116 | 1963

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

K.H. Kwik

Darstellung symmetrischer Joukowsky-Profile

TUHH
Technische Universität Hamburg-Harburg

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr. 116

DARSTELLUNG SYMMETRISCHER JOUKOWSKY-PROFILE

von

K. H. Kwik

Hamburg, im Frühjahr 1963

DARSTELLUNG SYMMETRISCHER JOUKOWSKY-PROFILE

von

K. H. Kwik

Hamburg, im Frühjahr 1963

Aus der Joukowsky-Transformation werden Formeln abgeleitet, mit denen man die Aufmaße symmetrischer Joukowsky-Profile exakt und schnell berechnen kann. Eine Linearisierung dieser Formeln ist nur zur Darstellung sehr schlanker Profile geeignet. Verhältnismäßig einfache Polynome werden abgeleitet, mit denen man symmetrische Joukowsky-Profile ausreichend genau darstellen kann. Die wichtigsten Formverhältnisse der Profile werden angegeben.

Inhaltsübersicht:

A. Einführung

Joukowsky-Profile werden bekanntlich mit den Mitteln der konformen Abbildung aus einem Kreise hergeleitet [1], [2]. Die Potentialströmungen um die Joukowsky-Profile lassen sich verhältnismäßig einfach und mit großer Genauigkeit berechnen, da die Frage nach den Strömungen eines Mediums um solche Profile auf die Frage nach den Strömungen um kreisförmige Profile zurückgeführt werden kann. Bei der Behandlung von Problemen der Eigenschaften von Schiffsrudern werden deshalb symmetrische Joukowsky-Profile gern zum Vergleich herangezogen [3]. Merkmale symmetrischer Joukowsky-Profile sind der verschwindende Schwanzwinkel und die ziemlich runde, gedrungene Profilnase (Abb. 1).

Angaben über die Aufmaße und über die zum Profilvergleich wichtigen Formparameter symmetrischer Joukowsky-Profile werden sehr selten gemacht. Bei der Profilkonstruktion [4] stößt man auf die Schwierigkeit, daß man die für die Strömung wichtige Profilnase nicht mit genügender Genauigkeit zeichnen kann. In dieser Arbeit sollen darum Formeln abgeleitet werden, mit denen man die Koordinaten symmetrischer Joukowsky-Profile exakt und mit wenig Zeitaufwand berechnen kann. Weiterhin sollen einfache Näherungspolynome zur Darstellung symmetrischer Joukowsky-Profile abgeleitet werden. Die Ermittlung der Formparameter ist mit der letzten Aufgabe eng verbunden.

B. Exakte Darstellung

In [7] sind Formeln angegeben worden, mit denen man die Aufmaße symmetrischer Joukowsky-Profile exakt berechnen kann. Dort sind die Formeln an Hand der graphischen Profilkonstruktion nach Trefftz [4] abgeleitet worden. Es sollen hier die gleichen Formeln wieder abgeleitet werden, diesmal jedoch unmittelbar aus der Joukowsky-Transformation.

Die Joukowsky-Profile entstehen bekanntlich dadurch, daß die Transformation

$$z^x = w + \frac{b^2}{w} \tag{1}$$

angewandt wird auf einen Kreis mit dem Radius $b + c$, wobei c ein Bruchteil von b ist [1], [2]. Liegt der Mittelpunkt des Kreises in der w-Ebene auf der Abszisse des rechtwinkligen Koordinatensystems im Abstand c vom Nullpunkt, so erhält man vermittels der Abbildungsfunktion (1) in der z^x-Ebene ein symmetrisches Joukowsky-Profil (siehe Abb. 2). Zur Ermittlung der Profilkontur führt man die komplexen Koordinaten in der w- und z^x-Ebene ein:

$$w = u + i\,v$$
$$z^x = x^x + i\,y^x$$

Mit dem Ansatz

$$w = a\,e^{i\varepsilon}$$

und unter Verwendung der Abbildungsfunktion (1) erhält man

$$z^x = x^x + i\,y^x = a\,e^{i\varepsilon} + \frac{b^2}{a}\,e^{-i\varepsilon}$$

und mit den Eulerschen Formeln

$$e^{i\varepsilon} = \cos\varepsilon + i\sin\varepsilon$$
$$e^{-i\varepsilon} = \cos\varepsilon - i\sin\varepsilon$$

schließlich

$$z^x = x^x + i\,y^x = \left(a+\frac{b^2}{a}\right)\cos\varepsilon + \left(a-\frac{b^2}{a}\right)i\sin\varepsilon$$

Nach Zerlegung in Real- und Imaginärteil erhält man die Formeln

$$x^x = \left(a + \frac{b^2}{a}\right)\cos\varepsilon \tag{2}$$

$$y^x = \left(a - \frac{b^2}{a}\right)\sin\varepsilon \tag{3}$$

Der Abb. 2 entnimmt man

$$a = c\cos\varepsilon + \sqrt{c^2\cos^2\varepsilon + b^2 + 2\,b\,c} \tag{4}$$

Sind die Größen b und c einmal festgelegt, so kann man für jeden Winkel ε die Größe a nach (4) ermitteln und damit auch die Koordinaten des zugehörigen Profilpunktes nach (2) und (3). Eine Berechnung der Profilaufmaße nach (2) und (3) ist aber ziemlich zeitraubend. Es ist deshalb wünschenswert, die Formeln (2) und (3) in eine Form zu bringen, die eine schnellere und außerdem bequemere Berechnung der Profilaufmaße gestattet.

Der Abb. 2 entnimmt man weiter

$$c\sin\varepsilon = (b + c)\sin\beta \tag{5}$$

$$a\sin\varepsilon = (b + c)\sin(\varepsilon+\beta) \tag{6}$$

Mit (5) und (6) wird Formel (2) umgeformt:

$$x^{*} = \frac{b+c}{\sin\varepsilon}\sin(\varepsilon+\beta)\cos\varepsilon + \frac{b^2\sin\varepsilon\cos\varepsilon}{(b+c)\sin(\varepsilon+\beta)}$$

$$= \frac{b+c}{\sin\varepsilon}(\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cos\beta + \cos^2\varepsilon\sin\beta)$$

$$+ \frac{b^2\sin\varepsilon\cos\varepsilon\,[(b+c)\cos(\varepsilon-\beta) - c]}{(b+c)\sin(\varepsilon+\beta)\,[(b+c)\cos(\varepsilon-\beta) - c]}$$

$$= (b+c)(\cos\varepsilon\cos\beta + \frac{1-\sin^2\varepsilon}{\sin\varepsilon}\sin\beta)$$

$$+ \frac{b^2\sin\varepsilon\cos\varepsilon\,[(b+c)\cos(\varepsilon-\beta) - c]}{(b+c)^2\sin(\varepsilon+\beta)\cos(\varepsilon-\beta) - (b+c)c\sin(\varepsilon+\beta)}$$

Mit

$$\sin(\varepsilon+\beta)\cos(\varepsilon-\beta) = \sin\varepsilon\cos\varepsilon + \sin\beta\cos\beta$$

wird

$$x^{*} = (b+c)(\cos\varepsilon\cos\beta - \sin\varepsilon\sin\beta) + (b+c)\frac{\sin\beta}{\sin\varepsilon}$$

$$+ \frac{b^2\sin\varepsilon\cos\varepsilon\,[(b+c)\cos(\varepsilon-\beta) - c]}{(b+c)^2(\sin\varepsilon\cos\varepsilon + \sin\beta\cos\beta) - (b+c)c(\sin\varepsilon\cos\beta + \cos\varepsilon\sin\beta)}$$

$$= (b+c)\cos(\varepsilon+\beta) + c$$

$$+ \frac{b^2\sin\varepsilon\cos\varepsilon\,[(b+c)\cos(\varepsilon-\beta) - c]}{(b+c)^2(\sin\varepsilon\cos\varepsilon + \frac{c}{b+c}\sin\varepsilon\cos\beta) - (b+c)c(\sin\varepsilon\cos\beta + \frac{c}{b+c}\sin\varepsilon\cos\varepsilon)}$$

$$= (b+c)\cos(\varepsilon+\beta) + c + \frac{b^2\sin\varepsilon\cos\varepsilon\,[(b+c)\cos(\varepsilon-\beta) - c]}{(b^2+2bc)\sin\varepsilon\cos\varepsilon}$$

$$x^* = (b+c)\cos(\varepsilon+\beta) + c + \frac{b(b+c)}{b+2c}\cos(\varepsilon-\beta) - \frac{bc}{b+2c} \tag{7}$$

