

# **Vergleich numerischer Analyse- und Diskretisierungsverfahren für instabilitätsgefährdete Schalenträgerwerke**

**Timon Burgwedel, Jürgen Priebe, Bastian Oesterle**

*Institut für Baustatik, Technische Universität Hamburg*

**Zusammenfassung:** Numerische Stabilitätsanalysen dünner Schalenträgerwerke sind anspruchsvoll und rechenintensiv. Die Wahl geeigneter Imperfektionen ist nach EC3 nicht eindeutig geregelt und fehleranfällig. Der vorliegende Beitrag diskutiert den Einfluss eigenformaffiner Imperfektionen auf die numerische Traglast von Schalenträgerwerken. Zudem werden unterschiedliche Analyse- und Diskretisierungsverfahren hinsichtlich Genauigkeit und Effizienz verglichen. Im vorliegenden Beitrag werden Zwischenergebnisse aus umfangreichen, systematischen numerischen Konvergenz- und Parameterstudien vorgestellt und diskutiert.

## **1 Einleitung**

Trotz stetiger Fortschritte im Bereich der computerorientierten Mechanik stellt die Computersimulation des Verhaltens dünnwandiger Strukturen, wie beispielsweise Schalen oder Membranen, eine anspruchsvolle Aufgabe dar. In diesem Kontext hat die Finite-Elemente-Methode (FEM) als Diskretisierungsverfahren eine herausragende Bedeutung. In den letzten zwei Jahrzehnten hat jedoch die Popularität neuartiger Diskretisierungsverfahren unter Verwendung glatter Ansatzräume stetig zugenommen. Ein bekanntes Beispiel ist die isogeometrische Analyse (IGA) [3] dar, die bereits in ersten kommerziellen FE-Programmen verfügbar ist und für die Simulation von Schalen [4] gegenüber der FEM bestimmte Vorteile hat.

Schlanke Trägerwerke sind instabilitätsgefährdet und die numerische Ermittlung korrekter Beulformen und Beulmuster ist rechenintensiv und nicht trivial. Je nach Schalenformulierung und Elementtechnologie können sehr feine Diskretisierungen nötig sein, um die korrekten Beulmuster zu identifizieren. In [7] wurden klassische Vorbeulanalysen (VBAs) unter Verwendung sowohl der IGA als auch der FEM durchgeführt und analysiert. Bei bestimmten Problemstellungen bieten isogeometrische Schalenelemente eine höhere Genauigkeit als gewöhnliche finite Schalenelemente, da sie nur einen Bruchteil der Freiheitsgrade (FHG) für die

gleiche Genauigkeit benötigen. Die klassische Vorbeulanalyse ist eine Methode zur Ermittlung des idealen Beulwiderstands einer Schale und liefert eine erste Schätzung des kritischen Lastniveaus. Zur realitätsnahen Abschätzung der Traglast eines Schalentragswerks sind geometrisch und ggf. materiell nichtlineare Effekte zu berücksichtigen und geeignete Imperfektionen anzusetzen. Nach EC3 stehen zur Abbildung geometrischer Imperfektionen mehrere Möglichkeiten zur Verfügung, [1, 9], wobei eigenformaffine Imperfektionen am gebräuchlichsten sind, da die tatsächlichen Imperfektionen zum Zeitpunkt der Planung i.d.R. unbekannt sind.

Im vorliegenden Beitrag werden Zwischenergebnisse aus umfangreichen numerischen Konvergenz- und Parameterstudien unter Verwendung unterschiedlicher FE-Software und darin enthaltener finiter Schalenelemente vorgestellt. Es wird analysiert, wie schnell unterschiedliche Schalenelemente zur zu erwartenden kritischen Beulform im Rahmen klassischer Vorbeulanalysen konvergieren. Desweiteren werden die Einflüsse von Netzfeinheit und Qualität der ermittelten Beulformen auf die numerische Traglast in nichtlinearen Analysen untersucht.

