite-Polynome übertragen sich nun auf die Funktionen Φ_n . Einige werden in dem folgenden Korollar explizit aufgeführt.

Korollar 2.3.3 a) Es gilt

$$\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x) \quad (2.3.5)$$

$$\Phi_n(-x) = (-1)^{n-1} \Phi_n(x) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \quad (2.3.6)$$

d.h. erf ist eine ungerade Funktion, für ungerades n ist Φ_n eine gerade Funktion und für gerades n eine ungerade.

Abbildung 2.3: gerade Φ_n Abbildung 2.4: ungerade Φ_n

- b) Es sei $\mu := e^{x^2} \lambda$ das Maß mit der Dichte e^{x^2} bezüglich des (eindimensionalen) Lebesgue-Maßes λ und

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_\mu : L^2(\mu) \times L^2(\mu) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle g, h \rangle_\mu := \int gh \, d\mu = \int g(x)h(x) e^{x^2} \, dx$$

das kanonische Skalarprodukt auf $L^2(\mu)$. Die Funktionen Φ_k , $k \in \mathbb{N}$, bilden eine orthogonale Schauder-Basis von $L^2(\mu)$. Für $k, j \in \mathbb{N}$ gilt

$$\langle \Phi_k, \Phi_j \rangle_\mu = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } k \neq j \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{k+1} (k-1)! & , \text{ falls } k = j. \end{cases} \quad (2.3.7)$$

Beweis: a) Folgt sofort aus (2.3.1), (2.3.2) und (2.2.12) und b) aus (2.3.2), (2.2.11) und Satz 2.2.3. ■

Für weitere, hier nicht benötigte Formeln zur Fehlerfunktion sei wiederum auf [46] Abschnitt 9.2.3 S.349 verwiesen.

Die Funktionen Φ_n erfüllen eine der Hermite-Differentialgleichung entsprechende Differentialgleichung, so dass sich die Ergebnisse über jene aus dem vorherigen Abschnitt direkt übertragen lassen. Wir benötigen allerdings nur:

Korollar 2.3.4 Es seien $\vartheta \in \mathbb{R}$ und h eine schnell fallende Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$h'' + 2xh' + 2\vartheta h = 0. \quad (2.3.8)$$

Dann gilt $\vartheta \in \mathbb{N}$ und $f = c\Phi_\vartheta$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

Beweis: Weil h schnell fallend ist, erfüllt die Funktion $y(x) := he^{x^2}$ die Wachstumsbedingung (2.2.26) aus Korollar 2.2.6. Außerdem löst sie die Hermite-Differentialgleichung zum Parameter

$\vartheta - 1$, denn

$$\begin{aligned} y'' - 2xy' + 2(\vartheta - 1)y &= (h'' + 2h + 4xh' + 4x^2)e^{x^2} - 2x(h' + 2xh)e^{x^2} + 2\vartheta he^{x^2} \\ &= (h'' + 2xh' + 2\vartheta h)e^{x^2} = 0. \end{aligned}$$

Gemäß Korollar 2.2.6 gilt dann $\vartheta - 1 \in \mathbb{N}_0$ und $y = cH_{\vartheta-1}$ also $\vartheta \in \mathbb{N}$ und

$$h = cH_{\vartheta-1}e^{-x^2} \stackrel{(2.3.2)}{=} c(-1)^{\vartheta-1} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Phi_{\vartheta} .$$

■

Die Differentialgleichung (2.3.8) soll aufgrund von Korollar (2.3.4) Fehlerfunktion-Differentialgleichung zum Parameter ϑ genannt werden. Man kann sie wie die Hermite-Differentialgleichungen als Beschreibung einer freien Schwingung einer Einheitsmasse mit linear wachsender Dämpfung $2x$ und einer Federkonstanten 2ϑ auffassen. Man beachte, dass die Fehlerfunktion erf selbst die Differentialgleichung $y'' - 2xy' = 0$ erfüllt und damit die Fehlerfunktion-Differentialgleichung zum Parameter $\vartheta = 0$ löst.

Für $k, l \in \mathbb{N}$ gehören $\Phi_k \Phi_l$ und

$$\frac{\partial^j \Phi_k \Phi_l}{\partial x^j} = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \frac{\partial^i \Phi_k}{\partial x^i} \frac{\partial^{j-i} \Phi_l}{\partial x^{j-i}} = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \Phi_{k+i} \Phi_{l+j-i}$$

zu $L^2(\mu)$. Das folgende Lemma macht eine Aussage über die Basiskoeffizienten $\langle \Phi_k \Phi_l, \Phi_n \rangle_{\mu}$ und $\langle \frac{\partial^j \Phi_k \Phi_l}{\partial x^j}, \Phi_n \rangle_{\mu}$.

Lemma 2.3.5 a) Für $h \in L^2(\mu)$ mit $h(x) = (-1)^j h(-x)$, $j \in \{0, 1\}$, und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\langle h, \Phi_n \rangle_{\mu} = (-1)^{n+j+1} \langle h, \Phi_n \rangle_{\mu} ,$$

d.h. $\langle h, \Phi_n \rangle_{\mu} = 0$ für gerades $n + j$.

b) Für $k \in \mathbb{N}_0$, $l, n \in \mathbb{N}$, $\Phi_0 := \text{erf}$ gilt $\langle \Phi_k \Phi_l, \Phi_n \rangle_{\mu} = (-1)^{n+j+1} \langle \Phi_k \Phi_l, \Phi_n \rangle_{\mu}$, d.h. $\langle \Phi_k \Phi_l, \Phi_n \rangle_{\mu} = 0$ für gerades $n + k + l$.

c) Ist $h \in L^2(\mu)$ eine j -mal stetig differenzierbare Funktion, $j \in \mathbb{N}$, deren Ableitungen bis zur Ordnung j ebenfalls zu $L^2(\mu)$ gehören, so gilt

$$\frac{\langle \frac{\partial^j h}{\partial x^j}, \Phi_n \rangle_{\mu}}{\|\Phi_n\|_{\mu}^2} = \frac{\langle h, \Phi_{n-j} \rangle_{\mu}}{\|\Phi_{n-j}\|_{\mu}^2}, \quad (2.3.9)$$

wobei $\Phi_{n-j} := 0$ für $n \leq j$.

d) Für $j, k, l, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left\langle \frac{\partial^j \Phi_k \Phi_l}{\partial x^j}, \Phi_n \right\rangle_{\mu} = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \leq j \\ 2^j \frac{(n-1)!}{(n-j-1)!} \langle \Phi_k \Phi_l, \Phi_{n-j} \rangle & \text{falls } n \geq j. \end{cases}$$

Insbesondere ist $\langle \frac{\partial^j \Phi_k \Phi_l}{\partial x^j}, \Phi_n \rangle_{\mu} = 0$ für gerades $n + k + l - j$.

Beweis: a) Nach Korollar 2.3.3 b) gilt

$$\begin{aligned}
 h(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, \Phi_n \rangle_{\mu} / \|\Phi_n\|_{\mu}^2 \Phi_n(x) = \\
 (-1)^j h(-x) &= (-1)^j \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, \Phi_n \rangle_{\mu} / \|\Phi_n\|_{\mu}^2 \Phi_n(-x) \\
 &\stackrel{(2.3.6)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, \Phi_n \rangle_{\mu} / \|\Phi_n\|_{\mu}^2 (-1)^{n+j+1} \Phi_n(x).
 \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt $\langle h, \Phi_n \rangle_{\mu} = (-1)^{n+j+1} \langle h, \Phi_n \rangle_{\mu}$.

b) Folgt sofort aus a) mit $h = \Phi_k \Phi_l$, $j := (k+l) \bmod 2$ und Korollar 2.3.3 a) .

c) Man stellt h und $\frac{\partial^j h}{\partial x^j}$ als Reihe bezüglich der Schauder-Basis $\{\Phi_n; n \in \mathbb{N}\}$ des $L^2(\mu)$ dar:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^j h}{\partial x^j} &= \frac{\partial^j}{\partial x^j} \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, \Phi_n \rangle_{\mu} / \|\Phi_n\|_{\mu}^2 \Phi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, \Phi_n \rangle_{\mu} / \|\Phi_n\|_{\mu}^2 \frac{\partial^j}{\partial x^j} \Phi_n x^j \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, \Phi_n \rangle_{\mu} / \|\Phi_n\|_{\mu}^2 \Phi_{n+j} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \frac{\partial^j h}{\partial x^j}, \Phi_n \rangle_{\mu} / \|\Phi_n\|_{\mu}^2 \Phi_n.
 \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich der beiden Reihen aus der letzten Zeile ergibt die gewünschte Gleichung (2.3.9).

d) Setzt man $h := \Phi_k \Phi_l$, so folgt aus c):

$$\begin{aligned}
 \langle \frac{\partial^j \Phi_k \Phi_l}{\partial x^j}, \Phi_n \rangle_{\mu} &= \frac{\|\Phi_n\|}{\|\Phi_{n-j}\|} \langle \Phi_k \Phi_l, \Phi_{n-j} \rangle \stackrel{(2.3.7)}{=} \frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{n+1} (n-1)!}{\frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{n-j+1} (n-j-1)!} \langle \Phi_k \Phi_l, \Phi_{n-j} \rangle \\
 &= 2^j \frac{(n-1)!}{(n-j-1)!} \langle \Phi_k \Phi_l, \Phi_{n-j} \rangle.
 \end{aligned}$$

Der letzte Teil der Behauptung folgt sofort aus b). ■

2.4 Homogene Wärmeleitungsgleichung auf dem Ganzraum

Satz 2.4.1 Für $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich die eindeutig bestimmte Lösung $u(x, t) \in C_2^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{>0})$ der homogenen Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}_{>0} \quad (2.4.1)$$

$$u = g \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n, t = 0. \quad (2.4.2)$$

$$|u(x, t)| \leq A e^{a|x|^2} \quad \text{für geeignete Konstanten } a, A \in \mathbb{R}_{>0} \quad (2.4.3)$$

als Faltung der Fundamentallösung

$$\Phi(x, t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}_{>0} \\ 0 & x \in \mathbb{R}^n, t = 0 \end{cases} \quad (2.4.4)$$

mit der Anfangsbedingung g aus (2.4.2), wobei g als hinreichend regulär vorausgesetzt sei

$$g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (2.4.5)$$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= (\Phi * g)(x, t) := \int_{y \in \mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) g(y) dy \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{y \in \mathbb{R}^n} g(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy. \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Beweis: s. [14] Kapitel 2.3. Theorem 1 S.47, Theorem 7 S.58. ■

Bemerkung 2.4.2 Häufig wird in der Wärmeleitungsgleichung (2.4.1) zusätzlich eine Temperaturleitfähigkeit $a \in \mathbb{R}_{>0}$ angegeben, d.h. $u_t - a\Delta u = 0$. Diese lässt sich aber durch die Umskalierung der Raumvariablen $x \in \mathbb{R}^n$ auf 1 normieren. Setzt man nämlich $\bar{x} := \frac{1}{\sqrt{a}}x$, $\bar{u}(\bar{x}, t) := u(x, t)$, so gilt $\Delta_{\bar{x}}\bar{u} = a\Delta_x u$ und damit $\bar{u}_t - \Delta_{\bar{x}}\bar{u} = 0$. Die Anfangsbedingung (2.4.2) transformiert sich dabei zu $\bar{u}(\bar{x}, 0) = u(x, 0) = g(x) = g(\sqrt{a}\bar{x}) =: \bar{g}(\bar{x})$.

Die Ganzraumlösung $u(x, t)$ besitzt für integrierbare Anfangsbedingung g eine Erhaltungseigenschaft bezüglich der L^1 -Norm. Ferner ist sie beschränkt und nimmt ihr Maximum bei $t = 0$ an.

Lemma 2.4.3 Es seien $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $u(x, t)$ die Lösung des Anfangswertproblems (2.4.1), (2.4.2), (2.4.3).

a) Falls $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so gilt

$$\int_{x \in \mathbb{R}^n} u(x, t) dx = \int_{x \in \mathbb{R}^n} g(x) dx \quad (2.4.7)$$

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad (2.4.8)$$

für alle $t \in \mathbb{R}_{>0}$.

b) $\|u(\cdot, t)\|_\infty \leq \|g\|_\infty$ für alle $t \in \mathbb{R}_{>0}$.

Beweis: a) Es sei $t \in \mathbb{R}_{>0}$. Die Fundamentallösung ist die Wahrscheinlichkeitsdichte der n -dimensionalen Normalverteilung $\mathcal{N}(0, 2tI_n)$ mit Erwartungswert 0 und Kovarianzmatrix $2tI_n$, wobei I_n die n -dimensionale Einheitsmatrix bezeichne. Demzufolge ist das Integral der Fundamentallösung 1 (s. [14] Abschnitt 2.3. S.46):

$$\int_{x \in \mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dx = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{x \in \mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{z \in \mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} dz = \frac{1}{\pi^{n/2}} \prod_{i=1}^n \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z_i^2} dz_i}_{=\sqrt{\pi}} = 1.$$

Hieraus ergibt sich sofort Gleichung (2.4.7):

$$\begin{aligned} \int_{x \in \mathbb{R}^n} u(x, t) dx &= \int_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{y \in \mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) g(y) dy dx \\ &= \int_{y \in \mathbb{R}^n} \underbrace{\int_{x \in \mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) dx}_{=1} g(y) dy \\ &= \int_{y \in \mathbb{R}^n} g(y) dy. \end{aligned}$$

Gleichung (2.4.8) folgt aus (2.4.7) mit $|g|$ anstelle von g .

b) Für $x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}_{>0}$ berechnet man

$$|u(x, t)| = \left| \int_{y \in \mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) g(y) dy \right| \leq \|g\|_\infty \underbrace{\int_{y \in \mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) dy}_{=1} = \|g\|_\infty,$$

so dass $\|u(\cdot, t)\| \leq \|g\|_\infty$. ■

Definition 2.4.4 (Ähnlichkeitsvariable, Ähnlichkeitstransformation) Für $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$ heiÙe

$$\tilde{x} := \tilde{x}(x, t) := \frac{x}{\sqrt{4t}} \quad (2.4.9)$$

die zu (x, t) gehörende Ähnlichkeitsvariable. Ist $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto u(x, t)$ eine Funktion, so heiÙt

$$\tilde{u} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, (\tilde{x}, t) \mapsto u(\sqrt{4t}\tilde{x}, t) \quad (2.4.10)$$

$$\Leftrightarrow u(x, t) = \tilde{u}(\tilde{x}(x, t), t) = \tilde{u}(\tilde{x}, t). \quad (2.4.11)$$

die Ähnlichkeitstransformation von u .

Merkhilfe: Das Symbol „ \sim “ wurde zur Indizierung der Ähnlichkeitstransformation gewählt, weil der L^AT_EX-Befehl für jenes Zeichen „\sim“= „similar“ lautet, in der Hoffnung, dass man sich so die Bedeutung für den weiteren Verlauf des Textes gut merken kann.

Bemerkung 2.4.5 Für eine hinreichend oft partiell differenzierbare Funktion $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto u(x, t)$ bestehen folgende Zusammenhänge zwischen den partiellen Ableitungen von $u(x, t)$ und denen der Ähnlichkeitstransformierten $\tilde{u}(\tilde{x}, t), \tilde{x} = \frac{x}{\sqrt{4t}}$:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x, t) = (4t)^{-\frac{n}{2}} \frac{\partial^n \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^n}(\tilde{x}, t) \quad (2.4.12)$$

$$u_t(x, t) = -\frac{1}{2t} \tilde{x} \tilde{u}_{\tilde{x}}(\tilde{x}, t) + \tilde{u}_t(\tilde{x}, t). \quad (2.4.13)$$

Insbesondere lautet die eindimensionale, inhomogene Wärmeleitungsgleichung in Ähnlichkeitsvariablen mit Inhomogenität $-F(x, t)$ und Anfangsbedingung $f(x)$ zu einem Zeitpunkt $t_0 > 0$:

$$-F(x, t) = (u_t - u_{xx})(x, t) = -\frac{1}{2t} \tilde{x} \tilde{u}_{\tilde{x}}(\tilde{x}, t) + \tilde{u}_t(\tilde{x}, t) - \frac{1}{4t} \tilde{x} \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}(\tilde{x}, t) \quad (2.4.14)$$

$$f(x) = u(x, t_0) \quad (2.4.15)$$

\Leftrightarrow

$$-4t\tilde{F}(\tilde{x}, t) = -4tF(\sqrt{4t}\tilde{x}, t) = 4t\tilde{u}_t(\tilde{x}, t) - 2\tilde{x}\tilde{u}_{\tilde{x}}(\tilde{x}, t) - \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}(\tilde{x}, t). \quad (2.4.16)$$

$$\tilde{f}(\tilde{x}) := f(\sqrt{4t_0}\tilde{x}) = \tilde{u}(\tilde{x}, t_0). \quad (2.4.17)$$

Beweis:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x, t) \stackrel{(2.4.11)}{=} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \tilde{u}\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}, t\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{4t}}\right)^n \tilde{u}_{\tilde{x}^n}\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}, t\right) = (4t)^{-\frac{n}{2}} \tilde{u}_{\tilde{x}^n}(\tilde{x}, t)$$

$$u_t(x, t) \stackrel{(2.4.11)}{=} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{u}\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}, t\right) = \frac{-x}{2t\sqrt{4t}} \tilde{u}_{\tilde{x}}(\tilde{x}, t) + \tilde{u}_t(\tilde{x}, t) = -\frac{1}{2t} \tilde{x} \tilde{u}_{\tilde{x}}(\tilde{x}, t) + \tilde{u}_t(\tilde{x}, t). \quad \blacksquare$$

Für schnell fallende Anfangsbedingungen g kann man auf kanonische Weise eine asymptotische Entwicklung der Lösung der eindimensionalen, homogenen Wärmeleitungsgleichung angeben. Diese wird im nächsten Kapitel zur Berechnung von Fernfeldern von zweidimensionalen Nachlaufströmungen benutzt, weswegen hier eine detaillierte Herleitung erfolgt - siehe hierzu [54], S.329 Gleichung (2.5), S.332 Gleichung (3.1). [Anmerkung: In [54], S.329 Gleichung (2.5) sind zwei Druckfehler. In der ersten Zeile der Gleichung muss unter dem Integral \bar{y}^{n-1} statt y^{n-1} stehen. In der dritten und letzten Zeile der Formel muss es $\int_{-\infty}^0 \dots$ statt $\int_0^\infty \dots$ heißen. Beide Fehler haben aber keine negativen Auswirkungen auf nachfolgende Schlüsse.] Für den Beweis des nachfolgenden Satzes sei zunächst an die Rechenregel zur Ableitung von parameterabhängigen Integralen mit variablen Grenzen erinnert.

Rechenregel 2.4.6 *Es seien $A, B, c, d \in \mathbb{R}$, $A < B$, $c < d$. Die Funktion*

$$f : [A, B] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, t) \mapsto f(x, t)$$

sei stetig und stetig differenzierbar bezüglich der zweiten Variablen t . Sind $a, b : [c, d] \rightarrow [A, B]$ differenzierbare Funktionen, so ist auch

$$I : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx$$

differenzierbar und die Ableitung lautet

$$\frac{\partial I}{\partial t}(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx + f(b(t), t)b'(t) - f(a(t), t)a'(t). \quad (2.4.18)$$

Beweis: s. [53] Satz A.4 S. 421. ■

Satz 2.4.7 a) *Die Gleichung (2.4.6) lässt sich in*

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{4t}} \int g(y) \Phi_1 \left(\frac{y-x}{\sqrt{4t}} \right) dy \quad (2.4.19)$$

$$= \frac{1}{2} \int g(\sqrt{4t}\xi + x) \Phi_1(\xi) d\xi \quad (2.4.20)$$

umformen.

b) *Es sei $g \in L^1(\mathbb{R})$ schnell fallend und erfülle (2.4.5). Für jedes $N \in \mathbb{N}$ besitzt die Lösung (2.4.6) der eindimensionalen, homogenen Wärmeleitungsgleichung die folgende Darstellung:*

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{2(4t)^{k/2}(k-1)!} \Phi_k \left(\frac{-x}{\sqrt{4t}} \right) \int y^{k-1} g(y) dy \\ &+ \frac{1}{2(4t)^{(N+1)/2}(N-1)!} \left(\int_0^\infty \Phi_{N+1} \left(\frac{z-x}{\sqrt{4t}} \right) \int_z^\infty (y-z)^{N-1} g(y) dy dz \right. \\ &\left. - \int_{-\infty}^0 \Phi_{N+1} \left(\frac{z-x}{\sqrt{4t}} \right) \int_{-\infty}^z (y-z)^{N-1} g(y) dy dz \right). \end{aligned} \quad (2.4.21)$$

c) Durch (2.4.21) wird eine bezüglich der Ähnlichkeitsvariablen $\tilde{x} := \frac{x}{\sqrt{4t}}$ gleichmäßige asymptotische Entwicklung von $\tilde{u}(\tilde{x}, t) := u(\sqrt{4t}\tilde{x}, t)$ zur asymptotischen Folge $(t^{-k/2})_{k \in \mathbb{N}}$ für große Zeiten $t \rightarrow \infty$ definiert, d.h.

$$\tilde{u}(\tilde{x}, t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2(4t)^{k/2}(k-1)!} \Phi_k(\tilde{x}) \int y^{k-1} g(y) dy, \quad t \rightarrow \infty \quad (2.4.22)$$

gleichmäßig für alle $\tilde{x} \in \mathbb{R}$. Der erste Term der Entwicklung lautet

$$\tilde{u}(\tilde{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\tilde{x}^2} \int g(y) dy + O(t^{-3/2}) \quad (2.4.23)$$

$$\text{bzw. } u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \int g(y) dy + O(t^{-3/2}). \quad (2.4.24)$$

Beweis: a) Für festes $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$ betrachte man die Variablentransformation

$$\xi(y) = \xi_{x,t}(y) := \frac{y-x}{\sqrt{4t}}. \quad (2.4.25)$$

Dann ist $\xi'(y) = \frac{1}{\sqrt{4t}}$ und man berechnet

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int g(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy = \frac{1}{2\sqrt{4t}} \int g(y) \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy \\ &\stackrel{(2.3.4)}{=} \frac{1}{2\sqrt{4t}} \int g(y) \Phi_1\left(\frac{y-x}{\sqrt{4t}}\right) dy = \frac{1}{2} \int g(\sqrt{4t}\xi(y) + x) \Phi_1(\xi(y)) \xi'(y) dy \\ &= \frac{1}{2} \int g(\sqrt{4t}\xi + x) \Phi_1(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

b) Vorweg sei angemerkt, dass - weil die Funktionen $g, \Phi_{N+1} \in L^1(\mathbb{R})$ schnell fallend sind - alle auf der rechten Seite von Gleichung (2.4.19) auftretenden Integrale gemäß Korollar 2.1.8 wohldefiniert und endlich sind.

Induktionsanfang: $N = 1$. Man führt eine partielle Integration von Gleichung (2.4.19) durch:

$$\begin{aligned}
2\sqrt{4t} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(z) \Phi_1\left(\frac{z-x}{\sqrt{4t}}\right) dz = \int_0^{\infty} \underbrace{g(z)}_{=:a'} \underbrace{\Phi_1\left(\frac{z-x}{\sqrt{4t}}\right)}_{=:b} dz + \int_{-\infty}^0 \underbrace{g(z)}_{=:a'} \underbrace{\Phi_1\left(\frac{z-x}{\sqrt{4t}}\right)}_{=:b} dz \\
&= \left[\int_z^{\infty} -g(y) dy \Phi_1\left(\frac{z-x}{\sqrt{4t}}\right) \right]_{z=0}^{z=\infty} - \int_0^{\infty} \int_z^{\infty} -g(y) dy \frac{1}{\sqrt{4t}} \Phi_2\left(\frac{z-x}{\sqrt{4t}}\right) dz \\
&\quad + \left[\int_{-\infty}^z g(y) dy \Phi_1\left(\frac{z-x}{\sqrt{4t}}\right) \right]_{z=-\infty}^{z=0} - \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^z g(y) dy \frac{-1}{\sqrt{4t}} \Phi_2\left(\frac{z-x}{\sqrt{4t}}\right) dz \\
&= \lim_{z \rightarrow \infty} \underbrace{\left[\int_z^{\infty} -g(y) dy \Phi_1\left(\frac{z-x}{\sqrt{4t}}\right) \right]}_{\rightarrow 0} + \int_0^{\infty} g(y) dy \Phi_1\left(\frac{-x}{\sqrt{4t}}\right) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{4t}} \int_0^{\infty} \int_z^{\infty} g(y) dy \Phi_2\left(\frac{z-x}{\sqrt{4t}}\right) dz + \int_{-\infty}^0 g(y) dy \Phi_1\left(\frac{-x}{\sqrt{4t}}\right) \\
&\quad - \lim_{z \rightarrow -\infty} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^z g(y) dy \Phi_1\left(\frac{z-x}{\sqrt{4t}}\right) \right]}_{\rightarrow 0} - \frac{1}{\sqrt{4t}} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^z g(y) dy \Phi_2\left(\frac{z-x}{\sqrt{4t}}\right) dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy \Phi_1\left(\frac{-x}{\sqrt{4t}}\right) + \frac{1}{\sqrt{4t}} \left(\int_0^{\infty} \int_z^{\infty} g(y) dy \Phi_2\left(\frac{z-x}{\sqrt{4t}}\right) \right. \\
&\quad \left. - \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^z g(y) dy \Phi_2\left(\frac{z-x}{\sqrt{4t}}\right) dz \right).
\end{aligned}$$

Teilt man jetzt noch beide Seiten durch $2\sqrt{4t}$, so erhält man

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{4t}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy \Phi_1\left(\frac{-x}{\sqrt{4t}}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2(4t)} \left(\int_0^{\infty} \int_z^{\infty} g(y) dy \Phi_2\left(\frac{z-x}{\sqrt{4t}}\right) - \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^z g(y) dy \Phi_2\left(\frac{z-x}{\sqrt{4t}}\right) dz \right).
\end{aligned}$$

Das ist Gleichung (2.4.21) für $N = 1$.

Induktionsschritt: $N \Rightarrow N + 1$. Die Gleichung (2.4.21) gelte für N . Mit der Rechenregel (2.4.18) auf Seite 46 für Integralfunktionen mit variablen Integrationsgrenzen berechnet man

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} \int_z^{\infty} \frac{(y-z)^N}{N} g(y) dy &= - \int_z^{\infty} (y-z)^{N-1} g(y) dy - \frac{(z-z)^N}{N} g(z) \\
&= - \int_z^{\infty} (y-z)^{N-1} g(y) dy \tag{2.4.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^z \frac{(y-z)^N}{N} g(y) dy &= - \int_{-\infty}^z (y-z)^{N-1} g(y) dy + \frac{(z-z)^N}{N} g(z) \\
&= - \int_{-\infty}^z (y-z)^{N-1} g(y) dy \quad . \tag{2.4.27}
\end{aligned}$$

Die Integrale des Restgliedes $R_N(x, t)$ der rechten Seite von (2.4.21) werden ähnlich wie im Induktionsanfang partiell integriert:

$$\begin{aligned}
R_{N,1}(x, t) &:= \int_0^\infty \underbrace{\Phi_{N+1}\left(\frac{z-x}{\sqrt{4t}}\right)}_{=:a} \underbrace{\int_z^\infty (y-z)^{N-1} g(y) dy dz}_{=:b'} & (2.4.28) \\
&\stackrel{(2.4.26)}{=} \left[\Phi_{N+1}\left(\frac{z-x}{\sqrt{4t}}\right) \int_z^\infty \frac{-(y-z)^N}{N} g(y) dy \right]_{z=0}^{z=\infty} \\
&\quad - \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{4t}} \Phi_{N+2}\left(\frac{z-x}{\sqrt{4t}}\right) \int_z^\infty \frac{-(y-z)^N}{N} g(y) dy dz \\
&= - \lim_{z \rightarrow \infty} \underbrace{\left[\Phi_{N+1}\left(\frac{z-x}{\sqrt{4t}}\right) \int_z^\infty \frac{(y-z)^N}{N} g(y) dy \right]}_{\rightarrow 0 \quad (2.1.14)} \\
&\quad + \frac{1}{N} \Phi_{N+1}\left(\frac{-x}{\sqrt{4t}}\right) \int_0^\infty y^N g(y) dy \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{4t}N} \int_0^\infty \Phi_{N+2}\left(\frac{z-x}{\sqrt{4t}}\right) \int_z^\infty (y-z)^N g(y) dy dz \\
&= \frac{1}{N} \Phi_{N+1}\left(\frac{-x}{\sqrt{4t}}\right) \int_0^\infty y^N g(y) dy \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{4t}N} \int_0^\infty \Phi_{N+2}\left(\frac{z-x}{\sqrt{4t}}\right) \int_z^\infty (y-z)^N g(y) dy dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{N,2}(x, t) &:= \int_{-\infty}^0 \underbrace{\Phi_{N+1}\left(\frac{z-x}{\sqrt{4t}}\right)}_{=:a} \underbrace{\int_{-\infty}^z (y-z)^{N-1} g(y) dy dz}_{=:b'} & (2.4.29) \\
&\stackrel{(2.4.26)}{=} \left[\Phi_{N+1}\left(\frac{z-x}{\sqrt{4t}}\right) \int_{-\infty}^z \frac{-(y-z)^N}{N} g(y) dy \right]_{z=-\infty}^{z=0} \\
&\quad - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{4t}} \Phi_{N+2}\left(\frac{z-x}{\sqrt{4t}}\right) \int_{-\infty}^z \frac{-(y-z)^N}{N} g(y) dy dz \\
&= - \frac{1}{N} \Phi_{N+1}\left(\frac{-x}{\sqrt{4t}}\right) \int_{-\infty}^0 y^N g(y) dy \\
&\quad + \lim_{z \rightarrow \infty} \underbrace{\left[\Phi_{N+1}\left(\frac{z-x}{\sqrt{4t}}\right) \int_z^\infty \frac{(y-z)^N}{N} g(y) dy \right]}_{\rightarrow 0 \quad (2.1.14)} \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{4t}N} \int_{-\infty}^0 \Phi_{N+2}\left(\frac{z-x}{\sqrt{4t}}\right) \int_{-\infty}^z (y-z)^N g(y) dy dz \\
&= - \frac{1}{N} \Phi_{N+1}\left(\frac{-x}{\sqrt{4t}}\right) \int_{-\infty}^0 y^N g(y) dy \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{4t}N} \int_{-\infty}^0 \Phi_{N+2}\left(\frac{z-x}{\sqrt{4t}}\right) \int_{-\infty}^z (y-z)^N g(y) dy dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(R_{N,1} - R_{N,2})(x, t) &= \frac{1}{N} \Phi_{N+1} \left(\frac{-x}{\sqrt{4t}} \right) \int_{-\infty}^{\infty} y^N g(y) dy \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{4t}N} \left(\int_0^{\infty} \Phi_{N+2} \left(\frac{z-x}{\sqrt{4t}} \right) \int_z^{\infty} (y-z)^N g(y) dy dz \right. \\
&\quad \left. - \int_{-\infty}^0 \Phi_{N+2} \left(\frac{z-x}{\sqrt{4t}} \right) \int_{-\infty}^z (y-z)^N g(y) dy dz \right) \\
&= \frac{1}{N} \Phi_{N+1} \left(\frac{-x}{\sqrt{4t}} \right) \int_{-\infty}^{\infty} y^N g(y) dy + \frac{1}{\sqrt{4t}N} (R_{N+1,1} - R_{N+1,2}).
\end{aligned}$$

Das Restglied lautet demnach

$$\begin{aligned}
R_N(x, t) &:= \frac{1}{2(4t)^{(N+1)/2}(N-1)!} (R_{N,1} - R_{N,2})(x, t) \tag{2.4.30} \\
&= \frac{1}{2(4t)^{(N+1)/2}N!} \Phi_{N+1} \left(\frac{-x}{\sqrt{4t}} \right) \int_{-\infty}^{\infty} y^N g(y) dy \\
&\quad + \frac{1}{2(4t)^{(N+2)/2}N!} (R_{N+1,1} - R_{N+1,2})(x, t) \\
&= \frac{1}{2(4t)^{(N+1)/2}N!} \Phi_{N+1} \left(\frac{-x}{\sqrt{4t}} \right) \int_{-\infty}^{\infty} y^N g(y) dy + R_{N+1}(x, t).
\end{aligned}$$

Eingesetzt in (2.4.21) ergibt dies die Gleichung für $N+1$.

c) Wegen (2.4.30) ist nur zu zeigen, dass es zu jedem $N \in \mathbb{N}$ eine Konstante C_N gibt mit

$$(R_{N,1} - R_{N,2})(x, t) \leq C_N \quad \text{für alle } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}. \tag{2.4.31}$$

Es sei daher $N \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Man schätzt ab:

$$\begin{aligned}
r_{N,1}(x, t) &:= \left| \frac{1}{\sqrt{4t}} \int_0^{\infty} \Phi_{N+2} \left(\frac{z-x}{\sqrt{4t}} \right) \int_z^{\infty} (y-z)^N g(y) dy dz \right| \tag{2.4.32} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{4t}} \int_0^{\infty} |\Phi_{N+2}| \left(\frac{z-x}{\sqrt{4t}} \right) \int_z^{\infty} |y-z|^N |g(y)| dy dz \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{4t}} \int_0^{\infty} |\Phi_{N+2}| \left(\frac{z-x}{\sqrt{4t}} \right) \int_z^{\infty} (|y|+|z|)^N |g(y)| dy dz \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{4t}} \int_0^{\infty} |\Phi_{N+2}| \left(\frac{z-x}{\sqrt{4t}} \right) \underbrace{\int_z^{\infty} 2^N |y|^N |g(y)| dy dz}_{\leq 2^N \|y^N g(y)\|_{L^1(\mathbb{R})}} \, \quad y \geq z \geq 0 \Rightarrow |y| \geq |z| \\
&\leq 2^N \|y^N g(y)\|_{L^1(\mathbb{R})} \frac{1}{\sqrt{4t}} \int_0^{\infty} |\Phi_{N+2}| \left(\frac{z-x}{\sqrt{4t}} \right) dz \\
&\stackrel{(2.4.25)}{=} 2^N \|y^N g(y)\|_{L^1(\mathbb{R})} \underbrace{\int_{\frac{-x}{\sqrt{4t}}}^{\infty} |\Phi_{N+2}|(\xi) dz}_{\leq \|\Phi_{N+2}\|_{L^1(\mathbb{R})}} \\
&\leq 2^N \|y^N g(y)\|_{L^1(\mathbb{R})} \|\Phi_{N+2}(\xi)\|_{L^1(\mathbb{R})} =: c_N < \infty. \tag{2.4.33}
\end{aligned}$$

Die positive Konstante c_N hängt nur von g und N (und Φ_{N+2}) aber nicht von x oder t ab. Völlig analog schätzt man auch

$$r_{N,2}(x, t) := \left| \frac{1}{\sqrt{4t}} \int_{-\infty}^0 \Phi_{N+2} \left(\frac{z-x}{\sqrt{4t}} \right) \int_{-\infty}^z (y-z)^N g(y) dy dz \right| \leq c_N \tag{2.4.34}$$

ab. Mit (2.4.28), (2.4.29) folgt nun sofort:

$$\begin{aligned}
& |R_{N,1} - R_{N,2}|(x, t) \\
= & \left| \frac{1}{N} \Phi_{N+1} \left(\frac{-x}{\sqrt{4t}} \right) \int_0^\infty y^N g(y) dy + \frac{1}{\sqrt{4tN}} \int_0^\infty \Phi_{N+2} \left(\frac{z-x}{\sqrt{4t}} \right) \int_z^\infty (y-z)^N g(y) dy dz \right. \\
& \left. - \frac{1}{N} \Phi_{N+1} \left(\frac{-x}{\sqrt{4t}} \right) \int_{-\infty}^0 y^N g(y) dy + \frac{1}{\sqrt{4tN}} \int_{-\infty}^0 \Phi_{N+2} \left(\frac{z-x}{\sqrt{4t}} \right) \int_{-\infty}^z (y-z)^N g(y) dy dz \right| \\
\leq & \frac{2}{N} (\|\Phi_{N+1}\|_\infty \|y^N g(y)\|_{L^1(\mathbb{R})} + c_N) =: C_N.
\end{aligned}$$

■

Es sei angemerkt, dass aus stochastischer Sicht die asymptotische Entwicklung von $u(x, t)$ bis zur Stufe N durch die ersten N Momente von g , d.h. durch $\int y^i g(y) dy$, $i = 1, \dots, N$, festgelegt ist. Insbesondere benötigt man für die Bestimmung des führenden Terms (2.4.23) nur das erste Moment also den Erwartungswert der Startverteilung g .

Weiterhin ist jeder Summand der asymptotischen Entwicklung (2.4.22) schnell fallend von der Ordnung $O(e^{-x^2})$ und hat die Form $a_k(\tilde{x}, t) = c_k t^{-k/2} \Phi_k(\tilde{x})$ für eine Konstante $c_k \in \mathbb{R}$. Es liegen also separierte Variablen vor. Das folgende Lemma zeigt, dass jeder Summand a_k selbst die Wärmeleitungsgleichung löst, d.h. $(a_k)_t - (a_k)_{xx} = 0$, was nicht sonderlich überrascht. Bis auf skalare Vielfache handelt es sich dabei bereits um alle schnell fallenden Lösungen in Produktform $\tilde{u}(\tilde{x}, t) = v(t)w(\tilde{x})$.

Lemma 2.4.8 *Es seien $v \in C^1(\mathbb{R}_{>0})$, $w \in C^2(\mathbb{R})$ und*

$$u(x, t) := v(t)w\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right)$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung $u_t - u_{xx} = 0$ in separierten Variablen. Dann gibt es $\alpha, \vartheta \in \mathbb{R}$, so dass $v(t) = \alpha t^{-\vartheta/2}$ und w ist eine Lösung der Fehlerfunktion-Differentialgleichung $w'' + 2xw' + 2\vartheta w = 0$ zum Parameter ϑ . Falls $w \neq 0$ schnell fallend ist, gilt insbesondere $\vartheta \in \mathbb{N}$ und $w = \beta \Phi_\vartheta$ für ein $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und damit

$$u(x, t) = \alpha \beta t^{-\vartheta/2} \Phi_\vartheta\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right).$$

Beweis: Die Behauptung ist trivial für $u = 0$, so dass man $u \neq 0$ und damit auch $v \neq 0 \neq w$ annehmen kann. Nach (2.4.16) erfüllt die Ähnlichkeitstransformierte $\tilde{u}(\tilde{x}, t) := u(\sqrt{4t}\tilde{x}, t) = v(t)w(\tilde{x})$ die Differentialgleichung

$$0 = 4t\tilde{u}_t(\tilde{x}, t) - 2\tilde{x}\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}(\tilde{x}, t) - \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}(\tilde{x}, t) = 4tv'(t)w(\tilde{x}) - v(t)(2\tilde{x}w'(\tilde{x}) + w''(\tilde{x})). \quad (2.4.35)$$

Wegen $w \neq 0$ gibt es ein $\xi \in \mathbb{R}$ mit $w(\xi) \neq 0$. Setze

$$\vartheta := -\frac{2\xi w'(\xi) + w''(\xi)}{2w(\xi)} \in \mathbb{R}.$$

Für $\tilde{x} = \xi$ lässt sich dann (2.4.35) umformen zu

$$v'(t) + \frac{\vartheta}{2}t^{-1}v(t) = 0,$$

so dass $v(t) = \alpha t^{-\vartheta/2}$ für ein geeignetes $\alpha \in \mathbb{R}$. Wegen $v \neq 0$ muss $\alpha \neq 0$ sein, woraus dann wiederum $v(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}_{>0}$ folgt. Gleichung (2.4.35) lautet nun

$$\begin{aligned} 0 &= 4tv'(t)w(\tilde{x}) - v(t)(2\tilde{x}w'(\tilde{x}) + w''(\tilde{x})) = \alpha t^{-\vartheta/2}(-2\vartheta w(\tilde{x}) - 2\tilde{x}w'(\tilde{x}) - w''(\tilde{x})) \\ \Leftrightarrow_{\alpha \neq 0} 0 &= w''(\tilde{x}) + 2\tilde{x}w'(\tilde{x}) + 2\vartheta w(\tilde{x}). \end{aligned}$$

Für schnell fallendes w ergibt sich der restliche Teil der Behauptung aus Korollar 2.3.4. \blacksquare

Wir betrachten nun die Funktionale $\langle \cdot, \Phi_n \rangle_\mu$, $n \in \mathbb{N}$.

Lemma 2.4.9 *Es sei $u(x, t)$ eine für jedes $t \in \mathbb{R}_{>0}$ in $x \in \mathbb{R}$ schnell fallende Lösung der homogenen Ganzraum-Wärmeleitungsgleichung $u_t - u_{xx} = 0$ und $\tilde{u}(\tilde{x}, t) := u(\sqrt{4t}\tilde{x}, t)$.*

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$t^{n/2} \frac{\langle \tilde{u}(\cdot, t), \Phi_n \rangle_\mu}{\langle \Phi_n, \Phi_n \rangle_\mu} = t^{n/2} \frac{\int \tilde{u}(\tilde{x}, t) \Phi_n(\tilde{x}) e^{\tilde{x}^2} d\tilde{x}}{\int \Phi_n(\tilde{x}) \Phi_n(\tilde{x}) e^{\tilde{x}^2} d\tilde{x}} =: a_n = \text{const.} \in \mathbb{R}. \quad (2.4.36)$$

b) Die Konstante a_n aus a) lässt sich anhand der Anfangsbedingung $g(x) = u(x, 0)$ folgendermaßen direkt berechnen:

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+1}(n-1)!} \int y^{n-1} g(y) dy. \quad (2.4.37)$$

c) Ist eine Anfangsbedingung f nicht für $t = 0$ sondern erst zu einem späteren Zeitpunkt $t_0 > 0$ gegeben, d.h. $u(x, t_0) = f(x)$, so kann man a_n mittels dieser folgendermaßen bestimmen:

$$\begin{aligned} a_n &= t_0^{n/2} \frac{\langle \tilde{f}, \Phi_n \rangle_\mu}{\langle \Phi_n, \Phi_n \rangle_\mu} = t_0^{(n-1)/2} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+1}(n-1)!} \int f(x) H_{n-1} \left(\frac{x}{\sqrt{4t_0}} \right) dx \\ \tilde{f}(\tilde{x}) &:= f(\sqrt{4t_0}\tilde{x}). \end{aligned} \quad (2.4.38)$$

Beweis: a) Nach (2.4.16) erfüllt die Ähnlichkeitstransformierte $\tilde{u}(\tilde{x}, t) := u(\sqrt{4t}\tilde{x}, t)$ die Differentialgleichung

$$4t\tilde{u}_t - \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} - 2\tilde{x}\tilde{u}_{\tilde{x}} = 0. \quad (2.4.39)$$

Für $t \in \mathbb{R}_{>0}$ definiere

$$v(t) := \int \tilde{u}(\tilde{x}, t) \Phi_n(\tilde{x}) e^{\tilde{x}^2} d\tilde{x} = c_n \int \tilde{u}(\tilde{x}, t) H_{n-1}(\tilde{x}) d\tilde{x}, \quad (2.4.40)$$

wobei $c_n := (-1)^{n-1} \frac{2}{\sqrt{\pi}}$. Die Ableitung von v kann man nun durch partielle Integration berechnen, bei der Randterme verschwinden weil u schnell fallend in x ist:

$$\begin{aligned} v'(t) &= c_n \frac{\partial}{\partial t} \int \tilde{u}(\tilde{x}, t) H_{n-1}(\tilde{x}) d\tilde{x} = c_n \int \tilde{u}_t(\tilde{x}, t) H_{n-1}(\tilde{x}) d\tilde{x} \\ &\stackrel{(2.4.39)}{=} \frac{c_n}{4t} \int (\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} + 2\tilde{x}\tilde{u}_{\tilde{x}})(\tilde{x}, t) H_{n-1}(\tilde{x}) d\tilde{x} \\ &= \frac{c_n}{4t} \int \tilde{u}(\tilde{x}, t) (H_{n-1}''(\tilde{x}) - 2H_{n-1}(\tilde{x}) - 2\tilde{x}H_{n-1}'(\tilde{x})) d\tilde{x} \\ &= \frac{c_n}{4t} \int \tilde{u}(\tilde{x}, t) \underbrace{(H_{n-1}''(\tilde{x}) - 2\tilde{x}H_{n-1}'(\tilde{x}) + 2(n-1)H_{n-1}(\tilde{x}) + 2nH_{n-1}(\tilde{x}))}_{=0, \text{ s. (2.2.10)}} d\tilde{x} \\ &\stackrel{(2.4.40)}{=} -\frac{n}{2} t^{-1} v(t), \end{aligned}$$

d.h. v löst die Differentialgleichung $v'(t) = -\frac{n}{2}t^{-1}v(t)$ und muss deshalb ein reelles Vielfaches der Fundamentallösung $t^{-n/2}$ sein.

$$\begin{aligned}
\text{b) } v(t) &\stackrel{(2.4.40)}{=} c_n \int \tilde{u}(\tilde{x}, t) H_{n-1}(\tilde{x}) d\tilde{x} = c_n \int u(\sqrt{4t}\tilde{x}, t) H_{n-1}(\tilde{x}) d\tilde{x} \\
&\stackrel{(2.4.6)}{=} \frac{c_n}{\sqrt{4\pi t}} \int \int g(y) e^{-(\tilde{x}-y/\sqrt{4t})^2} dy H_{n-1}(\tilde{x}) d\tilde{x} \\
&= \frac{c_n}{\sqrt{4\pi t}} \int g(y) \int e^{-(\tilde{x}-y/\sqrt{4t})^2} H_{n-1}(\tilde{x}) d\tilde{x} dy \\
&= \frac{c_n}{\sqrt{4\pi t}} \int g(y) \int H_{n-1}(\xi + y/\sqrt{4t}) e^{-\xi^2} d\xi dy \\
&\stackrel{(2.2.13)}{=} \frac{c_n}{\sqrt{4\pi t}} \int g(y) \int \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} H_m(\xi) (2y/\sqrt{4t})^{n-1-m} e^{-\xi^2} d\xi dy \\
&= \frac{c_n}{\sqrt{4\pi t}} \int g(y) \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} (2y/\sqrt{4t})^{n-1-m} \underbrace{\int H_0(\xi) H_m(\xi) e^{-\xi^2} d\xi}_{=0, \text{ für } m > 0, \text{ s. (2.2.11)}} dy \\
&= \frac{c_n}{\sqrt{4\pi}} t^{-n/2} \int g(y) y^{n-1} \underbrace{\int H_0(\xi)^2 e^{-\xi^2} d\xi}_{=\sqrt{\pi}, \text{ s. (2.2.11)}} dy \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{\pi}} t^{-n/2} \int y^{n-1} g(y) dy \\
a_n &\stackrel{(2.4.36)}{=} t^{n/2} \frac{v(t)}{\int \Phi_n(\tilde{x}) \Phi_n(\tilde{x}) e^{\tilde{x}^2} d\tilde{x}} \stackrel{(2.3.7)}{=} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{\pi}} \int y^{n-1} g(y) dy \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{n+1} (n-1)! \right) \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+1} (n-1)!} \int y^{n-1} g(y) dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c) } t_0^{-n/2} a_n &\stackrel{\text{a)}}{=} \frac{\langle \tilde{u}(\cdot, t_0), \Phi_n \rangle_\mu}{\langle \Phi_n, \Phi_n \rangle_\mu} = \frac{\langle \tilde{f}, \Phi_n \rangle_\mu}{\langle \Phi_n, \Phi_n \rangle_\mu} \stackrel{(2.3.2)}{=} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n (n-1)!} \int f(\tilde{x} \sqrt{4t_0}) H_{n-1}(\tilde{x}) d\tilde{x} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+1} (n-1)! \sqrt{t_0}} \int f(x) H_{n-1} \left(\frac{x}{\sqrt{4t_0}} \right) dx
\end{aligned}$$

■

Vergleicht man die asymptotische Entwicklung (2.4.22) mit (2.4.37), so sieht man, dass es sich bei jener schlicht um die „Darstellung“ von $\tilde{u}(\cdot, t)$ bezüglich der orthogonalen Schauder-Basis $\{\Phi_n; n \in \mathbb{N}\}$ handelt, d.h.

$$\tilde{u}(\cdot, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle \tilde{u}(\cdot, t), \Phi_n \rangle_\mu}{\langle \Phi_n, \Phi_n \rangle_\mu} \Phi_n = \sum_{n=0}^{\infty} t^{-n/2} a_n \Phi_n \quad (2.4.41)$$

$$\stackrel{2.4.9 \text{ b)}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+1} (n-1)!} \int y^{n-1} g(y) dy t^{-n/2} \Phi_n \quad (2.4.42)$$

Falls wie in Lemma 2.4.9 c) eine Anfangsbedingung f für einen Zeitpunkt $t_0 > 0$ gegeben ist, gilt gleichwertig zu (2.4.42):

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\cdot, t) &\stackrel{(2.4.41)}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-n/2} t_0^{-n/2} a_n \Phi_n \\ &\stackrel{2.4.9 \text{ c)}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-n/2} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+1}(n-1)!\sqrt{x_0}} \int f(x) H_{n-1} \left(\frac{x}{\sqrt{4t_0}}\right) dx \Phi_n \quad . \quad (2.4.43) \end{aligned}$$

Kapitel 3

Laminare, inkompressible Nachlauf-Fernfeld-Strömungen

3.1 Einleitung

Laminare, inkompressible Nachlauf-Strömungen wurden erstmals 1930 von Goldstein [20] auf Anregung von Prandtl mittels der Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen untersucht. Goldstein berechnet in seiner Arbeit näherungsweise über eine asymptotische Reihenentwicklung den Nachlauf direkt hinter einer tangential angeströmten flachen Platte (Nachlauf-Nahfeld, engl.: near wake).

Auf Goldsteins Ansatz aufbauend bestimmt Tollmien 1931 im Handbuch der Experimentalphysik [56], S. 267-269 die zugehörige asymptotische Nachlauf-Strömung erster Stufe in weiter Entfernung von der Plattenhinterkante (Nachlauf-Fernfeld, engl.: far wake). Sein Resultat macht keinen Gebrauch von der speziellen Geometrie der flachen Platte und trifft daher auf beliebige achsensymmetrisch angeströmte achsensymmetrische Profile zu.

Tollmiens Ergebnis vertieft dann 1933 wiederum Goldstein [21], indem er die Asymptotik zweiter Stufe des Nachlauf-Fernfeldes berechnet und diese graphisch mit seiner Nahfeld-Lösung verbindet. In dem zweiten Teil seiner Arbeit [22] setzt er die Ergebnisse des ersten in Beziehung zu denen von Filon [16], der das Nachlauf-Fernfeld eines quer angeströmten Kreiszyinders auf Basis der vollen Navier-Sokes-Gleichungen anhand der sogenannten Oseen-Approximation ebenfalls bis zur zweiten Stufe entwickelt hatte. Die Basisarbeiten von Goldstein, Tollmien und Filon sind anschließend vielfach aufgegriffen worden. Im Folgenden seien einige genannt:

Der japanische Physiker und Mathematiker Isao Imai [28] erweitert 1951 Filons Arbeit um die Approximation dritter Stufe und kann so paradoxe Aussagen, die Filon allein aus der Kenntnis der zweiten Approximation über den auf den Zylinder wirkenden Impuls gezogen hatte, revidieren.

