84 | Mai 1958

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

K. Hasselmann

Zur Deutung der dreifachen Geschwindigkeitskorrelationen der isotropen Turbulenz

TUHH
Technische Universität Hamburg-Harburg

IfS-Bericht No. 84

ZUR DEUTUNG DER DREIFACHEN GESCHWINDIGKEITSKORRELATIONEN DER ISOTROPEN TURBULENZ.

von K. Hasselmann, Hamburg

Hamburg, Mai 1958

ZUR DEUTUNG DER DREIFACHEN GESCHWINDIGKEITSKORRELATIONEN DER ISOTROPEN TURBULENZ*

von K. Hasselmann, Hamburg

Zusammenfassung:

Es werden die dreifachen Korrelationen, die den Einfluß der Trägheitskräfte in der Kármán-Howarthschen Korrelationsgleichung beschreiben, auf den Impulsaustausch zwischen einem kugelförmig abgegrenzten Gebiet und dessen Umgebung zurückgeführt. Diese einfache Deutung ermöglicht eine approximative Erfassung der Trägheitskräfte der isotropen Turbulenz, die in den Grundzügen die Heisenbergsche Vorstellung einer auf die größeren Wirbel einwirkenden turbulenten Viskosität, die durch den Impulsaustausch mit den kleinen Wirbeln zustandekommt, bestätigt, jedoch zu wesentlich besserer Übereinstimmung mit den Meßergebnissen führt.

Inhalt

1. Einleitung.

Bekanntlich hat erst die statistische Theorie der isotropen Turbulenz eine ausführliche kinematische Analyse der turbulenten Strömungen ermöglicht. Jedoch stößt sie auf Schwierigkeiten bei allen Fragen, die mit dem dynamischen Verhalten der Turbulenz zusammenhängen. Der Kern dieser Schwierigkeiten liegt in der Natur der Trägheitskräfte, die man bisher noch nicht befriedigend beschreiben konnte. Um trotzdem dynamische Gesetzmäßigkeiten theoretisch ableiten zu können, hat man zusätzliche Hypothesen eingeführt, die man etwa in die beiden Klassen der Ähnlichkeits und Austauschhypothesen einteilen kann. Aus den Ähnlichkeitshypothesen können Aussagen über die Änderung gewisser charakteristischer Größen des Turbulenzfeldes gewonnen werden, wie z.B. das Abklingungsgesetz für die Gesamtenergie; jedoch kann die innere Struktur des Turbulenzfeldes, d.h. die Form des Energiespektrums oder der Geschwindigkeitskorrelationen, nicht erklärt werden. Die Ähnlichkeitsannahmen werden im allgemeinen physikalisch nicht sehr überzeugend begründet und erweisen sich auch experimentell als recht grobe Approximationen. Bei den Austauschhypothesen andrerseits wird auf Grund einer gewissen Vorstellung über die Einwirkung der Trägheitskräfte auf das Energiespektrum die Form des Trägheitsterms in der dynamischen Spektralgleichung einfach postuliert. Es ist schwierig, bei diesen Ausdrücken unmittelbar nachzuprüfen, ob sie gute Näherungen sind oder nicht, da der exakte Ausdruck für den Trägheitsterm der Spektralgleichung in ziemlich unübersichtlicher Weise von den Amplituden und Phasen der Fourierzerlegung des Geschwindigkeitsfeldes abhängt. Sie sind daher - ebenso wie die Ähnlichkeitsannahmen - nur als Arbeitshypothesen aufzufassen.

Obwohl der Trägheitsterm der Spektralgleichung wesentlich komplizierter ist als der entsprechende Term der mathematisch äquivalenten Korrelationsgleichung, hat man bisher die Trägheitskräfte nur an Hand der Spektralgleichung zu erklären versucht. Das liegt daran, daß der physikalische Inhalt der Spektralgleichung durchsichtiger ist, während man sich bisher für die durch die Korrelationsgleichung beschriebenen Vorgänge noch kein physikalisch anschauliches Bild gemacht hat. Wie im folgenden gezeigt wird, ermöglicht aber eine neue Ableitung der Korrelationsgleichung die anschauliche Deutung der einzelnen Glieder.

Dadurch läßt sich nun die Wirkung der Trägheitskräfte, die durch die dreifachen Korrelationen beschrieben wird, unmittelbar überblicken und mit Hilfe von einfachen Mischungswegansätzen auch quantitativ erfassen. Die Ergebnisse lassen sich im wesentlichen durch die Heisenbergsche Vorstellung einer auf die größeren Wirbel einwirkenden turbulenten Viskosität, die durch den Impulsaustausch mit den kleineren Wirbeln zustande kommt, beschreiben. Allerdings wird eine andere Einteilung der Energie in Wirbel kleinerer und größerer Dimensionen gewählt, die der Deutung des Trägheitsterms in der Korrelationsgleichung besser angepaßt ist. Ferner wird der in dem Ausdruck für die turbulente Viskosität vorkommende Mischungsweg nicht einer kinematisch, sondern einer dynamisch eingeführten Länge proportional angenommen, wodurch der Einfluß der Viskosität berücksichtigt und eine bessere Übereinstimmung mit dem Experiment erreicht wird.