## 2 Statische Stabilität

Der statische Gleichgewichtspfad beschreibt den Ort aller Punkte in einem abstrakten Raum, aufgespannt durch den Lastfaktor  $\lambda$  und den Vektor  $\mathbf{D}$  der Freiheitsgrade, für welche die internen Kräfte  $\mathbf{F}_{\text{int}}$  und die externen Kräfte  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  im statischen Gleichgewicht stehen:

$$\mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{D}) = \mathbf{F}_{\text{ext}}(\lambda) = \lambda \mathbf{F}_0. \quad (1)$$

Diese Notation bezieht sich auf diskrete Systeme unter Vernachlässigung verschiebungsabhängiger Lasten. Eine alternative Schreibweise für das statische Gleichgewicht ist

$$\mathbf{R}(\mathbf{D}, \lambda) = \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{D}) - \mathbf{F}_{\text{ext}}(\lambda) = \mathbf{0}, \quad (2)$$

wonach der Residuumvektor verschwindet. Die Stabilitätseigenschaften werden maßgeblich von der Steifigkeit einer Struktur beeinflusst. Die Tangentensteifigkeit  $\mathbf{K}_T$  ist definiert durch die Richtungsableitung von  $\mathbf{R}$  nach dem Verschiebungsvektor  $\mathbf{D}$ . Im Fall von verschiebungsunabhängigen Lasten ist die Ableitung von  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  nach  $\mathbf{D}$  null und es gilt:

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{D}} = \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{D}}. \quad (3)$$

An kritischen Punkten ist  $\mathbf{K}_T$  singular, das bedeutet ihre Determinante ist null:

$$|\mathbf{K}_T| = 0. \quad (4)$$

Bei nichtlinearen Problemen werden Gleichgewichtspfade i.d.R. inkrementell-iterativ nachverfolgt. Je nach Eigenschaften der nichtlinearen Gleichgewichtspfade können verschiedene Pfadverfolgungsmethoden verwendet werden, die sich hauptsächlich in der zu steuernden Größe und der zugehörigen Nebenbedingung unterscheiden. Während beispielsweise ein Bogenlängenverfahren prinzipiell jeden beliebigen Pfad nachverfolgen kann, versagen andere Verfahren wie Last- und Verschiebungssteuerung an bestimmten Punkten.

Einige Stabilitätsprobleme lassen vereinfachte Lösungsstrategien wie eine VBA zu, um kritische Punkte näherungsweise zu bestimmen. Durch Lösen eines verallgemeinerten linearen Eigenwertproblems lassen sich die Lastfaktoren und die zugehörigen Beulformen vorhersagen. Als Grundlage dient die Zerlegung der Tangentensteifigkeitsmatrix in

$$\mathbf{K}_T = \underbrace{\mathbf{K}_e}_{\text{linear}} + \underbrace{\mathbf{K}_u + \mathbf{K}_g}_{\text{nichtlinear}}, \quad (5)$$

wobei  $\mathbf{K}_e$  die lineare elastische Steifigkeitsmatrix,  $\mathbf{K}_u$  die Anfangsverschiebungssteifigkeitsmatrix und  $\mathbf{K}_g$  die geometrische Steifigkeitsmatrix ist. Unter der Annahme, dass die nichtlinearen Anteile von  $\mathbf{K}_T$  näherungsweise linear von der Last, dargestellt durch den Lastfaktor  $\lambda$ , abhängen, lässt sich nach einer Reihenentwicklung die Bedingung für kritische Punkte, Gl. (4), als generalisiertes Eigenwertproblem der Form

$$(\mathbf{K}_e + \lambda (\mathbf{K}_u^{\text{LIN}} + \mathbf{K}_g^{\text{LIN}})) \Phi = \mathbf{0}. \quad (6)$$

darstellen, wobei der Kopfzeiger „LIN“ linearisierte Größen kennzeichnet. Durch Vernachlässigung von  $\mathbf{K}_u$  ergibt sich

$$(\mathbf{K}_e + \lambda \mathbf{K}_g^{\text{LIN}}) \Phi = \mathbf{0}. \quad (7)$$