Stewartson [51] erweitert 1957 Goldsteins Asymptotik zweiter Stufe ebenfalls um eine weitere. In dieser dritten Stufe tritt erstmals ein logarithmischer Term in der Entfernungsvariablen auf, bezüglich welcher die asymptotische Entwicklung durchgeführt wird. Ohne Einführung eines solchen Terms war Goldstein an der Herleitung der dritten Stufe gescheitert, da er unphysikalische Lösungen erhielt, die sich quer zur Strömung nicht exponentiell der Anströmgeschwindigkeit

näherten. Crane [13] gibt 1959 eine Ergebniskorrektur von Stewartsons Berechnungen an.

I-Dee Chang behandelt 1961 zweidimensionale Problemstellungen wie Filon und Imai mit einem anderen Ansatz in seiner umfangreichen Arbeit [8]. Hieran schließt sich die Dissertation von Childress 1961 [10] an, in welcher analog das dreidimensionale, laminare, inkompressible Nachlauf-Fernfeld betrachtet wird und asymptotische Entwicklungen höherer Ordnung sowohl für rotationssymmetrische als auch für allgemeine Strömungen angegeben werden. Beide Arbeiten entstanden am California Institute of Technology auf Initiative von P.A. Lagerstrom und unter Mitwirkung von S. Kaplun.

Berger und Viviani [59] erweitern 1965 die Prinzipien auf dreidimensionale, rotationssymmetrische Nachlauf-Nahfeld-Strömungen hinter schlanken Körpern (engl.: slender bodies) und Berger [4] untersucht 1968 erneut das Nachlauf-Fernfeld bis zur vierten Stufe auf Basis der Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen für beliebige achsensymmetrische, dreidimensionale, inkompressible, laminare Strömungen.

Ting [55] beschreibt 1968 in Fortführung der Arbeiten von Goldstein, Stewartson und Crane, das zweidimensionale Nachlauf-Fernfeld mittels von Mises-Variablen und kommt so zu einer strukturell übersichtlicheren asymptotischen Entwicklung als mit kartesischen Koordinaten. Seine Methode lässt die prinzipielle Gestalt asymptotischer Entwicklungen beliebig hoher Stufen erkennen und klärt das Auftreten logarithmischer Terme in ihnen: Sie korrespondieren mit Resonanzen bei nichtlinearen Vibrationsproblemen. Ting's Ergebnisse werden in Abschnitt 3.6 dargestellt.

Berger veröffentlicht schließlich 1971 das Buch „Laminar Wakes“ [3] (300 Seiten), welches ein umfangreiches Literaturverzeichnis besitzt. Auf dieses Buch sei hier ausdrücklich hingewiesen. Auch das Standardreferenzwerk [48] zur Grenzschichttheorie von Schlichting und Gersten verweist bis zu seiner neusten 10. Auflage aus dem Jahr 2006 für laminare Nachlauf-Strömungen auf das Buch von Berger (s. z.B. S.192, S.338).

Zum Aufbau des Kapitels: Der erste Abschnitt 3.2 enthält eine elementare Herleitung der Nachlauf-Fernfeld-Gleichungen (erster Stufe) für zweidimensionale achsensymmetrische und dreidimensionale rotationssymmetrische Strömungen. Die Abschnitte 3.3 und 3.4 leiten dann Lösungen dieser Gleichungen her. Abschnitt 3.5 setzt den Widerstand des umströmten Körpers in Beziehung zu dessen Nachlauf-Strömung. Der umfangreiche und etwas kompliziertere Abschnitt 3.6 behandelt zweidimensionale Nachlauf-Fernfeld-Strömungen höherer Ordnung: Zunächst wird Ting folgend eine Asymptotik dritter Stufe in von Mises-Variablen hergeleitet und das Auftreten logarithmischer Terme in asymptotischen Entwicklungen beliebig hoher Stufen geklärt. Anschließend findet eine (möglicherweise neuartige) Umrechnung in kartesische Koordinaten statt, was auf die oben angesprochenen Ergebnisse von Goldstein, Stewartson und Crane führt. Abschnitt 3.7 geht auf das Problem der Bestimmung der Anfangsposition des Nachlauf-Fernfeldes hinter dem umströmten Hindernis ein. Das entsprechende Ergebnis von Goldstein für den Fall einer tangential angeströmten flachen Platte wird dargestellt und der von Nishioka und Miyagi [45] durchgeführte experimentelle Vergleich angegeben. Als zweite Geometrie wird ein quer angeströmter Kreiszyylinder betrachtet. Für Durchmesser-Reynoldszahlen zwischen 10 und 60 wird die asymptotische Nachlauf-Fernfeld-Lösung dritter Stufe von Goldstein, Stewartson, Crane mit

den experimentellen Geschwindigkeitsmessungen von Nishioka und Sato [44] und mit numerischen Ergebnissen, die mit der CFD-Software ANSYS CFX 11.01 berechnet wurden, verglichen. Der letzte Abschnitt 3.8 geht kurz auf die mögliche Beschreibung des Nachlauf-Fernfeldes mehrerer hintereinanderliegender Hindernisse anhand der zuvor erzielten Resultate ein.

3.2 Nachlauf-Fernfeld-Gleichungen

Man betrachte folgenden Ansatz einer asymptotischen Entwicklung des Strömungsfeldes $\mathbf{v} = (u, v, w)$ und des Druckes p im Nachlauf-Bereich hinter einem horizontal angeströmten Hindernis mit dem Parameter $\varepsilon := \nu = \text{Re}^{-1}$:

$$u(x, y, z) = U + \varepsilon^{\alpha_1} u'(\varepsilon^{-\alpha_x} x, \varepsilon^{-\alpha_{yz}} y, \varepsilon^{-\alpha_{yz}} z) \quad (3.2.1)$$

$$v(x, y, z) = \varepsilon^{\alpha_2} v'(\varepsilon^{-\alpha_x} x, \varepsilon^{-\alpha_{yz}} y, \varepsilon^{-\alpha_{yz}} z) \quad (3.2.2)$$

$$w(x, y, z) = \varepsilon^{\alpha_2} w'(\varepsilon^{-\alpha_x} x, \varepsilon^{-\alpha_{yz}} y, \varepsilon^{-\alpha_{yz}} z) \quad (3.2.3)$$

$$p(x, y, z) = P + \varepsilon^{\alpha_1} p'(\varepsilon^{-\alpha_x} x, \varepsilon^{-\alpha_{yz}} y, \varepsilon^{-\alpha_{yz}} z). \quad (3.2.4)$$

mit $\varepsilon \in]0, 1[$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_x, \alpha_{yz} \in \mathbb{R}_{>0}$ und

$$\alpha_1 < \alpha_2 \quad (3.2.5)$$

$$\alpha_x, \alpha_{yz} \leq 1 \quad (3.2.6)$$

Dieser Ansatz enthält bereits folgende Annahmen:

1. Die Strömung um das Hindernis sollte nahezu rotationssymmetrisch zur Anströmrichtung also zur x -Achse sein, so dass v und w dieselbe Amplitude ε^{α_2} besitzen (s. (3.2.2), (3.2.3)) und sowohl in y - als auch in z -Richtung dieselbe Skala $\varepsilon^{-\alpha_{yz}}$ auftritt.
2. Die Amplitude von v und w ist viel kleiner als die der Schwankung $u - U$ (s. 3.2.5).
3. Die Feinheiten ε^{α_x} , $\varepsilon^{\alpha_{yz}}$ der Skalen sind durch ε nach unten beschränkt (s. 3.2.6).

Dies ist sinnvoll, da maximal Grenzschichten der Stärke $\sqrt{\varepsilon}$ aufgelöst werden müssen.

Es sei darauf hingewiesen, dass obiger Ansatz eine vereinfachte Schreibweise einer formalen Notation für eine asymptotische Entwicklung der Stufe 2 im Sinne von Definition 2.1.4 ist:

$$\begin{aligned} f &:= (u, v, w, p) \\ m &:= 4 \\ \mathbf{x} &:= (x, y, z) \\ n &:= 3 \\ \phi &:= (\phi^{(0)}, \phi^{(1)}, \phi^{(2)}) = (1, \varepsilon^{\alpha_1}, \varepsilon^{\alpha_2}) \\ \psi &:= \begin{cases} (\psi^{(0)}, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}) = (1, \min(\varepsilon^{-\alpha_x}, \varepsilon^{\alpha_{xy}}), \max(\varepsilon^{-\alpha_x}, \varepsilon^{\alpha_{xy}})) & \text{falls } \alpha_x \neq \alpha_{xy} \\ (\psi^{(0)}, \psi^{(1)}) = (1, \varepsilon^{-\alpha_x}) & \text{falls } \alpha_x = \alpha_{xy} \end{cases} \\ f^{(0)} &:= (U, 0, 0, P) \\ f^{(1)} &:= (u', 0, 0, p') \\ f^{(2)} &:= (0, v', w', 0). \end{aligned}$$

Substituiere

$$\xi := \varepsilon^{-\alpha_x} x \quad (3.2.7)$$

$$\eta := \varepsilon^{-\alpha_{yz}} y \quad (3.2.8)$$

$$\zeta := \varepsilon^{-\alpha_{yz}} z. \quad (3.2.9)$$

Einsetzen in die Kontinuitätsgleichung ergibt

$$0 = (u_x + v_y + w_z)(x, y, z) = (\varepsilon^{\alpha_1 - \alpha_x} u'_\xi + \varepsilon^{\alpha_2 - \alpha_{yz}} v'_\eta + \varepsilon^{\alpha_2 - \alpha_{yz}} w'_\zeta)(\xi, \eta, \zeta).$$

Die Annahme einer ausgewogenen Bilanz der Terme u'_ξ , v'_η , w'_ζ führt auf

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_x =: \alpha \\ \alpha_2 &= \alpha_{yz} =: \beta \\ \alpha &< \beta \leq 1 \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

und damit zu

$$u'_\xi + v'_\eta + w'_\zeta = 0. \quad (3.2.11)$$

Die Impulsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} 0 &= [uu_x + vv_y + ww_z - \varepsilon(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + p_x](x, y, z) \\ &= [(U + \varepsilon^\alpha u')(\varepsilon^{\alpha - \alpha} u'_\xi) + (\varepsilon^\beta v')(\varepsilon^{\alpha - \beta} u'_\eta) + (\varepsilon^\beta w')(\varepsilon^{\alpha - \beta} u'_\zeta) \\ &\quad - \varepsilon(\varepsilon^{\alpha - 2\alpha} u'_{\xi\xi} + \varepsilon^{\alpha - 2\beta} u'_{\eta\eta} + \varepsilon^{\alpha - 2\beta} u'_{\zeta\zeta}) + p'_\xi](\xi, \eta, \zeta) \\ &= [Uu'_\xi + \varepsilon^\alpha (u'u'_\xi + v'u'_\eta + w'u'_\zeta) - \varepsilon^{1 - \alpha} u'_{\xi\xi} - \varepsilon^{1 + \alpha - 2\beta} u'_{\eta\eta} - \varepsilon^{1 + \alpha - 2\beta} u'_{\zeta\zeta} \\ &\quad + p'_\xi](\xi, \eta, \zeta) \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

$$\begin{aligned} 0 &= [uv_x + vv_y + wv_z - \varepsilon(v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}) + p_y](x, y, z) \\ &= [(U + \varepsilon^\alpha u')(\varepsilon^{\beta - \alpha} v'_\xi) + (\varepsilon^\beta v')(\varepsilon^{\beta - \beta} v'_\eta) + (\varepsilon^\beta w')(\varepsilon^{\beta - \beta} v'_\zeta) \\ &\quad - \varepsilon(\varepsilon^{\beta - 2\alpha} v'_{\xi\xi} + \varepsilon^{\beta - 2\beta} v'_{\eta\eta} + \varepsilon^{\beta - 2\beta} v'_{\zeta\zeta}) + \varepsilon^{\alpha - \beta} p'_\eta](\xi, \eta, \zeta) \\ &= [\varepsilon^{\beta - \alpha} Uv'_\xi + \varepsilon^\beta (u'v'_\xi + v'v'_\eta + w'v'_\zeta) - \varepsilon^{1 + \beta - 2\alpha} v'_{\xi\xi} - \varepsilon^{1 - \beta} v'_{\eta\eta} - \varepsilon^{1 - \beta} v'_{\zeta\zeta} \\ &\quad + \varepsilon^{\alpha - \beta} p'_\eta](\xi, \eta, \zeta) \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

$$\begin{aligned} 0 &= [uw_x + vw_y + wz - \varepsilon(w_{xx} + w_{yy} + w_{zz}) + p_z](x, y, z) \\ &= [(U + \varepsilon^\alpha u')(\varepsilon^{\beta - \alpha} w'_\xi) + (\varepsilon^\beta v')(\varepsilon^{\beta - \beta} w'_\eta) + (\varepsilon^\beta w')(\varepsilon^{\beta - \beta} w'_\zeta) \\ &\quad - \varepsilon(\varepsilon^{\beta - 2\alpha} w'_{\xi\xi} + \varepsilon^{\beta - 2\beta} w'_{\eta\eta} + \varepsilon^{\beta - 2\beta} w'_{\zeta\zeta}) + \varepsilon^{\alpha - \beta} p'_\zeta](\xi, \eta, \zeta) \\ &= [\varepsilon^{\beta - \alpha} Uw'_\xi + \varepsilon^\beta (u'w'_\xi + v'w'_\eta + w'w'_\zeta) \\ &\quad - \varepsilon^{1 + \beta - 2\alpha} w'_{\xi\xi} - \varepsilon^{1 - \beta} w'_{\eta\eta} - \varepsilon^{1 - \beta} w'_{\zeta\zeta} + \varepsilon^{\alpha - \beta} p'_\zeta](\xi, \eta, \zeta). \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Auflösen nach den Drucktermen ergibt

$$\begin{aligned} -p'_\xi &= Uu'_\xi + \epsilon^\alpha(u'u'_\xi + v'u'_\eta + w'u'_\zeta) - \epsilon^{1-\alpha}u'_{\xi\xi} - \epsilon^{1+\alpha-2\beta}u'_{\eta\eta} - \epsilon^{1+\alpha-2\beta}u'_{\zeta\zeta} \\ &= Uu'_\xi + \epsilon^\alpha(u'u'_\xi + v'u'_\eta + w'u'_\zeta) - \epsilon^{1+\alpha-2\beta}(\epsilon^{2(\beta-\alpha)}u'_{\xi\xi} + u'_{\eta\eta} + u'_{\zeta\zeta}) \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

$$\begin{aligned} -p'_\eta &= \epsilon^{2(\beta-\alpha)}Uv'_\xi + \epsilon^{2\beta-\alpha}(u'v'_\xi + v'v'_\eta + w'v'_\zeta) - \epsilon^{1+2\beta-3\alpha}v'_{\xi\xi} - \epsilon^{1-\alpha}v'_{\eta\eta} - \epsilon^{1-\alpha}v'_{\zeta\zeta} \\ &= \epsilon^{2(\beta-\alpha)}Uv'_\xi + \epsilon^{2\beta-\alpha}(u'v'_\xi + v'v'_\eta + w'v'_\zeta) - \epsilon^{1-\alpha}(\epsilon^{2(\beta-\alpha)}v'_{\xi\xi} + v'_{\eta\eta} + v'_{\zeta\zeta}) \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

$$\begin{aligned} -p'_\zeta &= \epsilon^{2(\beta-\alpha)}Uw'_\xi + \epsilon^{2\beta-\alpha}(u'w'_\xi + v'w'_\eta + w'w'_\zeta) - \epsilon^{1+2\beta-3\alpha}w'_{\xi\xi} - \epsilon^{1-\alpha}w'_{\eta\eta} - \epsilon^{1-\alpha}w'_{\zeta\zeta} \\ &= \epsilon^{2(\beta-\alpha)}Uw'_\xi + \epsilon^{2\beta-\alpha}(u'w'_\xi + v'w'_\eta + w'w'_\zeta) - \epsilon^{1-\alpha}(\epsilon^{2(\beta-\alpha)}w'_{\xi\xi} + w'_{\eta\eta} + w'_{\zeta\zeta}) \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

Auf den rechten Seiten von (3.2.16), (3.2.17) tritt ϵ gemäß (3.2.10) nur mit positiven Exponenten auf, so dass für $\epsilon \rightarrow 0$

$$p'_\eta = 0 = p'_\zeta$$

folgt. Wegen der Randbedingung $p'(\xi, \eta, \zeta) = 0 = \text{const}$ für $\|(\eta, \zeta)\| \rightarrow \infty$ muss dann aber für jedes feste ξ bereits $p'(\xi, \eta, \zeta) = \text{const} = 0$ für alle η, ζ gelten. Damit ist p' jedoch insgesamt konstant, so dass auch $p'_\xi = 0$. Gleichung (3.2.15) lautet nun

$$0 = Uu'_\xi + \epsilon^\alpha(u'u'_\xi + v'u'_\eta + w'u'_\zeta) - \epsilon^{1+\alpha-2\beta}(\epsilon^{2(\beta-\alpha)}u'_{\xi\xi} + u'_{\eta\eta} + u'_{\zeta\zeta}). \quad (3.2.18)$$

Vergleicht man in (3.2.18) die ϵ -Potenzen, so muss für einen ausgewogenen Einfluß von Konvektion und Diffusion

$$0 = 1 + \alpha - 2\beta \Leftrightarrow \beta = \frac{\alpha + 1}{2} \quad (3.2.19)$$

gelten. Vernachlässigt man in (3.2.18) Terme mit positiven ϵ -Potenzen, so ergibt sich

$$Uu'_\xi = u'_{\eta\eta} + u'_{\zeta\zeta}. \quad (3.2.20)$$

Wegen

$$\begin{aligned} u'_\xi(\xi, \eta, \zeta) &= u_x(x, y, z) \\ u'_{\eta\eta}(\xi, \eta, \zeta) &= \epsilon^{2\beta-\alpha}u_{yy}(x, y, z) = \epsilon u_{yy}(x, y, z) \\ u'_{\zeta\zeta}(\xi, \eta, \zeta) &= \epsilon^{2\beta-\alpha}u_{zz}(x, y, z) = \epsilon u_{zz}(x, y, z) \\ \epsilon &= \nu \end{aligned}$$

lässt sich (3.2.20) in

$$Uu_x = \nu(u_{yy} + u_{zz}) \quad (3.2.21)$$

zurücktransformieren. Dies ist Gleichung (5.12.8) auf Seite 349 im Buch von Batchelor [2].

Weil die y - und z - Impulsgleichungen (3.2.16), (3.2.17) nur Terme mit positiven ϵ -Potenzen aufweisen, erhält man letztendlich - zusammen mit der Kontinuitätsgleichung (3.2.11) - nur zwei Gleichungen. Dies ist ausreichend, um das gesamte Strömungsfeld für zweidimensionale und rotationsymmetrische dreidimensionale Strömungen zu bestimmen. Für allgemeine dreidimensionale Nachlauf-Strömungen lässt sich lediglich die Strömung u in x -Richtung modellieren. Ein wesentliches Problem für konkrete numerische Simulationen besteht einerseits darin, den x -Ursprung zu

bestimmen, d.h die Entfernung vom Hindernis, ab der die bisher gemachten Annahmen gelten, und andererseits in der Berechnung eines Anfangsströmungsprofils in der $(x = 0)$ -Ebene, so dass man insgesamt eine wohlgestellte Anfangswertaufgabe mit Randbedingungen angeben kann. Für theoretische Überlegungen nehmen wir allerdings einfach an, dass der Ursprung bekannt und ein Anfangsprofil $g(y, z) = u(0, y, z)$ gegeben ist. Mit u erfüllt auch $\bar{u} := U - u = \varepsilon^\alpha u'$ die Gleichung (3.2.38). Es ist üblich, die Nachlauf-Fernfeld-Gleichungen (engl. far wake equations) bezüglich \bar{u} und $\bar{g} := U - g$ zu formulieren:

2D-Nachlauf-Fernfeld-Gleichungen

$$\bar{u}_x = v_y \quad (3.2.22)$$

$$U\bar{u}_x = \nu\bar{u}_{yy} \quad (3.2.23)$$

Randbedingungen:

$$\bar{u}(0, y) = \bar{g}(y) \quad (3.2.24)$$

$$v(x, 0) = 0 \quad (3.2.25)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \bar{u}(x, y) = 0 \quad (3.2.26)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} v(x, y) = 0 \quad (3.2.27)$$

3D-Nachlauf-Fernfeld-Gleichung für \bar{u}

$$U\bar{u}_x = \nu(\bar{u}_{yy} + \bar{u}_{zz}) \quad (3.2.28)$$

Randbedingungen:

$$\bar{u}(0, y, z) = \bar{g}(y, z) \quad (3.2.29)$$

$$\lim_{y^2+z^2 \rightarrow \infty} \bar{u}(x, y, z) = 0 \quad (3.2.30)$$

3D-Nachlauf-Fernfeld-Gleichungen, rotationssymmetrisch

(in Zylinderkoordinaten $(a, b) := (U - \mathbf{v}^\xi, \mathbf{v}^r)$, $x = \xi$ gemäß den Bezeichnungen aus Abschnitt 1.3)

$$a_x = b_r + \frac{1}{r}b \quad (\Leftrightarrow \quad ra_x = (rb)_r) \quad (3.2.31)$$

$$Ua_x = \nu\left(\frac{\partial^2 a}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial a}{\partial r}\right) \quad (3.2.32)$$

Randbedingungen:

$$a(0, r) = \bar{g}(r) \quad (3.2.33)$$

$$a_r(x, 0) = 0 \quad (3.2.34)$$

$$b(x, 0) = 0 \quad (3.2.35)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} a(x, r) = 0 \quad (3.2.36)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} b(x, r) = 0 \quad (3.2.37)$$

Die Randbedingung (3.2.34) bringt die plausible Annahme zum Ausdruck, dass bei rotationssymmetrischen Strömungen die axiale Strömung in einem festen (radialen) Querschnitt ihr Minimum stets auf der Symmetrieachse (x -Achse) annimmt. Die Randbedingung (3.2.35) besagt, dass bei rotationssymmetrischer Strömung auf der Symmetrieachse (x -Achse) keine Radialbewegung stattfinden kann. Analog ist für zweidimensionale, x -achsensymmetrische Strömungen die Randbedingung (3.2.25) stets erfüllt, während sie für allgemeine zweidimensionale Strömungen jedoch nicht zu gelten braucht. Es sollen hier einfachheitshalber aber nur zweidimensionale Nachlauf-Strömungen mit dieser Eigenschaft betrachtet werden. Sie liegt beispielsweise auch dann vor, wenn auf der x -Achse eine Haftbedingung gilt.

Abschließend sei kurz auf Grenzfälle des ε -Exponenten $\alpha \in]0, \beta[$ hingewiesen. Für $\alpha \rightarrow 0$ folgt $\beta = (\alpha + 1)/2 \rightarrow 1/2$. Gleichung (3.2.18) wird dann zu

$$0 = Uu'_\xi + u'u'_\xi + v'u'_\eta + w'u'_\zeta - \varepsilon u'_{\xi\xi} - u'_{\eta\eta} - u'_{\zeta\zeta}. \quad (3.2.38)$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ erhält man im 2-dimensionalen Fall damit die Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= uu_\xi + v'u_\eta - u_{\eta\eta} \\ 0 &= u_\xi + v'_\eta. \end{aligned}$$

Der zweite Grenzwert $\alpha \rightarrow \beta = (\alpha + 1)/2$ ergibt $\alpha, \beta \rightarrow 1$. Die Gleichungen (3.2.15), (3.2.16), (3.2.17) werden dann zu

$$\begin{aligned} -p'_\xi &= Uu'_\xi + \varepsilon(u'u'_\xi + v'u'_\eta + w'u'_\zeta) - (u'_{\xi\xi} + u'_{\eta\eta} + u'_{\zeta\zeta}) \\ -p'_\eta &= Uv'_\xi + \varepsilon(u'v'_\xi + v'v'_\eta + w'v'_\zeta) - (v'_{\xi\xi} + v'_{\eta\eta} + v'_{\zeta\zeta}) \\ -p'_\zeta &= Uw'_\xi + \varepsilon(u'w'_\xi + v'w'_\eta + w'w'_\zeta) - (w'_{\xi\xi} + w'_{\eta\eta} + w'_{\zeta\zeta}) \\ &= Uw'_\xi + \varepsilon(u'w'_\xi + v'w'_\eta + w'w'_\zeta) - (w'_{\xi\xi} + w'_{\eta\eta} + w'_{\zeta\zeta}). \end{aligned}$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ ergeben sich damit die Oseen-Gleichungen

$$\begin{aligned} -p'_\xi &= Uu'_\xi - (u'_{\xi\xi} + u'_{\eta\eta} + u'_{\zeta\zeta}) & \Leftrightarrow & -p_x = Uu_x - \nu(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \\ -p'_\eta &= Uv'_\xi - (v'_{\xi\xi} + v'_{\eta\eta} + v'_{\zeta\zeta}) & \Leftrightarrow & -p_y = Uv_x - \nu(v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}) \\ -p'_\zeta &= Uw'_\xi - (w'_{\xi\xi} + w'_{\eta\eta} + w'_{\zeta\zeta}) & \Leftrightarrow & -p_z = Uw_x - \nu(w_{xx} + w_{yy} + w_{zz}). \end{aligned}$$

3.3 Analytische Lösungen der Nachlauf-Fernfeld-Gleichungen

Die Nachlauf-Fernfeld-Gleichungen (3.2.23), (3.2.28) sind ein- bzw. zweidimensionale Wärmeleitungsgleichungen, bei der die x -Koordinate die Rolle der Zeit-Variablen einnimmt und y bzw. y, z die räumlichen Variablen darstellen. Nimmt man an, dass die Anfangsbedingung \bar{g} hinreichend regulär ist, so erhält man nach (2.4.6) folgende analytische Lösungen:

2D-Nachlauf-Fernfeld

$$\bar{u}(x, y) = \left(\frac{U}{4\pi\nu x} \right)^{1/2} \int_{y' \in \mathbb{R}} \bar{g}(y') e^{-\frac{U(y-y')^2}{4\nu x}} dy' \quad (3.3.1)$$

$$= \left(\frac{U}{4\pi\nu x} \right)^{1/2} e^{-\frac{Uy^2}{4\nu x}} \int_{y' \in \mathbb{R}} \bar{g}(y') e^{\frac{U(2yy'-y'^2)}{4\nu x}} dy' \quad (3.3.2)$$

$$v(x, y) = \int_0^y \bar{u}_x(x, y') dy' \quad (3.3.3)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{U}{4\pi\nu x^3} \right)^{1/2} \int_{y' \in \mathbb{R}} \bar{g}(y') \int_0^y e^{-\frac{U(y''-y')^2}{4\nu x}} \left(\frac{U(y''-y')^2}{4\nu x} - \frac{1}{2} \right) dy'' dy' \\ &= \left(\frac{U}{4\pi\nu x^3} \right)^{1/2} \int_{y' \in \mathbb{R}} \bar{g}(y') \left[-\frac{1}{2}(y''-y') e^{-\frac{U(y''-y')^2}{4\nu x}} \right]_{y''=0}^{y''=y} dy' \\ &= - \left(\frac{U}{16\pi\nu x^3} \right)^{1/2} \int_{y' \in \mathbb{R}} \bar{g}(y') \left((y-y') e^{-\frac{U(y-y')^2}{4\nu x}} + y' e^{-\frac{Uy'^2}{4\nu x}} \right) dy' \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

3D-Nachlauf-Fernfeld (nur \bar{u})

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, y, z) &= \frac{U}{4\pi\nu x} \int_{(y', z') \in \mathbb{R}^2} \bar{g}(y', z') e^{-\frac{U((y-y')^2 + (z-z')^2)}{4\nu x}} dy' dz' \\ &= \frac{U}{4\pi\nu x} e^{-\frac{U(y^2 + z^2)}{4\nu x}} \int_{(y', z') \in \mathbb{R}^2} \bar{g}(y', z') e^{\frac{U(2(y-y')z - (y'^2 + z'^2))}{4\nu x}} dy' dz' \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Man beachte, dass in die Gleichung (3.3.3) die Randbedingung (3.2.25) eingeht.

3.4 Asymptotische Lösungen der Nachlauf-Fernfeld-Gleichungen für rotationssymmetrische Strömungen

Für rotationssymmetrische Nachlauf-Strömungen macht man klassisch folgenden Ähnlichkeitsansatz für eine asymptotische Darstellung von \bar{u} in dem kleinen Parameter $\frac{1}{x}$ in großer Entfernung x vom Hindernis (s. [48] Abschnitt 12.1, S.361, [36] S.631 Aufgabe 9):

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, \eta) &= c_1 x^{-m_1} f(\eta) \\ \eta &:= c_2 \sqrt{y^2 + z^2} x^{-m_2} \\ c_1, c_2, m_1, m_2 &\in \mathbb{R}_{>0}. \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen von \bar{u} lauten dann:

$$\begin{aligned}\bar{u}_x &= -c_1(m_1x^{-(m_1+1)}f + m_2c_2x^{-(m_1+m_2+1)}\sqrt{y^2+z^2}f') = -c_1x^{-(m_1+1)}(m_1f + m_2\eta f') \\ \bar{u}_y &= c_1c_2x^{-(m_1+m_2)}\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}f' \\ \bar{u}_{yy} &= c_1c_2x^{-(m_1+m_2)}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}} - \frac{y^2}{(y^2+z^2)^{3/2}}\right)f' + c_2x^{-m_2}\frac{y^2}{y^2+z^2}f''\right) \\ \bar{u}_{zz} &= c_1c_2x^{-(m_1+m_2)}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}} - \frac{z^2}{(y^2+z^2)^{3/2}}\right)f' + c_2x^{-m_2}\frac{z^2}{y^2+z^2}f''\right).\end{aligned}$$

Einsetzen in die Nachlauf-Fernfeld-Gleichung (3.2.21) ergibt

$$\begin{aligned}0 &= -U\bar{u}_x + \nu(\bar{u}_{yy} + \bar{u}_{zz}) \\ &= Uc_1x^{-(m_1+1)}(m_1f + m_2\eta f') + \nu c_1c_2x^{-(m_1+m_2)}\left(\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}f' + c_2x^{-m_2}f''\right).\end{aligned}$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $c_2\sqrt{y^2+z^2}x^{m_1+m_2}(Uc_1)^{-1}$, so erhält man

$$0 = c_2x^{m_2-1}\sqrt{y^2+z^2}(m_1f + m_2\eta f') + \frac{\nu}{U}c_2^2(f' + \eta f''). \quad (3.4.1)$$

Um eine gewöhnliche Differentialgleichung für f zu erhalten, muss

$$m_2 = \frac{1}{2}$$

gelten, denn dann ist der erste Faktor $c_2x^{m_2-1}\sqrt{y^2+z^2}$ in (3.4.1) gleich η . Setzt man außerdem

$$\alpha := \sqrt{\frac{\nu}{U}}c_2,$$

so ergibt sich

$$0 = m_1\eta f + \frac{1}{2}\eta^2 f' + \alpha f' + \alpha\eta f''. \quad (3.4.2)$$

Nach (2.4.7) ist

$$\begin{aligned}Q &:= \int_{(y,z) \in \mathbb{R}^2} \bar{u}(y,z) dydz = c_1x^{-m_1} \int_{(y,z) \in \mathbb{R}^2} f(c_2x^{-1/2}\sqrt{y^2+z^2}) dydz \\ &= c_1x^{-m_1} \int_{(y,z) \in \mathbb{R}^2} f\left(c_2\sqrt{\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{x}}\right)^2}\right) dydz \\ &= c_1x^{1-m_1} \int_{(y',z') \in \mathbb{R}^2} f(c_2\sqrt{y'^2+z'^2}) dy'dz'\end{aligned}$$

wohldefiniert und unabhängig von $x \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass

$$m_1 = 1$$

gelten muss. Gleichung (3.4.2) lautet daher

$$0 = \eta f + \frac{1}{2}\eta^2 f' + \alpha f' + \alpha\eta f'' = \left(\frac{1}{2}\eta^2 f + \alpha\eta f'\right)' \quad (3.4.3)$$

$$\Leftrightarrow \text{const.} = \frac{1}{2\alpha}\eta^2 f + \eta f' \quad (3.4.4)$$

mit den Randbedingungen

$$f'(0) = 0 \quad (3.4.5)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} f(\eta) = 0. \quad (3.4.6)$$

Lemma 3.4.1 Die Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung (3.4.3) in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ sind genau die Funktionen

$$f_c(\eta) = ce^{-\eta^2/(4\alpha)} \quad c \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere hat jede Lösung f folgende Eigenschaften:

- a) $f'(0) = 0$
- b) $\lim_{\eta \rightarrow \infty} f(\eta) = 0$

Beweis: „ \Leftarrow “. Für $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{1}{2\alpha}\eta^2 f_c + \eta f'_c = \frac{c}{2\alpha}\eta^2 e^{-\eta^2/(4\alpha)} - \frac{c}{2\alpha}\eta^2 ce^{-\eta^2/(4\alpha)} = 0.$$

Nach (3.4.4) mit $const. = 0$ ist f_c eine Lösung von (3.4.3).

„ \Rightarrow “. Es sei f eine Lösung von (3.4.3) auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Insbesondere ist f stetig in 0. Nach (3.4.4) gibt es ein $\beta \in \mathbb{R}$, so dass

$$\eta f' + \frac{1}{2\alpha}\eta^2 f = \beta.$$

Im Fall $\beta = 0$ erfüllt f die homogene Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} y' + \frac{1}{2\alpha}\eta y &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_{>0} \\ y(0) &= f(0) =: c. \end{aligned}$$

Weil die Funktion $\frac{1}{2\alpha}\eta$ auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig ist, lautet nach [60] §2 S.24 die eindeutige Lösung

$$y(\eta) = y(0)e^{-\eta^2/(4\alpha)} = f_c(\eta).$$

Annahme: $\beta \neq 0$. Dann erfüllt f die inhomogene Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} y' + \frac{1}{2\alpha}\eta y &= \frac{\beta}{\eta} \quad \text{in } \mathbb{R}_{>0} \\ y(0) &= f(0) =: c. \end{aligned}$$

Die Inhomogenität $\frac{\beta}{\eta}$ besitzt im Punkt $\eta = 0$ eine Singularität. Sie ist aber auf jedem Intervall $[\varepsilon, \infty[$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, stetig, so dass dort die eindeutige Lösung gegeben ist durch (s. [60] §2 S.25):

$$f_\varepsilon(\eta) = e^{-\frac{1}{4\alpha}(\eta^2 - \varepsilon^2)} \left(f(\varepsilon) + \beta \int_\varepsilon^\eta \frac{1}{\tau} e^{\frac{1}{4\alpha}(\tau^2 - \varepsilon^2)} d\tau \right).$$

Wegen

$$\int_\varepsilon^\eta \frac{1}{\tau} e^{\frac{1}{4\alpha}(\tau^2 - \varepsilon^2)} d\tau \geq \int_\varepsilon^\eta \frac{1}{\tau} d\tau = \ln(\eta) - \ln(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \infty$$

ergibt sich ein Widerspruch zu $f_\varepsilon(\eta) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f(\eta) \in \mathbb{R}$, so dass doch $\beta = 0$ gelten muss. ■

Das Randwertproblem (3.4.3), (3.4.5), (3.4.6) hat also nach Lemma 3.4.1 bis auf eine multiplikative Konstante, welche bereits durch c_1 in \bar{u} berücksichtigt ist, die eindeutige Lösung

$$f(\eta) = e^{-\frac{\eta^2}{4\alpha}} \quad (3.4.7)$$

und nimmt daher für

$$\alpha = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad c_2 := \sqrt{\frac{U}{4\nu}}$$

die einfache Form

$$f(\eta) = e^{-\eta^2}$$

an. Das bedeutet

$$\bar{u}(x, y, z) = \frac{c_1}{x} e^{-U \frac{y^2}{4\nu x}}.$$

Die Konstante c_1 ergibt sich durch Integration:

$$\begin{aligned} Q &= \int_{(y,z) \in \mathbb{R}^2} \bar{u}(y, z) \, dydz = \frac{c_1}{x} \int_{(y,z) \in \mathbb{R}^2} e^{-U \frac{y^2}{4\nu x}} \, dydz = \frac{4c_1\pi\nu}{U} \\ \Leftrightarrow \quad c_1 &= \frac{QU}{4\pi\nu}. \end{aligned}$$

Das Endergebnis lautet somit

$$\bar{u}(x, y, z) = \frac{QU}{4\pi\nu x} e^{-U \frac{y^2+z^2}{4\nu x}} \quad (3.4.8)$$

$$a(x, r) = \frac{QU}{4\pi\nu x} e^{-U \frac{r^2}{4\nu x}} \quad (\text{Zylinderkoordinaten}). \quad (3.4.9)$$

Das ist Gleichung (5.12.9) in dem Buch von Batchelor [2].

Die Konstante Q wird im folgenden Abschnitt untersucht und mit der Widerstandskraft des umströmten Körpers in Beziehung gesetzt. Die radiale Strömungskomponente erhält man aus der Kontinuitätsgleichung (3.2.31) zusammen mit der Randbedingung (3.2.35):

$$\begin{aligned} (rb)_r &= ra_x = r \left(\frac{QU}{4\pi\nu x^2} e^{-\frac{Ur^2}{4\nu x}} - \frac{QU}{4\pi\nu x} e^{-U \frac{r^2}{4\nu x}} \frac{Ur^2}{4\nu x^2} \right) = r \frac{QU}{4\pi\nu x^2} \left(1 - \frac{Ur^2}{4\nu x} \right) e^{-\frac{Ur^2}{4\nu x}} \\ \Rightarrow \quad rb(x, r) &= \int_0^r s \frac{QU}{4\pi\nu x^2} \left(1 - \frac{Us^2}{4\nu x} \right) e^{-\frac{Us^2}{4\nu x}} ds = \frac{Q}{2\pi x} \int_0^r \frac{2sU}{4\nu x} \left(1 - \frac{Us^2}{4\nu x} \right) e^{-\frac{Us^2}{4\nu x}} ds \\ &= \frac{Q}{2\pi x} \int_0^{\frac{Ur^2}{4\nu x}} (1-t) e^{-t} dt = \frac{Q}{2\pi x} \int_0^{\frac{Ur^2}{4\nu x}} (te^{-t})' dt = \frac{QUr^2}{8\pi\nu x^2} e^{-\frac{Ur^2}{4\nu x}} \\ \Rightarrow \quad b(x, r) &= \frac{QUr}{8\pi\nu x^2} e^{-\frac{Ur^2}{4\nu x}}. \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

Man sieht leicht, dass die asymptotische Lösung (a, b) die Randbedingungen (3.2.34) ... (3.2.37) erfüllt. Das Ergebnis noch einmal zusammengefasst:

3D-Nachlauf-Fernfeld, rotationssymmetrisch, asymptotisch

$$a(x, r) = \frac{QU}{4\pi\nu x} e^{-U \frac{r^2}{4\nu x}} \quad (3.4.11)$$

$$b(x, r) = \frac{QUr}{8\pi\nu x^2} e^{-\frac{Ur^2}{4\nu x}}. \quad (3.4.12)$$

Für den zweidimensionalen, achsensymmetrischen Fall berechnet man analog:

2D-Nachlauf-Fernfeld, achsensymmetrisch, asymptotisch

$$\bar{u}(x, y) = Q \left(\frac{U}{4\pi\nu x} \right)^{1/2} e^{-\frac{Uy^2}{4\nu x}} \quad (3.4.13)$$

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \int_0^y \bar{u}_x(x, y') dy' = Q \left(\frac{U}{4\pi\nu x^3} \right)^{1/2} \int_0^y \left(\frac{Uy'^2}{4\nu x} - \frac{1}{2} \right) e^{-\frac{Uy'^2}{4\nu x}} dy' \\ &= Q \left(\frac{U}{4\pi\nu x^3} \right)^{1/2} \left[-\frac{1}{2} y' e^{-\frac{Uy'^2}{4\nu x}} \right]_{y'=0}^{y'=y} \\ &= -Q \left(\frac{U}{16\pi\nu x^3} \right)^{1/2} y e^{-\frac{Uy^2}{4\nu x}}. \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

Das gleiche Ergebnis erhält man direkt, wenn man den ersten Term der asymptotischen Entwicklung (2.4.24) betrachtet, wobei dort (x, t) durch $(y, \frac{\nu x}{U})$ zu ersetzen ist. Wiederum erfüllt die asymptotische Lösung (\bar{u}, v) die Randbedingungen (3.2.25), (3.2.26), (3.2.27).

Der asymptotische Durchmesser $d_\delta(x)$ einer rotationssymmetrischen Nachlauf-Strömung an der Stelle x begrenzt den Bereich, in dem die axiale Strömung $u(x, \cdot)$ von der Außenströmung U um einen größeren Wert als eine vorgegebene Schranke $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ abweicht, d.h. in dem $\bar{u}(x, \cdot) \geq \delta$. Aus den Gleichungen (3.4.11), (3.4.13) erhält man (durch Auflösen nach r bzw. y) sofort

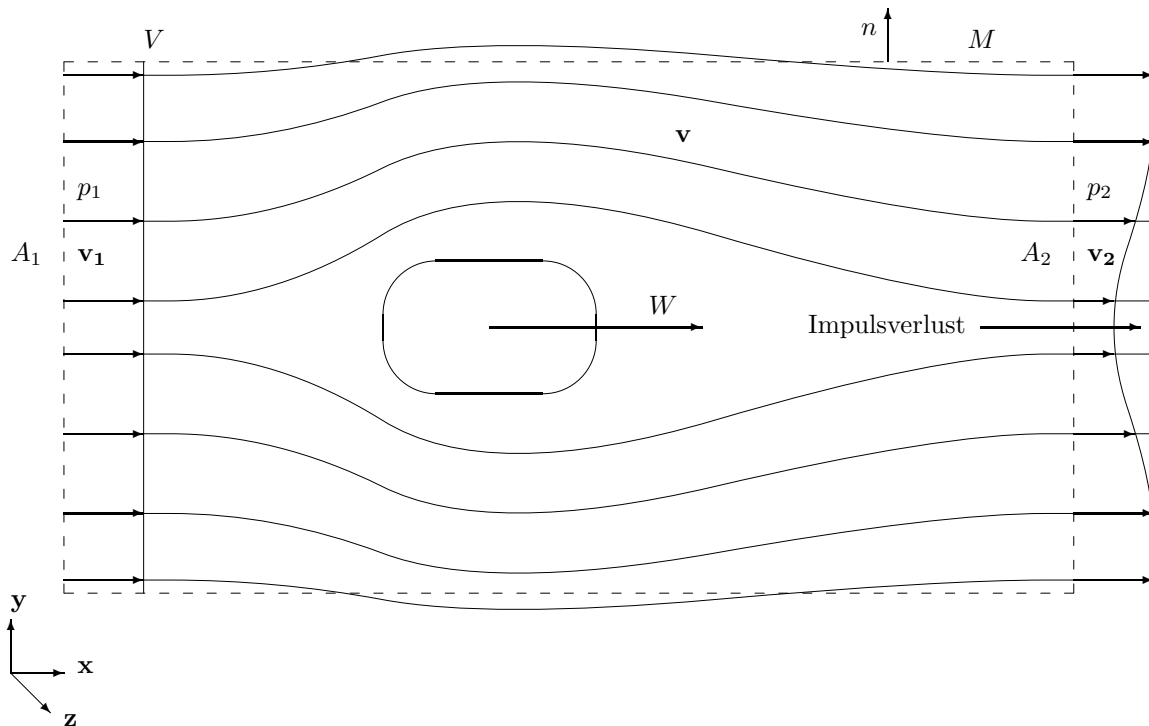
$$d_\delta(x) = \begin{cases} 2\sqrt{\frac{4\nu x}{U} \ln\left(\frac{QU}{4\pi\nu x\delta}\right)} & \text{dreidimensional, rotationssymmetrisch} \\ 2\sqrt{\frac{4\nu x}{U} \ln\left(\frac{Q}{\delta} \sqrt{\frac{U}{4\pi\nu x}}\right)} & \text{zweidimensional, achsensymmetrisch.} \end{cases} \quad (3.4.15)$$

Man erkennt hieran die erwartete parabolische Form des Nachlaufs. Eine graphische Darstellung findet man am Ende des nächsten Abschnittes in Abbildung 3.4, S. 71.

3.5 Widerstandskraft im Nachlauf-Fernfeld-Modell

In diesem Abschnitt wird der näherungsweise Zusammenhang $W = \rho U Q$ zwischen der Widerstandskraft W des umströmten Körpers und dem Querschnittsintegral $Q := \int \bar{u} dA$ der Verlustströmung $\bar{u} = U - u$ im Nachlauf-Bereich hergeleitet (s. [2] Abschnitt 5.12, Gleichung (5.12.15), S.351). Dieser Zusammenhang ist eine vereinfachte Darstellung des Widerstandes als Impulsverlust. Weitere Details zu diesem Thema findet man beispielsweise in [23] Kapitel 9.4.1. S. 209 ff.

Die folgende Abbildung entspricht der Abbildung 5.12.3 aus dem Buch von Batchelor [2] S.350.



Legende

- V : zylindrisches Kontrollvolumen mit Rand $\partial V = A_1 \dot{\cup} A_2 \dot{\cup} M$ (gestrichelte Linie)
- A_1, A_2 : Stirnflächen des Zylinders
- M : Mantelfläche des Zylinders
- $n(\mathbf{x})$: $= (n_x, n_y, n_z)(\mathbf{x})$ äußerer Normaleneinheitsvektor im Punkt $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \partial V$
- W : Widerstandskraft, Kraft des Fluids auf den Körper in Anströmrichtung
- \mathbf{v} : $= (u, v, w)$ Strömungsgeschwindigkeitsfeld
- \mathbf{v}_1 : $= (u_1, v_1, w_1)$ Strömungsprofil an der Eintrittsfläche A_1
- \mathbf{v}_2 : $= (u_2, v_2, w_2)$ Strömungsprofil an der Austrittsfläche A_2
- p_1 : Druckverteilung an der Eintrittsfläche A_1
- p_2 : Druckverteilung an der Austrittsfläche A_2

Abbildung 3.1: Zusammenhang zwischen Strömungswiderstand und Impulsverlust

Es sei darauf hingewiesen, dass in Abbildung 3.1 alle Größen in dimensionsloser Form angegeben sind. Die dimensionsbehaftete Widerstandskraft W^* wird dabei mit der Bezugskraft $F_B^* := \rho_B^*(U_B^* L_B^*)^2$ entdimensioniert, d.h. $W := W^*/F_B^*$. Eine Impulsbilanz in x -Richtung am zylindrischen Kontrollvolumen V ergibt:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\partial V} \rho u \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_{\partial V} p n_x \, dS + W + F_R \\
&= - \int_{A_1} \rho u^2 \, dS + \int_{A_2} \rho u^2 \, dS + \int_M \rho u \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS - \int_{A_1} p \, dS + \int_{A_2} p \, dS + W + F_R \\
\Leftrightarrow \\
W + F_R &= \int_A p_1 + \rho u_1^2 - p_2 - \rho u_2^2 \, dS - \int_M \rho u \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS
\end{aligned} \tag{3.5.1}$$

Notation:

F_R : (dimensionslose) viskose Reibungskräfte am Rand des Kontrollvolumens

dS : Oberflächenintegration

$A := A_1 = A_2$: Eintritts-/Austrittsfläche .

Die Massenbilanz am Kontrollvolumen liefert

$$0 = \int_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_A \rho(u_2 - u_1) \, dS + \int_M \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS. \tag{3.5.2}$$

In großer Entfernung also z.B. auf der Mantelfläche M gilt $u \approx U$, weswegen

$$\begin{aligned}
\int_M \rho u \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \int_M \rho(u - U) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} + \rho U \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS \approx U \int_M \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS \stackrel{(3.5.2)}{=} U \int_A \rho(u_1 - u_2) \, dS \\
&= \int_A \rho U(u_1 - u_2) \, dS.
\end{aligned} \tag{3.5.3}$$

Setzt man die rechte Seite von (3.5.3) in (3.5.1) ein und vernachlässigt die viskosen Reibungskräfte F_R am Kontrollvolumenrand, so erhält man

$$\begin{aligned}
W &= \int_A p_1 + \rho u_1^2 - p_2 - \rho u_2^2 \, dS - \int_A \rho U(u_1 - u_2) \, dS \\
&= \int_A p_1 + \rho(u_1 - U)u_1 - p_2 - \rho(u_2 - U)u_2 \, dS.
\end{aligned} \tag{3.5.4}$$

Im Eintrittsbereich gilt $u_1 \approx U$. Ferner ist der Druckunterschied zwischen Ein- und Austritt gering, so dass $p_1 \approx p_2$. Damit vereinfacht sich (3.5.4) zu

$$\begin{aligned}
W &= \int_A \rho(U - u_2)u_2 \, dS = \int_A \rho(U - u_2)(u_2 - U) + \rho(U - u_2)U \, dS \\
&\approx \rho U \int_A (U - u_2) \, dS \approx \rho U Q.
\end{aligned} \tag{3.5.5}$$

Das ist die Gleichung (5.12.15) auf Seite 352 in dem Buch von Batchelor [2].

Im zweidimensionalen Fall gilt analog

$$W \approx \rho U Q B. \tag{3.5.6}$$

Für eine dimensionslose Bezugsbreite $B = \frac{B^*}{L_B^*}$.

