

73 | 1960

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Dipl.-Ing. P. Thomsen

Zur Berechnung von Umströmungskörpern zu Quell- Senken-Verteilungen

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

Zur Berechnung von Umströmungskörpern zu Quell-Senken-Verteilungen

Dipl.-Ing. P. Thomsen

Bericht des Instituts für Schiffbau der Universität Hamburg
mit einer Einführung von Dr. K. Eggers

Es wird der ursprünglich von Inui angegebene Vorschlag betreffs der Darstellung schiffsähnlicher Umströmungskörper durch kontinuierliche Verteilungen räumlicher Quellen angewendet:

Das Geschwindigkeitspotential bzw. der Potentialgradient im Flüssigkeitsraum wird durch geschlossene Integrationen hergeleitet. Anschließend wird aus dem Verlauf der durch numerische Integrationen bestimmten Stromlinien auf die Körperform geschlossen.

Die geschlossenen Integrationen zur Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeiten gelten einem allgemeinen Polynom-Ansatz für die Verteilung. Es werden die Lösungen der unbestimmten Integrale zum Linear-Glied, das die lineare Änderung der Quell-Intensität in Längs- und in Tiefenrichtung beschreibt, und die Lösungen der nächsten höheren Glieder — hier bei Konstanz der Intensität in Tiefenrichtung — angegeben.

Die Auswertung der Integrale an den Grenzen und die Ausführung der numerischen Integrationen zur Bestimmung der Stromlinien wurden zunächst für das Linearglied vorgenommen unter Benutzung der elektronischen Rechanlage der Universität. Die Ausdehnung der numerischen Rechnungen auf die behandelten Glieder höherer Ordnung steht bevor.

Vor einigen Jahren hat W. Wetterling versucht, die schiffsähnlichen Umströmungskörper zu vorgegebenen Quell-Senken-Verteilungen auf dem elektronischen Rechenautomaten G 2 in Göttingen zu berechnen. Es ist hierüber in dieser Zeitschrift in [2] berichtet worden.

Die G 2 ist eine Maschine, die in einer Arbeitsgruppe des Max-Planck-Instituts unter Leitung von Professor L. Biermann selbständig konstruiert und zusammengebaut worden ist. Unsere Rechnungen erfolgten wenige Monate nach der Fertigstellung der Maschine unter Schwierigkeiten, wie sie bei den heutigen, serienmäßig hergestellten Rechnern kaum noch anzutreffen sind. Abgesehen von der damals noch großen Störanfälligkeit der G 2 durch Ausfall von Röhren, wodurch numerische Rechnungen verfälscht werden konnten, ergaben sich Schwierigkeiten für die Programmierung des Problems dadurch, daß erstens die Maschine nur das Rechnen mit festem Komma gestattete — es mußte vorgesorgt werden, daß an keiner Stelle der Rechnung Zahlen auftraten mit Absolutbetrag größer als 8 — und daß zweitens zur Berechnung der transzendenten Funktionen wie Logarithmus und Arcustangens noch keine geeigneten Hilfsprogramme vorlagen. Über die letzte Schwierigkeit halfen wir uns hinweg, indem wir die auftretenden Integrale über die Quellverteilung nicht geschlossen auflösten, sondern die Ausdrücke durch die Quadraturformel von Gauss mit 16 Abszissen auswerteten, d. h. indem wir die kontinuierliche Quellverteilung durch 16 Quellstäbe ersetzten.

Dieses Verfahren ist in der Zwischenzeit mit einer Reihe anderer Quellverteilungen an der Hamburger Rechanlage IBM 650 weiter erprobt worden. Es zeichneten sich dabei zwei entscheidende Nachteile des Verfahrens ab:

1. Da die Abszissen der Legendre-Gauss-Quadraturformel erst in einem endlichen Abstand von den Integrationsintervall-Enden beginnen, die äußersten Quellstäbe also nicht mit dem Rand der kontinuierlichen Quellverteilung zusammenfallen, werden die Umströmungskörper zu den Quellstabsystemen im allgemeinen kürzer als die der entsprechenden kontinuierlichen Verteilungen.
2. Die einzelnen Quellstäbe bewirken Ausbeulungen in den Stromlinien. Dies tritt besonders hervor in der Um-

gebung des Stevens, bei schlanken Körpern aber auch noch weiter zur Mitte hin. Diese Beulen können nur genau erfaßt werden, wenn eine genügend kleine Schrittweite für das Runge-Kutta-System eingeführt wird, nach dem die Stromlinien gefunden werden; damit wird wieder die Rechenzeit für die einzelnen Stromlinien ungewöhnlich groß.

Die erstgenannte Schwierigkeit konnte behoben werden, indem die Quadraturen nach der Formel von Lobatto [4] durchgeführt wurden, welche die Abszissen am Intervallende mit erfaßt. Für die zweite Schwierigkeit ergab aber selbst die Verfeinerung der Integration durch eine Formel für 24 Abszissen keine befriedigende Lösung.

Die Arbeiten wurden, wie im folgenden veröffentlicht ist, von Dipl.-Ing. Thomsen neu aufgegriffen und mit Hilfe geschlossener Integrationen und der Programmierung der auszuführenden numerischen Rechnungen für die Hamburger Rechanlage jetzt offenbar befriedigend zum Abschluß gebracht. Es wurde dabei auf die ursprüngliche Arbeit [1] von Inui zurückgegriffen und ihre Verallgemeinerung gefunden für Verteilungen entsprechend Polynomen 2. und 3. Grades und für Linearverteilungen, welche in Tiefenrichtung nicht mehr konstant sind. Gleichzeitig gelang es, das Problem der Bestimmung der Anfangswerte für die Stromlinien, das bisher umfangreiche Überlegungen und numerische Rechnungen erforderte, entscheidend zu vereinfachen.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft sei der Dank ausgesprochen für die Ermöglichung der Untersuchungen.

K. Eggers

Bezeichnungen

x, y, z	Koordinaten der Raumpunkte in einem Rechtssystem
ξ, ζ	Koordinaten in x -Richtung und in z -Richtung von diskreten Quellen bzw. Koordinaten im Quellenfeld
$-1 \leq \xi \leq +1$ $-k \leq \zeta \leq +k$	Ebenes Rechteck-Feld für Quellverteilung
\vec{r}	Radiusvektor bzw. auf (ξ, ζ) bezogener Ortsvektor für Raumpunkt (x, y, z)
R	Betrag des Ortsvektors

$\bar{x} = x - \xi$	Betrag der Komponente in x-Richtung
$\bar{z} = z - \zeta$	Betrag der Komponente in z-Richtung des Ortsvektors
a_i, b_j	Koeffizienten im Polynom-Ansatz für die Quellverteilung
m	Quellergiebigkeit
Ψ	Geschwindigkeitspotential der Umströmung
Φ	Geschwindigkeitspotential der Quell-Senken-Strömung
φ	Elementarpotential für diskrete Quelle bzw. Quellen
V	Geschwindigkeitsbetrag der Parallelanströmung v
u, v, w	Komponenten der räumlichen Geschwindigkeit grad Ψ
x_0, y_0, z_0	Anfangskoordinaten bei der Berechnung von Stromlinien
s	Bogenlänge von Stromlinien
h	Schrittweite bei numerischer Integration
B, T, L	Hauptabmessungen der Umströmungskörper
α	Völligkeitsgrad der Wasserlinie (CWL)
β	Völligkeitsgrad des Hauptspants
δ	Völligkeitsgrad der Verdrängung
$\bar{\varphi} = \beta/\delta$	Schärfegrad
$\nabla = \delta \cdot B T L$	Verdrängung des Umströmungskörpers (Volumengröße)
k_x	Koeffizient der hydrodynamischen Masse in x-Richtung für Umströmungskörper
p	Druck; in mathematischer Herleitung p als Exponent verwendet
q	Staudruck
ρ	Dichte
g	Erdbeschleunigung
t	Zeit

Problem

Für spezielle Verteilungen räumlicher Quellen, in einem Rechteck-Feld in einer Ebene senkrecht zur ungestörten freien Oberfläche gelegen, sollen die Geschwindigkeiten und Stromlinien der räumlichen Umströmung berechnet werden, die jeweils vorliegt, wenn die Verteilung in eine stationäre Parallelströmung reibungs- und drehungsfreier Flüssigkeit ohne Anstellwinkel eingesetzt ist.

Die Verteilungen gehören dem Polynom-Ansatz für m an:

$$m = \sum_{i=1, j=1} a_i \xi^i (1 - b_j |\zeta|^j) \quad (1)$$

Die Verteilung liegt jeweils in der xz -Ebene. z , die Tiefencoordinate, wird nach unten negativ gerechnet. x liegt, wie y ,

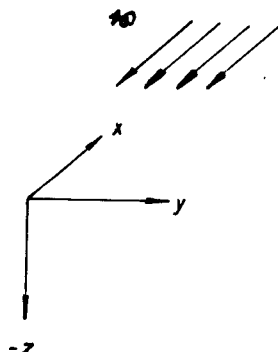


Bild 1

in der ungestörten freien Oberfläche und ist mit der Anströmung v stromauf positiv gerichtet.

Die Randbedingung an der freien Oberfläche

$$(g \Phi_z + V^2 \Phi_{xx})_{z=0} = 0, \quad (2)$$

zusammengesetzt aus den Bedingungen, daß die freie Oberfläche Stromlinienfläche ist und daß der Druck in der freien Oberfläche gleich dem atmosphärischen Druck ist, ist bekannt-

lich näherungsweise erfüllt in den beiden Bereichen großer und kleiner Anströmgeschwindigkeit, wenn das Geschwindigkeitspotential der in $(\xi, -\zeta)$ befindlichen räumlichen Einzelquelle

$$\varphi = -\frac{m}{4\pi R}, \quad R = \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2 + (z + \zeta)^2} \quad (3)$$

um das Potential der geeigneten Bildquelle vermehrt zu

$$\varphi = -\frac{m}{4\pi R} + \frac{m}{4\pi \bar{R}} \quad \text{für große Geschwindigkeiten} \quad (4)$$

bzw. zu

$$\varphi = -\frac{m}{4\pi R} - \frac{m}{4\pi \bar{R}} \quad \text{für kleine Geschwindigkeiten} \quad (5)$$

angesetzt wird.

