

379 | Januar 1979

## SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

W. Blendermann

### Berechnung von Trossensystemen nach der Klaffungsmethode

**TUHH**

*Technische Universität Hamburg-Harburg*

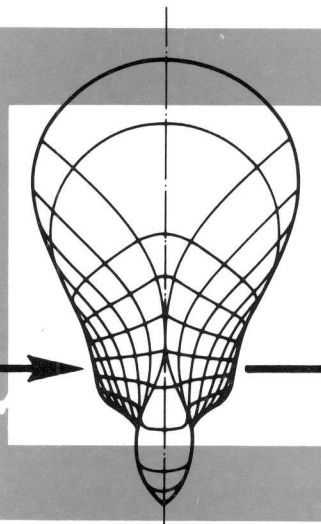
## Berechnung von Trossensystemen nach der Klaffungsmethode

W. Blendermann, 1. Auflage, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1979

© Technische Universität Hamburg-Harburg  
Schriftenreihe Schiffbau  
Schwarzenbergstraße 95c  
D-21073 Hamburg

<http://www.tuhh.de/vss>

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU  
DER UNIVERSITÄT HAMBURG



Berechnung von Trossensystemen nach der  
Klaffungsmethode

W. Blendermann

Januar 1979

Bericht Nr. 379

INSTITUT FUER SCHIFFBAU DER UNIVERSITAET HAMBURG

Bericht Nr. 379

BERECHNUNG VON TROSSENSYSTEMEN  
NACH DER KLAFFUNGSMETHODE

von

Werner Blendermann

Dieser Bericht ist im Zusammenhang mit Arbeiten des Verfassers für den Sonderforschungsbereich 94 "Meeresforschung in Hamburg" innerhalb des Serviceprojekts S 3 "Bojentechnologie, Verankerungs- und Schlepptechnik" entstanden

10. Januar 1979

## Übersicht

Die Klaffungsmethode eignet sich für beliebige Trossensysteme. Eine Anfangsgeometrie braucht nicht vorgegeben zu werden. Die in der Statik gebräuchliche Matrizen-Verschiebungsmethode (Argyris und Scharpf, 1972) und die in der Verankerungstechnik angewandte Methode der fiktiven Reaktion (method of imaginary reactions; Skop und O'Hara, 1970) sind als Sonderfälle im Verfahren enthalten.

Das zu berechnende Trossensystem wird in einzelne Trossen zerlegt, an denen innere und äußere Kräfte miteinander ins Gleichgewicht gebracht werden. Fügt man die Trossen wieder zusammen, so werden sie anfänglich einander und vorbestimmte Punkte verfehlen. Es kommt zu Klaffungen, deren Aufhebung unter der Bedingung des Kräftegleichgewichts zu einer Änderung der inneren Kräfte führt. Die Rechnung wird wiederholt, bis keine Klaffungen mehr auftreten.

Inhalt:

	Seite
Einleitung	1
Die Klaffungsmethode	2
Steifigkeit eines Trossenelements	3
Steifigkeit einer belasteten Trosse	8
Gleichgewichtszustand des Trossensystems	14
Anwendungsbeispiel	19
Zusammenfassung	22
Literatur	23
Anhang	24

## Einleitung

Bei allen Tätigkeiten auf dem Meer werden Seile, Ketten und Trossen in vielfältigen Konfigurationen verwendet. Diese reichen von der Verankerung eines Schiffes oder einer Boje (sog. Einpunkt-Verankerung) bis zum Flechtwerk eines Fischfangnetzes. Vieles gehört zum täglichen Handwerk auf See, und die Bemessung der Komponenten ist oft Sache seemännischer Erfahrung. Bei neuen Systemen wird man dagegen vor ihrem Einsatz Modellrechnungen durchführen. Bedarf besteht vor allem in der Meeresforschung und in der Offshoretechnik (z.B. bei Mehrpunkt-Verankerungen, Tensionleg-Verankerungen).

Für Aufgaben der Baustatik (Berechnung vorgespannter Netzwerke als Dachkonstruktion) haben Argyris und Scharpf (1972) die Matrizen-Verschiebungsmethode (matrix displacement method) aus aeronautischen Anwendungen heraus weiterentwickelt. Hier wird die Gleichgewichtsgeometrie eines vorgespannten Netzwerks iterativ aus dem (für kleine Formänderungen) linearen Zusammenhang zwischen Kräften und Verformung berechnet, indem man das anfänglich stets vorhandene Ungleichgewicht von äußeren und inneren Kräften als zusätzliche Belastung des Systems auffaßt. Die Geometrie des Netzwerks ist gefunden, wenn äußere und innere Kräfte innerhalb vorgegebener Grenzen einander die Waage halten. Das Verfahren erfordert die Vorgabe einer relativ guten Anfangsgeometrie.

Für Verankerungen mit mehr als einem Festpunkt (genauer: in mehr als drei Koordinaten gebunden) ohne in sich geschlossene Teile haben Skop und O'Hara (1970) die Methode der fiktiven Reaktion (method of imaginary reactions) entwickelt. Hier werden alle Festpunkte der Verankerung bis auf einen gelöst. Ausgehend von diesem Punkt wird die Geometrie des Trossensystems unter der Wirkung der äußeren Kräfte und dem zunächst geschätzten Zug auf die nun freien Trossenenden ermittelt. Die Trossen werden die zugehörigen Festpunkte zunächst verfehlen. Zusätzliche

Kräfte sind nötig, um die entstandenen Klaffungen aufzuheben. Das Verfahren arbeitet mit fiktiven, auf die Festpunkte hin gerichteten Kräften. Die Gleichgewichtsgeometrie des Systems ist gefunden, wenn die verbliebenen Klaffungen unterhalb einer vorgegebenen Schranke liegen. Es brauchen nur die Koordinaten der Festpunkte vorgegeben zu werden.

Die beiden genannten Rechenverfahren kann man als Sonderfälle eines allgemeinen Verfahrens betrachten, das Klaffungsmethode (gap method) genannt werden soll. Dieses Verfahren wird im Folgenden beschrieben.

### Die Klaffungsmethode

In der Klaffungsmethode wird das zu berechnende Trossensystem in einzelne Trossen zerlegt. Dazu werden sämtliche Knoten (Verbindungsstellen von drei und mehr Trossen) gelöst. Weitere Schnitte sind anheimgestellt, etwa im Angriffspunkt konzentrierter Gewichte und Auftriebskräfte. Für konsequente duale Vektorschreibweise müssen die Trossen an beiden Enden frei sein. Die Einpunkt-Verankerung einer Boje beispielsweise wäre am Ankerstein und an der Boje zu lösen.

Die freigeschnittenen Trossen werden für sich ins Gleichgewicht gebracht. Die an ihnen angreifenden äußeren Kräfte sind teils mit dem Trossensystem gegeben (z.B. Gewicht, Auftrieb, Kräfte durch Anhänge), teils hängen sie von dessen Geometrie ab (Strömungskräfte). Ferner üben die Trossen an den Schnittstellen - zunächst unbekannte - Kräfte aufeinander aus (innere Kräfte). Fügt man die Trossen wieder zusammen, so werden sie anfänglich einander und vorbestimmte Punkte verfehlen. Es kommt zu Klaffungen, deren Aufhebung unter Berücksichtigung des Gleichgewichts von inneren

und äußeren Kräften zusätzliche innere Kräfte wachruft. Die Trossen setzen einer Deformation ihrer Geometrie Kräfte entgegen, die bei kleinen Verschiebungen der Formänderung proportional sind. Die Rechnung wird mit den um die Zugänderung korrigierten Schnittkräften wiederholt. Schließt sich das System, so ist die Gleichgewichtsgeometrie gefunden, und an den Schnittstellen stehen dann innere und äußere Kräfte miteinander im Gleichgewicht.

Die als biegeweich betrachteten, dehnbaren Trossen werden aus gelenkig miteinander verbundenen geraden und biegesteifen Stäben endlicher Länge (finite Elemente, abgekürzt FE) zusammengesetzt. Alle äußeren Kräfte an den Trossen werden in den gedachten Gelenken konzentriert. Ein finites Element ist also frei von äußeren Kräften. Mit Trosse sei alles bezeichnet, was im Anwendungsfall als hinreichend biegsam gelten kann, z.B. Netzgarne, Seile, Taue, Stahltrossen, Ketten. Auch Förderleitungen, etwa für verflüssigtes Erdgas, bei entsprechendem Verhältnis von Leitungslänge zu Leitungsdicke fallen darunter.

### Steifigkeit eines Trossenelements

Eine belastete Trosse gleicht ein an ihren Enden aufgebrachtes Kräftepaar durch Verformung ihrer Geometrie aus. Dasselbe Kräftepaar greift an jedem der finiten Elemente an, aus denen die Trosse besteht, und verursacht dort kleine Relativverschiebungen (Bild 1). Diese summieren sich zur Relativverschiebung der Trosse. Betrachtet man das finite Trossenelement als Feder, so besteht die Trosse also aus einer Reihenschaltung kleiner Federn.