Ist der Widerstandsbeiwert

$$c_W = \frac{W^*}{\frac{\rho^*}{2} U^{*2} S_K^*} = \frac{W}{\frac{\rho}{2} U^2 S_K} \tag{3.5.7}$$

bezüglich einer körperspezifischen Fläche S_K^* (dimensionsbehaftet) bzw. $S_K := S_K^*/L_B^{*2}$ (dimensionslos) bekannt, wobei im zweidimensionalen Fall $S_K^* = L_K^*B^*$ für eine körperspezifische Länge L_K^* und damit $S_K = L_K B$ gilt, so kann man Q berechnen:

$$(3D) \quad Q = \frac{W}{\rho U} = \frac{c_W \frac{\rho}{2} U^2 S_K}{\rho U} = \frac{1}{2} c_W U S_K \quad (3.5.8)$$

$$(2D) \quad Q = \frac{W}{\rho U B} = \frac{c_W \frac{\rho}{2} U^2 L_K B}{\rho U B} = \frac{1}{2} c_W U L_K. \quad (3.5.9)$$

Mit diesen Ergebnissen lauten die Gleichungen (3.4.11) , ... , (3.4.14) dann

3D-Nachlauf-Fernfeld, rotationssymmetrisch, asymptotisch

$$a(x, r) = \frac{c_W S_K U^2}{8\pi\nu x} e^{-U \frac{r^2}{4\nu x}} \quad (3.5.10)$$

$$b(x, r) = \frac{c_W S_K U^2 r}{16\pi\nu x^2} e^{-\frac{U r^2}{4\nu x}} \quad (3.5.11)$$

2D-Nachlauf-Fernfeld, achsensymmetrisch, asymptotisch

$$\bar{u}(x, y) = c_W L_K \left(\frac{U^3}{16\pi\nu x} \right)^{1/2} e^{-\frac{U y^2}{4\nu x}} \quad (3.5.12)$$

$$v(x, y) = -c_W L_K \left(\frac{U^3}{64\pi\nu x^3} \right)^{1/2} |y| e^{-\frac{U y^2}{4\nu x}}. \quad (3.5.13)$$

Gleichung (3.5.12) ist äquivalent zu Gleichung (7.95) auf Seite 192 im Buch von Schlichting und Gersten [48] . Falls es sich bei dem umströmten Körper beispielsweise um einen Zylinder mit dimensionslosem Radius $d := \frac{d^*}{L_B^*}$ handelt, so kann man die kreisförmige Stirnfläche als Bezugsfläche wählen und erhält $S_K = \pi \frac{d^2}{4}$. Setzt man $\text{Re}_{U,d} := \frac{Ud}{\nu} = \frac{U^* d^*}{\nu^*}$ in (3.5.10) ein, dann ergibt sich

$$\bar{u}(x, y, z) = \frac{c_W U^2 d^2}{32\nu x} e^{-U \frac{r^2}{4\nu x}} = \frac{c_W U d \text{Re}_{U,d}}{32x} e^{-U \frac{r^2}{4\nu x}}. \quad (3.5.14)$$

Dies ist Gleichung (12.52) auf Seite 338 im Buch von Schlichting und Gersten [48]. Dort steht allerdings ein Druckfehler: Der Faktor π auf der rechten Seite muss gestrichen werden. (Auch in der vorangehenden Gleichung (12.51) ist leider ein Druckfehler: Im Nenner muss dort $\pi l^2/4$ stehen anstelle von πl^2 .)

Der c_W -Wert einer flachen, tangential angeströmten Platte der dimensionslosen Länge $l = l^*/L_B^* =: L_K$ und Breite B lautet nach dem Blasius'schen Widerstandsgesetz (s. (1.5.24)):

$$c_W = \frac{1,328}{\sqrt{\frac{Ul}{\nu}}}. \quad (3.5.15)$$

wobei als Bezugsfläche $S_K = Bl$ für den einseitigen bzw. $S_K = 2Bl$ für den beidseitigen Plattenwiderstand gewählt ist. Der asymptotische Nachlauf einer beidseitig umströmten Platte ergibt sich

Asymptotische Nachlauf-Strömung einer tangential angeströmten, flachen Platte, $Re = 10^6$

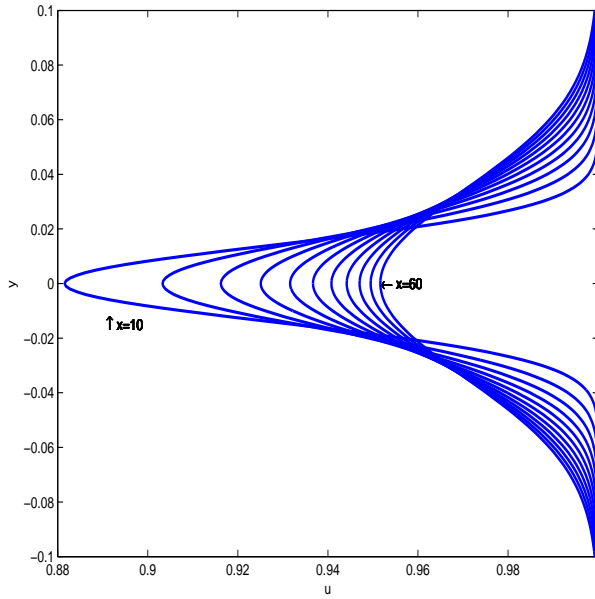


Abbildung 3.2: $u(x, y)$, $x = 10, 15, \dots, 60$

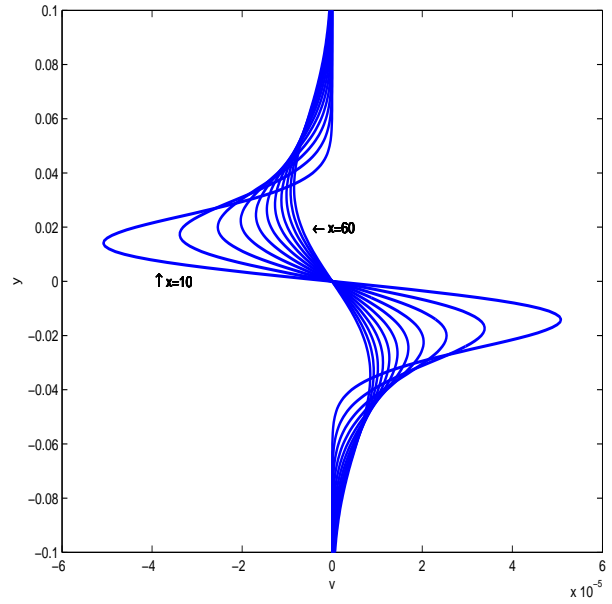


Abbildung 3.3: $v(x, y)$, $x = 10, 15, \dots, 60$

demnach gemäß (3.5.12), (3.5.13) als:

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, y) &= c_W L_K \left(\frac{U^3}{16\pi\nu x} \right)^{1/2} e^{-\frac{Uy^2}{4\nu x}} = \frac{1,328}{\sqrt{\frac{Ul}{\nu}}} 2l \left(\frac{U^3}{16\pi\nu x} \right)^{1/2} e^{-\frac{Uy^2}{4\nu x}} \\ &= \frac{0,664}{\sqrt{\pi}} U \sqrt{\frac{l}{x}} e^{-\frac{Uy^2}{4\nu x}} \end{aligned} \quad (3.5.16)$$

$$\begin{aligned} v(x, y) &= -c_W L_K \left(\frac{U^3}{64\pi\nu x^3} \right)^{1/2} |y| e^{-\frac{Uy^2}{4\nu x}} = -\frac{1,328}{\sqrt{\frac{Ul}{\nu}}} 2l \left(\frac{U^3}{64\pi\nu x^3} \right)^{1/2} |y| e^{-\frac{Uy^2}{4\nu x}} \\ &= -\frac{0,332}{\sqrt{\pi}} U \sqrt{\frac{l}{x}} \frac{|y|}{x} e^{-\frac{Uy^2}{4\nu x}}. \end{aligned} \quad (3.5.17)$$

Gleichung (3.5.16) ist die Gleichung für u_1 in der Originalarbeit von Tollmien auf Seite 269 (Zeile 7 von unten).

Die asymptotische Platten-Nachlauf-Strömung ist für $U = 1$, $l = 1$, $Re = 10^6 = \nu^{-1}$ in den Abbildungen 3.2 und 3.3 dargestellt. Die Abbildung 3.4 zeigt den parabolischen Verlauf des Nachlauf-Durchmessers $d_\delta(x) = 2|y_\delta(x)|$, wobei als durchmesserdefinierende Abweichung $\delta := 10^{-5}$ gewählt wurde (vgl. (3.4.15)):

$$\begin{aligned} \delta &= \bar{u}(x, y_\delta(x)) = \frac{0,664}{\sqrt{\pi}} U \sqrt{\frac{l}{x}} e^{-\frac{Uy_\delta(x)^2}{4\nu x}} \\ \Leftrightarrow y_\delta(x) &= \pm \sqrt{\frac{4\nu x}{U} \ln \left(\frac{0,664U}{\delta} \sqrt{\frac{l}{\pi x}} \right)}. \end{aligned} \quad (3.5.18)$$

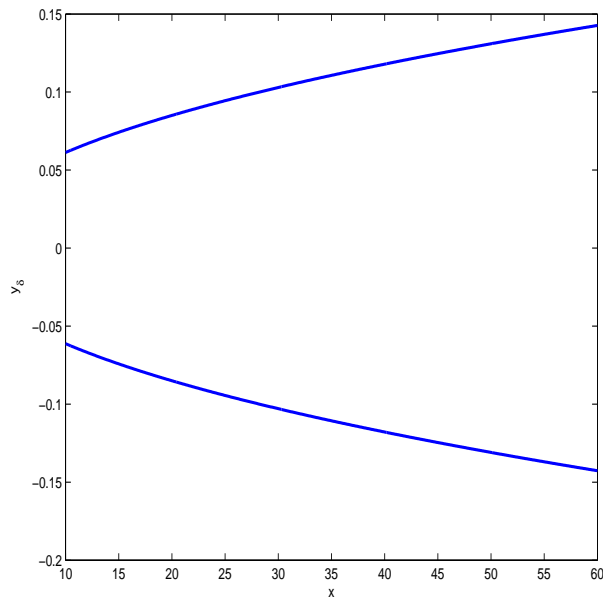


Abbildung 3.4: parabolische Entwicklung des Nachlauf-Durchmessers [$\bar{u}(x, y_\delta) = \delta = 10^{-5}$]

3.6 Nachlauf-Fernfeld-Gleichungen höherer Ordnung für zweidimensionale achsensymmetrische Strömungen

Wie in der Einleitung angegeben, werden hier die Ergebnisse des Artikels [55] von Ting ¹ Teil 2. „Two Dimensional Symmetric Wake“ dargestellt, ohne dabei an dessen knapp formuliertem Text zu „kleben“, d.h. Aufbau, Notation und Beweise wurden teils geändert bzw. ausführlicher gestaltet. Inhalt ist die Herleitung von asymptotischen, zweidimensionalen, achsensymmetrischen Nachlauf-Fernfeld-Gleichungen höherer Ordnung. Die in den vorangehenden Abschnitten angegebenen zweidimensionalen Nachlauf-Fernfeld-Gleichungen werden sich in diesem Kontext als Gleichungen erster Ordnung herausstellen. Letztendlich werden jedoch nur Nachlauf-Fernfeld-Gleichungen bis zur Ordnung drei und hier auch nur die führenden Terme konkret berechnet. Der Grund hierfür ist, dass sich diese Terme vollständig mithilfe des Widerstandsbeiwertes des umströmten Körpers ohne genaue Kenntnis eines Anfangsströmungsprofils hinter dem Körper angeben lassen. Höhere Ordnungen würden in praktischen Anwendungen meist nicht verfügbare Zusatzinformationen (die Kenntnis höherer Momente) zu einem solchen Anfangsströmungsprofil erfordern.

Ausgangspunkt sind die Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen in von Mises-Koordinaten, wobei der Druckgradient p_x als vernachlässigbar angenommen wird (s. 1.4.14):

$$u_x = \nu(uu_\psi)_\psi \quad (3.6.1)$$

¹Lu Ting ist emeritierter Professor am Courant Institute of Mathematical Sciences der Universität New York. Sein mathematischer Stammbaum ist: Lu Ting ← F. Ludloff ← Ludwig Prandtl ← August Föppl (Föppl-Klammer) ← Christian Otto Mohr (Mohr'scher Spannungskreis).

mit den Randbedingungen

$$u(\psi, x_0) = U(1 - \epsilon f(\psi)) \quad \text{für alle } \psi \in \mathbb{R} \quad (3.6.2)$$

$$\lim_{|\psi| \rightarrow \infty} u(\psi, x) = U \quad \text{für alle } x \geq x_0 \quad (3.6.3)$$

$$u_\psi(0, x) = 0 \quad \text{für alle } x \geq x_0. \quad (3.6.4)$$

Dabei beschreibt f aus (3.6.2) wie in den vorangehenden Abschnitten in leicht abgewandelter Form ein vorgegebenes Anfangsprofil an einer zunächst nicht näher bestimmten Anfangsposition $x_0 > 0$. Diese kann als freier Parameter der Modellierung betrachtet werden. Auf eine geeignete konkrete Wahl von x_0 wird jedoch erst in Abschnitt 3.7 eingegangen. Der als klein angesehene Parameter ϵ soll die geringfügige Abweichung von u von der Anströmung U in hinreichend weiter Entfernung hinter dem Hindernis modellieren. Er korrespondiert mit ϵ^{α_1}/U aus dem Ansatz (3.2.1). Die Randbedingung (3.6.3) drückt aus, dass u auf der Symmetrieachse des Körpers - das ist in diesem Fall die $(\psi = 0)$ -Stromlinie - ein Minimum annimmt, weswegen die partielle Ableitung nach ψ Null sein muss.

Bezüglich des Parameters ϵ soll u asymptotisch entwickelt werden. Ting macht den Ansatz

$$u(\psi, x, \epsilon) = U \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i u^{(i)}(\psi, x) \right). \quad (3.6.5)$$

Die rechte Seite von (3.6.5) setzt man in (3.6.1) ein und ordnet die Summanden nach ϵ -Potenzen:

$$\begin{aligned} 0 &= u_x - \nu(uu_\psi)_\psi = \left(U \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i u^{(i)} \right) \right)_x - \nu \left(U \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i u^{(i)} \right) \left(U \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i u^{(i)} \right) \right)_\psi \right) \\ &= -U \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i u_x^{(i)} + \nu U^2 \left(\left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i u^{(i)} \right) \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i u_\psi^{(i)} \right)_\psi \\ &= -U \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i u_x^{(i)} + \nu U^2 \left(\sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i u_\psi^{(i)} - \sum_{i=2}^{\infty} \epsilon^i \sum_{j=1}^{i-1} u^{(j)} u_\psi^{(i-j)} \right)_\psi \\ &= -U \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i u_x^{(i)} + \nu U^2 \left(\sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i u_\psi^{(i)} - \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{\infty} \epsilon^i \sum_{j=1}^{i-1} (u^{(j)} u^{(i-j)})_\psi \right)_\psi \\ &= -U \left[\epsilon (u_x^{(1)} - \nu U u_{\psi\psi}^{(1)}) + \sum_{i=2}^{\infty} \epsilon^i \left(u_x^{(i)} - \nu U u_{\psi\psi}^{(i)} + \frac{\nu U}{2} \left(\sum_{j=1}^{i-1} u^{(j)} u^{(i-j)} \right)_\psi \right) \right]. \quad (3.6.6) \end{aligned}$$

Die Faktoren vor den einzelnen ϵ -Potenzen in (3.6.6) müssen bei einer korrekten Asymptotik verschwinden, so dass man folgendes System partieller Differentialgleichungen erhält:

2D-Nachlauf-Fernfeld-Gleichungen höherer Ordnung

$$u_x^{(i)} - \nu U u_{\psi\psi}^{(i)} = -\frac{\nu U}{2} \left(\sum_{j=1}^{i-1} u^{(j)} u^{(i-j)} \right)_\psi =: -F^{(i)} \quad \text{für } i \in \mathbb{N}. \quad (3.6.7)$$

Die Randbedingungen für die Funktionen $u^{(i)}$ ergeben sich unmittelbar aus denen von u (wiederum durch Einsetzen der rechten Seite von (3.6.5) in (3.6.2), (3.6.3), (3.6.4) und Ordnen nach

ϵ -Potenzen):

$$u^{(1)}(\psi, x_0) = f(\psi) \quad \text{für alle } \psi \in \mathbb{R} \quad (3.6.8)$$

$$u^{(i)}(\psi, x_0) = 0 \quad \text{für alle } i \geq 2, \psi \in \mathbb{R} \quad (3.6.9)$$

$$\lim_{|\psi| \rightarrow \infty} u^{(i)}(\psi, x) = 0 \quad \text{für alle } i \geq 1, x \geq x_0 \quad (3.6.10)$$

$$u_\psi(0, x) = 0 \quad \text{für alle } i \geq 1, x \geq x_0. \quad (3.6.11)$$

Gleichung (3.6.12) ist für $i = 1$ wegen $F^{(1)} = 0$ eine homogene und für $i \geq 2$ eine inhomogene Wärmeleitungsgleichung, wobei sich die Inhomogenität $F^{(i)}$ der Ordnung $i \geq 2$ aus Lösungen $u^{(k)}$, $k < i$, der vorangehenden Gleichungen zusammensetzt, weswegen eine iterative Lösung des Systems möglich ist.

Den Ansatz (3.6.5) kann man natürlich auch für kartesische oder Zylinder-Koordinaten machen, was in der Literatur auch häufig getan wird. Die Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen in solchen Koordinaten unter Vernachlässigung des Druckgradienten liefern dann für u ebenfalls ein System von partiellen Differentialgleichungen, das (3.6.12) entspricht. Allerdings treten dann für Ordnungen $i \geq 2$ auf der rechten Seite der (3.6.12) entsprechenden Gleichung Terme auf, die Vertikal-/Radialgeschwindigkeiten $v^{(j)}$, $j < i$, enthalten. Diese müssen in jedem Iterationsschritt mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung berechnet werden. Algorithmisch ist das sicherlich kein Problem, für analytische Untersuchungen ist dieses Zweischrittverfahren jedoch hinderlich. Die von Mises-Variablen liefern gerade die für diese Iteration geeignete Entkopplung von der Kontinuitätsgleichung.

Die Gleichungen (3.6.12) bis (3.6.16) sollen nun in Ähnlichkeitsvariablen transformiert werden. Hierfür sind zunächst zwei Tabellen angegeben, welche die Korrespondenzen zwischen der „Wärmeleitungs-Notation“ aus dem Kapitel 2 und der hier verwendeten „Nachlauf-Notation“ übersichtlich auflisten .

Variablen-Korrespondenzen

Wärmeleitung	Bedeutung	Nachlauf	Bedeutung
x	Raumvariable	ψ	Stromfunktion
t	Zeitvariable	x	axiale Raumvariable
$t_0 > 0$	Startzeitpunkt	$x_0 > 0$	Anfangsposition
a	Temperaturleitfähigkeit	$a := \nu U = U/\text{Re}$	U : Anströmgeschwindigkeit Re : Reynoldszahl
$\bar{x} \stackrel{2.4.2}{:=} \frac{x}{\sqrt{a}}$	skalierte Raumvariable	$\bar{\psi} := \frac{\psi}{\sqrt{a}} = \frac{\psi}{\sqrt{\nu U}}$	
$\tilde{x} \stackrel{(2.4.4)}{:=} \frac{\bar{x}}{\sqrt{4t}} = \frac{x}{\sqrt{4at}}$	Ähnlichkeitsvariable	$\xi := \tilde{\psi} := \frac{\psi}{\sqrt{4ax}} = \frac{\psi}{\sqrt{4\nu U x}}$	

Funktionskorrespondenzen

Wärmeleitung	Nachlauf
$u(x, t)$	$u^{(i)}(\psi, x)$
$\tilde{u}(\tilde{x}, t)$	$\tilde{u}^{(i)}(\xi, x)$
$u_t - au_{xx} = -F \quad \Leftrightarrow \quad (2.4.16)$	$u_x^{(i)} - \nu U u_{\psi\psi}^{(i)} = -F^{(i)} \quad \Leftrightarrow$
$4t\tilde{u}_t - \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} - 2\tilde{x}\tilde{u}_{\tilde{x}} = -4t\tilde{F}(\tilde{x}, t)$	$4x\tilde{u}_x^{(i)} - \tilde{u}_{\xi\xi}^{(i)} - 2\xi\tilde{u}_\xi^{(i)} = -4xF^{(i)}(\psi, x)$
$f(x)$	$f(\psi)$
$\bar{f}(\bar{x}) = f(\sqrt{a\bar{x}})$	$\bar{f}(\bar{\psi}) := f(\sqrt{\nu U} \bar{\psi})$
$\tilde{f}(\tilde{x}) \stackrel{(2.4.17)}{:=} \bar{f}(\sqrt{4t_0\tilde{x}}) = f(\sqrt{4at_0\tilde{x}})$	$\tilde{f}(\xi) := f(\sqrt{4\nu U x_0} \xi)$
	$\stackrel{(3.6.12)}{=} -\frac{1}{2}(\sum_{j=1}^{i-1} \tilde{u}^{(j)}\tilde{u}^{(i-j)})_{\xi\xi} =: -\tilde{F}^{(i)}(\xi, x)$

2D-Nachlauf-Fernfeld-Gleichungen höherer Ordnung in Ähnlichkeitsvariablen

$$\tilde{u}_{\xi\xi}^{(i)} + 2\xi\tilde{u}_\xi^{(i)} - 4x\tilde{u}_x^{(i)} = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{i-1} \tilde{u}^{(j)}\tilde{u}^{(i-j)}\right)_{\xi\xi} = \tilde{F}^{(i)} \quad \text{für } i \in \mathbb{N} \quad (3.6.12)$$

$$\tilde{u}^{(1)}(\xi, x_0) = f(\sqrt{4\nu U x_0 \xi}) =: \tilde{f}(\xi) \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R} \quad (3.6.13)$$

$$\tilde{u}^{(i)}(\xi, x_0) = 0 \quad \text{für alle } i \geq 2, \xi \in \mathbb{R} \quad (3.6.14)$$

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \tilde{u}^{(i)}(\xi, x) = 0 \quad \text{für alle } i \geq 1, x \geq x_0 \quad (3.6.15)$$

$$\tilde{u}_\xi(0, x) = 0 \quad \text{für alle } i \geq 1, x \geq x_0. \quad (3.6.16)$$

3.6.1 Rekursionsformel

Das Differentialgleichungssystem (3.6.12), ..., (3.6.16) soll iterativ gelöst werden mit dem Ziel, eine asymptotische Entwicklung von \tilde{u} für $x \rightarrow \infty$ zu erhalten.

In der Literatur wird diese häufig als Potenzreihe in $x^{-1/2}$ antizipiert, d.h. im Sprachgebrauch von Definition (2.1.4) wird der Ansatz einer asymptotischen Entwicklung mit einer asymptotischen Amplitudenfolge $a_n(x) = x^{-n/2}$ versucht. Das geht bei der konkreten Berechnung für einige Anfangsglieder gut, scheitert dann aber und es werden künstlich sogenannte logarithmische Terme eingeführt, d.h.: es wird nachträglich die asymptotische Amplitudenfolge geändert.

Der Grund ist letztendlich, dass man bei diesem Ansatz unmittelbar dazu verleitet wird, summandenweise inhomogene Fehlerfunktion-Differentialgleichungen $y_n'' + 2\xi y_n' + 2ny_n = h_n$ zu lösen und die Lösungen nach dem Prinzip der separierten Variablen zu einer Lösung $y_n(\xi)x^{-n/2}$ der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung $v_{n,\xi\xi} + 2\xi v_{n,\xi} - 4xv_{n,x} = h_n$ zusammensetzen, um schließlich mittels Superposition eine Gesamtlösung einer inhomogenen Wärmeleitungsgleichung $\tilde{u}_{\xi\xi}^{(i)} + 2\xi\tilde{u}_{\xi}^{(i)} - 4xu_{i,x}^{(i)} = \tilde{F}^{(i)}$ (s. (3.6.12)) zu erhalten. Wie bereits erwähnt beschreibt die Fehlerfunktion-Differentialgleichung aber eine linear gedämpfte Schwingung. Ist die Inhomogenität $h = \Phi_n$ eine Eigenschwingung so tritt „Resonanz“ ein, so dass die Gesamtlösung nicht mehr das gewünschte Abklingverhalten für $|\xi| \rightarrow \infty$ besitzt. Man wird daher gezwungen, die Strategie zu

ändern, wodurch oben erwähnte logarithmische Terme ins Spiel kommen.

Statt direkt mit einem Ansatz einer asymptotischen Entwicklung für $x \rightarrow \infty$ zu starten, werden im Folgenden stets Reihenentwicklungen betrachtet, welche schlicht die Basisdarstellungen in der orthogonalen Schauder-Basis $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des $L^2(\mu)$ sind. Insbesondere wird damit implizit angenommen, dass man sich während der Iteration stets im Raum $L^2(\mu)$ befindet, so dass solche Basisdarstellungen stets möglich und wohldefiniert sind. Abschließend wird eine Umsortierung der Summanden vorgenommen, so dass man eine asymptotische Entwicklung für $x \rightarrow \infty$ erhält. Dieses Prinzip wird von Ting „Normalbasenmethode“ (engl.: „method of normal modes“) genannt, für die er auf das bekannte Werk [12] „Methods of Mathematical Physics“ von Courrant und Hilbert verweist, in dem dieses Vorgehen jedoch nicht als besondere Methode proklamiert wird (s. Kapitel V §2Abschnitt 1, S.282).

Die benötigte Notation ist etwas umfangreich aber dafür exakt. Wir beginnen mit den Bezeichnungen für die Basisdarstellungen in $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\tilde{u}^{(i)}(\xi, x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n^{(i)}(x) \Phi_n(\xi) \quad (3.6.17)$$

$$v_n^{(i)}(x) := \langle \tilde{u}^{(i)}(\cdot, x), \Phi_n \rangle_{\mu} / \|\Phi_n\|_{\mu}^2 \quad (3.6.18)$$

$$\tilde{F}^{(i)}(\xi, x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n^{(i)}(x) \Phi_n(\xi) \quad (3.6.19)$$

$$h_n^{(i)}(x) := \langle \tilde{F}^{(i)}(\cdot, x), \Phi_n \rangle_{\mu} / \|\Phi_n\|_{\mu}^2$$

$$\stackrel{(3.6.12)}{=} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} \langle (\tilde{u}^{(j)} \tilde{u}^{(i-j)})_{\xi\xi}(x, \cdot), \Phi_n \rangle_{\mu} / \|\Phi_n\|_{\mu}^2$$

$$\stackrel{(3.6.17)}{=} \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{i-1} v_k^{(j)}(x) v_l^{(i-j)}(x) \underbrace{\langle (\Phi_k \Phi_l)'' , \Phi_n \rangle_{\mu} / \|\Phi_n\|_{\mu}^2}_{=: \alpha_{kln} \in \mathbb{R}}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{\infty} \alpha_{kln} \sum_{j=1}^{i-1} v_k^{(j)}(x) v_l^{(i-j)}(x). \quad (3.6.20)$$

Man beachte, dass die Koeffizienten α_{kln} vom konkreten Problem unabhängige Konstanten sind, für die $\alpha_{kln} = \alpha_{lkn}$ und nach Lemma 2.3.5 c)

$$\alpha_{kln} = 0 \quad \text{für gerades } k+l+n \text{ oder } n \leq 2 \quad (3.6.21)$$

gilt. Nun setzt man die rechten Seiten von (3.6.17) und (3.6.19) in die Differentialgleichung (3.6.12) ein

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} v_n^{(i)}(x) (\Phi_n''(\xi) + 2\xi \Phi_n'(\xi)) - 4x v_n^{(i)'}(x) \Phi_n(\xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-2n v_n^{(i)}(x) - 4x v_n^{(i)'}(x)) \Phi_n(\xi) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} h_n^{(i)}(x) \Phi_n(\xi) \end{aligned}$$

und schließt durch Koeffizientenvergleich

$$-2n v_n^{(i)}(x) - 4x v_n^{(i)'}(x) = h_n^{(i)}(x) \Leftrightarrow v_n^{(i)'}(x) + \frac{n}{2x} v_n^{(i)}(x) = -\frac{1}{4x} h_n^{(i)}(x) \quad (3.6.22)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in]0, \infty[$. Diese gewöhnlichen, inhomogenen Differentialgleichungen erster Ordnung haben auf dem Intervall $[x_0, \infty[$ die Lösungen

$$\begin{aligned}
v_n^{(i)}(x) &= e^{-\int_{x_0}^x \frac{n}{2t} dt} \left(v_n^{(i)}(x_0) - \int_{x_0}^x \frac{1}{4t} h_n^{(i)}(t) e^{\int_{x_0}^t \frac{n}{2s} ds} dt \right) \\
&= \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-\frac{n}{2}} \left(v_n^{(i)}(x_0) - \frac{1}{4x_0} \int_{x_0}^x h_n^{(i)}(t) \left(\frac{t}{x_0} \right)^{\frac{n}{2}-1} dt \right) \\
&\stackrel{(3.6.20)}{=} \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-\frac{n}{2}} v_n^{(i)}(x_0) - \frac{1}{8} x^{-\frac{n}{2}} \sum_{k,l=1}^{\infty} \alpha_{kln} \sum_{j=1}^{i-1} \int_{x_0}^x (v_k^{(j)} v_l^{(i-j)})(t) t^{\frac{n}{2}-1} dt. \quad (3.6.23)
\end{aligned}$$

Gleichung (3.6.23) stellt eine Rekursionsformel zur Berechnung der Funktionen $v_n^{(i)}$ dar. Für $i \geq 2$ liegen gemäß (3.6.14) homogene Anfangsbedingungen vor, so dass

$$v_n^{(i)}(x) \stackrel{(3.6.20)}{=} -\frac{1}{8} x^{-\frac{n}{2}} \sum_{k,l=1}^{\infty} \alpha_{kln} \sum_{j=1}^{i-1} \int_{x_0}^x (v_k^{(j)} v_l^{(i-j)})(t) t^{\frac{n}{2}-1} dt \quad \text{für } i \geq 2. \quad (3.6.24)$$

Nach diesen allgemeinen Überlegungen beginnen wir die konkrete Berechnung. Man sieht bereits, dass es für beliebige Iterationsstufen aussichtslos ist, übersichtliche, geschlossene Formeln anzugeben. Wir beschränken uns deshalb auf die Berechnung der ersten drei und geben anschließend einen Ausblick auf die nachfolgenden.

3.6.2 Berechnung von $\tilde{u}^{(1)}$

Gemäß Satz 2.4.7 c) und der aus diesem resultierenden asymptotischen Entwicklung (2.4.43) macht man den folgenden Lösungsansatz für $\tilde{u}^{(1)}$ (vgl. [55], Gleichungen (2.18)-(2.20)) :

$$\tilde{u}^{(1)}(\xi, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-n/2} \Phi_n(\xi) \quad (3.6.25)$$

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+1}(n-1)! \sqrt{x_0}} \int \bar{f}(\bar{\psi}) H_{n-1} \left(\frac{\bar{\psi}}{\sqrt{4x_0}} \right) d\bar{\psi} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+1}(n-1)! \sqrt{x_0}} \int f(\sqrt{\nu U} \bar{\psi}) H_{n-1} \left(\frac{\bar{\psi}}{\sqrt{4x_0}} \right) d\bar{\psi} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+1}(n-1)! \sqrt{\nu U x_0}} \int f(\psi) H_{n-1} \left(\frac{\psi}{\sqrt{4\nu U x_0}} \right) d\psi \quad (3.6.26)
\end{aligned}$$

$$A_1 = \frac{1}{4\sqrt{\nu U x_0}} \int f(\psi) d\psi \quad [H_0 = 1] \quad (3.6.27)$$

$$A_3 = \frac{1}{32\sqrt{\nu U x_0}} \int f(\psi) \left(\frac{\psi^2}{\nu U x_0} - 2 \right) d\psi \quad [H_2 = 4x^2 - 2]. \quad (3.6.28)$$

Aus (3.6.25) und (3.6.17) erhält man insbesondere

$$v_n^{(1)}(x) = A_n \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-n/2}. \quad (3.6.29)$$

Für achsensymmetrische Strömungen ist auch das Anfangsprofil f achsensymmetrisch, d.h. f ist eine gerade Funktion: $f(\psi) = f(-\psi)$. Weil H_{2n-1} nach (2.2.12) eine ungerade Funktion ist, verschwindet das Integral auf der rechten Seite von (3.6.26), weswegen

$$A_{2n} = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \quad (3.6.30)$$

Dies bedeutet aber:

$$v_{2n}^{(1)}(x) = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad (3.6.31)$$

$$\tilde{u}^{(1)}(\xi, x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-(2n+1)/2} \Phi_{2n+1}(\xi) \quad (3.6.32)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{\nu U x_0}} \int f(\psi) d\psi \Phi_1(\xi) + O(x^{-3/2}) \quad (3.6.33)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\nu U x_0}} \int_0^{\infty} f(\psi) d\psi \Phi_1(\xi) + O(x^{-3/2}). \quad (3.6.34)$$

3.6.3 Berechnung von $\tilde{u}^{(2)}$

Einsetzen von (3.6.29) in (3.6.24) ergibt

$$\begin{aligned} v_n^{(2)}(x) &\stackrel{(3.6.20)}{=} -\frac{1}{8} x^{-\frac{n}{2}} \sum_{k,l=1}^{\infty} \alpha_{kln} \int_{x_0}^x (v_k^{(1)} v_l^{(1)})(t) t^{\frac{n}{2}-1} dt \\ &\stackrel{(3.6.29)}{=} -\frac{1}{8} x^{-\frac{n}{2}} \sum_{k,l=1}^{\infty} \alpha_{kln} A_k A_l x_0^{\frac{k+l}{2}} \int_{x_0}^x t^{\frac{n-(k+l)}{2}-1} dt \\ &= -\frac{1}{8} x^{-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_{k(m-k)n} A_k A_{m-k} x_0^{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x t^{\frac{n-m}{2}-1} dt \\ &= -\frac{1}{8} x^{-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_{k(m-k)n} A_k A_{m-k} x_0^{\frac{m}{2}} \begin{cases} \frac{2}{n-m} \left(x^{\frac{n-m}{2}} - x_0^{\frac{n-m}{2}} \right) & , m \neq n \\ \ln \left(\frac{x}{x_0} \right) & , m = n \end{cases} \\ &= -\frac{1}{8} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_{k(m-k)n} A_k A_{m-k} \begin{cases} \frac{2}{n-m} \left(\left(\frac{x}{x_0} \right)^{-\frac{m}{2}} - \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-\frac{n}{2}} \right) & , m \neq n \\ \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-\frac{n}{2}} \ln \left(\frac{x}{x_0} \right) & , m = n. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.6.35)$$

Für ein ungerades $m \in \mathbb{N}$ und ein $k \in \{1, \dots, m-1\}$ ist entweder k oder $m-k$ gerade, so dass nach (3.6.30) $A_k A_{m-k} = 0$ gilt. Folglich braucht in (3.6.35) nur über gerade m summiert werden. Sind m, n gerade und $k \in \{1, \dots, m-1\}$, so ist auch $k + (m-k) + n = m + n$ gerade und damit $\alpha_{k(m-k)n} = 0$ gemäß (3.6.21). Insbesondere ist $v_n^{(2)} = 0$ für gerades n und für ungerades n wird in (3.6.35) der Fall $m = n$ eliminiert, der einen logarithmischen Term enthält. Zusammenfassend ergibt sich also für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{2n}^{(2)} &= 0 \quad (3.6.36) \\ v_{2n-1}^{(2)}(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^m \frac{\alpha_{2k-1, 2(m-k)+1, 2n-1} A_{2k-1} A_{2(m-k)+1}}{8(m-n)+4}}_{=: \beta_{mn}} \left(\left(\frac{x}{x_0} \right)^{-m} - \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-n+\frac{1}{2}} \right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{mn} \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-m} - \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} \beta_{mn}}_{=: \gamma_n} \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-n+\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{mn} \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-m} - \gamma_n \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-n+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.6.37)$$

Hieraus erhält man folgende Darstellung von $\tilde{u}^{(2)}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}^{(2)}(\xi, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_{2n-1}^{(2)}(x) \Phi_{2n-1}(\xi) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \beta_{mn} \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-m} - \gamma_n \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-n+\frac{1}{2}} \right) \Phi_{2n-1}(\xi) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_{mn} \Phi_{2n-1}(\xi) \right) \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-m} - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \Phi_{2n-1}(\xi) \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-n+\frac{1}{2}}. \quad (3.6.38)
\end{aligned}$$

Wir berechnen nun wieder den führenden Term dieser Entwicklung. Zuerst zeigen wir $\gamma_1 = 0$:

$$\begin{aligned}
\alpha_{ij1} &\stackrel{(3.6.20)}{=} \langle (\Phi_k \Phi_l)'', \Phi_1 \rangle_{\mu} / \|\Phi_1\|_{\mu}^2 \stackrel{(3.6.21)}{=} 0 \\
\Rightarrow \beta_{m1} &\stackrel{(3.6.37)}{=} \frac{1}{8(m-1)+4} \sum_{k=1}^m \alpha_{2k-1, 2(m-k)+1, 1} A_{2k-1} A_{2(m-k)+1} = 0 \\
\Rightarrow \gamma_1 &\stackrel{(3.6.37)}{=} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{m1} = 0. \quad (3.6.39)
\end{aligned}$$

Als nächstes wird $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_{1n} \Phi_{2n-1}(\xi) = \frac{1}{2} A_1^2 (\Phi_1^2(\xi) + \Phi_2(\xi) \operatorname{erf}(\xi))$ bewiesen. Es gehen zwei Detailrechnungen voraus ($\frac{\pm 1}{0} := \pm \infty$, $\pm \infty \cdot 0 := 0$, $\Phi_j := 0 =: H_{j-1}$ für $j \leq 0$):

$$\begin{aligned}
\langle \Phi_1^2, \Phi_{k-2} \rangle &= \int \Phi_1 \Phi_{k-2} (\Phi_1 e^{\xi^2}) d\xi \stackrel{(2.3.2)}{=} \int \underbrace{\Phi_1}_{=\operatorname{erf}'} \Phi_{k-2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} d\xi \\
&= \underbrace{[\operatorname{erf} \Phi_{k-2} \frac{2}{\sqrt{\pi}}]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int \operatorname{erf} \Phi_{k-1} \frac{2}{\sqrt{\pi}} d\xi \\
&= - \int (\operatorname{erf} \Phi_1) \Phi_{k-1} d\xi \stackrel{(2.3.2)}{=} - \int (\operatorname{erf} \Phi_1) (-1)^k \frac{2}{\sqrt{\pi}} H_{k-2} d\xi \\
&= - \underbrace{[(\operatorname{erf} \Phi_1) (-1)^k \frac{2}{2(k-1)\sqrt{\pi}} H_{k-1}]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + \int (\operatorname{erf} \Phi_1)' (-1)^k \frac{2}{2(k-1)\sqrt{\pi}} H_{k-1} d\xi \\
&= - \frac{1}{2(k-1)} \int \underbrace{(\operatorname{erf} \Phi_1)'}_{=\Phi_1^2 + \operatorname{erf} \Phi_2} \underbrace{(-1)^{k+1} \frac{2}{\sqrt{\pi}} H_{k-1}}_{=\Phi_k e^{\xi^2}} d\xi \\
&\stackrel{(2.3.2)}{=} - \frac{1}{2(k-1)} \int (\Phi_1^2 + \operatorname{erf} \Phi_2) \Phi_k e^{\xi^2} d\xi \\
&= - \frac{1}{2(k-1)} \langle \Phi_1^2 + \operatorname{erf} \Phi_2, \Phi_k \rangle_{\mu} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_{\geq 3} \quad (3.6.40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4(2-k)} \frac{\langle (\Phi_1^2)'', \Phi_k \rangle}{\|\Phi_k\|_{\mu}^2} &\stackrel{2.3.5c)}{=} \frac{1}{4(2-k)} \frac{\langle \Phi_1^2, \Phi_{k-2} \rangle}{\|\Phi_{k-2}\|_{\mu}^2} \stackrel{(3.6.40)}{=} \frac{1}{8(k-2)(k-1)} \frac{\langle \Phi_1^2 + \operatorname{erf} \Phi_2, \Phi_k \rangle_{\mu}}{\|\Phi_{k-2}\|_{\mu}^2} \\
&\stackrel{(2.3.7)}{=} \frac{1}{8(k-2)(k-1)} \frac{\langle \Phi_1^2 + \operatorname{erf} \Phi_2, \Phi_k \rangle_{\mu}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{k-1} (k-3)!} = \frac{1}{2} \frac{\langle \Phi_1^2 + \operatorname{erf} \Phi_2, \Phi_k \rangle_{\mu}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{k+1} (k-1)!} \\
&\stackrel{(2.3.7)}{=} \frac{1}{2} \frac{\langle \Phi_1^2 + \operatorname{erf} \Phi_2, \Phi_k \rangle_{\mu}}{\|\Phi_k\|_{\mu}^2} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_{\geq 3} \quad (3.6.41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \beta_{1n} \Phi_{2n-1} &\stackrel{(3.6.37)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4(3-2n)} \alpha_{1,1,2n-1} A_1^2 \Phi_{2n-1} \stackrel{(3.6.21)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4(3-k-1)} \alpha_{1,1,k} A_1^2 \Phi_k \\
&\stackrel{(3.6.20)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4(2-k)} \frac{\langle (\Phi_1^2)'' , \Phi_k \rangle_{\mu}}{\|\Phi_k\|_{\mu}^2} A_1^2 \Phi_k \stackrel{(3.6.41)}{=} \frac{1}{2} A_1^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \Phi_1^2 + \operatorname{erf} \Phi_2 , \Phi_k \rangle_{\mu}}{\|\Phi_k\|_{\mu}^2} \Phi_k \\
&\stackrel{2.3.5 \text{ b),c)}}{=} \frac{1}{2} A_1^2 (\Phi_1^2 + \operatorname{erf} \Phi_2). \tag{3.6.42}
\end{aligned}$$

Setzt man abschließend (3.6.39) und (3.6.42) in (3.6.38) ein, so erhält man:

$$\tilde{u}^{(2)}(\xi, x) = \frac{1}{2} A_1^2 (\Phi_1^2(\xi) + \Phi_2(\xi) \operatorname{erf}(\xi)) \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-1} + O(x^{-\frac{3}{2}}). \tag{3.6.43}$$

3.6.4 Berechnung von $\tilde{u}^{(3)}$

Begonnen wird wieder mit der Rekursionsformel (3.6.24) zur Berechnung von $v_n^{(3)}(x)$:

$$v_n^{(3)}(x) = -\frac{1}{8} x^{-\frac{n}{2}} \sum_{k,l=1}^{\infty} \alpha_{kln} \int_{x_0}^x (v_k^{(1)} v_l^{(2)} + v_k^{(2)} v_l^{(1)})(t) t^{\frac{n}{2}-1} dt. \tag{3.6.44}$$

Wegen $v_{2n}^{(1)} \stackrel{(3.6.31)}{=} 0 \stackrel{(3.6.36)}{=} v_{2n}^{(2)}$ und $\alpha_{2k-1,2l-1,2n} \stackrel{(3.6.21)}{=} 0 \stackrel{(3.6.21)}{=} \alpha_{2k-1,2l-1,1}$ für alle $n, k, l \in \mathbb{N}$ sieht man sofort, dass wiederum

$$v_{2n}^{(3)} = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \tag{3.6.45}$$

$$v_1^{(3)} = 0. \tag{3.6.46}$$

Es folgt nun die etwas längere Berechnung von $v_{2n-1}^{(3)}(x)$:

$$\begin{aligned}
& v_{2n-1}^{(3)}(x) \\
= & -\frac{1}{8}x^{-n+\frac{1}{2}} \sum_{k,l=1}^{\infty} \alpha_{2k-1,2l-1,2n-1} \int_{x_0}^x (v_{2k-1}^{(1)}v_{2l-1}^{(2)} + v_{2k-1}^{(2)}v_{2l-1}^{(1)})(t)t^{n-\frac{3}{2}}dt. \\
\stackrel{(3.6.29)}{=} & -\frac{1}{8}x^{-n+\frac{1}{2}} \sum_{k,l=1}^{\infty} \alpha_{2k-1,2l-1,2n-1} \\
\stackrel{(3.6.37)}{=} & \int_{x_0}^x \left(A_{2k-1} \left(\frac{t}{x_0} \right)^{-k+\frac{1}{2}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \beta_{ml} \left(\frac{t}{x_0} \right)^{-m} - \gamma_l \left(\frac{t}{x_0} \right)^{-l+\frac{1}{2}} \right) \right. \\
& \left. + \left(\sum_{m=1}^{\infty} \beta_{mk} \left(\frac{t}{x_0} \right)^{-m} - \gamma_k \left(\frac{t}{x_0} \right)^{-k+\frac{1}{2}} \right) A_{2l-1} \left(\frac{t}{x_0} \right)^{-l+\frac{1}{2}} \right) t^{n-\frac{3}{2}} dt \\
= & -\frac{1}{4}x^{-n+\frac{1}{2}} \left(\sum_{p=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{2k-1,2l-1,2n-1} A_{2k-1} \beta_{p-k,l} x_0^{p-\frac{1}{2}} \int_{x_0}^x t^{n-p-1} dt \right. \\
& \left. - \sum_{p=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{p-1} \alpha_{2k-1,2(p-k)-1,2n-1} A_{2k-1} \gamma_{p-k} x_0^{p-1} \int_{x_0}^x t^{n-p-\frac{1}{2}} dt \right) \\
= & \sum_{\substack{p=2 \\ p \neq n}}^{\infty} \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{l=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\alpha_{2k-1,2l-1,2n-1} A_{2k-1} \beta_{p-k,l}}{4(p-n)}}_{=: \delta_{pn}} \left(\left(\frac{x}{x_0} \right)^{-p+\frac{1}{2}} - \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-n+\frac{1}{2}} \right) \\
& - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\alpha_{2k-1,2l-1,2n-1} A_{2k-1} \beta_{n-k,l}}{4}}_{=: \eta_n} \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-n+\frac{1}{2}} \ln \left(\frac{x_0}{x} \right) \tag{3.6.47} \\
& - \sum_{p=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{p-1} \underbrace{\frac{\alpha_{2k-1,2(p-k)-1,2n-1} A_{2k-1} \gamma_{p-k}}{4(p-n)+2}}_{=: \kappa_{pn}} \left(\left(\frac{x}{x_0} \right)^{-p+1} - \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-n+\frac{1}{2}} \right) \\
= & \sum_{\substack{p=2 \\ p \neq n}}^{\infty} \delta_{pn} \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-p+\frac{1}{2}} - \sum_{p=3}^{\infty} \kappa_{pn} \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-p+1} - \left(\sum_{\substack{p=2 \\ p \neq n}}^{\infty} \delta_{pn} - \sum_{p=2}^{\infty} \kappa_{pn} \right) \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-n+\frac{1}{2}} \\
& - \eta_n \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-n+\frac{1}{2}} \ln \left(\frac{x_0}{x} \right). \tag{3.6.48}
\end{aligned}$$

In der zweiten Summe beginnt die Summierung bei $p = 3$, da $\kappa_{2n} = 0$ wegen $\gamma_1 = 0$ gemäß (3.6.39).

In (3.6.48) treten erstmals nicht verschwindende logarithmische Terme auf. Durch Umsortieren

erhält man folgende Darstellung von $\tilde{u}^{(3)}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}^{(3)}(\xi, x) &= \sum_{n=2}^{\infty} v_{2n-1}^{(3)}(x) \Phi_{2n-1}(\xi) \quad [v_1^{(3)} = 0, \text{ s. (3.6.46)}] \\
&= \sum_{\substack{p=2 \\ p \neq n}}^{\infty} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \delta_{pn} \Phi_{2n-1}(\xi) \right) \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-p+\frac{1}{2}} - \sum_{p=3}^{\infty} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \kappa_{pn} \Phi_{2n-1}(\xi) \right) \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-p+1} \\
&\quad - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{\substack{p=2 \\ p \neq n}}^{\infty} \delta_{pn} - \sum_{p=2}^{\infty} \kappa_{pn} \right) \Phi_{2n-1}(\xi) \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-n+\frac{1}{2}} - \sum_{n=2}^{\infty} \eta_n \Phi_{2n-1}(\xi) \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-n+\frac{1}{2}} \ln \left(\frac{x}{x_0} \right) \\
&= -\eta_2 \Phi_3(\xi) \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-\frac{3}{2}} \ln \left(\frac{x}{x_0} \right) + O(x^{-\frac{3}{2}}). \tag{3.6.49}
\end{aligned}$$

Abschließend wird der Term η_2 bestimmt:

$$\begin{aligned}
\eta_2 &\stackrel{(3.6.47)}{=} \frac{1}{4} \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{1,2l-1,3} A_1 \beta_{1,l} \stackrel{(3.6.37)}{=} \frac{A_1^3}{4} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\alpha_{1,2l-1,3} \alpha_{1,1,2l-1}}{4(3-2l)} \\
&= \frac{A_1^3}{4} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\langle (\Phi_1 \Phi_{2l-1})'', \Phi_3 \rangle_{\mu}}{\|\Phi_3\|_{\mu}^2} \cdot \frac{\langle (\Phi_1^2)'', \Phi_{2l-1} \rangle_{\mu}}{4(3-2l) \|\Phi_{2l-1}\|_{\mu}^2} \\
&\stackrel{(2.3.9)}{=} \frac{A_1^3}{4} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\langle \Phi_1 \Phi_{2l-1}, \Phi_1 \rangle_{\mu}}{\|\Phi_1\|_{\mu}^2} \cdot \frac{\langle \Phi_1^2 + \text{erf} \Phi_2, \Phi_{2l-1} \rangle_{\mu}}{2 \|\Phi_{2l-1}\|_{\mu}^2} \\
&\stackrel{(3.6.41)}{=} \frac{A_1^3}{8 \|\Phi_1\|_{\mu}^2} \sum_{l=1}^{\infty} \langle \Phi_1^2, \frac{\Phi_{2l-1}}{\|\Phi_{2l-1}\|_{\mu}} \rangle_{\mu} \cdot \langle \Phi_1^2 + \text{erf} \Phi_2, \frac{\Phi_{2l-1}}{\|\Phi_{2l-1}\|_{\mu}} \rangle_{\mu} \\
&\stackrel{(2.3.7)}{=} \frac{A_1^3 \sqrt{\pi}}{32} \langle \Phi_1^2, \frac{\Phi_{2l-1}}{\|\Phi_{2l-1}\|_{\mu}} \rangle_{\mu} \cdot \frac{\Phi_{2l-1}}{\|\Phi_{2l-1}\|_{\mu}} \cdot \sum_{l=1}^{\infty} \langle \Phi_1^2 + \text{erf} \Phi_2, \frac{\Phi_{2l-1}}{\|\Phi_{2l-1}\|_{\mu}} \rangle_{\mu} \cdot \frac{\Phi_{2l-1}}{\|\Phi_{2l-1}\|_{\mu}} \rangle_{\mu} \\
&\stackrel{2.3.5a)}{=} \frac{A_1^3 \sqrt{\pi}}{32} \langle \Phi_1^2, \Phi_1^2 + \text{erf} \Phi_2 \rangle_{\mu} \tag{3.6.50}
\end{aligned}$$

$$\langle \Phi_1^2, \Phi_1^2 \rangle_{\mu} = \int \Phi_1^4 e^{\xi^2} d\xi = \frac{16}{\pi^2} \int e^{-3\xi^2} d\xi = \frac{16}{\sqrt{3}\pi^2} \int e^{-z^2} dz = \frac{16}{\sqrt{3}\pi^{3/2}} \tag{3.6.51}$$

$$\begin{aligned}
\langle \Phi_1^2, \text{erf} \Phi_2 \rangle_{\mu} &= \int \Phi_1^2 \text{erf} \Phi_2 e^{\xi^2} d\xi = \frac{4}{\pi^{3/2}} \int \text{erf}(\xi) (-4\xi e^{-2\xi^2}) d\xi = -\frac{4}{\pi^{3/2}} \int \Phi_1(\xi) e^{-2\xi^2} d\xi \\
&= -\frac{8}{\pi^2} \int e^{-3\xi^2} d\xi = -\frac{8}{\sqrt{3}\pi^2} \int e^{-z^2} dz = -\frac{8}{\sqrt{3}\pi^{3/2}}. \tag{3.6.52}
\end{aligned}$$

Einsetzen von (3.6.51), (3.6.52) in (3.6.50) ergibt:

$$\begin{aligned}
\eta_2 &= \frac{A_1^3 \sqrt{\pi}}{32} \left(\frac{16}{\sqrt{3}\pi^{3/2}} - \frac{8}{\sqrt{3}\pi^{3/2}} \right) = \frac{A_1^3}{4\sqrt{3}\pi} \\
\tilde{u}^{(3)}(\xi, x) &= -\frac{A_1^3}{4\sqrt{3}\pi} \Phi_3(\xi) \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-\frac{3}{2}} \ln \left(\frac{x}{x_0} \right) + O(x^{-\frac{3}{2}}) \\
&= -\frac{A_1^3}{4\sqrt{3}\pi} \Phi_3(\xi) \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-\frac{3}{2}} \ln(x) + O(x^{-\frac{3}{2}}). \tag{3.6.53}
\end{aligned}$$

3.6.5 Prinzipielle Gestalt von $\tilde{u}^{(i)}$, $i > 3$

In diesem Abschnitt soll - wie in der Einleitung angegeben - die prinzipielle Form der asymptotischen Entwicklungen der Funktionen

$$\tilde{u}^{(i)}(\xi, x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n^{(i)}(x) \Phi_n(\xi)$$

für $x \rightarrow \infty$ beschrieben werden. Wir beschränken uns dabei auf eine tabellarische Angabe der x -Amplitudenterme in den Funktionen $v_n^{(i)}(x)$, $i, n \in \mathbb{N}$. Dazu sei noch einmal deren rekursive Definition wiederholt (s. (3.6.29), (3.6.31), (3.6.24), (3.6.21)):

$$v_{2n}^{(1)}(x) = 0 \quad (3.6.54)$$

$$v_{2n-1}^{(1)}(x) = A_{2n-1} \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-n+\frac{1}{2}} \quad (3.6.55)$$

$$v_n^{(i)}(x) = -\frac{1}{8} x^{-\frac{n}{2}} \sum_{k,l=1}^{\infty} \alpha_{kln} \sum_{j=1}^{i-1} \int_{x_0}^x (v_k^{(j)} v_l^{(i-j)})(t) t^{\frac{n}{2}-1} dt \quad \text{für } i \geq 2 \quad (3.6.56)$$

$$\alpha_{kln} = 0 \quad \text{für gerades } k+l+n \text{ oder } n \leq 2. \quad (3.6.57)$$

Aus (3.6.54), (3.6.56) und (3.6.57) folgt

$$v_1^{(i)} = 0 = v_{2n}^{(i)} \quad \text{für alle } i \geq 2, \quad (3.6.58)$$

wobei sich die rechte Seite dieser Gleichung mittels einer kurzen Induktion über i mit Induktionsanfang (3.6.54) ergibt. Die Rekursion (3.6.56) lautet demnach für $i \geq 2 \leq n$:

$$v_{2n-1}^{(i)}(x) = -\frac{1}{8} x^{-n+\frac{1}{2}} \sum_{k,l=1}^{\infty} \alpha_{2k-1, 2l-1, 2n-1} \sum_{j=1}^{i-1} \int_{x_0}^x (v_{2k-1}^{(j)} v_{2l-1}^{(i-j)})(t) t^{n-\frac{3}{2}} dt. \quad (3.6.59)$$

Die x -Amplituden in den Summanden dieser Reihendarstellung von $v_{2n-1}^{(i)}(x)$ sind gemäß dieser Rekursion in der nachfolgenden Tabelle 3.1 dargestellt. Für die Stufen $i = 1, 2, 3$ sind in der Referenzspalte die genauen Referenzen angegeben, aus denen das Auftreten der in der x -Amplituden-Spalte angegebenen Ausdrücke hervorgeht. Für die Stufen $i = 4, 5, \dots$ wurden die x -Amplituden durch Integration aller x -Amplituden-Produkte p der Stufen j und $i-j$ für $j = 1, \dots, i-1$ gemäß Gleichung (3.6.59) mittels $x^{-n+\frac{1}{2}} \int_{x_0}^x p(x) x^{n-\frac{3}{2}} dx$ gewonnen. In der Spalte „führende Ordnung“ ist der insgesamt führende Term der jeweiligen Stufe unterstrichen.