Für den Bereich großer Anströmgeschwindigkeit ist als Zusatz-Potential dasjenige der der Quelle entsprechenden Einzelsenke zu addieren, für den Bereich kleiner Anströmgeschwindigkeit dasjenige einer gleichen Einzelquelle.

In beiden Fällen liegt die zusätzliche Singularität spiegelbildlich zur Einzelquelle über der freien Oberfläche.

$$R^2 = (x - \xi)^2 + y^2 + (z + \zeta)^2 \quad (6)$$

$$\bar{R}^2 = (x - \xi)^2 + y^2 + (z - \zeta)^2.$$

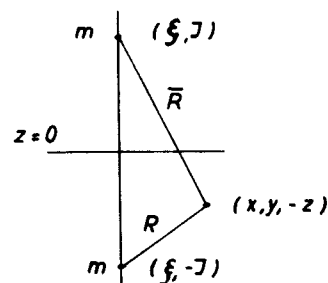


Bild 2

Die Güte der Näherung läßt sich bei praktischer Rechnung den Gleichungen

$$\frac{g}{V^2} (\varphi_z)_{z=0} = 0 \quad \text{bzw.} \quad (7)$$

$$\frac{V^2}{g} (\varphi_{xx})_{z=0} = 0, \quad (8)$$

wie sie sich als Randbedingungen aus (2) für die beiden Grenzfälle ergeben, entnehmen.

Die folgenden Rechnungen gelten für kleine Geschwindigkeiten der Anströmung. Oberhalb $z = 0$ ist die gleiche Verteilung von Quellen angesetzt wie unterhalb. Die Lage der Bildquellen über der freien Oberfläche erscheint physikalisch sinnvoll, wenn man bedenkt, daß jede Stromlinienfläche in der Flüssigkeit, deren Flüssigkeitspartikel im Ruhezustand (Anströmgeschwindigkeit null) in einer horizontalen Ebene liegen, die Eigenschaften der „freien Oberfläche“ hat, wie sie (2) angibt. Diese Erklärung gilt darum, weil gemäß des Betrages der Anströmgeschwindigkeit verschwindende Wellenhöhen vorausgesetzt sind. Bei der gleichen Einschränkung zur Anströmgeschwindigkeit könnte die Verteilung ebenso gut in beliebiger Tauchung im Flüssigkeitsraum betrachtet werden, ohne daß sich an den Ergebnissen zur Umströmung Änderungen einstellen.

Lösungsweg

Es werden die Integrationen zur Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeit

$$\text{grad } \Psi = \{\Psi_x, \Psi_y, \Psi_z\} \quad (9)$$

geschlossen ausgeführt.

Anschließend wird die Differentialgleichung der Stromlinien

$$dx : dy : dz = \Psi_x : \Psi_y : \Psi_z,$$

die in der Darstellung des Systems von Differentialgleichungen

$$\frac{dx(s)}{ds} = \Psi_x, \quad \frac{dy(s)}{ds} = \Psi_y, \quad \frac{dz(s)}{ds} = \Psi_z \quad (10)$$

aufgefaßt wird, mit Hilfe des Runge-Kutta-Verfahrens integriert. Parameter ist die Bogenlänge s der Stromlinien. Ausgehend von vorgegebenen Raumpunkten stromauf vor der Verteilung ergeben sich bei der Integration jeweils die Koordinaten $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ der durch einen Anfangspunkt verlaufenden Stromlinie.

Geschlossene Integrationen

Unter der Quellergiebigkeit m wird die Quellförderung pro Zeiteinheit (Quellvolumen pro Zeiteinheit) der räumlichen Einzelquelle verstanden

$$m = 4\pi R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad (11)$$

Das Geschwindigkeitspotential der Quell-Strömung ergibt sich dann aus der Radial-Geschwindigkeit $\partial\varphi/\partial r$ durch Integration über r (Radial-Richtung) zu

$$\varphi = -\frac{m}{4\pi} \cdot \frac{1}{R} \quad (12)$$

Das Geschwindigkeitspotential Φ der Quell-Senken-Strömung aus der Verteilung $m(\xi, \zeta)$ im Rechteck-Feld

$$\begin{aligned} -1 \leq \xi \leq +1 \\ -t \leq \zeta \leq +t \end{aligned} \quad (13)$$

ist die Integralsumme der Elementarpotentiale φ über das Feld:

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi V} \iint \frac{m}{R} d\xi d\zeta = \Phi(x, y, z) \quad (14)$$

$$R = \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2 + (z-\zeta)^2} \quad (15)$$

Das Geschwindigkeitspotential der Gesamtströmung entspricht der Überlagerung von Quell-Senken-Strömung und Anströmung und ist

$$\Psi = -x + \Phi \quad (16)$$

Beide Potentiale sind auf die Anströmungsgeschwindigkeit V bezogen.

Gesucht sind die Ableitungen von Ψ nach den drei Koordinatenrichtungen des Raums. Es sind also die Integrationen auszuführen in

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{1}{4\pi V} \iint \frac{\partial}{\partial n} \frac{m}{R} d\xi d\zeta = \Phi_n(x, y, z) \quad (17)$$

wobei n als Abkürzung gesetzt ist an Stelle der drei Koordinatenrichtungen x , y , z .

Für die Integranden gilt

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{m}{R} = m \cdot \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R} \quad (18)$$

Mit den Substitutionen

$$\begin{aligned} \xi &= x - \bar{x} & d\xi &= -d\bar{x} \\ \zeta &= z - \bar{z} & d\zeta &= -d\bar{z} \end{aligned} \quad (19)$$

lautet (18), für die Komponentenrichtungen ausgeschrieben,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{m}{R} &= -\frac{\bar{x}}{R^3} \cdot m & \frac{\partial}{\partial z} \frac{m}{R} &= -\frac{\bar{z}}{R^3} \cdot m \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{m}{R} &= -\frac{y}{R^3} \cdot m \end{aligned} \quad (20)$$

Für den einfacheren Fall der in Tiefenrichtung z unveränderlichen Quellverteilung — mit $b_j = 0$ dem Polynom (1) zugehörig —

$$m = \sum_{i=1}^n a_i \xi^i \quad (21)$$

sind die zu lösende Integrale

$$\begin{aligned} \Phi_x &\sim - \iint \frac{\bar{x}}{R^3} \sum a_i (x - \bar{x})^i d\bar{x} d\bar{z} \\ &= - \sum a_i \iint \frac{\bar{x}}{R^3} (x - \bar{x})^i d\bar{x} d\bar{z} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \Phi_y &\sim - \iint \frac{y}{R^3} \sum a_i (x - \bar{x})^i d\bar{x} d\bar{z} \\ &= - \sum a_i \iint \frac{y}{R^3} (x - \bar{x})^i d\bar{x} d\bar{z} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \Phi_z &\sim - \iint \frac{\bar{z}}{R^3} \sum a_i (x - \bar{x})^i d\bar{x} d\bar{z} \\ &= - \sum a_i \iint \frac{\bar{z}}{R^3} (x - \bar{x})^i d\bar{x} d\bar{z} \end{aligned} \quad (24)$$

Mit dem Ziel, bei beliebigem Ansatz für das Polynom der Quellverteilung m — zunächst nach (21) — die Lösung der Integrale auf wiederholte Auswertung einer Rekursionsformel zurückzuführen, wurde der binomische Lehrsatz hier eingeführt. Mit

$$(x - \bar{x})^i = \sum_{p=0}^i \binom{i}{p} x^{i-p} (-\bar{x})^p \quad (25)$$

lauten die Integrale

$$\begin{aligned} \iint \frac{\bar{x}}{R^3} (x - \bar{x})^i d\bar{x} d\bar{z} &= \\ &= \sum_{p=0}^i (-1)^p \binom{i}{p} x^{i-p} \iint \frac{\bar{x}^{p+1}}{R^3} d\bar{x} d\bar{z} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \iint \frac{y}{R^3} (x - \bar{x})^i d\bar{x} d\bar{z} &= \\ &= y \sum_{p=0}^i (-1)^p \binom{i}{p} x^{i-p} \iint \frac{\bar{x}^p}{R^3} d\bar{x} d\bar{z} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \iint \frac{\bar{z}}{R^3} (x - \bar{x})^i d\bar{x} d\bar{z} &= \\ &= \sum_{p=0}^i (-1)^p \binom{i}{p} x^{i-p} \iint \frac{\bar{z} \cdot \bar{x}^p}{R^3} d\bar{x} d\bar{z} \end{aligned} \quad (28)$$

Die Integration in (22) und (23) sind zurückgeführt auf die Behandlung des Integraltyps

$$\iint \frac{\bar{x}^p}{R^3} d\bar{x} d\bar{z} \quad p = 0, 1, 2, 3, 4, \dots \quad (29)$$

diejenigen in (24) auf die Behandlung des Typs

$$\iint \frac{\bar{z} \cdot \bar{x}^p}{R^3} d\bar{x} d\bar{z} \quad p = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (30)$$

Die Lösung für das letztere, für die z -Geschwindigkeiten maßgebliche Integral kann für beliebige p angegeben werden:

$$\begin{aligned} \iint \frac{\bar{z} \cdot \bar{x}^p}{R^3} d\bar{x} d\bar{z} &= \int \left\{ \int \frac{\bar{z}}{R^3} d\bar{z} \right\} \bar{x}^p d\bar{x} = - \int \frac{\bar{x}^p}{R} d\bar{x} \\ &= -\frac{1}{p} \bar{x}^{p-1} \cdot R + \frac{p-1}{p} (y^2 + \bar{z}^2) \int \frac{\bar{x}^{p-2}}{R} d\bar{x} \end{aligned} \quad (31)$$

$$p \text{ gerade: } \text{letztes Integral in (31)} \int \frac{d\bar{x}}{R} = \ln(\bar{x} + R)$$

$$p \text{ ungerade: } \text{letztes Integral in (31)} \int \frac{\bar{x}}{R} d\bar{x} = R.$$