2. Die zwei- und dreifachen Geschwindigkeitskorrelationen der isotropen Turbulenz.

Bevor die Kármán-Howarthsche Korrelationsgleichung aus den Navier-Stokesschen Gleichungen gewonnen werden kann, muß man auf die Beziehungen eingehen, die sich aus den kinematischen Bedingungen der Isotropie und der Kontinuität für die Korrelationen ergeben. Obwohl diese Beziehungen, die gewöhnlich mit Hilfe der Tensoranalysis und der Invariantentheorie gewonnen werden, wohlbekannt sind (Robertson [1940], Chandresekhar [1953], Batchelor [1953]), ist es vielleicht nicht uninteressant, sie einmal auch auf einem anderen, anschaulichen Wege abzuleiten, der später bei den Navier-Stokesschen Gleichungen außerdem zu einer physikalischen Deutung der Kármán-Howarthschen Korrelationsgleichung führen wird.

Unter der allgemeinen zweifachen Geschwindigkeitskorrelation an zwei Stellen P, P' in einem isotropen Turbulenzfeld versteht man das mittlere Produkt:

$$R(\mathfrak{r};\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \overline{u_a(P')\,u_b(P)} \qquad (1)$$

wobei durch die Indizes a, b Geschwindigkeitskomponenten in Richtung der Einheitsvektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ bezeichnet werden, $\mathfrak{r}$ der Vektor von Punkt P zum Punkt P' und die rechte Seite ein statistischer Mittelwert über mehrere unabhängige Realisationen des Turbulenzfeldes ist. Aus der Bedingung der Isotropie folgt auch die Homogenität des Turbulenzfeldes, da ein nicht verschwindender Gradient einer mittleren Größe eine ausgezeichnete Richtung festlegen würde; das mittlere Produkt (1) hängt somit nur von dem Abstandsvektor zwischen P und P' ab.

Ähnlich wird die dreifache Geschwindigkeitskorrelation an zwei Stellen definiert:

$$S(\mathfrak{r};\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}) = \overline{u_a(P')\,u_b(P)\,u_c(P)} \qquad (2)$$

Korrelationen höherer Ordnung werden gewöhnlich nicht mehr betrachtet, obwohl sie strenggenommen zu einer vollständigen statistischen Beschreibung der Turbulenz notwendig sind, da sie mit wesentlich größeren analytischen Schwierigkeiten verbunden sind.

Im Falle der Isotropie sind die mittleren Produkte (1) und (2) nur von der relativen Lage des Vektors $\mathfrak{r}$ und der Einheitsvektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ abhängig. Wir können daher annehmen, daß $\mathfrak{r}$ in der x-Achse und $\mathfrak{a}$ in der xy-Ebene eines kartesischen Koordinatensystems liegen. Ferner können wir uns auf die Fälle beschränken, in denen die Einheitsvektoren achsenparallel sind, da sich die allgemeinen Produkte mittels dieser als Linearkombinationen darstellen lassen. Da $\mathfrak{a}$ in der xy-Ebene liegt, während die Einheitsvektoren $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ beliebige Richtungen annehmen können, findet man sechs solcher Kombinationen für R und zwölf für S. Aus der Bedingung der Isotropie, die Invarianz gegenüber Permutationen und Spiegelungen der Achsen fordert, folgt jedoch sofort, daß die meisten dieser Produkte verschwinden, sodaß von den zweifachen Korrelationen nur die Produkte:

$$u'^2 f(r) = \overline{u_x(P')\, u_x(P)} \tag{3}$$

$$u'^2 g(r) = \overline{u_y(P')\, u_y(P)} \tag{4}$$

und von den dreifachen Korrelationen nur die Produkte:

$$u'^3 k(r) = \overline{u_x(P')\, u_x^2(P)} \tag{5}$$

$$u'^3 h(r) = \overline{u_x(P')\, u_y^2(P)} = \overline{u_x(P')\, u_z^2(P)} \tag{6}$$

$$u'^3 q(r) = \overline{u_y(P')\, u_x(P)\, u_y(P)} \tag{7}$$

übrigbleiben. Dabei bedeuten wie üblich u' die Wurzel des mittleren Quadrats einer Geschwindigkeitskomponente, r den Betrag von ϑ und die Indizes x, y, z Geschwindigkeitskomponenten parallel zu den Koordinatenachsen.

Die Zurückführung der allgemeinen Produkte (1) und (2) auf die skalaren Funktionen von r in den Gleichungen (3) - (7) folgte allein aus der Bedingung der Isotropie. Aus der Kontinuitätsbedingung ergibt sich nun weiter, daß diese Funktionen von einander abhängig sind.

Betrachten wir die Durchströmung einer halbkugelförmigen Hüllfläche wie in Abb,2. Für eine inkompressible Flüssigkeit lautet die Kontinuitätsbedingung:

$$-\int_{\sigma_1} u_n \, dS = \int_{\sigma_2} u_n \, dS$$

wobei u_ϑ die Normalkomponente der Geschwindigkeit auf den beiden Teilflächen σ_1 und σ_2 der Hüllfläche bedeutet. Durch Multiplikation dieser Gleichung mit der x-Komponenten der Geschwindigkeit im Mittelpunkt erhält man nach Mittelwertbildung:

$$u'^2 \int_0^r r g(r) dr = u'^2 \int_0^{\pi/2} r^2 f(r) \sin\vartheta \cos\vartheta \, d\vartheta = \frac{u'^2}{2} r^2 f(r)$$

oder, nach Differentiation:

$$g(r) = f(r) + \frac{r}{2} f'(r) \tag{8}$$

wobei $f' = \frac{\partial f}{\partial r}$. Die Beziehung (8) zwischen den longitudinalen und transversalen zweifachen Geschwindigkeitskorrelationen wurde nach dieser Methode erstmals von Prandtl abgeleitet (Wieghardt [1941]).