Auf eine ausführliche Angabe der zugehörigen, einfachen aber schreibaufwendigen Rechnungen wurde verzichtet, da deren mathematischer Gehalt gering ist und hier lediglich ein Eindruck vom Fortschreiten der logarithmischen Terme in den Lösungen $\tilde{u}^{(i)}(\xi, x)$ für höhere Ordnungen i vermittelt werden soll.

Stufe	x -Amplituden	führende Ordnung	Referenzen
$v_{2n-1}^{(1)}, n \geq 1$	$x^{-n+\frac{1}{2}}$	$n = 1: x^{-\frac{1}{2}}$	(3.6.29)
$v_{2n-1}^{(2)}, n \geq 2$	$x^{-m}, m \geq 1$ $x^{-n+\frac{1}{2}}$	$m = 1: x^{-1}$ $n = 2: x^{-\frac{3}{2}}$	(3.6.37), (3.6.39)
$v_{2n-1}^{(3)}, n \geq 2$	$x^{-m+\frac{1}{2}}, m \geq 2$ $x^{-m}, m \geq 2$ $x^{-n+\frac{1}{2}} \ln(x)$	$m = 2: x^{-\frac{3}{2}}$ $m = 2: x^{-2}$ $n = 2: x^{-\frac{3}{2}} \ln(x)$	(3.6.48)
$v_{2n-1}^{(4)}, n \geq 2$	$x^{-n+\frac{1}{2}}$ 1) $x^{-m}, m \geq 2$ $x^{-m+\frac{1}{2}}, m \geq 3$ $x^{-m} \ln(x), m \geq 2$ $x^{-n+\frac{1}{2}} \ln(x), n \geq 3$	$n = 2: x^{-\frac{3}{2}}$ $m = 2: x^{-2}$ $m = 3: x^{-\frac{5}{2}}$ $m = 2: x^{-2} \ln(x)$ $n = 3: x^{-\frac{5}{2}} \ln(x)$	
$v_{2n-1}^{(5)}, n \geq 2$	$x^{-n+\frac{1}{2}}$ 2) $x^{-m}, m \geq 2$ $x^{-m+\frac{1}{2}}, m \geq 3$ $x^{-m+\frac{1}{2}} \ln(x), m \geq 3$ $x^{-m} \ln(x), m \geq 3$ $x^{-n+\frac{1}{2}} \ln(x)^2, n \geq 3$	$n = 2: x^{-\frac{3}{2}}$ $m = 2: x^{-2}$ $m = 3: x^{-\frac{5}{2}}$ $m = 3: x^{-\frac{5}{2}} \ln(x)$ $m = 3: x^{-3} \ln(x)$ $n = 3: x^{-\frac{5}{2}} \ln(x)^2$	
$v_{2n-1}^{(i)}, n \geq 2$ $i > 5$	s. Lemma 3.6.1	$> x^{-\frac{3}{2}}$	

Tabelle 3.1: logarithmische Terme

1) Ting deutet in [55] S.29 letzte Zeile etwas ungenau (ohne Beweis) an:

„... the contribution of the higher order perturbation on $\epsilon^4 u^{(4)}$ are at most of the order $\epsilon^4 x^{-3/2}$ or $\epsilon^4 x^{-5/2} \ln(x)$... “

Später im Abschnitt 2.3 *Logarithmic Terms in Higher Order Solutions* auf Seite 30 ergänzt er noch (ohne Beweis):

„In the ϵ^4 terms there are terms of type $x^{-n/2} \ln(x) \Phi_\lambda(\xi)$ where n is any integer due to the product of $u^{(1)}$ and $u^{(3)}$ and the square of $u^{(2)}$ in the inhomogeneous part.“

Stewartson [51] S.179 schreibt ab Zeile 9 von oben (ohne Beweis), dass bei der Ordnung $i = 4$ Terme $x^{-2} \log(x)$ und x^{-2} auftreten. Alle genannten Terme findet man auch in der Tabelle für die Stufe 4 wieder.

2) Ting [55] weist im Abschnitt 2.3 S.30 für die Stufe 5 auf Terme $x^{-\lambda/2} \ln(x)^2 \Phi_\lambda(x)$, $\lambda \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, hin ($\lambda = n$ in der hier verwendeten Notation). Stewartson [51] S.179 gibt für die Stufe 5 zusätzliche (führende) Terme $\log(x)^2 x^{-\frac{5}{2}}$, $x^{-\frac{5}{2}} \log(x)$ und $x^{-\frac{5}{2}}$ an. Wiederum findet man all diese Terme auch in der Tabelle für die Stufe 5.

Das folgende abschließende Lemma gibt grob die Menge an, in der alle x -Amplituden der Stufen $i \geq 4$ enthalten sind.

Lemma 3.6.1 *Alle x -Amplitudenterme der Funktionen $v_{2n-1}^{(i)}$, $i \in \mathbb{N}_{\geq 4}$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, sind in der Menge*

$$M := \{x^{-\frac{a}{2}} \ln(x)^b; a \in \mathbb{N}_{\geq 4}, b \in \mathbb{N}_0\} \cup \{x^{-\frac{3}{2}}\} \quad (3.6.60)$$

enthalten, d.h. $v_{2n-1}^{(i)}(x)$ lässt sich als Reihe

$$v_{2n-1}^{(i)}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j m_j(x)$$

mit geeigneten $a_j \in \mathbb{R}$ und $m_j(x) \in M$ darstellen. Insbesondere gilt für $i \in \mathbb{N}_{\geq 4}$:

$$v_{2n-1}^{(i)}(x) = O(x^{-\frac{3}{2}}) \quad , x \rightarrow \infty. \quad (3.6.61)$$

Beweis: Vorbereitend seien folgende Stammfunktionen angegeben, von deren Gültigkeit man sich leicht durch Ableiten überzeugt:

$$\int x^{-1} \ln(x)^s dx = \frac{\ln(x)^{s+1}}{s+1} \quad \text{für } s \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad (3.6.62)$$

$$\int x^r \ln(x)^s dx = x^{r+1} \sum_{l=0}^s \frac{(-1)^l s!}{(s-l)!(r+1)^{l+1}} \ln(x)^{s-l} \quad \text{für } r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, s \in \mathbb{N}_0. \quad (3.6.63)$$

Der Beweis des Lemmas erfolgt durch Induktion über $i \in \mathbb{N}_{\geq 4}$, wobei der Induktionsbeginn aus Tabelle (3.1) für die Stufe 4 folgt, so dass wir direkt zum Induktionsschritt übergehen. Sei dazu $i \geq 5$ und die Behauptung gelte für alle $i' = 1, \dots, i-1$. Es seien $j \in \{1, \dots, i-1\}$ und $k := i-j \in \{1, \dots, i-1\}$. Wegen $i = j+k \geq 5$ gilt $j \geq 3$ oder $k \geq 3$, so dass wir aus Symmetriegründen der nachfolgenden Argumentationen $j \geq 3$ annehmen können. Es seien $p(x)$ und $q(x)$ x -Amplitudenterme der Stufe j bzw. k . Nach Induktionsannahme und Tabelle (3.1) haben sie die Gestalt

$$\begin{aligned} p(x) &= x^{-\frac{a}{2}} \ln(x)^b, \quad a \in \mathbb{N}_{\geq 3}, b \in \mathbb{N}_0 \\ q(x) &= x^{-\frac{c}{2}} \ln(x)^d, \quad c \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Setze $r := n - \frac{a+c+3}{2}$, $s := b+d$. Gemäß der Rekursionsgleichung (3.6.59) erhält man alle x -Amplitudenterme $z(x)$ von $v_{2n-1}^{(i)}(x)$ durch eine Integration der Form

$$z(x) = x^{-n+\frac{1}{2}} \int_{x_0}^x p(t)q(t)t^{n-\frac{3}{2}} dt = x^{-n+\frac{1}{2}} \int_{x_0}^x t^{n-\frac{a+c+3}{2}} \ln(t)^{b+d} dt = x^{-n+\frac{1}{2}} \int_{x_0}^x t^r \ln(t)^s dt.$$

Im Fall $r = -1$ ist

$$n = \frac{a+c+3}{2} + r = \frac{a+c+3}{2} - 1 \geq \frac{7}{2} - 1 = \frac{5}{2}$$

und aus (3.6.62) folgt, dass

$$z(x) = x^{-n+\frac{1}{2}} \left[\frac{\ln(t)^{s+1}}{s+1} \right]_{x_0}^x = x^{-n+\frac{1}{2}} \left(\frac{\ln(x)^{s+1}}{s+1} - \frac{\ln(x_0)^{s+1}}{s+1} \right)$$

eine Linearkombination von zwei Elementen aus M ist im Fall $r \neq -1$ folgt aus (3.6.63):

$$\begin{aligned}
z(x) &= x^{-n+\frac{1}{2}} \left[t^{r+1} \sum_{l=0}^s \frac{(-1)^l s!}{(s-l)!(r+1)^{l+1}} \ln(t)^{s-l} \right]_{x_0}^x \\
&= x^{-n+\frac{1}{2}+r+1} \sum_{l=0}^s \frac{(-1)^l s!}{(s-l)!(r+1)^{l+1}} \ln(x)^{s-l} - x^{-n+\frac{1}{2}} \underbrace{x_0^{r+1} \sum_{l=0}^s \frac{(-1)^l s!}{(s-l)!(r+1)^{l+1}} \ln(x_0)^{s-l}}_{=: \alpha} \\
&= x^{-\frac{a+c}{2}} \sum_{l=0}^s \frac{(-1)^l s!}{(s-l)!(r+1)^{l+1}} \ln(x)^{s-l} - \alpha x^{-\frac{2n-1}{2}}.
\end{aligned}$$

Wegen $a+c \geq 4$ und $2n-1 \geq 3$ ist $z(x)$ wiederum eine Linearkombination von Elementen aus M . Damit ist der Induktionsschritt abgeschlossen. Die Abschätzung (3.6.61) folgt nun mit der Regel von de l'Hospital, denn für $b \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)^b}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln(x)^b)'}{(\sqrt{x})'} = 2b \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)^{b-1}}{\sqrt{x}} = \dots = 2^b b! \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

Ist nun $a \in \mathbb{N}_{\geq 4}$, so folgt hieraus:

$$x^{-\frac{a}{2}} \ln(x)^b = x^{-\frac{a-1}{2}} \frac{\ln(x)^b}{\sqrt{x}} = O(x^{-\frac{a-1}{2}}) \leq O(x^{-\frac{3}{2}}), \quad x \rightarrow \infty.$$

■

3.6.6 Zusammenfassung der Ergebnisse

Aus den vorangehenden Abschnitten erhält man folgende asymptotische Entwicklung von $\tilde{u}(\xi, x, \epsilon)$ für $x \rightarrow \infty$ bzw. $\epsilon \rightarrow 0$ (s. (3.6.5), (3.6.33), (3.6.43), (3.6.53), (3.6.61)):

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(\xi, x, \epsilon) &= U \left(1 - \epsilon A_1 \Phi_1(\xi) \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \epsilon^2 A_1^2 (\Phi_1^2(\xi) + \Phi_2(\xi) \operatorname{erf}(\xi)) \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-1} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\epsilon^3 A_1^3}{4\sqrt{3}\pi} \Phi_3(\xi) \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-\frac{3}{2}} \ln(x) + O(\epsilon x^{-\frac{3}{2}}) \right). \tag{3.6.64}
\end{aligned}$$

Diese Formel kann man jetzt wieder mit Hilfe der Widerstandskraft W des umströmten Körpers anstelle von A_1 ausdrücken. In der Literatur wird häufig eine zu W proportionale Konstante A eingeführt:

$$\begin{aligned}
A &:= 2\epsilon A_1 \left(\frac{x_0}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \stackrel{(3.6.27)}{=} \frac{1}{2\sqrt{\nu U \pi}} \int \epsilon f(\psi) d\psi \stackrel{(3.6.2)}{=} \frac{1}{2\sqrt{\nu U \pi}} \int \frac{U - u(\psi, x_0)}{U} d\psi \\
&= \frac{1}{2U\sqrt{\nu U \pi}} \int (U - u(\psi(x_0, y), x_0)) \underbrace{\frac{\partial \psi(x_0, y)}{\partial y}}_{=u(x_0, y)} d\psi = \frac{1}{2U\sqrt{\nu U \pi}} \int (U - u(x_0, y)) u(x_0, y) dy \\
&= \frac{1}{2U\sqrt{\nu U \pi}} \int (U - u(x_0, y)) u(x_0, y) dy = \frac{W}{2\rho U \sqrt{\nu U \pi}}. \tag{3.6.65}
\end{aligned}$$

[In dem Artikel von Ting [55] S. 30 ist bei der Bestimmung von A beim Übergang von Zeile 7 auf Zeile 8 ein Faktor $\frac{1}{U}$ verloren gegangen, so dass dort $A = \frac{D}{2\rho\sqrt{\nu U \pi}}$ steht, wobei $D = W$.] Setzt

man (3.6.65) in (3.6.64) ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\xi, x) = U & \left(1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} A \Phi_1(\xi) x^{-\frac{1}{2}} - \frac{\pi}{8} A^2 (\Phi_1^2(\xi) + \Phi_2(\xi) \operatorname{erf}(\xi)) x^{-1} \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{\pi}}{32\sqrt{3}} A^3 \Phi_3(\xi) x^{-\frac{3}{2}} \ln(x) + O(x^{-\frac{3}{2}}) \right). \end{aligned} \quad (3.6.66)$$

Wegen

$$\begin{aligned} \Phi_1(0) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \\ \Phi_1^2(0) + \underbrace{\Phi_2(0) \operatorname{erf}(0)}_{=0} &= \frac{4}{\pi} \\ \Phi_3(0) &= -\frac{4}{\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

lautet Gleichung (3.6.66) auf der Symmetrieachse $\xi = 0$ hinter dem Körper:

$$\tilde{u}(0, x) = U \left(1 - Ax^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} A^2 x^{-1} - \frac{1}{8\sqrt{3}} A^3 x^{-\frac{3}{2}} \ln(x) + O(x^{-\frac{3}{2}}) \right). \quad (3.6.67)$$

Dies ist das letztendliche Ergebnis aus [55] S.30 Zeile 5 bzw. [13] S. 174 Zeile 15.

3.6.7 Umrechnung in kartesische Koordinaten

Die Darstellung des Strömungsfeldes in von Mises-Variablen (x, ψ) wurde wie bereits erwähnt deswegen gewählt, weil man in ihnen aufgrund der Entkopplung von der Kontinuitätsgleichung besser analytisch strukturell argumentieren kann, als es in kartesischen Koordinaten (x, y) der Fall ist. In praktischen Anwendungen möchte man ein Strömungsbild jedoch meist in den vertrauten kartesischen Koordinaten und nicht in von Mises-Variablen sehen, weswegen die Berechnung der kartesischen y -Koordinate mittels der Formel (1.4.15) auf Seite 11

$$y = y(x, \psi) = \int_0^\psi \frac{1}{u(x, \psi)} d\psi$$

durchgeführt werden muss, wobei $u(x, \psi)$ die horizontale Komponente der Nachlauf-Fernfeld-Strömung in von Mises-Variablen ist, wie sie in den vorangehenden Abschnitten asymptotisch für $x \rightarrow \infty$ bis zur Stufe 3 berechnet wurde. Diese Integration ist für die komplizierte Funktion $u(x, \psi)$ kaum analytisch möglich, so dass numerisch integriert werden muss, was eine zusätzliche Fehlerquelle darstellt.

Für praktische Anwendung ist daher eine analytisch exakte Asymptotik für $x \rightarrow \infty$ in kartesischen Koordinaten (ebenfalls bis zur Stufe 3) vorzuziehen. Bis zur Stufe 2 inklusive der Vertikalkomponente wurde eine solche Asymptotik von Goldstein [21] auf Seite 553 in den Gleichungen der Textziffer (27) angegeben. Stewartson berechnet in [51] S.178 Textziffer (2.16) den zusätzlichen Term der dritten Stufe. Crane [13] korrigiert einen kleinen Fehler in Stewartsons Rechnung.² In

²Stewartson und Crane geben, obwohl sie eigentlich alles bereitgestellt haben, im Text explizit nur die Horizontalkomponente der Strömung auf der Symmetrieachse $y = 0$ hinter dem Hindernis für den Fall einer flachen tangential angeströmten Platte an. Dies ist für den an Theorie weniger interessierten Praktiker, der gern eine formelmäßig kompakte Darstellung hätte, wie sie beispielsweise Goldstein anbietet, etwas hinderlich.

dem Buch von Berger [3] sind die Ergebnisse von Goldstein und Stewartson (ohne Cranes Korrektur) in den Abschnitten 10.12 und 10.13 auf den Seiten 239-246 direkt übernommen.

Im Folgenden soll die vollständige Asymptotik bis zur Stufe 3 in kartesischen Koordinaten aus Tings Ergebnis (3.6.66) in von Mises-Variablen abgeleitet werden, welches hier übersichtlichkeitshalber noch einmal wiederholt wird:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(\xi, x) &= U \left(1 - \frac{\sqrt{\pi}A}{2\sqrt{x}}\Phi_1(\xi) - \frac{\pi A^2}{8x}(\Phi_1^2(\xi) + \Phi_2(\xi)\operatorname{erf}(\xi)) + \frac{\sqrt{\pi}A^3 \ln(x)}{32\sqrt{3}x^{\frac{3}{2}}}\Phi_3(\xi) + O(x^{-\frac{3}{2}}) \right) \\
&= U \left(1 - \frac{A}{\sqrt{x}}e^{-\xi^2} - \frac{A^2}{2x}(e^{-2\xi^2} - \sqrt{\pi}\xi e^{-\xi^2} \operatorname{erf}(\xi)) + \frac{A^3 \ln(x)}{8\sqrt{3}x^{\frac{3}{2}}}(2\xi^2 - 1)e^{-\xi^2} + O(x^{-\frac{3}{2}}) \right) \\
\xi &= \frac{\psi}{\sqrt{4\nu Ux}} \quad .
\end{aligned} \tag{3.6.68}$$

Die gesuchte Nachlauf-Strömung in kartesischen Koordinaten sei deutlichheitshalber mit

$$\mathbf{v}_{kart} = (u_{kart}, v_{kart})$$

bezeichnet, wobei wie üblich u_{kart} die Horizontal- und v_{kart} die Vertikalkomponente sei. Die möglicherweise neue aber naheliegende Idee ist nun, die von Mises-Ähnlichkeitsvariable ξ ihrerseits asymptotisch in Koordinaten (x, η) zu entwickeln, wobei $\eta = c\frac{y}{\sqrt{x}}$, $c \in \mathbb{R}$, eine geeignete kartesische Ähnlichkeitsvariable mit noch zu bestimmendem Faktor c ist. Hat man eine solche Asymptotik $\xi = \xi(x, \eta)$ von hinreichend hoher Stufe gefunden, so erhält man u_{kart} durch Einsetzen in (3.6.68) als $u_{kart}(x, \eta) = \tilde{u}(\xi(x, \eta), x)$ und v_{kart} errechnet sich aus der Kontinuitätsgleichung.

In 0-ter Näherung (Asymptotik 0-ter Stufe) stimmt die Nachlauf-Strömung mit der konstanten Anströmung U überein, so dass man den Ansatz

$$u_{kart}(x, \eta) = U + O(x^{-\frac{1}{2}})$$

machen kann, wobei die Annahme einer Asymptotik $O(x^{-\frac{1}{2}})$ auf der Tatsache beruht, dass u_{kart} und \tilde{u} auf der Symmetrie-Achse $y = 0 = \xi$ übereinstimmen und \tilde{u} gemäß (3.6.68) dort eine solche Asymptotik besitzt. Hieraus erhält man

$$\begin{aligned}
\psi &= \int_0^y \psi_y dy = \int_0^y u_{kart}(x, y) dy = \frac{\sqrt{x}}{c} \int_0^\eta u_{kart}(x, \eta) d\eta = \frac{\sqrt{x}}{c} \int_0^\eta U + O(x^{-\frac{1}{2}}) d\eta \\
&= \frac{\sqrt{x}}{c} U \eta + O(1) \\
\xi &= \frac{\psi}{\sqrt{4\nu Ux}} = \sqrt{\frac{U}{4\nu}} c^{-1} \eta + O(x^{-\frac{1}{2}}).
\end{aligned}$$

Wählt man nun $c := \sqrt{\frac{U}{4\nu}}$, so bedeutet dies

$$\begin{aligned}
\eta &= c \frac{y}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{U}{4\nu x}} y \\
\xi(x, \eta) &= \eta + O(x^{-\frac{1}{2}}) \\
\xi^2 &= \eta^2 + 2\eta O(x^{-\frac{1}{2}}) + O(x^{-1}) = \eta^2 + O(x^{-\frac{1}{2}}) \\
e^{-\xi^2} &= \exp(-\eta^2 + O(x^{-\frac{1}{2}})) = \exp(-\eta^2) \exp(O(x^{-\frac{1}{2}})) \\
&= \exp(-\eta^2)(1 + O(x^{-\frac{1}{2}})) = \exp(-\eta^2) + O(x^{-\frac{1}{2}}) \\
e^{-2\xi^2} &= \left(e^{-\xi^2}\right)^2 = e^{-2\eta^2} + O(x^{-\frac{1}{2}}) \\
\operatorname{erf}(\xi) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^k \operatorname{erf}}{\partial x^k}(0) \frac{\xi^k}{k!} \stackrel{\operatorname{erf}(0)=0}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^k \operatorname{erf}}{\partial x^k}(0) \frac{1}{k!} (\eta + O(x^{-\frac{1}{2}}))^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^k \operatorname{erf}}{\partial x^k}(0) \frac{1}{k!} \eta^k + O(x^{-\frac{1}{2}}) = \operatorname{erf}(\eta) + O(x^{-\frac{1}{2}}).
\end{aligned} \tag{3.6.69}$$

Einsetzen von (3.6.69) in (3.6.68) ergibt demnach:

$$u_{\text{kart}}(x, \eta) = \tilde{u}(\xi(x, \eta), x) = U \left(1 - \frac{A}{\sqrt{x}} e^{-\eta^2}\right) + O(x^{-1}).$$

Diese Asymptotik erster Stufe für $u_{\text{kart}}(x, \eta)$ benutzt man nun wiederum, um eine Asymptotik höherer Stufe für $\xi(x, \eta)$ herzuleiten:

$$\begin{aligned}
\psi &= \int_0^y u_{\text{kart}}(x, y) dy = \sqrt{\frac{4\nu x}{U}} \int_0^\eta U \left(1 - \frac{A}{\sqrt{x}} e^{-\eta^2}\right) + O(x^{-1}) d\eta \\
&= \sqrt{4\nu U x} \left(\eta - \frac{A}{\sqrt{x}} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta + O(x^{-1})\right) = \sqrt{4\nu U x} \left(\eta - \frac{\sqrt{\pi} A}{2\sqrt{x}} \operatorname{erf}(\eta) + O(x^{-1})\right) \\
\xi &= \frac{\psi}{\sqrt{4\nu U x}} = \eta - \frac{\sqrt{\pi} A}{2\sqrt{x}} \operatorname{erf}(\eta) + O(x^{-1}).
\end{aligned} \tag{3.6.70}$$

Erneut setzt man (3.6.70) in (3.6.68) ein und bekommt mit zwei vorbereitenden Rechnungen:

$$\begin{aligned}
\xi^2 &= \eta^2 - \frac{\sqrt{\pi} A}{\sqrt{x}} \eta \operatorname{erf}(\eta) + O(x^{-1}) \\
e^{-\xi^2} &= \exp(-\eta^2 - \frac{\sqrt{\pi} A}{\sqrt{x}} \eta \operatorname{erf}(\eta) + O(x^{-1})) = e^{-\eta^2} \exp(-\frac{\sqrt{\pi} A}{\sqrt{x}} \eta \operatorname{erf}(\eta) + O(x^{-1})) \\
&= e^{-\eta^2} \left(1 - \frac{\sqrt{\pi} A}{\sqrt{x}} \eta \operatorname{erf}(\eta) + O(x^{-1})\right) = e^{-\eta^2} - \frac{\sqrt{\pi} A}{\sqrt{x}} \eta e^{-\eta^2} \operatorname{erf}(\eta) + O(x^{-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{kart}(x, \eta) &\stackrel{(3.6.68)}{=} U \left(1 - \frac{A}{\sqrt{x}} e^{-\xi^2} - \frac{A^2}{2x} (e^{-2\xi^2} - \sqrt{\pi} e^{-\xi^2} \operatorname{erf}(\xi)) + \frac{A^3 \ln(x)}{8\sqrt{3}x^{\frac{3}{2}}} (2\xi^2 - 1) e^{-\xi^2} \right) \\
&\quad + O(x^{-\frac{3}{2}}) \\
&= U \left(1 - \frac{A}{\sqrt{x}} \left[e^{-\eta^2} - \frac{\sqrt{\pi}A}{\sqrt{x}} \eta e^{-\eta^2} \operatorname{erf}(\eta) + O(x^{-1}) \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{A^2}{2x} \left(\left[e^{-2\eta^2} + O(x^{-\frac{1}{2}}) \right] - \sqrt{\pi} \left[\eta + O(x^{-\frac{1}{2}}) \right] \left[e^{-\eta^2} + O(x^{-\frac{1}{2}}) \right] \left[\operatorname{erf}(\eta) + O(x^{-\frac{1}{2}}) \right] \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{A^3 \ln(x)}{8\sqrt{3}x^{\frac{3}{2}}} \left[2\eta^2 - 1 + O(x^{-\frac{1}{2}}) \right] \left[e^{-\eta^2} + O(x^{-\frac{1}{2}}) \right] \right) + O(x^{-\frac{3}{2}}) \\
&= U \left(1 - \frac{A}{\sqrt{x}} e^{-\eta^2} - \frac{A^2}{2x} (e^{-2\eta^2} + \sqrt{\pi} \eta e^{-\eta^2} \operatorname{erf}(\eta)) + \frac{A^3 \ln(x)}{8\sqrt{3}x^{\frac{3}{2}}} (2\eta^2 - 1) e^{-\eta^2} \right) \\
&\quad + O(x^{-\frac{3}{2}}) \tag{3.6.71}
\end{aligned}$$

Man erhält also nicht nur - wie vielleicht zu erwarten war - eine Asymptotik zweiter Stufe für u_{kart} , sondern bereits die gesuchte Asymptotik dritter Stufe und eine Fortführung der bisherigen Iteration würde zu keiner Ergebnisverbesserung führen.

Nun wird die Vertikalkomponente v_{kart} bestimmt. Vorbereitend benötigt man die partielle Ableitung von $u_{kart}(x, \eta)$ nach x :

$$\begin{aligned}
\eta_x &= -\frac{1}{2x} \eta \\
\frac{\partial}{\partial x} (u_{kart}(x, \eta)) &= (u_{kart})_x(x, \eta) + \eta_x (u_{kart})_\eta(x, \eta) \\
&\stackrel{(3.6.71)}{=} U \left(\frac{A}{2x^{\frac{3}{2}}} e^{-\eta^2} + \frac{A^2}{2x^2} (e^{-2\eta^2} + \sqrt{\pi} \eta e^{-\eta^2} \operatorname{erf}(\eta)) + \frac{A^3 (1 - \frac{3}{2} \ln(x))}{8\sqrt{3}x^{\frac{5}{2}}} (2\eta^2 - 1) e^{-\eta^2} + O(x^{-\frac{5}{2}}) \right) \\
&\quad - \frac{1}{2x} \eta U \left(-\frac{A}{\sqrt{x}} e^{-\eta^2} - \frac{A^2}{2x} (e^{-2\eta^2} + \sqrt{\pi} \eta e^{-\eta^2} \operatorname{erf}(\eta)) + \frac{A^3 \ln(x)}{8\sqrt{3}x^{\frac{3}{2}}} (2\eta^2 - 1) e^{-\eta^2} + O(x^{-\frac{3}{2}}) \right)_\eta \\
&= U \left(\frac{A}{2x^{\frac{3}{2}}} e^{-\eta^2} + \frac{A^2}{2x^2} (e^{-2\eta^2} + \sqrt{\pi} \eta e^{-\eta^2} \operatorname{erf}(\eta)) - \frac{A^3 \sqrt{3} \ln(x)}{16x^{\frac{5}{2}}} (2\eta^2 - 1) e^{-\eta^2} + O(x^{-\frac{5}{2}}) \right) \\
&\quad + \eta U \left(\frac{A}{2x^{\frac{3}{2}}} e^{-\eta^2} + \frac{A^2}{4x^2} (e^{-2\eta^2} + \sqrt{\pi} \eta e^{-\eta^2} \operatorname{erf}(\eta)) - \frac{A^3 \ln(x)}{16\sqrt{3}x^{\frac{5}{2}}} (2\eta^2 - 1) e^{-\eta^2} + O(x^{-\frac{5}{2}}) \right)_\eta. \tag{3.6.72}
\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Haftbedingung $v_{kart}(x, 0) = 0$ berechnet man v_{kart} durch (partielle)

Integration von (3.6.72):

$$\begin{aligned}
v_{kart}(x, y) &= \int_0^y (v_{kart})_y(x, y) dy = -\sqrt{\frac{4\nu x}{U}} \int_0^\eta \frac{\partial}{\partial x}(u_{kart}(x, \eta)) d\eta \\
&\stackrel{(3.6.72)}{=} \sqrt{\nu U} \left[\int_0^\eta -\frac{A}{x} e^{-\eta^2} - \frac{A^2}{2x^{\frac{3}{2}}} (e^{-2\eta^2} + \sqrt{\pi}\eta e^{-\eta^2} \operatorname{erf}(\eta)) + \frac{A^3 \sqrt{3} \ln(x)}{8x^2} (2\eta^2 - 1) e^{-\eta^2} d\eta \right. \\
&\quad \left. - \eta \left(\frac{A}{x} e^{-\eta^2} + \frac{A^2}{2x^{\frac{3}{2}}} (e^{-2\eta^2} + \sqrt{\pi}\eta e^{-\eta^2} \operatorname{erf}(\eta)) - \frac{A^3 \ln(x)}{8\sqrt{3}x^2} (2\eta^2 - 1) e^{-\eta^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\eta \frac{A}{x} e^{-\eta^2} + \frac{A^2}{2x^{\frac{3}{2}}} (e^{-2\eta^2} + \sqrt{\pi}\eta e^{-\eta^2} \operatorname{erf}(\eta)) - \frac{A^3 \ln(x)}{8\sqrt{3}x^2} (2\eta^2 - 1) e^{-\eta^2} d\eta \right] + O(x^{-2}) \\
&= \sqrt{\nu U} \left[\int_0^\eta -\frac{A^2}{2x^{\frac{3}{2}}} (2e^{-2\eta^2} - (e^{-2\eta^2} - \sqrt{\pi}\eta e^{-\eta^2} \operatorname{erf}(\eta))) + \frac{A^3 \ln(x)}{4\sqrt{3}x^2} (2\eta^2 - 1) e^{-\eta^2} d\eta \right. \\
&\quad \left. - \eta \left(\frac{A}{x} e^{-\eta^2} + \frac{A^2}{2x^{\frac{3}{2}}} (e^{-2\eta^2} + \sqrt{\pi}\eta e^{-\eta^2} \operatorname{erf}(\eta)) - \frac{A^3 \ln(x)}{8\sqrt{3}x^2} (2\eta^2 - 1) e^{-\eta^2} \right) \right] + O(x^{-2}) \\
&= \sqrt{\nu U} \left[-\frac{A^2}{2x^{\frac{3}{2}}} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erf}(\sqrt{2}\eta) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\eta^2} \operatorname{erf}(\eta) \right) - \frac{A^3 \ln(x)}{4\sqrt{3}x^2} \eta e^{-\eta^2} \right. \\
&\quad \left. - \eta \left(\frac{A}{x} e^{-\eta^2} + \frac{A^2}{2x^{\frac{3}{2}}} (e^{-2\eta^2} + \sqrt{\pi}\eta e^{-\eta^2} \operatorname{erf}(\eta)) - \frac{A^3 \ln(x)}{8\sqrt{3}x^2} (2\eta^2 - 1) e^{-\eta^2} \right) \right] + O(x^{-2}) \\
&= \sqrt{\nu U} \left[-\frac{A}{x} \eta e^{-\eta^2} + \frac{A^2}{2x^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} (1 - 2\eta^2) e^{-\eta^2} \operatorname{erf}(\eta) - \eta e^{-2\eta^2} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erf}(\sqrt{2}\eta) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{A^3 \ln(x)}{8\sqrt{3}x^2} (2\eta^2 - 3) \eta e^{-\eta^2} \right] + O(x^{-2}). \tag{3.6.73}
\end{aligned}$$

Das Ergebnis wird noch einmal übersichtlich zusammengefasst.

2D-Nachlauf-Fernfeld, achsensymmetrisch, Asymptotik dritter Stufe in kartesischen Koordinaten

$$u_{kart} = U \left[1 - \frac{A}{\sqrt{x}} e^{-\eta^2} - \frac{A^2}{2x} (e^{-2\eta^2} + \sqrt{\pi}\eta e^{-\eta^2} \operatorname{erf}(\eta)) + \frac{A^3 \ln(x)}{8\sqrt{3}x^{\frac{3}{2}}} (2\eta^2 - 1) e^{-\eta^2} \right] + O(x^{-\frac{3}{2}}) \tag{3.6.74}$$

$$\begin{aligned}
v_{kart} &= \sqrt{\nu U} \left[-\frac{A}{x} \eta e^{-\eta^2} + \frac{A^2}{2x^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} (1 - 2\eta^2) e^{-\eta^2} \operatorname{erf}(\eta) - \eta e^{-2\eta^2} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erf}(\sqrt{2}\eta) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{A^3 \ln(x)}{8\sqrt{3}x^2} (2\eta^2 - 3) \eta e^{-\eta^2} \right] + O(x^{-2}). \tag{3.6.75}
\end{aligned}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{U}{4\nu x}} y \tag{3.6.76}$$

$$A = \frac{W}{2\rho U \sqrt{\nu U} \pi}. \tag{3.6.77}$$

Dieses Resultat soll nun (bis zur zweiten Stufe) mit denjenigen von Goldstein und Stewartson/Crane in Einklang gebracht werden, was nicht ganz trivial ist, weil Goldstein eine andere Entdimensionierung vorgenommen hat, welche auch von Stewartson/Crane übernommen wurde. Im Folgenden werden deshalb Goldsteins Bezeichnungen stets mit einem Index G (für Goldstein) gekennzeichnet, um Verwechslungen oder Überschneidungen mit der hier verwendeten Notation zu vermeiden. Goldsteins Variablen werden in die hier verwendeten transformiert, so dass ein Vergleich der Ergebnisse möglich wird.

$$\begin{aligned}
d_G &= L_B^* \\
\rho_G &= \rho^* \\
\nu_G &= \nu^* \\
X_G &= x^* \\
Y_G &= y^* \\
U_{0G} &= U^* \\
U_G &= u_{kart}^* \\
V_G &= v_{kart}^* \\
x_G &= \frac{X_G}{d_g} = \frac{x^*}{L_B^*} = x \\
y_G &= \sqrt{\frac{U_{0G}}{\nu_G d_G}} Y_G = \sqrt{\frac{(U^*/U_B^*) U_B^* L_B^*}{\nu^*}} \frac{y^*}{L_B^*} = \sqrt{U} \sqrt{\text{Re}} y = \frac{\sqrt{U} y}{\sqrt{\nu}} \\
u_G &= \frac{U_G}{U_{0G}} = \frac{u_{kart}^*/U_B^*}{U^*/U_B^*} = \frac{u_{kart}}{U} \\
v_G &= \sqrt{\frac{d_G}{\nu_G U_{0G}}} V_G = \sqrt{\frac{L_B^*}{\nu^* U^*}} v_{kart}^* = \sqrt{\frac{L_B^* U_B^*}{\nu^* (U^*/U_B^*)}} \frac{v_{kart}^*}{U_B^*} = \frac{v_{kart}}{\sqrt{\nu U}} \\
\eta_G &= \frac{y_G}{\sqrt{2x_G}} = \frac{\sqrt{U} y}{\sqrt{2\nu x}} \stackrel{(3.6.76)}{=} \sqrt{2} \eta \\
D_G &= W^*/L_B^* \quad (\text{s. [21] Seite 551 Zeile 1}) \\
A_G &= \frac{D_G}{2\rho_G \sqrt{\pi \nu_G d_G U_{0G}} U_{0G}} = \frac{W^*/L_B^*}{2\rho^* \sqrt{\pi \nu^* L_B^* U^*} U^*} = \frac{W^*/L_B^*}{2 \frac{\rho^*}{\rho_B^*} \rho_B^* \sqrt{\pi \frac{\nu^*}{L_B^* U_B^*} (L_B^* U_B^*)^2 \frac{U^*}{U_B^*} \frac{U^*}{U_B^*} U_B^*}} \\
&= \frac{W^*/(\rho_B^* (L_B^* U_B^*)^2)}{2\rho \sqrt{\pi \nu U} U} = \frac{W^*/F_B^*}{2\rho \sqrt{\pi \nu U} U} = \frac{W}{2\rho \sqrt{\pi \nu U} U} \stackrel{(3.6.65)}{=} A.
\end{aligned}$$

Goldsteins Asymptotik zweiter Stufe lautet ([21] Seite 553 Ziffer (27)):

$$u_G = 1 - A_G x_G^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\eta_G^2} - \frac{A_G^2}{2x_G} \left[e^{-\eta_G^2} + \left(\frac{1}{2}\pi\right)^{\frac{1}{2}} \eta_G e^{-\frac{1}{2}\eta_G^2} \text{erf}(\eta_G/\sqrt{2}) \right] \quad (3.6.78)$$

$$\begin{aligned}
v_G &= -\frac{A_G}{2^{\frac{1}{2}} x_G} \eta_G e^{-\frac{1}{2}\eta_G^2} + \frac{A_G^2}{(2x_G)^{3/2}} \left[\left(\frac{1}{2}\pi\right)^{\frac{1}{2}} (1 - \eta_G^2) e^{-\frac{1}{2}\eta_G^2} \text{erf}(\eta_G/\sqrt{2}) \right. \\
&\quad \left. - \eta_G e^{-\eta_G^2} - \pi^{\frac{1}{2}} \text{erf}(\eta_G) \right]. \quad (3.6.79)
\end{aligned}$$

Einsetzen der oben angegebenen Variablenkonvertierungen liefert:

$$\frac{u_{kart}}{U} = 1 - A x^{-\frac{1}{2}} e^{-\eta^2} - \frac{A^2}{2x} \left[e^{-2\eta^2} + \pi^{\frac{1}{2}} \eta e^{-\eta^2} \text{erf}(\eta) \right] \quad (3.6.80)$$

$$\begin{aligned}
\frac{v_{kart}}{\sqrt{\nu U}} &= -\frac{A}{x} \eta e^{-\eta^2} + \frac{A^2}{(2x)^{3/2}} \left[\left(\frac{1}{2}\pi\right)^{\frac{1}{2}} (1 - 2\eta^2) e^{-\eta^2} \text{erf}(\eta) - \sqrt{2} \eta e^{-2\eta^2} \right. \\
&\quad \left. - \pi^{\frac{1}{2}} \text{erf}(\sqrt{2}\eta) \right]. \quad (3.6.81)
\end{aligned}$$

Dies stimmt wie gewünscht (bis zur zweiten Stufe) mit (3.6.74) und (3.6.75) überein. Der in (3.6.78) fehlende Term u_3 für eine Asymptotik dritter Stufe $u_G = 1 - u_1 - u_2 - u_3$ wird von Stewartson[51]

S. 178 Textziffern (2.13), (2.16) als

$$\begin{aligned} u_3 &= \frac{\log x}{x^{\frac{3}{2}}} G(\eta_G) + O(x^{-\frac{3}{2}}) \\ G(\eta_G) &= A_S(1 - \eta_G^2)e^{-\frac{1}{2}\eta_G^2} = A_S(1 - 2\eta)e^{-\eta^2} \end{aligned}$$

angegeben, wobei A_S eine eindeutig bestimmte, für den allgemeinen Fall aber von Stewartson nicht konkretisierte Konstante ist. Nach (3.6.74) muss $A_S = \frac{A^3}{8\sqrt{3}}$ gelten.

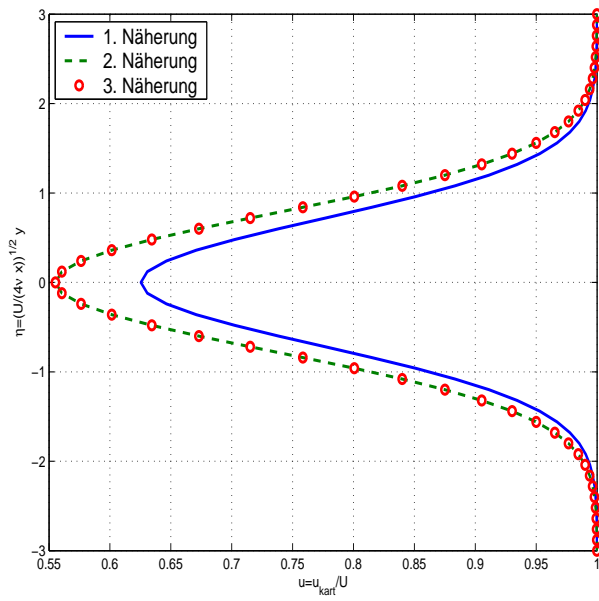
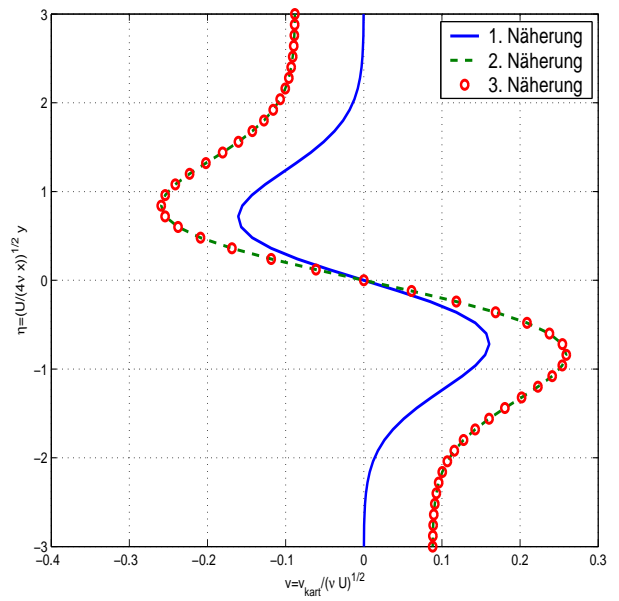
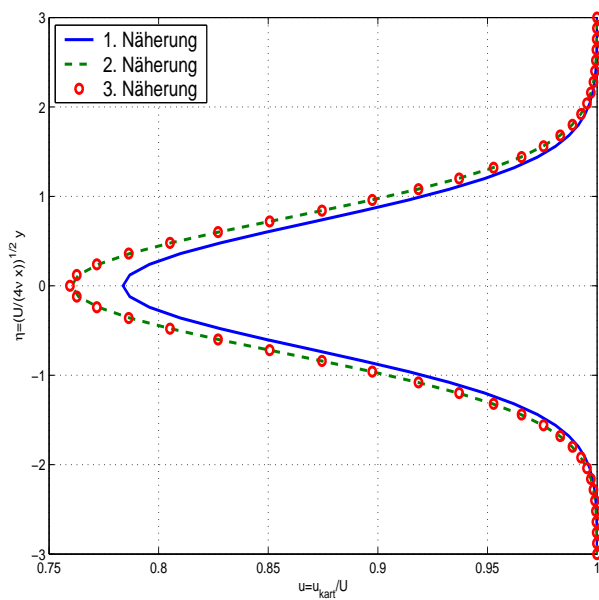
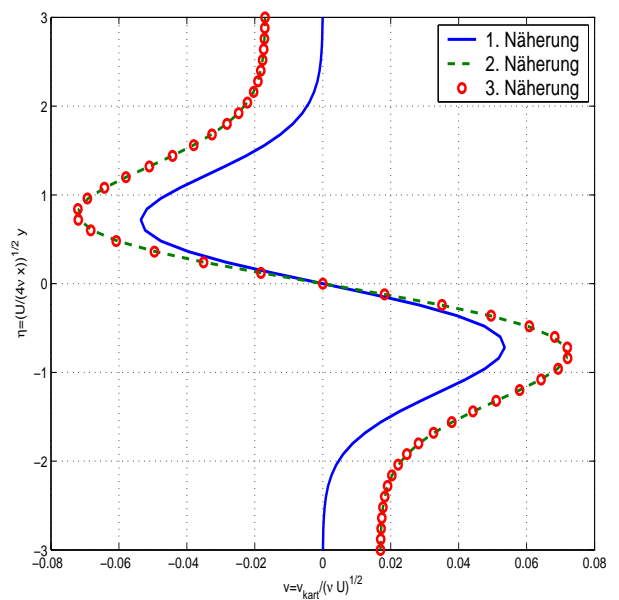
Im Fall einer flachen tangential angeströmten Platte der dimensionslosen Breite $B = \frac{B^*}{L_B^*} = 1$ und Länge $l = \frac{l^*}{L_B^*} = \frac{l^*}{B^*}$ lässt sich die Konstante $A = A_{Platte}$ mit dem Plattenwiderstandsgesetz (1.5.24) auf Seite 20 näher bestimmen:

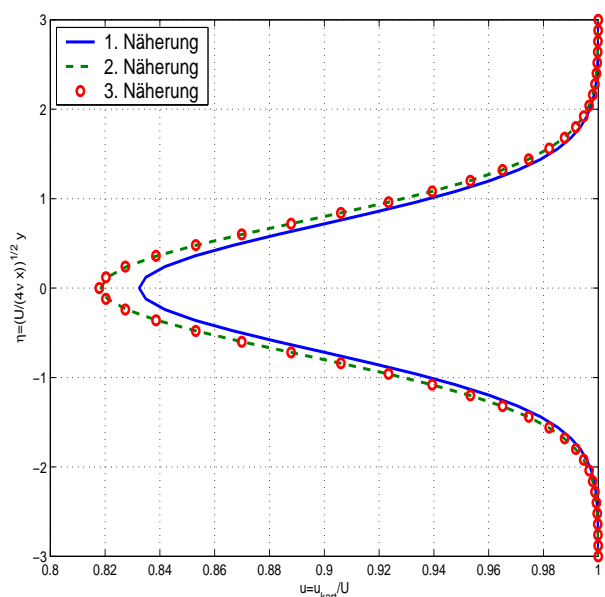
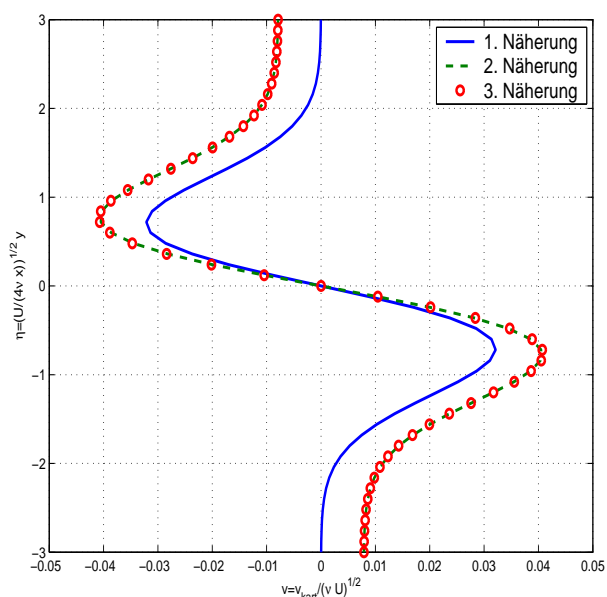
$$A_{Platte} = \frac{2W_{Platte}}{2\rho U \sqrt{\nu U \pi}} = \frac{2 \frac{1.328}{\sqrt{\frac{\nu l}{v}}} \frac{\rho}{2} U^2 B l}{2\rho U \sqrt{\nu U \pi}} = 0,664 \sqrt{\frac{l}{\pi}}. \quad (3.6.82)$$

[Die Konstante A_{Platte} ist die Konstante α bei Stewartson[51] S.179.] Die Abbildungen 3.5 bis 3.10 auf den Seiten 93 und 94 enthalten einen Vergleich der Asymptotiken erster, zweiter und dritter Stufe für für den Fall $l = 1$. Mit wachsender Entfernung nehmen die Unterschiede natürlich ab (man beachte die unterschiedliche Skalierung der horizontalen Achsen) und die Asymptotik erster Stufe dominiert.