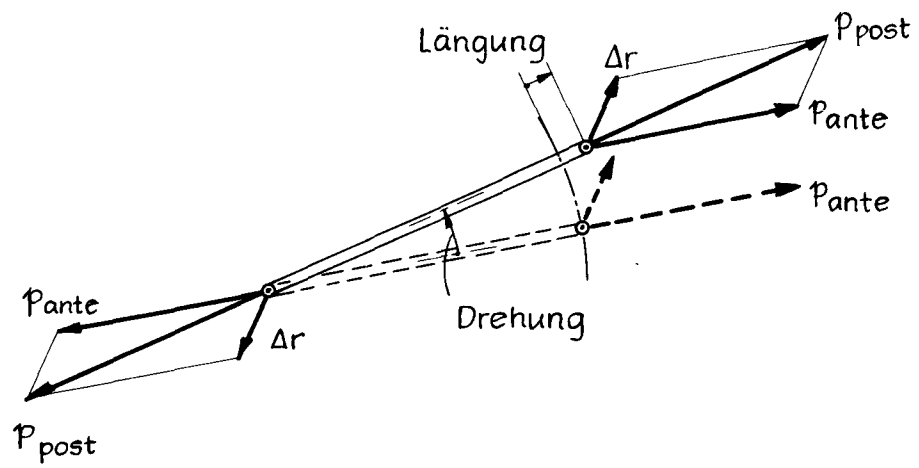


Bild 1

Relativverschiebung eines finiten Trossenelements

Die Steifigkeit vorgespannter finiter Trossenelemente ist nach Argyris und Scharpf (1972) wie folgt. Die räumliche Lage des Trossenelements sei durch die Koordinaten seiner Endpunkte im kartesischen Koordinatensystem  $x y z$  als  $(6 \times 1)$  - Vektor gegeben,

$$\xi = \left\{ \xi_u \quad \xi_o \right\} = \left\{ \xi_1 \eta_1 \xi_1 \quad \xi_2 \eta_2 \xi_2 \right\}. \quad (1)$$

Seine Länge beträgt dann

$$l = \left| \xi_o - \xi_u \right| = \left[ (\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \xi_1)^2 \right] \quad (2)$$

bei einer Länge  $l_o$  des unbelasteten Elements, und seine Richtung im Raum wird beschrieben durch den Vektor

$$c = \left\{ c_x \quad c_y \quad c_z \right\} = \frac{1}{l} (\xi_o - \xi_u) = \frac{1}{l} \begin{vmatrix} \xi_2 - \xi_1 \\ \eta_2 - \eta_1 \\ \xi_2 - \xi_1 \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Das Trossenelement stehe unter dem Zug  $T$ . Es sind nur Zugkräfte möglich.

Die zusätzliche Belastung durch ein Kräftepaar, im folgenden als klein angenommen gegenüber der herrschenden Zugkraft,

$$\Delta r = \left\{ - \Delta r' \quad \Delta r' \right\} \quad (6 \times 1) \quad (4)$$

kompensiert das Trossenelement durch eine Relativverschiebung seiner Enden, so daß innere und äußere Kräfte wieder miteinander im Gleichgewicht stehen. Im allgemeinen bewirkt das Kräftepaar sowohl eine Längenänderung als auch eine Richtungsänderung des Elements. Der Widerstand, den das Trossenelement dem entgegengesetzt, und zwar je Längeneinheit, ist seine Steifigkeit  $K_{FE}$ .

Durch das zusätzliche Kräftepaar ändert sich die Länge des Trossenelements um

$$\Delta l = c^T (\Delta \xi_o - \Delta \xi_u), \quad (5)$$

oder in dualer Schreibweise mit

$$a = \begin{bmatrix} -c^T & c^T \end{bmatrix} \quad (6 * 1) \quad (6)$$

auch

$$\Delta l = a \Delta \xi . \quad (7)$$

Die Längenänderung bewirkt eine Zugänderung

$$\Delta T = \frac{EA}{l_0} \Delta l . \quad (8)$$

Es ist A die Querschnittsfläche (tragender Querschnitt) der Trosse, und der Elastizitätsmodul E wird verstanden als Anstieg der Spannungs-Dehnungskurve,  $\sigma = T/A$  über  $\epsilon = (l-l_0)/l_0$ ,

$$E = \frac{d\sigma}{d\epsilon} . \quad (9)$$

Die Dehnung von Kunstfaser- und Naturfaserseilen, aber auch von Stahltrossen ist nichtlinear. Angaben dazu findet man z.B. bei Wilson (1969).

Die inneren Kräfte am Trossenelement ändern sich um

$$\Delta p_t = a^T \Delta T \quad (6 * 1), \quad (10)$$

woraus mit Gl. (7) und Gl. (8) schließlich

$$\Delta p_t = a^T \frac{EA}{l_0} a \Delta \xi = K_{FE,t} \Delta \xi \quad (11)$$

folgt mit der symmetrischen (6\*6)-Matrix der elastischen Steifigkeit des finiten Trossenelements

$$K_{FE,t} = \frac{EA}{l_0} a^T a = \frac{EA}{l_0} \begin{bmatrix} cc^T & -cc^T \\ -cc^T & cc^T \end{bmatrix} . \quad (12)$$

Wenn nichts anderes erwähnt ist, gilt  $E = E(T)$ .

Das kleine Kräftepaar  $\Delta r$  dreht das Trossenelement, bis die Resultierende der inneren Kräfte wieder in Richtung des Elements weist. Momentengleichgewicht am Element liefert

$$\Delta p_n = \frac{T}{l} \Delta n \quad (13)$$

mit der zusätzlichen Schnittkraft normal zum Element

$$\Delta p_n = \left\{ -\Delta p'_n \quad \Delta p'_n \right\} \quad (6 * 1) \quad (14)$$

und der gegenseitigen Normalverschiebung der Elementenden

$$\Delta n = \left\{ -\Delta n' \quad \Delta n' \right\} \quad (6 * 1) \quad (15)$$

Die Normalkomponente der Verschiebung eines Trossenelements erhält man, indem man von der gesamten Verschiebung  $\Delta \xi$  deren Tangentialkomponente abzieht, z.B. für das obere Ende eines Trossenelements wegen

$$\Delta \xi_o = \Delta \xi_{o,t} + \Delta \xi_{o,n} \quad (16)$$

und

$$\Delta \xi_{o,t} = cc^T \Delta \xi_o \quad (17)$$

also

$$\Delta \xi_{o,n} = \Delta \xi_o - \Delta \xi_{o,t} = \left[ I - cc^T \right] \Delta \xi_o \quad (18)$$

mit der  $(3 * 3)$ -Einheitsmatrix  $I$ . Damit wird

$$\Delta n' = \left[ I - cc^T \right] (\Delta \xi_o - \Delta \xi_u) \quad (19)$$

oder in dualer Schreibweise

$$\Delta n = \begin{vmatrix} (I - cc^T) & -(I - cc^T) \\ -(I - cc^T) & (I - cc^T) \end{vmatrix} \Delta \xi \quad (20)$$

Dies ergibt, eingesetzt in Gl. (13),

$$\Delta p_n = K_{FE,n} \Delta \xi \quad (21)$$

wobei

$$K_{FE,n} = \frac{T}{l} \begin{bmatrix} (I - cc^T) & -(I - cc^T) \\ -(I - cc^T) & (I - cc^T) \end{bmatrix} \quad (22)$$

die symmetrische (6\*6)-Matrix der Elementsteifigkeit gegen Drehung ist (Drehsteifigkeit; bei Argyris und Scharpf (1972) geometrische Steifigkeit genannt).

Aus der Forderung, daß die inneren und äußeren Zusatzkräfte einander gleich sein müssen,

$$\Delta r = \Delta p_t + \Delta p_n = K_{FE} \Delta \zeta \quad (23)$$

folgt schließlich die Gesamtsteifigkeit eines Trossenelements durch Addition von Gl. (12) und Gl. (22) zu

$$K_{FE} = K_{FE,t} + K_{FE,n} \quad (24)$$

Ihre Matrix ist wie folgt aufgebaut:

$$K_{FE} = \begin{bmatrix} K'_{FE} & -K'_{FE} \\ -K'_{FE} & K'_{FE} \end{bmatrix} \quad (25)$$

mit der (3\*3)-Untermatrix

$$\begin{aligned} K'_{FE} &= \left[ \frac{EA}{l_0} cc^T + \frac{T}{l} (I - cc^T) \right] \\ &= \left[ \frac{T}{l} I + \left( \frac{EA}{l_0} - \frac{T}{l} \right) cc^T \right] \end{aligned} \quad (26)$$

$\left(\frac{EA}{l_0}\right)$ ,  $\frac{T}{l}$  : Betrag der elastischen bzw. Drehsteifigkeit).

Bei Stahltrossen kann man wegen ihrer relativ geringen Dehnbarkeit die gereckte Länge  $l$  gleich der Ausgangslänge  $l_0$  setzen. Folgt die Trosse (Kette usw.) außerdem dem Hookeschen Gesetz

$$T = EA\varepsilon, \quad E = \text{const}, \quad (27)$$

so wird

$$K'_{FE} = \frac{T}{l} \left[ \mathbb{I} + \frac{l_0}{l-l_0} cc^T \right], \quad E = \text{const}, \quad (28)$$

wobei  $\varepsilon$  die augenblickliche Dehnung des Trossenelements ist.

### Steifigkeit einer belasteten Trosse

Die Verschiebungen der finiten Elemente einer Trosse durch das Kräftepaar  $\Delta r$  summieren sich an den Trossenenden zu

$$\Delta \zeta'_T = \sum \Delta \zeta'_{FE}. \quad (29)$$

Schreibt man analog Gl. (23) nun für die Trosse

$$\Delta r' = K'_T \Delta \zeta'_T, \quad (30)$$

wobei  $K'_T$  die  $(3 \times 3)$ -Steifigkeitsmatrix der Trosse ist, so folgt aus Gl. (29) mit Gl. (23)

$$K'_T = \left( \sum K'^{-1}_{FE} \right)^{-1}. \quad (31)$$

Die Matrix der Trossensteifigkeit lautet dann entsprechend Gl. (25) in dualer Schreibweise

$$K_T = \begin{vmatrix} K'_T & -K'_T \\ -K'_T & K'_T \end{vmatrix} \quad (32)$$

Als Kehrmatrix zur Elementsteifigkeit  $K_{FE}^I$  (Gl. 26) erhält man

$$K_{FE}^{I-1} = \left[ \frac{1}{T/l} I + \left( \frac{1}{EA/l_0} - \frac{1}{T/l} \right) cc^T \right]. \quad (33)$$

Folgt die Trosse dem Hookeschen Gesetz (Gl. 27), so kann man mit

$$\frac{1}{EA/l_0} - \frac{1}{T/l} = - \frac{1}{T/l_0} \quad (34)$$

auch schreiben

$$K_{FE}^{I-1} = \frac{1}{T/l} \left[ I - \frac{l_0}{l} cc^T \right], \quad E = \text{const.} \quad (35)$$

Summierung der inversen Matrix über alle Trossenelemente und anschließende Inversion gemäß Gl. (31) liefert die Steifigkeitsmatrix der Trosse.