Auf ähnlichem Wege lassen sich auch Beziehungen zwischen den dreifachen Korrelationen ableiten. Multipliziert man die Kontinuitätsgleichung für die Strömung durch eine Vollkugel mit dem Quadrat der Geschwindigkeit im Mittelpunkt und bildet den Mittelwert, so erhält man sofort:

$$2h(r) + k(r) = 0 \tag{9}$$

Multipliziert man weiter die Kontinuitätsgleichung der Strömung durch eine Viertelkugel wie in Abb. 2 mit dem Produkt der x- und y-Komponenten der Geschwindigkeit im Mittelpunkt, so erhält man nach Mittelwertbildung und Differentiation:

$$q(r) = \frac{1}{2} k(r) + \frac{r}{4} k'(r) \tag{10}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (8) - (10) lassen sich nunmehr die allgemeinen zwei- und dreifachen Geschwindigkeitskorrelationen (1) und (2) auf je einen skalarenFunktion von r zurückführen. Zu diesem Zweck werden gewöhnlich die beiden longitudinalen Korrelationen $u'^2 f(r)$ und $u'^3 k(r)$ gewählt, da sie am einfachsten zu messen sind. Da die Korrelationen gegenüber Spiegelungen invarient sind, muß f(r) eine gerade, k(r) eine ungerade Funktion von r sein. Die Entwicklung von f(r) beginnt daher mit den Gliedern:

$$f(r) = 1 - \frac{r^2}{2\lambda^2} + \frac{G}{4!}\frac{r^4}{\lambda^4} + \dots \tag{11}$$

wo die Dissipationslänge $\lambda = -[f''(0)]^{-1/2}$ und $G = \lambda^4 f^{IV}(0)$.
Die erste Ableitung von k(r) verschwindet bei r=0, da $u'^3 k'(0) = \overline{u_x^2 \frac{\partial}{\partial x} u_x} = \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}\overline{u_x^3} = 0$, sodaß die Entwicklung von k(r) erst mit einem Glied 3. Ordnung beginnt:

$$k(r) = -\frac{S}{6}\frac{r^3}{\lambda^3} + \dots \tag{12}$$

Wobei $-S = \lambda^3 k'''(o)$ den Schiefefaktor $\overline{\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^3} \Big/ \left[\overline{\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2}\right]^{3/2}$ bedeutet. Bei der Definition von S ist in Anlehnung an die Bezeichnung von Batchelor & Townsend [1947] ein negatives Vorzeichen eingeführt werden, da die experimentellen Werte des Schiefefaktors negativ ausfallen.

Obwohl sie später nicht verwendet werden, lassen sich nun ohne Schwierigkeitenauch die allgemeinen Korrelationstensoren

$R_{ij}(\mathfrak{r}) = \overline{u_i(P)\ u_j(P')}$ und $S_{ijl}(\mathfrak{r}) = \overline{u_i(P)\ u_j(P)\ u_l(P')}$ in Abhängigkeit ihrer charakteristischen skalaren Funktionen $u'^2 f(r)$ bzw. $u'^3 k(r)$ bestimmen durch Transformation des Koordinatensystems der Tensoren auf ein neues System, bei dem der Vektor $\mathfrak{r}$ in der x-Achse liegt. Bezeichnen wir Komponenten des neuen Systems mit einem Stern und sei (a_{ij}) die Transformationsmatrix, so gilt:

$$
\begin{aligned}
R_{ij}(\mathfrak{r}) &= \sum_{kl} a_{ik}\, a_{jl}\, \overline{u_k^*(P)\, u_l^*(P')} \\
&= u'^2 \left\{ a_{i1}\, a_{j1}\, f(r) + (a_{i2}\, a_{j2} + a_{i3}\, a_{j3})\, g(r) \right\} \\
&= u'^2 \left\{ \sum_{\nu} a_{i\nu}\, a_{j\nu}\, g(r) + (f(r) - g(r))\, a_{i1}\, a_{j1} \right\}
\end{aligned}
$$

wobei sich die Indizes 1, 2 und 3 auf die Koordinatenachsen x, y bzw z beziehen. Da $a_{i1} = \frac{r_i}{r}$, ergibt sich somit nach (8):

$$
R_{ij}(\mathfrak{r}) = u'^2 \left\{ \left(f + \frac{r}{2} f'\right) \delta_{ij} - \frac{r}{2} f' \frac{r_i r_j}{r^2} \right\} \tag{13}
$$

Auf ganz ähnlichem Wege läßt sich dann zeigen, daß

$$
S_{ijl}(\mathfrak{r}) = u'^3 \left\{ \frac{k - rk'}{2r^3}\, r_i\, r_j\, r_l + \frac{2k + rk'}{4r}\left(r_i\, \delta_{jl} + r_j\, \delta_{il}\right) - \frac{k}{2r}\, r_l\, \delta_{ij} \right\} \tag{14}
$$

Schließlich betrachten wir noch die Druck-Geschwindigkeitskorrelation $\overline{p(P)u(P')}$, die bei der Ableitung der Kármán-Howarthschen Korrelationsgleichung auftritt. Aus Gründen der Isotropie werden die Korrelationen zwischen p und den Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zu $\mathfrak{r}$ offensichtlich verschwinden, sodaß nur das Produkt $\overline{p(P)u_r(P')}$ zu untersuchen wäre. Durch Multiplikation der Kontinuitätsgleichung für eine kugelförmige Hüllfläche mit dem Druck im Mittelpunkt und Mittelwertbildung folgt jedann sofort, daß auch dieses letzte Korrelationsprodukt verschwindet.