Für $p = 0$ bis $p = 3$ lauten die Lösungen im einzelnen:

$$\iint \frac{\bar{z}}{R^3} d\bar{x} d\bar{z} = -\ln(\bar{x} + R) \quad p = 0 \quad (31)$$

$$\iint \frac{\bar{z} \cdot \bar{x}}{R^3} d\bar{x} d\bar{z} = -R \quad p = 1 \quad (31)$$

$$\iint \frac{\bar{z} \cdot \bar{x}^2}{R^3} d\bar{x} d\bar{z} = -\frac{\bar{x} R}{2} + \frac{\bar{z}^2 + y^2}{2} \ln(\bar{x} + R) \quad p = 2 \quad (31)$$

$$\iint \frac{\bar{z} \cdot \bar{x}^3}{R^3} d\bar{x} d\bar{z} = -\bar{x}^2 R + \frac{2}{3} R^3 \quad p = 3 \quad (31)$$

Die allgemeine Lösung des Integrals vom Typ (29), maßgeblich für die x- und y-Geschwindigkeiten, wurde nicht gefunden. Auf der Suche nach der Rekursionsformel wurden jedoch die Integrale bekannt für $p = 0$ bis $p = 4$.

$$(32), p = 0$$

$$\iint \frac{d\bar{x} d\bar{z}}{R^3} = \frac{1}{2} y \left[\arctg \frac{y \bar{z}}{\bar{x}^2 + y^2 - \bar{x} R} - \arctg \frac{y \bar{z}}{\bar{x}^2 + y^2 + \bar{x} R} \right]$$

$$(32), p = 1 \quad \iint \frac{\bar{x}}{R^3} d\bar{x} d\bar{z} = -\ln(\bar{z} + R)$$

$$(32), p = 2$$

$$\iint \frac{\bar{x}^2}{R^3} d\bar{x} d\bar{z} = -\bar{x} \ln(\bar{z} + R) + \bar{z} \ln(\bar{x} + R) + \bar{x} \ln \frac{R + \bar{z}}{\sqrt{\bar{x}^2 + y^2}} + y \arctg \frac{y \bar{z}}{\bar{x}^2 + y^2 + \bar{x} R}$$

$$(32), p = 3 \quad \iint \frac{\bar{x}^3}{R^3} d\bar{x} d\bar{z} = \bar{z} R + y^2 \ln(\bar{z} + R)$$

$$(32), p = 4 \quad \iint \frac{\bar{x}^4}{R^3} d\bar{x} d\bar{z} = -\bar{x}^3 \ln(\bar{z} + R)$$

$$+ \frac{3}{2} \bar{x} \left(\frac{\bar{z}}{2} R + \frac{\bar{x}^2 + y^2}{2} \ln(\bar{z} + R) \right) - \frac{3}{2} y^2 \left[\bar{z} \ln(\bar{x} + R) - \bar{z} + \bar{x} \ln \frac{R + \bar{z}}{\sqrt{\bar{x}^2 + y^2}} + y \arctg \frac{y \bar{z}}{\bar{x}^2 + y^2 + \bar{x} R} \right] - \frac{3}{2} \int \bar{z}^2 \ln(\bar{x} + R) d\bar{z}$$

Für die Quellverteilung (21) sind damit die zur Bestimmung der Geschwindigkeiten auszuführenden Integrale für Polynome m bis zum 3. Grade gelöst. Dies bedeutet praktisch, daß die zur Ebene $x = 0$ symmetrischen Umströmungskörper zu Verteilungen der Form (33)

$$m = a_1 \xi + a_2 \xi |\xi| + a_3 \xi^3 \quad (33)$$

der numerischen Behandlung unmittelbar zugänglich sind. Der dabei notwendige numerische Aufwand wird aus dem Vergleich der Ergebnisse der folgenden Behandlung des Linearglieds von (21) und des vollständigen Linearglieds von (1) im Vergleich mit den Vorschriften von (26) bis (28) ersichtlich.

Zurückkehrend zum allgemeinen Polynomansatz (1) gelten im folgenden die Untersuchungen dem Linearglied. Es werden der mit $b_1 = 0$ gegebene Sonderfall des Vergleichs wegen mit den Ergebnissen von Inui in [1] und insbesondere der mit $b_1 \neq 0$ gegebene Allgemeinfall, der der linearen Änderung der Quellintensität in Längs- und in Tiefenrichtung entspricht, untersucht.

I. Rechnung für $m = a_1 \xi$

Die Verteilung (34) $m = a_1 \xi$ bedeckt den angegebenen Rechteckbereich.

$a_1 = aV$ ist die Ergiebigkeit pro Längeneinheit in $\xi = 1$.

Es wird das Potential Φ_1 der Quell-Senken-Strömung berechnet.

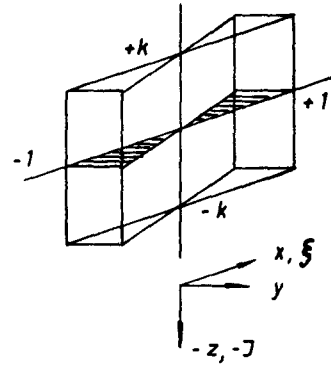


Bild 3 Die Verteilung im Rechteck-Feld

Mit den eingeführten Substitutionen gilt

$$-\frac{4\pi}{a} \Phi_1 = \int \left\{ \int_{z+k}^{z-k} \frac{x - \bar{x}}{R} d\bar{x} \right\} d\bar{z} \quad (35)$$

$$\text{Mit } \int \frac{x - \bar{x}}{R} d\bar{x} = \left[x \ln(\bar{x} + R) - R \right]_{x+1}^{x-1} \quad (36)$$

ergibt sich (35) zu

$$-\frac{4\pi}{a} \Phi_1 = \int_{z+k}^{z-k} \left[x \ln(\bar{x} + R) - R \right]_{x+1}^{x-1} d\bar{z} \quad (37)$$

Das Integral über \bar{z} wird gelöst mit Hilfe

$$\left. \begin{aligned} \int R d\bar{z} &= \frac{\bar{z}}{2} R + \frac{\bar{x}^2 + y^2}{\bar{z}} \ln(\bar{z} + R) + c \\ \int \ln(\bar{x} + R) d\bar{z} &= \bar{z} \ln(\bar{x} + R) - \int \frac{\bar{z}}{\bar{x} + R} \cdot \frac{\bar{z}}{R} d\bar{z} \\ - \int \frac{\bar{z}}{\bar{x} + R} \cdot \frac{\bar{z}}{R} d\bar{z} &= -\bar{z} + \bar{x} \ln \frac{R + \bar{z}}{\sqrt{\bar{x}^2 + y^2}} \\ &\quad + y \arctg \frac{y \bar{z}}{\bar{x}^2 + y^2 + \bar{x} R} + c \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Φ_1 bestimmt sich dann aus (37) zu

$$\begin{aligned} -\frac{4\pi}{a} \Phi_1 &= \\ &= \left\| x \left[\bar{z} \ln(\bar{x} + R) - 1 \right] + \bar{x} \left[\ln(\bar{z} + R) - \ln \sqrt{\bar{x}^2 + y^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + y \arctg \frac{y \bar{z}}{\bar{x}^2 + y^2 + \bar{x} R} \right\|_{\bar{x}=x+1}^{x-1} \\ &\quad - \left\| \frac{\bar{z}}{2} R + \frac{\bar{x}^2 + y^2}{2} \ln(\bar{z} + R) \right\|_{\bar{x}=x+1}^{x-1} \left\| \right\|_{\bar{z}=z+k}^{z-k} \end{aligned} \quad (39)$$

$$\text{Mit } \begin{aligned} \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z-k)^2} &= R_1 \\ \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z+k)^2} &= R_1' \\ \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + (z-k)^2} &= R_2 \\ \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + (z+k)^2} &= R_2' \end{aligned} \quad (40)$$

ist dann

$$\begin{aligned}
& - \frac{4\pi}{a} \Phi_1 - \frac{1}{2} (x^2 - y^2 - 1) \{ \ln(z-k+R_1) - \ln(z+k+R_1') \\
& \quad - \ln(z-k+R_2) + \ln(z+k+R_2') \} \\
& + x \{ (z+k) \{ \ln(x+1+R_2') - \ln(x-1+R_1') \} \\
& \quad + (z-k) \{ \ln(x-1+R_1) - \ln(x+1+R_2) \} \\
& \quad + \frac{z-k}{2} (R_2 - R_1) + \frac{z+k}{2} (R_1' - R_2') \} \\
& + xy \left[\operatorname{arctg} \frac{y(z-k)}{(x-1)^2 + y^2 + (x-1)R_1} \right. \\
& \quad - \operatorname{arctg} \frac{y(z+k)}{(x-1)^2 + y^2 + (x-1)R_1'} \\
& \quad - \operatorname{arctg} \frac{y(z-k)}{(x+1)^2 + y^2 + (x+1)R_2} \\
& \quad \left. + \operatorname{arctg} \frac{y(z+k)}{(x+1)^2 + y^2 + (x+1)R_2'} \right] \quad (41)
\end{aligned}$$

Der Potentialausdruck stimmt mit dem in [1] abgeleiteten Ausdruck überein bis auf den arc tg-Term, der offenbar in [1] nicht exakt dargestellt wurde.