Abschließende Bemerkungen

1. In Abschnitt 3.4 auf Seite 62 wurde elementar „das“ zweidimensionale, asymptotische Nachlauf-Fernfeld bestimmt (s. (3.4.13) auf Seite 66). Dieses stellt sich in dem hier betrachteten Kontext als Asymptotik erster Stufe dar.
2. Goldstein [21] weist auf Seite 553 unten darauf hin, dass die Vertikalkomponente v_{kart} in zweiter Näherung aufgrund des Termes $-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\text{erf}(\sqrt{2}\eta)$ für $\eta \rightarrow \infty$ nicht verschwindet und einen negativen Wert anstrebt, was bei der ersten Näherung nicht der Fall ist. Es tritt also in zweiter Näherung auch im Nachlauf-Fernfeld ein seitlicher Einsaugeffekt (engl.: entrainment) ein. Dies steht im Gegensatz zu den Ausführungen von Schlichting und Gersten [48] S. 192, wo nur die erste Approximation betrachtet wird.
3. Bei der Herleitung einer Asymptotik vierter Stufe mit Termen der Form $x^{-\frac{3}{2}}G_4(\eta)$ treten Konstanten auf, die sich nicht allein durch den Widerstand des Körpers beschreiben lassen, wie es für die Konstante A möglich war. Jene Konstanten hängen, wie bereits im Wärmeleitungskapitel angesprochen wurde, von Momenten höherer Ordnung eines Anfangsprofils ab, welches in praktischen Anwendungen meist nicht bekannt ist. Aus diesem Grund ist die hergeleitete Asymptotik dritter Stufe für praktische Anwendungen eigentlich nicht mehr zu verbessern. Es macht aber auch deutlich, dass in dieser Modellierung zwei völlig verschiedenartige Hindernisse - beispielsweise eine flache tangential angeströmte Platte und ein querangeströmter Kreiszyylinder - asymptotisch für $x \rightarrow \infty$ das gleiche Nachlauf-Fernfeld besitzen, sofern sie nur den gleichen Widerstand erzeugen.

Abbildung 3.5: $u_{kart}(x, \eta)$, $x = 1$ Abbildung 3.6: $v_{kart}(x, \eta)$, $x = 1$ Abbildung 3.7: $u_{kart}(x, \eta)$, $x = 3$ Abbildung 3.8: $v_{kart}(x, \eta)$, $x = 3$

Abbildung 3.9: $u_{kart}(x, \eta)$, $x = 5$ Abbildung 3.10: $v_{kart}(x, \eta)$, $x = 5$

3.7 Ursprung- und Startpunktbestimmung der asymptotischen Nachlauf-Fernfeld-Lösungen

Die bisherigen theoretischen Überlegungen haben keine Aussagen zum konkreten (räumlichen) Gültigkeitsbereich gemacht, in dem die hergeleiteten Fernfeld-Lösungen (3.6.74), (3.6.75) einsetzbar sind. Der Anwender fragt sich dann natürlich zu Recht, was man mit jenen überhaupt praktisch anfangen kann. Es sind also Antworten auf folgende Fragen nötig:

1. Wo auf der Körpersymmetrieachse liegt der Koordinatenursprung in Relation zum Körper ?
2. Wenn ein Koordinatenursprung bestimmt ist, ab welcher Entfernung $x_0 > 0$ liefern die Fernfeld-Lösungen brauchbare - sprich realitätsnahe - Ergebnisse ?

Die erste Frage könnte ein gewisses Unverständnis hervorrufen, da man üblicherweise als erstes ein Koordinatensystem festlegt und dann die Theorie darauf aufbaut. Man sollte doch wie üblich frei in der Wahl eines Ursprunges sein. Prinzipiell ist diese Kritik an der bisherigen Vorgehensweise berechtigt; eine andere - d.h. die feste Wahl eines Ursprunges zu Beginn aller Überlegungen - hätte aber aus folgenden Gründen kaum einen Vorteil gebracht bzw. das Problem nur verlagert:

a) Die hergeleiteten Fernfeld-Lösungen dritter Stufe sind asymptotisch für $x \rightarrow \infty$ unabhängig von der Wahl des Ursprunges, denn eine Translation $x + c$ der x -Werte um eine Konstante c (das entspricht einer Verschiebung des Ursprunges auf der Symmetrieachse) hat die Ordnung $O(x^{-\frac{3}{2}})$ und beeinflusst daher erst eine Asymptotik vierter Stufe, wie die folgende verkürzte Rechnung

mittels Taylor-Entwicklung um einen festen Punkt (x, y) zeigt:

$$\begin{aligned} v_y(x, y) &= v_\eta(x, \eta)\eta_y = \sqrt{\frac{U}{4\nu x}} v_\eta(x, \eta) \stackrel{(3.6.75)}{=} O(x^{-\frac{3}{2}}) \\ u(x+c, y) &= u(x, y) + u_x(x, y)c + \dots = u(x, y) - v_y(x, y)c + \dots = u(x, y) + O(x^{-\frac{3}{2}}). \end{aligned}$$

In der dritten und letzten abschließenden Bemerkung des vorangehenden Abschnittes wurde deutlich darauf hingewiesen, dass eine Asymptotik vierter Stufe zusätzliche Eigenschaften eines Anfangsprofiles des Nachlauf-Fernfeldes erfordert. Dieses möchte der Anwender aber gerade bestimmen, so dass sich der Kreis schließt. [Der weiter unten genauer besprochene Ansatz von Ting und Chen [54] zur Bestimmung eines geeigneten Ursprunges zielt trotzdem gerade auf diesen Einfluss auf die vierte Stufe ab.]

b) Im Gegensatz zum Nachlauf-Fernfeld weiß man beim Nachlauf-Nahfeld genau, wo dieses beginnt, nämlich direkt an der aus Anströmungssicht hinteren Kante des Körpers. Der Nahfeld-Ursprung liegt also auf natürliche Weise fest. Hat man nun eine Modellierung des Nachlauf-Nahfeldes hergeleitet, so sollte dieses möglichst glatt und stetig für große horizontale Abstände vom Hindernis in die Fernfeld-Lösung übergehen. Hätte man wie oben angegeben von vornherein den Fernfeld-Ursprung festgelegt, so hätte man sich damit unnötig eines Freiheitsgrades beraubt, der einen glatten Übergang von Nah- in Fernfeld-Lösung ermöglicht, bzw. die Bestimmung eines unnatürlichen Nahfeld-Ursprunges erzwingen.

Die Ausführungen in b) implizieren bereits eine numerische Vorgehensweise zur Bestimmung eines Fernfeld-Ursprunges und eines Startpunktes x_0 , falls das Nahfeld bekannt ist: Ausgehend vom Ursprung des Nahfeldes an der Körperhinterkante wähle man schrittweise in (kleinen) Abständen links und rechts davon einen potentiellen Fernfeld-Ursprung und berechne das diesbezügliche Fernfeld. Derjenige Punkt, bei dem ein annehmbar glatter Übergang stattfindet, ist der gesuchte Fernfeld-Ursprung und das Ende des Übergangsbereiches von Nah- in Fernfeldlösung ist der gesuchte Startpunkt x_0 .

Diese aufwendige Strategie wurde sowohl von Tollmien[56] als auch von Goldstein[21] aufbauend auf Goldsteins Nahfeld-Lösung für die flache Platte [20] durchgeführt. Tollmien schreibt auf Seite 269 (Zeile 6 von unten): „... . Diese asymptotische Formel gilt von $\frac{x}{l} = 3$ ab gut.“ Dabei ist l die Plattenlänge. Er gibt dabei leider nicht den Ursprung an, so dass man nicht recht weiß, wo er sich bewegt. Dies wird in der später erschienenen Literatur wiederholt bemängelt. Interessanterweise ist Tollmiens bezugslose Angabe von Schlichting und Gersten [48] S.192 (Zeile 12 von oben) in allen mir bekannten Auflagen kommentarlos übernommen. Goldstein [21] kommt in Abschnitt 3 S.556-560 unter Angabe konkreter Zahlentafeln zu folgendem genaueren Ergebnis:

Regel 3.7.1 (Goldstein)

- a) *Der Ursprung des Nachlauf-Fernfeldes einer tangential angeströmten flachen Platte der dimensionsbehafteten Länge l^* liegt aus Anströmungssicht $0,52 \cdot l^*$ vor der Plattenhinterkante und damit ungefähr in der Plattenmitte.*
- b) *Das reine Nachlauf-Nahfeld endet etwa $0,36 \cdot l^*$ hinter der Hinterkante.*

c) Ab $0,5 \cdot l^*$ hinter der Hinterkante besitzt das Fernfeld bereits einen starken Einfluss.

d) Ab $2,2 \cdot l^*$ hinter der Hinterkante liegt die reine Fernfeld-Lösung vor.

Gemäß c) und d) kann man also grob

$$1,02 \cdot l^* = (0,52 + 0,5) \cdot l^* \leq x_0^* \leq (0,52 + 2,2) \cdot l^* = 2,72 \cdot l^* \quad (3.7.1)$$

(gemessen vom Fernfeld-Ursprung) abschätzen.

M. Nishioka und T. Miyagi [45] haben Goldsteins theoretisches Ergebnis experimentell überprüft. Ihre Notation sei deuthlichkeitshalber mit einem Index NM gekennzeichnet:

$$\begin{aligned} \nu_{NM} &= \nu^* = \nu_G \\ U_{\infty, NM} &= U^* = U_{0, G} \\ U_{NM} &= u^* = U_G \\ l_{NM} &= l^* \\ R_{NM} &= \frac{U_{\infty, NM} l_{NM}}{\nu_{NM}} = \frac{U^* l^*}{\nu^*} = l \text{Re} \\ x_{NM} &= x^* - 0,52 \cdot l^* = X_G - 0,52 \cdot l^* \quad (x_{NM} \text{ ist der Abstand von der Plattenhinterkante}) \\ y_{NM} &= y^* = Y_G. \end{aligned}$$

Sie betrachten Reynoldszahlen R_{NM} zwischen 20 und 3000 mit dem Ergebnis, dass Goldsteins Nahfeld-Lösung eine weniger gute Übereinstimmung mit der Realität zeigt, die Fernfeld-Lösung hingegen in guter Näherung mit den Messungen übereinstimmt, wobei für sie das Fernfeld bereits bei $0,5 \cdot l^*$ hinter der Hinterkante beginnt, auch wenn dort eigentlich erst der Beginn des Übergangsbereiches ist (s. 3.7.1 c)). In der aus ihrem Artikel entnommenen Graphik 3.11 auf Seite 97 sind die Messergebnisse für die Reynoldszahlen $R_{NM} = 20, 100, 400, 3000$ im Vergleich zu Goldsteins Fernfeld-Lösung zweiter Stufe (3.6.78) aufgetragen (man nehme dabei auch die geringfügig abweichenden Interpolationswerte aus [21] S. 559 Tabelle III für $x_{NM}/l_{NM} = x_1/l = 0,5$ und $x_{NM}/l_{NM} = x_1/l = 1,00$ zur Kenntnis). Die durchgezogene Kurve (a) für $x_{NM}/l_{NM} = 0$ ist die Blasius-Lösung.

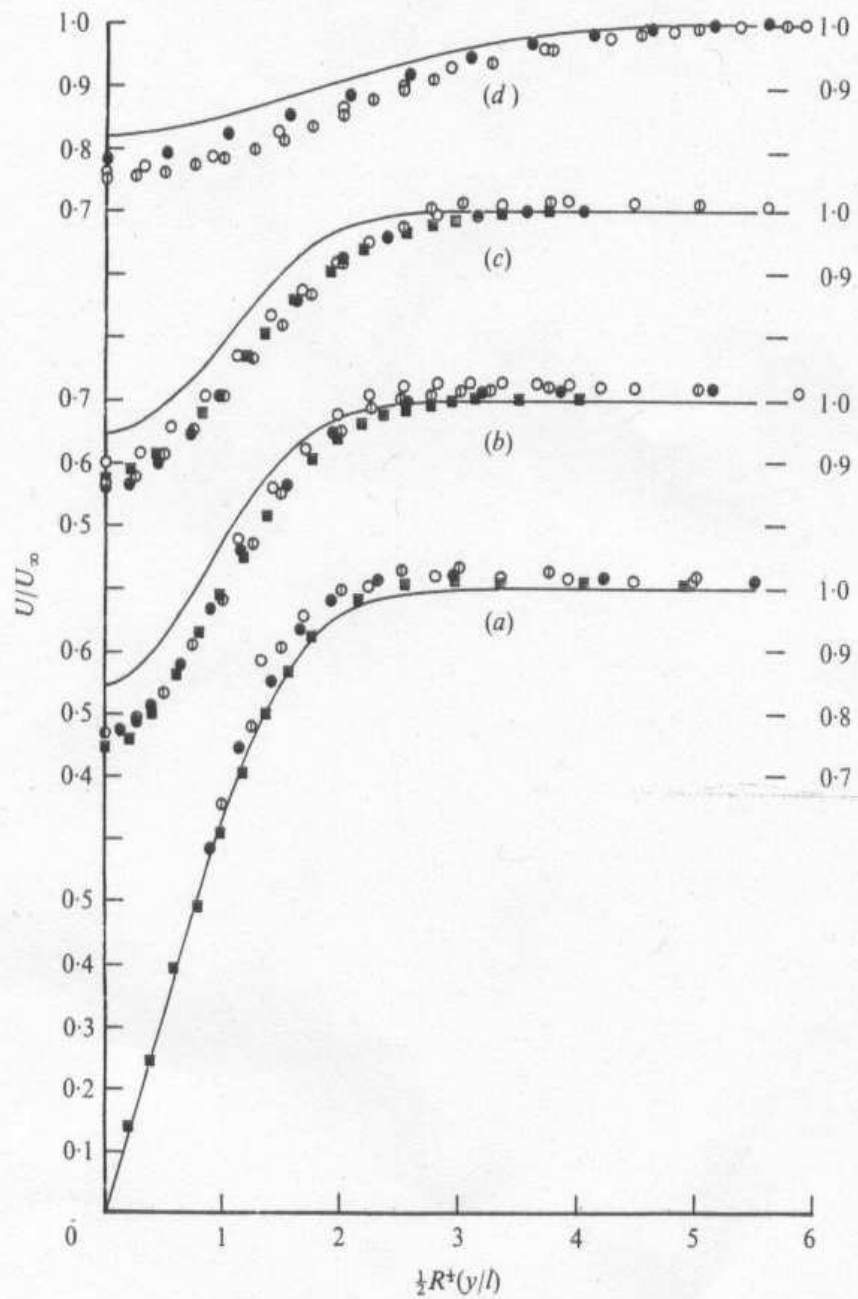


FIGURE 2. Wake development at $R = 20, 100, 400, 3000$. Results of Goldstein's far-wake solution are compared with our measurements.

		Present results				Goldstein
		○	⊙	●	■	—
		20	100	400	3000	Arbitrary
x/l	(a)	0	0	0	0	0
	(b)	0.5	0.5	0.54	0.50	0.50
	(c)	1.0	1.0	1.05	1.10	1.00
	(d)	5.0	5.0	5.15	—	5.00

Abbildung 3.11: Messergebnisse von M. Nishioka und T. Miyagi

Als nächstes wird das klassische Beispiel eines quer angeströmten Kreiszylinders betrachtet. Nishioka und Sato [43], [44] haben ausführliche Geschwindigkeitsmessungen im Nachlauf-Nah- und Fernfeld für (Durchmesser-)Reynoldszahlen zwischen 10 und 80 durchgeführt. In dem Artikel [44] geben sie Messwerte für die Reynoldszahlen 10 und 40 bis maximal 7 Durchmesser hinter dem Zylinder in den Abbildungen Figure 8 und 9 auf den Seiten 104 und 105 an. Der schwieriger erhältliche Artikel [43] umfasst Messwerte für die Reynoldszahlen 10, 15, 20, 30, 40, 50 ebenfalls bis maximal 7 Durchmesser hinter dem Zylinder in den Abbildungen Figure 5 bis 10 auf den Seiten 211 und 212. In diesem Artikel werden auch Geschwindigkeiten auf der Symmetrieachse ($y = 0$) für größere Abstände bis 20 Durchmesser hinter dem Zylinder für die Reynoldszahlen 10, 15, 20, 30, 40 in den Abbildungen Figure 14 (a) bis (e) auf Seite 215 aufgeführt.

In Anlehnung an das Experiment von Nishioka und Sato wurde eine numerische Simulation mit dem CFD-Programm ANSYS CFX 11.01 für die Reynoldszahlen 10, 15, 20, 30, 40, 50 durchgeführt. Für Entfernungen bis maximal 20 Durchmesser hinter der Hinterkante des Zylinders wurden dann die CFX-Ergebnisse mit denen der asymptotischen Lösung dritter Stufe und - soweit vorhanden - mit den Messungen von Nishioka und Sato in MATLAB zu einem Vergleich zusammengeführt. Die zwölf Seiten 102 bis 113 enthalten 48 Grafiken, wobei jede der sechs Doppelseiten acht Graphiken einer der sechs betrachteten Reynoldszahlen für die Abstände 1, 2, ..., 8 zeigt. Auf den Seiten 114 und 115 findet ein Vergleich der Geschwindigkeitsentwicklung auf der Symmetrieachse bis 20 Durchmesser hinter dem Zylinder statt. Die Bilder enthalten jeweils folgende Kurven:

- die numerische CFX-Lösung
- die Messwerte von Nishioka und Sato (soweit vorhanden)
- die asymptotische Lösung dritter Stufe (3.6.74) mit Ursprung an der Hinterkante des Zylinders
- die asymptotische Lösung dritter Stufe mit Ursprung 0,8 Durchmesser vor der Hinterkante des Zylinders.

Die Geometrie für die CFX-Simulation wurde mit dem Programm ANSYS ICEM CFD 11.01 erzeugt und besteht aus einem Kreiszylinder mit $d^* = 4\text{ mm}$ Durchmesser, der von einem dünnen quaderförmigen Kontrollvolumen umgeben ist. Die z -Achse des Koordinatensystems verläuft parallel zur Zylinderachse, so dass sein Kreisquerschnitt in der x,y -Ebene liegt. Die Anströmung ist parallel zur x -Achse und der Ursprung wurde auf die Hinterkante gelegt, so dass der Kreisquerschnittsmittelpunkt die Koordinaten $(x^*, y^*) = (-2\text{ mm}, 0\text{ mm})$ besitzt.

In CFX wurde als Löser das Upwind-Verfahren gewählt. Besonders hervorgehoben sei noch, dass die beiden Randflächen des quaderförmigen Simulationsgitters, die normal zur y -Achse verlaufen und durch welche eine Verdrängung bzw. ein Einsaugeffekt stattfinden soll, die Randbedingung „Opening Pressure for Entrainment“ erhalten haben. Der CFX Physics Report mit allen vorgenommenen Einstellungen ist beispielhaft für $Re = 10$ in Tabelle 3.2 angegeben.

Das strömende Medium ist Luft bei 25°C , dessen dynamische Viskosität in CFX mit $\nu^* = 1,831 \cdot 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$ voreingestellt ist. Bei einer ebenfalls fest eingestellten Dichte $\rho^* = 1,185 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ergibt sich

Domain Physics:

Location	Type	Materials	Models
KONTROLL- VOLUMEN	Fluid	Air at 25 C	Heat Transfer Model = Isothermal Turbulence Model = Laminar Buoyancy Model = Non Buoyant Domain Motion = Stationary

Boundary Physics:

Name	Location	Type	Settings
Einlauf	EINLAUF	Inlet	Flow Regime = Subsonic Normal Speed = 0.0386 [m s ⁻¹] Mass And Momentum = Normal Speed
SeitenOU	SEITENOU	Opening	Flow Regime = Subsonic Mass And Momentum = Opening Pressure for Entrainment Relative Pressure = 0 [Pa]
Auslauf	AUSLAUF	Outlet	Flow Regime = Subsonic Mass And Momentum = Static Pressure Relative Pressure = 0 [Pa]
SeitenLR	ZYLINDER	Wall	Wall Influence On Flow = No Slip

Tabelle 3.2: CFX Physics Report

Re_d	$U^* [\frac{m}{s}]$	c_W
10	0,0386	2,75
15	0,0579	2,25
20	0,0773	1,94
30	0,1159	1,56
40	0,1545	1,50
50	0,1931	1,38

Tabelle 3.3: Anströmgeschwindigkeiten und Widerstandsbeiwerte für $Re_d = 10, \dots, 60$

eine kinematische Viskosität $\nu^* = \frac{\mu^*}{\rho^*} = 154,5148 \cdot 10^{-7} \frac{m^2}{s}$. Zu vorgegebener Reynoldszahl lautet daher die zugehörige Anströmgeschwindigkeit

$$U^* = \frac{Re_d \nu^*}{d^*} = Re_d \cdot \frac{154,5148 \cdot 10^{-7} \frac{m^2}{s}}{0,004m} = Re_d \cdot 3,86287 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s}.$$

Die Tabelle 3.3 enthält die Anströmgeschwindigkeiten, welche in CFX in den Randbedingungen des Einlaufes eingegeben wurden. Zusätzlich enthält diese Tabelle auch den jeweiligen Widerstandsbeiwert des Kreiszylinders, der zur Berechnung der Asymptotik dritter Stufe benötigt wird und ebenfalls dem Artikel von Nishioka und Sato entnommen wurde (s. [44] S.107, Figure 12). Die beiden farbigen Contour-Plots für die langsamste Anströmung bei $Re_d = 10$ und die schnellste bei $Re_d = 50$ in den Abbildungen 3.12, 3.13 dienen der qualitativen Veranschaulichung des Strömungsfeldes (und sind die einzigen „bunten Bilder“ in dieser Arbeit). Man sieht an den rot gefärbten Bereichen ober- und unterhalb des Zylinders, dass dort die Geschwindigkeiten größer sind als die Anströmgeschwindigkeit. Dieser Geschwindigkeitsüberschuss (engl.: velocity overshoot) pflanzt sich an den Rändern des Nachlaufs stromabwärts abnehmend fort. Dieses Phänomen wird mit den asymptotischen Entwicklungen nicht erfasst.

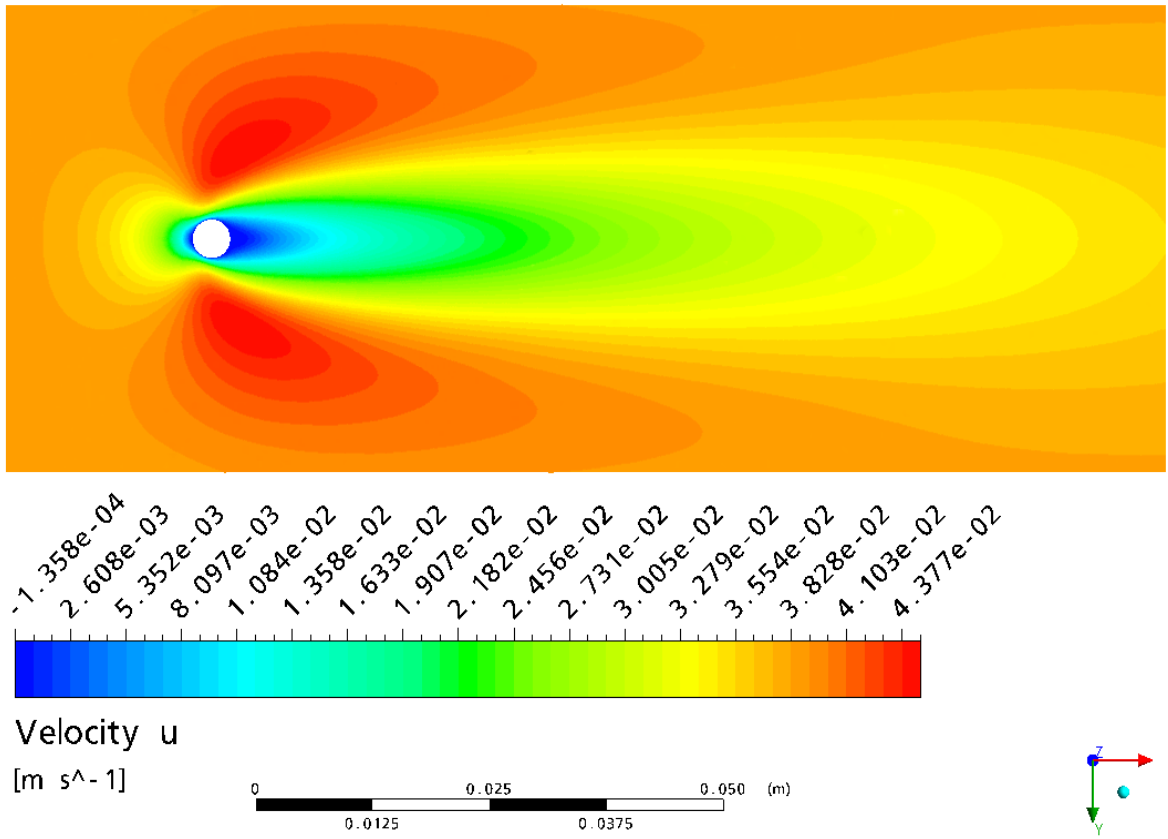


Abbildung 3.12: u -Geschwindigkeit bei $Re_d = 10$

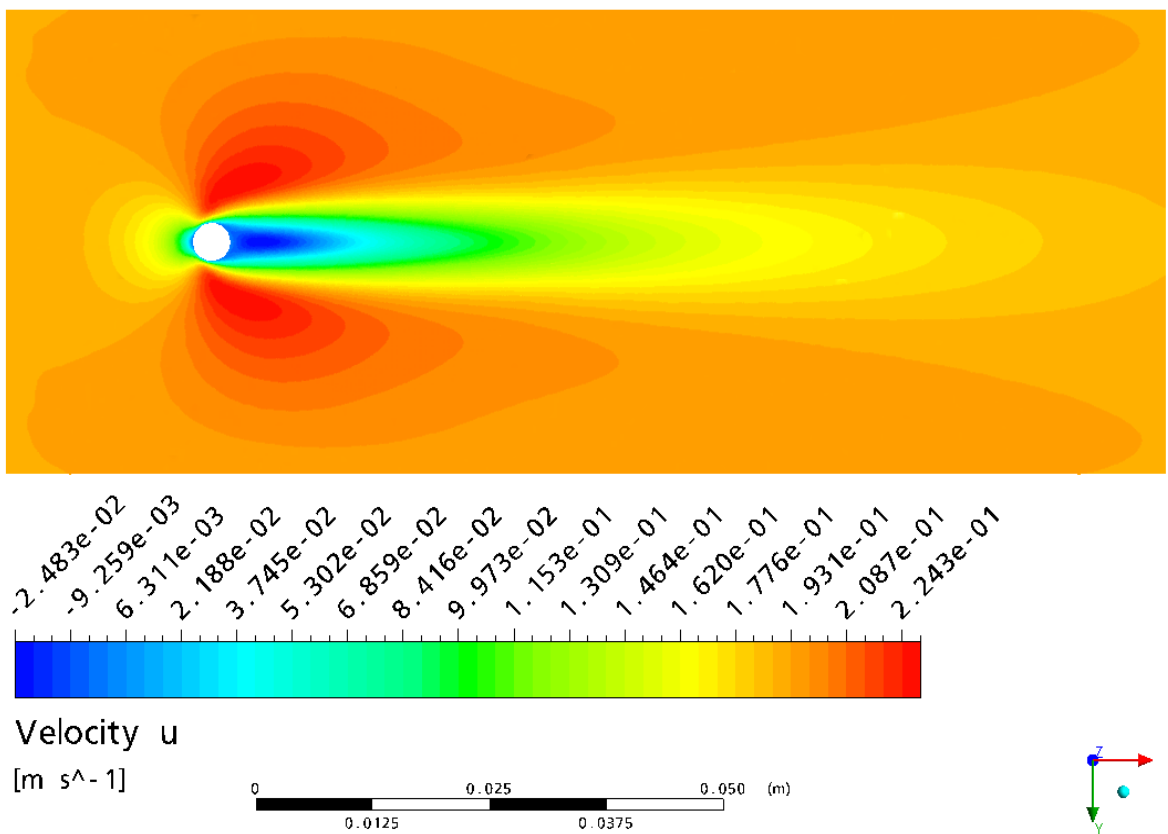
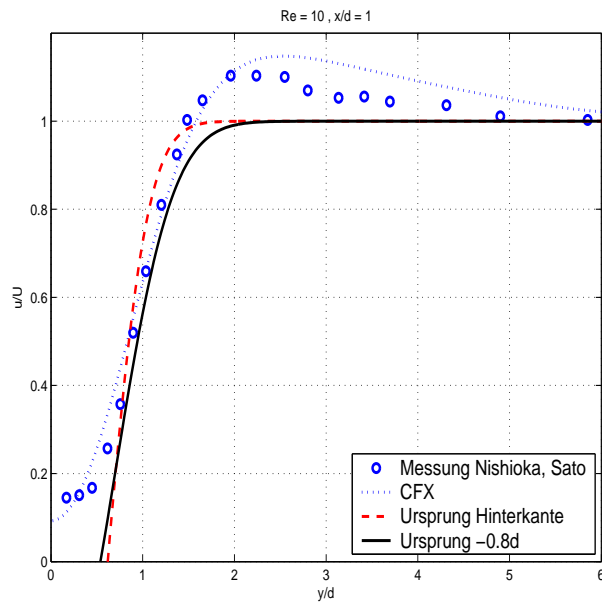
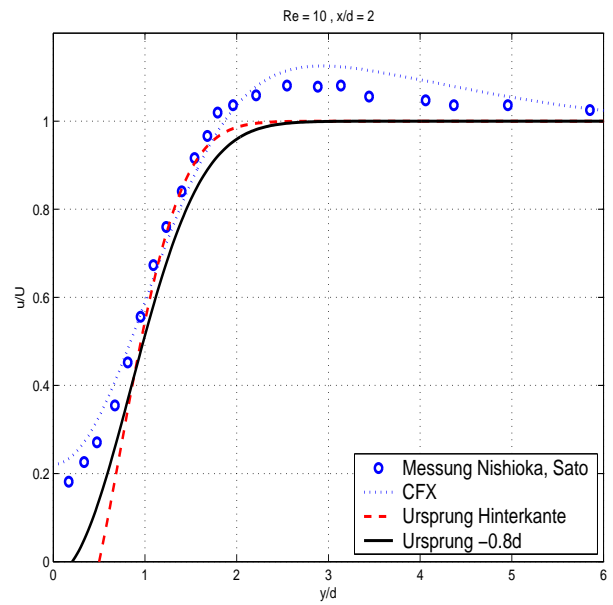
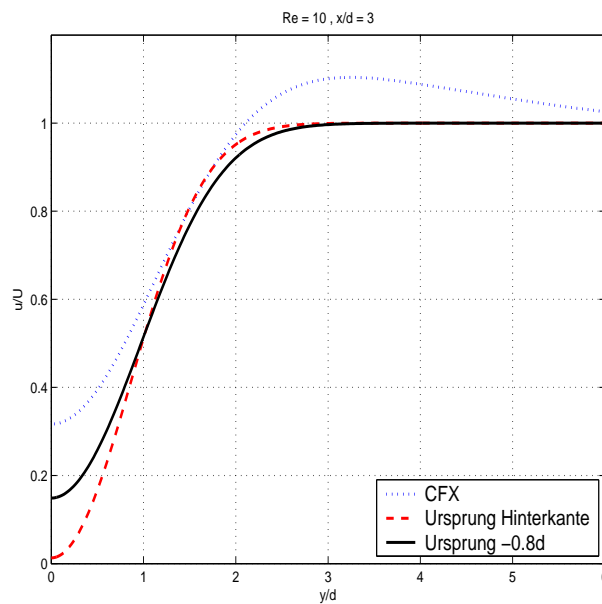
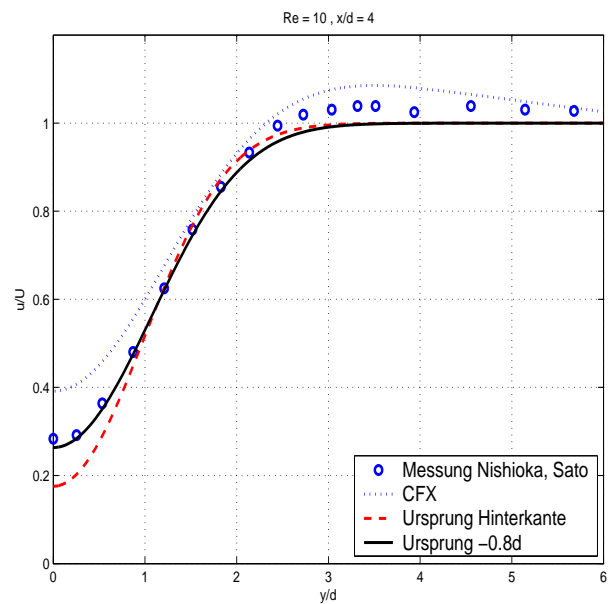
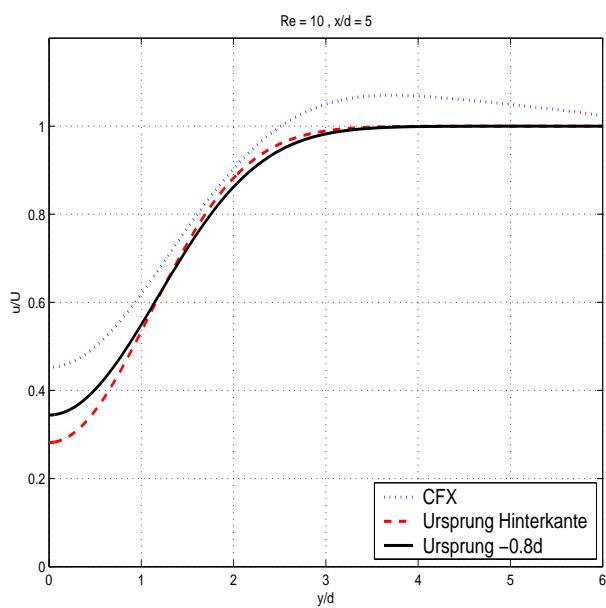
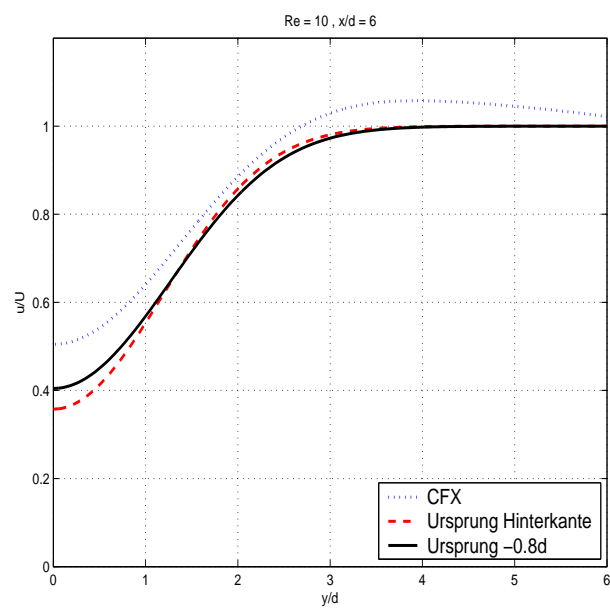
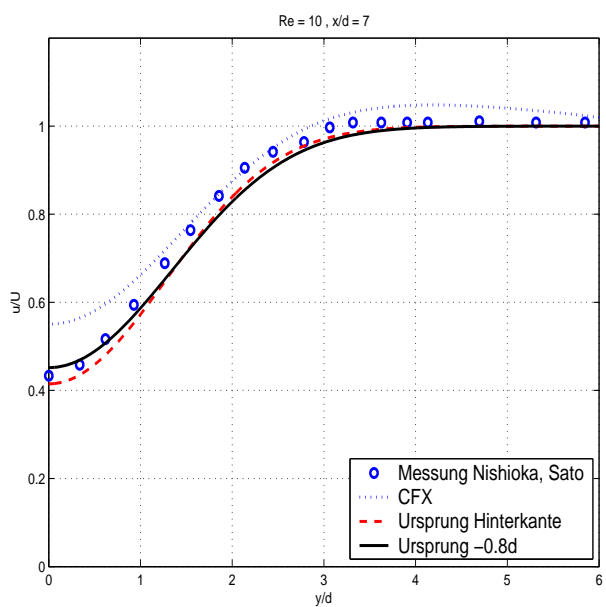
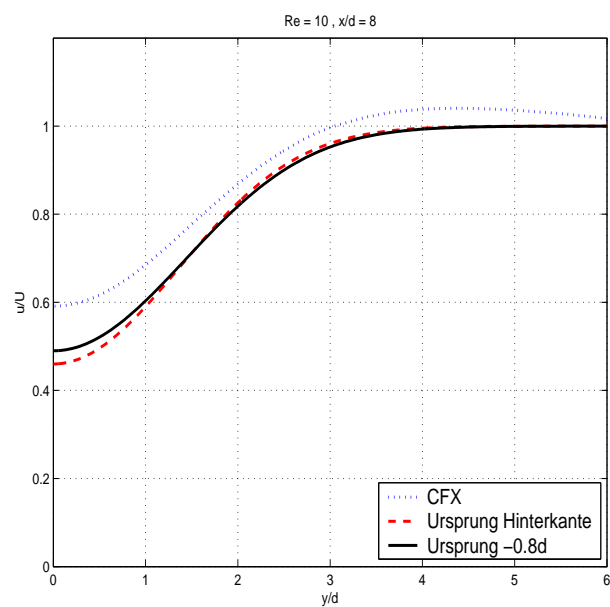
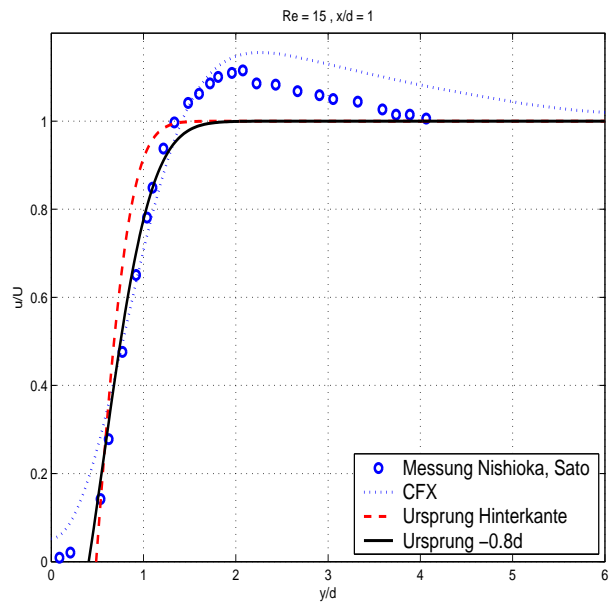
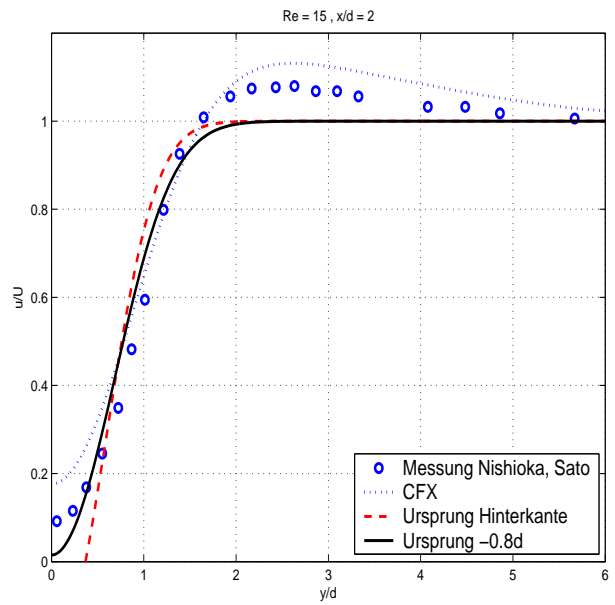
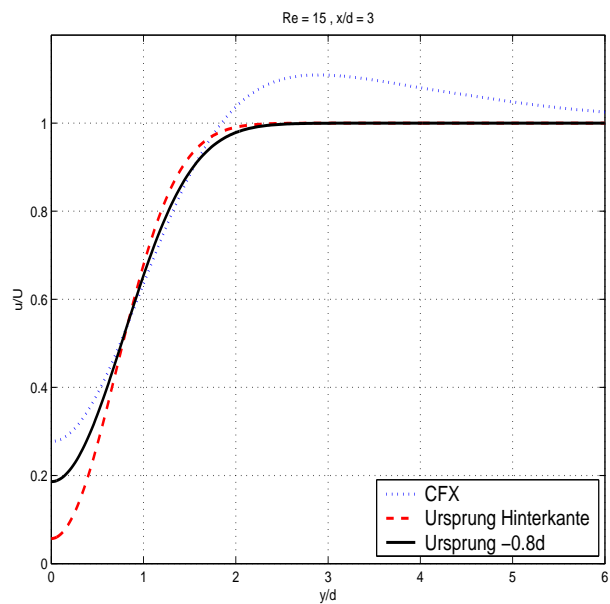
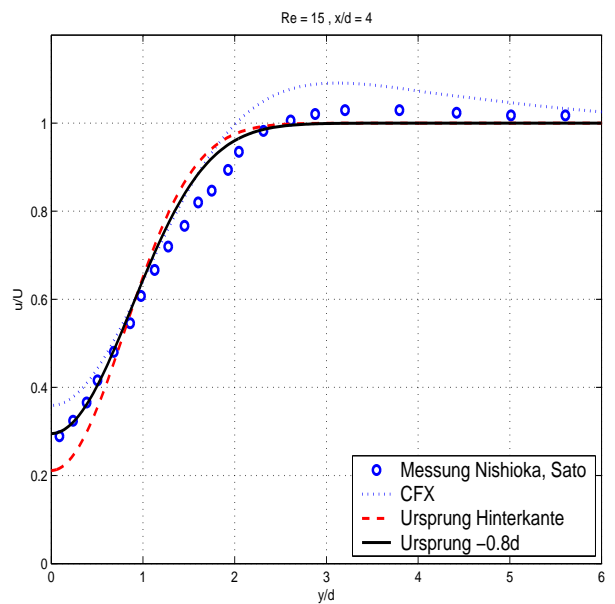
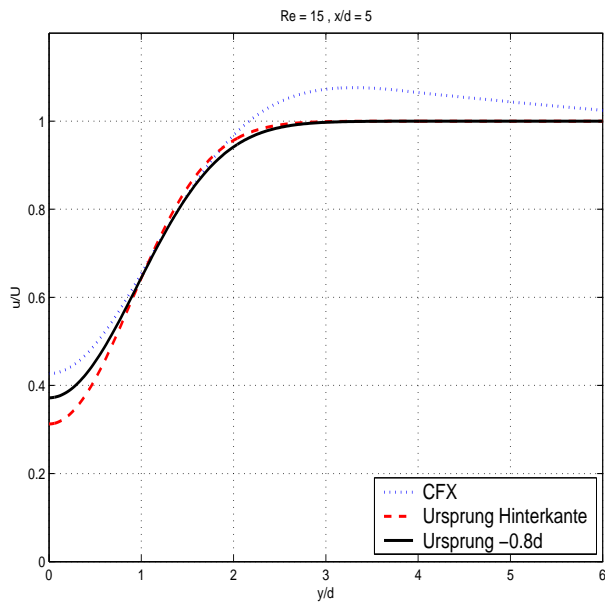
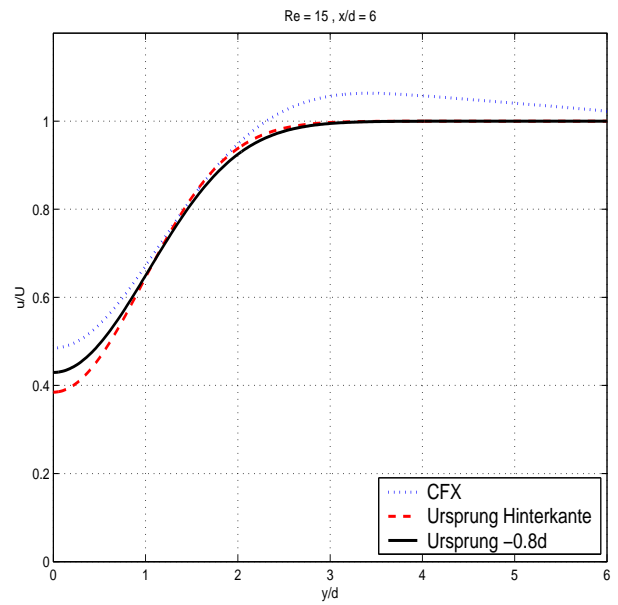
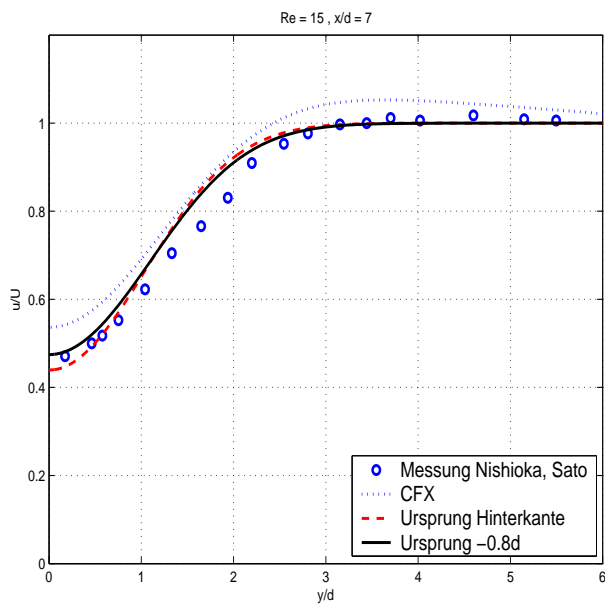
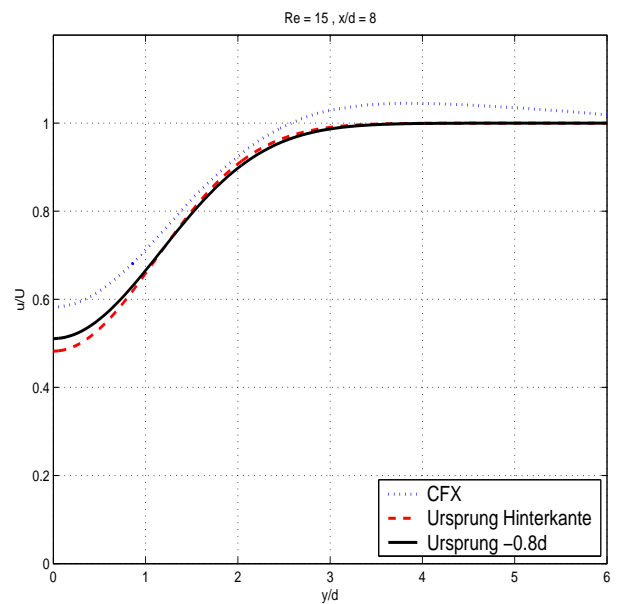