Damit vollkommene Biegsamkeit der Trossen im Modell gewährleistet ist (Durchhang), müssen zwischen benachbarten Knoten mindestens zwei finite Elemente angeordnet werden. Ist nur ein Element vorhanden, so werden Zug- und Druckkräfte übertragen. Die Klaffungsmethode wäre dann auch auf Strukturen anwendbar, die Druckstäbe enthalten. In diesem Fall ist zu prüfen, ob die Stäbe unter

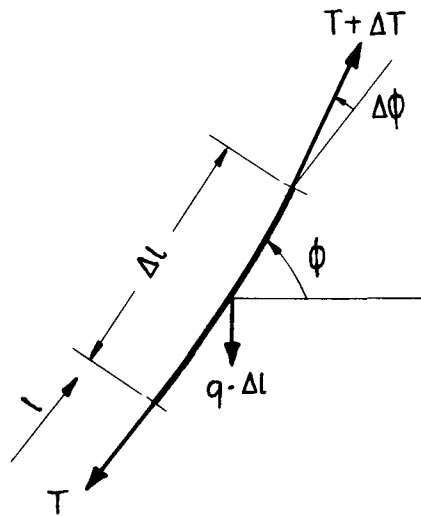
Zug oder Druck stehen. Für die Steifigkeit des Einzelstabs gilt Gl. (26), wobei die Stabkraft  $T$  bei Druck negativ zu setzen ist.

Die Steifigkeitsmatrix einer zweidimensional gekrümmten Trosse (ebene Trosse) läßt sich unter vereinfachenden Annahmen geschlossen darstellen. Gegeben sei beispielsweise eine nur durch Eigengewicht belastete Trosse. Ihre Form ist die bekannte Kettenlinie. Kräftegleichgewicht in tangentialer und normaler Richtung an einem infinitesimalen Trossenelement liefert (Bild 2a)

$$\begin{aligned} T \frac{d\phi}{dl} &= q \cos \phi , \\ \frac{dT}{dl} &= q \sin \phi , \end{aligned} \tag{36}$$

wobei  $\phi$  die Neigung der Trosse gegenüber der Horizontalen,  $l$  die Laufvariable und  $q$  das Trossengewicht je Einheit der Länge, vermindert um den Auftrieb, ist.

a) 'schwere' Trosse



b) symmetrische Trossenform

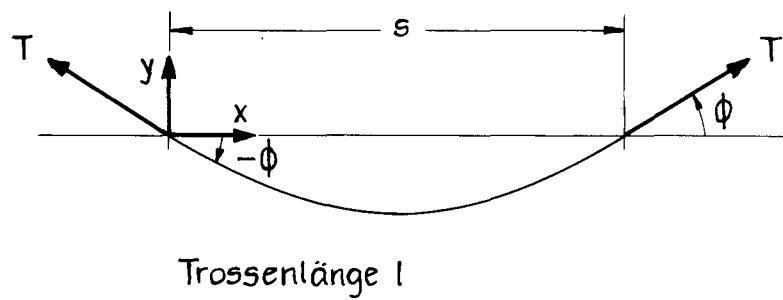


Bild 2

Zur Formsteifigkeit einfacher Trossenformen

Die beiden Gleichungen (36) ergeben zusammengefaßt

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{d\phi} = \operatorname{tg} \phi, \quad (37)$$

woraus man durch Integration

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{\cos \phi} \quad (38)$$

erhält, mit dem horizontalen Trossenzug  $T_0$ , der hier konstant ist.

Die Steifigkeit eines Elements der infinitesimalen Länge  $\Delta l$  (ungereckt  $\Delta l_0$ ) ist gemäß Gl. (26)

$$\begin{aligned} K'_{FE} &= \left[ \left( \frac{EA}{\Delta l_0} - \frac{T}{\Delta l} \right) cc^T + \frac{T}{\Delta l} I \right] \\ &= \frac{T}{\Delta l} \left[ (\beta - 1) cc^T + I \right] \end{aligned} \quad (39)$$

mit

$$\beta = \frac{EA}{T} \frac{\Delta l}{\Delta l_0} = \frac{EA}{T} (1 + \varepsilon) = \sim \frac{EA}{T} \left( 1 + \frac{T_0}{EA} \right). \quad (40)$$

Die Dehnung  $\varepsilon$  wird vereinfachend als konstant über die Trossenlänge angenommen.

Als Kehrmatrix der Steifigkeit eines Trossenelements erhält man

$$K_{FE}^{-1} = \frac{1}{\beta} \frac{\Delta l}{T} \begin{bmatrix} (\beta - 1) \sin^2 \phi + 1 & -(\beta - 1) \cos \phi \sin \phi \\ -(\beta - 1) \cos \phi \sin \phi & (\beta - 1) \cos^2 \phi + 1 \end{bmatrix}, \quad (41)$$

woraus schließlich mit den Gleichungen (36) und (38) für die

Kettenlinie folgt

$$\frac{d}{d\phi} K_{T,Kette}^{\prime-1} = \frac{1}{\delta} \frac{1}{q} \begin{bmatrix} \delta \frac{\sin^2 \phi}{\cos \phi} - \operatorname{tg}^2 \phi + \frac{1}{\cos^2 \phi} & -\delta \sin \phi + \operatorname{tg} \phi \\ -\delta \sin \phi + \operatorname{tg} \phi & \delta \cos \phi - 1 + \frac{1}{\cos^2 \phi} \end{bmatrix} \quad (42)$$

mit

$$\delta = \frac{EA}{T_0} + 1 \quad (43)$$

Integration von Gl. (42) in den Grenzen  $\phi_u$  und  $\phi_o$ , den Winkeln der Trosse an ihren Enden mit der Horizontalen, ergibt

$$K_{T,Kette}^{\prime-1} = \frac{1}{\delta} \frac{1}{q} \begin{bmatrix} \delta \left( -\sin \phi + \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right) + \phi & \delta \cos \phi - \ln \cos \phi \\ \delta \cos \phi - \ln \cos \phi & \delta \sin \phi + \operatorname{tg} \phi \end{bmatrix}_{\phi_u}^{\phi_o} \quad (44)$$

Ist die Kettenlinie symmetrisch ( $\phi_o = -\phi_u = \phi$ ), so wird

$$K_{T,Kette}^{\prime-1} = \frac{1}{q} \begin{bmatrix} \ln \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} - 2 \sin \phi & 0 \\ 0 & 2 \sin \phi + 2 \frac{\operatorname{tg} \phi}{\delta} \end{bmatrix} \quad (45)$$

Die Steifigkeitsmatrix lautet damit

$$K_{T,Kette}^{\prime} = q \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \ln \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} - 2 \sin \phi & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{1}{\sin \phi + \frac{\operatorname{tg} \phi}{EA/T_0 + 1}} \end{bmatrix} \quad (46)$$

Bei Vernachlässigung der elastischen Dehnung ( $E \rightarrow \infty$ ) ist die verbleibende Steifigkeit rein geometrischer Art (Formsteifigkeit):

$$K'_{T, E \rightarrow \infty} = q \begin{bmatrix} \frac{1}{\ln \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} - 2 \sin \phi} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2 \sin \phi} \end{bmatrix} \quad (47)$$

Man kann noch das Trossengewicht je Einheit der Länge,  $q$ , durch den Zug an den Trossenenden,  $T$ , und die Spannweite  $s$  ausdrücken. Die Integration der Differentialgleichung der Kettenlinie, Gl. (36), liefert nach einiger Rechnung

$$q = \frac{T}{s} 2 \cos \phi \ln \frac{1 + \sin \phi}{\cos \phi} \quad (48)$$

Mit diesem Ausdruck wird

$$K'_{T, E \rightarrow \infty} = \frac{T}{s} \begin{bmatrix} \frac{2 \cos \phi \ln \frac{1 + \sin \phi}{\cos \phi}}{\ln \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} - 2 \sin \phi} & 0 \\ 0 & \frac{\ln \frac{1 + \sin \phi}{\cos \phi}}{\operatorname{tg} \phi} \end{bmatrix} \quad (49)$$

Die Steifigkeitsmatrix einer symmetrisch belasteten Trosse ist bei der gewählten Lage des Koordinatensystems durch die Endpunkte der Trosse (Bild 2b) eine Diagonalmatrix. Längssteifigkeit  $\bar{K}_t$  und Drehsteifigkeit  $\bar{K}_n$  (bezüglich der Sehne durch die Trossenendpunkte) lassen sich unmittelbar ablesen, in dimensionsloser Form

$$\left( \frac{\bar{K}_t}{T/s} \right)_{\text{Kette, } E \rightarrow \infty} = \frac{2 \cos \phi \ln \frac{1 + \sin \phi}{\cos \phi}}{\ln \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} - 2 \sin \phi} ,$$

$$\left( \frac{\bar{K}_n}{T/s} \right)_{\text{Kette, } E \rightarrow \infty} = \frac{\ln \frac{1 + \sin \phi}{\cos \phi}}{\operatorname{tg} \phi} . \quad (50)$$

Der Quotient  $T/s$  (siehe Gl. (27) ) ist die Quersteifigkeit eines vorgespannten geraden Stabes.