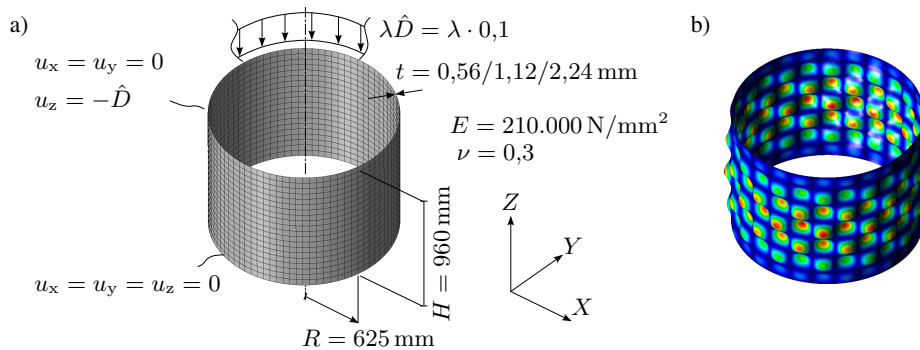
Der kleinste Eigenwert der Lösung von Gl. (6) bzw. (7) entspricht einer Näherung des kritischen Lastfaktors  $\lambda_{\text{krit}}$ . Der zugehörige Eigenvektor  $\Phi_{\text{krit}}$  stellt die kritische Beulform dar. In der Literatur wird Gl. (6) als lineare Vorbeulanalyse und Gl. (7) als klassische Vorbeulanalyse bezeichnet. Häufig wird auch die lineare elastische Verzweigungsberechnung oder die lineare Beulanalyse (LBA) [1] genannt. In kommerziellen FE-Programmen, wie z. B. Ansys, ist i.d.R. die klassische VBA, Gl. (7), implementiert. Die Anwendbarkeit einer VBA hängt davon ab, wie gut die Annahme einer linearen Abhängigkeit von Steifigkeit und Last erfüllt ist. Dies ist i.d.R. bei Verzweigungsproblemen der Fall, selten bei Durchschlagsproblemen.

Nach EC3 werden nichtlineare Verfahren zur Stabilitätsuntersuchung nach der Berücksichtigung geometrischer und materieller Nichtlinearitäten unterschieden [9]. Zur Abbildung geometrischer Imperfektionen stehen mehrere Möglichkeiten zur Verfügung [1], wobei eigenformaffine Imperfektionen (aus einer VBA/LBA) typisch sind, da zum Zeitpunkt der Planung i.d.R. keine Informationen über die tatsächlichen Imperfektionen vorliegen.

## 3 Numerische Untersuchungen

### 3.1 Übersicht

Im vorliegenden Beitrag werden Zwischenergebnisse aus umfangreichen numerischen Untersuchungen vorgestellt. Die dargestellten Ergebnisse beschränken sich unversteifte Zylinder unter Axialdruck, siehe Abb. 1. Die Materialparameter und die Abmessungen des Zylinders „1100-AL“ sind aus [5] entnommen. Um die Schlankheit  $R/t$  zu variieren, wird die Schalendicke  $t = 0,56 \text{ mm}$  auch verdoppelt ( $t = 1,12 \text{ mm}$ ) und vervierfacht ( $t = 2,24 \text{ mm}$ ). Der Axialdruck wird durch inhomogene Verschiebungsrandbedingungen  $\hat{D}$  realisiert. Analytische Lösungen sind für diesen Sonderfall in [2] zu finden. Es werden diverse

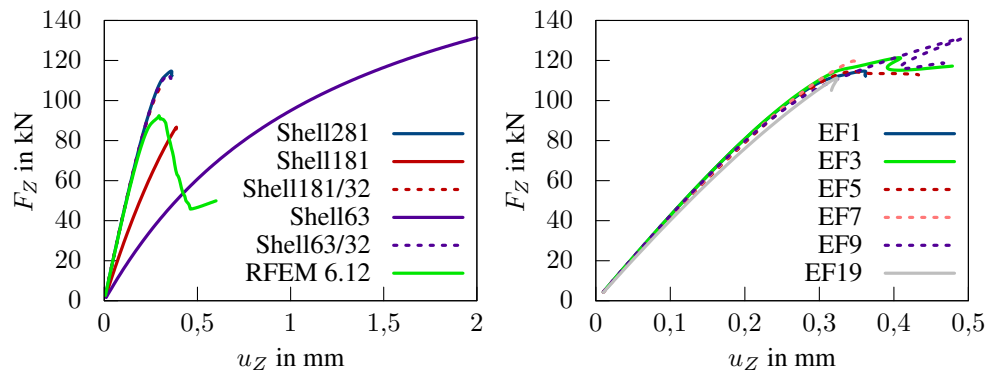


**Abbildung 1:** Zylinderschale unter Axialdruck, a) Problembeschreibung, b) typisches, zu erwartendes „Schachbrettmuster“ als erste Eigenform.