Auf ähnlicher Weise wird Formel (3) umgeformt:

$$y^* = (b+c)\sin(\varepsilon+\beta) - \frac{b^2\sin^2\varepsilon}{(b+c)\sin(\varepsilon+\beta)}$$

$$= (b+c)\sin(\varepsilon+\beta) - \frac{b^2\sin^2\varepsilon\;(b+c)\sin(\varepsilon-\beta)}{(b+c)^2\sin(\varepsilon+\beta)\sin(\varepsilon-\beta)}$$

Mit

$$\sin(\varepsilon+\beta)\sin(\varepsilon-\beta) = \sin^2\varepsilon - \sin^2\varepsilon\,\sin^2\beta - \cos^2\varepsilon\,\sin^2\beta$$

$$= \sin^2\varepsilon - \left(\frac{c}{b+c}\right)^2\sin^4\varepsilon - \left(\frac{c}{b+c}\right)^2\sin^2\varepsilon\,\cos^2\varepsilon$$

wird

$$y^* = (b+c)\sin(\varepsilon+\beta) - \frac{b^2\sin^2\varepsilon\;(b+c)\sin(\varepsilon-\beta)}{(b+c)^2\sin^2\varepsilon - c^2\sin^4\varepsilon - c^2\sin^2\varepsilon\,\cos^2\varepsilon}$$

$$= (b+c)\sin(\varepsilon+\beta) - \frac{b^2\sin^2\varepsilon\;(b+c)\sin(\varepsilon-\beta)}{(b+c)^2\sin^2\varepsilon - c^2\sin^2\varepsilon}$$

$$y^* = (b+c)\sin(\varepsilon+\beta) - \frac{b(b+c)}{b+2c}\sin(\varepsilon-\beta) \tag{8}$$

Setzt man in Formel (7) $\varepsilon = \beta = 0^\circ$ ein, so erhält man die Profilnase:

$$x_n^* = \frac{2b^2 + 4c^2 + 4bc}{b+2c}$$

Setzt man $\varepsilon = 180^\circ$, $\beta = 0^\circ$ ein, so erhält man den Profilschwanz:

$$x_s^* = -\,2b$$

Die Profillänge ergibt sich somit zu

$$L = |x_n^*| + |x_s^*| = 4\,\frac{(b+c)^2}{b+2c} \tag{9}$$

Legt man den Nullpunkt des Koordinatensystems durch die Profilnase (siehe Abb. 3), so lauten die Formeln zur Bestimmung der Profilkoordinaten:

$$x = 2\,\frac{(b+c)^2}{b+2c} - (b+c)\cos(\varepsilon+\beta) - \frac{b(b+c)}{b+2c}\cos(\varepsilon-\beta)$$

$$y = (b+c)\sin(\varepsilon+\beta) - \frac{b(b+c)}{b+2c}\sin(\varepsilon-\beta)$$

oder in dimensionsloser Form:

$$\frac{x}{L} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1+2\frac{c}{b}}{1+\frac{c}{b}}\cos(\varepsilon+\beta) - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{c}{b}}\cos(\varepsilon-\beta)$$

$$\frac{y}{L} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1+2\frac{c}{b}}{1+\frac{c}{b}}\sin(\varepsilon+\beta) - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{c}{b}}\sin(\varepsilon-\beta)$$

Ersetzt man das Verhältnis $\frac{c}{b}$ durch das oft verwendete $\frac{d}{l}$ (siehe z.B. [5]), so lauten die Formeln schließlich:

$$\frac{x}{L} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1+2\frac{d}{l}}{1+\frac{d}{l}}\cos(\varepsilon+\beta) - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{d}{l}}\cos(\varepsilon-\beta) \tag{10}$$

$$\frac{y}{L} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1+2\frac{d}{l}}{1+\frac{d}{l}}\sin(\varepsilon+\beta) - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{d}{l}}\sin(\varepsilon-\beta) \tag{11}$$

$$\text{mit} \quad \sin\beta = \frac{\frac{d}{l}}{1+\frac{d}{l}}\sin\varepsilon \tag{5}$$

Mit diesen Formeln lassen sich die Koordinaten symmetrischer Joukowsky-Profile exakt und verhältnismäßig schnell berechnen. Man hat dabei zu beachten, daß das Vehältnis $\frac{d}{l}$ mit dem Breiten-Längen-Verhältnis $\frac{B}{L}$ des Profils nicht identisch ist. Die Formeln (10) und (11) stimmen mit den in [7] angegebenen überein, wenn sie dort entsprechend in dimensionsloser Form gebracht werden.

In den Tabellen 1 bis 6 sind die Koordinaten symmetrischer Joukowsky-Profile für $\frac{d}{l}$ = 0,05; 0,10; 0,15; 0,20; 0,25; und 0,30 $^{x)}$ nach (10) und (11) berechnet worden. Das Breitenverhältnis $\frac{B}{L}$ und die Breitenrücklage $\frac{n}{L}$ (siehe Abb. 3) ergeben sich zwangsläufig in Abhängigkeit vom Verhältnis $\frac{d}{l}$. Den Winkel $\varepsilon_{(y_{max})}$, wobei also das maximale Profilaufmaß erreicht wird, erhält man aus der Bedingung

$$\frac{dy^{x}}{d\varepsilon} = 0$$

durch numerische Rechnung in Abhängigkeit vom Verhältnis $\frac{d}{l}$. Dabei

x) In dieser Reihenfolge identisch mit den Göttinger-Profilen Gö 537; 429; 538; 539; 540 und 639.

ist y^{x} der Einfachkeit halber in der Form wie in Formel (3) zu nehmen. Durch Einsetzen dieses Winkels in (10) und (11) erhält man die Breitenrücklage $\frac{n}{L}$ bezw. das Breitenverhältnis $\frac{B}{L}$ in Abhängigkeit vom Verhältnis $\frac{d}{L}$. In Tabelle 15 sind der Winkel $\varepsilon(y_{max})$, das Breitenverhältnis und die Breitenrücklage in Abhängigkeit von $\frac{d}{L}$ angegeben worden. Eine graphische Auftragung von $\frac{B}{L}$ und $\frac{n}{L}$ über $\frac{d}{L}$ findet man in Abb. 5 . Damit ist eine Beziehung zwischen $\frac{B}{L}$ und $\frac{d}{L}$ gefunden, so daß man für jedes gewünschte Breitenverhältnis vermittels der Formeln (10) und (11) die zugehörigen Profilaufmaße berechnen kann.

C. Näherung durch Linearisierung

Ist c klein gegenüber b (siehe Abb. 2), so lassen sich die Formeln dadurch vereinfachen, daß $c^2 = 0$ gesetzt wird.
So wird aus Formel (4)

$$a = c \cos \varepsilon + b + c$$

und die Formeln (2) und (3) vereinfachen sich hiermit zu

$$x^{*} = 2b \cos \varepsilon$$

$$y^{*} = (2c + 2c \cos \varepsilon)\sin \varepsilon$$ [1].