Hat die Trossensehne die Richtung  $c_s$ , so lautet die Steifigkeitsmatrix entsprechend Gl. (26)

$$K'_T = \left[ (\bar{K}_t - \bar{K}_n) c_s c_s^T + \bar{K}_n I \right] . \quad (51)$$

Formsteifigkeiten für weitere einfache Belastungsfälle (Trosse unter Einzellast, kreisbogenförmige Trosse, leichte Trosse in gleichförmiger Strömung) enthält Bild 3. Man kann sie bei der Berechnung auch komplexer Trossensysteme verwenden, beispielsweise zu Beginn der Iteration.\*) Bild 4 und 5 zeigen den Verlauf von Längs- bzw. Drehsteifigkeit über dem Winkel zwischen Trosse und Sehne am Trossenende.

### Gleichgewichtszustand des Trossensystems

Grundelemente des Verfahrens sind die freigeschnittenen, für sich im Gleichgewicht befindlichen Trossen. Ihre Steifigkeit

\*) siehe Anhang

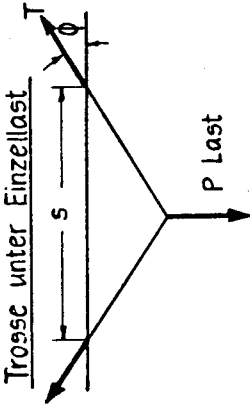
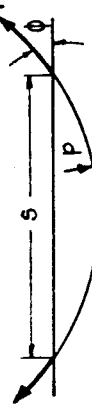
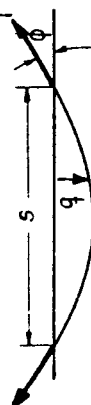
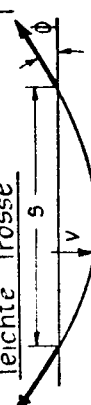
Trossengeometrie	Steifigkeit gebildet mit der Last		Steifigkeit bezogen auf das Verhältnis von Trossenzug zu Sehnenlänge		Steifigkeit für kleine Winkel $\phi$	
	Längung $\bar{K}_t$	Drehung $\bar{K}_n$	Längung $\bar{K}_t / \frac{l}{s}$	Drehung $\bar{K}_n / \frac{l}{s}$	Längung $\bar{K}_t / \frac{l}{s}$	Drehung $\bar{K}_n / \frac{l}{s}$
<p>T = Trossenzug l = Trossenlänge s = Sehnenlänge <math>\phi</math> = Winkel zwischen Trosse und Sehne</p> <p><u>Trosse unter Einzellast</u></p> 	$\frac{P}{l} \frac{1}{2 \sin^3 \phi}$	$\frac{P}{l} \frac{1}{2 \sin \phi}$	$\cos \phi$	$\cos \phi$	$\frac{s}{l} \frac{1}{1 - (\frac{s}{l})^2}$	$\frac{s}{l}$
<p><u>kreisbogenförmige Trosse</u></p>  <p>Last lotrecht zur Trosse (p = Belastung je Längeneinheit)</p>	$p \frac{1}{\phi - \frac{1}{2} \sin 2\phi}$	$p \frac{1}{\phi + \frac{1}{2} \sin 2\phi}$	$\frac{2 \sin \phi}{\phi - \frac{1}{2} \sin 2\phi}$	$\frac{2 \sin \phi}{\phi + \frac{1}{2} \sin 2\phi}$	$2 \frac{\frac{s}{l}}{1 - \frac{s}{l}}$	$2 \frac{\frac{s}{l}}{1 + \frac{s}{l}}$
<p><u>schwere Trosse</u></p>  <p>Trosse nur durch Gewicht belastet. (q = Gewicht je Längeneinheit)</p>	$q \frac{1}{\ln \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} - 2 \sin \phi}$	$q \frac{1}{2 \sin \phi}$	$2 \cos \phi \ln \frac{1 + \sin \phi}{\cos \phi}$	$\ln \frac{1 + \sin \phi}{\cos \phi} \operatorname{tg} \phi$	$\frac{7}{2} \frac{\frac{s}{l}}{1 - \frac{s}{l}}$	$\frac{s}{l}$
<p><u>leichte Trosse</u></p>  <p>Belastung nur durch Strömungskräfte lotrecht zur Trosse. (R = Strömungswiderstand der quer angeströmten Trosse je Längeneinheit, v = Strömungsgeschwindigkeit)</p>	$R \frac{1}{2} \frac{1}{\operatorname{tg} \phi - \phi}$	$R \frac{1}{2} \frac{1}{\phi}$	$\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \operatorname{tg} \phi - \phi$	$\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \phi$	$\frac{3}{2} \frac{\frac{s}{l}}{1 - \frac{s}{l}}$	$\frac{s}{l}$

Bild 3 : Formsteifigkeit einer Trosse für einfache Belastungsfälle

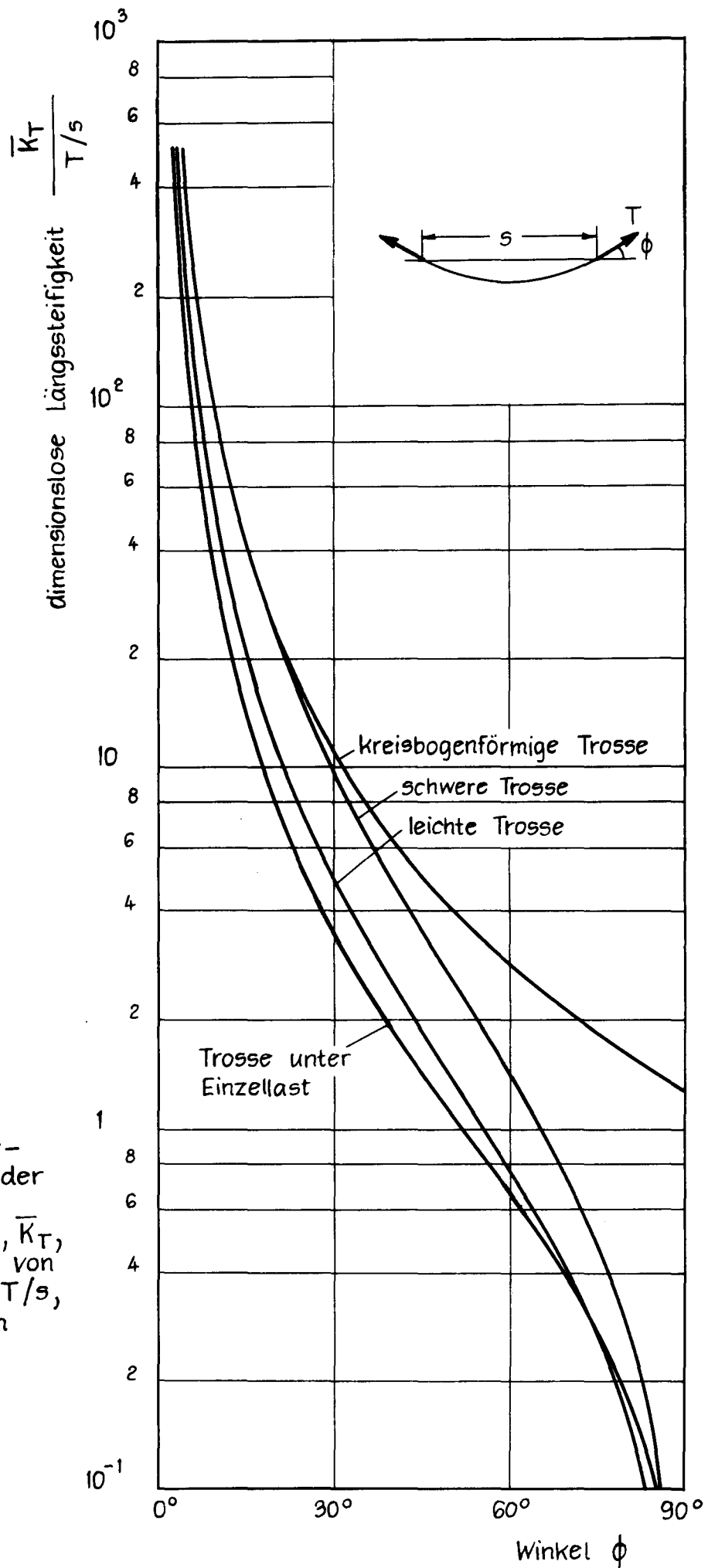


Bild 4

Formsteifigkeit einer symmetrischen Trosse in Richtung der Verbindungslinie durch ihre Endpunkte (Längssteifigkeit),  $\bar{K}_T$ , bezogen auf das Verhältnis von Trossenzug zu Spannweite,  $T/s$ , über dem Winkel  $\phi$  zwischen Trosse und Sehne