3. Die Kármán-Howarthsche Korrelationsgleichung.

Die im letzten Abschnitt beschriebene Methode, um Folgerungen aus der Kontinuitätsbedingung herzuleiten, kann auch angewandt werden, um eine dynamische Gleichung für die Korrelationen zu gewinnen. Multipliziert man die Impulsgleichung für eine kugelförmige Hüllfläche vom Radius r mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{u}_0$ im Mittelpunkt und mittelt, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int \overline{\mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_0}\, dV = -\int \overline{(\mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_0)u_r}\, dS - \int \overline{p u_{0r}}\, dS + \int \overline{\mathfrak{u}_0 \mathfrak{T}_r}\, dS \qquad (15)$$

wobei auf der linken Seite über das Innere der Kugel und auf der rechten über die Kugeloberfläche integriert wird. $\mathfrak{T}_r$ ist die Zähigkeitsspannung auf der Kugeloberfläche.

Von den Integralen auf der rechten Seite ist zunächst bereits gezeigt worden, daß die Druck-Geschwindigkeitskorrelation verschwindet. Das erste Integral läßt sich durch die dreifache Korrelation $u'^3 k(r)$ ausdrücken, während sich das letzte Integral auf die Ableitungen der zweifachen Korrelation $u'^2 f(r)$ zurückführen läßt. Die linke Seite kann über das Kugelvolumen ausintegriert werden, da $\overline{\mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_0} = u'^3 \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^3 f)$, womit man dann schließlich nach Division durch $2\pi r^3$ die Kármán- Howarthsche Korrelationsgleichung erhält:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u'^2 f\right) = u'^3\left(k' + \frac{4k}{r}\right) + 2\nu u'^2\left(f'' + \frac{4}{r}f'\right) \tag{16}$$

Die einzelnen Glieder dieser Gleichung habennnun anschauliche physikalische Bedeutungen. Aus der Berechnung der linken Seite ergibt sich eine neue kugelsymmetrische Beziehung für die zweifache longitudinale Korrelation: es ist $3u'^2 f(r)$ der Mittelwert des Produkts aus der Geschwindigkeit im Mittelpunkt einer Kugel vom Radius r mit der mittleren Geschwindigkeit im Inneren der Kugel. f(r) ist somit ein Maß für die räumliche Ausdehnun der Geschwindigkeitsschwankungen und gibt an, in wie weit der Flüssigkeit innerhalb der Kugel eine einheitliche Geschwindigkeit zugeordnet werden kann. Das erste Glied auf der rechten Seite stellt die Korrelation zwischen dem Impulsfluß durch die Oberfläche und der Geschwindigkeit im Mittelpunkt der Kugel dar und beschreibt somit die Änderung von $u'^2 f(r)$ durch die Vermischung der Flüsssigkeit innerhalb und außerhalb der Kugel, während das letzte Glied den Einfluß der Zähigkeitsspannungen an der Kugeloberfläche wiedergibt.

Durch Spezialisierung lassen sich aus (16) zwei weitere wichtige Gleichungen ableiten. Für r=0 erhält man die Dissipationsgleichung:

$$\frac{d}{dt} u'^2 = -10\nu \frac{u'^2}{\lambda^2} \tag{17}$$

Differenziert man (16) zwei mal nach r so erhält man für r=0 die Gleichung für die Änderung der mittleren Rotation:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u'^2}{\lambda^2}\right) = \frac{1}{15}\frac{d}{dt}\overline{(\mathrm{rot}\,\bar{u})^2} = -\frac{7}{3}u'^3 k'''(0) - \nu\frac{14}{3}u'^2 f^{IV}(0) \tag{18}$$

Offensichtlich läßt sich Gleichung (16) ohne eine weitere Beziehung für k(r) nicht lösen. Wegen der Nichtlinearität der Bewegungsgleichungen hängt jedoch die dreifache Korrelation von der Korrelation vierter Ordnung ab, die ihrerseits wiederum durch die Korrelation fünfter Ordnung bestimmt ist, usw. Der Versuch einer exakten Lösung der Korrelationsgleichung führt somit zu einem unlöslichen unendlichen System von Gleichungen.

Um diese Schwierigkeit zu umgehen, werden wir - wie in allen bisherigen Näherungsansätzen für die Trägheitskräfte - annahmen, daß die dreifachen Korrelationen auf die zweifachen zurückgeführt werden können. Auf Grund unserer einfachen physikalischen Deutung des Trägheitsterms der Kármán-Howarthschen Korrelationsgleichung, können wir jedoch nunmehr den Näherungsausdruck für die Trägheitseinflüsse auf einem etwas deduktiverem Wege ableiten, als es bisher bei der Untersuchung des unübersichtlichen exakten Trägheitsterms in der Spektralgleichung der Fall war.