Für $\varepsilon = 0^{\circ}$ erhält man die Profilnase

$$x_n^{*} = 2b,$$

so daß die Formeln zur Bestimmung der Profilkoordinaten bezogen auf die Profilnase lauten:

$$x = 2b - 2b \cos \varepsilon \qquad (12)$$

$$y = (2c + 2c \cos \varepsilon)\sin \varepsilon \qquad (13)$$

Die Profillänge ergibt sich zu

$$L = 4b \qquad (14)$$

und die Profilbreite ergibt sich mit $\varepsilon = 60^{\circ}$ zu

$$B = 3c\sqrt{3} \qquad (15)$$

Mit (14) wird aus (12)

$$\frac{x}{L} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \varepsilon$$

und hieraus

$$\cos \varepsilon = 1 - 2\,\frac{x}{L}$$

$$\sin \varepsilon = \sqrt{1 - \left(1 - 2\frac{x}{L}\right)^2}$$

Mit diesen Werten für cos ε und sin ε und mit (15) wird Formel (13) umgeformt:

$$\frac{y}{B/2} = \left[\frac{4}{3\sqrt{3}} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\left(1 - 2\frac{x}{L}\right)\right]\sqrt{1 - \left(1 - 2\frac{x}{L}\right)^2}$$

$$= \left(\frac{8}{3\sqrt{3}} - \frac{8}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{x}{L}\right)\sqrt{4\frac{x}{L} - 4\left(\frac{x}{L}\right)^2}$$

$$\frac{y}{B/2} = \frac{16}{3\sqrt{3}} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \sqrt{\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L}\right)^2}$$

$$\boxed{\frac{y}{B/2} = 3{,}08 \left(1 - \frac{x}{L}\right) \sqrt{\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L}\right)^2}} \tag{16}$$

Diese Interpolationsformel für symmetrische Joukowsky-Profile wird gelegentlich in der Literatur erwähnt. Die wichtigsten Merkmale der durch (16) dargestellten Kontur sind der verschwindende Schwanzwinkel, die vom Breitenverhältnis unabhängige Breitenrücklage $\frac{n}{L} = 0{,}25$ und der Nasenradius $\frac{r_n}{L} = 1{,}186 \left(\frac{B}{L}\right)^2$. Dabei ist der Nasenradius definiert durch

$$\frac{r_n}{L} = \lim_{\frac{x}{L} \to 0} \left[\frac{\left(\frac{y}{L}\right)^2}{2\frac{x}{L}} \right] \tag{17}$$

Die nach (16) berechneten Aufmaße symmetrischer Joukowsky-Profile sind in Tabelle 14 niedergelegt. Es wird hier noch einmal betont, daß durch Formel (16) nur schlanke Joukowsky-Profile (wobei also das Verhältnis $\frac{c}{b}$ bezw. $\frac{d}{l}$ genügend klein ist) dargestellt werden können. Zur Darstellung dickerer Profile ist Formel (16) ungeeignet. So erhält man z.B. für $\frac{d}{l} = 0{,}25$ (entsprechend $\frac{B}{L} = 0{,}2572$, Tab.15) aus Formel (16) eine Kontur, die im Vergleich mit der exakten nach Tabelle 5 eine maximale Abweichung im Nasen- und Schwanzteil von je $\Delta \frac{y}{L} = 0{,}0031$ zeigt. Dabei erscheint der Nasenteil zu ''dick'' und der Schwanzteil zu ''schlank''.

D. Näherung durch Polynom

In diesem Abschnitt sollen Interpolationsformeln für symmetrische Joukowsky-Profile in Form von Polynomen abgeleitet werden. Das Verfahren beruht auf die Tatsache, daß man jede im interessierenden Bereich stetige Kurve durch ein Polynom mit jeder beliebigen Genauigkeit darstellen kann [7]. Es sollen hier Interpolationsformeln abgeleitet werden, die symmetrische Joukowsky-Profile mit einem Breitenverhältnis $\frac{B}{L}$ von 0 bis etwa 0,30 ausreichend genähert darstellen und die außerdem ihre wichtigsten Formparameter genau wiedergeben. Zu den wichtigsten Formparametern der Profile gehören außer dem Breitenverhältnis $\frac{B}{L}$ und der Breitenrücklage $\frac{n}{L}$ vor allem der Nasenradius $\frac{r_n}{L}$, die Scheitelkrümmung $\frac{L}{r_B}$ (siehe Abb. 3), der Schwanzwinkel und die Profilvölligkeit. Es ist also zunächst die Aufgabe, diese Formparameter für eine Anzahl von Profilen zu ermitteln.

Die Werte von $\frac{B}{L}$ und $\frac{n}{L}$ sind im Abschnitt B für 6 Profile bereits ermittelt worden. Die zugehörigen Profilvölligkeiten erhält man durch Planimetrieren der Profile, deren exakt berechneten Aufmaße man in den Tabellen 1 bis 6 findet. Der Schwanzwinkel der Joukowsky-Profile beträgt bekanntlich Null Grad. Es sind also nur noch der Nasenradius und die Scheitelkrümmung zu ermitteln.

Der Nasenradius symmetrischer Joukowsky-Profile läßt sich auf folgender Weise rechnerisch ermitteln: Wird die Profilnase als Nullpunkt des Koordinatensystems gewählt (siehe Abb. 3), so läßt sich die Kontur durch ein Polynom der Form

$$\frac{y}{L} = \varrho_0 \sqrt{\frac{x}{L}} + \ldots$$

ausdrücken, wobei

$$\varrho_0 = \sqrt{\frac{2r_n}{L}}$$

definiert ist. Der Nasenradius ergibt sich also zu

$$\frac{r_n}{L} = \lim_{\frac{x}{L} \to 0} \left[\frac{\left(\frac{y}{L}\right)^2}{2\frac{x}{L}} \right] \qquad (17)$$

Aus (2) und (3) erhält man mit der Profilnase als Nullpunkt des Koordinatensystems zunächst die Formeln

$$\frac{y}{L} = \frac{\left(a - \frac{b^2}{a}\right)\sin\varepsilon}{L}$$

$$\frac{x}{L} = \frac{\frac{2b^2+4c^2+4bc}{b+2c} - \left(a + \frac{b^2}{a}\right)\cos\varepsilon}{L}$$

und mit (4)

$$\frac{y}{L} = \frac{1}{L}\left\{c\cos\varepsilon + \sqrt{c^2\cos^2\varepsilon+b^2+2bc} + \frac{b\left(c\cos\varepsilon - \sqrt{c^2\cos^2\varepsilon+b^2+2bc}\right)}{b+2c}\right\}\sin\varepsilon$$

$$\frac{x}{L} = \frac{1}{L}\left\{\frac{2b^2+4c^2+4bc}{b+2c} - \left[c\cos\varepsilon + \sqrt{c^2\cos^2\varepsilon+b^2+2bc} - \frac{b\left(c\cos\varepsilon - \sqrt{c^2\cos^2\varepsilon+b^2+2bc}\right)}{b+2c}\right]\cos\varepsilon\right\}$$

Da es sich in Nasennähe nur um kleine Werte von ε handelt, dürfen folgende Reihenentwicklungen benutzt werden:

$$\sin\varepsilon = \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3!} + \ldots = \varepsilon$$

$$\cos\varepsilon = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2!} + \ldots = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$$

$$\sqrt{c^2\cos^2\varepsilon+b^2+2bc} = \sqrt{c^2(1-\varepsilon^2)+b^2+2bc} = \sqrt{(b+c)^2 - c^2\varepsilon^2}$$

$$= (b+c)\sqrt{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{c^2\varepsilon^2}{(b+c)^2}} = b+c - \frac{1}{2}\cdot\frac{c^2\varepsilon^2}{b+c}$$