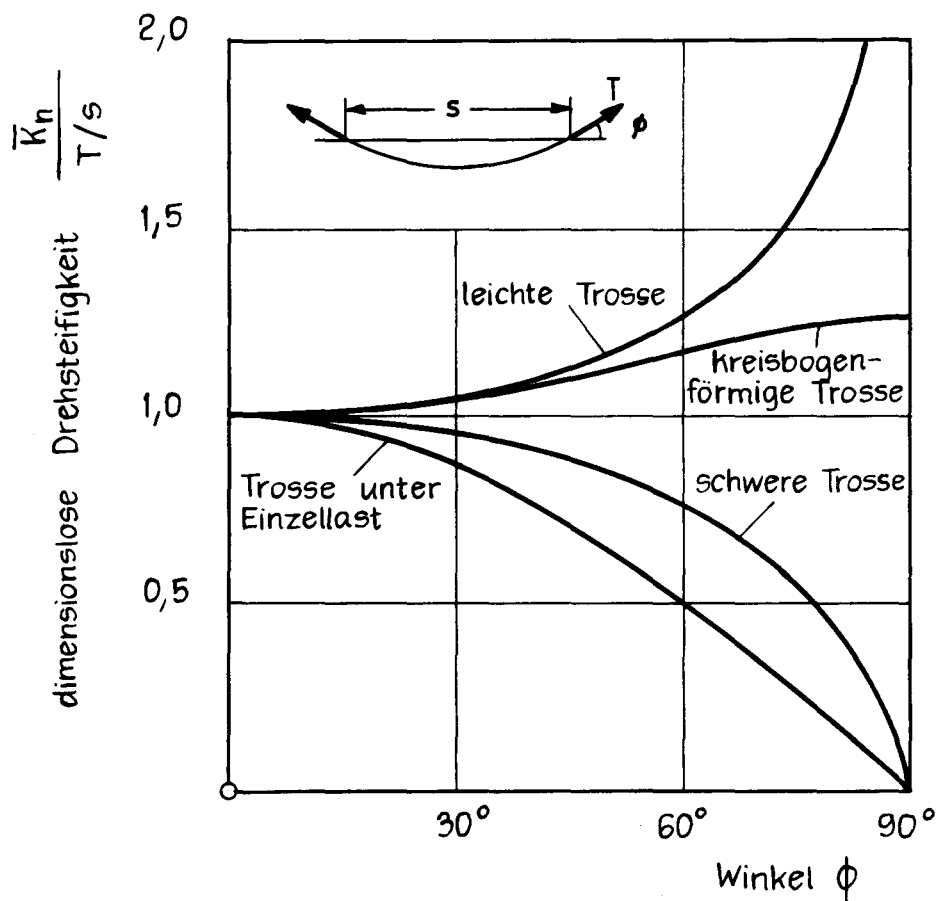


Bild 5

Formsteifigkeit einer symmetrischen Trosse quer zur Verbindungslinie durch ihre Endpunkte (Drehsteifigkeit),  $\bar{K}_n$ , bezogen auf das Verhältnis von Trossenzug zu Spannweite,  $T/s$ , über dem Winkel  $\phi$  zwischen Trosse und Sehne

ist aus der Steifigkeit finiter, gerader Trossenelemente zuletzt berechnet worden. Die Aufpunkte der Trossenenden seien durch den  $(6s * 1)$ -Hypervektor

$$\zeta = \{ \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots, \zeta_{6s} \} \quad (52)$$

gegeben, wobei  $s$  die Zahl Trossen und somit  $6s$  die Zahl lokaler Freiheitsgrade des Systems ist. Die Trossen werden in vorbestimmter Weise in Knoten zum Trossensystem verbunden. Die Lage der Knoten im Raum beschreibt der zunächst noch unbekannte  $(3n * 1)$ -Hypervektor

$$x' = \{ x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_{3n} \}, \quad (53)$$

wobei  $n$  die Zahl Schnittstellen (globale Knoten) und somit  $3n$  die Zahl globaler Verkettungen ist. Jeder Knoten sei mit einem raumfesten Punkt verknüpft. Bezüglich dieses Punktes habe er gewisse, durch Steifigkeiten beschriebene Bewegungsmöglichkeiten. Verschwindende Steifigkeit bedeutet, daß der Knoten frei beweglich ist (Freiheitsgrade), bei unendlich großer Steifigkeit ist das Trossenende dagegen fixiert (Ankerpunkt, Festpunkt). Dazwischen bewegt sich der mögliche Grad einer Verkettung.

Nach Zusammenfügen der Trossen haben deren Enden die neue Lage

$$\zeta' = B x' \quad (54)$$

Darin ist  $B$  die  $(6s * 3n)$ -Boolesche Matrix (mit den Zahlen 0 und 1), die lokale Freiheitsgrade und globale Verkettungen einander zuordnet (Steuermatrix).

Die Trossenenden sind also um

$$\Delta \zeta = \zeta' - \zeta = B x' - \zeta \quad (55)$$

zu verschieben. Die daraus resultierende Verschiebung der Trossenenden relativ zueinander erzeugt, zusätzlich zu den vorhandenen inneren Kräften  $p$ , Kräfte  $\Delta p$ , geschrieben als

(6s \* 1)-Hypervektor

$$\Delta p = \left\{ \Delta p_1 \quad \Delta p_2 \quad \Delta p_3 \quad \dots \quad \Delta p_{6s} \right\}. \quad (56)$$

Zwischen diesen Trossenzugänderungen und den Verschiebungen der Trossenenden besteht für kleine Verschiebungen entsprechend Gl. (23) der lineare Zusammenhang

$$\Delta p = K_T \Delta \xi, \quad (57)$$

wobei  $K_T$  nun die aus den Steifigkeiten der Trossen aufgebaute Diagonalmatrix

$$K_T = \left[ K_{T,1} \quad K_{T,2} \quad K_{T,3} \quad \dots \quad K_{T,s} \right] \quad (58)$$

ist. Zusätzlich zur bereits kompensierten äußeren Belastung der Trossen sei das System in den Knoten durch die diskreten äußeren Kräfte

$$r = \left\{ r_1 \quad r_2 \quad r_3 \quad \dots \quad r_{3n} \right\}. \quad (59)$$

belastet. Ferner unterliege es durch die Verkettung der Knoten mit raumfesten Punkten den elastischen Kräften

$$K_r (x_r - x') \quad (60)$$

im Falle linearer Verkettung und

$$r_r + \Delta r_r = r_r + K_r (x - x') \quad (61)$$

im Falle nichtlinearer Verkettung. Darin ist  $K_r$  die Matrix der Randsteifigkeiten<sup>\*)</sup> als Diagonalmatrix geschrieben

$$K_r = \left[ K_{r,1} \quad K_{r,2} \quad K_{r,3} \quad \dots \quad K_{r,n} \right] \quad (62)$$

mit - allgemein formuliert - n Randbedingungen in Form von n (3\*3)-Steifigkeitsmatrizen. Es sind  $x_r$  die Koordinaten der Raumpunkte und  $x, x'$  ist die bisherige bzw. neue Lage der zugehörigen

<sup>\*)</sup> Durch die Verwendung von Randsteifigkeiten könnte man beispielsweise komplexe Trossensysteme unterteilen.

gen Knoten . Mit  $r_r$  wird die zwischen Raumpunkt und Knoten schon herrschende Kraft bezeichnet, so daß also  $\Delta r_r = K_r(x - x')$  die im Ansatz lineare zusätzliche Kraft ist. Eine verankerte Boje beispielsweise ist horizontal frei beweglich; vertikaler Bewegung setzt sie Kräfte entgegen vergleichbar einer gedehnten Feder. Ihre Steifigkeit ist das Produkt aus dem spezifischen Gewicht des Wassers und der Wasserlinienfläche der Boje.

Die neue Knotenpunktlage folgt aus der Bedingung, daß die Klaffungen verschwinden bei Gleichgewicht der äußeren und inneren Kräfte in den Knoten:

$$r + r_r + \Delta r_r = B^T(p + \Delta p) \quad (63)$$

(mit dem nichtlinearen Ansatz für die Randsteifigkeiten Gl. (61) ). Zusammen mit den Gleichungen (55), (57) und (61) wird daraus

$$r + r_r + K_r(x - x') = B^T(p + K_r(Bx' - \zeta)) \quad (64)$$

und nach Umstellen einiger Glieder

$$r + r_r - B^T p = (B^T K_r B + K_r)x' - (B^T K_r \zeta + K_r x). \quad (65)$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung steht der zunächst nicht verschwindende Differenzvektor der äußeren und schon wirkenden inneren Kräfte einschließlich Randkräften,

$$\Delta r = r + r_r - B^T p. \quad (66)$$

Er wird aufgefaßt als zusätzliche Belastung eines sonst im Gleichgewicht befindlichen Systems. Ferner ist

$$K = B^T K_r B + K_r \quad (67)$$

die globale Steifigkeitsmatrix des Trossensystems einschließlich Randsteifigkeiten.

Den Vektor

$$f = B^T K_T \zeta + K_r x \quad (68)$$

mit der Dimension einer Kraft kann man als Moment der Steifigkeiten der Trossen und der Randsteifigkeiten deuten (globales Steifigkeitsmoment), und zwar bezüglich des Koordinatenursprungs mit der bisherigen Lage der Trossenendpunkte bzw. der Randpunkte als Hebel.

Das globale Steifigkeitsmoment nach Gl. (68) gilt formal für den Fall, daß jedem lokalen Freiheitsgrad global eine Verkettung entspricht, wenn also die Boolesche Matrix keine Nullzeile enthält. Man beachte, daß an festen Trossenenden, sofern einem lokalen Freiheitsgrad global keine Verkettung zugeordnet ist (gekennzeichnet durch entsprechende Nullzeile der Steuermatrix), der jeweilige Hebel Null gesetzt werden muß. Man könnte zwar weiterhin formal rechnen, wenn man an globalen Festpunkten auch lokal Festpunkte einführt, doch wäre dann die duale Vektorschreibweise durchbrochen.