Es werden die Komponenten der räumlich orientierten Geschwindigkeiten berechnet:

$$u = \Phi_{1x} - 1, \quad v = \Phi_{1y}, \quad w = \Phi_{1z}. \quad (42)$$

Die Ergebnisse sind

$$\begin{aligned}
u = -1 - \frac{a}{4\pi} \left\{ x \{ \ln(z-k+R_1) - \ln(z+k+R_1') \right. \\
\quad - \ln(z-k+R_2) + \ln(z+k+R_2') \} \\
\quad + (z+k) \{ \ln(x+1+R_2') - \ln(x-1+R_1') \} \\
\quad + (z-k) \{ \ln(x-1+R_1) - \ln(x+1+R_2) \} \\
\quad \left. + y \left[\operatorname{arctg}\text{-Glieder} \right] \right\}. \quad (43)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v = \frac{a}{4\pi} \left\{ y \{ \ln(z-k+R_1) - \ln(z+k+R_1') \right. \\
\quad - \ln(z-k+R_2) + \ln(z+k+R_2') \} \\
\quad + \frac{1}{2} x \left[\operatorname{arctg} \frac{y(z-k)}{(x-1)^2 + y^2 - (x-1)R_1} \right. \\
\quad - \operatorname{arctg} \frac{y(z+k)}{(x-1)^2 + y^2 - (x-1)R_1'} \\
\quad - \operatorname{arctg} \frac{y(z-k)}{(x+1)^2 + y^2 - (x+1)R_2} \\
\quad \left. + \operatorname{arctg} \frac{y(z+k)}{(x+1)^2 + y^2 - (x+1)R_2'} \right] \\
\quad - \frac{1}{2} x \left[\operatorname{arctg} \frac{y(z-k)}{(x-1)^2 + y^2 + (x-1)R_1} \right. \\
\quad - \operatorname{arctg} \frac{y(z+k)}{(x-1)^2 + y^2 + (x-1)R_1'} \\
\quad - \operatorname{arctg} \frac{y(z-k)}{(x+1)^2 + y^2 + (x+1)R_2} \\
\quad \left. + \operatorname{arctg} \frac{y(z+k)}{(x+1)^2 + y^2 + (x+1)R_2'} \right] \left. \right\}. \quad (44)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w = - \frac{a}{4\pi} \left\{ x \{ \ln(x-1+R_1) - \ln(x+1+R_2) \right. \\
\quad - \ln(x-1+R_1') + \ln(x+1+R_2') \} \\
\quad \left. - R_1 + R_2 + R_1' - R_2' \right\}. \quad (45)
\end{aligned}$$

II. Rechnung für $m = a_1 \xi (1 - b_1 |\zeta|)$

Die Verteilung (46) $m = a_1 \xi (1 - b_1 |\zeta|)$ ist wie die erste symmetrisch zur ξ -Achse, es liegt aber in Richtung der positiven bzw. negativen ζ -Achse lineare Änderung vor. Bezüglich des neuen Quell-Parameters $b_1 = b$ stellt die Abbildung den besonderen Fall der in Tiefenrichtung an den Intervallgrenzen verschwindenden Quellintensität dar, der durch

$$b \cdot k = 1 \quad (47)$$

gekennzeichnet ist.

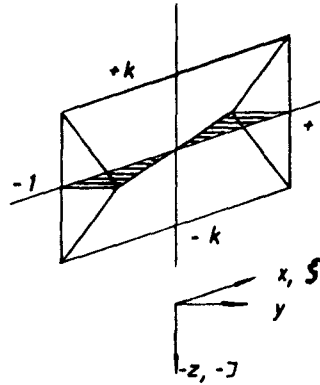


Bild 4 Die Verteilung im Rechteck-Feld

Der neue Potentialausdruck der Quell-Senken-Strömung lautet

$$\begin{aligned}
\Phi_2 = - \frac{1}{4\pi} \int_{-1-k}^{+1+k} \int \frac{a \xi (1 - b |\zeta|)}{R} d\xi d\zeta \\
= \Phi_1 + \frac{ab}{4\pi} \int_{-1-k}^{+1+k} \int \frac{\xi |\zeta|}{R} d\xi d\zeta. \quad (48)
\end{aligned}$$

Im folgenden werden die Geschwindigkeiten u, v, w der Gesamtströmung berechnet. Die Differenz gegenüber den in I berechneten Geschwindigkeiten resultiert aus den Ableitungen der Differenz $\Phi_2 - \Phi_1$. Die Geschwindigkeiten werden darum in der Form angegeben:

$$\begin{aligned}
u &= u_1 + \frac{\partial}{\partial x} (\Phi_2 - \Phi_1) \\
v &= v_1 + \frac{\partial}{\partial y} (\Phi_2 - \Phi_1) \\
w &= w_1 + \frac{\partial}{\partial z} (\Phi_2 - \Phi_1)
\end{aligned} \quad (49)$$

Der Vorschrift des Betrag-Zeichens im Integranden für $\Phi_2 - \Phi_1$ wird genügt durch die Aufspaltung

$$\begin{aligned}
\int_{-k-1}^{+k+1} \int \frac{\xi |\zeta|}{R} d\xi d\zeta = - \int_{-k-1}^0 \int_{-1}^{+1} \frac{\xi \zeta}{R} d\xi d\zeta + \int_0^{+k+1} \int_{-1}^{+1} \frac{\xi \zeta}{R} d\xi d\zeta \\
= (\Phi_2 - \Phi_1) \cdot \frac{4\pi}{a \cdot b}
\end{aligned}$$

Mit den Substitutionen (19) lauten die fehlenden Integrale

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial n} (\Phi_2 - \Phi_1) &= \frac{ab}{4\pi} \int_{z-x+1}^{z+k-x-1} \int \frac{\partial}{\partial n} \frac{(x-\bar{x})(z-\bar{z})}{R} d\bar{x} d\bar{z} \\
&+ \frac{ab}{4\pi} \int_{z-x+1}^{z-k-x-1} \int \frac{\partial}{\partial n} \frac{(x-\bar{x})(z-\bar{z})}{R} d\bar{x} d\bar{z}. \quad (51)
\end{aligned}$$

Die Integranden lauten ausgeschrieben

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{(x - \bar{x})(z - \bar{z})}{R} = - \frac{(x - \bar{x})(z - \bar{z})}{R^3} \bar{x} \quad (52)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{(x - \bar{x})(z - \bar{z})}{R} = - \frac{(x - \bar{x})(z - \bar{z})}{R^3} y \quad (53)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{(x - \bar{x})(z - \bar{z})}{R} = - \frac{(x - \bar{x})(z - \bar{z})}{R^3} \bar{z} \quad (54)$$

Auf die Angaben zur Lösung der Integrale wird verzichtet; es werden die Ergebnisse angegeben.

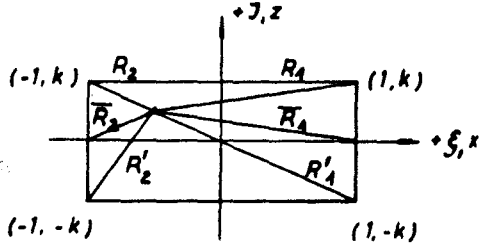


Bild 5

Mit einer notwendigen neuen Festsetzung

$$\begin{aligned} \bar{R}_1 &= \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2} \\ \bar{R}_2 &= \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + z^2} \end{aligned} \quad (55)$$

lauten die bestimmten Integralwerte:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{ab} \frac{\partial}{\partial x} (\Phi_2 - \Phi_1) &= \\ & \frac{1}{2} (z^2 - y^2 - k^2) [\ln(x-1 + R_1') - \ln(x+1 + R_2') \\ & \quad + \ln(x-1 + R_1) - \ln(x+1 + R_2)] \\ & + (y^2 - z^2) \cdot [\ln(x-1 + \bar{R}_1) - \ln(x+1 + \bar{R}_2)] \\ & + xz \cdot [\ln(z+k + R_1') - \ln(z+k + R_2') \\ & \quad + \ln(z-k + R_1) - \ln(z-k + R_2) \\ & \quad - 2 \ln(z + \bar{R}_1) + 2 \ln(z + \bar{R}_2)] \\ & + yz \cdot \left[\operatorname{arctg} \frac{y(z+k)}{(x-1)^2 + y^2 + (x-1)R_1'} \right. \\ & \quad - \operatorname{arctg} \frac{y(z+k)}{(x+1)^2 + y^2 + (x+1)R_2'} \\ & \quad + \operatorname{arctg} \frac{y(z-k)}{(x-1)^2 + y^2 + (x-1)R_1} \\ & \quad - \operatorname{arctg} \frac{y(z-k)}{(x+1)^2 + y^2 + (x+1)R_2} \\ & \quad \left. - 2 \operatorname{arctg} \frac{yz}{(x-1)^2 + y^2 + (x-1)\bar{R}_1} \right. \\ & \quad \left. + 2 \operatorname{arctg} \frac{yz}{(x+1)^2 + y^2 + (x+1)\bar{R}_2} \right] \\ & + \frac{x}{2} [R_2 - R_1 + 2\bar{R}_1 - 2\bar{R}_2 + R_2' - R_1'] \\ & - \frac{1}{2} [R_2 + R_1 - 2\bar{R}_1 - 2\bar{R}_2 + R_2' + R_1'] \quad (56) \\ \frac{4\pi}{ab} \frac{\partial}{\partial y} (\Phi_2 - \Phi_1) &= \\ & - \frac{xz}{2} \left[\operatorname{arctg} \frac{y(z+k)}{(x-1)^2 + y^2 - (x-1)R_1'} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \operatorname{arctg} \frac{y(z+k)}{(x-1)^2 + y^2 + (x-1)R_1'} \\ & - \operatorname{arctg} \frac{y(z+k)}{(x+1)^2 + y^2 - (x+1)R_2'} \\ & + \operatorname{arctg} \frac{y(z+k)}{(x+1)^2 + y^2 + (x+1)R_2'} \\ & + \operatorname{arctg} \frac{y(z-k)}{(x-1)^2 + y^2 - (x-1)R_1} \\ & - \operatorname{arctg} \frac{y(z-k)}{(x-1)^2 + y^2 + (x-1)R_1} \\ & - \operatorname{arctg} \frac{y(z-k)}{(x+1)^2 + y^2 - (x+1)R_2} \\ & + \operatorname{arctg} \frac{y(z-k)}{(x+1)^2 + y^2 + (x+1)R_2} \\ & - 2 \operatorname{arctg} \frac{yz}{(x-1)^2 + y^2 - (x-1)\bar{R}_1} \\ & + 2 \operatorname{arctg} \frac{yz}{(x-1)^2 + y^2 + (x-1)\bar{R}_1} \\ & + 2 \operatorname{arctg} \frac{yz}{(x+1)^2 + y^2 - (x+1)\bar{R}_2} \\ & - 2 \operatorname{arctg} \frac{yz}{(x+1)^2 + y^2 + (x+1)\bar{R}_2} \\ & - yz [\ln(z+k + R_1') - \ln(z+k + R_2') \\ & \quad + \ln(z-k + R_1) - \ln(z-k + R_2) \\ & \quad - 2 \ln(z + \bar{R}_1) + 2 \ln(z + \bar{R}_2)] \\ & - xy [\ln(x-1 + R_1') - \ln(x+1 + R_2') \\ & \quad + \ln(x-1 + R_1) - \ln(x+1 + R_2) \\ & \quad - 2 \ln(x-1 + \bar{R}_1) + 2 \ln(x+1 + \bar{R}_2)] \\ & + y [R_1' - R_2' + R_1 - R_2 - 2\bar{R}_1 + 2\bar{R}_2] \quad (57) \\ \frac{4\pi}{ab} \frac{\partial}{\partial z} (\Phi_2 - \Phi_1) &= \\ & \frac{1}{2} (x^2 - y^2 - 1) \cdot [\ln(z+k + R_1') - \ln(z+k + R_2') \\ & \quad + \ln(z-k + R_1) - \ln(z-k + R_2) \\ & \quad - 2 \ln(z + \bar{R}_1) + 2 \ln(z + \bar{R}_2)] \\ & + xz \cdot [\ln(x-1 + R_1') - \ln(x+1 + R_2') \\ & \quad + \ln(x-1 + R_1) - \ln(x+1 + R_2) \\ & \quad - 2 \ln(x-1 + \bar{R}_1) + 2 \ln(x+1 + \bar{R}_2)] \\ & + xy \cdot \left[\operatorname{arctg} \frac{y(x-1)}{(z+k)^2 + y^2 + (z+k)R_1'} \right. \\ & \quad - \operatorname{arctg} \frac{y(x+1)}{(z+k)^2 + y^2 + (z+k)R_2'} \\ & \quad + \operatorname{arctg} \frac{y(x-1)}{(z-k)^2 + y^2 + (z-k)R_1} \\ & \quad - \operatorname{arctg} \frac{y(x+1)}{(z-k)^2 + y^2 + (z-k)R_2} \\ & \quad \left. - 2 \operatorname{arctg} \frac{y(x-1)}{z^2 + y^2 + zR_1} + 2 \operatorname{arctg} \frac{y(x+1)}{z^2 + y^2 + zR_2} \right] \\ & + \frac{z}{2} [R_2 - R_1 + 2\bar{R}_1 - 2\bar{R}_2 + R_2' - R_1'] \\ & + \frac{k}{2} [R_2 - R_1 - R_2' + R_1'] \quad (58) \end{aligned}$$

