

Neuartige selektive Massenskalierungsmethoden für transiente Analysen dünnwandiger Strukturen mit Volumenelementen und expliziter Zeitintegration

Moritz Hoffmann¹

¹Technische Universität Hamburg, Institut für Baustatik, Denickestraße 17, 21073 Hamburg, Germany
E-mail(s): m.hoffmann@tuhh.de

Abstract: Die Effizienz transienter Analysen unter Verwendung expliziter Zeitintegrationsverfahren ist durch die kritische Zeitschrittweite bestimmt. Die höchsten Eigenfrequenzen des diskreten Systems begrenzen die erlaubte kritische Zeitschrittweite, während sie meist nur einen geringen Einfluss auf das tatsächliche Strukturverhalten haben. Methoden der selektiven Massenskalierung (SMS) zielen darauf ab, die höchsten Eigenfrequenzen zu reduzieren, während die relevanten niedrigen Eigenfrequenzen idealerweise unverändert bleiben. Die meisten der bestehenden SMS-Methoden wurden für Volumen- oder Volumenschalenelemente entwickelt und darauf ausgelegt, dass die translatorische Trägheit und damit der Impuls erhalten bleibt. In diesem Beitrag werden neuartige SMS-Methoden vorgestellt, die intrinsisch impuls- und drehimpulserhaltend sind und sich durch eine hohe Genauigkeit auszeichnen. Die neuen SMS-Methoden werden hinsichtlich Genauigkeit und Effizienz untersucht und mit dem Stand der Technik verglichen.

Keywords: selektive Massenskalierung, explizite Dynamik, Finite-Elemente-Technologie, dünnwandige Strukturen, Volumenelemente



Erschienen in Tagungsband 35. Forum Bauinformatik 2024, Hamburg, Deutschland, DOI: 10.15480/882.13545
© 2024 Das Copyright für diesen Beitrag liegt bei den Autoren. Verwendung erlaubt unter Creative Commons Lizenz Namensnennung 4.0 International.

1 Einleitung

Im Bereich der Strukturdynamik wird bei transienten Analyseverfahren zwischen expliziten und impliziten Verfahren unterschieden. Explizite Algorithmen zur direkten Zeitintegration sind besonders gut für stark nichtlineare und nichtglatte Problemstellungen geeignet, da sie keine iterative Lösung der globalen dynamischen Bewegungsgleichungen erfordern. In bestimmten Ingenieur Anwendungen sind sie robuster als implizite Algorithmen. Jedoch begrenzt die lediglich bedingte Stabilität expliziter Algorithmen die erlaubte kritische Zeitschrittweite Δt_{crit} . Diese hängt direkt von der höchsten Eigenkreisfrequenz ω_{max} des diskreten Systems ab,

$$\Delta t_{\text{crit}} = \frac{2}{\omega_{\text{max}}}. \quad (1)$$

Die höchsten Eigenfrequenzen begrenzen die kritische Zeitschrittweite Δt_{crit} , haben aber meist nur einen geringen Einfluss auf das tatsächliche Strukturverhalten. Bei transienten Analysen dünnwandiger Strukturen ist dieser Aspekt besonders dominant, da die geringe Dicke in der Regel zu hohen Eigenfrequenzen, inakzeptabel kleinen Zeitschritten und hohen Rechenkosten führt. Werden dünnwandige Strukturen mit Volumen- oder Volumenschalenelementen diskretisiert, sind die höchsten Eigenfrequenzen zu Dickenänderungsmoden assoziiert, siehe [1].

Massenskalierungsmethoden zielen auf eine Vergrößerung der kritischen Zeitschrittweite Δt_{crit} ab, um damit die Anzahl der benötigten Zeitschritte und somit die numerischen Kosten zu senken. Bei Massenskalierungsmethoden wird zwischen konventioneller Massenskalierung (*conventional mass scaling*, CMS) und selektiver Massenskalierung (*selective mass scaling*, SMS) unterschieden. Bei allen Massenskalierungsmethoden wird künstlich Trägheit addiert. Werden im Kontext von diagonalen, konzentrierten Massenmatrizen (*lumped mass matrix*, LMM) nur die Diagonaleinträge künstlich erhöht, spricht man von CMS. Die wünschenswerte Diagonalstruktur bleibt dabei erhalten, jedoch führt die Nutzung der CMS zur Erhöhung der translatorischen Trägheit, wodurch das gesamte Eigenfrequenzspektrum modifiziert wird. Somit wird die Anwendung von CMS in der Regel auf wenige kleine, steife Elemente in einem FE-Netz begrenzt [2].