Mit den Gleichungen (66), (67) und (68) kann man die Gleichgewichtsbedingung Gl. (65) kürzer schreiben:

$$\Delta r = Kx' - f . \quad (69)$$

Daraus folgt die neue Knotenpunktslage der nun miteinander verbundenen Trossen,

$$x' = K^{-1} ( \Delta r + f ) . \quad (70)$$

Die weitere Rechnung ist wie folgt. Man ermittelt die Verschiebung der Trossenenden,  $\Delta \zeta$ , aus Gl. (55), bestimmt die Trossenzugänderung aus der Relativverschiebung der Trossenenden und der Steifigkeit der Trossen und erhält so korrigierte Zugkräfte als Anfangsbedingungen für die Gleichgewichtsgeometrie der nun wieder aus ihrem Verband gelösten Trossen. Ein Iterationsschritt war erfolgreich, wenn die (mittlere) Klaffung unter dem vor-

herigen Wert liegt. Nimmt sie zu, so behält man zweckmäßig die bisherigen Schnittkräfte bei und verringert die Trossenzugänderung, z.B. durch Halbierung. Keine Klaffung in den Knoten bedeutet, daß dort die Kräfte miteinander im Gleichgewicht stehen. Verschwindende Klaffung bzw. Kräfteausgleich in allen Knoten (unterhalb einer vorgegebenen Schranke) ist Kriterium für die Gleichgewichtsgeometrie des Systems.

### Anwendungsbeispiel

Gleichung (65) ist der allgemeine Ausdruck für das Kräftegleichgewicht in den Knoten eines Systems von Trossen, von denen jede für sich mit den an ihr angreifenden äußeren Kräften im Gleichgewicht steht, unter beliebigen Randbedingungen. Von Fall zu Fall können sich Vereinfachungen ergeben.

Soll ein Trossensystem, beispielsweise eines der heute zur Überdachung von Sportstätten gern verwendeten vorgespannten Netzwerke, im statisch unbestimmten Zustand, also ohne Schnitte und damit ohne Klaffungen, berechnet werden und wird es von unnachgiebigen Auflagern gehalten, so vereinfacht sich Gl. (64) zu

$$r = B^T (p + K_T B \Delta x), \quad (71)$$

wobei

$$\Delta x = x' - x \quad (72)$$

der Verschiebungsvektor der Knoten ist. Man erhält

$$r - B^T p = B^T K_T B \Delta x, \quad (73)$$

worin wiederum

$$\Delta r = r - B^T p \quad (74)$$

der Hypervektor der Ungleichgewichtskräfte in den Knoten und

$$K = B^T K_T B \quad (75)$$

die globale Steifigkeitsmatrix des Systems ist. Die zum Kräfteausgleich nötige Knotenpunktsverschiebung (Formänderung) ist dann

$$\Delta x = K^{-1} \Delta r . \quad (76)$$

Die Gleichgewichtsgeometrie des Systems ist gefunden, wenn mit  $\Delta r = 0$  in den Knoten Kräftegleichgewicht herrscht. Dies ist die von Turner (1959) entwickelte und von Argyris und Scharpf (1972) auf Netzwerke ausgedehnte Matrizen-Verschiebungsmethode (matrix displacement method). Sie erfordert eine relativ gute Ausgangsgeometrie. Zu deren Erzeugung haben Argyris und Angelopoulos (1972) ein numerisches Verfahren angegeben, bei dem die Form eines Netzes mit idealisierten elastischen Eigenschaften aus dem ebenen Zustand durch Verschiebung der Auflager ermittelt wird.

Löst man andererseits in einem Trossensystem, das keine in sich geschlossenen Teile enthält, alle Festpunkte (und nur diese), bis auf einen, dann ergeben sich mit der Berechnung der Trossenform von diesem Festpunkt aus Klaffungen  $\Delta \xi = x - \xi$  an den gelösten Festpunkten. Die zu ihrer Aufhebung nötigen Kräfte sind den Klaffungen proportional,

$$\Delta p = \bar{K}_T \Delta \xi , \quad (77)$$

wobei für die Steifigkeit aber ein fiktiver Wert gesetzt wird ( $\bar{K}_T =$  beliebige positive Zahl). Die freien Trossenenden werden also stets in Richtung der zugehörigen festen Raumpunkte gezogen. Eine stetige Abnahme der Klaffungen wird erreicht durch zusätzliche Verringerung der Zugkräfte  $\Delta p$  bei Bedarf, indem man etwa den Anfangswert der fiktiven Steifigkeit  $\bar{K}_T$  wiederholt halbiert:

$$\Delta p = \frac{\bar{K}_{T, \text{Anfang}}}{2^j} \Delta \xi , \quad j = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (78)$$

Außer den Festpunkten sind keine Vorgaben zur Geometrie des Trossensystems nötig. Dies ist die von Skop und O'Hara (1970) entwickelte Methode der fiktiven Reaktion (method of imaginary reactions). Zur iterativen Korrektur der Zugkräfte an den gelösten Trossenenden benutzen Skop und O'Hara den von Gl. (77) abweichenden Ausdruck

$$\Delta p = \frac{T}{2^j} \frac{\Delta \xi}{\sqrt{\Delta \xi^T \Delta \xi}}, \quad j = 0, 1, 2, 3 \dots, \quad (79)$$

wobei  $T$  der - zunächst willkürlich angenommene - Trossenzug an den Trossenenden ist. Sie beziehen die Klaffungen auf die geometrische Summe aller Klaffungen, so daß also die dadurch aufgehobene Proportionalität zwischen Zusatzkraft und absoluter Klaffung durch entsprechende Zunahme des Divisors  $2^j$  erzeugt werden muß. Will man aus Dimensionsgründen auf eine Bezugslänge nicht verzichten, so wäre freilich jede beliebige konstante Länge des Trossensystems besser geeignet, z.B. der Abstand zwischen den Festpunkten,  $s$  (siehe dazu auch Bild 3):

$$\Delta p = \frac{T}{2^j} \frac{\Delta \xi}{s}, \quad j = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (80)$$

Als Anwendungsbeispiel zur Klaffungsmethode zeigt Bild 6 eine Dreipunktverankerung mit einem in sich geschlossenen Teil. Sie besteht aus sechs Trossen, Trosse verstanden im Sinne des Verfahrens. Die Iteration beginnt mit dem Gleichgewicht von Gewicht und Auftrieb an den freigeschnittenen Trossen (0. Iteration). Nach wenigen Iterationsschritten sind Geometrie und Beanspruchung der Verankerung gefunden. Bild 7 zeigt ihre Verformung unter Anströmung.

Als zweites Rechenbeispiel wurde ein einfaches Netz mit quadratischen Maschen (Bild 8) gewählt, das unter Eigengewicht und

Auftriebskörper (A):  
 Nettoauftrieb zu Trossengewicht je Länge  
 in Wasser mal  $\frac{1}{3}$  Gesamtlänge der Trossen = 1,09