finite Schalenelemente aus Ansys und RFEM genutzt. Es handelt es sich sowohl um Reissner-Mindlin(RM)-Schalenelemente (Shell181, Shell281), als auch Kirchhoff-Love(KL)-Elemente (Shell63). Wenn abweichend zur Standardeinstellung eine Key-Option ausgewählt wird, ist dies gekennzeichnet. Z. B. bezeichnet 181/32 das Element 181 mit Key-Option 3 mit dem Wert 2, was in diesem Fall einer vollen Integration und der Methode der inkompatiblen Moden entspricht. In RFEM wird das RM-Element der Version 6.12 genutzt. Als Analysearten kommen VBAs und geometrisch (und materiell) nichtlineare imperfekte Analysen (G(M)NIA) zum Einsatz. Je nach Verfügbarkeit wird eine Bogenlängenkontrolle (Ansys) oder eine Verschiebungskontrolle (RFEM) genutzt.

### 3.2 Vorbeulanalysen

Eine Auswahl an Ergebnissen aus VBAs ist in Tab. 1 und 2 dargestellt. Da die Eigenwerte in der Regel relativ schnell zu einem niedrigen Fehlerniveau konvergieren, werden diese aus Platzgründen nicht dargestellt. Wie in [7] gezeigt, wird aber die korrekte Reihenfolge der Beuleigenformen unter Umständen erst für sehr feine Diskretisierungen erreicht. In Tab. 1 und 2 sind die Ergebnisse aus VBAs in Abhängigkeit von Elementtyp, Netzfeinheit und Schlankheit  $R/t$  dargestellt. Die berechneten Eigenformen (EF) werden mit den jeweiligen Referenzlösungen ( $EF_{Ref}$ ) verglichen, die für alle drei  $R/t$ -Verhältnisse mit dem achtknotigen Element Shell281 aus Ansys mit etwa 7,57 Mio. FHG berechnet wurden. Es wurden stets die ersten 20 EF berechnet, wobei jeweils zwei gleiche EF (und Eigenwerte) auftreten. Die zehn verbleibenden, sich unterscheidenden EF können anhand der Wellenzahlen klassifiziert werden. Die Angabe 9/15 beschreibt beispielsweise 9 Halbwellen in Höhenrichtung und 15 Vollwellen in Umfangsrichtung. Stimmt die berechnete EF mit  $EF_{Ref}$  überein, ist dies in grün gekennzeichnet. Für die nicht korrekten EF erfolgt eine Abstufung nach gelb, orange und rot, beschrieben in Tab. 1 und 2. Die Ergebnisse mancher Elemente stimmen erst mit sehr feinen, teils unpraktikablen Netzen, oder gar mit nicht der Referenzlösung überein. Nimmt man nur die korrekte Ermittlung der ersten Eigenform für die geringste Schlankheit  $R/t = 279$  als Maßstab, so benötigt Shell281 ca. 120.000 FHG, Shell181 und Shell181/32 ca. 1.130.000 FHG, während die drei Elemente aus Tab. 2 nicht zu  $EF_{Ref}$  konvergieren. Eigene isogeo-



**Abbildung 2:** GMNIA der Zylinderschale mit  $R/t = 1116$ , links: unterschiedliche Elementtypen für  $L_{ele} = 6$  mm (Shell281) bzw.  $L_{ele} = 3$  mm (vierknotige Elemente), rechts: unterschiedliche EF als Imperfektion, Shell281 mit  $L_{ele} = 6$  mm.

metrische Schalenelemente benötigen mit kubischen,  $C^2$ -kontinuierliche Ansätzen nur 3.264 FHG zur Abbildung der kritischen Eigenform. Diese vielversprechenden Ergebnisse müssen noch vollständig ausgewertet werden und werden an dieser Stelle nicht weiter dargestellt.