SMS-Methoden zielen darauf ab, die höchsten Eigenfrequenzen zu reduzieren, ohne die relevanten niedrigen Eigenfrequenzen zu stark zu verändern. Die meisten der bestehenden SMS-Methoden wurden für Volumen- oder Volumenschalenelemente entwickelt (siehe beispielsweise [1], [3]–[5]) und darauf ausgelegt, dass die translatorische Trägheit und damit der Impuls erhalten bleibt. Die Erhaltung der rotatorischen Trägheit bzw. des Drehimpulses geht mit erhöhter Genauigkeit einher, bringt bei gängigen SMS-Methoden, wie beispielsweise [4], jedoch zusätzliche Rechenkosten mit sich. Die SMS kann in allgemeiner Form dargestellt werden als

$$\mathbf{M}^\circ = \mathbf{M} + \lambda^\circ, \quad (2)$$

wobei \mathbf{M}° die skalierte Massenmatrix, \mathbf{M} die Ausgangsmassenmatrix und λ° die künstliche Massenmatrix beschreibt.

Verschiedene SMS-Methoden unterscheiden sich maßgeblich in Konstruktion und Struktur der künstlichen Massenmatrix λ° . Es existieren beispielsweise zahlreiche SMS-Methoden, die auf algebraischen Konstruktionen basieren, unter ihnen die steifigkeitsproportionale SMS, d. h. $\lambda^\circ = \alpha \mathbf{K}$, welche unter anderem in [4], [6], [7] beschrieben wird und sich durch eine hohe Genauigkeit auszeichnet. Die praktische Anwendung ist allerdings auf lineare dynamische Problemstellungen beschränkt, da sich die Steifigkeitsmatrix für nichtlineare Problemen fortlaufend verändert und λ° stets neu assembliert werden muss. Die dadurch verursachten numerischen Mehrkosten sind der Hauptgrund dafür, dass steifigkeitsproportionale SMS-Methoden bezüglich der Effizienz nicht konkurrenzfähig sind.

In diesem Beitrag werden neuartige SMS-Methoden vorgestellt, die intrinsisch impuls- und drehimpulserhaltend sind und sich durch eine hohe Genauigkeit auszeichnen. Die neuen, erstmals in [8], [9] vorgestellten SMS-Methoden basieren auf der Discrete-Strain-Gap(DSG)-Methode [10], eines aus der

Finite-Elemente-Technologie bekanntes Verfahren zur Vermeidung geometrischer Locking-Effekte. Die resultierenden DSGSMS-Methoden haben in den Vorarbeiten [8], [9] bereits ihr großes Potenzial aufgezeigt. Im Wesentlichen wird hierbei eine steifigkeitsproportionale SMS mit hoher Genauigkeit approximiert, ohne die effizienzmindernende Reassemblierung zu erfordern.

In Kapitel 2 wird die DSGSMS-Methode für schlanke Volumenelemente eingeführt und mit der SMS-Methode nach Olovsson U.A. [4] verglichen, da diese zum Stand der Technik in kommerziellen expliziten FE-Solvern wie LS-DYNA zählt. In Kapitel 3 werden die Eigenschaften der vorgestellten DSGSMS-Methoden im Rahmen numerischer Experimente untersucht und mit existierenden SMS-Methoden verglichen. Kapitel 4 fasst die gewonnenen Erkenntnisse zusammen und gibt Anreize für zukünftige Entwicklungen.

2 Das DSGSMS-Konzept für schlanke Volumenelemente

Wie in [8] beschrieben, stammt die Inspiration für das DSGSMS-Konzept von dem kürzlich in [11] vorgestellten Konzept der intrinsisch selektiven Massenskalierung (ISMS). Das DSGSMS-Konzept basiert auf der theoretischen Verbindung von intrinsisch lockingfreien, hierarchischen Strukturelementformulierungen [12], [13] und DSG-Formulierungen zur Vermeidung von Querschublocking. Für Details zur DSG-Methode und Locking-Effekten in finiten Elementen wird an dieser Stelle auf [10] verwiesen. Die DSG-Methode ist eine universell einsetzbare Methode zur Beseitigung aller Arten von geometrischen Locking-Effekten in Balken-, Platten-, Schalen-, Volumen- oder Volumenschalenelementen. Das neu entwickelte DSGSMS-Konzept nutzt die im Rahmen der DSG-Methode konstruierte Strain-Gap-Funktion, eine modifizierte Verschiebungsfunktion, zur Konstruktion einer künstlichen Massenmatrix.