Damit sind die Geschwindigkeiten für die Verteilung II bekannt.

$$\begin{array}{l}
u: \quad -\bar{z} \ln(\bar{x} + R) - x \ln(\bar{z} + R) - y \operatorname{arctg} \frac{y\bar{z}}{\bar{x}^2 + y^2 + \bar{x}R} \quad \text{Zeile 1} \\
\quad - \left(\frac{y^2 + \bar{z}^2}{2} - \bar{z}z \right) \ln(\bar{x} + R) + xz \ln(\bar{z} + R) + yz \operatorname{arctg} \frac{y\bar{z}}{\bar{x}^2 + y^2 + \bar{x}R} + \left(\frac{\bar{x}}{2} - x \right) \cdot R \quad \text{Zeile 2} \\
\hline
v: \quad + y \ln(\bar{z} + R) + \frac{x}{2} \left[\operatorname{arctg} \frac{y\bar{z}}{\bar{x}^2 + y^2 - \bar{x}R} - \operatorname{arctg} \frac{y\bar{z}}{\bar{x}^2 + y^2 + \bar{x}R} \right] \quad \text{Zeile 1} \\
\quad - xy \ln(\bar{x} + R) - yz \ln(\bar{z} + R) - \frac{xz}{2} \left[\operatorname{arctg} \frac{y\bar{z}}{\bar{x}^2 + y^2 - \bar{x}R} - \operatorname{arctg} \frac{y\bar{z}}{\bar{x}^2 + y^2 + \bar{x}R} \right] + y \cdot R \quad \text{Zeile 2} \\
\hline
w: \quad -x \ln(\bar{x} + R) + R \quad \text{Zeile 1} \\
\quad + xz \ln(\bar{x} + R) - \left(\frac{\bar{x}^2 + y^2}{2} - x\bar{x} \right) \ln(\bar{z} + R) + xy \operatorname{arctg} \frac{y\bar{x}}{\bar{z}^2 + y^2 + \bar{z}R} + \left(\frac{\bar{z}}{2} - z \right) \cdot R \quad \text{Zeile 2}
\end{array}$$

Der Übersicht halber sind vorstehend die abgeleiteten Integral-Ausdrücke für die Verteilungen I und II gegenübergestellt. Es werden nebeneinander die unbestimmten Integrale aufgeschrieben. Summanden, die keine Beiträge zu den Geschwindigkeiten liefern, sind nicht angeschrieben.

Der Summenausdruck jeweils in Zeile 1, für sich gelesen, ist bestimmend für die Geschwindigkeit u bzw. v bzw. w um Verteilung I; der Summenausdruck jeweils in den Zeilen 1 und 2 zusammengenommen ist bestimmend für die Geschwindigkeiten um Verteilung II — in beiden Fällen unter Berücksichtigung der Grenzen.

Numerische Integrationen

Es war zunächst das Bestreben, eine ausreichende Beschreibung der Form der Umströmungskörper zu erhalten, als deren Äquivalente die Quell-Senken-Verteilungen angesehen werden. Dazu sollte die Berechnung der Wandstromlinien führen.

Es finden an dieser Stelle die Verhältnisse der ebenen Potentialströmung Erwähnung, um vergleichend darauf hinweisen zu können, daß im ebenen Fall eine weit ausgebaute Theorie zur mathematischen Behandlung in der Theorie der analytischen Funktionen vorliegt, und daß die Wandstromlinien im besonderen damit definiert sind, daß die Stromfunktion längs der Wandstromlinien den Wert null besitzt. Im ebenen Fall können Wandstromlinien mit Hilfe dieser Definition bestimmt werden.

Im vorliegenden räumlichen Fall fehlt die mathematische Definition der Wandstromlinien. An ihrer Stelle wird die

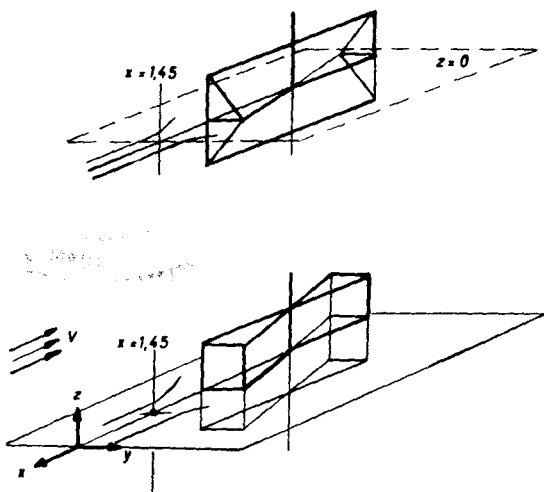


Bild 6

physikalische Vorstellung ausgenutzt, daß die Wandstromlinien in der parallelen Anströmung genügend weit vor dem Körper einer ebenen, vertikalen Stromlinienschicht angehören, die um einen kleinen y -Abstand θ entfernt von der xz -Ebene und parallel zu dieser verläuft.

Die räumliche Verformung dieser Schicht wurde untersucht, die Stromlinien dieser Schicht als Wandstromlinien der Körper betrachtet (vergl. Bild 6).

Die Voraussetzungen zu ihrer Berechnung erschienen in den Ergebnissen der Integrationen zu den Geschwindigkeiten im xyz -Raum als vollständig gegeben. Fraglich war nur, ob die numerische Auswertung der Integrationen

$$\begin{aligned}
x(s) &= x_0 + \int_{s_0}^s \Psi_x(s) ds \\
y(s) &= y_0 + \int_{s_0}^s \Psi_y(s) ds \\
z(s) &= z_0 + \int_{s_0}^s \Psi_z(s) ds
\end{aligned} \quad (59)$$

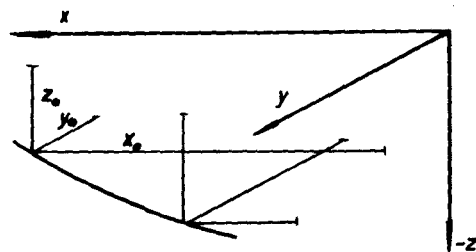


Bild 7

— mit

$$\begin{aligned}
s &\equiv \text{Bogenlänge als unabhängige Variable,} \\
ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \equiv \text{Bogenelement,} \\
&\text{zugehörig zur Stromlinie, die im Anfangspunkt} \\
&\text{(} x_0, y_0, z_0 \text{) getroffen ist —}
\end{aligned}$$

mit Hilfe der Runge-Kutta-Formeln in Bereichen großer Geschwindigkeitsänderungen mit genügend kleinem Fehler erfolgen konnte; praktisch: ob im Bereich des Stevens, in dem große Geschwindigkeitsänderungen zu kleinen Lauflängen einer Stromlinie gehören, die durch den Anfangspunkt verlaufende Stromlinie verfolgt werden konnte oder ob in diesem Bereich infolge Fehlern der numerischen Integration ein „Springen“ auf benachbarte Stromlinien auftritt.

Die benutzten Runge-Kutta-Formeln lauten:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \varepsilon_0 + (h/2) u_0 \\
\varepsilon_2 &= \varepsilon_0 + (h/2) u_1 \\
\varepsilon_3 &= \varepsilon_0 + h u_2 \\
\varepsilon_4 &= \varepsilon_0 + (h/6) (u_0 + 2 u_1 + 2 u_2 + u_3)
\end{aligned} \quad (60)$$