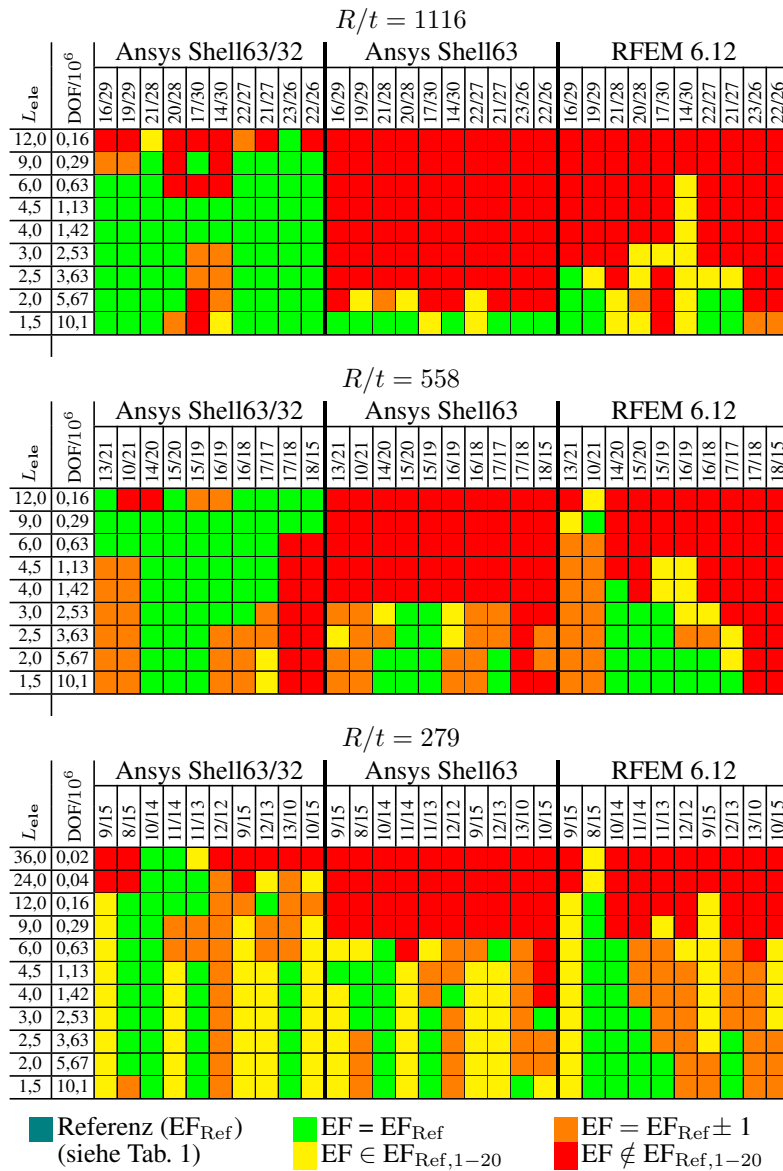
### 3.3 Nichtlineare Stabilitätsanalysen

Um die Bedeutung der Ergebnisqualität einer VBA zu veranschaulichen, werden GMNIA-Berechnungen für die größte Schalenschlankheit von  $R/t = 1116$  exemplarisch dargestellt. Für  $R/t = 1116$  beult die Schale elastisch. Es werden eigenformaffine Imperfektionen nach Tab. 1 und 2 angesetzt. Nach EC3 werden die Imperfektionsamplituden in Abhängigkeit der Fertigungsgenauigkeit vorgeschrieben. Die dargestellten Ergebnisse beschränken sich auf die kleinste Amplitude, die sich für die Schale mit  $R/t = 1116$  zu 0,468 mm ergibt. Abb. 2, links, zeigt die Last-Verschiebungs-Kurven für alle verwendeten Schalenelemente mit gleicher Netzfeinheit und dem Ansatz der jeweils ersten EF als Imperfektion. Zusammen mit Tab. 1 und 1 ist deutlich zu erkennen, dass eine auskonvergierte VBA eine Grundvoraussetzung für die anschließende GMNIA-Berechnung ist. In Abb. 2, rechts, sind Last-Verschiebungs-Kurven unter Verwendung des Elements Shell281 mit  $L_{ele} = 6$  mm und ca. 1,9 Mio. FHG für ausgewählte EF als Imperfektion dargestellt. Die Ergebnisse deuten an, dass nicht immer die erste EF die maßgebende für die tatsächliche numerische Traglast ist.