Bei einer dreidimensionalen Diskretisierung dünnwandiger Strukturen sind die höchsten Eigenfrequenzen in der Regel mit Dickenänderungsmoden assoziiert, siehe [1]. Um die höchsten Eigenfrequenzen mithilfe der DSGSMS-Methode zu skalieren, werden *discrete strain gaps* der Normalverzerrungen ϵ_{33} in Dickenrichtung integriert, kolloziert und interpoliert. Aus der interpolierten Strain-Gap-Funktion u_3^{mod} wird ein zusätzlicher Beitrag zur virtuellen kinetischen Energie konstruiert

$$\delta W_{\text{DSGSMS-33}}^{\text{kin}} = \alpha_{\text{DSGSMS-33}} \int_{\Omega} (\delta u_3^{\text{mod}} \rho \ddot{u}_3^{\text{mod}}) \, d\Omega, \quad (3)$$

wobei ρ die Dichte und $\alpha_{\text{DSGSMS-33}}$ einen künstlichen, skalaren Massenskalierungsparameter der DSGSMS-33-Methode bezeichnet. Die aus der interpolierten Strain-Gap-Funktion u_3^{mod} berechnete künstliche Massenmatrix $\lambda_{\text{DSGSMS-33}}^{\circ}$ ist entsprechend an der 33- bzw. Dickenrichtung ausgerichtet und somit *anisotrop*, d. h. es wird lediglich künstliche Trägheit in Dickenrichtung addiert. Für nachfolgende Darstellungen wird von achtknotigen finiten Hexaeder-Elementen ausgegangen. Im Sinne einer kompakten Darstellung werden die Verschiebungsfreiheitsgrade auf Elementniveau blockweise nach x -, y - und z -Komponenten sortiert, d. h.

$$\mathbf{d} = \left[d_x^1 \, d_x^2 \, \dots \, d_x^8 \, d_y^1 \, d_y^2 \, \dots \, d_y^8 \, d_z^1 \, d_z^2 \, \dots \, d_z^8 \right]^T. \quad (4)$$

Damit ergibt sich für die aus Gleichung (3) hergeleitete künstliche Massenmatrix $\lambda_{\text{DSGSMS-33}}^{\circ}$ der DSGSMS-33-Methode eine algebraische Struktur der Form

$$\lambda_{\text{DSGSMS-33}}^{\circ} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda_{\text{DSGSMS-33}}^{\circ, 8 \times 8} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

wobei

$$\lambda_{\text{DSGSMS-33}}^{\circ, 8 \times 8} = \alpha_{\text{DSGSMS-33}} \cdot f \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 & 1/2 & -1 & -1/2 & -1/4 & -1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & 1/4 & -1/2 & -1 & -1/2 & -1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1 & 1/2 & -1/4 & -1/2 & -1 & -1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 1/2 & 1 & -1/2 & -1/4 & -1/2 & -1 \\ -1 & -1/2 & -1/4 & -1/2 & 1 & 1/2 & 1/4 & 1/2 \\ -1/2 & -1 & -1/2 & -1/4 & 1/2 & 1 & 1/2 & 1/4 \\ -1/4 & -1/2 & -1 & -1/2 & 1/4 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & -1/4 & -1/2 & -1 & 1/2 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

gilt. Ein zusätzlicher Parameter, der von der Elementgeometrie und den Materialkennwerten abhängt, ist durch f gekennzeichnet.

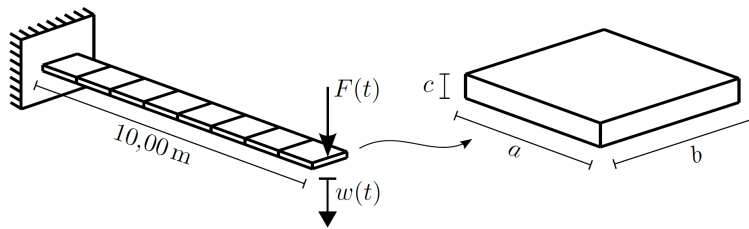
Die Methode nach Olovsson U.A. [4] ist als Vergleichspartner von besonderem Interesse, da diese den Stand der Technik in kommerziellen FE-Codes wie LS-DYNA repräsentiert. Sie führt auf