4. Näherungsansatz für die dreifachen Korrelationen.

Die Wirkung der Trägheitskräfte in einem isotropen Turbulenzfeld läßt sich bekanntlich qualitativ durch einen Kaskadenprozeß beschreiben, bei dem ständig Energie von größeren Wirbeln zu kleineren übertragen wird. Es sind eine Reihe physikalischer Modelle vorgeschlagen worden, um diesen Prozeß zu erklären, von denen die erfolgreichste von Heisenberg [1948] und v.Weizsäcker [1948] von der Vorstellung einer zusätzlichen turbulenten Viskosität ausgeht, die auf die größeren Wirbel einwirkt. Obwohl der Heisenbergsche Ausdruck für den Trägheitsterm in der Spektralgleichung zu qualitativ wichtigen Ergebnissen führt, sind doch eine Anzahl Unstimmigkeiten zwischen Theorie und Experiment festgestellt worden. (Proudman [1951]). Es ist wahrscheinlich, daß einige dieser Unstimmigkeiten (wie z.B. der um einen Faktor 3 zu große theoretische Schiefefaktor) auf den Ansatz für die turbulente Viskosität zurückzuführen sind, da darin nur die kinematischen Eigenschaften der kleineren Wirbel berücksichtigt werden und der enge Zusammenhang zwischen dem dynamischen Verhalten der kleineren Wirbel und dem Vermischungsvorgang, der für die turbulente Viskosität verantwortlich ist, nicht zum Ausdruck kommt. Obwohl die dynamischen Eigenschaften der größeren Wirbel, bei denen die Trägheitskräfte überwiegen, auf die kinematischen zurückführbar sind, ist dies nicht mehr der Fall bei den kleineren Wirbeln, bei denen die Zähigkeits- und Trägheitskräfte vergleichbar sind. Bei unserer Analyse des Trägheitsterms in der Kármán-Howarthschen Korrelationsgleichung werden wir nun einen Ausdruck erhalten, der sich durch geeignete Definition der Turbulenzelemente verschiedener Größe auch als eine zusätzliche turbulente Viskosität, die auf die größeren Turbulenzelemente einwirkt, interpretieren läßt. Wir werden jedoch die in unserem Ausdruck auftretende Vermischungszeit nicht aus den charakteristischen Längen und Geschwindigkeitsdimensionen der kleineren Wirbel, sondern aus einer charakteristischen "Reaktionszeit" ableiten, die sich aus der Energiegleichung der kleineren Wirbel ergibt.

Aus der Deutung des Trägheitsterms in der Karman-Howarthschen Gleichung als das mittlere Produkt zwischen dem Impulsfluß durch die Oberfläche einer kugelförmigen Hüllfläche und der Geschwindigkeit im Mittelpunkt ergibt sich eine einfache Erklärung für den durch die Trägheitskräfte bewirkten Energietransport von größeren zu kleineren Wirbeln. Denn die aus der Kugel herausfließende Flüssigkeit, die vorher dem Mittelpunkt näher war, wird im allgemeinen eine größere Impulskomponente parallel zur Mittelpunktgeschwindigkeit haben als die Flüssigkeit, die aus einem vom Mittelpunkt weiter entfernt liegendem Gebiet in die Kugel hineinfließt. Es ist daher zu erwarten, daß der Ausdruck $\int \overline{(\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{u}_0) u_r}\, dS = -2\pi r^3 (k' + 4k/r)$ in (15) positiv ist, was mit einem Energiefluß von größeren zu kleineren Wirbeln gleichbedeutend ist.

Die Turbulenzelemente, die diese Impulsdiffusion bewirken, werden offenbar von kleinerer oder gleicher Dimension wie der Kugeldurchmesser sein, da die größeren Turbulenzelemente einfach zu einer Durchfließung der Kugel ohne Vermischung führen. Diese verschiedenen Einflüsse lassen sich am einfachsten trennen, indem man die Geschwindigkeiten auf ein Koordinatensystem bezieht, das sich mit der instantanen Geschwindigkeit im Mittelpunkt der Kugel bewegt. Die Turbulenzelemente von größerer Dimension als der Kugeldurchmesser tragen dann nur noch wenig zu den relativen Schwankungen innerhalb der Kugel bei. Der auf das neue Koordinatensystem bezogene Impulsfluß durch die Oberfläche einer mitbewegten Kugel ist $\int \overline{\mathfrak{v} \, v_r}\, dS$, wo $\mathfrak{v} = \mathfrak{u} - \mathfrak{u}_0$ die relative Geschwindigkeit bedeutet. Mit Hilfe der Gleichungen (9) und (10) läßt sich unschwer zeigen, daß das mittlere Produkt dieses Ausdruckes mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{u}_0$ im Mittelpunkt dem entsprechenden mittleren Produkt in dem ursprünglichen Koordinatensystem proportional ist:

$$\int \overline{(\mathfrak{u}_0 \cdot \mathfrak{v}) v_r}\, dS = 2 \int \overline{(\mathfrak{u}_0 \cdot \mathfrak{u}) u_r}\, dS \qquad (19)$$