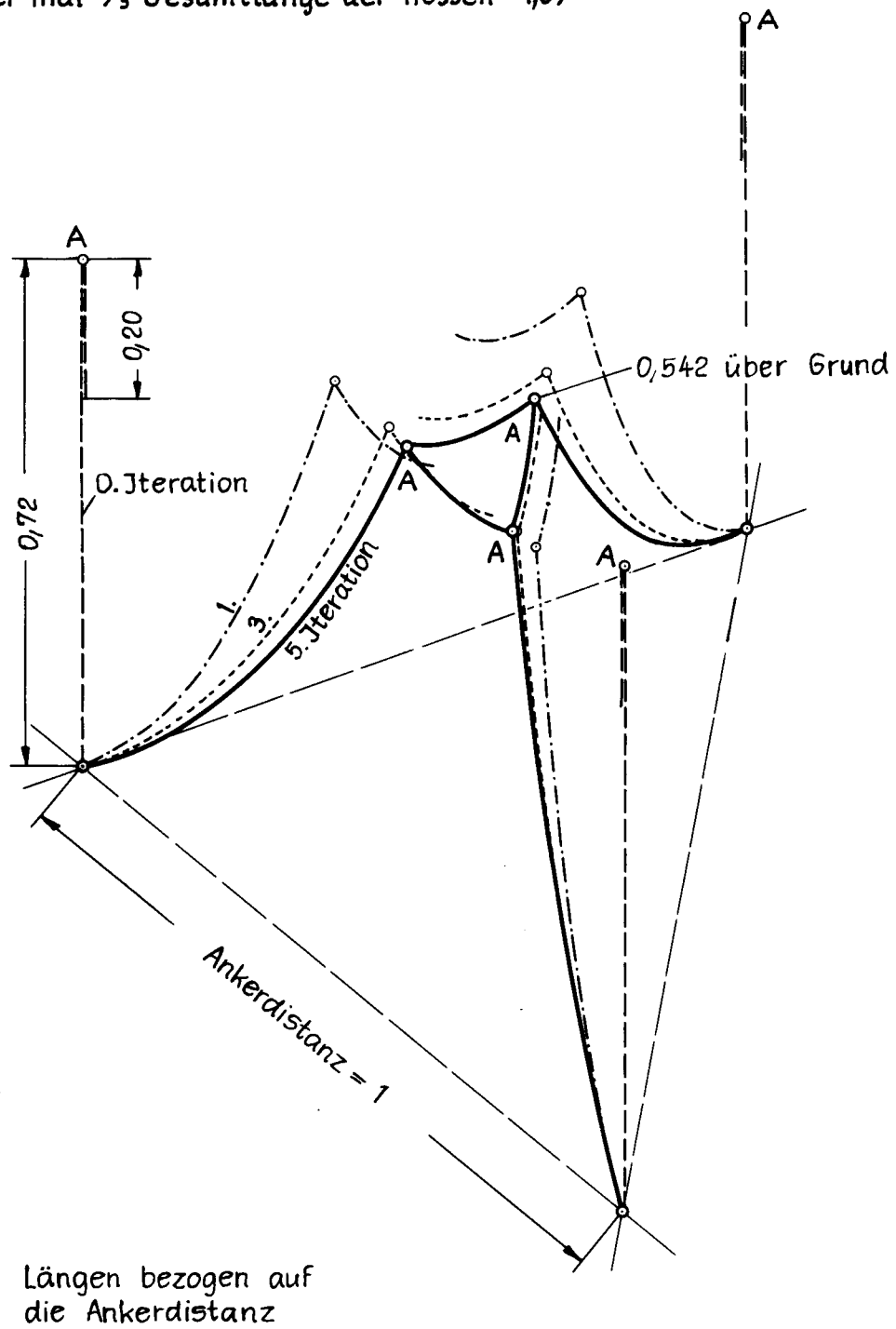
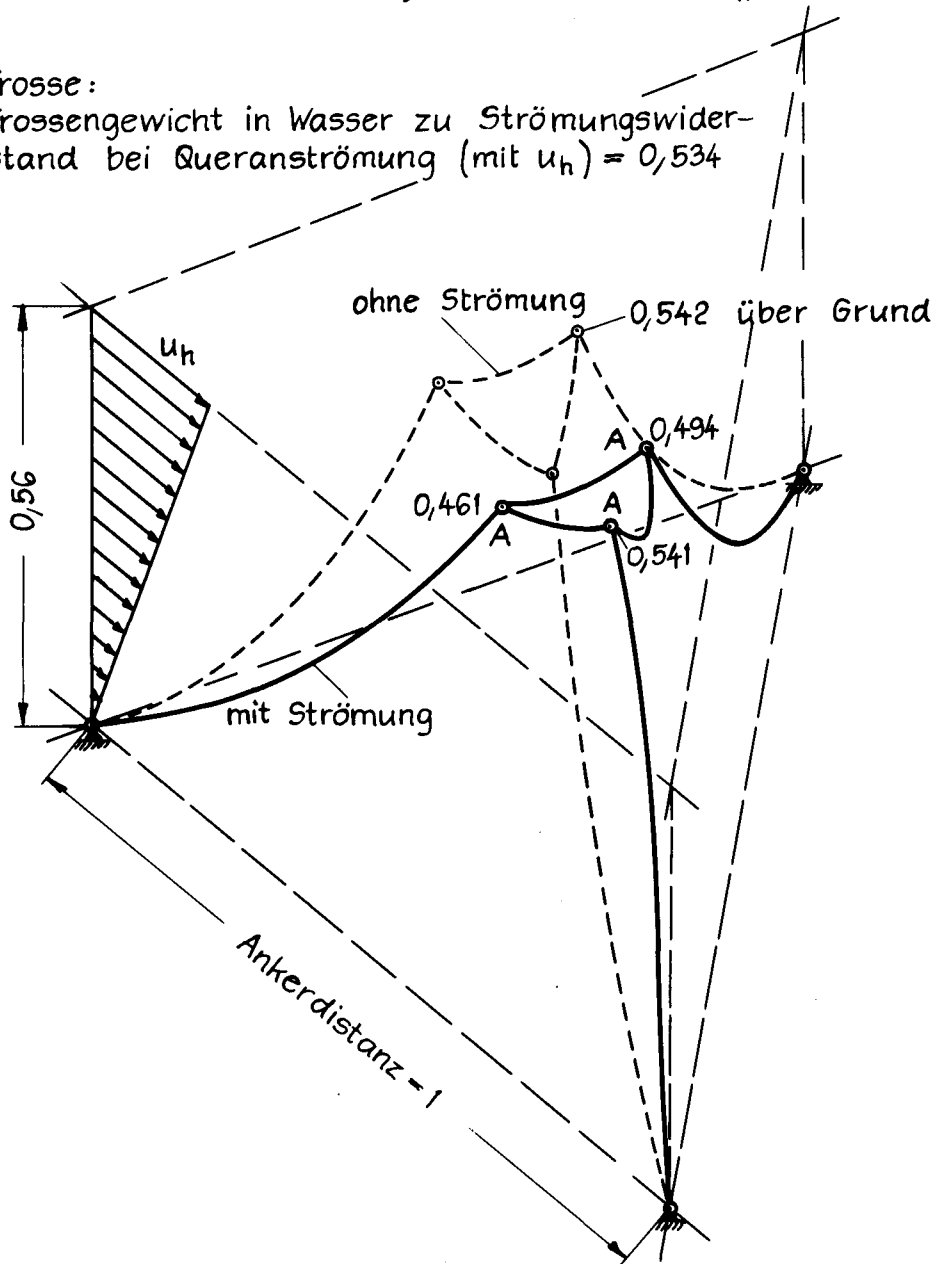


Bild 6

Dreipunktverankerung in ruhendem Wasser ;  
 iterative Formfindung

Auftriebskörper (A):  
 Nettoauftrieb zu Trossengewicht je Länge  
 in Wasser mal  $\frac{1}{3}$  Gesamtlänge der Trossen = 1,09  
 Nettoauftrieb zu Strömungswiderstand (bei  $u_h$ ) = 48

Trosse:  
 Trossengewicht in Wasser zu Strömungswider-  
 stand bei Queranströmung (mit  $u_h$ ) = 0,534



Höhen bezogen auf die Ankerdistanz

Bild 7

Dreipunktverankerung unter Anströmung

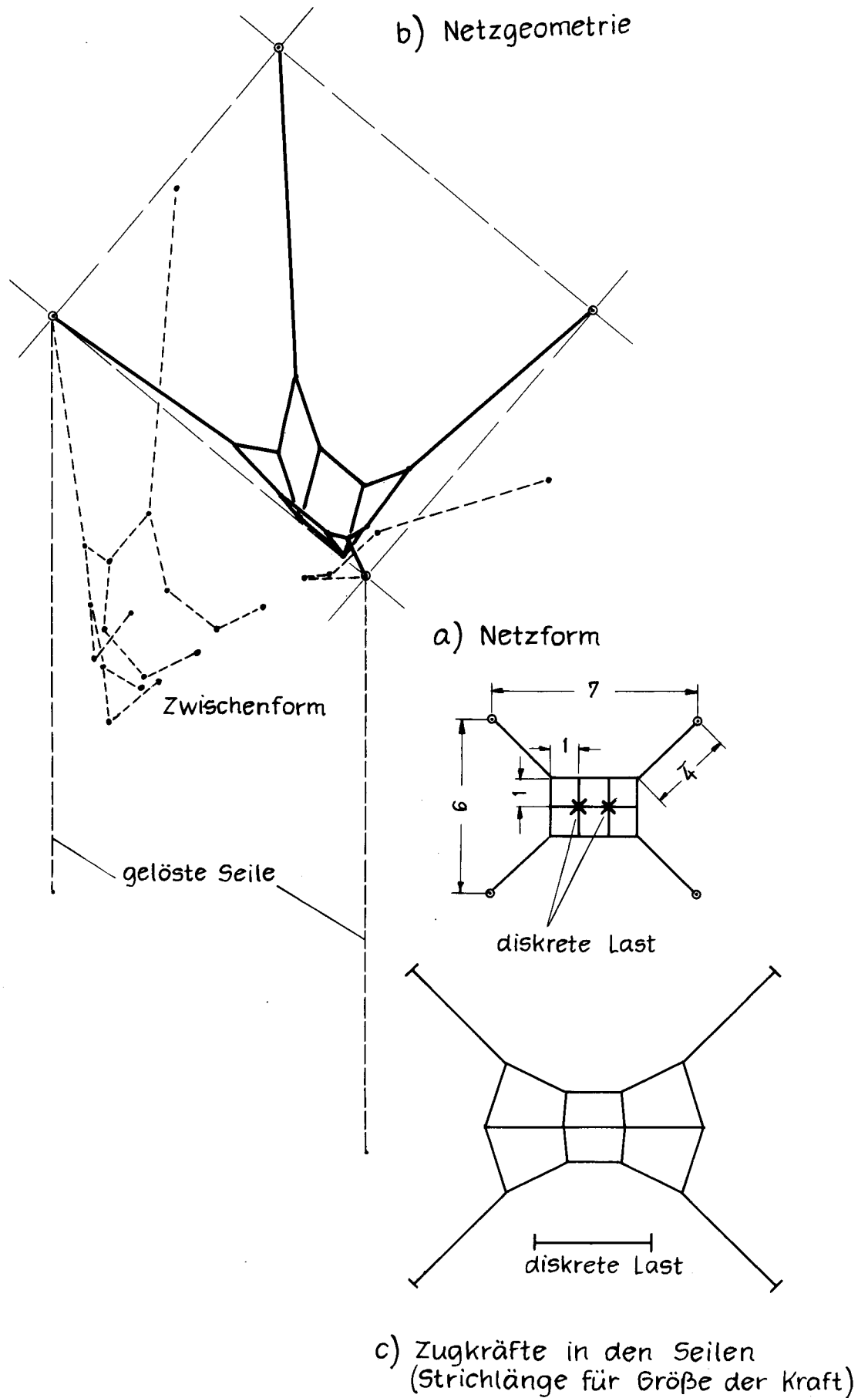


Bild 8

Geometrie und Beanspruchung eines Netzes  
unter Eigengewicht und diskreter Last

diskreten Lasten steht (a). Die Netzgeometrie und eine Zwischenform sind perspektivisch dargestellt (b). Ein Schaubild zeigt die Zugkräfte in den Seilen (c).

### Zusammenfassung

Die Klaffungsmethode ist ein allgemeines, iteratives Rechenverfahren für beliebige Trossensysteme. Es eignet sich auch für Strukturen mit Druckstäben. Eine Anfangsgeometrie braucht nicht vorgegeben zu werden. Die in der Statik gebräuchliche Matrizen-Verschiebungsmethode und die in der Verankerungstechnik angewandte Methode der fiktiven Reaktion sind als Sonderfälle im Verfahren enthalten.