$$\lambda_{\text{Olov}}^{\circ} = \begin{bmatrix} \lambda_{\text{Olov}}^{\circ, 8 \times 8} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_{\text{Olov}}^{\circ, 8 \times 8} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda_{\text{Olov}}^{\circ, 8 \times 8} \end{bmatrix}, \quad \text{mit} \quad \lambda_{\text{Olov}}^{\circ, 8 \times 8} = \frac{\beta m^e}{56} \begin{bmatrix} 7 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 7 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -1 & & & 7 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

wobei β einen skalaren Massenskalierungsfaktor und m^e die gesamte Elementmasse beschreibt.

Aus den algebraischen Strukturen von $\lambda_{\text{DSGSMS-33}}^{\circ}$ und $\lambda_{\text{Olov}}^{\circ}$ aus den Gleichungen (5) und (7) ist zu erkennen, dass $\lambda_{\text{Olov}}^{\circ}$ *isotrop* ist. Die künstliche Massenmatrix $\lambda_{\text{DSGSMS-33}}^{\circ}$ ist hingegen *anisotrop*, d. h. künstliche Trägheit wird nur in Dickenrichtung addiert, was wiederum bei nichtlinearen Problemstellungen mit großen Rotationen zu numerischen Mehrkosten führt, da sich die Dickenrichtung permanent verändert. Die Konstruktion einer isotropen Variante der DSGSMS-33 ist in Hinblick auf anvisierte nichtlineare Probleme von großer Bedeutung. Eine DSGSMS-33-iso kann konstruiert werden, indem die künstlichen Trägheiten in z -Richtung in analoger Weise auf die x - und y -Richtung übertragen werden. Dies resultiert in einer künstlichen Massenmatrix

$$\lambda_{\text{DSGSMS-33-iso}}^{\circ} = \begin{bmatrix} \lambda_{\text{DSGSMS-33}}^{\circ, 8 \times 8} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_{\text{DSGSMS-33}}^{\circ, 8 \times 8} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda_{\text{DSGSMS-33}}^{\circ, 8 \times 8} \end{bmatrix}, \quad (8)$$



$$a = b = 1,25 \text{ m}$$

$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0,3$$

$$\rho = 8.000 \text{ kg/m}^3$$

Abbildung 1: Kragarm mit Einzellast, Problembeschreibung.

die unter Rotation konstant bleibt. Die Auswirkungen dieser Modifikation auf die Ergebnisqualität wird nachfolgend im Rahmen numerischer Experimente untersucht.

3 Numerische Experimente

3.1 Eigenfrequenzspektren

Die Effektivität der anisotropen DSGSMS-33 und der isotropen DSGSMS-33-iso werden zunächst anhand von Frequenzspektren untersucht. Analysiert wird ein mit acht achtknotigen Enhanced-Assumed-Strain(EAS)-Volumenelementen diskretisierter Kragarm, siehe Abbildung 1. Es wird das generalisierte Eigenwertproblem der Form

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (9)$$

gelöst. Die zugehörigen Ergebnisse sind in Abbildung 2 dargestellt. Die Massenskalierungsparameter sind dabei so gewählt, dass die maximale Eigenfrequenz um 90 % der ursprünglichen Eigenfrequenz (LMM) abgesenkt wird. Die CMS skaliert das gesamte Spektrum auf $\frac{\omega^\circ}{\omega_{\text{LMM}}} = 0,1$ und ist damit für viele Anwendungen unbrauchbar. Wird die SMS nach Olovsson U.A. [4] gewählt, so weist schon die erste Eigenfrequenz einen Fehler von ca. 40 % auf. Alle weiteren Eigenfrequenzen zeigen noch stärkere Abweichungen.

Die höchste Genauigkeit im vorderen Teil des Frequenzspektrums, d. h. in den niedrigen Frequenzen, wird mit der anisotropen DSGSMS-33 erreicht. Die Methode ist derart selektiv, dass lediglich der Zweig mit den höchsten Eigenfrequenzen, welche zu Dickenänderungsmoden assoziiert sind, skaliert wird. Diese eigentlich positive Eigenschaft führt allerdings auch dazu, dass die maximale Skalierbarkeit limitiert ist. Zudem ist die bereits erwähnte Anisotropie der DSGSMS-33 für zukünftig anvisierte nichtlineare Analysen unter großen Rotationen mit numerischen Mehrkosten verbunden.