## 4 Zusammenfassung und Ausblick

Die dargestellten Ergebnisse zeigen auf, dass numerische Stabilitätsuntersuchungen von Schalentragwerken anspruchsvoll sind. Für schlanke Schalen werden mit gängigen kommerziellen finiten Elementen meist sehr feine Diskretisierungen für auskonvergierte Beuleigenformen im Rahmen der VBA benötigt. Der feine Diskretisierungsgrad wird jedoch auch benötigt, um





**Tabelle 2:** VBA der Zylinderschale unter Axialdruck, Vergleich der berechneten ersten 20 Eigenformen (EF) mit den EF der Referenz ( $EF_{Ref}$ ) für verschiedene Elementtypen und Netzfeinheiten (Fortsetzung).

verlässliche Ergebnisse im Rahmen von G(M)NIA-Berechnungen zu erhalten, da ansonsten unter Umständen unkritische Eigenformen als Imperfektion angesetzt werden. Die in weiteren Arbeiten systematisch zu erforschenden Aspekte sind vielfältig. Neben komplexeren Lastfällen, der Variation von Imperfektionsamplituden und -arten werden aktuell die Vor- und Nachteile transienter Analysen unter der Verwendung isogeometrischer hierarchischer Schalenformulierungen [10] und intrinsisch selektiver Massenskalierung [8, 6] untersucht und mit Ergebnissen aus LS-Dyna verglichen. Zudem ist die Betrachtung versteifter Schalen von praktischem Interesse.

## Literatur

- [1] AZIZI, E. ; STRANGHÖNER, N. ; MOTT, M. ; RUFF, D. ; UMMENHOFER, T. : Zum Beultragverhalten von Kreiszyinderschalen aus hochfesten Stählen unter Axial- und Umfangsdruck. In: *Stahlbau* 93 (2024), Nr. 6, S. 402–411
- [2] DONNELL, L. H.: *Beams, plates and shells*. McGraw-Hill, 1976
- [3] HUGHES, T. J. R. ; COTTRELL, J. A. ; BAZILEVS, Y. : Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. In: *Comp Methods Appl Mech Eng* 194 (2005), Nr. 39-41, S. 4135–4195
- [4] KIENDL, J. ; BLETZINGER, K. U. ; LINHARD, J. ; WÜCHNER, R. : Isogeometric shell analysis with Kirchhoff–Love elements. In: *Comp Methods Appl Mech Eng* 198 (2009), Nr. 49, S. 3902–3914
- [5] KNEBEL, K. ; PEIL, U. ; SCHULZ, U. ; SCHWEIZERHOF, K. ; UMMENHOFER, T. : Stabilität von stählernen Silozylinderschalen bei Belastung mit ruhendem und bewegtem Schüttgut. In: *Silobauwerke und ihre spezifischen Beanspruchungen*. John Wiley & Sons, Ltd, 2000, S. 186–242
- [6] KRAUSS, L.-M. ; THIERER, R. ; BISCHOFF, M. ; OESTERLE, B. : Intrinsically selective mass scaling with hierarchic plate formulations. In: *Comp Methods Appl Mech Eng* 432 (2024), S. 117430
- [7] OESTERLE, B. ; GEIGER, F. ; FORSTER, D. ; FRÖHLICH, M. ; BISCHOFF, M. : A study on the approximation power of NURBS and the significance of exact geometry in isogeometric pre-buckling analyses of shells. In: *Comp Methods Appl Mech Eng* 397 (2022), S. 115144
- [8] OESTERLE, B. ; TRIPPMACHER, J. ; TKACHUK, A. ; BISCHOFF, M. : Intrinsically Selective Mass Scaling with Hierarchic Structural Element Formulations. In: *Proceedings of the YIC 2021 - VI ECCOMAS Young Investigators Conference* (2021), S. 99–108
- [9] ROTTER, J. M.: Shell buckling transformed: Mechanics, design processes and their inter-relation. In: *Stahlbau* 86 (2017), Nr. 4, S. 315–324
- [10] THIERER, R. ; OESTERLE, B. ; RAMM, E. ; BISCHOFF, M. : Transverse shear parametrization in hierarchic large rotation shell formulations. In: *Int J Numer Meth Eng* 125 (2024), S. e7443