Mit diesen Reihenentwicklungen lauten die Formeln zur Bestimmung der Profilkoordinaten in Nasennähe:

$$\frac{y}{L} = \frac{1}{L}\left[c\left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\right) + b+c - \frac{c^2\varepsilon^2}{2(b+c)} + \frac{b}{b+2c}\left(c\left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\right) - b - c + \frac{c^2\varepsilon^2}{2(b+c)}\right)\right]\varepsilon$$

$$\frac{x}{L} = \frac{1}{L}\left[\frac{2b^2+4c^2+4bc}{b+2c} - c\left(1-\varepsilon^2\right) - \left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)\left(b+c - \frac{1}{2}\cdot\frac{c^2\varepsilon^2}{b+c}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{b}{b+2c}\left[c\left(1-\varepsilon^2\right) - \left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)\left(b+c - \frac{1}{2}\cdot\frac{c^2\varepsilon^2}{b+c}\right)\right]\right]$$

und bei Vernachlässigung der höheren Potenzen von ε :

$$\frac{y}{L} = \frac{\varepsilon}{L}\left[(b+2c) - \frac{b^2}{b+2c}\right] = \frac{4\,c\,\varepsilon}{L}\left(\frac{b+c}{b+2c}\right) \qquad (18)$$

$$\frac{x}{L} = \frac{1}{L}\left[\frac{2b^2+4c^2+4bc}{b+2c} - b - 2c + c\varepsilon^2 + \frac{c^2\varepsilon^2}{2(b+c)} + \frac{(b+c)\varepsilon^2}{2} + \frac{b}{b+2c}\left[-c\varepsilon^2 - b + \frac{c^2\varepsilon^2}{2(b+c)} + \frac{(b+c)\varepsilon^2}{2}\right]\right]$$

Mit

$$\frac{2b^2+4c^2+4bc}{b+2c} - b - 2c - \frac{b^2}{b+2c} = 0$$

wird

$$\frac{x}{L} = \frac{\varepsilon^2}{L}\left[c + \frac{c^2}{2(b+c)} + \frac{b+c}{2} + \frac{b}{b+2c}\left[-c + \frac{c^2}{2(b+c)} + \frac{b+c}{2}\right]\right]$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{L}\left(\frac{b^2+2bc+4c^2}{b+2c}\right) \qquad (19)$$

Mit den Formeln (18) und (19) wird (17)

$$\frac{r_n}{L} = \frac{\left(\frac{y}{L}\right)^2}{2\frac{x}{L}} = \frac{8c^2\left(\frac{b+c}{b+2c}\right)^2}{L\left(\frac{b^2+2bc+4c^2}{b+2c}\right)}$$

und mit

$$L = 4\,\frac{(b+c)^2}{b+2c} \qquad (9)$$

schließlich

$$\frac{r_n}{L} = \frac{2c^2}{b^2+2bc+4c^2} = \frac{2\left(\frac{c}{b}\right)^2}{1 + 2\frac{c}{b} + 4\left(\frac{c}{b}\right)^2}$$

Ersetzt man $\frac{c}{b}$ wieder durch $\frac{d}{l}$, so ergibt sich

$$\frac{r_n}{L} = \frac{2\left(\frac{d}{l}\right)^2}{1 + 2\frac{d}{l} + 4\left(\frac{d}{l}\right)^2} \qquad (20)$$

Vermittels Formel (20) kann man also den Nasenradius eines symmetrischen Joukowsky-Profils sehr gut berechnen [x]).

Die Scheitelkrümmung läßt sich mit ausreichender Genauigkeit auf graphisch-analytischem Wege ermitteln. Wird die Profilnase wieder als Nullpunkt des Koordinatensystems gewählt, so läßt sich die Kontur in Scheitelnähe durch ein Polynom der Form

[x]) Nach Fertigstellung dieser Arbeit ist dem Verfasser eine Veröffentlichung bekannt geworden [6], die u.a. Formeln zur Bestimmung der Profillänge und des Nasenradius enthält, die

$$\frac{y}{L} = a_0 + a_2 \left(\frac{x}{L} - \frac{n}{L}\right)^2 + \ldots$$

ausdrücken, wobei

$$a_0 = \text{Scheitelordinate} = \frac{B}{2L}$$

und

$$a_2 = \text{halbe Scheitelkrümmung} = \frac{L}{2r_B}$$

ist. Die halbe Scheitelkrümmung ergibt sich somit zu

$$\frac{L}{2r_B} = \lim_{\left(\frac{x}{L} - \frac{n}{L}\right) \to 0} \left[\frac{\frac{y}{L} - \frac{B}{2L}}{\left(\frac{x}{L} - \frac{n}{L}\right)^2}\right] \tag{21}$$

In Tabelle 18 sind für die 6 Profile die Werte von $\frac{\frac{y}{L} - \frac{B}{2L}}{\left(\frac{x}{L} - \frac{n}{L}\right)^2}$ für einige Profilpunkte in Scheitelnähe berechnet worden. (Die Koordinaten $\frac{x}{L}$ und $\frac{y}{L}$ sind den Tabellen 1 bis 6 entnommen.) Durch Auftragen dieser Werte über $\frac{x}{L} - \frac{n}{L}$ und Ausstraken der Kurven erhält man an der Stelle $\frac{x}{L} - \frac{n}{L} = 0$ die zugehörigen Werte von $\frac{L}{2r_B}$ (Abb. 4).

In Tabelle 15 sind die Breitenverhältnisse $\frac{B}{L}$, die Breitenrücklagen $\frac{n}{L}$, die Nasenradien $\frac{r_n}{L}$, die Scheitelkrümmungen $\frac{L}{r_B}$ und die Völligkeiten der 6 untersuchten symmetrischen Joukowsky-Profile zusammengestellt. Dabei sind die Völligkeiten getrennt für Nasenteil $= \frac{1}{L^2} \int_0^n y \, dx$ und Schwanzteil $= \frac{1}{L^2} \int_n^L y \, dx$ angegeben. Eine graphische Darstellung dieser Formparameter über dem Verhältnis $\frac{d}{L}$ findet man in Abb. 5 . In Tabelle 16 ist schließlich eine der Abb. 5 entnommene Zusammenstellung der Formparameter in Abhängigkeit vom Verhältnis $\frac{B}{L}$. Für grobe Rechnungen läßt sich zwischen der Scheitelkrümmung, dem Breitenverhältnis und der Völligkeit des Schwanzteils für Profile mit einem Verhältnis $\frac{B}{L}$ bis 0,30 die Beziehung schreiben:

$$\frac{L}{r_B} = 5 \, \frac{B}{L} = \frac{25}{L^2} \int_n^L y \, dx$$

Nachdem die wichtigsten Formparameter der Profile ermittelt worden sind, wird jetzt auf die Herleitung der Interpolationsformeln übergegangen.

Die Interpolationspolynome werden getrennt für den Nasenteil und Schwanzteil des Profils aufgestellt. Jedes Interpolationspolynom hat die Form

$$\eta = a_0 + \varrho_0 \cdot \xi + a_1 \cdot \xi + a_2 \cdot \xi^2 + a_3 \cdot \xi^3 + \ldots \qquad (22)$$

wobei für den Nasenteil

$$\eta = \frac{y}{n} ; \qquad \xi = \frac{x}{n} ; \qquad 0 = \xi = 1$$

und für den Schwanzteil

$$\eta = \frac{y}{L - n} ; \ \xi = \frac{L - x}{L - n} ; \ 0 = \xi = 1$$

ist, mit

$$n = \text{Nasenlänge}$$

und

$$L - n = \text{Schwanzlänge (siehe Abb. 3).}$$

Die Interpolationspolynome sollen so beschaffen sein, daß sie die wichtigsten Formparameter der darzustellenden Profile genau wiedergeben. Die Werte von $\frac{B}{L}$, $\frac{n}{L}$, $\frac{r_n}{L}$, $\frac{L}{r_B}$, $\frac{1}{L^2} \int_0^n y \, dx$ und $\frac{1}{L^2} \int_n^L y \, dx$ sowie die verschwindenden Schwanzwinkel der darzustellenden Profile sollen also durch das Interpolationspolynom erhalten bleiben. Für den Nasenteil sind also

die Anfangsabrundung $\varrho_0 = \frac{2 r_n}{n}$

die Endordinate $\eta_1 = \eta_{(\xi=1)} = \frac{B}{2n}$

die Endkrümmung $\eta_1'' = \eta''_{(\xi=1)} = - \frac{n}{r_B}$

und die Völligkeit $\varepsilon_F = \int_0^1 \eta \, d\xi = \frac{1}{n^2} \int_0^n y \, dx$