Die isotrope DSGSMS-33-iso scheint einen guten Kompromiss zwischen Effizienz und Genauigkeit bereitzustellen. In den niedrigsten zehn Eigenfrequenzen ergibt sich ein maximaler Fehler von 7,4 %, während die SMS-Methode nach Olovsson U.A. [4] einen maximalen Fehler von 87,1 % aufweist.

3.2 Transiente Analyse

Die Genauigkeit der isotropen Massenskalierungsmethoden wird nun im Rahmen einer transienten Problemstellung mit expliziter Zeitintegration nach dem Zentrale-Differenzen-Verfahren, siehe beispielsweise [14], verglichen. Der in Abbildung 1 dargestellte Kragarm wird durch eine Stoßbelastung $F(0 \leq t \leq 0,005 \text{ s})$ an der Kragarmspitze, verteilt auf die vier Eckknoten, belastet. Die Last ist so

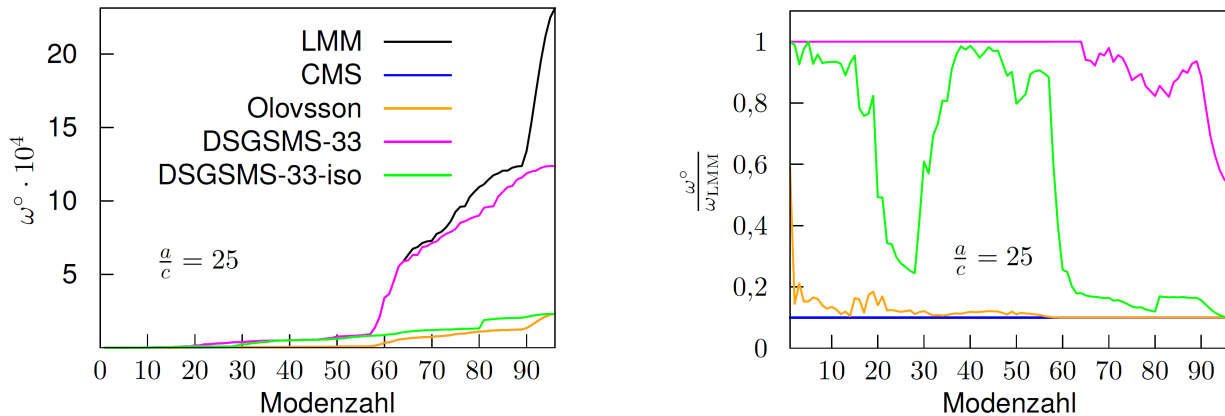


Abbildung 2: Frequenzspektren des Kragarms für $c = 0,05$ m, links: Eigenfrequenzspektren verschiedener Massenskalierungsmethoden im Vergleich, rechts: Verhältnis von skalierten zu unskalierten Eigenfrequenzen.

gewählt, dass die Verschiebungen klein bleiben und geometrisch lineares Verhalten angenommen werden kann. Des Weiteren wird ein linear-elastisches Materialmodell verwendet. Zur Auswertung dient die maximale Vertikalverschiebung $w(t)$ der Kragarmspitze. Die Berechnungszeit ist so gewählt, dass der Referenzverlauf ohne Massenskalierung, d. h. LMM, drei Schwingungsperioden abdeckt. Die kritische Zeitschrittweite Δt_{crit} nach Gleichung (1) wurde in allen Fällen durch die Lösung des generalisierten Eigenwertproblems nach Gleichung (9) exakt ermittelt.

Die Referenzlösung (LMM, ohne Massenskalierung) aus Abbildung 3 (links) benötigt für eine Berechnungszeit von $t_{\text{end}} = 7,455$ s insgesamt 862.935 Zeitschritte. Für alle Massenskalierungsmethoden ist der entsprechende Skalierungsfaktor so gewählt, dass die benötigte Anzahl an Zeitschritten um 90% auf 86.293 reduziert wird. Sowohl die CMS als auch die SMS nach Olovsson U.A. [4] zeigen eine deutlich zu träge Strukturantwort. Die DSGSMS-33-iso bildet die Periodendauern und die maximalen Amplituden im Vergleich zur Referenzlösung (LMM) gut ab. In Abbildung 3 (rechts) sind lediglich geringe Abweichungen bei genauerer Betrachtung eines kleinen Ausschnitts der ersten maximalen Amplitude zu erkennen.