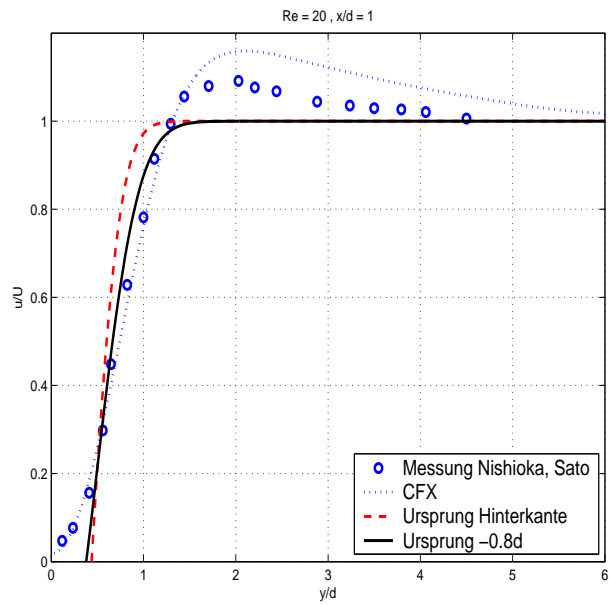
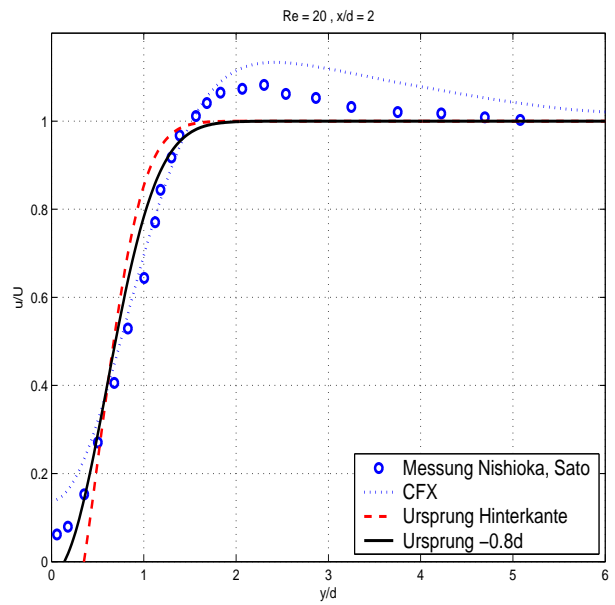
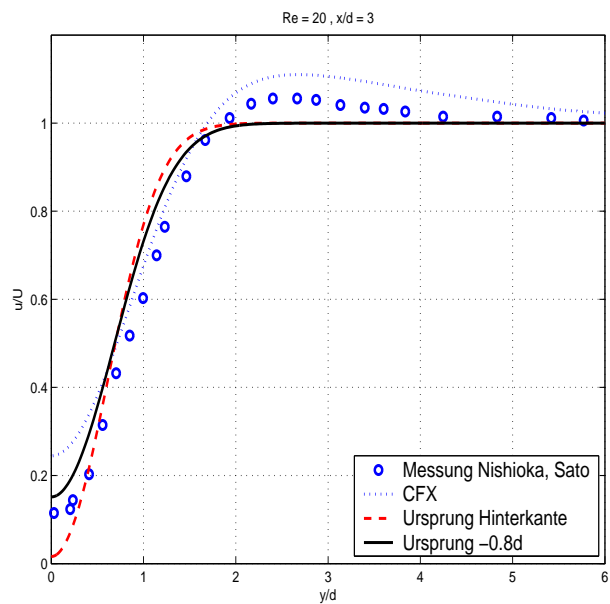
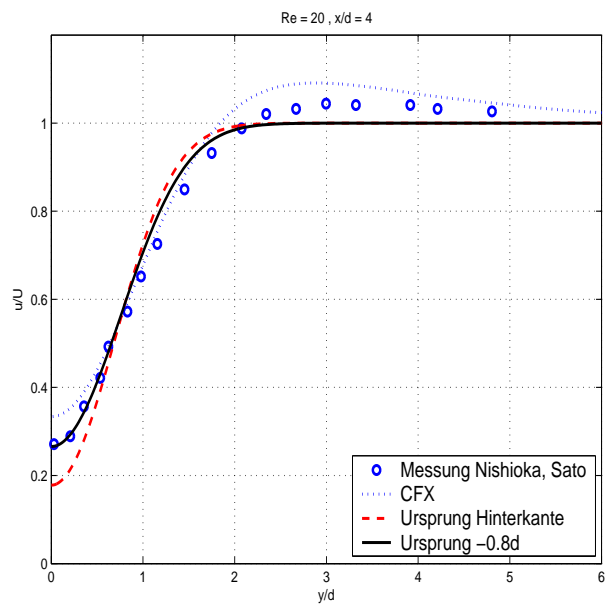
Abbildung 3.13: u -Geschwindigkeit bei $Re_d = 50$

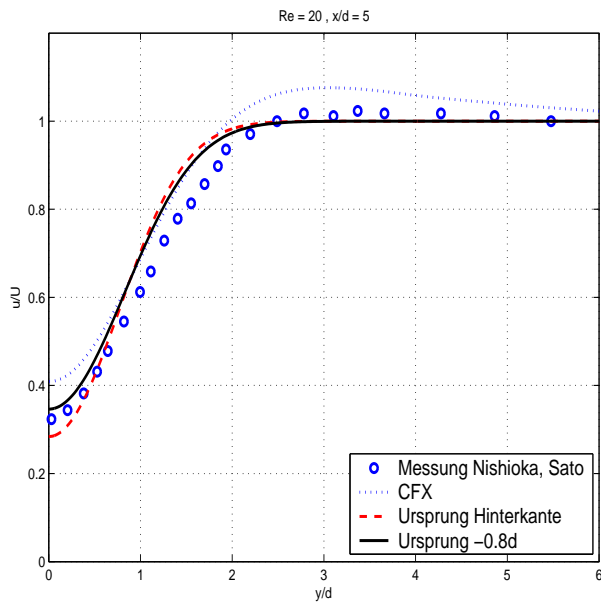
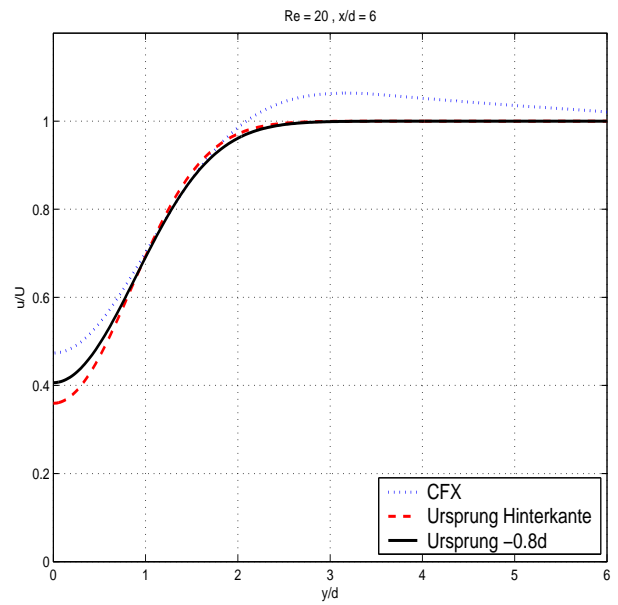
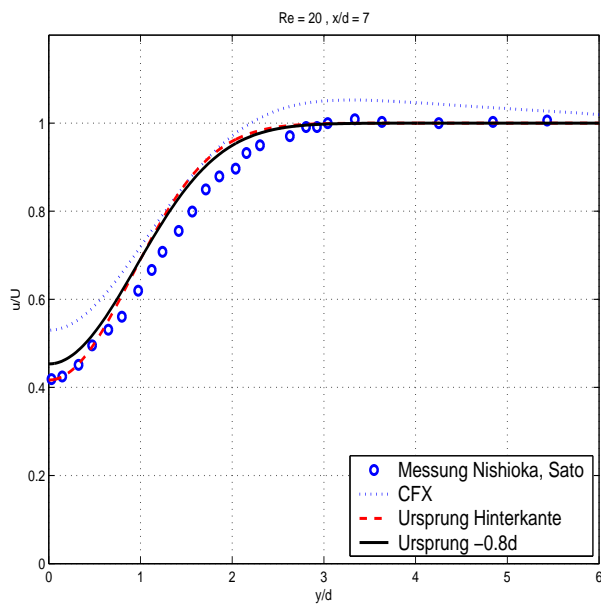
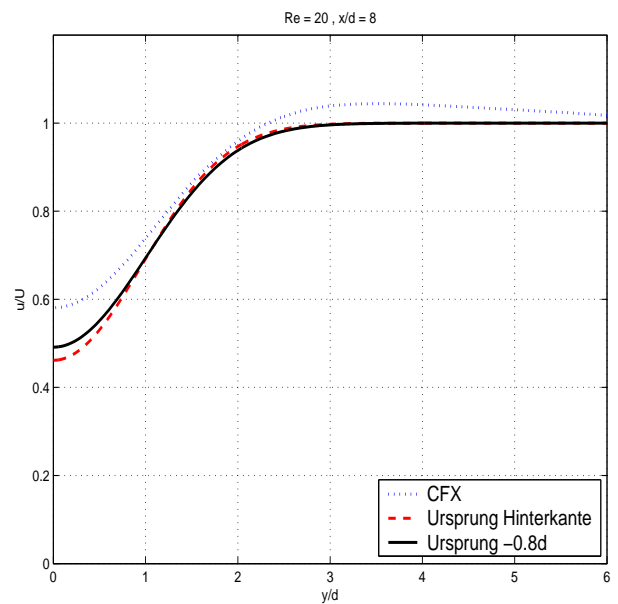
Abbildung 3.14: $Re_d = 10, x/d = 1$ Abbildung 3.15: $Re_d = 10, x/d = 2$ Abbildung 3.16: $Re_d = 10, x/d = 3$ Abbildung 3.17: $Re_d = 10, x/d = 4$

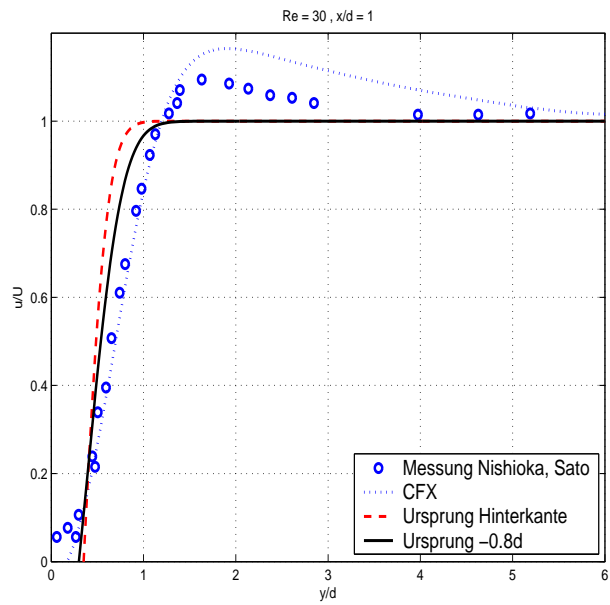
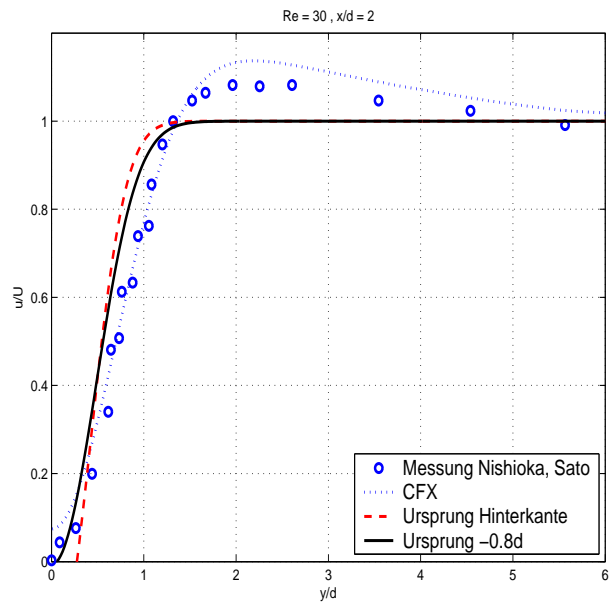
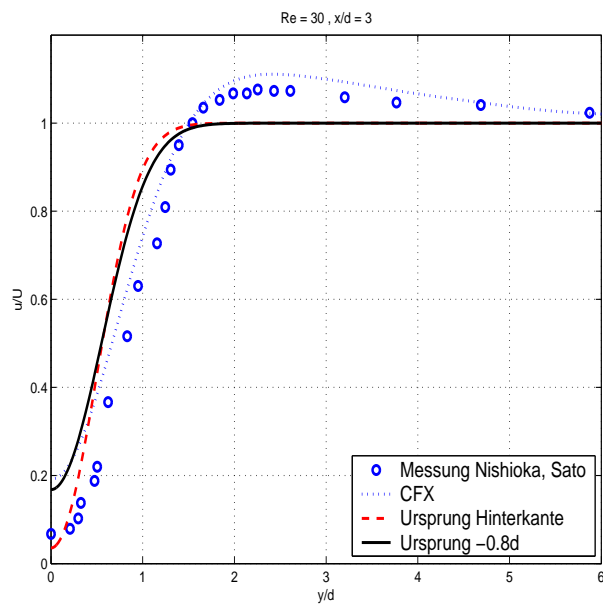
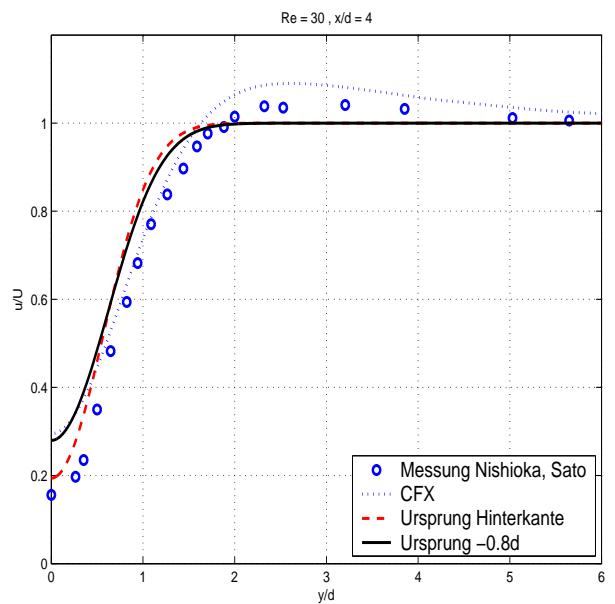
Abbildung 3.18: $Re_d = 10$, $x/d = 5$ Abbildung 3.19: $Re_d = 10$, $x/d = 6$ Abbildung 3.20: $Re_d = 10$, $x/d = 7$ Abbildung 3.21: $Re_d = 10$, $x/d = 8$

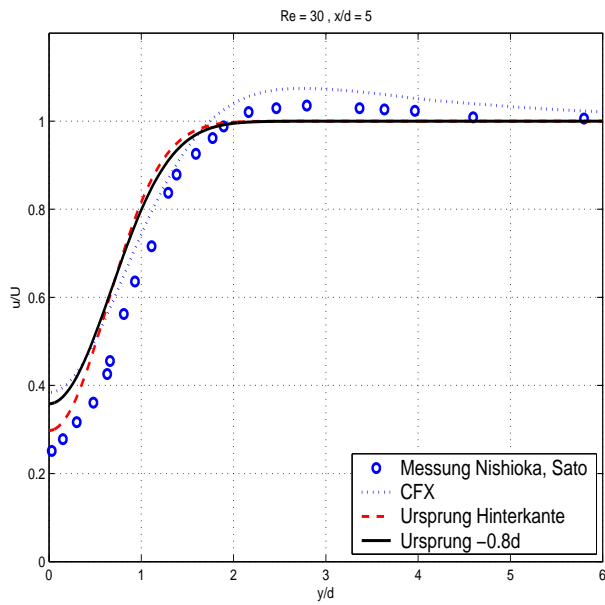
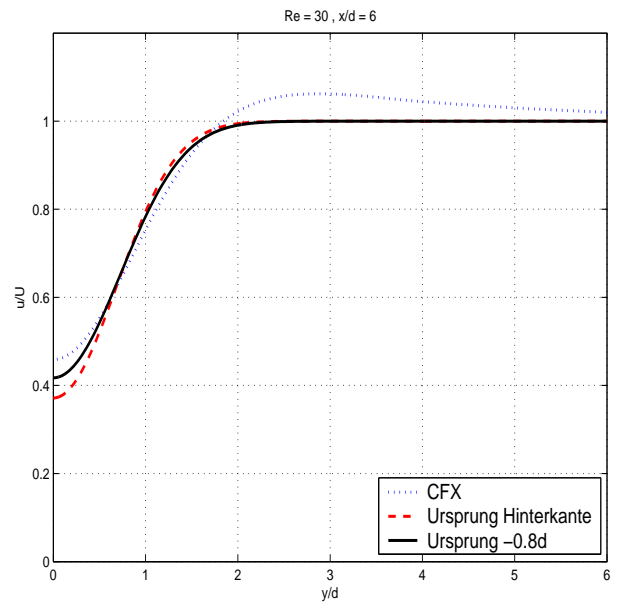
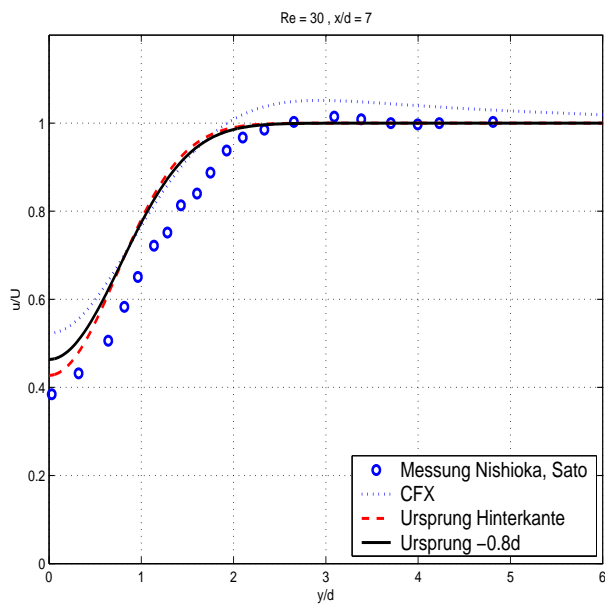
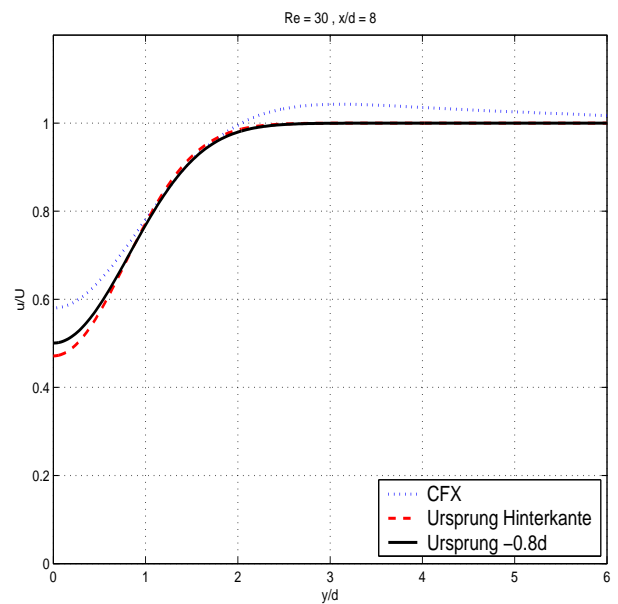
Abbildung 3.22: $Re_d = 15, x/d = 1$ Abbildung 3.23: $Re_d = 15, x/d = 2$ Abbildung 3.24: $Re_d = 15, x/d = 3$ Abbildung 3.25: $Re_d = 15, x/d = 4$

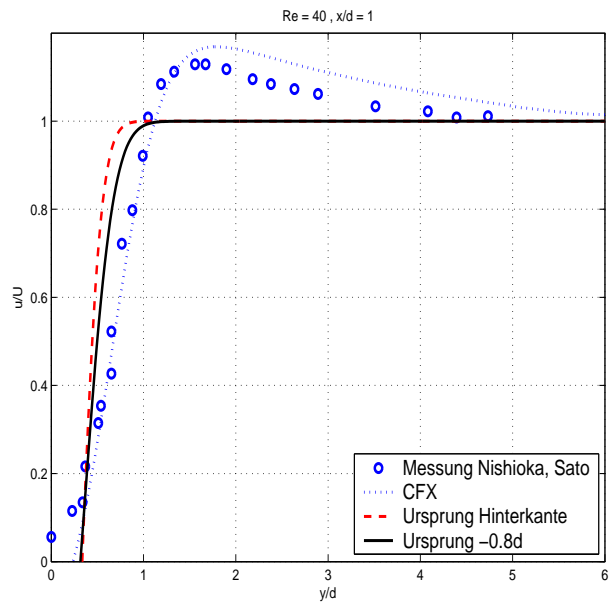
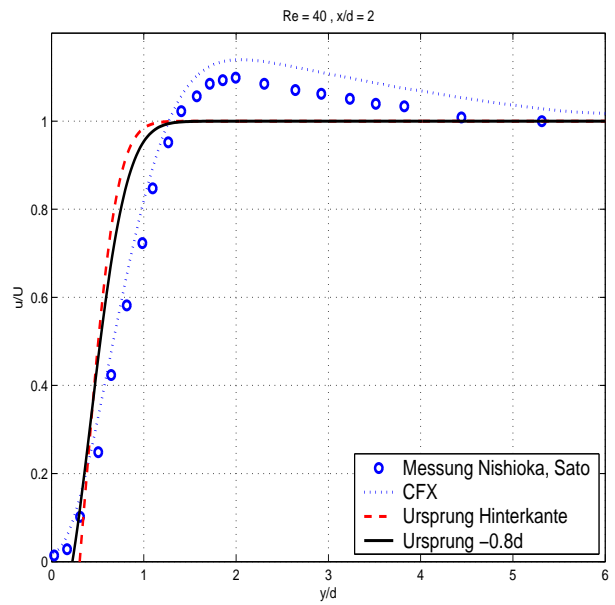
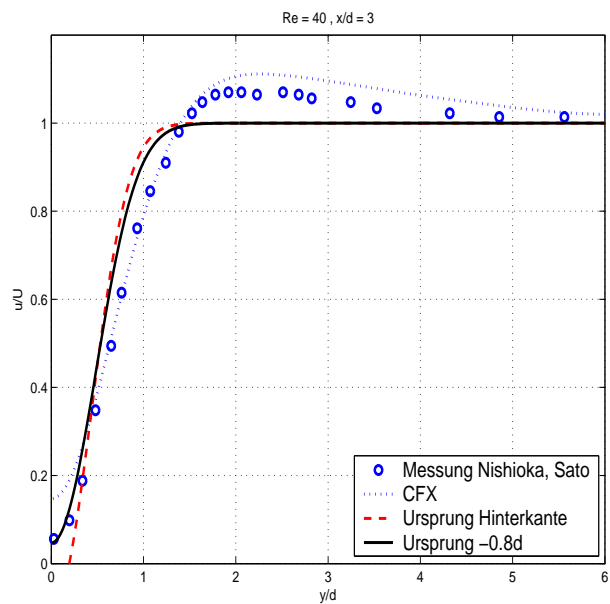
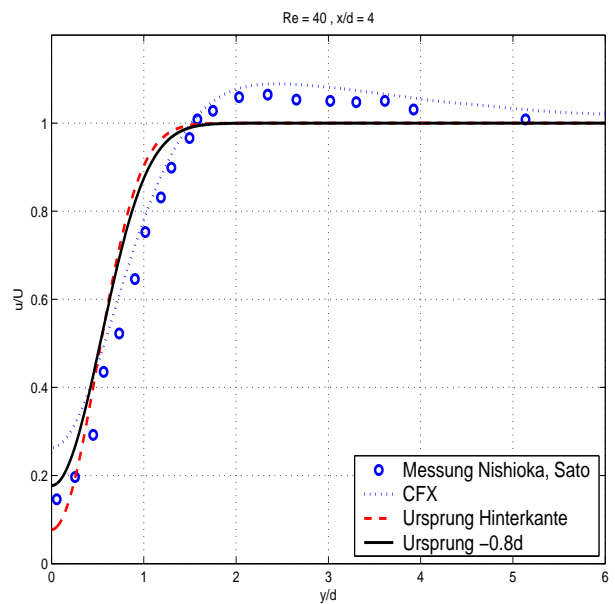
Abbildung 3.26: $Re_d = 15$, $x/d = 5$ Abbildung 3.27: $Re_d = 15$, $x/d = 6$ Abbildung 3.28: $Re_d = 15$, $x/d = 7$ Abbildung 3.29: $Re_d = 15$, $x/d = 8$

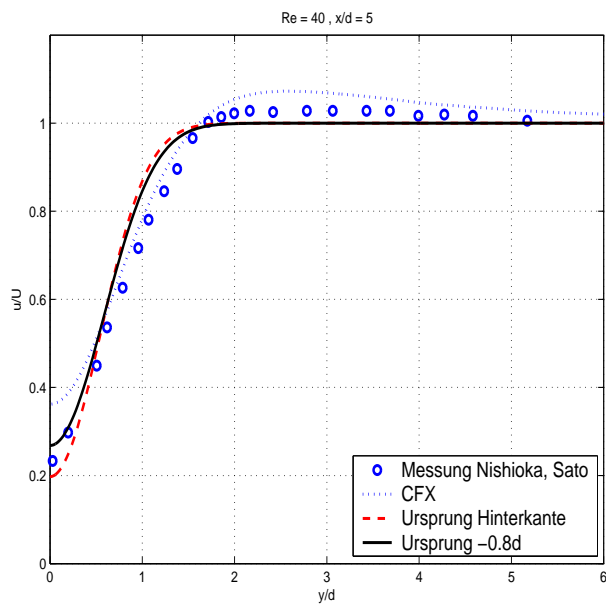
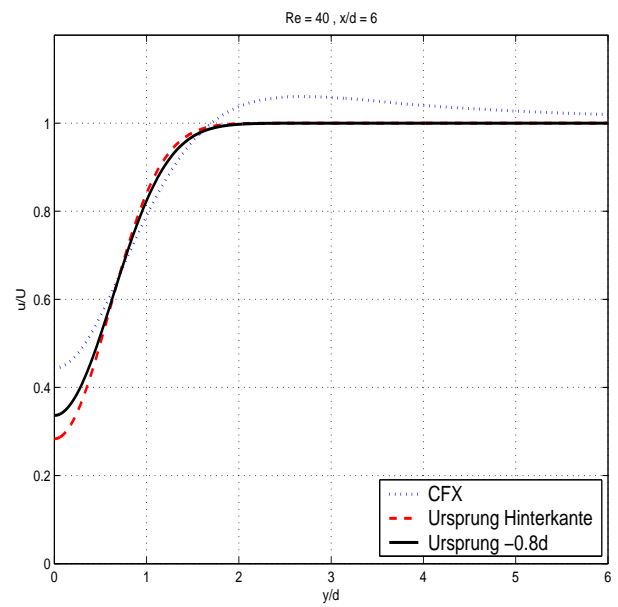
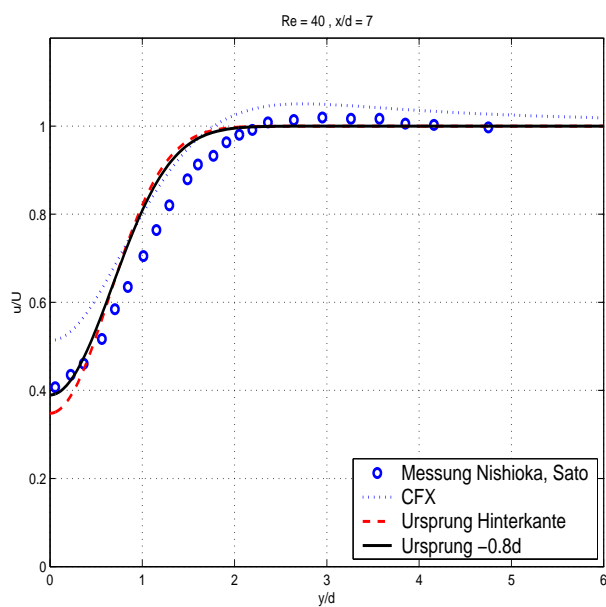
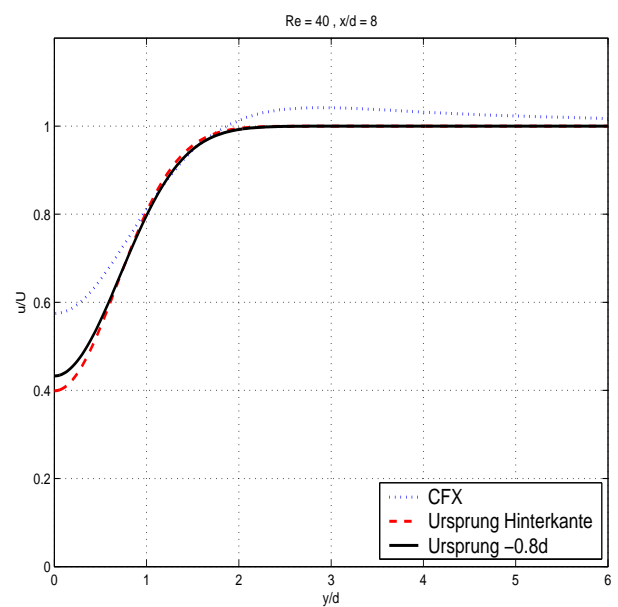
Abbildung 3.30: $Re_d = 20$, $x/d = 1$ Abbildung 3.31: $Re_d = 20$, $x/d = 2$ Abbildung 3.32: $Re_d = 20$, $x/d = 3$ Abbildung 3.33: $Re_d = 20$, $x/d = 4$

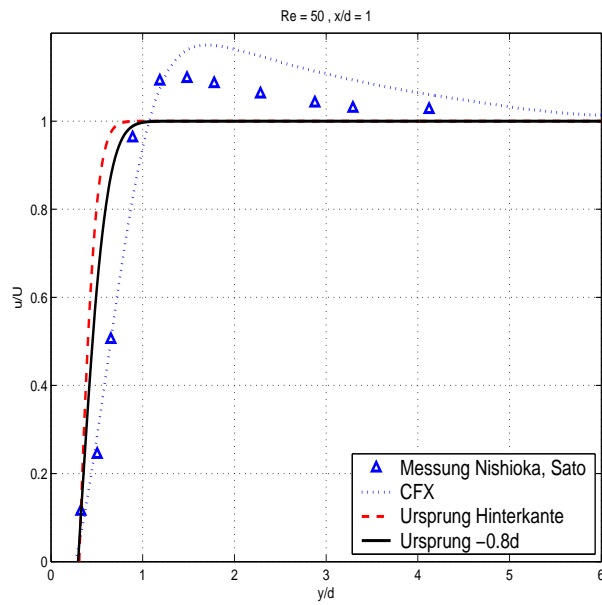
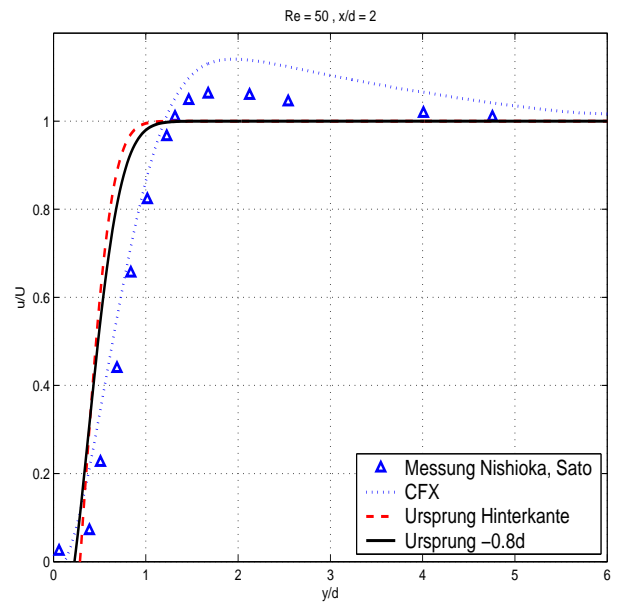
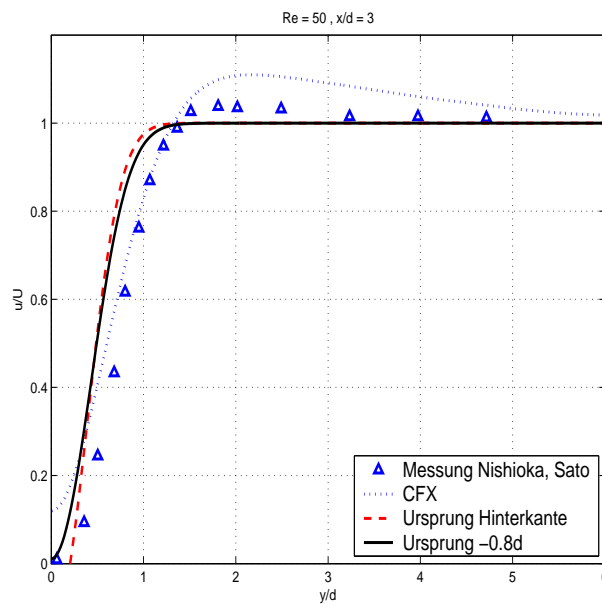
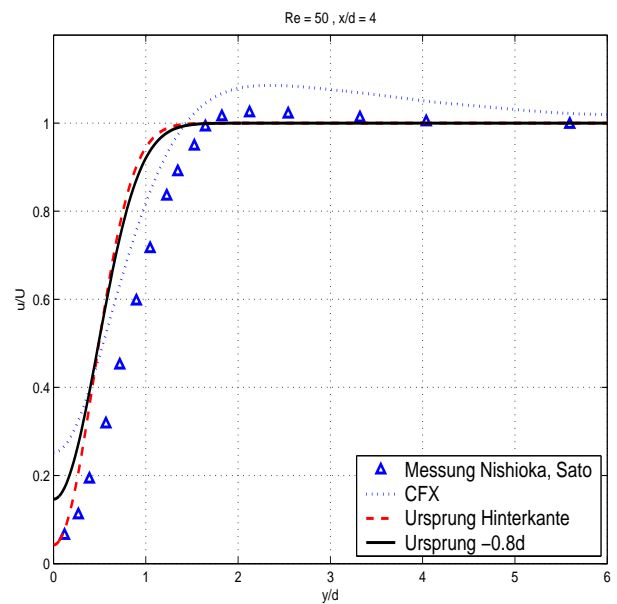
Abbildung 3.34: $Re_d = 20, x/d = 5$ Abbildung 3.35: $Re_d = 20, x/d = 6$ Abbildung 3.36: $Re_d = 20, x/d = 7$ Abbildung 3.37: $Re_d = 20, x/d = 8$

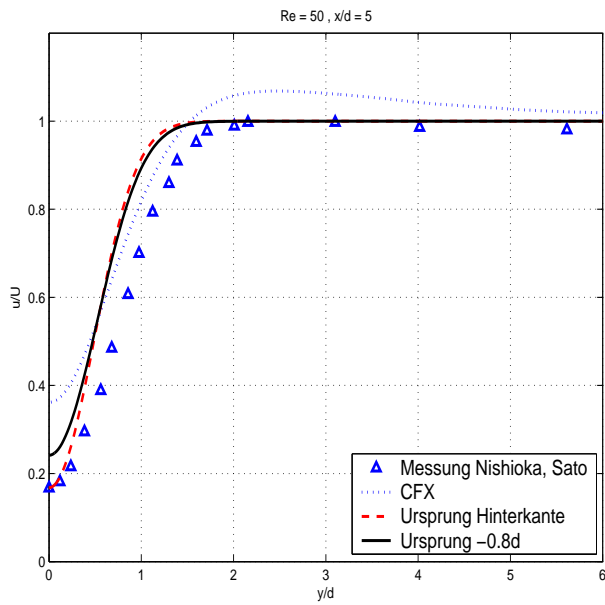
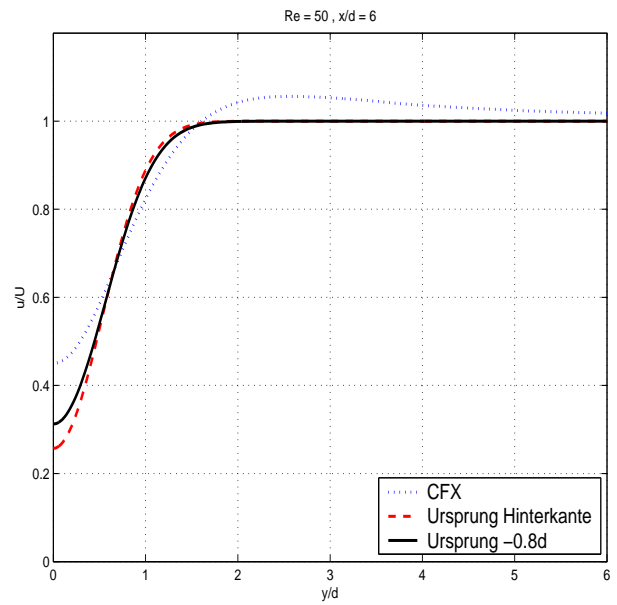
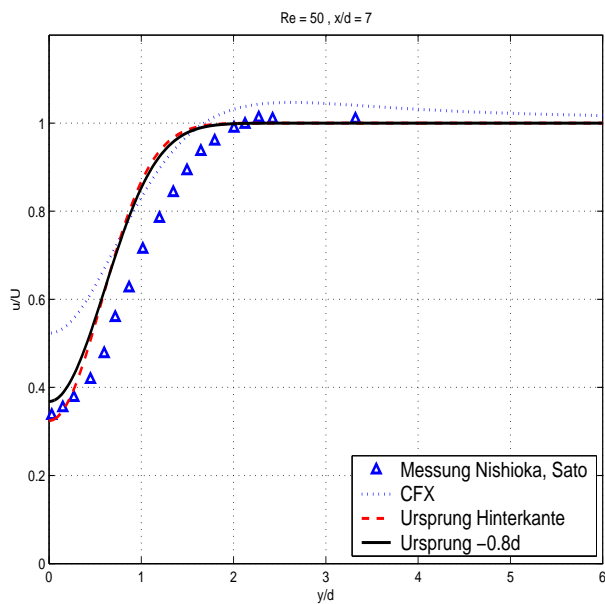
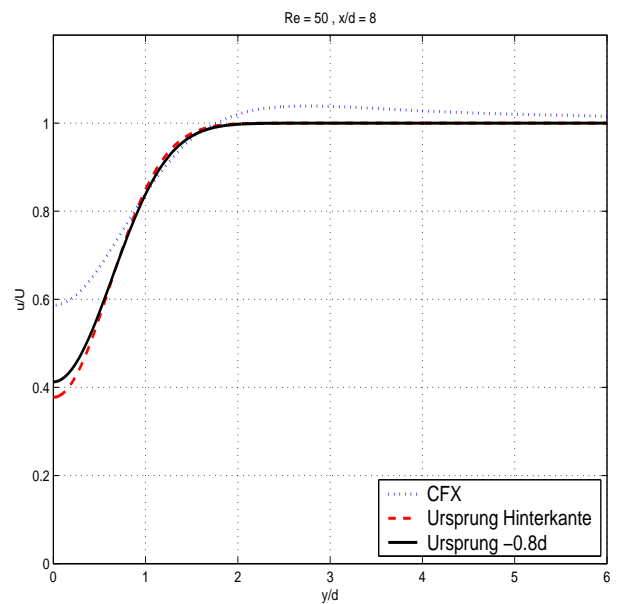
Abbildung 3.38: $Re_d = 30, x/d = 1$ Abbildung 3.39: $Re_d = 30, x/d = 2$ Abbildung 3.40: $Re_d = 30, x/d = 3$ Abbildung 3.41: $Re_d = 30, x/d = 4$

Abbildung 3.42: $Re_d = 30, x/d = 5$ Abbildung 3.43: $Re_d = 30, x/d = 6$ Abbildung 3.44: $Re_d = 30, x/d = 7$ Abbildung 3.45: $Re_d = 30, x/d = 8$

Abbildung 3.46: $Re_d = 40, x/d = 1$ Abbildung 3.47: $Re_d = 40, x/d = 2$ Abbildung 3.48: $Re_d = 40, x/d = 3$ Abbildung 3.49: $Re_d = 40, x/d = 4$

Abbildung 3.50: $Re_d = 40, x/d = 5$ Abbildung 3.51: $Re_d = 40, x/d = 6$ Abbildung 3.52: $Re_d = 40, x/d = 7$ Abbildung 3.53: $Re_d = 40, x/d = 8$

Abbildung 3.54: $Re_d = 50$, $x/d = 1$ Abbildung 3.55: $Re_d = 50$, $x/d = 2$ Abbildung 3.56: $Re_d = 50$, $x/d = 3$ Abbildung 3.57: $Re_d = 50$, $x/d = 4$

Abbildung 3.58: $Re_d = 50, x/d = 5$ Abbildung 3.59: $Re_d = 50, x/d = 6$ Abbildung 3.60: $Re_d = 50, x/d = 7$ Abbildung 3.61: $Re_d = 50, x/d = 8$

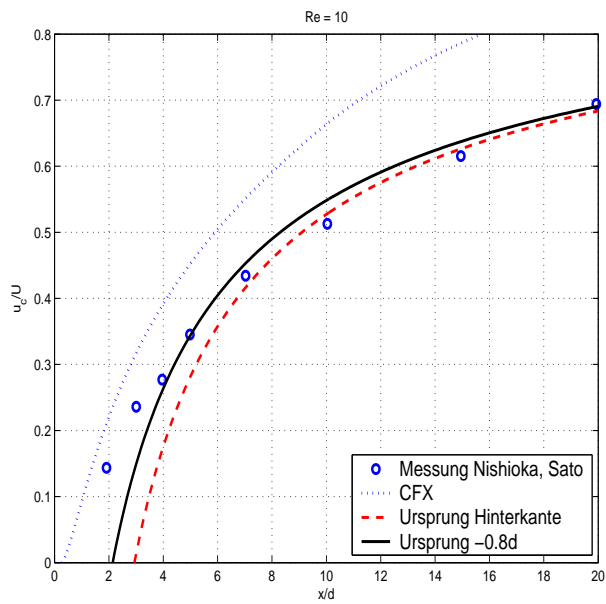


Abbildung 3.62: Geschwindigkeit auf der Symmetrieachse für $Re_d = 10$

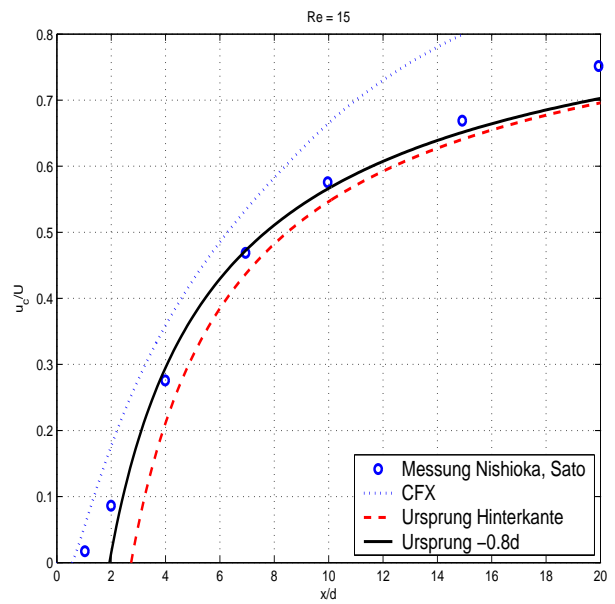


Abbildung 3.63: Geschwindigkeit auf der Symmetrieachse für $Re_d = 15$

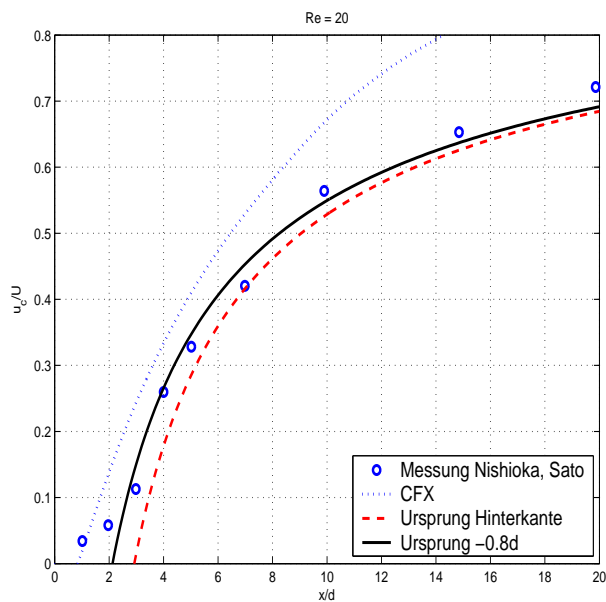


Abbildung 3.64: Geschwindigkeit auf der Symmetrieachse für $Re_d = 20$

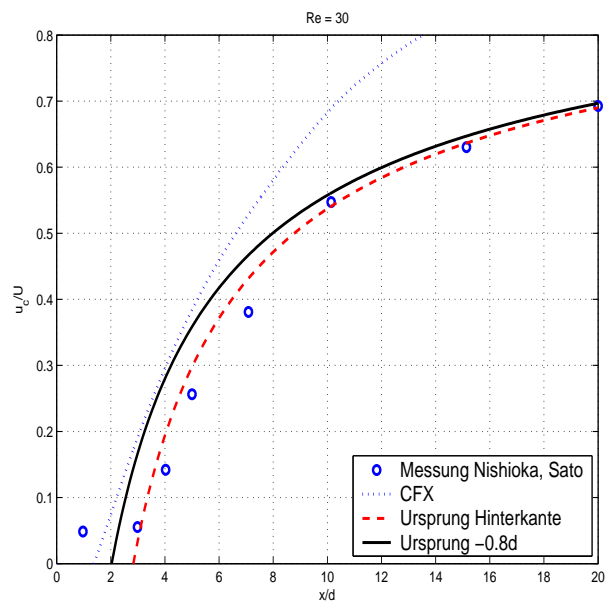


Abbildung 3.65: Geschwindigkeit auf der Symmetrieachse für $Re_d = 30$

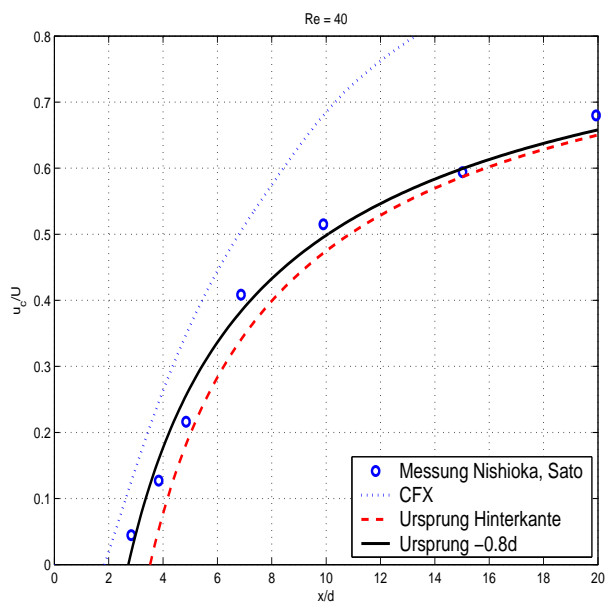


Abbildung 3.66: Geschwindigkeit auf der Symmetrieachse für $Re_d = 40$

Folgende wesentliche Tendenzen kann man den Abbildungen entnehmen:

- Die asymptotische Lösung mit Ursprung $-0,8$ Durchmesser vor der Hinterkante ($-0,8d$ - Lösung) liefert in den meisten Fällen eine bessere Übereinstimmung mit den Messwerten von Nishioka und Sato und mit den CFX-Ergebnissen als die asymptotische Lösung mit dem Ursprung auf der Hinterkante.
- Die $-0,8d$ - Lösung stimmt bereits ab einem Abstand von etwa 3 Durchmessern hinter der Hinterkante gut mit den Messwerten von Nishioka und Sato überein. Nishioka [43] (S.215 siebte Zeile von unten) lokalisiert den Startpunkt des Nachlauf-Fernfeldes basierend auf der Asymptotik von Imai [28] allerdings erst ab ca. zehn Durchmessern hinter der Zylinderhinterkante. Bei festem x und steigender Reynoldszahl verläuft die $-0,8d$ - Lösung steiler als die Messkurven und die CFX-Lösung.
- Die CFX-Lösung weist in der Nähe der Symmetrieachse ($y = 0$) stets eine höhere Geschwindigkeit aus als die Messwerte und die asymptotischen Lösungen. Dieser Unterschied nimmt mit steigendem Abstand und steigender Reynoldszahl zu, so dass sich beispielsweise für $Re_d = 50$ und $x/d = 8$ eine schlechte Übereinstimmung mit den asymptotischen Lösungen ergibt. Dies kann zum Teil auch durch die notwendige Vergrößerung des Rechengitters bei wachsender Entfernung vom Zylinder verursacht worden sein. Die Tendenz ist aber bereits für kleinere Abstände sichtbar.
- Der Geschwindigkeitsüberschuss am Nachlauf-Rand der CFX-Lösung stimmt tendenziell sehr gut mit den Messwerten von Nishioka und Sato überein, liegt aber immer etwas über diesen.

Hiermit enden die Betrachtungen zum quer angeströmten Kreiszyylinder.

Abschließend soll der eingangs erwähnte Ansatz von Ting und Chen [54] zur Ursprungsbestimmung dargestellt werden. Für die hier behandelten „freien“ Nachlauf-Strömungen ist er eher von theoretischer Natur, da er nähere Informationen über ein Anfangsprofil f des Nachlauf-Fernfeldes benötigt. Es war jedoch gerade die Stärke der bisher entwickelten Asymptotik, ohne die Kenntnis eines solchen auszukommen. Wäre ein Anfangsprofil bekannt, so wäre beispielsweise eine Asymptotik erster Stufe völlig sinnlos, da dann bereits die exakte analytische Lösung bekannt ist (s. Abschnitt 3.3). Der Ansatz wird hier trotzdem angegeben, um später die Analogie zur vorgehensweise bei der Bestimmung des Ursprunges von Nachlauf-Strömungen innerhalb einer Bodengrenzschicht aufzuzeigen, welche im nächsten Kapitel behandelt werden. Die dort vorgenommene Modellierung dieser „bodennahen“ Nachlauf-Strömungen basiert ohnehin auf der Kenntnis eines experimentell oder numerisch bestimmten Anfangsprofiles, weswegen die obige Kritik nicht mehr greift.