vorgeschrieben. Außerdem ist

die Anfangsordinate $\eta_0 = \eta_{(\xi=0)} = 0$

und ebenfalls

die Endneigung $\eta_1' = \eta'_{(\xi=1)} = 0$

Der Nasenteil läßt sich also durch ein Polynom 4.Grades der Form (22) darstellen, das obengenannten 6 Bedingungen genügt und dessen symbolische Schreibweise 7 lautet:

$$\eta = \varrho_0 \left(\frac{4 \cdot \varrho_0}{\eta_0 \; \eta_1 \; \eta_1' \; \eta_1'' \; \varepsilon_F} \right) + \eta_1 \left(\frac{4 \cdot \eta_1}{\varrho_0 \; \eta_0 \; \eta_1' \; \eta_1'' \; \varepsilon_F} \right)$$
$$+ \eta_1'' \left(\frac{4 \cdot \eta_1''}{\varrho_0 \; \eta_0 \; \eta_1 \; \eta_1' \; \varepsilon_F} \right) + \varepsilon_F \left(\frac{4 \cdot \varepsilon_F}{\varrho_0 \; \eta_0 \; \eta_1 \; \eta_1' \; \eta_1''} \right)$$

Die der symbolischen Schreibweise entsprechenden Polynome sind dem Tabellenwerk [8] zu entnehmen. Das <u>Polynom für den Nasenteil</u> lautet dann voll ausgeschrieben:

$$\eta = \varrho_0 \left(\xi - 2{,}916\overline{6}\;\xi + 4{,}375\;\xi^2 - 3{,}5\;\xi^3 + 1{,}0416\overline{6}\;\xi^4 \right)$$
$$+ \eta_1 \left(- 12\;\xi + 42\;\xi^2 - 44\;\xi^3 + 15\;\xi^4 \right)$$
$$+ \eta_1'' \left(- 0{,}3\overline{3}\;\xi + 1{,}5\;\xi^2 - 2\;\xi^3 + 0{,}83\overline{3}\;\xi^4 \right)$$
$$+ \varepsilon_F \left(20\;\xi - 60\;\xi^2 + 60\;\xi^3 - 20\;\xi^4 \right) \qquad (23)$$

Für den Schwanzteil des Profils sind entsprechend

die Endordinate $\eta_1 = \eta_{(\xi=1)} = \dfrac{B}{2(L-n)}$

die Endkrümmung $\eta_1'' = \eta''_{(\xi=1)} = -\dfrac{L-n}{r_B}$

und die Völligkeit $\varepsilon_F = \int_0^1 \eta \, d\xi = \dfrac{1}{(L-n)^2} \int_n^L y \, dx$

vorgeschrieben. Außerdem ist hier

die Anfangsabrundung $\varrho_0 = 0$

die Anfangsordinate $\eta_0 = \eta_{(\xi=0)} = 0$

die Anfangsneigung $\eta_0' = \eta'_{(\xi=\varrho_0=0)} = 0$

und die Endneigung $\eta_1' = \eta'_{(\xi=1)} = 0$

Der Schwanzteil läßt sich also durch ein Polynom 5.Grades darstellen, das obengenannten 7 Bedingungen genügt und dessen symbolische Schreibweise lautet:

$$\eta = \eta_1 \left(\frac{5 \cdot \eta_1}{\varrho_0 \; \eta_0 \; \eta_0' \; \eta_1' \; \eta_1'' \; \varepsilon_F} \right) + \eta_1'' \left(\frac{5 \cdot \eta_1''}{\varrho_0 \; \eta_0 \; \eta_0' \; \eta_1 \; \eta_1' \; \varepsilon_F} \right)$$
$$+ \varepsilon_F \left(\frac{5 \cdot \varepsilon_F}{\varrho_0 \; \eta_0 \; \eta_0' \; \eta_1 \; \eta_1' \; \eta_1''} \right)$$

Die der symbolischen Schreibweise entsprechenden Polynome sind ebenfalls dem zitierten Tabellenwerk zu entnehmen. Das <u>Polynom für den Schwanzteil</u> lautet dann voll ausgeschrieben:

$$\eta = \eta_1 \, (-\,30\,\xi^2 + 100\,\xi^3 - 105\,\xi^4 + 36\,\xi^5)$$
$$+\ \eta_1''(-\,0{,}5\,\xi^2 + 2\,\xi^3 - 2{,}5\,\xi^4 + \xi^5)$$
$$+\ \varepsilon_F\,(\,60\,\xi^2 - 180\,\xi^3 + 180\,\xi^4 - 60\,\xi^5) \qquad (24)$$

Eine Aufmaßberechnung nach (23) und (24) läßt sich schnell ausführen, da die Aufmaße der in Klammern gesetzten Funktionen (''Einflußfunktionen'' genannt) ebenfalls dem zitierten Tabellenwerk entnommen werden können. Die ganze Rechenarbeit beschränkt sich also auf eine einfache Addition von Produkten.

Die vorgeschriebenen Konturparameter für den Nasenteil und Schwanzteil der 6 symmetrischen Joukowsky-Profile sind in Tabelle 17 zusammengestellt. Die vermittels (23) und (24) berechneten Aufmaße dieser Profile sind in den Tabellen 7 bis 12 niedergelegt. (In [7], Formel (36), ist eine schlechte Näherung für $\frac{d}{L} = 0{,}25$ angegeben worden.) Die vermittels (23) und (24) erhaltenen Konturen unterscheiden sich im Nasenteil kaum von den exakten. Die größte Abweichung für jedes der 6 Profile beträgt im Nasenteil $\Delta\,\frac{y}{L} = 0{,}0002$. Im Schwanzteil treten größere Abweichungen auf, die jedoch im Rahmen des Zulässigen liegen. Die größten Abweichungen betragen im Schwanzteil

für	Profil	$\frac{d}{L}$ =	0,05	:	$\Delta\,\frac{y}{L}$ =	0,0003
,,	,,	,,	0,10	:	,,	0,0008
,,	,,	,,	0,15	:	,,	0,0012
,,	,,	,,	0,20	:	,,	0,0017
,,	,,	,,	0,25	:	,,	0,0020
,,	,,	,,	0,30	:	,,	0,0022

Mit Hilfe der Formeln (23) und (24) lassen sich also symmetrische Joukowsky-Profile bis zu einem Breitenverhältnis von etwa 0,30 ausreichend genähert darstellen.

Zum Schluß sollen die Aufmaße eines symmetrischen Joukowsky-Profils mit einem Breitenverhältnis $\frac{B}{L} = 0{,}25$ nach den Näherungspolynomen (23) und (24) ermittelt werden. Für $\frac{B}{L} = 0{,}25$ erhält man aus Abb. 5 oder Tab. 16 die Profilparameter:

$$\frac{n}{L} = 0{,}264$$

$$\frac{r_n}{L} = 0{,}068$$

$$\frac{L}{r_B} = 1{,}274$$

$$\frac{1}{L^2}\int_0^n y\,dx = 0{,}02655$$

$$\frac{1}{L^2}\int_n^L y\,dx = 0{,}04977$$

Hiermit eregeben sich die Konturparameter des <u>Nasenteils</u> zu

$$\varrho_0 = \frac{2r_n}{n} = 0{,}718$$

$$\eta_1 = \frac{B}{2n} = 0{,}4735$$

$$\eta_1'' = -\frac{n}{r_B} = -\,0{,}3363$$

$$\varepsilon_F = \frac{1}{n^2}\int_0^n y\,dx = 0{,}3809$$

und die des <u>Schwanzteils</u> zu

$$\eta_1 = \frac{B}{2(L-n)} = 0{,}1698$$

$$\eta_1'' = -\frac{L-n}{r_B} = -\,0{,}9377$$

$$\varepsilon_F = \frac{1}{(L-n)^2}\int_n^L y\,dx = 0{,}0919$$

Die mit diesen Parametern und den Formeln (23) und (24) berechneten Aufmaße des Profils sind in Tabelle 13 niedergelegt.