4 Zusammenfassung und Ausblick

Es wurde eine neuartige Klasse selektiver Massenskalierungsmethoden für transiente Analysen dünnwandiger Strukturen unter Verwendung von Volumenelementen und expliziter Zeitintegration vorgestellt. Diese DSGSMS-Methoden basieren auf der DSG-Methode, sind intrinsisch impuls- und drehimpulserhaltend und zeichnen sich durch eine hohe Genauigkeit aus.

Es wurden Eigenschaften der anisotropen und isotropen DSGSMS-Methode aufgezeigt und diskutiert. Speziell die isotrope Variante, d. h. die DSGSMS-33-iso, ist eine vielversprechende SMS-Methode, welche einen guten Kompromiss zwischen Effizienz und Genauigkeit bietet. Die zugehörige künstliche Massenmatrix $\lambda_{\text{DSGSMS-33-iso}}^\circ$ weist im Vergleich zur Matrix $\lambda_{\text{Olov}}^\circ$ nach [4] einen identischen Fill-In auf. Die Genauigkeit der DSGSMS-33-iso ist allerdings deutlich höher. Für die dargestellten numerischen Experimente konnten gute spektrale Eigenschaften der DSGSMS-33-iso sowie deutliche Effizienzsteigerung bei gleichzeitig hoher Genauigkeit demonstriert werden.

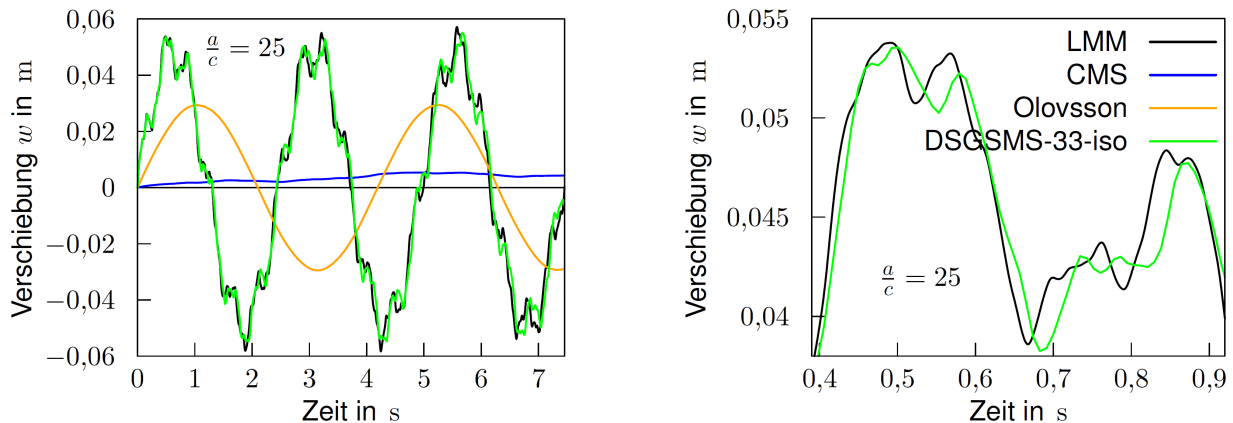


Abbildung 3: Transiente Analyse des Kragarms für $c = 0,05 \text{ m}$, $F(0 \leq t \leq 0,005 \text{ s}) = 31,25 \text{ kN}$ und eine Reduktion der max. Eigenfrequenz um 90 % im Vergleich zu LMM (Zeitschrittfaktor von 10), links: volle Berechnungszeit, rechts: Detail der ersten maximalen Amplitude.

Die DSGSMS-33-iso ist eine vielversprechende SMS-Methode für nichtlineare transiente Analysen mit großen Rotationen und verzerrten Netzen. Dieses Potenzial soll in zukünftigen Arbeiten detailliert untersucht werden. Des Weiteren stehen die Erweiterung der DSGSMS-33-iso auf Volumenschalenelemente sowie eine detaillierte Untersuchung der tatsächlichen Reduktion numerischer Kosten für größere und komplexere nichtlineare Problemstellungen im Fokus. In diesem Kontext bedarf es auch der Entwicklung effizienter und genauer Zeitschrittschätzer.

Danksagung

Der Autor bedankt sich für die Förderung durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) im Rahmen des Projekts OE 728/3-1 – Projektnummer 512271632.