Die linke Seite von (19) läßt sich einfacher näherungsweise erfassen als der ursprüngliche Trägheitsterm aus (17) auf der rechten Seite, da er nur noch die Geschwindigkeitsschwankungen kleinerer Dimension, die den Impulsaustausch bewirken, enthält. Nach unserer Vorstellung der Wirkung der Trägheitskräfte in der Kármán-Howarthschen Gleichung beruht nun die Korrelation zwischen dem relativen Impulsfluß durch die Oberfläche der (bewegten) Kugel und der Geschwindigkeit $\bar{u}_0$ im Mittelpunkt darauf, daß der Impuls der die Oberfläche durchsetzenden Flüssigkeitsteilchen je nach Flußrichtung verschieden stark mit der Mittelpunktsgeschwindigkeitskorreliert ist. Wir werden daher annehmen, daß sich die linke Seite der Gleichung (19) durch folgenden Näherungsausdruck ersetzen läßt:

$$\int \overline{(\bar{u}_0 w) v_r}\, dS = \int \overline{\left\{ \bar{u}_0 w - v_r \tau \frac{\partial}{\partial r} \bar{u}_0 w \right\} v_r}\, dS \tag{20}$$

wobei τ eine charakteristische "Vermischungszeit" der kleineren Turbulenzelemente darstellt. Gleichung (20) ist unsere "Austauschhypothese", die die dreifachen Korrelationen auf die zweifachen zurückführt. Nach Ausrechnung der rechten Seite erhält man:

$$\int \overline{(\bar{u}_0 w) v_r}\, dS = -8\pi r^2 u'^4 \tau (1-f)(r f'' + 4 f') \tag{21}$$

Durch Einsetzen von (21) in die Impulsgleichung (15) ergibt s sich:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u'^2 f) = 2u'^2 (\nu + \nu_t)\left(f'' + \frac{4}{r} f'\right) \tag{22}$$

mit

$$\nu_t = u'^2 (1-f)\tau \tag{23}$$

Durch Vergleich mit (16) findet man dann folgende Begründung zwischen den zwei- und dreifachen longitudinalen Geschwindigkeitskorrelationen:

$$\left(k' + \frac{4k}{r}\right) = \frac{2\nu_t}{u'}\left(f'' + \frac{4f'}{r}\right) \tag{24}$$

Es folgt aus der Form der Gleichungen (22) und (23), daß der Trägheitsterm der Korrelationsgleichung ebenso wie beim Heisenbergschen Ansatz für den Trägheitsterm in der Spektralgleichung als eine durch den Impulsaustausch mit den kleineren Wirbeln auf die größeren Wirbel einwirkende turbulente Viskosität interpretiert werden kann, wenn man den Wirbeln von größerer Dimension als r die Energie $\frac{3}{2}u'^2 f(r)$ und den übrigen kleineren Wirbeln die Energie $\frac{3}{2}u'^2(1-f(r))$ zuordnet. Diese Aufteilung der Energie ist naheliegend, da f(r) ein Maß für die Gleichförmigkeit der Geschwindigkeit innerhalb einer Kugel vom Radius r darstellt; sie ist aber etwas willkürlich und stimmt nicht mit der üblichen Aufteilung der Energie mit Hilfe des Energiespektrums überein. Eine gewisse Willkür in der Definition der Energie der kleineren Wirbel, die den Impulsaustausch bewirken, ist jedoch unvermeidbar, und auf unsere Ableitung der Gleichungen (22) und (23) trifft die hier gewählte Einteilung der Energie besser zu als der übliche Schnitt des Energiespektrums an einer bestimmten Wellenzahl.

Um k(r) aus (24) ermitteln zu können, muß ein Ausdruck für die Vermischungszeit τ aufgestellt werden. Aus der Ableitung der Gleichung (22) ist zu erwarten, daß die Zeit τ durch eine charakteristische Reaktionszeit der Wirbel kleiner als r bestimmt wird. Aus (16) und (17) ergibt sich für die Änderung der Energie dieser Wirbel die Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{u'^2(1-f)\right\} = -u'^3\left(k' + \frac{4k}{r}\right) - 2\nu u'^2\left(\frac{5}{\lambda^2} + f'' + \frac{4f'}{r}\right) \tag{25}$$

Das erste Glied stellt die Energiezufuhr von den Wirbeln größer als r dar, während der Einfluß der Zähigkeitskräfte durch das zweite Glied wiedergegeben wird. Sowohl der Energieaustausch durch den Vermischungsvorgang wie die Dissipation durch die Zähigkeitskräfte bewirken nun eine ständige Änderung des Geschwindigkeitsfeldes der kleineren Wirbel. Es ist daher naheliegend, die Vermischungszeit τ , die man als die Zeit auffassen kann, in der aufeinanderfolgende Strukturen der kleineren Wirbel miteinander korreliert sind, einer charakteristischen Reaktionszeit proportional zu setzen, die durch die Glieder auf der rechten Seite von (25) bestimmt wird. Berücksichtigt man die verschiedenen Vorzeichen der gemessenen Werte dieser Glieder so erhält man als einfachsten Ausdruck für τ :

$$\tau = \gamma \frac{u'^2(1-f)}{2\nu u'^2\left(\frac{5}{\lambda^2} + f'' + \frac{4}{r}f'\right) - u'^3\left(k' + \frac{4}{r}k\right)} \tag{26}$$

mit γ = const.