E. Zusammenfassung

Aus der Joukowsky-Transformation werden Formeln abgeleitet, mit denen man die Koordinaten symmetrischer Joukowsky-Profile exakt und schnell berechnen kann. Eine Aufmaßberechnung vermittels dieser Formeln wird für 6 Profile durchgeführt. Eine Linearisierung der Formeln ist nur zur Darstellung sehr schlanker Joukowsky-Profile zulässig. Die wichtigsten Formparameter symmetrischer Joukowsky-Profile werden angegeben. Die Breitenverhältnisse, Breitenrücklagen und Nasenradien lassen sich rechnerisch gut ermitteln, während die Scheitelkrümmungen und Profilvölligkeiten graphisch bestimmt werden können. Einfache Näherungspolynome zur Darstellung symmetrischer Joukowsky-Profile werden abgeleitet. Vermittels dieser Polynome können symmetrische Joukowsky-Profile bis zu einem Breitenverhältnis von 0,30 ausreichend genau dargestellt werden.

F. Schrifttum

[1] Durand,W.F.: Application of Conformal Transformation to Fields of Flow. In ''Durand: Aerodynamic Theory I'' S. 171 - 185, Berlin, Springer 1934.

[2] v.Kármán,Th. und Burgers,J.M.: Application of the Theory of Conformal Transformation to the Investigation of the Flow around Airfoil Profiles. In ''Durand: Aerodynamic Theory II'' S. 58 - 99, Berlin, Springer 1935.

[3] Thieme,H.: Zur Formgebung von Schiffsrudern. Jahrbuch der STG 1962, S. 381 - 422.

[4] Trefftz,E.: Graphische Konstruktion Joukowskischer Tragflächen. Z.F.M. 1913, S. 130.

[5] Autorenkollektiv, herausgegeben von L.Prandtl und A.Betz: Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen, III.und IV. Lieferung.

[6] Schlichting,H. und Ulrich,A.: Zur Berechnung des Umschlages laminar/turbulent. Jahrbuch 1942 der deutschen Luftfahrtforschung, S. 8 - 35.

[7] Kwik,K.H.: Grundlagen zur Darstellung der Profilform von Schiffsrudern. Schiff und Hafen 1962, S. 853 - 859.

[8] Kwik,K.H.: Tabellen zur Darstellung der Konturen von Schiffslinien und Ruderprofilen. Bericht Nr.114 des Instituts für Schiffbau der Universität Hamburg.

$\frac{x}{n}$	$\frac{y}{n}$	$\frac{x}{L}$	$\frac{y}{L}$
0	0	0	0
0,02	0,02665	0,0050	0,0067
0,05	0,04189	0,0126	0,0105
0,10	0,05847	0,0251	0,0147
0,20	0,07990	0,0502	0,0201
0,30	0,09397	0,0753	0,0236
0,40	0,10381	0,1004	0,0261
0,50	0,11081	0,1255	0,0278
0,70	0,11919	0,1757	0,0299
0,90	0,12269	0,2259	0,0308
1,0	0,12310	0,2510	0,0309
$\frac{L-x}{L-n}$	$\frac{y}{L-n}$		
1,0	0,04130	0,2510	0,0309
0,90	0,04024	0,3259	0,0301
0,80	0,03752	0,4008	0,0281
0,70	0,03365	0,4757	0,0252
0,60	0,02893	0,5506	0,0217
0,50	0,02356	0,6255	0,0176
0,40	0,01772	0,7004	0,0133
0,30	0,01175	0,7753	0,0088
0,20	0,00616	0,8502	0,0046
0,10	0,00182	0,9251	0,0014
0	0	1,0	0

Tabelle 7 Aufmaße des symmetrischen Joukowsky-Profils $\frac{d}{L} = 0{,}05$ nach Näherungspolynom (23),(24)

$\frac{x}{n}$	$\frac{y}{n}$	$\frac{x}{L}$	$\frac{y}{L}$
0	0	0	0
0,02	0,04946	0,0051	0,0125
0,05	0,07712	0,0127	0,0195
0,10	0,10703	0,0253	0,0271
0,20	0,14616	0,0506	0,0370
0,30	0,17275	0,0759	0,0437
0,40	0,19216	0,1012	0,0486
0,50	0,20655	0,1265	0,0523
0,70	0,22450	0,1771	0,0568
0,90	0,23198	0,2277	0,0587
1,0	0,23280	0,2530	0,0589
$\frac{L - x}{L - n}$	$\frac{y}{L - n}$		
1,0	0,07880	0,2530	0,0589
0,90	0,07679	0,3277	0,0574
0,80	0,07163	0,4024	0,0535
0,70	0,06423	0,4771	0,0480
0,60	0,05517	0,5518	0,0412
0,50	0,04484	0,6265	0,0335
0,40	0,03365	0,7012	0,0251
0,30	0,02224	0,7759	0,0166
0,20	0,01163	0,8506	0,0087
0,10	0,00342	0,9253	0,0026
0	0	1,0	0

Tabelle 8 Aufmaße des symmetrischen Joukowsky-Profils $\frac{d}{L} = 0,10$ nach Näherungspolynom (23),(24)

$\frac{x}{n}$	$\frac{y}{n}$	$\frac{x}{L}$	$\frac{y}{L}$
0	0	0	0
0,02	0,06978	0,0051	0,0179
0,05	0,10888	0,0128	0,0279
0,10	0,15119	0,0256	0,0387
0,20	0,20655	0,0512	0,0529
0,30	0,24416	0,0768	0,0625
0,40	0,27162	0,1024	0,0695
0,50	0,29200	0,1280	0,0748
0,70	0,31752	0,1792	0,0813
0,90	0,32830	0,2304	0,0840
1,0	0,32950	0,2560	0,0844
$\frac{L - x}{L - n}$	$\frac{y}{L - n}$		
1,0	0,11340	0,2560	0,0844
0,90	0,11048	0,3304	0,0822
0,80	0,10304	0,4048	0,0767
0,70	0,09245	0,4792	0,0688
0,60	0,07952	0,5536	0,0592
0,50	0,06476	0,6280	0,0482
0,40	0,04875	0,7024	0,0363
0,30	0,03232	0,7768	0,0240
0,20	0,01696	0,8512	0,0126
0,10	0,00501	0,9256	0,0037
0	0	1,0	0

Tabelle 9 Aufmaße des symmetrischen Joukowsky-Profils $\frac{d}{l} = 0,15$ nach Näherungspolynom (23),(24)

$\frac{x}{n}$	$\frac{y}{n}$	$\frac{x}{L}$	$\frac{y}{L}$
0	0	0	0
0,02	0,08735	0,0052	0,0227
0,05	0,13646	0,0130	0,0355
0,10	0,18970	0,0260	0,0493
0,20	0,25941	0,0520	0,0674
0,30	0,30669	0,0780	0,0797
0,40	0,34114	0,1040	0,0887
0,50	0,36664	0,1300	0,0953
0,70	0,39851	0,1820	0,1036
0,90	0,41199	0,2340	0,1071
1,0	0,41350	0,2600	0,1075
$\frac{L - x}{L - n}$	$\frac{y}{L - n}$		
1,0	0,14530	0,2600	0,1075
0,90	0,14167	0,3340	0,1048
0,80	0,13236	0,4080	0,0979
0,70	0,11899	0,4820	0,0881
0,60	0,10252	0,5560	0,0759
0,50	0,08362	0,6300	0,0619
0,40	0,06299	0,7040	0,0466
0,30	0,04179	0,7780	0,0309
0,20	0,02192	0,8520	0,0162
0,10	0,00647	0,9260	0,0048
0	0	1,0	0

Tabelle 10 Aufmaße des symmetrischen Joukowsky-Profils $\frac{d}{l}$ = 0,20 nach Näherungspolynom (23),(24)