Wandstromlinien

Quellparameter: $a = 0,8$
 $b = 5,0$
 $(b \cdot K = 1,0)$

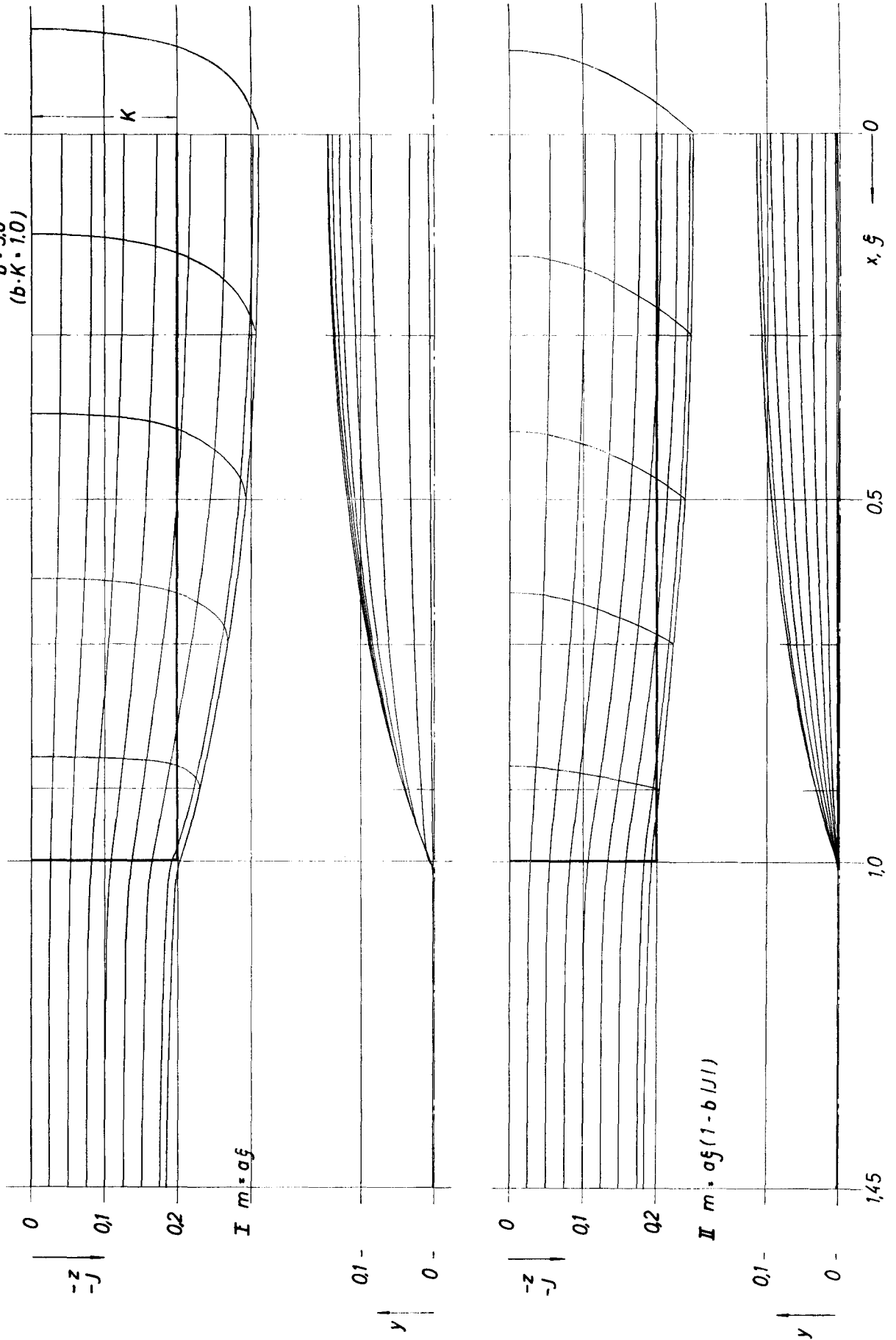
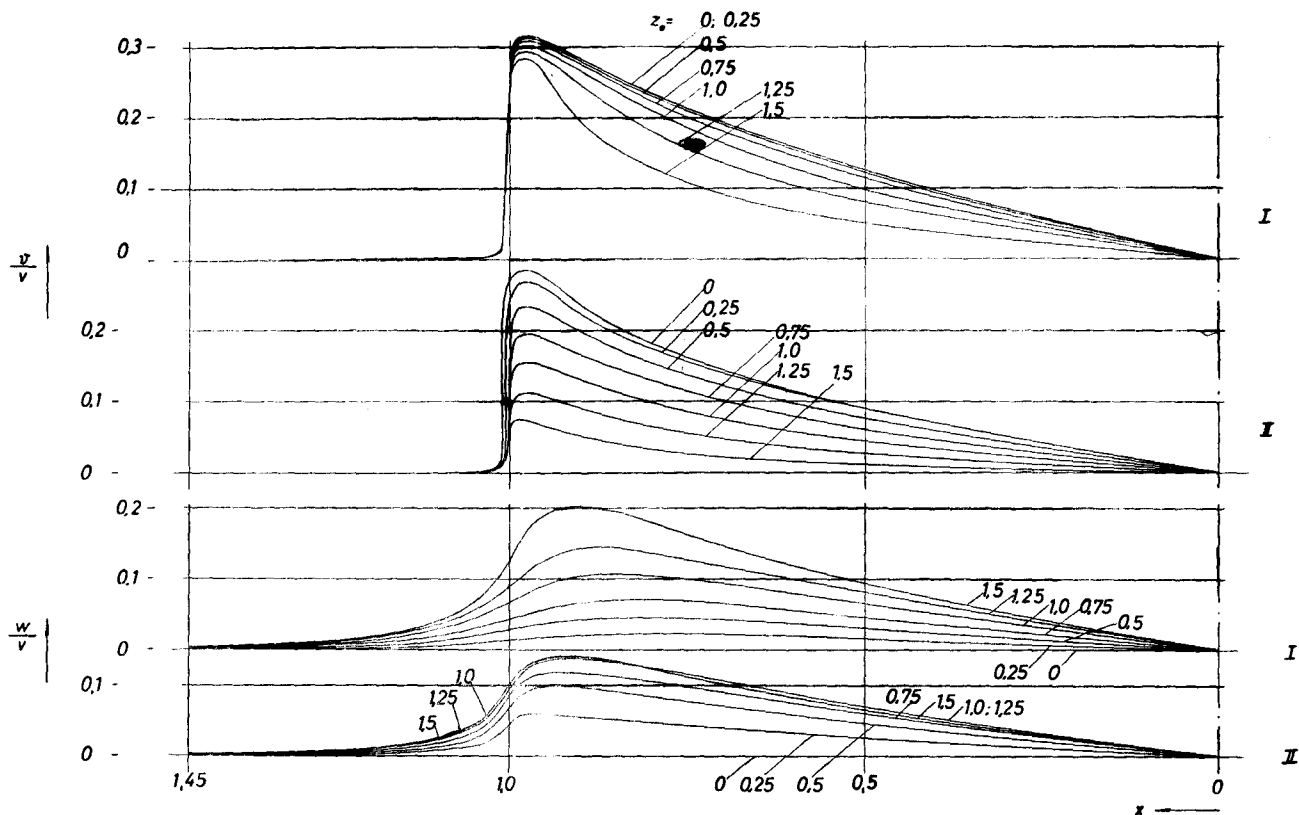


Bild 8

Geschwindigkeitsverlauf



Geschwindigkeitsverlauf

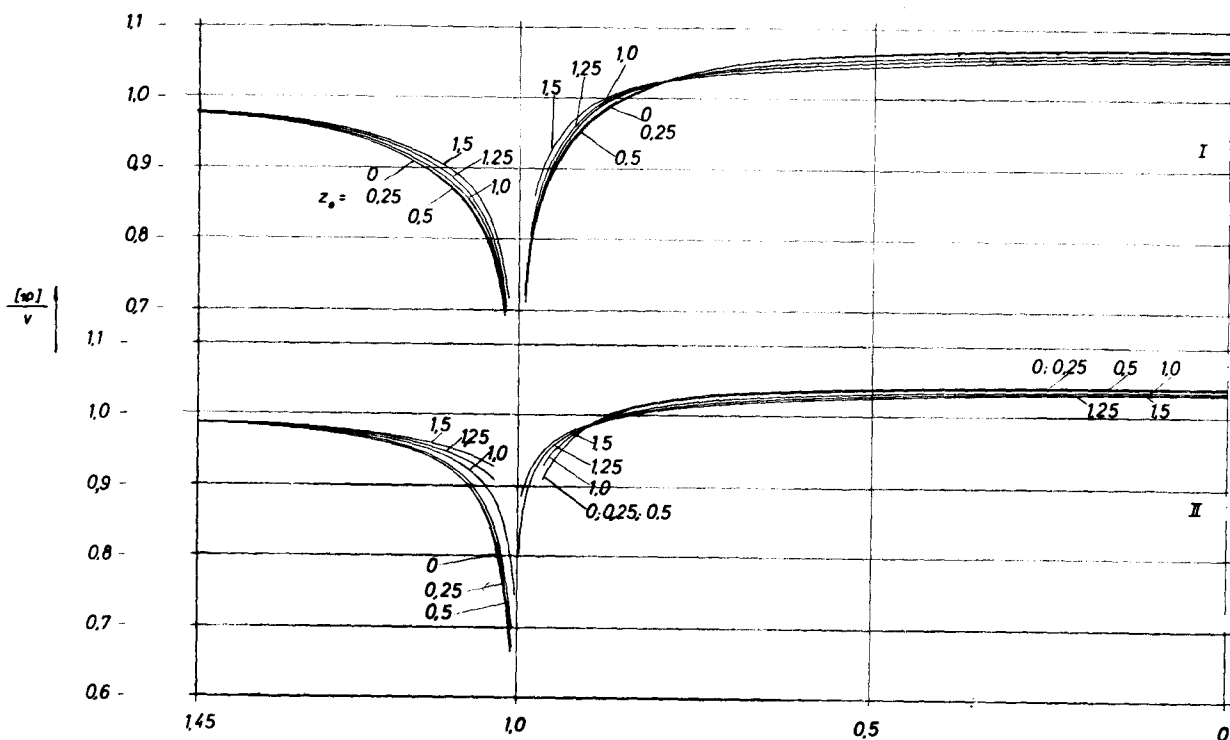


Bild 9

mit $\xi = \{x, y, z\}$
 $u = \{u, v, w\}$
 $h \equiv$ Schrittweite für Runge-Kutta-Schritt
 $\xi_4 \equiv$ Integrationsergebnis; gibt Anfangskordinaten für neuen Schritt.

3er Veränderlicher) des vorliegenden Falls wurde zunächst übergangen. Die Integrationen wurden nach (60) ausgeführt unter der Annahme, daß die Fehler klein genug bleiben, wenn die Schrittweite im Bereich des Stevens hinreichend klein gewählt wird. Dieses ist naheliegend gegenüber dem Umstand, daß die Runge-Kutta-Formeln mit Hilfe der Simpsonschen Regel aufgebaut sind.

Eine Genauigkeitsuntersuchung zu den Runge-Kutta-Formeln (Anwendung einer Taylor-Entwicklung für Funktionen

Im Hinblick auf die Rechenzeit des Automaten beim Durchlauf des Rechenprogrammes brauchte auf den numerischen Rechenaufwand ohnehin nicht Rücksicht genommen werden. Der Rechenautomat gestattete im Gegenteil ein Experimentieren mit den Schrittweiten.