Drückt man nach (23) und (24) τ und die dreifachen Korrelationen durch ν_t aus, so erhält man für ν_t die Gleichung:

$$\nu_t = \frac{\gamma}{2} \frac{u'^2(1-f)^2}{\nu\left(\frac{5}{\lambda^2} + f'' + \frac{4}{r}f'\right) - \nu_t\left(f'' + \frac{4}{r}f'\right)} \tag{27}$$

Für kleine r wird demnach $\nu_t = O(r^2)$, in Übereinstimmung mit $k(r) = O(r^3)$ (Gleichung (24)). Für große r folgt $\nu_t \to \frac{\gamma u'^2 \lambda^2}{10\nu}$. Da man das Abklingungsgesetz für die Gesamtenergie näherungsweise in der Form $\frac{du'^2}{dt} = -A\,\frac{u'^3}{L}$ schreiben kann, wo $L = \int_0^\infty f(r)dr$ das longitudinale Makromaß der Turbulenz und A eine Konstante ist, findet man durch Vergleich mit (17) für die turbulente Viskosität der größten Wirbel $\nu_t \to \frac{\gamma}{A}u'L$.

5. Vergleich mit dem Experiment.

Eine direkte Ermittlung der longitudinalen dreifachen Korrelationen aus den Gleichungen (24) und (27) ist schwierig, da die Abhängigkeit vom Parameter γ, der durch Vergleich mit dem Experiment bestimmt werden muß, nicht linear ist. Es werden daher $k(r)$ und γ am zweckmäßigsten iterativ bestimmt. In erster Näherung kann man das Glied $\nu_t(f'' + \frac{4f'}{r})$ im Nenner von (27) vernachlässigen, sodaß γ nur noch linear auftritt und durch Vergleich der theoretischen mit den experimentellen $k(r)$-Kurven bestimmt werden kann. Die erste Iteration der so ermittelten Werte von γ und $k(r)$ reicht dann bereits aus, um den Iterationsfehler kleiner als den durch die Differentiation der experimentellen Funktionen $f(r)$ entstehenden Fehler zu machen.

In Abb. 3 sind zwei theoretische $k(r)$-Kurven für $\gamma = 0{,}37$ zusammen mit den entsprechenden Messungen von Stewart & Townsend [1951] wiedergegeben. Die Kurven sind aus den experimentellen Funktionen $f(r)$ berechnet worden, die zusammen mit $k(r)$ an mehreren Entfernungen x hinter einem Turbulenzgitter bei einer Reynoldszahl $R_M = 5300$ gemessen worden sind ($R_M = \frac{UM}{\nu}$, mit U = mittlere Windgeschwindigkeit, M = Maschenweite des Gitters). Es sind nur die Kurven für die kleinste und die größte Entfernung hinter dem Gitter $\frac{x}{M} = 20$ und $\frac{x}{M} = 120$ wiedergegeben; die übrigen Kurven liegen zwischen diesen in gleichmäßiger Verteilung. Zwei weitere theoretische Kurven für $R_M = 21200$ und 42400 sind neben den entsprechenden experimentellen Daten der zitierten Quelle in Abb. 4 wiedergegeben. Auch hier findet man sehr gute Übereinstimmung, wenn für γ die Werte 0,27 bzw 0,25 an Stelle des für die kleineren Reynoldszahl gefundenen Wertes 0,37 gewählt werden. Obwohl γ als eine Konstante eingeführt wurde, ist eine geringe Abhängigkeit von der Gitter-Reynoldszahl wegen der quantitativen Form des Ansatzes für τ nicht überraschend.

In der Nähe von r=0 lassen sich die theoretischen $k(r)$-Kurven nicht mehr gut aus den gemessenen Funktionen $f(r)$ ermitteln. Aus diesem Grunde bestimmt man den ersten Koeffizienten der Entwicklung von $k(r)$, der von besonderem Interesse ist, weil er nach (18) den Einfluß der Trägheitskräfte auf die Änderung der mittleren Rotation der Turbulenz beschreibt, am zweckmäßigsten direkt aus den gemessenen ersten Koeffizienten der Entwicklung von $f(r)$. Entwickelt man Gleichung (27) und drückt mit Hilfe von (24) den ersten Koeffizienten von ν_t durch S ($= -\lambda^3 k'''(0)$) aus, so erhält man folgende Beziehung zwischen S, G und der Reynoldszahl $R_\lambda = \frac{u'\lambda}{\nu}$:

$$\frac{G}{R_\lambda} = \frac{45}{49}\,\frac{\gamma}{S} - \frac{S}{2} \qquad (28)$$

Da sämtliche in (28) auftretende Größen der Messung unmittelbar zugänglich sind, könnte man die Gleichung einfach durch Einsetzen der experimentellen Werte nachprüfen. Der Vergleich mit dem Experiment wird jedoch übersichtlicher, wenn man Gleichung (18) für die Änderung der mittleren Rotation mithinzuzieht. Setzt man in (18) das Abklingungsgesetz $u'^{-2} \sim (t-t_0)$ ein, das in einem weiten Reynoldszahlenbereich experimentell mehrfach bestätigt worden ist, so erhält man eine weitere Beziehung zwischen S, G und R_λ (Batchelor & Townsend [1947]):

$$\frac{30}{7}\,\frac{1}{R_\lambda} = \frac{G}{R_\lambda} - \frac{S}{2} \qquad (29)$$