$\frac{x}{n}$	$\frac{y}{n}$	$\frac{x}{L}$	$\frac{y}{L}$
0	0	0	0
0,02	0,10277	0,0053	0,0272
0,05	0,16105	0,0133	0,0427
0,10	0,22440	0,0265	0,0595
0,20	0,30712	0,0530	0,0814
0,30	0,36267	0,0795	0,0961
0,40	0,40264	0,1060	0,1067
0,50	0,43189	0,1325	0,1145
0,70	0,46811	0,1855	0,1240
0,90	0,48353	0,2385	0,1281
1,0	0,48530	0,2650	0,1286
$\frac{L-x}{L-n}$	$\frac{y}{L-n}$		
1,0	0,17500	0,2650	0,1286
0,90	0,17074	0,3385	0,1255
0,80	0,15965	0,4120	0,1173
0,70	0,14356	0,4855	0,1056
0,60	0,12360	0,5590	0,0908
0,50	0,10063	0,6325	0,0740
0,40	0,07559	0,7060	0,0556
0,30	0,04996	0,7795	0,0367
0,20	0,02610	0,8530	0,0192
0,10	0,00767	0,9265	0,0056
0	0	1,0	0

Tabelle 11 Aufmaße des symmetrischen Joukowsky-Profils $\frac{d}{l} = 0,25$ nach Näherungspolynom (23),(24)

$\frac{x}{n}$	$\frac{y}{n}$	$\frac{x}{L}$	$\frac{y}{L}$
0	0	0	0
0,02	0,11494	0,0054	0,0310
0,05	0,17974	0,0135	0,0485
0,10	0,25010	0,0270	0,0675
0,20	0,34240	0,0540	0,0924
0,30	0,40512	0,0810	0,1094
0,40	0,45089	0,1080	0,1217
0,50	0,48484	0,1350	0,1309
0,70	0,52750	0,1890	0,1424
0,90	0,54573	0,2430	0,1473
1,0	0,54780	0,2700	0,1479

$\frac{L - x}{L - n}$	$\frac{y}{L - n}$		
1,0	0,20260	0,2700	0,1479
0,90	0,19781	0,3430	0,1444
0,80	0,18532	0,4160	0,1353
0,70	0,16712	0,4890	0,1220
0,60	0,14438	0,5620	0,1054
0,50	0,11799	0,6350	0,0861
0,40	0,08897	0,7080	0,0649
0,30	0,05903	0,7810	0,0431
0,20	0,03095	0,8540	0,0226
0,10	0,00912	0,9270	0,0067
0	0	1,0	0

Tabelle 12 Aufmaße des symmetrischen Joukowsky-Profils $\frac{d}{l} = 0,30$ nach Näherungspolynom (23),(24)

$\frac{x}{n}$	$\frac{y}{n}$	$\frac{x}{L}$	$\frac{y}{L}$
0	0	0	0
0,02	0,10049	0,0053	0,0265
0,05	0,15744	0,0132	0,0416
0,10	0,21932	0,0264	0,0579
0,20	0,30004	0,0528	0,0792
0,30	0,35419	0,0792	0,0935
0,40	0,39311	0,1056	0,1038
0,50	0,42158	0,1320	0,1113
0,70	0,45680	0,1848	0,1206
0,90	0,47178	0,2376	0,1245
1,0	0,47350	0,2640	0,1250

$\frac{L-x}{L-n}$	$\frac{y}{L-n}$		
1,0	0,16980	0,2640	0,1250
0,90	0,16565	0,3376	0,1219
0,80	0,15491	0,4112	0,1140
0,70	0,13940	0,4848	0,1026
0,60	0,12017	0,5584	0,0884
0,50	0,09803	0,6320	0,0722
0,40	0,07382	0,7056	0,0543
0,30	0,04893	0,7792	0,0360
0,20	0,02564	0,8528	0,0189
0,10	0,00755	0,9264	0,0056
0	0	1,0	0

Tabelle 13 Aufmaße des symmetrischen Joukowsky-Profils $\frac{B}{L} = 0,25$ nach Näherungspolynom (23),(24)

$\frac{x}{L}$	$\frac{y}{B/2}$
0	0
0,005	0,2162
0,0125	0,3380
0,025	0,4688
0,05	0,6380
0,10	0,8315
0,15	0,9342
0,20	0,9855
0,25	1,0
0,30	0,9880
0,40	0,9053
0,50	0,7700
0,60	0,6035
0,70	0,4233
0,80	0,2462
0,90	0,0924
1,0	0

Tabelle 14 Aufmaße symmetrischer Joukowsky-Profile nach Näherungsformel (16)

$\frac{d}{L}$	$\varepsilon(y_{max})$	$\frac{B}{L}$	$\frac{n}{L}$	$\frac{r_n}{L}$	$\frac{L}{r_B}$	$\frac{1}{L^2}\int_o^n y\ dx$	$\frac{1}{L^2}\int_n^L y\ dx$
0,05	60^o	0,0618	0,251	0,0045	0,324	0,00630	0,01245
0,10	$59^o50'$	0,1178	0,253	0,0161	0,610	0,01195	0,02360
0,15	$59^o48'$	0,1687	0,256	0,0324	0,894	0,01730	0,03375
0,20	$59^o40'$	0,2150	0,260	0,0513	1,112	0,02240	0,04300
0,25	$59^o28'$	0,2572	0,265	0,0714	1,304	0,02740	0,05105
0,30	$59^o22'$	0,2958	0,270	0,0918	1,476	0,03195	0,05870

Tabelle 15 Formparameter symmetrischer Joukowsky-Profile in Abhängigkeit vom Verhältnis $\frac{d}{L}$

$\frac{B}{L}$	$\frac{n}{L}$	$\frac{r_n}{L}$	$\frac{L}{r_B}$	$\frac{1}{L^2}\int_0^n y\,dx$	$\frac{1}{L^2}\int_n^L y\,dx$
0,05	0,251	0,0034	0,267	0,00520	0,01025
0,06	0,251	0,0044	0,318	0,00620	0,01222
0,07	0,251	0,0060	0,369	0,00720	0,01422
0,08	0,252	0,0078	0,420	0,00820	0,01620
0,09	0,252	0,0098	0,471	0,00920	0,01818
0,10	0,252	0,0121	0,522	0,01020	0,02016
0,11	0,253	0,0145	0,575	0,01120	0,02214
0,12	0,253	0,0171	0,628	0,01220	0,02412
0,13	0,254	0,0200	0,681	0,01320	0,02610
0,14	0,254	0,0230	0,735	0,01424	0,02809
0,15	0,255	0,0262	0,790	0,01530	0,03008
0,16	0,255	0,0296	0,845	0,01636	0,03207
0,17	0,256	0,0332	0,898	0,01743	0,03406
0,18	0,257	0,0369	0,947	0,01850	0,03604
0,19	0,258	0,0409	0,996	0,01960	0,03802
0,20	0,259	0,0450	1,044	0,02071	0,04000
0,21	0,260	0,0493	1,091	0,02184	0,04197
0,22	0,261	0,0539	1,138	0,02300	0,04394
0,23	0,262	0,0585	1,184	0,02419	0,04589
0,24	0,263	0,0631	1,229	0,02538	0,04783
0,25	0,264	0,0680	1,274	0,02655	0,04977
0,26	0,265	0,0730	1,318	0,02772	0,05170
0,27	0,267	0,0781	1,362	0,02889	0,05363
0,28	0,268	0,0832	1,406	0,03006	0,05556
0,29	0,269	0,0885	1,450	0,03120	0,05749

Tabelle 16 Formparameter symmetrischer Joukowsky-Profile in Abhängigkeit vom Verhältnis $\frac{B}{L}$

Nasenteil:

$\frac{d}{L}$	$\varrho_0 = \sqrt{\frac{2r_n}{n}}$	$\eta_1 = \frac{B}{2n}$	$\eta_1'' = -\frac{n}{r_B}$	$\varepsilon_F = \frac{1}{n^2}\int_0^n y\ dx$
0,05	0,189	0,1231	-0,0813	0,1000
0,10	0,357	0,2328	-0,1543	0,1867
0,15	0,503	0,3295	-0,2289	0,2640
0,20	0,628	0,4135	-0,2891	0,3314
0,25	0,734	0,4853	-0,3456	0,3902
0,30	0,825	0,5478	-0,3985	0,4383

Schwanzteil:

$\frac{d}{L}$	$\eta_1 = \frac{B}{2(L-n)}$	$\eta_1'' = -\frac{L-n}{r_B}$	$\varepsilon_F = \frac{1}{(L-n)^2}\int_n^L y\ dx$
0,05	0,0413	-0,2427	0,0222
0,10	0,0788	-0,4557	0,0423
0,15	0,1134	-0,6651	0,0610
0,20	0,1453	-0,8229	0,0785
0,25	0,1750	-0,9584	0,0945
0,30	0,2026	-1,0775	0,1102

Tabelle 17 Konturparameter symmetrischer Joukowsky-Profile

Profil $\frac{d}{L} = 0{,}05$, $\frac{B}{2L} = 0{,}0309$, $\frac{n}{L} = 0{,}251$:

$\frac{x}{L}$	$\frac{x}{L} - \frac{n}{L}$	$\left(\frac{x}{L} - \frac{n}{L}\right)^2$	$\frac{y}{L}$	$\frac{y}{L} - \frac{B}{2L}$	$\dfrac{\frac{y}{L} - \frac{B}{2L}}{\left(\frac{x}{L} - \frac{n}{L}\right)^2}$
0,06739	-0,18361	0,03371	0,02221	-0,00869	-0,2578
0,11763	-0,13337	0,01779	0,02702	-0,00388	-0,2181
0,17949	-0,07151	0,00511	0,02995	-0,00095	-0,1859
0,33016	0,07916	0,00627	0,03000	-0,00090	-0,1435
0,41437	0,16337	0,02669	0,02749	-0,00341	-0,1278
0,50113	0,25013	0,06257	0,02378	-0,00712	-0,1138

Aus Abb. 4 : $\frac{L}{2r_B} = 0{,}162$

Profil $\frac{d}{L} = 0{,}10$, $\frac{B}{2L} = 0{,}0589$, $\frac{n}{L} = 0{,}253$:

$\frac{x}{L}$	$\frac{x}{L} - \frac{n}{L}$	$\left(\frac{x}{L} - \frac{n}{L}\right)^2$	$\frac{y}{L}$	$\frac{y}{L} - \frac{B}{2L}$	$\dfrac{\frac{y}{L} - \frac{B}{2L}}{\left(\frac{x}{L} - \frac{n}{L}\right)^2}$
0,06847	-0,18453	0,03405	0,04239	-0,01651	-0,4849
0,11934	-0,13366	0,01786	0,05155	-0,00735	-0,4115
0,18181	-0,07119	0,00507	0,05712	-0,00178	-0,3511
0,33326	0,08026	0,00644	0,05717	-0,00173	-0,2686
0,41753	0,16453	0,02707	0,05236	-0,00654	-0,2416
0,50413	0,25113	0,06307	0,04527	-0,01363	-0,2161

Aus Abb. 4 : $\frac{L}{2r_B} = 0{,}305$

Profil $\frac{d}{L} = 0{,}15$, $\frac{B}{2L} = 0{,}0844$, $\frac{n}{L} = 0{,}256$:

$\frac{x}{L}$	$\frac{x}{L} - \frac{n}{L}$	$\left(\frac{x}{L} - \frac{n}{L}\right)^2$	$\frac{y}{L}$	$\frac{y}{L} - \frac{B}{2L}$	$\dfrac{\frac{y}{L} - \frac{B}{2L}}{\left(\frac{x}{L} - \frac{n}{L}\right)^2}$
0,07004	-0,18596	0,03458	0,06078	-0,02362	-0,6831
0,12184	-0,13416	0,01800	0,07389	-0,01051	-0,5839
0,18521	-0,07079	0,00501	0,08182	-0,00258	-0,5150
0,33779	0,08179	0,00669	0,08178	-0,00262	-0,3916
0,42215	0,16615	0,02761	0,07485	-0,00955	-0,3459
0,50851	0,25251	0,06376	0,06466	-0,01974	-0,3096

Aus Abb. 4 : $\frac{L}{2r_B} = 0{,}447$

Tabelle 18 **Zur Ermittlung der Scheitelkrümmungen** symmetrischer Joukowsky-Profile

Profil $\frac{d}{L} = 0{,}20$, $\frac{B}{2L} = 0{,}1075$, $\frac{n}{L} = 0{,}260$:

$\frac{x}{L}$	$\frac{x}{L} - \frac{n}{L}$	$\left(\frac{x}{L} - \frac{n}{L}\right)^2$	$\frac{y}{L}$	$\frac{y}{L} - \frac{B}{2L}$	$\frac{\frac{y}{L} - \frac{B}{2L}}{\left(\frac{x}{L} - \frac{n}{L}\right)^2}$
0,07197	-0,18803	0,03536	0,07761	-0,02989	-0,8453
0,12492	-0,13508	0,01825	0,09429	-0,01321	-0,7238
0,18939	-0,07061	0,00499	0,10435	-0,00315	-0,6313
0,34336	0,08336	0,00695	0,10412	-0,00338	-0,4863
0,42782	0,16782	0,02816	0,09520	-0,01230	-0,4368
0,51389	0,25389	0,06446	0,08217	-0,02533	-0,3930

Aus Abb. 4 : $\frac{L}{2r_B} = 0{,}556$

Profil $\frac{d}{L} = 0{,}25$, $\frac{B}{2L} = 0{,}1286$, $\frac{n}{L} = 0{,}265$:

$\frac{x}{L}$	$\frac{x}{L} - \frac{n}{L}$	$\left(\frac{x}{L} - \frac{n}{L}\right)^2$	$\frac{y}{L}$	$\frac{y}{L} - \frac{B}{2L}$	$\frac{\frac{y}{L} - \frac{B}{2L}}{\left(\frac{x}{L} - \frac{n}{L}\right)^2}$
0,07416	-0,19084	0,03642	0,09305	-0,03555	-0,9761
0,12842	-0,13658	0,01865	0,11299	-0,01561	-0,8370
0,19414	-0,07086	0,00502	0,12494	-0,00366	-0,7291
0,34970	0,08470	0,00717	0,12443	-0,00417	-0,5816
0,43427	0,16927	0,02865	0,11365	-0,01495	-0,5218
0,52000	0,25500	0,06503	0,09798	-0,03062	-0,4709

Aus Abb. 4 : $\frac{L}{2r_B} = 0{,}652$

Profil $\frac{d}{L} = 0{,}30$, $\frac{B}{2L} = 0{,}1479$, $\frac{n}{L} = 0{,}270$:

$\frac{x}{L}$	$\frac{x}{L} - \frac{n}{L}$	$\left(\frac{x}{L} - \frac{n}{L}\right)^2$	$\frac{y}{L}$	$\frac{y}{L} - \frac{B}{2L}$	$\frac{\frac{y}{L} - \frac{B}{2L}}{\left(\frac{x}{L} - \frac{n}{L}\right)^2}$
0,07654	-0,19346	0,03743	0,10727	-0,04063	-1,0855
0,13222	-0,13778	0,01898	0,13016	-0,01774	-0,9347
0,19929	-0,07071	0,00500	0,14381	-0,00409	-0,8180
0,35657	0,08657	0,00749	0,14293	-0,00497	-0,6636
0,44127	0,17127	0,02933	0,13039	-0,01751	-0,5970
0,52663	0,25663	0,06586	0,11227	-0,03563	-0,5410

Aus Abb. 4 : $\frac{L}{2r_B} = 0{,}738$

Tabelle 18 (Fortsetzung) Zur Ermittlung der Scheitelkrümmungen symmetrischer Joukowsky-Profile