Diskussion der Ergebnisse

Die Parameter der untersuchten beiden Quellverteilungen waren gewählt mit

$$\begin{aligned} a &= 0,8 && \text{für Verteilung I} \\ a &= 0,8 && \text{für Verteilung II} \\ b &= 5,0 && \end{aligned}$$

Die Ergebnisse sind unabhängig vom Betrag V der — kleinen — Anströmungsgeschwindigkeit.

Die Ergebnisse für Verteilung I können mit den Ergebnissen in [1] verglichen werden; dort ist der gleiche Umströmungskörper berechnet worden. Das Rechteck-Feld war wie in [1] in

$$\begin{aligned} -1 &\leq \xi \leq +1 \\ -0,2 &\leq \zeta \leq +0,2 \end{aligned}$$

gelegen, so daß für Verteilung II diejenige mit $bk = 1,0$ — vgl. (47) — behandelt wurde. Die Wahl der Quellparameter stellt die Verteilung I und die Verteilung II in einem ausgezeichneten Vergleichsfall gegenüber: Quellverteilung II fördert in diesem Fall gegenüber Verteilung I genau das halbe Quellvolumen. Hierzu wird später eine Ergänzung angegeben.

Die Folge der Schrittweiten h

$$0,2 \quad 0,2 \quad 0,03 \quad 0,04 \quad 0,05 \quad 0,1 \quad 0,2 \quad 0,2 \quad 0,2 \quad \dots$$

ausgehend von

$$x_0 = 1,45,$$

wurde zunächst einmal für alle berechneten, durchlaufenden Stromlinien eingehalten. Eine kleinere Teilung der Schrittweiten wurde nur angewendet bei der Untersuchung der Umgebung des Stevens und zur Auffindung der Kiellinie.

Mit diesen Eingabezahlen für die Rechanlage, zu denen noch die Anfangskordinaten y_0 und z_0 hinzukommen, wurden einige Serien von Rechnungen ausgeführt mit dem Ziel, zu vorn angegebenem Konzept praktisches Ergebnismaterial zu erhalten.

Die Ergebnisse der Berechnung sind:

- die Koordinaten x, y, z der Stromlinien,
- die Komponenten u, v, w der räumlichen Geschwindigkeiten,
- der Betrag der jeweiligen räumlichen Geschwindigkeit.

Die Bilder 8 und 9 zeigen die Ergebnisse zu den Wandstromlinien. Es wurde für beide Verteilungen jeweils mit dem gleichen Anfangswert die Verfolgung einer Stromlinie begonnen, so daß im Ergebnis die Verhältnisse der untersuchten beiden Umströmungskörper nebeneinandergestellt sind.

Die Diskussion der Ergebnisse wird an Hand von Stichwort-Überschriften vorgenommen.

Anfangskordinaten

Die x_0 -Koordinate war einheitlich mit $x_0 = 1,45$ gewählt.

Die y_0 -Koordinate war in einem ersten Satz Rechnungen mit $\frac{5}{1000}$ eingesetzt. Die Ergebnisse liegen in Zahlen und Zeichnungen vor (nicht veröffentlicht). Die y_0 -Koordinate wurde anschließend mit $\frac{1}{1000}$ zum Rechnungsausgang genommen. Dies geschah in einem zweiten ausführlichen Satz von Rechnungen.

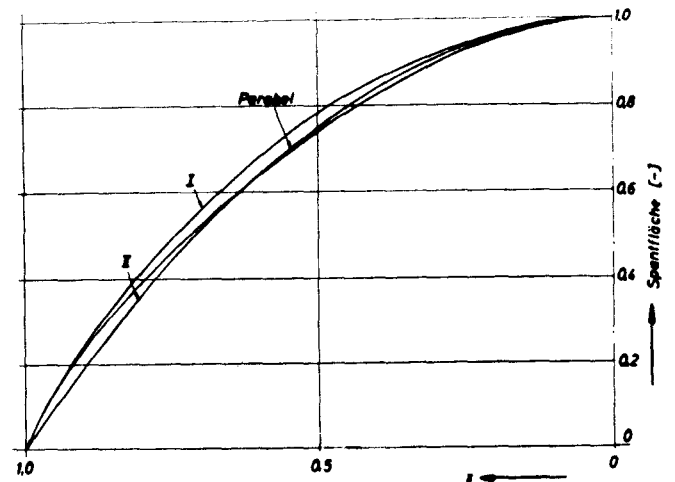


Bild 10 Spantflächenkurven

Die Ergebnisse sind zur Darstellung der Körperform herangezogen worden so, als wäre die in der Anströmung der Ebene $y_0 = \frac{1}{1000}$ zugehörige Stromliniensicht im Bereich des Körpers die Wandstromliniensicht.

Zur ausreichenden Beschreibung des Körpers wurde eine Anzahl von z_0 -Koordinaten vorgesehen:

Für Stromlinien, verlaufend im Bereich oberhalb des Kiels, in äquidistanter Lage,
für Stromlinien, verlaufend im Kielbereich, in kleinerer Differenz.

Für $z_0 = 0$ ergab sich die Wandstromlinie in der xy -Ebene; in [1] und [2] ist sie mit CWL bezeichnet.

Für $y_0 = 0$ sollte sich die Kielkontur ergeben. Eine dazu in kleiner Tiefe begonnene Stromlinie lief jedoch in beiden Fällen I und II mit $y = 0$ durch die Quellverteilungen hindurch. Eine in größerer Tiefe begonnene Stromlinie lief ebenfalls durch die Quellverteilungen und innerhalb der Quellsenkenströmung in der xz -Ebene. Aus Zeitgründen wurde die Auffindung der Kiellinien über $y_0 = 0$ nicht weiter verfolgt. Sie wird sicherlich möglich sein, indem man mit den z_0 -Werten von unten kommt und die z -Koordinaten der Linien vergleicht mit den Koordinaten von Wandstromlinien in der Nachbarschaft des Kiels.

Genauigkeit des Rechners

Der Rechenautomat kommt nicht ohne Abrundungsfehler aus. Er arbeitet mit Zahlen in Gleitkomma-Darstellung; d. h. unabhängig von der Größenordnung wird jede während der Rechnung gebildete Zahl mit 8 Ziffern für die weitere Rechnung bereitgestellt bzw. schließlich als Ergebnis ausgegeben. In der letzten Ziffer ist eine Abrundungs-Eins enthalten, wenn die nachfolgenden Dezimalen mit 5 begannen. Die Größenordnung der mit 8 Ziffern angegebenen Zahl wird durch eine angehängte zweistellige Charakteristik bestimmt. Die 1 ist dargestellt als 10 000 000 51, 10^{-1} als 10 000 000 50, 10^{+1} als 10 000 000 52.

Das Auftreten der Abrundungsfehler zeigt sich deutlich in den z -Koordinaten für die CWL. Der Ergebnis-Schrieb wird deshalb und gleichzeitig zur Information über Form und Umfang eines Automatenresultates angegeben.

Für Verteilung I weichen die z -Koordinaten um $\pm 10^{-9}$ vom Null-Wert ab, für Verteilung II um $\pm 10^{-6}$.

Die unterschiedliche Größenordnung erklärt sich aus der ungleich größeren Anzahl der Summanden im Ausdruck für das bestimmte Geschwindigkeits-Integral, der dem Automaten

Ergebnis-Schrieb für Symmetrie-Stromlinien
* Anfangskordinaten

Schiff I	x	y	z	u	v	w	$\frac{ b }{v}$	Schritt- index
1	14500000051	10000000048	5738947041	9775094050	3949963646	1847923441	9775094050	1
2	1256614651	1014833048	5738947041	9517393050	13313224347	3472810143	9517393050	2
3	1074083951	1101818848	5738947041	8461510050	1184276348	3685266843	8461510050	3
4	1049313951	1149642948	5738947041	8021549050	2141401248	4005466844	8021549050	4
5	1019118951	1310787548	4253546541	6924305050	7577052448	5541682144	6924305050	5
6	9907651050	6523078248	4253546541	6380283050	31162229750	3688986645	7100626750	6
7	9092299850	3692956349	4253546541	9167360050	2868109150	1441180845	9605547350	7
8	7120565050	8523145649	4253546541	1027702051	1980586350	2555148245	1046612951	8
9	5930406850	1173776350	4253546541	1057368551	1262499250	3899374645	1062690851	9
10	2902800550	1366918950	4130419841	1068554251	6245467049	3612917145	1070744651	10
11	7608888049	1452151350	4332404040	1072496151	1745102349	5180014244	1072638151	11
Schiff II								
1	14500000051	10000000048	5414915042	9884304450	2032914046	3472810143	9884304450	1
2	1253485051	1007866648	4654047041	9738658350	7271151046	3685266843	9738658350	2
3	1064226851	1067951348	4654047041	8920971950	9457670047	4005466844	8920976950	3
4	1038107651	1110632498	1637036542	84430713150	2127884448	5541682144	8443099950	4
5	1007178251	1395213848	9897293842	6604364650	2082588949	3688986645	6607647450	5
6	9704560050	1431380449	8981901443	8447199550	2849509950	1441180845	8914868850	6
7	8778824150	3948933249	2783894644	9733559950	2209004450	2555148245	9914868850	7
8	6768964450	7442643549	9516972344	10235514651	1366246750	3899374645	10325593051	8
9	4706649450	9616223849	1723330845	1026505551	8282108049	3612917145	1039978951	9
10	2627699150	1087620850	2326772945	1041602551	436989949	2306157145	1042518851	10
11	5423883049	1139831850	2613563645	10433302151	87768853048	5180014244	1043339051	11

zur Auswertung übergeben ist: Für eine w-Geschwindigkeit zur Verteilung I werden 4 natürliche Logarithmen und 4 Quadratwurzeln berechnet. Ihre Summe soll in der xy-Ebene exakt null ergeben. Für eine w-Geschwindigkeit zur Verteilung II werden 12 natürliche Logarithmen, 6 arctg-Werte und 6 Quadratwurzeln berechnet.

In diesem Zusammenhang muß in den Geschwindigkeitswerten u, v, w für beliebige Raumpunkte mit Fehlern (\pm Abweichungen vom exakten Wert) einer Größenordnung bis zu 10^{-5} gerechnet werden. Es ist dieses eine Schätzung nach den Erfahrungen mit der CWL zur Verteilung II.