Es muss deutlich herausgestellt werden, dass der Ansatz von Ting und Chen auf Basis der Asymptotik erster Stufe erfolgt. In (3.6.27) und (3.6.28) auf Seite 76 wurden bereits die ersten beiden nicht verschwindenden Koeffizienten

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{4\sqrt{\nu U x_0}} \int f(\psi) d\psi \\ A_3 &= \frac{1}{32\sqrt{\nu U x_0}} \int f(\psi) \left(\frac{\psi^2}{\nu U x_0} - 2 \right) d\psi \end{aligned}$$

der asymptotischen Entwicklung der Funktion

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{(1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-n/2} \Phi_n(\xi) \\ &= A_1 \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-1/2} \Phi_1(\xi) + A_3 \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-3/2} \Phi_3(\xi) + O(x^{-5/2}) \end{aligned} \quad (3.7.2)$$

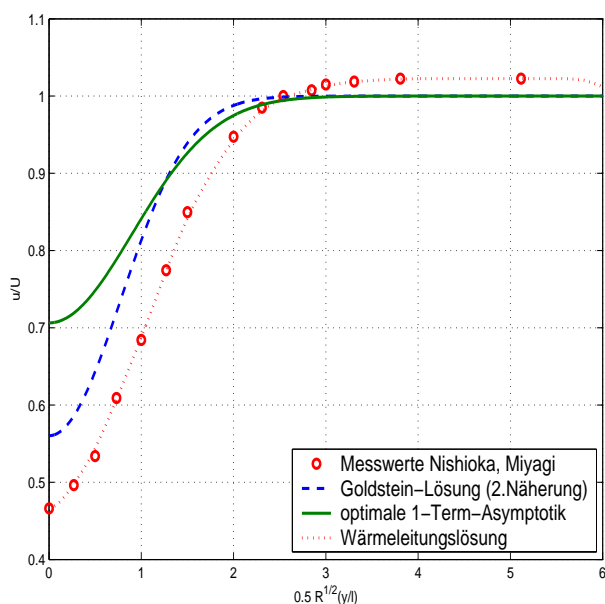
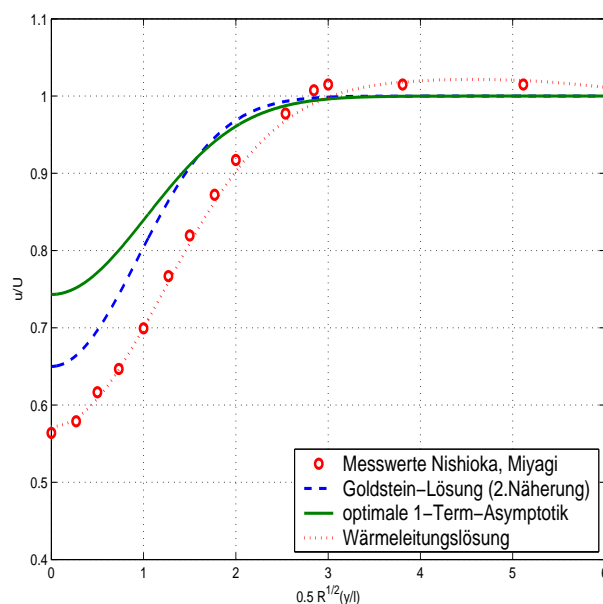
$$A_{2n} = 0 \quad (3.7.3)$$

bereitgestellt. Durch die Wahl

$$x_0 := \frac{1}{2\nu U} \frac{\int f(\psi) \psi^2 d\psi}{\int f(\psi) d\psi}, \quad (3.7.4)$$

erreicht man $A_3 = 0$, so dass allein durch den führenden Term in (3.7.2) eine Ordnung $O(x^{-5/2})$ erzielt wird anstatt $O(x^{-3/2})$ für jede andere Wahl von x_0 (vgl. [54] S. 333 ab Textziffer (3.7) und [55] S. 27 Textziffer (2.21)). In diesem Zusammenhang sprechen Ting und Chen von einer „optimalen 1-Term-Asymptotik“ und nennen x_0 gemäß (3.7.4) einen „optimum value“. Aus der Definition von x_0 wird ersichtlich, dass von dem Anfangsprofil f eigentlich nur die Kenntnis des zweiten Momentes $\int f(\psi) \psi^2 d\psi$ nötig ist. (Der Erwartungswert/das 0-te Moment $\int f(\psi) d\psi$ kann wiederum durch den Widerstand ausgedrückt werden.) Zur Ermittlung des zweiten Momentes würde man in praktischen Anwendungen aber wahrscheinlich nicht umhin kommen, ein vollständiges Anfangsprofil zu ermitteln. Nach (2.4.38) auf Seite 52 gilt

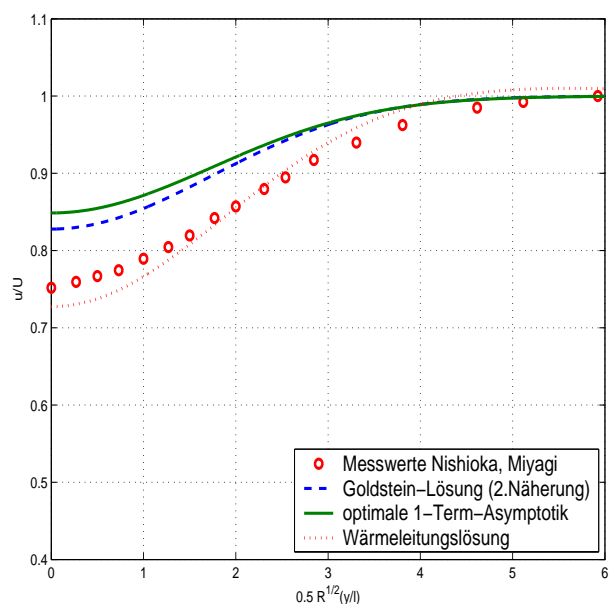
$$A_3 = \frac{\langle f(\sqrt{4\nu U x_0} \cdot \xi), \Phi_3(\xi) \rangle_{\mu}}{\langle \Phi_3, \Phi_3 \rangle_{\mu}}.$$

Abbildung 3.67: $x/l = 0,5$ Abbildung 3.68: $x/l = 1$

Das bedeutet aber, dass x_0 genau dann den optimalen Wert (3.7.4) annimmt, wenn das mit dem Faktor $\sqrt{4\nu U x_0}$ gestreckte Anfangsprofil $f(\sqrt{4\nu U x_0} \cdot \xi)$ senkrecht auf der Funktion Φ_3 steht bezüglich des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle_\mu$.

Abschließend soll die Methode von Ting und Chen am Beispiel der flachen Platte demonstriert werden. Als Anfangsprofil f wird die Messreihe (b) aus Bild 3.11 gewählt, welche 0,5 Plattenlängen hinter der Plattenhinterkante für $R_{NM} = 100$ (Kreise mit senkrechtem Strich) bestimmt wurde. Man erhält dann den optimalen Wert $x_0 \approx 1,63$, d.h.: der Ursprung liegt $1,63 - 0,5 = 1,13$ Plattenlängen vor der Plattenhinterkante und damit sogar 0,13 Plattenlängen vor der Plattenvorderkante. Das Phänomen des sogenannten „velocity overshoot“ - des Auftretens von Geschwindigkeiten am Nachlauf-Rand, die größer als die Anströmgeschwindigkeit sind - wurde allerdings künstlich herausgefiltert, weil das Anfangsprofil f sonst ein negatives zweites Moment besitzt, was auf ein unbrauchbares Ergebnis für x_0 führt.

Die optimale 1-Term-Asymptotik von Ting und Chen ist im Vergleich zu den Messergebnissen von Nishioka und Miyagi, der Goldstein-Lösung (mit Ursprung 0,52 Plattenlängen vor der Plattenhinterkante) und der exakten Lösung der Wärmeleitungsgleichung (3.3.1) mit Anfangsprofil f in den Bildern 3.67, 3.68, 3.69 dargestellt. Die Ergebnisse sind dabei in den Variablen von Nishioka und Miyagi angegeben. Man sieht, dass die Asymptotik erster Stufe auch mit der optimalen Ursprungswahl von Ting und Chen im Vergleich zur Asymptotik zweiter Stufe von Goldstein deutlich schlechter mit den Messergebnissen übereinstimmt.

Abbildung 3.69: $x/l = 5$

3.8 Periodisierung

Setzt man mehrere achsensymmetrische Hindernisse in einer Art Reihenschaltung auf einer gemeinsamen Symmetrieachse hintereinander, so ergibt sich insgesamt wieder ein achsensymmetrisches, allerdings nicht mehr zusammenhängendes Hindernis, dessen Nachlauf-Fernfeld über die in den vorigen Abschnitten hergeleiteten Gleichungen asymptotisch (bis zu einer gewissen Ordnung) beschrieben werden kann, sofern man nur den Widerstand des Gesamtkonstruktes kennt. Dieser ergibt sich additiv aus den Einzelwiderständen, die man ihrerseits wieder über bekannte c_W -Werte und Abmessungen der Hindernisse bestimmen kann.

Setzt man voraus, dass die einzelnen Hindernisse in hinreichend großem Abstand voneinander positioniert sind, ergibt sich die Anströmung des n -ten Hindernisses gerade als Nachlauf-Fernfeld der ersten $n - 1$ Hindernisse. Dieses Nachlauf-Fernfeld ist jetzt aber nicht mehr konstant im Gegensatz zur Anströmung des ersten Hindernisses. Die Berechnung des Widerstandes des n -ten Hindernisses anhand eines bekannten c_W -Wertverlaufes kann genau genommen aber nur bei konstanter Anströmungsgeschwindigkeit ermittelt werden. Ein naheliegender, praktischer Ansatz wäre eine Durchschnittsbildung der Anströmung über die Höhe des Hindernisses. Bei schlanken Körpern - beispielsweise flachen Platten - kann aber auch schlicht die Geschwindigkeit auf der Symmetrieachse an der Vorderkante des n -ten Hindernisses gewählt werden.

Ein wesentliches Problem für praktische Anwendungen ist dabei natürlich, abzuschätzen, ob die Hindernisabstände groß genug sind, so dass die Nachlauf-Fernfeld-Gleichungen näherungsweise brauchbare Ergebnisse liefern, und ob die Geometrie der Hindernisse eine Vereinfachung auf konstante Anströmungen zulässt.

Für den Fall von n hintereinandergesetzten, achsensymmetrischen, schlanken Hindernissen mit dimensionslosen, charakteristischen Längen $L_i = L_i^*/L_B^*$ und Breiten $B_i = B_i^*/L_B^*$, dimensionslosen

Abständen $d_i = d_i^*/L_B^*$, $i = 1, \dots, n-1$, und einer dimensionslosen, konstanten, achsenparallelen Anströmgeschwindigkeit $U = U^*/U_B^*$ des ersten Hindernisses ergibt sich folgender kanonischer Algorithmus zur Bestimmung der 2D-Nachlauf-Fernfelder $\mathbf{v}_i(x, y) = (u_i(x, y), v_i(x, y))$ hinter dem i -ten Hindernis, $i = 1, \dots, n$ (x gemessen von der Hinterkante des i -ten Hindernisses):

Initialisierung:

$$\begin{aligned} U_1 &:= U \\ W_{\leq 0} &:= 0 \end{aligned}$$

Rekursionsvorschrift für $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} \text{Re}_i &:= \frac{U_i L_i}{\nu} = U_i L_i \text{Re} \\ c_W^{(i)} &= c_W^{(i)}(\text{Re}_i) \\ W_i &:= c_W^{(i)} \rho U_i^2 L_i B_i \\ W_{\leq i} &:= W_{\leq i-1} + W_i \\ Q_{\leq i} &:= \frac{W_{\leq i}}{\rho U} \\ \bar{u}_i(x, y) &:= Q_{\leq i} \left(\frac{U}{4\pi\nu x} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{Uy^2}{4\nu x}} \\ u_i(x, y) &:= U - \bar{u}_i(x, y) \\ v_i(x, y) &:= -Q_{\leq i} \left(\frac{U}{16\pi\nu x^3} \right)^{\frac{1}{2}} y e^{-\frac{Uy^2}{4\nu x}} \\ U_{i+1} &:= u_i(d_i, 0) = U - Q_{\leq i} \left(\frac{U}{4\pi\nu d_i} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{nur für } i \leq n-1) \end{aligned}$$

Im Fall von flachen Platten ist beispielsweise $c_W^{(i)} = 2 \cdot \frac{1,328}{\sqrt{\text{Re}_i}}$, so dass man folgende geschlossene Rekursionsformel für die Widerstände erhält:

$$\begin{aligned} W_i &= 2 \cdot \frac{1,328}{\sqrt{\text{Re}_i}} \rho U_i^2 L_i B_i = 2,656 \sqrt{\nu} \rho U_i^{\frac{3}{2}} \sqrt{L_i B_i} \\ &= 2,656 \sqrt{\nu} \rho \left(U - Q_{\leq i-1} \left(\frac{U}{4\pi\nu d_{i-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{L_i B_i} \\ &= 2,656 \sqrt{\nu} \rho \left(U - \frac{W_{\leq i-1}}{\rho U} \left(\frac{U}{4\pi\nu d_{i-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{L_i B_i} \\ &= 2,656 \sqrt{\nu} \rho \left(U - \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^{i-1} W_j \left(\frac{1}{4\pi\nu U d_{i-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{L_i B_i}. \end{aligned}$$

Kapitel 4

Nachlauf-Fernfeld-Strömungen in Bodennähe

4.1 Einleitung

Bisher wurden Nachlauf-Fernfelder nur hinter symmetrischen Körpern in einer ansonsten in jede Richtung unendlich ausgedehnten Fluid-Umgebung beschrieben. Solche können gewissermaßen als „freie“ Nachlauf-Strömungen bezeichnet werden. In praktischen Anwendungen treten aber auf natürliche Weise Begrenzungsflächen hinzu, welche in erster Näherung häufig als eben und im Vergleich zu den Hindernisabmessungen als unendlich oder halbumendlich ausgedehnt angesehen werden können.

Dies führt schnell auf die klassische Situation flacher, tangential mit konstanter Geschwindigkeit angeströmter halbumendlicher Platten. Die ungestörte Grenzschichtströmung entlang solcher wird durch die Blasius-Lösung beschrieben (s. Abschnitt 1.5, S. 11). Befinden sich kleine Hindernisse in der Grenzschicht kommt es zu kleinen Störungen der Blasius-Lösung wie sie in den Bildern 4.1 qualitativ angedeutet werden.

Man kann sich also die Frage stellen, wie das Nachlauf-Fernfeld hinter solchen „bodennahen“ Hindernissen innerhalb der Grenzschicht aussieht.

F.T. Smith untersucht in seinem Artikel [49] die laminare Strömung über ein kleines Hindernis auf der Platte. (Die entsprechende Fragestellung für Vertiefungen in der Platte wird von H. Herwig in [25], [26] untersucht.) Smith leitet (auf S.813 ab Zeile 6) auch das Ergebnis her, dass in weiter Entfernung vom Hindernis für $x \rightarrow \infty$ die Strömung asymptotisch (in erster Ordnung) wieder die Blasius-Lösung ist, d.h. der Einfluß des Hindernisses verschwindet wieder. Dies ist insofern anschaulich einsichtig, als dass letztendlich der stärkere Reibungs-/Widerstandseinfluss der halbumendlichen Platte den des endlich dimensionierten Hindernisses überwiegt.

Libby und Fox untersuchen in [38] Plattengrenzschichtströmungen höherer Ordnung, die sich als geringe Abweichungen von der Blasius-Lösung modellieren lassen. Die Methode entspricht völlig derjenigen bei der Herleitung von Fernfeld-Gleichungen höherer Ordnung für freie Nachlauf-Strömungen aus den vorangehenden Kapiteln. Der Unterschied besteht darin, dass hier wegen der

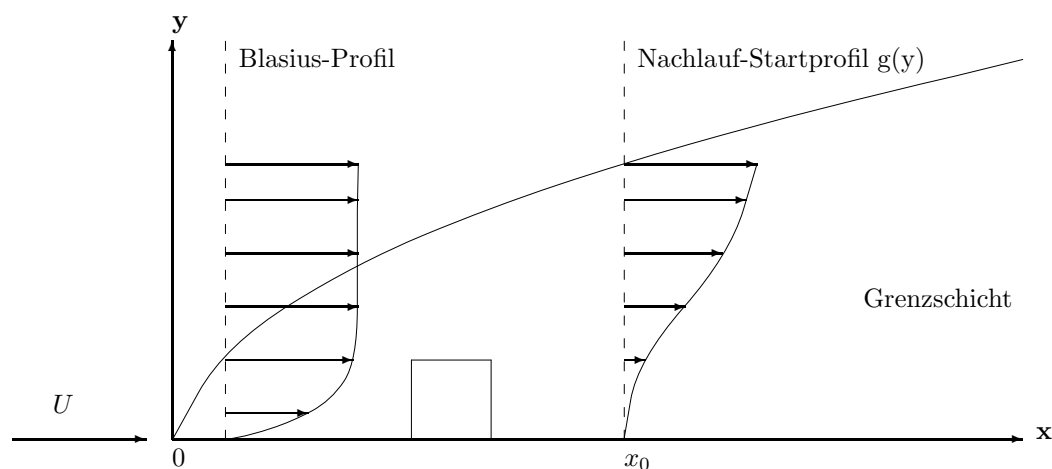
Haftbedingung an der Platte nicht mehr um die konstante Anströmgeschwindigkeit U entwickelt werden kann sondern um die Blasius-Lösung f . Diese ist in kartesischen Koordinaten gegeben (bzw. allgemeiner in Levy-Lees Variablen im kompressiblen Fall), so dass die Berechnungen in diesen anstelle der von Mises-Koordinaten durchgeführt werden. Auch wenn das prinzipielle Vorgehen analog zu dem bei freien Nachlauf-Strömungen ist, ändern sich aufgrund dieser Unterschiede im Ansatz die resultierenden Differentialoperatoren, so dass keine direkte Übertragung der Ergebnisse möglich ist: An die Stelle des Wärmeleitungsoperators bei freien Nachlauf-Strömungen tritt ein linearer Differentialoperator M dritter Ordnung (s. (4.2.16) unten), der von der Blasius-Lösung f abhängt. Separation der Variablen führt bei diesem auf spezielle von f abhängige Sturm-Liouville-Differentialgleichungen anstatt auf Hermite- bzw. Fehlerfunktion-Differentialgleichungen bei jenem. Wiederum erhält man durch die Forderung, dass physikalisch sinnvolle Lösungen in vertikalem Abstand zur Platte exponentiell fallen müssen, eine abzählbare Menge von Eigenfunktionen des Sturm-Liouville-Problems bezüglich einer monoton wachsenden Folge positiver, reeller Eigenwerte. Bezüglich eines geeigneten Skalarproduktes bilden diese Eigenfunktionen dann wie die Eigenfunktionen Φ_n der Fehlerfunktion-Differentialgleichungen eine Orthogonalbasis des Lösungsraumes, so dass man auch hier asymptotische Entwicklungen höherer Ordnung über die Normalbasen-Methode herleiten kann. Allerdings ist hier ein eleganterer Weg über Greens-Funktionen möglich. Als interessanter Unterschied zum freien Nachlauf-Fernfeld stellt sich dabei heraus, dass keine logarithmischen Terme im bodennahen Nachlauf-Fernfeld auftreten.

Die Arbeit von Libby und Fox bezieht sich in praktischen Anwendungen nicht nur auf Störungen aufgrund von Hindernissen, sondern beispielsweise auch auf Strömungsänderungen aufgrund eines kleinen Massenstromes durch eine poröse Platte hindurch. Eine solche Situation tritt bei der sogenannten Transpirationsskühlung von Gasturbinenschaufeln hinter der Turbinenbrennkammer in Flugzeugtriebwerken auf, bei der Flüssigkeit unter hohem Druck aus dem Schaufelradinneren durch einen porösen Schaufelmantel auf die Schaufeloberfläche gepresst wird, um diese vor den hohen Verbrennungsgastemperaturen - vor allem in den ersten Stufen hinter der Brennkammer - zu schützen.

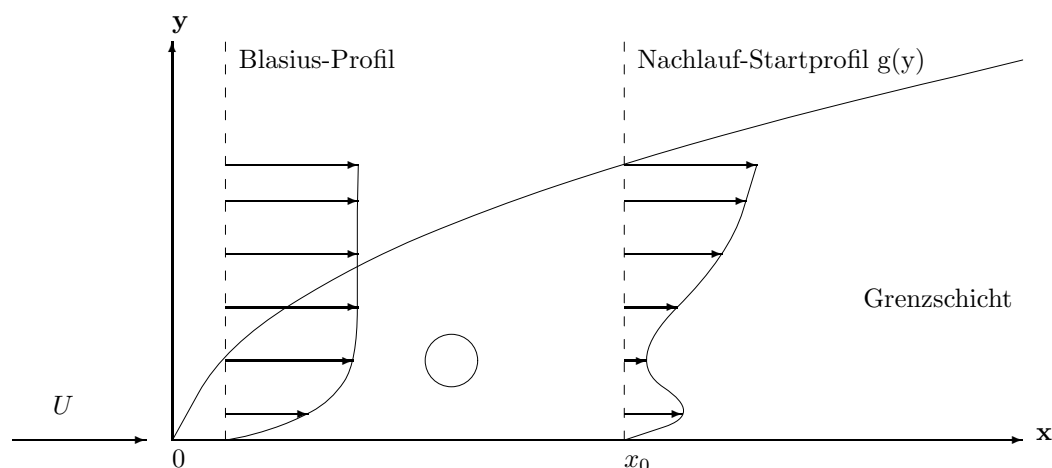
Die Ergebnisse von Libby und Fox wurden mehrfach aufgegriffen: Fox, Ting und Chen geben in [17], [54] Methoden zur Bestimmung eines Koordinatenursprungs an, für den die asymptotischen Entwicklungen numerisch genauere Ergebnisse liefern. Ting betrachtet in [55] zusätzlich kleine Druckgradienten. Kotorynski [32] untersucht das auftretende Sturm-Liouville-Problem analytisch genauer.

Alle Inhalte der nun folgenden Darstellung sind diesen Artikeln entnommen. Sie ist als Einführung in die sowohl numerisch als auch analytisch komplexe Materie zu verstehen. Eine in allen Details ausgeführte Darstellung würde den Rahmen dieser Arbeit überschreiten.

4.2 gestörte Plattengrenzschichtströmungen



halbunendliche Platte mit quaderförmigem Hindernis auf der Platte



halbunendliche Platte mit zylindrischem Hindernis über der Platte

Abbildung 4.1: Durch Hindernisse gestörte Grenzschichtströmung entlang einer halbunendlichen, flachen Platte

Es sei

$$\eta := \eta(x, y) = y \sqrt{\frac{U}{2\nu x}} \quad (4.2.1)$$

die in (4.2.1) definierte Ähnlichkeitsvariable und $f_0(\eta) := f(\eta)$ die Blasius-Lösung der laminaren, inkompressiblen Plattengrenzschichtströmung aus dem Abschnitt 1.5 Seite 11. Die Plattengrenzschichtströmung mit der Stromfunktion $\psi^{(0)}(x, y) := \sqrt{2\nu x U} f^{(0)}(\eta)$ werde nun leicht gestört - beispielsweise durch ein kleines Hindernis innerhalb der Grenzschicht auf der Platte oder in geringem vertikalen Abstand über der Platte (s. Abbildung 4.1). Das gestörte x -Strömungsprofil

$g(y) := u(x_0, y)$ sei an einer Stelle $x_0 > 0$ bekannt. Das Maß der Störung sei durch einen kleinen Parameter $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beschrieben. Beispielsweise kann man ϵ proportional zur maximalen Abweichung vom ungestörten Blasius-Profil $u^{(0)}(x, y) := \psi_y^{(0)}(x, y) = U f'(\eta(x, y))$ an der Stelle x_0 setzen:

$$\begin{aligned} \epsilon &:= \frac{1}{U} \sup_{y \in \mathbb{R}_{\geq 0}} (g(y) - u^{(0)}(x_0, y)) = \frac{1}{U} \sup_{\eta \in \mathbb{R}_{\geq 0}} (g(\eta\sqrt{2\nu x_0/U}) - U f'(\eta)) \\ &= \sup_{\eta \in \mathbb{R}_{\geq 0}} |F(x_0, \eta)| \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

$$F(x_0, \eta) := \frac{1}{U} g(\eta\sqrt{2\nu x_0/U}) - f'(\eta). \quad (4.2.3)$$

Für die gestörte Plattengrenzschichtströmung kann man nun folgenden Ansatz für eine asymptotische Entwicklung der Stromfunktion $\psi(x, y)$ im Bereich $x \geq x_0$ machen:

$$\psi(x, y, \epsilon) = \sqrt{2\nu x U} \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i f^{(i)}(x, \eta(x, y)) \quad (4.2.4)$$

$$\psi(x, 0, \epsilon) = 0 \quad (\text{Nullstromlinien-Randbedingung}) \quad (4.2.5)$$

$$\psi_y(x, 0, \epsilon) = u(x, 0) = 0 \quad (\text{Haftbedingung}) \quad (4.2.6)$$

$$\psi_y(x, \infty, \epsilon) = u(x, \infty) = U \quad (\text{Außenstrom-Randbedingung}) \quad (4.2.7)$$

$$\psi_y(x_0, y, \epsilon) = u(x_0, y) = g(y) \quad (\text{Anfangsbedingung}). \quad (4.2.8)$$

Der führende Term in (4.2.4) ist die Blasius-Lösung $f^{(0)}(x, \eta) = f^{(0)}(\eta) = f(\eta)$, welche explizit nur von der Ähnlichkeitsvariablen η - also nur implizit von x - abhängt, während die höheren Ordnungen $f^{(i)}(x, \eta)$ als explizit abhängig von x und η angesetzt werden. Wie üblich leitet man nun über die x -Impulsgleichung eine Hierarchie von Differentialgleichungen zur Bestimmung der $f^{(i)}$ her. Man beachte dabei, dass

$$\begin{aligned} \eta_x &= -\frac{1}{2x}\eta \\ \eta_y &= \sqrt{\frac{U}{2\nu x}}. \end{aligned}$$

Zunächst berechnet man u, v, u_x, u_y, u_{yy} durch partielles Ableiten von ψ (s. (1.4.1), s. (1.4.2)).

$$u = \psi_y = \sqrt{2\nu x U} \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i f_{\eta}^{(i)} \eta_y = U \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i f_{\eta}^{(i)} \quad (4.2.9)$$

$$\begin{aligned} v &= -\psi_x = -\sqrt{\frac{\nu U}{2x}} \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i f^{(i)} - \sqrt{2\nu x U} \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i (f_x^{(i)} - \frac{1}{2x} \eta f_{\eta}^{(i)}) \\ &= \sqrt{\frac{\nu U}{2x}} \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i (\eta f_{\eta}^{(i)} - 2x f_x^{(i)} - f^{(i)}) \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

$$\begin{aligned}
u_x &= U \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i (f_{\eta x}^{(i)} + \eta_x f_{\eta\eta}^{(i)}) = U \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i (f_{\eta x}^{(i)} - \frac{1}{2x} \eta f_{\eta\eta}^{(i)}) \\
&= -\frac{U}{2x} \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i (\eta f_{\eta\eta}^{(i)} - 2x f_{\eta x}^{(i)}) \tag{4.2.11}
\end{aligned}$$

$$u_y = U \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i f_{\eta\eta}^{(i)} \eta_y = U \sqrt{\frac{U}{2\nu x}} \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i f_{\eta\eta}^{(i)} \tag{4.2.12}$$

$$u_{yy} = \frac{U^2}{2\nu x} \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i f_{\eta\eta\eta}^{(i)}. \tag{4.2.13}$$

Einsetzen in die Grenzschichtgleichung (1.4.6) unter Vernachlässigung des Druckgradienten p_x und ordnen nach ϵ -Potenzen ergibt:

$$\begin{aligned}
0 &= uu_x + vu_y - \nu u_{yy} \\
&= -\frac{U^2}{2x} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i f_{\eta}^{(i)} \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i (\eta f_{\eta\eta}^{(i)} - 2x f_{\eta x}^{(i)}) - \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i (\eta f_{\eta}^{(i)} - 2x f_x^{(i)} - f^{(i)}) \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i f_{\eta\eta}^{(i)} + \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i f_{\eta\eta\eta}^{(i)} \right) \\
&= -\frac{U^2}{2x} \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i \left(f_{\eta\eta\eta}^{(i)} + \sum_{j=0}^i f_{\eta}^{(j)} (\eta f_{\eta\eta}^{(i-j)} - 2x f_{\eta x}^{(i-j)}) - (\eta f_{\eta}^{(j)} - 2x f_x^{(j)} - f^{(j)}) f_{\eta\eta}^{(i-j)} \right) \\
&= -\frac{U^2}{2x} \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i \left(f_{\eta\eta\eta}^{(i)} + \sum_{j=0}^i -2x f_{\eta}^{(j)} f_{\eta x}^{(i-j)} + (2x f_x^{(j)} + f^{(j)}) f_{\eta\eta}^{(i-j)} \right). \tag{4.2.14}
\end{aligned}$$

Für alle $i \in \mathbb{N}_0$ müssen die Faktoren vor den Potenzen ϵ^i in der Summe (4.2.14) verschwinden. Dies ist für $i = 0$ per Definition erfüllt, da $f^{(0)} = f$ die Blasius-Lösung ist und damit insbesondere $f_x = 0$ und $f_{\eta} = f'$ gilt:

$$0 = f_{\eta\eta\eta}^{(0)} - 2x f_{\eta}^{(0)} \underbrace{f_{\eta x}^{(0)}}_{=0} + (2x \underbrace{f_x^{(0)}}_{=0} + f^{(0)}) f_{\eta\eta}^{(0)} = f''' + f f''.$$

Für $i \geq 1$ sind die Summanden der Summe (4.2.14) für $j = 0$ und $j = i$ verschieden und können aus der Summe herausgezogen werden:

$$\begin{aligned}
0 &= f_{\eta\eta\eta}^{(i)} + \sum_{j=0}^i -2x f_{\eta}^{(j)} f_{\eta x}^{(i-j)} + (2x f_x^{(j)} + f^{(j)}) f_{\eta\eta}^{(i-j)} \tag{4.2.15} \\
&= f_{\eta\eta\eta}^{(i)} - 2x f' f_{\eta x}^{(i)} + f f_{\eta\eta}^{(i)} + 2x f_x^{(i)} f'' + f^{(i)} f'' + \sum_{j=1}^{i-1} -2x f_{\eta}^{(j)} f_{\eta x}^{(i-j)} + (2x f_x^{(j)} + f^{(j)}) f_{\eta\eta}^{(i-j)}.
\end{aligned}$$

Setzt man

$$M := \frac{\partial^3}{\partial \eta^3} - 2x f' \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2x f'' \frac{\partial}{\partial x} + f'' \tag{4.2.16}$$

$$F^{(i)} := \sum_{j=1}^{i-1} 2x f_{\eta}^{(j)} f_{\eta x}^{(i-j)} - (2x f_x^{(j)} + f^{(j)}) f_{\eta\eta}^{(i-j)} \quad \text{für } i \in \mathbb{N}, \tag{4.2.17}$$

so lässt sich (4.2.15) kurz schreiben als

$$M f^{(i)} = F^{(i)} \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}. \tag{4.2.18}$$

Aus den Summationsindices der rechten Seite von (4.2.17) liest man sofort $F^{(1)} = 0$ ab, d.h. für $i = 1$ liegt eine homogene Differentialgleichung $Mf^{(1)} = 0$ vor. Für $i \geq 2$ berechnet sich die Inhomogenität $F^{(i)}$ aus den Funktionen $f^{(k)}$ (und deren partiellen Ableitungen) für $k \in \{1, \dots, i-1\}$. Folglich ist das Differentialgleichungssystem (4.2.18) prinzipiell rekursiv lösbar. Die Randbedingungen für die einzelnen $f^{(i)}$ ergeben sich aus denen von ψ in (4.2.5), (4.2.6), (4.2.7):

$$0 = \psi(x, 0, \epsilon) = \sqrt{2\nu x U} \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i f^{(i)}(x, \eta(x, 0)) = \sqrt{2\nu x U} \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i f^{(i)}(x, 0)$$

$$\xrightarrow{x \geq x_0 > 0} f^{(i)}(x, 0) = 0 \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N} \quad (4.2.19)$$

$$0 = \psi_y(x, 0, \epsilon) \stackrel{(4.2.9)}{=} U \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i f_{\eta}^{(i)}(x, 0)$$

$$\Rightarrow f_{\eta}^{(i)}(x, 0) = 0 \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N} \quad (4.2.20)$$

$$U = \psi_y(x, \infty, \epsilon) = U \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i f_{\eta}^{(i)}(x, \eta(x, \infty)) = U \underbrace{f'(\infty)}_{=1} + \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i f_{\eta}^{(i)}(x, \infty)$$

$$\Rightarrow f_{\eta}^{(i)}(x, \infty) = 0 \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}. \quad (4.2.21)$$

In Lemma 1.5.2 auf Seite 18 wurde mit der Ungleichung (1.5.18) gezeigt, dass $f'(\eta)$ für $\eta \rightarrow \infty$ exponentiell gegen 1 strebt, weswegen auch nur Anfangsprofile $F(x_0, \eta)$ mit dieser Eigenschaft als sinnvoll angesehen werden können und die Randbedingung (4.2.22) verschärft wird zu:

$$\text{Für alle } i \in \mathbb{N} \text{ ist } f_{\eta}^{(i)}(x, \eta) \text{ exponentiell fallend (gegen 0) für } \eta \rightarrow \infty. \quad (4.2.22)$$

Diese Wachstumsbedingung wird im folgenden Abschnitt entscheidend ausgenutzt, um die Diskrettheit des Spektrums eines speziellen Differentialoperators zu gewährleisten. Zur Übertragung der Anfangswertbedingung (4.2.8) wird die zusätzliche Annahme getroffen, dass die Abweichung vom Blasius-Profil gerade die Anfangsbedingung von $f^{(1)}(x_0, \eta(x_0, y))$ ist. Siehe hierzu [38] S.435 Zeile 3 von oben und den Text auf Seite 437 nach Zeile (2.24):

... The solution given by ... is generally applicable to obtaining higher-order approximations for solutions which represent perturbations about the Blasius solution wherein the boundary and initial conditions are satisfied by the combination of the Blasius and the first-order solution.

Dies bedeutet formelmäßig

$$f_{\eta}^{(1)}(x_0, \eta) = \epsilon^{-1} F(x_0, \eta) = \frac{1}{\epsilon U} g(\eta \sqrt{2\nu x_0 / U}) - f'(\eta) := \bar{F}(\eta) \quad (4.2.23)$$

$$f_{\eta}^{(i)}(x_0, \eta) = 0 \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}_{\geq 2}. \quad (4.2.24)$$

Man beachte, dass aus der Wahl von ϵ gemäß (4.2.2) folgt:

$$f_{\eta}^{(1)}(x_0, \eta) = \epsilon^{-1} F(x_0, \eta) = \frac{F(x_0, \eta)}{\|F(x_0, \cdot)\|_{\infty}} \leq 1.$$

Mit den Festlegungen (4.2.23), (4.2.24) verifiziert man nun leicht (4.2.8):

$$\begin{aligned} \psi_y(x_0, y, \epsilon) &= U \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i f_{\eta}^{(i)}(x_0, \eta(x_0, y)) = U(f'(\eta(x_0, y)) + \frac{1}{\epsilon U} g(\eta(x_0, y) \sqrt{2\nu x_0 / U}) - f'(\eta(x_0, y))) \\ &= g(y). \end{aligned}$$

Insgesamt ergeben sich also für die Funktionen $f^{(i)}$, $i \geq 2$, homogene Rand- und Anfangswertbedingungen. Weil aber die Inhomogenitäten $F^{(i)}$ für $i \geq 2$, im allgemeinen nicht Null sein werden, trifft dies auch auf die $f^{(i)}$ zu.

4.3 Zusammenhang mit einer irregulären Sturm-Liouville Differentialgleichung

Die Notation des vorangehenden Abschnittes wird weiter verwendet. Analog zu Lemma 2.4.8 auf Seite 51 aus dem Wärmeleitungskapitel sollen nun Lösungen der homogenen Differentialgleichung $Mh = 0$ in separierten Variablen untersucht werden (d.h. $h(x, \eta) = S(x)N(\eta)$) mit der üblichen Zielsetzung, die „komplizierte“ partielle Differentialgleichung für h in „einfachere“ gewöhnliche Differentialgleichungen für S und N zu zerlegen.

Lemma 4.3.1 *Es seien $S \in C^1(\mathbb{R}_{\geq x_0})$, $N \in C^3(\mathbb{R}_{\geq 0})$ und $h(x, \eta) := S(x)N(\eta)$ eine nichttriviale Lösung der homogenen Differentialgleichung $Mh = 0$ in separierten Variablen. Dann liegt einer der beiden folgenden Fälle vor:*

A) $N = \alpha f'$ für ein $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

B)

$$S(x) = \alpha x^{-\frac{1}{2}} \quad (4.3.1)$$

$$0 = N''' + fN'' + \lambda f'N' + (1 - \lambda)f''N \quad (4.3.2)$$

für geeignete $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

Im Fall B wird λ Eigenwert und N Eigenfunktion zum Eigenwert λ genannt. Das Spektrum ist die Gesamtheit aller Eigenwerte.

Beweis: Im Folgenden wird etwas lax aber unmissverständlich $h = SN$ anstelle der genaueren Formulierung $h(x, \eta) = S(x)N(\eta)$ geschrieben, um die Notation zu vereinfachen. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &= Mh = \left(\frac{\partial^3}{\partial \eta \eta \eta} - 2xf' \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial^2}{\partial \eta \eta} + 2xf'' \frac{\partial}{\partial x} + f'' \right) (SN) \\ &= SN''' - 2xf'S'N' + fSN'' + 2xf''S'N + f''SN \\ &= S(N''' + fN'' + f''N) - 2xS'(f'N' - f''N) \\ &\Leftrightarrow S(N''' + fN'' + f''N) = 2xS'(f'N' - f''N). \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Fall A: $f'N' = f''N$.

Es sei $\eta_0 > 0$ fest gewählt. Weil f' auf dem Intervall $[\eta_0, +\infty)$ positiv ist, gilt dort $N' - \frac{f''}{f'}N = 0$, so dass

$$N(\eta) = N(\eta_0) \exp \left(\int_{\eta_0}^{\eta} \frac{f''(t)}{f'(t)} dt \right) = N(\eta_0) \exp \left(\int_{f'(\eta_0)}^{f'(\eta)} \frac{1}{s} ds \right) = \frac{N(\eta_0)}{f'(\eta_0)} f'(\eta)$$

für alle $\eta \in [\eta_0, +\infty)$. Insbesondere ist dann

$$\alpha := \frac{N(\eta_0)}{f'(\eta_0)} = \frac{N(\eta)}{f'(\eta)}$$

unabhängig von $\eta \geq \eta_0$ und damit auch unabhängig von $\eta_0 > 0$, so dass $N = \alpha f'$ auf $\mathbb{R}_{>0}$. Aus der Stetigkeit von f' und N im Punkt 0 folgt dann $N = \alpha f'$ auf ganz $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Wegen $0 \neq h = SN = \alpha S f'$ ist $\alpha \neq 0$. Weil f die Blasius-Differentialgleichung $f''' + f f'' = 0$ erfüllt, gilt

$$N''' + f N'' + f'' N = \alpha(f'''' + f f''' + f'' f') = \alpha(f''' + f f'')' = 0, \quad (4.3.4)$$

so dass wegen (4.3.3) für beliebige $S \in C^1(\mathbb{R}_{\geq x_0})$ stets $Mh = 0$.

Fall B: $f' N' \neq f'' N$.

Es gibt dann ein $\eta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass $(f' N' - f'' N)(\eta) \neq 0$. Folglich ist

$$\lambda := -\frac{(N''' + f N'' + f'' N)(\eta)}{(f' N' - f'' N)(\eta)} \in \mathbb{R}$$

wohldefiniert. Aus (4.3.3) erhält man $S'(x) = -\frac{\lambda}{2x} S(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq x_0}$ und damit $S(x) = \alpha x^{-\frac{\lambda}{2}}$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$. Wegen $0 \neq h = SN$ ist $\alpha \neq 0$. Der Definitionsbereich von S ist nach Voraussetzung $\mathbb{R}_{\geq x_0} \subset \mathbb{R}_{>0}$. Das bedeutet insbesondere $S(x) = \alpha x^{-\frac{\lambda}{2}} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq x_0}$, so dass $2x \frac{S'}{S} \equiv -\lambda$. Aus (4.3.3) folgt dann wiederum, indem man durch S teilt

$$N''' + f N'' + f'' N = -\lambda(f' N' - f'' N) \quad \Leftrightarrow \quad N''' + f N'' + \lambda f' N' + (1 - \lambda) f'' N = 0.$$

■

Die Fälle A und B aus Lemma 4.3.1 schließen sich im allgemeinen erst dann gegenseitig aus, wenn zusätzlich geeignete Randbedingungen vorgegeben werden, wie das folgende Korollar zeigt.

Korollar 4.3.2

- a) Die Funktion $N := f'$ erfüllt für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung (4.3.2).
 b) Falls unter den Voraussetzungen von Lemma 4.3.1 die Funktion h zusätzlich die homogenen Randbedingungen

$$0 = h(x, 0) = h_\eta(x, 0) = h_\eta(x, \infty)$$

für alle $x \geq x_0$ erfüllt, so liegt Fall B aus 4.3.1 vor und N erfüllt ebenfalls die homogenen Randbedingungen:

$$0 = N(0) = N'(0) = N'(\infty). \quad (4.3.5)$$

Falls weiterhin $h_\eta(x, \eta)$ exponentiell (gegen 0) fällt für $\eta \rightarrow \infty$ und alle $x \geq x_0$, so gilt auch

$$N'(\eta) \text{ ist exponentiell fallend (gegen 0) für } \eta \rightarrow \infty. \quad (4.3.6)$$

Beweis: a) Einsetzen von $N := f'$ in die rechte Seite von (4.3.2) liefert sofort

$$f'''' + ff'''' + \lambda f'f'' + (1 - \lambda)f''f' = f'''' + ff'''' + f'f'' \stackrel{f'''' = -ff''}{=} (-ff'')' + ff'''' + f'f'' = 0.$$

b) Wegen $0 \neq h = SN$ gibt es ein $x \geq x_0$, so dass $S(x) \neq 0$. Für dieses x sind nach Voraussetzung die Randbedingungen

$$\begin{aligned} 0 &= h(x, 0) = S(x)N(0) \\ 0 &= h_\eta(x, 0) = S(x)N'(0) \\ 0 &= h_\eta(x, \infty) = S(x)N'(\infty) \end{aligned}$$

erfüllt. Teilt man diese Gleichungen durch $S(x)$, so erhält man die in b) angegebenen homogenen Randbedingungen (4.3.5) für N und auch die Wachstumseigenschaft (4.3.6) folgt sofort aus derjenigen von $h_\eta(x, \cdot)$ für $\eta \rightarrow \infty$. Damit kann aber Fall A aus (4.3.1) nicht eintreten, denn dann wäre wegen $f''(0) \approx 0$, $4696 \neq 0 \neq \alpha$ auch $N'(0) = \alpha f''(0) \neq 0$. ■

Als nächstes wird gezeigt, dass sich hinter der gewöhnlichen Differentialgleichung (4.3.2) ein Sturm-Liouville Eigenwertproblem zum Eigenwert λ verbirgt. Setze

$$p := \frac{f'^3}{f''} \tag{4.3.7}$$

$$q := -ff'^2 \tag{4.3.8}$$

$$r := \frac{f'^4}{f''}. \tag{4.3.9}$$

Wegen $f \in C^\infty(\mathbb{R}_{\geq 0})$, $f'(0) = 0 = f(0)$, $f' > 0$ auf $\mathbb{R}_{> 0}$ und $f'' > 0$ auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ (s. Abbildung 1.1) gilt $p, q, r \in C^\infty(\mathbb{R}_{\geq 0})$, $p, r > 0$ auf $\mathbb{R}_{> 0}$ und $0 = p(0) = q(0) = r(0)$. Für eine Lösung $N \in C^3([0, \infty)) \setminus \{0\}$ von (4.3.2) seien die Funktionen

$$\begin{aligned} G &:= G_N := \frac{N}{f'} \\ H &:= H_N := G' = \left(\frac{N}{f'}\right)' = \frac{N'f' - Nf''}{f'^2} \end{aligned}$$

auf $(0, \infty)$ definiert. Mit diesen Bezeichnungen berechnet man auf $\mathbb{R}_{>0}$

$$\begin{aligned}
0 &= N''' + fN'' + \lambda f'N' + (1 - \lambda)f''N \\
&= (f'G)''' + f(f'G)'' + \lambda f'(f'G)' + (1 - \lambda)f''(f'G) \\
&= f''''G + 3f'''G' + 3f''G'' + f'G''' + f(f'''G + 2f''G' + f'G'') + \lambda f'(f''G + f'G') \\
&\quad + (1 - \lambda)f''(f'G) \\
&= \underbrace{(f'''' + ff'''' + \lambda f'f'' + (1 - \lambda)f''f')}_{=0, \text{ nach Korollar 4.3.2 a)}}G + 3f'''G' + 3f''G'' + f'G''' \\
&\quad + f(2f''G' + f'G'') + \lambda f'(f'G') \\
&= 3f'''H + 3f''H' + f'H'' + f(2f''H + f'H') + \lambda f'^2H \\
&= f'H'' + (3f'' + ff')H' + (3f''' + 2ff'' + f'^2)H \\
&\stackrel{f''' = -ff''}{=} f'H'' + (3f'' + ff')H' + (\lambda f'^2 - ff'')H \quad \Big| \cdot \frac{f'^2}{f''} \\
\Rightarrow 0 &= \frac{f'^3}{f''}H'' + \frac{3f'^2f''^2 + ff''f'^3}{f''^2}H' + (\lambda \frac{f'^4}{f''} - ff'^2)H \\
&\stackrel{f''' = -ff''}{=} \frac{f'^3}{f''}H'' + \frac{3f'^2f''^2 - f'''f'^3}{f''^2}H' + (\lambda \frac{f'^4}{f''} - ff'^2)H \\
&= \left(\frac{f'^3}{f''}H'\right)' - ff'^2H + \lambda \frac{f'^4}{f''}H \\
&= (pH')' + qH + \lambda rH.
\end{aligned}$$

Folglich erfüllt die Funktion H auf dem offenen Intervall $(0, \infty)$ die Sturm-Liouville Differentialgleichung $(pH')' + qH + \lambda rH = 0$, wobei H dann als Eigenfunktion zum Eigenwert λ bezeichnet wird (vgl. [38] (2.11) S.436). Auf die nicht triviale, detaillierte Analyse dieses Sturm-Liouville-Problems sowie die Transformation der Randbedingungen des nichtkompakten Definitionsbereiches $(0, \infty)$ wird hier nicht weiter eingegangen, sondern auf das Standardwerk von W.T. Reid [47] „Sturmian Theory for Ordinary Differential Equations“ und speziell auf Kapitel IV Abschnitt 7 „A Class of Sturmian Boundary Problems on a Non-Compact Interval“ verwiesen.

In der Theorie der Sturm-Liouville Differentialgleichungen wird standardmäßig die Funktion $r = \frac{f'^4}{f''} > 0$ aus (4.3.9) als Gewichtsfunktion aufgefasst. Es sei $\omega := r\lambda$ das zugehörige Maß (λ das Lebesgue-Maß auf $(0, \infty)$), und

$$\langle g, h \rangle_\omega := \int_{\mathbb{R}_{>0}} gh \, d\omega = \int_{\mathbb{R}_{>0}} ghr \, d\lambda = \int_0^\infty \frac{f'^4(\eta)}{f''(\eta)} g(\eta)h(\eta) \, d\eta \quad (4.3.10)$$

das Skalarprodukt auf $L^2(\omega)$ mit zugehöriger Norm $\|g\|_\omega := \sqrt{\langle g, g \rangle_\omega}$.

Satz 4.3.3 *Es sei die Differentialgleichung (4.3.2) mit homogenen Randbedingungen (4.3.5) vorgelegt.*

- Das Spektrum besteht aus der gesamten positiven reellen Achse $\mathbb{R}_{>0}$.
- Unter der zusätzlichen Randbedingung (4.3.6) liegt ein diskretes Spektrum vor: Die Eigenwerte $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ bilden eine streng monoton wachsende, unbeschränkte Folge mit $+\infty$ als einzigem Häufungspunkt.

Für die folgenden Aussagen sei zusätzlich die Randbedingung (4.3.6) vorausgesetzt.

c) Alle Eigenräume zu Eigenwerten λ_i , $i \in \mathbb{N}$, sind eindimensional. Folglich gibt es eindeutig bestimmte Eigenfunktionen $N_i := N_{\lambda_i}$ von λ_i mit $N_i''(0) = 1$.

d) Die Funktionen

$$H_i := H_{N_i} \stackrel{(4.3.10)}{=} \left(\frac{N_i}{f'} \right)' \quad (4.3.11)$$

bilden eine orthogonale Schauderbasis des $L^2(\omega)$, d.h. jedes $h \in L^2(\omega)$ besitzt eine eindeutige Darstellung

$$h = \sum_{i=1}^{\infty} A_i H_i \quad (4.3.12)$$

$$A_i := \frac{\langle h, H_i \rangle_{\omega}}{\|H_i\|_{\omega}^2} \stackrel{(s.4.3.10)}{=} \frac{\int_0^{\infty} \frac{f'^4}{f''} \left(\frac{N_i}{f'} \right)' h \, d\eta}{\int_0^{\infty} \frac{f'^4}{f''} \left(\frac{N_i}{f'} \right)'{}^2 \, d\eta} . \quad (4.3.13)$$

Der Beweis beruht auf der oben erwähnten allgemeinen Theorie von Sturm-Liouville-Differentialgleichungen auf nicht kompakten Definitionsbereichen und wird hier nicht angegeben. Einen in allen Einzelheiten ausgeführten, befriedigenden Beweis, findet man leider auch nicht in den grundlegenden Arbeiten [38] und [51].

Die numerische Berechnung der Eigenwerte und Eigenfunktionen in [38] Appendix S.447, [39] ist aufwendig und macht an mehreren Stellen asymptotische Vereinfachungen. In Tabelle 4.1 sind die ersten zwanzig von Libby und Fox berechneten Eigenwerte λ_k aufgelistet zusammen mit der $\|\cdot\|_{\omega}$ -Norm der eindeutig bestimmten Eigenfunktion N_{λ_k} mit $N_{\lambda_k}''(0) = 1$ (s. [39] Tabelle 1 auf Seite 2165).

Die Abbildungen 4.2, 4.3 enthalten die Graphen der ersten zehn Eigenfunktionen N_{λ_k} und deren schnell fallenden Ableitungen N'_{λ_k} (vgl. [38] Figure 1 auf Seite 438). Diese Graphen wurden in Matlab mit dem DGL-Löser ODE45 neu erzeugt (mit der Anfangsbedingung $(N_{\lambda_k}(0), N'_{\lambda_k}(0), N''_{\lambda_k}(0)) = (0, 0, 1)$, $k = 1, \dots, 10$).