Literatur

- [1] G. Cocchetti, M. Pagani und U. Perego, »Selective mass scaling and critical time-step estimate for explicit dynamics analyses with solid-shell elements«, *Computers & Structures*, Jg. 127, S. 39–52, 2013. DOI: 10.1016/j.compstruc.2012.10.021.
- [2] A. Tkachuk und M. Bischoff, »Variational methods for selective mass scaling«, *Computational Mechanics*, Jg. 52, Nr. 3, S. 563–570, 2013. DOI: 10.1007/s00466-013-0832-0.
- [3] L. Olovsson, M. Unosson und K. Simonsson, »Selective mass scaling for thin walled structures modeled with tri-linear solid elements«, *Computational Mechanics*, Jg. 34, Nr. 2, S. 134–136, 2004. DOI: 10.1007/s00466-004-0560-6.
- [4] L. Olovsson, K. Simonsson und M. Unosson, »Selective mass scaling for explicit finite element analyses«, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Jg. 63, Nr. 10, S. 1436–1445, 2005. DOI: 10.1002/nme.1293.
- [5] S. Mattern, C. Schmied und K. Schweizerhof, »Highly efficient solid and solid-shell finite elements with mixed strain–displacement assumptions specifically set up for explicit dynamic simulations

- using symbolic programming«, *Computers & Structures*, Jg. 154, S. 210–225, 2015. DOI: 10.1016/j.compstruc.2015.03.009.
- [6] R. W. Macek und B. H. Aubert, »A mass penalty technique to control the critical time increment in explicit dynamic finite element analyses«, *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, Jg. 24, Nr. 10, S. 1315–1331, 1995. DOI: 10.1002/eqe.4290241003.
- [7] H. Askes, D. C. D. Nguyen und A. Tyas, »Increasing the critical time step: micro-inertia, inertia penalties and mass scaling«, *Computational Mechanics*, Jg. 47, Nr. 6, S. 657–667, 2011. DOI: 10.1007/s00466-010-0568-z.
- [8] B. Oesterle, A. Tkachuk und M. Bischoff, »Finite element technology-based selective mass scaling for shear deformable structural element formulations«, in *COMPADYN 2023, 9th ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering*, M. Papadrakakis, M. Fragiadakis (eds.), Athens, Greece, 12-14 June 2023, 2023, S. 1965–1973. DOI: 10.7712/120123.10534.20662.
- [9] M. Hoffmann, A. Tkachuk, M. Bischoff und B. Oesterle, »Finite element technology-based selective mass scaling for explicit dynamic analyses of thin-walled structures using solid elements«, in *COMPADYN 2023, 9th ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering*, M. Papadrakakis, M. Fragiadakis (eds.), Athens, Greece, 12-14 June 2023, 2023, S. 1974–1982. DOI: 10.7712/120123.10535.20771.
- [10] K.-U. Bletzinger, M. Bischoff und E. Ramm, »A unified approach for shear-locking-free triangular and rectangular shell finite elements«, *Computers & Structures*, Jg. 75, Nr. 3, S. 321–334, 2000. DOI: 10.1016/S0045-7949(99)00140-6.
- [11] B. Oesterle, J. Trippmacher, A. Tkachuk und M. Bischoff, »Intrinsically Selective Mass Scaling With Hierarchic Structural Element Formulations«, in *Book of Extended Abstracts of the 6th ECCOMAS Young Investigators Conference 7th-9th July 2021, Valencia, Spain, accepted for publication.*, 2021, S. 383–405. DOI: 10.4995/YIC2021.2021.12418.
- [12] R. Echter, B. Oesterle und M. Bischoff, »A hierarchic family of isogeometric shell finite elements«, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Jg. 254, S. 170–180, 2013. DOI: 10.1016/j.cma.2012.10.018.
- [13] B. Oesterle, S. Bieber, R. Sachse, E. Ramm und M. Bischoff, »Intrinsically locking-free formulations for isogeometric beam, plate and shell analysis«, *Proc. Appl. Math. Mech.*, Jg. 18, Nr. 1, 2018. DOI: 10.1002/pamm.201800399.
- [14] T. Belytschko, W. K. Liu, B. Moran und K. I. Elkhodary, *Nonlinear finite elements for continua and structures*, en, 2. Aufl. Nashville, TN: John Wiley & Sons, 2014.