Stromlinienverlauf

Die praktische Kontrolle, aus dem Wandstromlinien-Verlauf Spantkonturen zu zeichnen, verlief ohne ein „Drücken“ der bereits gezeichneten Stromlinien und lieferte somit ohne bewußt begangene Abweichung von den Ergebniszahlen der Stromlinien das angegebene zeichnerische Ergebnis.

Bei der Wiederaufnahme der Rechnungen sollten die Runge-Kutta-Formeln statt nach der Bogenlänge s für die x-Ordinate angewendet werden; d. h. die Schrittweiten sollten in x-Einheiten gewählt werden. Im Ergebnis werden dann die Stromlinien-Koordinaten in den Spantebenen ausgegeben, die mit den x-Schrittweiten fest gewählt sind. Die Spantkonturen sind mit diesen Aufmaßen unmittelbar bestimmt, während sie jetzt aus dem Strak der Stromlinien genommen sind.

Der aufgefundene Stromlinienverlauf wird wie folgt angewendet bzw. bewertet:

a) Die Maximal-Aufmaße der Linien in der xy-Ebene und der der Mittschiffsebene benachbarten, gerechneten Stromlinien als Näherung für die Kielkonturen werden als „Schiffsabmessungen“ zusammengestellt:

Breite	B/2 =	0,14522	I
		0,11398	II
Tiefgang	T =	0,31236	I
		≈ 0,252	II
Länge	L/2 ≈	1,0	I, II

Als Verhältniswerte (mit L/2 = 1,0 und T = 0,252) ergeben sich

B/T =	0,9298	I
	0,9046	II
L/B =	6,8861	I
	8,7735	II
L/T =	6,4029	I
	7,9365	II

b) In den Linienrissen wird planimetriert. Es werden die Spantflächenkurven angegeben (Bild 10).

Als Schiffsverdrängungen ergeben sich:

$$V_I = 0,1007 \cdot (L/2)^3$$

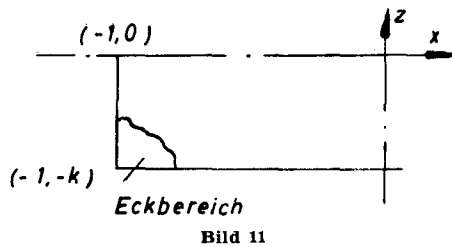
$$V_{II} = 0,0512 \cdot (L/2)^3$$

Als Verhältniswerte ergeben sich:

$\alpha =$	0,7197	I
	0,7220	II
$\beta =$	0,8010	I
	0,6739	II
$\delta =$	0,5545	I
	0,4454	II
$\bar{\varphi} =$	0,6923	I
	0,6610	II

c) Im Bereich des Stevens ist für Verteilung I deutlich ein Bugwulst herausgekommen. Im Zusammenhang der Verteilung der Quellen im Falle I wird seine Existenz physikalisch so verstanden:

Mit zunehmender Quellstärke im „Eckbereich“ der Verteilung würde der Wulst sich aufblähen, mit abnehmender Stärke schrumpfen.



Die Vorstellung deckt sich mit dem Rechnungsergebnis, daß für Verteilung II kein Wulst erkennbar ist.

Das Ergebnis bezüglich des Wulstes spricht für die relative Genauigkeit der numerischen Integrationen.

Verdrängung, scheinbare Masse

Nach G. J. Taylor [3] liefert das Integral

$$\int_{x_1}^{x_2} m(x) x dx, \quad (61)$$

ausgeführt über die Quell-Senken-Strecke $m(x)$, eine Volumengröße, die die Summe des vom Umströmungskörper verdrängten Volumens ∇ und des der hydrodynamischen Masse in x -Richtung entsprechenden Volumens $k_x \nabla$ darstellt.

Eine Quell-Senken-Strecke ersetzt bekanntlich einen Rotationskörper; beispielsweise ersetzt die Strecke $m(x) = a_1 x$, in den Grenzen -1 bis $+1$ für x , ein Rotationsellipsoid.

Es wurde eine Anwendung von (61) gemacht. Die flächenhafte Rechteck-Verteilung in

$$\begin{aligned} -1 \leq \xi \leq +1 \\ -k \leq \zeta \leq +k \end{aligned}$$

ist aufzufassen als Nebeneinander-Lagerung von Quell-Senken-Strecken $m(x, z = \text{konst.})$ mit der infinitesimalen Aufweitung $d\zeta$ in Tiefenrichtung.

Die Summenausdrücke $(1 + k_x) \nabla$ lauten

$$\nabla_I (1 + k_{xI}) = \int_{-k}^0 \int_{-1}^{+1} a \xi^2 d\xi d\zeta \quad (62)$$

$$\nabla_{II} (1 + k_{xII}) = \int_{-k}^0 \int_{-1}^{+1} a \xi^2 (1 - b\zeta) d\xi d\zeta, \quad (63)$$

angeschrieben für den unteren Halbraum der behandelten beiden Strömungen.

Die Auswertung liefert, mit $L/2$ an Stelle von $\xi = 1$ als Integrationsgrenze

$$\nabla_I (1 + k_{xI}) = \frac{2}{3} ak (L/2)^3 = 0,10667 (L/2)^3 \quad (64)$$

$$\nabla_{II} (1 + k_{xII}) = \nabla_I (1 + k_{xI}) [1 - bk/2] \quad (65)$$

Wegen $bk = 1,0$ im behandelten Beispiel II gilt für die untersuchten Strömungen

$$\nabla_{II} (1 + k_{xII}) = \frac{1}{2} \nabla_I (1 + k_{xI}) = 0,05334 (L/2)^3 \quad (66)$$

Das Ergebnis (66) ergänzt die vorn gemachte Angabe zur Gesamtförderung der Verteilungen in einer wesentlichen Aussage:

Verteilung II besitzt im behandelten Beispiel gegenüber Verteilung I genau das halbe statische Moment der Quellbelegung bezüglich der Ebene $x = 0$ (Hauptspant-Ebene).

Im folgenden werden eine Gegenüberstellung der Ergebniszahlen und ein Vergleich mit Werten an umströmten Ellipsoiden gebracht:

$(1 + k_x) \nabla$	∇	$\frac{ v }{v} \text{ CWL}, \otimes$	$\frac{ v }{v} \text{ Kiel}, \otimes$	$1 + k_x$	$(1 + k_x) \text{ Ell.}$
I 0,10667	0,1007	1,0726	1,0514	1,05899	1,064
II 0,05334	0,0512	1,043	1,0301	1,04114	1,0007
$\cdot \left(\frac{L}{2}\right)^3$	$\cdot \left(\frac{L}{2}\right)^3$	[—]	[—]	[—]	[—]

Die Annäherung der k_x -Werte an diejenigen der bezüglich der Hauptspantfläche und des Achsverhältnisses korrespondierenden Ellipsoide erklärt sich mit der Annäherung der Spantflächen-Verteilung der Körper an die parabolische Verteilung der Ellipsoide.

Geschwindigkeits- und Druckverlauf

Der Geschwindigkeitsverlauf wurde ausführlich graphisch dargestellt an Hand der Ergebniszahlen (Bild 9).

Ins Auge fällt, daß die Rechnung den Abfall der x -Geschwindigkeiten in der Umgebung der Staupunkte bzw. im Bereich der Steven in sauberem Kurvenverlauf bestimmt. Das Ergebnis kann als ein Kriterium für die Güte der numerischen Rechnung angesehen werden.

Der Staupunkt-Einfluß im Falle II ist weniger weit wirksam nach stromauf verglichen mit Fall I. Dafür erfolgte der Abfall der Geschwindigkeit im Fall II steiler.

Weiter ist der steile Anstieg der y -Geschwindigkeit in der Umgebung des Staupunkts bzw. Stevens auffällig.

Nach den Ergebniszahlen für die Wandstromlinien in der CWL liegt der Staupunkt für den Umströmungskörper I bzw.

II jeweils in einem x -Abstand von der Größe $\frac{1}{1000}$ bis $\frac{2}{1000}$ vor $x = 1,0$.

Der Druckverlauf ergibt sich aus bekannter Beziehung zwischen Geschwindigkeit und Druck zu

$$\frac{\Delta p^*}{q} = 1 - \left(\frac{|v|}{v}\right)^2, \quad q = \frac{\rho}{2} v^2 \quad (67)$$

(67) ist angeschrieben für den dynamischen Druckanteil p^* , der allein längs der Stromlinien Änderungen erfährt. Der Verlauf von $\frac{|v|}{v}$ ist in den Zeichnungen dargestellt.

Das Integral über die x - bzw. y -Komponenten der dynamischen Drücke an den Wandelementen der Umströmungskörper verschwindet nach Voraussetzungen (Symmetriebedingungen, verschwindende Wellenhöhen).

Das Integral über die z -Komponenten verschwindet bei Betrachtung des Doppelkörpers.

Rechenprogramm, Rechenzeit

Das Programm enthält

- 120 Instruktionen für Runge-Kutta-Integrationen,
- 483 Instruktionen zur Berechnung der Geschwindigkeiten.

Die Speicherkapazität der Anlage (2000 Worte) war mit ca. 1000 Worten ausgenutzt. Sie verteilen sich auf Anschriften und Folgeadressen des Hauptprogramms sowie auf Speicherplätze für die Unterprogramme aus der Programm-Bibliothek der Rechenanlage (\sqrt{x} , $\ln x$, $\arctg x$).

Die Berechnung einer Stromlinie in 11 Schritten erledigt der Rechenautomat in ungefähr 6 Minuten.

(Eingegangen am 1. Juni 1960)

Schrifttum

- [1] Inui: "A New Theory of Wave-Making Resistance, Based on the Exakt Conditions on the Surface of Ships." Journal of Zosen Kyokai, Tokyo, Bd. 82.
- [2] K. Eggers und W. Wetterling: „Über die Ermittlung der schiffsähnlichen Umströmungskörper vorgegebener Quell-Senken-Verteilungen mit Hilfe elektronischer Rechenmaschinen.“ Schiffstechnik, Bd. 4, 1957, Heft 24.
- [3] G. J. Taylor: "The Energy of a Body moving in an Infinite Fluid, with an Application to Airships." Proceedings of the Royal Society, Serie A, London, 1928, Bd. 120.
- [4] Hildebrand: Introduction to Numerical Analysis McGrawhill 1956.