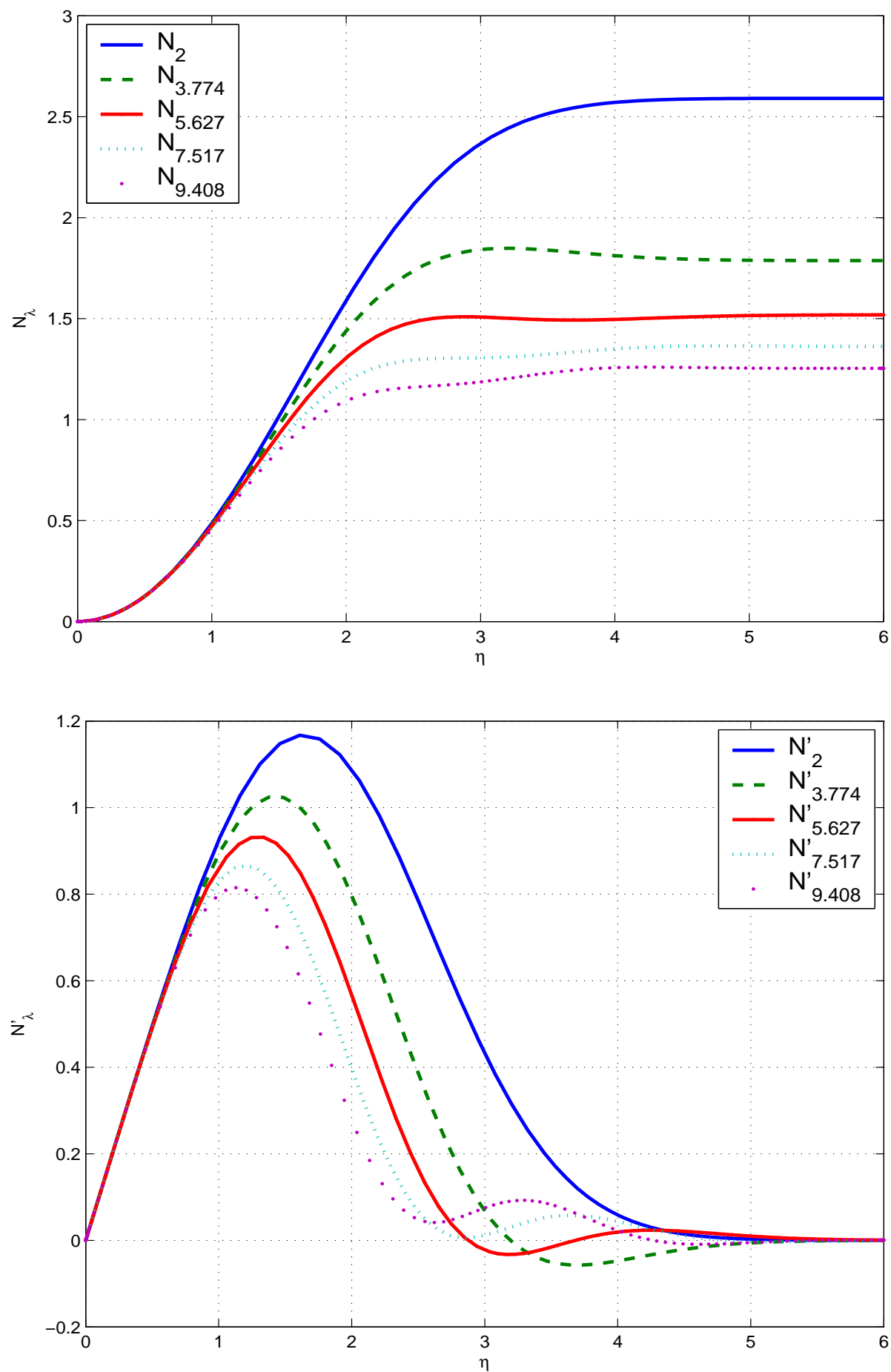


Abbildung 4.2: N_{λ_k} und N'_{λ_k} für die ersten fünf Eigenwerte λ_k , $k = 1, \dots, 5$

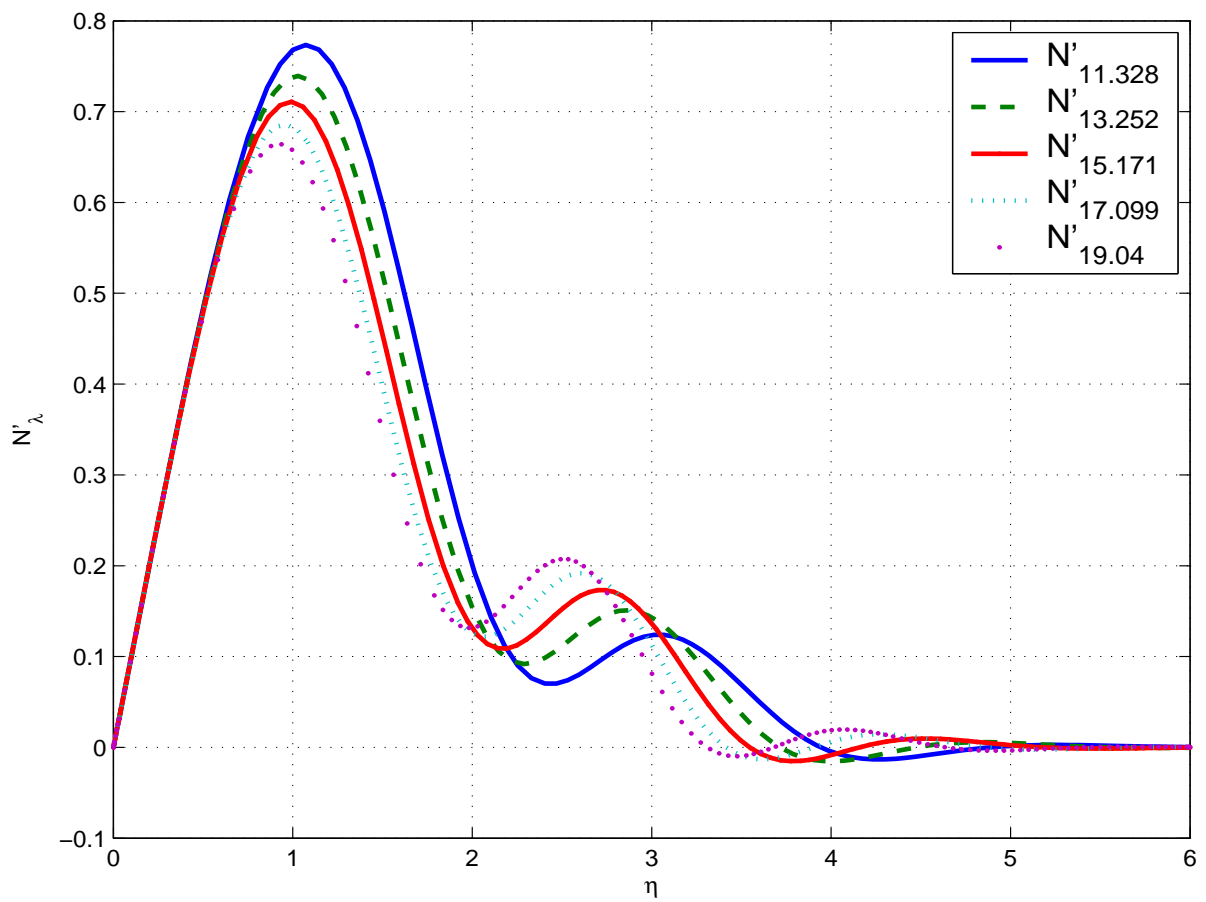
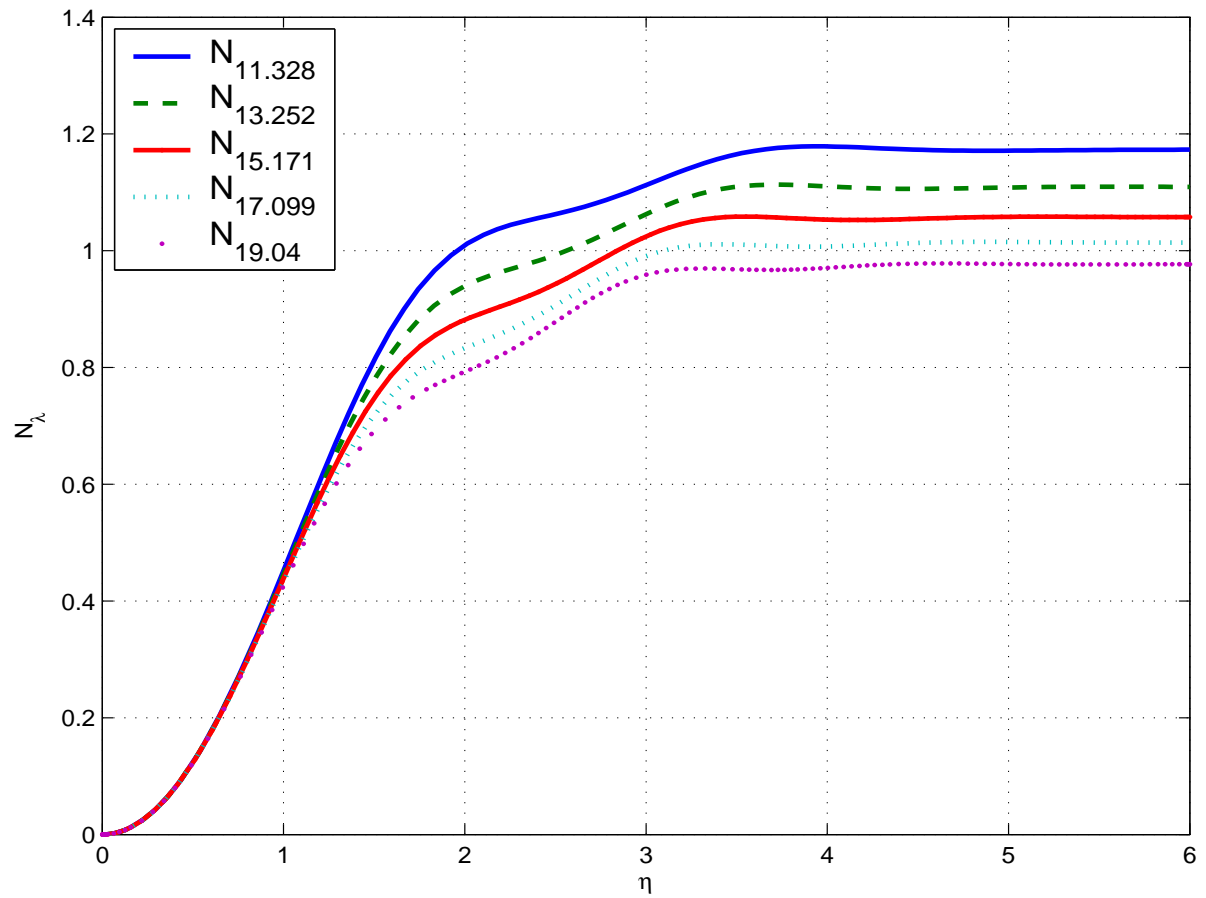


Abbildung 4.3: N_{λ_k} und N'_{λ_k} für die Eigenwerte λ_k , $k = 6, \dots, 10$

k	λ_k	$\ N_{\lambda_k}\ _{\omega}^2$	k	λ_k	$\ N_{\lambda_k}\ _{\omega}^2$
1	2,000	2,2674	11	20,984	0,306
2	3,774	1,1476	12	22,924	0,283
3	5,627	0,8162	13	24,862	0,267
4	7,517	0,6461	14	26,805	0,255
5	9,408	0,5444	15	28,755	0,246
6	11,328	0,4785	16	30,711	0,236
7	13,252	0,422	17	32,667	0,224
8	15,171	0,380	18	34,620	0,212
9	17,099	0,353	19	36,569	0,203
10	19,040	0,330	20	38,520	0,197

Tabelle 4.1: Die ersten zwanzig Eigenwerte λ_k und Eigenfunktionnormen $\|N_{\lambda_k}\|_{\omega}^2$

4.4 Berechnung von $f^{(1)}$

Analog zum Vorgehen bei der Wärmeleitungsgleichung kann man die Funktion $f^{(1)}$, welche die homogene Differentialgleichung $Mf^{(1)} = 0$ mit homogenen Randwertbedingungen $0 = f^{(i)}(x, 0) = f_{\eta}^{(i)}(x, 0) = f_{\eta}^{(i)}(x, \infty)$, $f_{\eta}^{(i)}(x, \eta) \rightarrow 0$ exponentiell für $\eta \rightarrow \infty$ und die Anfangsbedingung $f_{\eta}^{(1)}(x_0, \eta) = \bar{F}(x_0, \eta)$ erfüllt (s. (4.2.18), (4.2.19), (4.2.20), (4.2.22), (4.2.22), (4.2.23)), unter Ausnutzung von Lemma 4.3.1 und Korollar 4.3.2 folgendermaßen mittels der Eigenfunktionen N_i zu den Eigenwerten λ_i asymptotisch für $x \rightarrow \infty$ entwickeln:

$$f^{(1)}(x, \eta) := \sum_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i^{(1)} x^{-\frac{\lambda_i}{2}} N_i(\eta). \quad (4.4.1)$$

Die Konstanten $\bar{A}_i^{(1)}$ erhält man dabei über das Skalarprodukt (4.3.10) und die Anfangsbedingung (4.2.23):

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x_0, \eta) &\stackrel{(4.2.23)}{=} \int_0^{\eta} \bar{F}(\zeta) d\zeta \\ \Rightarrow \left(\frac{\int_0^{\eta} \bar{F}(\zeta) d\zeta}{f'(\eta)} \right)' &= \left(\frac{f^{(1)}(x_0, \eta)}{f'(\eta)} \right)_{\eta} \stackrel{(4.4.1)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i^{(1)} x_0^{-\frac{\lambda_i}{2}} \underbrace{\left(\frac{N_i(\eta)}{f'(\eta)} \right)'}_{=H_i, \text{ s. (4.3.11)}} \\ \Rightarrow \bar{A}_i &\stackrel{4.3.3d)}{=} x_0^{\frac{\lambda_i}{2}} \frac{1}{\|H_i\|_{\omega}^2} \left\langle \left(\frac{\int_0^{\eta} \bar{F}(\zeta) d\zeta}{f'(\eta)} \right)', H_i(\eta) \right\rangle \\ &= x_0^{\frac{\lambda_i}{2}} \frac{1}{\|H_i\|_{\omega}^2} \int_0^{\infty} \frac{f'^4(\eta)}{f''(\eta)} \left(\frac{\int_0^{\eta} \bar{F}(\zeta) d\zeta}{f'(\eta)} \right)' H_i(\eta) d\eta. \end{aligned}$$

Die über den konstanten Vorfaktor $x_0^{\frac{\lambda_i}{2}}$ bestehende Abhängigkeit vom Anfangspunkt x_0 kann man noch herausziehen, indem man

$$A_i := \bar{A}_i x_0^{-\frac{\lambda_i}{2}} = \frac{1}{\|H_i\|_{\omega}^2} \int_0^{\infty} \frac{f'^4(\eta)}{f''(\eta)} \left(\frac{\int_0^{\eta} \bar{F}(\zeta) d\zeta}{f'(\eta)} \right)' H_i(\eta) d\eta \quad (4.4.2)$$

setzt. Dies ist Gleichung (2.14) auf Seite 436 in [38]. Gleichung (4.4.1) lautet dann

$$f^{(1)}(x, \eta) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i^{(1)} \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-\frac{\lambda_i}{2}} N_i(\eta). \quad (4.4.3)$$

(Dieser Ansatz wurde in [38] in (2.9) auf Seite 435 direkt gewählt.) Man kann nun numerisch führenden Terme

$$\sum_{i=1}^n A_i^{(1)} \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-\frac{\lambda_i}{2}} N_i(\eta)$$

beliebiger Ordnung n für die Asymptotik $x \rightarrow \infty$ bestimmen, sofern man die Eigenwerte und Eigenfunktionen bis zu dieser Ordnung numerisch bereitstellen kann. Libby und Fox [38] weisen auf Seite 439 darauf hin, dass in einigen praktischen Anwendungen die ersten zehn Eigenfunktionen (d.h. $n = 10$) nicht ausgereicht haben, um zufriedenstellende Ergebnisse zu erzielen.

Bei freien Nachlauf-Strömungen wurden die führenden Konstanten mit dem Widerstand bzw. Widerstandsbeiwert des umströmten Körpers in Beziehung gesetzt, weswegen eine genaue Kenntnis des Anfangsprofils für erste Näherungen nicht zwingend nötig war. Dies geht hier leider nicht ohne weiteres, weil bei einer Kräftebilanz an einem Kontrollvolumen analog zu den Betrachtungen bei freien Nachlauf-Fernfeldern der Bodenwiderstand für $x \rightarrow \infty$ stets den Körperwiderstand majorisieren würde.

4.5 Berechnung von $f^{(i)}$, $i \geq 2$

In der Einleitung wurde bereits erwähnt, dass die Bestimmung der höheren Ordnungen $f^{(i)}$, $i \geq 2$, über Green-Funktionen und nicht über die Normalbasenmethode wie bei freien Nachlauf-Strömungen erfolgen soll. Gesucht sind (Green-)Funktionen $G^{(i)}(x, \eta, x', \eta')$ mit der Eigenschaft

$$f^{(i)}(x, \eta) = \int_0^{\infty} \int_{x_0}^x G^{(i)}(x, \eta, x', \eta') F^{(i)}(x', \eta') dx' d\eta'. \quad (4.5.1)$$

Libby und Fox [38] (S. 436, 437) führen, ohne es direkt auszusprechen, bei der Konstruktion der Green-Funktion $G^{(i)}(x, \eta, x', \eta')$ das Duhamel-Prinzip durch, welches hier deutlich herausgestellt werden soll, d.h. das inhomogene Problem mit homogenen Rand-/Anfangswertbedingungen wird durch Integration einer Familie von Lösungen homogener Probleme mit inhomogenen Rand-/Anfangswertbedingungen gelöst.

Hierzu wiederholen wir zunächst das inhomogene Anfangswertproblem für $f^{(i)}$, $i \geq 2$, mit homogenen Rand- und Anfangswertbedingungen (s. (4.2.18), (4.2.19), (4.2.20), (4.2.22), (4.2.24)):

$$M f^{(i)}(x, \eta) = F^{(i)}(x, \eta) \quad (4.5.2)$$

$$f^{(i)}(x, 0) = 0 \quad (4.5.3)$$

$$f_{\eta}^{(i)}(x, 0) = 0 \quad (4.5.4)$$

$$f_{\eta}^{(i)}(x, \infty) = 0 \quad (\text{exponentiell fallend}) \quad (4.5.5)$$

$$f_{\eta}^{(i)}(x_0, \eta) = 0 \quad (4.5.6)$$

für alle $x \in \mathbb{R}_{>x_0}$ und $\eta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Für zunächst festes $x' \in \mathbb{R}_{\geq x_0}$ betrachte man nun das folgende homogene Anfangswertproblem für eine gesuchte Funktion $f^{(i)}(x, \eta; x')$ mit inhomogener Anfangswertbedingung:

$$M f^{(i)}(x, \eta; x') = 0 \quad (4.5.7)$$

$$f^{(i)}(x, 0; x') = 0 \quad (4.5.8)$$

$$f_{\eta}^{(i)}(x, 0; x') = 0 \quad (4.5.9)$$

$$f_{\eta}^{(i)}(x, \infty; x') = 0 \quad (\text{exponentiell fallend}) \quad (4.5.10)$$

$$f^{(i)}(x', \eta; x') = -\frac{f'(\eta)}{2x'} \int_0^{\eta} \frac{F^{(i)}(x', \eta')}{f'(\eta')^2} d\eta' \quad (4.5.11)$$

für alle $x \in \mathbb{R}_{>x_0}$ und $\eta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Man beachte den Unterschied, dass (4.5.6) eine Anfangsbedingung für die partielle Ableitung $f_{\eta}^{(i)}$ ist, während (4.5.11) eine Anfangsbedingung direkt für $f^{(i)}(\cdot; x')$ darstellt. Es sei darauf hingewiesen, dass der Integrand $\frac{F^{(i)}(x', \eta')}{f'(\eta')^2}$ in (4.5.11) wegen $f'(0) = 0$ im Punkt $\eta = 0$ eine Singularität besitzt und die Integrierbarkeit deswegen nicht a priori sichergestellt ist, was hier jedoch stillschweigend angenommen wird. Formal muss man in einer parallel laufenden Induktion über i anhand der Definition der $F^{(i)}$ (s. (4.2.17)) die Integrierbarkeit von $\frac{F^{(i)}(x', \eta')}{f'(\eta')^2}$ nachweisen, worauf hier jedoch verzichtet werden soll. Zu guter letzt muss man die Konsistenz der Anfangsbedingung (4.5.11) mit den Randbedingungen (4.5.8), (4.5.9), (4.5.10) für den Startpunkt $x = x'$ nachprüfen. Auch dieses wird hier nicht durchgeführt.

Nach dem Duhamel-Prinzip integriert man nun $f^{(i)}(x, \eta, x')$ bezüglich x' , um die gesuchte Funktion $f^{(i)}(x, \eta)$ zu erhalten:

$$f^{(i)}(x, \eta) := \int_{x_0}^x f^{(i)}(x, \eta, x') dx'. \quad (4.5.12)$$

Es muss nun nachgerechnet werden, dass die so definierte Funktionen $f^{(i)}(x, \eta)$ tatsächlich das Anfangs-/Randwertproblem (4.5.2), ..., (4.5.6) löst. Bei der folgenden Rechnung wird die Rechenregel (2.4.6) auf Seite 46 zur Ableitung von Integralen mit variablen Grenzen benutzt. (Ein Ableitungsstrich bei Funktionen zeigt die partielle Ableitung nach η an, d.h.: $' = \frac{\partial}{\partial \eta}$, während ein

Strich bei Variablen lediglich neue gestrichene Variablen bezeichnet.)

$$\begin{aligned}
Mf^{(i)}(x, \eta) &= \left(\frac{\partial^3}{\partial \eta^3} - 2xf'(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial x} + f(\eta) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2xf''(\eta) \frac{\partial}{\partial x} + f''(\eta) \right) \int_{x_0}^x f^{(i)}(x, \eta, x') dx' \\
&= \int_{x_0}^x \underbrace{Mf^{(i)}(x, \eta, x')}_{=0, \text{ s. (4.5.7)}} dx' - 2xf'(\eta) f_{\eta}^{(i)}(x, \eta, x) + 2xf''(\eta) f^{(i)}(x, \eta, x) \\
&= -2x(f'(\eta) f_{\eta}^{(i)}(x, \eta, x) - f''(\eta) f^{(i)}(x, \eta, x)) \\
&= -2x \left(\frac{f^{(i)}(x, \eta, x)}{f'(\eta)} \right)' f'(\eta)^2 \\
&\stackrel{(4.5.11)}{=} -2x \left(\frac{-\frac{f'(\eta)}{2x} \int_0^{\eta} \frac{F^{(i)}(x, \eta')}{f'(\eta')^2} d\eta'}{f'(\eta)} \right)' f'(\eta)^2 = F^{(i)}(x, \eta) \\
f^{(i)}(x, 0) &= \int_{x_0}^x \underbrace{f^{(i)}(x, 0, x')}_{=0 \text{ s. (4.5.8)}} dx' = 0 \\
f_{\eta}^{(i)}(x, 0) &= \int_{x_0}^x \underbrace{f_{\eta}^{(i)}(x, 0, x')}_{=0 \text{ s. (4.5.9)}} dx' \\
f_{\eta}^{(i)}(x_0, \eta) &= \int_{x_0}^{x_0} f_{\eta}^{(i)}(x, \eta, x') dx' = 0.
\end{aligned} \tag{4.5.13}$$

Komplizierter ist der Nachweis der Randbedingung (4.5.5) aus der entsprechenden Randbedingung (4.5.10) der homogenen Probleme. Er wird hier nicht erbracht. Stattdessen konzentrieren wir uns auf die Herleitung der Green-Funktion.

Die formale Definition (4.5.12) wird nun konkretisiert. Das homogene Anfangswertproblem (4.5.7), ..., (4.5.10) mit inhomogener Anfangsbedingung (4.5.11) hat die gleiche Form wie dasjenige für $f^{(1)}$ mit dem Startpunkt x' anstelle von x_0 und der Anfangsbedingung $f_{\eta}^{(i)}(x', \eta; x')$ anstelle von $\bar{F}(\eta)$. Die Lösung wurde im vorigen Abschnitt hergeleitet und lautet nach (4.4.2), (4.4.3) :

$$f^{(i)}(x, \eta, x') = \sum_{j=1}^{\infty} G_j^{(i)}(x') \left(\frac{x}{x'} \right)^{-\frac{\lambda_j}{2}} N_j(\eta). \tag{4.5.14}$$

$$\begin{aligned}
G_j(x') &:= \frac{1}{\|H_j\|_{\omega}^2} \int_0^{\infty} \frac{f'^4(\eta)}{f''(\eta)} \left(\frac{\int_0^{\eta} f_{\eta}^{(i)}(x', \zeta; x') d\zeta}{f'(\eta)} \right)' H_j(\eta) d\eta \\
&= \frac{1}{\|H_j\|_{\omega}^2} \int_0^{\infty} \frac{f'^4(\eta)}{f''(\eta)} \left(\frac{f^{(i)}(x', \eta; x')}{f'(\eta)} \right)' H_j(\eta) d\eta \\
&\stackrel{(4.5.13)}{=} \frac{1}{\|H_j\|_{\omega}^2} \int_0^{\infty} \frac{f'^4(\eta)}{f''(\eta)} \cdot \frac{F^{(i)}(x', \eta)}{-2x' f'(\eta)^2} H_j(\eta) d\eta \\
&= -\frac{1}{2x' \|H_j\|_{\omega}^2} \int_0^{\infty} \frac{f'^2(\eta)}{f''(\eta)} F^{(i)}(x', \eta) H_j(\eta) d\eta.
\end{aligned} \tag{4.5.15}$$

Einsetzen in (4.5.12) liefert:

$$\begin{aligned}
f^{(i)}(x, \eta) &= \int_{x_0}^x f^{(i)}(x, \eta, x') dx' = \int_{x_0}^x \sum_{j=1}^{\infty} G_j^{(i)}(x') \left(\frac{x}{x'}\right)^{-\frac{\lambda_j}{2}} N_j(\eta) dx' & (4.5.16) \\
&= - \int_{x_0}^x \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2x' \|H_j\|_{\omega}^2} \int_0^{\infty} \frac{f'^2(\eta')}{f''(\eta')} F^{(i)}(x', \eta') H_j(\eta') d\eta' \left(\frac{x}{x'}\right)^{-\frac{\lambda_j}{2}} N_j(\eta) dx' \\
&= \int_0^{\infty} \int_{x_0}^x \left[- \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\|H_j\|_{\omega}^2} \frac{f'^2(\eta')}{f''(\eta')} H_j(\eta') N_j(\eta) \frac{1}{2x'} \left(\frac{x}{x'}\right)^{-\frac{\lambda_j}{2}} \right] F^{(i)}(x', \eta') dx' d\eta'.
\end{aligned}$$

Die gesuchte Green-Funktion lautet demnach

$$G^{(i)}(x, \eta, x', \eta') := - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\|H_j\|_{\omega}^2} \frac{f'^2(\eta')}{f''(\eta')} H_j(\eta') N_j(\eta) \frac{1}{2x'} \left(\frac{x}{x'}\right)^{-\frac{\lambda_j}{2}}. \quad (4.5.17)$$

Diese Definition stimmt mit dem Ergebnis von Libby und Fox [38] Gleichung (2.18) auf Seite 437 überein. (In Gleichung (2.18) müssen nacheinander die Ergebnisse aus den nachfolgenden Gleichungen (2.22) und (2.20) eingesetzt werden).

4.6 Nicht-Auftreten logarithmischer Terme

In der Einleitung zu diesem Kapitel wurde auf einen Unterschied zwischen Nachlauf-Strömungen im Grenzschichtbereich und freien Nachlauf-Strömungen hingewiesen, nämlich dass bei ersteren keine logarithmischen Terme (in x) in den höheren Ordnungen $f^{(i)}(x, \eta)$ auftreten, während dies bei letzteren ab Stufe drei der Fall war.

Das Nicht-Auftreten logarithmischer Terme bei Nachlauf-Strömungen innerhalb der Grenzschicht beruht allerdings auf einer nicht restlos bewiesenen Hypothese und ist daher mit Vorbehalt zu betrachten: Ting [55] gibt auf Seite 34 ab Zeile 5 ohne Beweis die entscheidenden Eigenschaften der Eigenwerte λ_k , $k \geq 2$, an. Diese sind unten in der Hypothese 4.6.1 aufgelistet. Nach den Ausführungen von Stewartson [51] S.183-185 sind diese Eigenschaften nach seinen Worten zwar „sehr naheliegend“, ein rigoroser Beweis fehlt allerdings.

Hypothese 4.6.1

- a) $\lambda_1 = 2$
- b) $\lambda_k \notin \mathbb{N}$ für alle $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$
- c) $\lambda_k - \lambda_j \notin \mathbb{N}$ für alle $k, j \in \mathbb{N}$ mit $k > j$
- d) $\lambda_{k_1} + \dots + \lambda_{k_n} \neq \lambda_j$ für alle $j, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

In Worten bedeutet dies: Der kleinste Eigenwert ist 2. Alle anderen Eigenwerte sind nicht ganzzahlig und dies trifft auch auf Differenzen von verschiedenen Eigenwerten zu. Ferner lässt sich kein Eigenwert als (echte) Summe von anderen darstellen.

Dass $\lambda := 2$ ein Eigenwert ist, kann man leicht durch folgende, direkte Angabe einer zugehörigen Eigenfunktion verifizieren, jedoch nicht, dass er der kleinste ist. Setze

$$N(\eta) := \eta f'(\eta) - f(\eta). \quad (4.6.1)$$

Es wird nun gezeigt, dass N eine Eigenfunktion zum Eigenwert $\lambda = 2$ mit exponentiell fallender Ableitung ist, also die die Bedingungen (4.3.2), (4.3.5), (4.3.6) erfüllt sind, d.h.:

$$\begin{aligned} 0 &= N''' + fN'' + \lambda f'N' + (1 - \lambda)f''N = N''' + fN'' + 2f'N' - f''N \\ 0 &= N(0) \\ 0 &= N'(0) \\ 0 &= N'(\infty) \quad (\text{exponentiell fallend}). \end{aligned}$$

Hierfür werden zunächst die ersten drei Ableitungen von N bereitgestellt:

$$\begin{aligned} N' &= f' + \eta f'' - f' = \eta f'' \\ N'' &= f'' + \eta f''' \\ N''' &= 2f''' + \eta f'''' . \end{aligned}$$

Man berechnet nun

$$\begin{aligned} N''' + fN'' + 2f'N' - f''N &= 2f''' + \eta f'''' + f(f'' + \eta f''') + 2f'\eta f'' - f''(\eta f' - f) \\ &= 2f''' + \eta f'''' + f f'' + \eta f f''' + 2\eta f' f'' - \eta f' f'' + f f'' \\ &= 2f''' + \eta f'''' + 2f f'' + \eta f f''' + \eta f' f'' \\ &= \underbrace{2(f''' + f f'')}_{=0} + \eta \underbrace{(f''' + f f'')}_{=0}' = 0 \\ N(0) &= 0 \cdot f'(0) - \underbrace{f(0)}_{=0} = 0 \\ N'(0) &= 0 \cdot f''(0) = 0 \\ N'(\infty) &= \lim_{\eta \rightarrow \infty} \eta f''(\eta) = 0 \quad \text{exponentiell fallend, s. (1.5.19) auf Seite 18.} \end{aligned}$$

Man kann die Eigenfunktion N Satz 4.3.3 c) entsprechend noch normieren, so dass die zweite Ableitung im Punkt 0 den Wert 1 annimmt:

$$N_1(\eta) := \frac{N(\eta)}{N''(0)} = \frac{\eta f'(\eta) - f(\eta)}{f''(0)} . \quad (4.6.2)$$

Das folgende Lemma, mit dem das Nicht-Auftreten logarithmischer Terme bewiesen wird, korrespondiert mit Lemma 3.6.1 auf Seite 84 und formalisiert die Bemerkungen von Ting [55] am Ende von Abschnitt 3.3 auf Seite 36.

Lemma 4.6.2 *Unter der Hypothese 4.6.1 c) besitzen alle Funktionen $f^{(i)}(x, \eta)$ eine Darstellung*

$$f^{(i)}(x, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n^{(i)}(x) N_n(\eta),$$

wobei die Funktionen $v_n^{(i)}(x)$ in dem von den Monomen

$$M := \left\{ \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-\frac{1}{2}(\lambda_{j_1} + \dots + \lambda_{j_k})} ; j_1, \dots, j_k \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N} \right\} \quad (4.6.3)$$

erzeugten reellen Vektorraum $V(M)$ der in $x \in \mathbb{R}_{\geq x_0}$ absolut summierbaren Reihen enthalten ist, d.h.:

$$v_n^{(i)}(x) \in V(M) := \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} a_j m_j(x) \mid a_j \in \mathbb{R}, m_j(x) \in M, \forall x \in \mathbb{R}_{\geq x_0} : \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| m_j(x) < +\infty \right\}.$$

Beweis: Vorweg sei deutlich gesagt, dass auf den Nachweis der absoluten Summierbarkeit der zu konstruierenden Funktionen $v_n^{(i)}(x)$ nicht näher eingegangen wird, sondern nur auf die Herleitung der Reihendarstellung in Monomen aus der Menge M , was mir im Hinblick auf das asymptotische Verhalten für $x \rightarrow \infty$ am wichtigsten erscheint.

Der Beweis erfolgt per Induktion über i , wobei der Induktionsanfang für $i = 1$ durch die Gleichung (4.4.3) bereits bewiesen ist, so dass man direkt mit dem Induktionsschritt starten kann. Dazu sei $i \geq 2$ und die Behauptung gelte für i' mit $1 \leq i' < i$. Wendet man die Induktionsannahme auf alle Terme der Inhomogenität $F^{(i)}$ an, so erhält man

$$\begin{aligned} F^{(i)} & \stackrel{(4.2.17)}{=} \sum_{j=1}^{i-1} 2x f_{\eta}^{(j)} f_{\eta x}^{(i-j)} - (2x f_x^{(j)} + f^{(j)}) f_{\eta \eta}^{(i-j)} \\ & = \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{n,m=1}^{\infty} 2x v_n^{(j)} v_m^{(i-j)'} N_n' N_m' - (2x v_n^{(j)'} + v_n^{(j)}) v_m^{(i-j)} N_n N_m'', \end{aligned} \quad (4.6.4)$$

wobei $v_n^{(j)}, v_m^{(i-j)} \in V(M)$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ und alle $j \in \{1, \dots, i-1\}$. Weil sich einmaliges Ableiten nach x und anschließende Multiplikation mit x angewandt auf Terme der Form $\left(\frac{x}{x_0} \right)^{-\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, bis auf den konstanten, reellen Faktor $-\alpha$ kompensieren gilt $x v_m^{(i-j)'}, x v_n^{(j)'} \in V(M)$. Das bedeutet aber

$$2x v_n^{(j)} v_m^{(i-j)'}, (2x v_n^{(j)'} + v_n^{(j)}) v_m^{(i-j)} \in V(M)^2 \subseteq V(M^2),$$

wobei

$$M^2 := \left\{ \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-\frac{1}{2}(\lambda_{j_1} + \dots + \lambda_{j_k})} ; j_1, \dots, j_k \in \mathbb{N}, k \geq 2 \right\}.$$

Durch geeignetes Umordnen der Reihen in (4.6.4) kann man deshalb $F^{(i)}$ als Summe von Produkten in separierten Variablen darstellen:

$$F^{(i)}(x, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n^{(i)}(x) L_n^{(i)}(\eta),$$

mit $g_n^{(i)} \in V(M^2)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Diese Darstellung setzt man nun in die Gleichung (4.5.16) zur Bestimmung von $f^{(i)}$ ein:

$$\begin{aligned} f^{(i)}(x, \eta) & = \int_0^{\infty} \int_{x_0}^x \left[- \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\|H_j\|_{\omega}^2} \frac{f'^2(\eta')}{f''(\eta')} H_j(\eta') N_j(\eta) \frac{1}{2x'} \left(\frac{x}{x'} \right)^{-\frac{\lambda_j}{2}} \right] F^{(i)}(x', \eta') dx' d\eta' \\ & = - \sum_{j=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} x^{-\frac{\lambda_j}{2}} \int_{x_0}^x x'^{\frac{\lambda_j}{2}-1} g_n^{(i)}(x') dx' \int_0^{\infty} \frac{1}{\|H_j\|_{\omega}^2} \frac{f'^2(\eta')}{f''(\eta')} H_j(\eta') L_n^{(i)}(\eta') d\eta' \right] N_j(\eta). \end{aligned}$$

Man muss also nur noch

$$x^{-\frac{\lambda_j}{2}} \int_{x_0}^x x'^{\frac{\lambda_j}{2}-1} g_n^{(i)}(x') dx' \in V(M) \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N} \quad (4.6.5)$$

nachweisen. (Auf Umordnungs- und Summierbarkeitsfragen wird - wie zu Beginn klar gestellt wurde - nicht weiter eingegangen). Hierzu wähle man einen festen Eigenwert λ_j , $j \in \mathbb{N}$, und ein Monom $\left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\frac{\lambda}{2}} \in M^2$, wobei $\lambda = \lambda_{j_1} + \dots + \lambda_{j_k}$ die Summe von $k \geq 2$ Eigenwerten ist. Nach Hypothese 4.6.1 c) gilt $\lambda \neq \lambda_j$, also $-\frac{\lambda-\lambda_j}{2} - 1 \neq -1$, weswegen bei folgender Integration kein Logarithmus als Stammfunktion auftritt:

$$\begin{aligned} x^{-\frac{\lambda_j}{2}} \int_{x_0}^x x'^{\frac{\lambda_j}{2}-1} \left(\frac{x'}{x_0}\right)^{-\frac{1}{2}\lambda} dx' &= x^{-\frac{\lambda_j}{2}} x_0^{\frac{\lambda}{2}} \int_{x_0}^x x'^{-\frac{\lambda-\lambda_j}{2}-1} dx' \\ &= \frac{2}{\lambda_j - \lambda} x^{-\frac{\lambda_j}{2}} x_0^{\frac{\lambda}{2}} \left(x^{-\frac{\lambda-\lambda_j}{2}} - x_0^{-\frac{\lambda-\lambda_j}{2}} \right) \\ &= \frac{2}{\lambda_j - \lambda} \left(\left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\frac{\lambda}{2}} - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\frac{\lambda_j}{2}} \right) \in V(M). \end{aligned}$$

Wegen $g_n^{(i)} \in V(M^2)$ ergibt sich damit aus Linearitätsgründen auch (4.6.5). ■

4.7 Ursprungsbestimmung, optimale 1-Term-Asymptotik

In [17] geben Fox und Chen verschiedene Methoden zur Bestimmung eines geeigneten Ursprunges der Asymptotik erster Stufe an. Diese lautet nach (4.2.9):

$$\frac{u(x, \eta)}{U} \approx f'(\eta) + \epsilon f_n^{(1)}(x, \eta) \stackrel{(4.4.3)}{=} f'(\eta) + \sum_{i=1}^{\infty} A_i^{(1)} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\frac{\lambda_i}{2}} N_i(\eta) \quad (4.7.1)$$

$$\begin{aligned} A_i &\stackrel{(4.4.2)}{=} \frac{1}{\|H_i\|_{\omega}^2} \int_0^{\infty} \frac{f'^A(\eta)}{f''(\eta)} \left(\frac{\int_0^{\eta} \bar{F}(\zeta) d\zeta}{f'(\eta)} \right)' H_i(\eta) d\eta \\ &\stackrel{(4.2.23)}{=} \frac{1}{\|H_i\|_{\omega}^2} \int_0^{\infty} \frac{f'^A(\eta)}{f''(\eta)} \left(\frac{\int_0^{\eta} \frac{1}{\epsilon U} g(\zeta \sqrt{2\nu x_0/U}) - f'(\zeta) d\zeta}{f'(\eta)} \right)' H_i(\eta) d\eta. \end{aligned} \quad (4.7.2)$$

Chen greift dieses Thema in seiner Dissertation [9] auf. Der anschließend mit (seinem „Doktorvater“) Ting veröffentlichte Artikel [54] fasst die wesentlichen Ergebnisse jener zusammen. Wie in Abschnitt 3.7 wählen Ting und Chen den bisher freien Parameter x_0 so, dass der Koeffizient A_1 verschwindet. Nach (4.7.2) für $i = 1$ muss dann Folgendes gelten:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{\infty} \frac{f'^A(\eta)}{f''(\eta)} \left(\frac{\int_0^{\eta} \frac{1}{\epsilon U} g(\zeta \sqrt{2\nu x_0/U}) - f'(\zeta) d\zeta}{f'(\eta)} \right)' H_1(\eta) d\eta \\ &\stackrel{(4.3.11)}{=} \int_0^{\infty} \frac{f'^A(\eta)}{f''(\eta)} \left(\frac{\int_0^{\eta} \frac{1}{\epsilon U} g(\zeta \sqrt{2\nu x_0/U}) - f'(\zeta) d\zeta}{f'(\eta)} \right)' \left(\frac{\frac{1}{f''(0)}(\eta f'(\eta) - f(\eta))}{f'(\eta)} \right)' d\eta \\ &\stackrel{(4.6.2)}{\Leftrightarrow} 0 = \int_0^{\infty} \frac{f'^A(\eta)}{f''(\eta)} \left(\frac{\int_0^{\eta} \frac{1}{\epsilon U} g(\zeta \sqrt{2\nu x_0/U}) - f'(\zeta) d\zeta}{f'(\eta)} \right)' \left(1 - \left(\frac{f}{f'}\right)'(\eta) \right) d\eta \end{aligned} \quad (4.7.3)$$

(vgl. [54] S.334, Textziffer (4.2)). Wegen $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 3,774$ (s. Tabelle 4.1) lautet die in (4.7.1) angegebene Asymptotik dann

$$\frac{u(x, \eta)}{U} \approx f'(\eta) + O(x^{-\frac{\lambda_2}{2}}) = f'(\eta) + O(x^{-1,788}) \quad (4.7.4)$$

anstatt

$$\frac{u(x, \eta)}{U} \approx f'(\eta) + O(x^{-\frac{\lambda_1}{2}}) = f'(\eta) + O(x^{-1}) \quad (4.7.5)$$

für eine andere Wahl von x_0 , d.h.: man bekommt eine fast quadratische Ordnung anstatt einer linearen. Für x_0 gemäß (4.7.3) sprechen Ting und Chen wieder von „der optimalen 1-Term-Asymptotik“ oder auch von „der optimalen Blasius-Lösung“. In [54] S.335-337 wird die optimale Blasius-Lösung mit den oben angesprochenen Methoden von Fox und Chen anhand verschiedener ingenieurtechnisch relevanter Anfangsprofile verglichen, wobei eine numerische Lösung als Gütemaßstab dient. Die Asymptotik wird dabei allerdings nicht zur Berechnung von Geschwindigkeiten sondern ausschließlich zur Bestimmung der Wandschubspannungen stromabwärts hinter dem Anfangsprofil benutzt. In den meisten angegebenen Fällen liefert die optimale Blasius-Lösung eine erwartete deutlich schnellere Konvergenz.

Literaturverzeichnis

- [1] H.W. Alt, Analysis IV, Vorlesungsskript, ps-Version 0.6, 2003
www.iam.uni-bonn.de/~alt/SS2002/HTML/analysis4-hyp.html
- [2] G.K. Batchelor, An Introduction to Fluid Dynamics, Cambridge University Press, 1981
- [3] S.A. Berger, Laminar Wakes, American Elsevier Publishing Company, Inc., 1971
- [4] S.A. Berger, The Incompressible Laminar Axisymmetric Far Wake, Journal of Mathematics and Physics, Band 47, S.292-309, 1968
- [5] H. Blasius, Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung, Z. Math. Physik 56, S.1-37, 1908
- [6] W. Bohl, W. Elmendorf, Technische Strömungslehre, 13. Auflage, Vogel Buchverlag, 2005
- [7] H.S. Carslaw, J.C. Jaeger, Conduction of Heat in Solids, Clarendon Press Oxford, second edition, 1989
- [8] I-Dee Chang, Navier-Stokes Solutions at Large Distances from a Finite Body, Journal of Mathematics and Mechanics, vol.10, no.6, S.811-876, 1961
- [9] Shun Chen, Studies on Perturbation Solutions and Asymptotic Solutions in Boundary Layer Theory, Ph.D. Thesis, Dept. Aeronautics & Astronautics New York University, 1967
- [10] W.S. Childress, Asymptotic Expansions of Navier-Stokes-Solutions in Three-Dimensions for Large Distances, Ph.D. thesis, California Institute of Technology, 1961
- [11] W.A. Coppel, On a Differential Equation of Boundary Layer Theory, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 253, S.101-136, 1960
- [12] Courant, Hilbert, Methods of Mathematical Physics, Volume 1, Interscience Publishers, 1953
- [13] L.J. Crane, A Note on Stewartson's Paper „On Asymptotic Expansions in the Theory of Boundary Layers“, Journal of Mathematics and Physics 38, 1959, S.172-174.
- [14] L.C. Evans, Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, Volume 19, American Mathematical Society, 1998
- [15] M. Feistauer, J. Felcman, I. Straskraba, Mathematical and Computational Methods for Compressible Flow, Oxford Science Publications, 2003
- [16] L.N.G. Filon, On the Second Approximation to the Oseen Solution for the Motion of a Viscous Fluid, Phil. Trans. A 227, S.93-135, 1928

- [17] H. Fox, S. Chen, Some remarks on 'Perturbation solutions in laminar boundary theory', *Journal of Fluid Mechanics*, vol.25, part 1, S.199-205, 1966
- [18] G.P. Galdi, *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations, Volume I: Linearized Steady Problems*, Springer Tracts in Natural Philosophy, Volume 38, Springer-Verlag, 1994
- [19] G.P. Galdi, *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations, Volume II: Nonlinear Steady Problems*, Springer Tracts in Natural Philosophy, Volume 39, Springer-Verlag, 1994
- [20] S. Goldstein, Concerning some Solutions of the Boundary Layer Equations in Hydrodynamics, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 26, S.1-30, 1930
- [21] S. Goldstein, On the Two-Dimensional Steady Flow of a Viscous Fluid Behind a Solid Body.-I., *Proc. Roy Soc. (London)* A142, S.545-562, 1933
- [22] S. Goldstein, On the Two-Dimensional Steady Flow of a Viscous Fluid Behind a Solid Body.-II., *Proc. Roy Soc. (London)* A142, S.563-573, 1933
- [23] H. Herwig, *Strömungsmechanik*, Springer-Verlag, 2. Auflage, 2006
- [24] H. Herwig, A. Moschallski, *Wärmeübertragung*, Vieweg-Verlag, 2006
- [25] H. Herwig, Die Anwendung der Methode der angepaßten asymptotischen Entwicklungen auf laminare zweidimensionale Strömungen mit endlichen Ablösegebieten, *Dissertation Ruhr-Universität Bochum* 1981, *Z. Flugwiss. Weltraumforsch.* 6, Heft 4, 1982
- [26] H. Herwig, Die Anwendung der asymptotischen Theorie auf laminare Strömungen mit endlichen Ablösegebieten, *Z. Flugwiss. Weltraumforsch.* 6, Heft 4, 1982
- [27] H. Heuser, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Teubner-Verlag, 1989
- [28] I. Imai, On the asymptotic of viscous fluid flow at a great distance from a cylindrical body, with special reference to Filon's paradox, *Proc. Roy. Soc. A* 208, S.487-516, 1951
- [29] J. Kevorkian, J.D. Cole, *Multiple Scale and Singular Perturbation Methods*, Springer Tracts in Applied Mathematical Sciences 114, Springer-Verlag, 1996
- [30] R. Klein, *An applied mathematical view of meteorological modeling*
- [31] R. Klein, E. Mikusky, A. Owinoh, *Multiple Scales Asymptotics for Atmospheric Flows*, *Proceedings of the 4th European Conference on Mathematics Stockholm*, 2004
- [32] W.P. Kotorynski, On an Irregular Sturm-Liouville Problem in Boundary Layer Theory, *SIAM J. Appl. Math.*, vol.16, no.6, S.1132-1140, 1968
- [33] O.A. Ladyzhenskaya, *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, Gordon and Breach, second edition, 1969
- [34] P.A. Lagerstrom, *Matched Asymptotic Expansions*, Springer Tracts in Applied Mathematical Sciences 76, Springer-Verlag, 1988
- [35] S. Lang, *Real and Functional Analysis*, *Graduate Texts in Mathematics*, vol.142, Springer-Verlag, 1993 Springer-Verlag, 1988

- [36] L. G. Leal, *Laminar Flow and Convective Transport Processes*, Butterworth-Heinemann, 1992
- [37] Shi-Jun Liao, A uniformly valid analytic solution of two-dimensional viscous flow over a semi-infinite flat plate, *Journal of Fluid Mechanics*, vol.385, S.101-128, 1999
- [38] P.A. Libby, H. Fox, Some perturbation solutions in laminar boundary-layer theory - Part 1. The momentum equation, *Journal of Fluid Mechanics* 17, S.433-449, 1963
- [39] P.A. Libby, Eigenvalues and Norms Arising in Perturbations about the Blasius Solution, *AIAA Journal*, vol.3, no.11, S.2164-2165, 1965
- [40] M. Lukacova, *Numerical Modelling in Computational Fluid Dynamics*, Lecture Note Technical University Hamburg-Harburg, 2003
- [41] A.J. Majda, A.L. Bertozzi, *Vorticity and Incompressible Flow*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, 2002
- [42] P.D. Miller, *Applied Asymptotic Analysis*, Graduate Studies in Mathematics, vol.75, American Mathematical Society, 2006
- [43] M. Nishioka, Hot-Wire Investigation of the Steady Laminar Wake behind a Circular Cylinder, *Bulletin of Osaka Prefecture University*, vol.21, S.205-225, 1972
- [44] M. Nishioka und H. Sato, Measurements of velocity distributions in the wake of a circular cylinder at low Reynolds numbers, *Journal of Fluid Mechanics*, vol.65, part 1, S.97-112, 1974
- [45] M. Nishioka und T. Miyagi, Measurements of velocity distributions in the laminar wake of a flat plate, *Journal of Fluid Mechanics*, vol.84, S.705-715, 1978
- [46] W. Magnus, F. Oberhettinger, R.P. Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 52, Springer-Verlag, 1966
- [47] W.T. Reid, *Sturmian Theory for Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, 1980
- [48] H. Schlichting, K. Gersten, *Grenzschicht-Theorie*, 10. Auflage, Springer-Verlag, 2006
- [49] F.T. Smith, Laminar flow over a small hump on a flat plate, *Journal of Fluid Mechanics*, vol.57, part 4, S.803-824, 1973
- [50] I.A. Sneddon, *Spezielle Funktionen der Mathematischen Physik*, BI-Hochschultaschenbücher, Band 54, 1963.
- [51] K. Stewartson, On Asymptotic Expansions in the Theory of Boundary Layers, *Journal of Mathematics and Physics* 36, S.173-191, 1957/1958
- [52] J. Stoer, *Numerische Mathematik 1*, 5. Auflage, Springer-Verlag, 1989
- [53] W.A. Strauss, *Partielle Differentialgleichungen*, Vieweg-Verlag, 1995
- [54] L. Ting, S. Chen, Perturbation Solutions and Asymptotic Solutions in Boundary Layer Theory, *Journal of Engineering Mathematics*, Vol.1, No.4 , S.327-340, 1967

- [55] L. Ting, Asymptotic Solutions of Wakes and Boundary Layers, Journal of Engineering Mathematics, vol.2, no.1, S.23-38, 1968
- [56] W. Tollmien, Grenzschichten, Handbuch der Experimentalphysik, Band 4, Hydro- und Aero-Dynamik, Teil 1, Akademie-Verlag, Leipzig, 1931
- [57] M. Van Dyke, Perturbation Methods in Fluid Mechanics, Parabolic Press Stanford California, 1975
- [58] H. Weyl, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 27, S.578-583, 1941
- [59] S.A. Berger, H. Viviand, American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) 3, S.1806, 1965
- [60] W. Walter, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Springer-Verlag, 1993

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen verwendet habe.

Hamburg, den 11. Dezember 2007