Literatur

Argyris, J.H., D.W. Scharpf, 1972: Large deflection analysis of prestressed networks. Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 48, S. 633-654.

Argyris, J.H., T. Angelopoulos, 1972: Ein Verfahren für die Formfindung von beliebigen vorgespannten Netzwerkkonstruktionen. 9th Congress of the International Association for Bridge and Structural Engineering, Mai 1972, Amsterdam, Niederlande, S. 386-392; Sekretariat der IABSE in Zürich, Schweiz.

Skop, R.A., G.J. O'Hara, 1970: The method of imaginary reactions. Marine Technology Society Journal, Vol. 4, No. 1, S. 21-30.

Turner, M.J., 1959: The direct stiffness method of structural analysis. Proceedings of the 10th Meeting of the Structures and Materials Panel, AGARD, Aachen, Deutschland, September 1959.

Wilson, B.W., 1969: Elastic characteristics of moorings. Topics in Ocean Engineering, herausgegeben von C.I. Bretschneider, Vol. 1, S. 45-81. Gulf Publishing Company, Houston, Texas, U.S.A.

## Anhang

Bei Iterationsbeginn wird zweckmäßig mit angenäherten Steifigkeiten gerechnet; erst nach einigen Iterationsschritten geht man zur exakten Steifigkeit über. Dadurch wird die Konvergenz des Verfahrens beschleunigt. Bild 9 zeigt den Iterationsverlauf für die Dreipunktverankerung nach Bild 6 in ruhendem Wasser. Hier käme man sogar mit fiktiven Steifigkeiten aus (Kreise und Dreiecke auf der Spitze). Für Trossensysteme mit in sich geschlossenen Teilen ist das allerdings eine Ausnahme.

Bild 10 zeigt den Iterationsverlauf für die Dreipunktverankerung unter Anströmung (siehe Bild 7). Die Strömungskräfte hängen von der Geometrie des Trossensystems ab; sie ändern sich daher im Verlauf der Iteration. Man kann wie folgt verfahren. Man läßt die Strömungskräfte trotz veränderter Geometrie unverändert, bis die Klaffungen hinreichend klein sind (Kreise). Erst dann werden sie neu berechnet. Oder man ermittelt die Strömungskräfte gleichzeitig mit der Trossengeometrie (Dreiecke auf der Spitze). Dies erfordert je Iterationsschritt zwar etwas mehr Rechenaufwand, aber insgesamt weniger Iterationen.

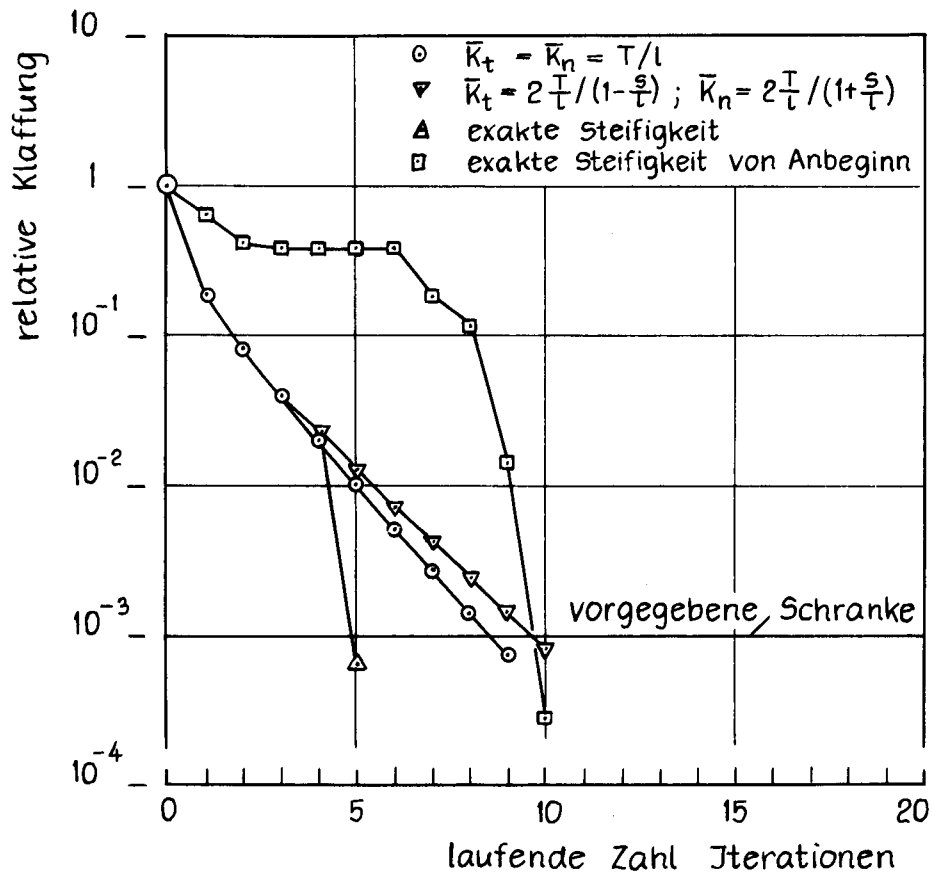


Bild 9

Relative Klaffung (mittlere Klaffung bezogen auf die Ankerdistanz) über der Zahl Iterationen; Iterationsverlauf für eine Dreipunkt-Verankerung in ruhendem Wasser (siehe Bild 6) bei Verwendung verschiedener Formsteifigkeiten für die Trossen

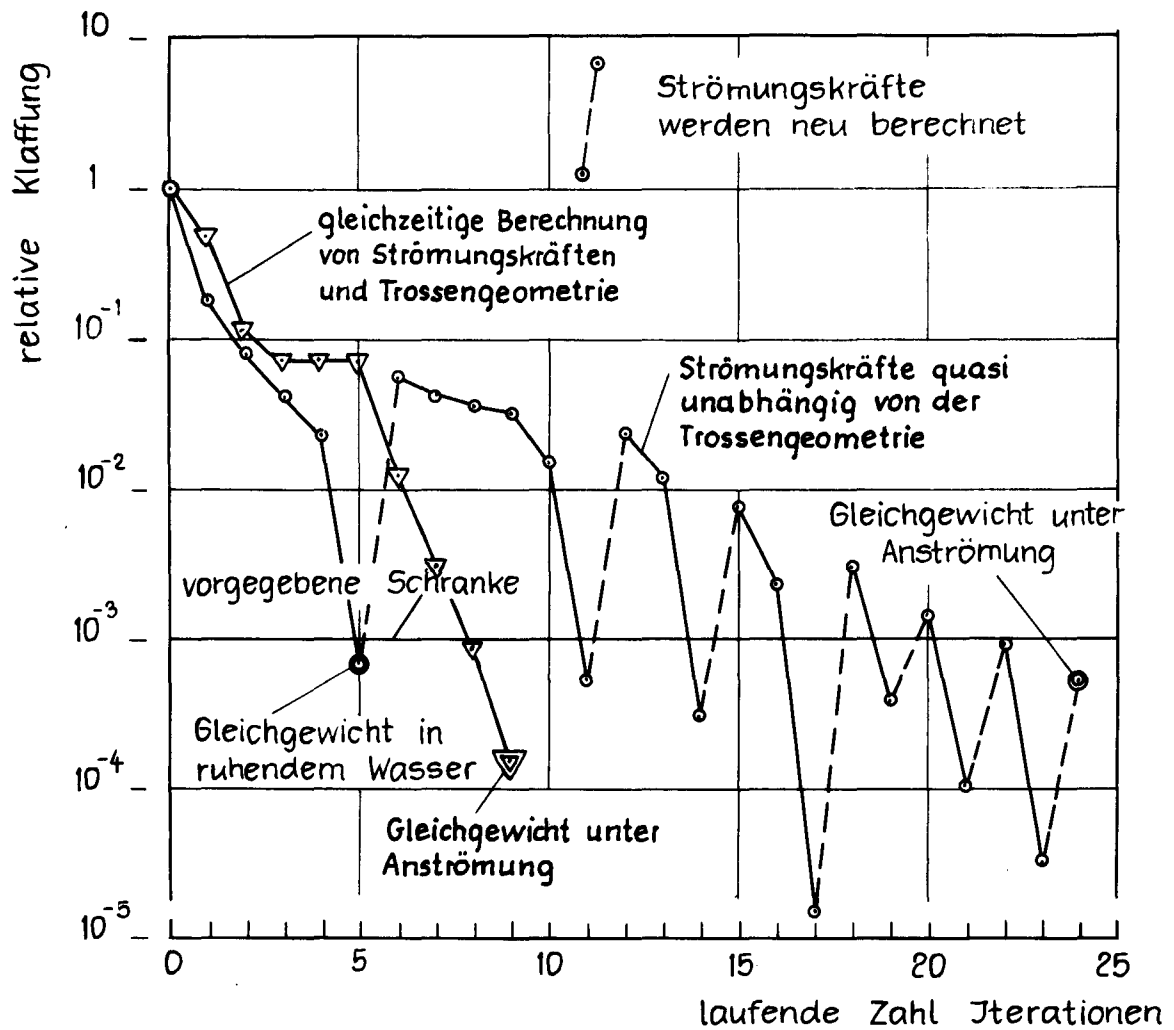


Bild 10

Relative Klaffung (mittlere Klaffung bezogen auf die Ankerdistanz) über der Zahl Iterationen ; Iterationsverlauf für eine Dreipunkt-Verankerung unter Anströmung (siehe Bild 7)