Aus den Gleichungen (28) und (29) lassen sich nun S und G als Fubktionen von R_λ ermitteln. Da R_λ nach dem Abklingungsgesetz während des Abklingens konstant bleibt, werden auch S und G konstant bleiben. Dieses wird durch die Experimente von Batchelor & Townsend [1947] bestätigt. Die Abhängigkeiten der Größen S und G von R_λ sind zusammen mit den Messungen von Batchelor & Townsend in Abb. 5[(1)] und 6 wiedergegeben. Die Übereinstimmung ist befriedigend, wenn berücksichtigt wird,

(1) Die Meßpunkte in Abb. 5 sind der Abb. 6.3 aus Batchelor 1953 entnommen.

daß weder S noch G mit großer Genauigkeit gemessen werden können und auch die theoretischen Werte nur als qualitativ anzusehen sind.

Die aus den Gleichungen (28) und (29) folgenden Abhängigkeiten der Größen S und G von R_λ beruhen auf dem linearen Abklingungsgesetz $u'^{-2} \sim (t-t_o)$, das für sehr große Reynoldszahlen bisher noch nicht nachgeprüft worden ist und für sehr kleine Reynoldszahlen, bei denen die Trägheitskräfte klein gegen die Zähigkeitskräfte sind, nicht mehr zutrifft. Gleichwohl lassen sich S und G auch in diesen Fällen durch Anwendung weiterer Ergebnisse der Theorie der isotropen Turbulenz bestimmen.

Nach Kolmogoroff [1941] (Batchelor [1947]) ist das Dissipationsgebiet des Energiespektrums für sehr hohe Reynoldszahlen praktisch in einem Gleichgewichtszustand, bei dem der Energieverlust durch Dissipation durch die Energiezufuhr infolge der Trägheitskräfte vom langwelligen Bereich des Spektrums fast aufgehoben wird. Demnach ist die linke Seite der Gleichung (18) klein gegen die beiden Terme auf der rechten Seite, sodaß:

$$S = \frac{2G}{R_\lambda} \tag{30}$$

Aus (28) und (30) folgt dann

$$S = \left(\frac{45}{49}\gamma\right)^{1/2} = 0{,}48 \quad ; \qquad G = 0{,}24\, R_\lambda$$

wobei der für die höchste Reynoldszahl R_M = 42400 gefundene Wert γ = 0,25 auch für den Bereich höherer Reynoldszahlen der Kolmogoroffschen Theorie übernommen worden ist. Der asymptotische Wert für S stimmt gut überein mit dem von Betchov [1947] für R_λ = 250 gemessenen Wert 0,45 ± 0,05.

Für sehr kleine Reynoldszahlen, bei denen die Trägheitskräfte klein gegen die Zähigkeitskräfte sind, läßt sich f(r,t) exakt aus (16) bestimmen. Es ergibt sich, daß f(r,t) asymptotisch einer sich ähnlich ändernden Funktion zustrebt, für die G=3 (Batchelor & Townsend

[1948]). Aus Gleichung (28) folgt somit, daß $S \to 0$ mit $R_\lambda \to 0$. Dieses Ergebnis ist insofern interessant, als gewöhnlich angenommen wird, daß S für alle Reynoldszahlen annähernd konstant bleibt.

Schrifttum.

Batchelor, G.K. 1947: Kolmogoroff's theory of locally isotropic turbulence. Proc.Camb.Phil.Soc. 43, 523.

Batchelor, G.K. 1953: The theory of homogeneous turbulence, Camb.Univ.Press.

Batchelor, G.K. & Townsend, A.A. 1947: Decay of vorticity in isotropic turbulence. Proc.Roy.Soc.A, 190, 534.

Batchelor, G.K. & Townsend, A.A. 1948: Decay of turbulence in the final period. Proc.Roy.Soc.A, 194, 527.

Betchov, R. 1947: On the fine structure of turbulent flows. J.Fluid Mech., 3, 205.

Chandresekhar, S. 1953: Some aspects of the statistical theory of isotropic turbulence. Proc.Symp.Appl. Math., 4, 1.

Heisenberg, W. 1948: Zur statistischen Theorie der Turbulenz. Z.Phys., 124, 628.

von Karman, T. & Howarth, L. 1938: On the statistical theory of isotropic turbulence. Proc.Roy.Soc.A, 164, 192.

Kolmogoroff, A.N. 1941: The local structure of turbulence in incompressible viscous flow for very large Reynolds' numbers. S.R.Acad.Sci.U.R.S.S., 30, 301.

Proudman, I. 1951: A comparison of Heisenberg's spectrum of turbulence with experiment. Proc.Camb.Phil. Soc., 47, 158.

Robertson, H.P. 1940: The invariant theory of isotropic turbulence. Proc.Camb.Phil.Soc., 36, 209.

Stewart, R.W. & Townsend, A.A. 1951: Similarity and self-preservation in isotropic turbulence. Phil.Trans. A, 243, 359.

von Weizsäcker, C.F. 1948: Das Spektrum der Turbulenz bei großen Reynoldsschen Zahlen, Z.Phys., 124, 614.

Wieghardt, K. 1941: Z.B. über Arbeiten zur statistischen Turbulenztheorie. Luftfahrtforschung, 18, 1.