

75 | Dezember 1960

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

G. Collatz

**Über die Kraftwirkungen, die zwei
unendlich lange elliptische Zylinder
aufeinander ausüben, die sich in
unbeschränktem Wasser begegnen
bzw. überholen**

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

**Über die Kraftwirkungen, die zwei unendlich lange elliptische Zylinder aufeinander ausüben,
die sich in unbeschränktem Wasser begegnen bzw. überholen**

G. Collatz, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1960

© Technische Universität Hamburg-Harburg
Schriftenreihe Schiffbau
Schwarzenbergstraße 95c
D-21073 Hamburg

<http://www.tuhh.de/vss>

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Prof.Dr.-Ing.Dr.-Ing.E.h.

G. Weinblum

Über die Kraftwirkungen, die zwei unendlich
lange elliptische Zylinder aufeinander ausüben,
die sich in unbeschränktem Wasser begegnen bzw.
überholen.

Teil A: Theoretische Grundlagen

von

Dipl.Ing. Günter Collatz

Dezember 1960

Inhaltsverzeichnis

<u>1. Einleitung</u>	1
<u>2. Sätze über Kräfte und Momente, die auf einen Körper in einer Potentialströmung ausgeübt werden.</u>	
a. Kraftwirkungen auf einen Körper in stationärer Strömung.	5
b. Kraftwirkungen auf einen Körper in instationärer Strömung.	11
c. Die gegenseitige Beeinflussung zweier zylindrischer Körper.	13
<u>3. Darstellung von zylindrischen Körpern durch Oberflächenquellbelegungen.</u>	
a. Darstellung eines zylindrischen Körpers in einer beliebigen Strömung.	24
b. Darstellung zweier Körper, die sich gegenseitig beeinflussen.	28
<u>4. Die Quellbelegung für einen elliptischen Zylinder in einer Parallelströmung.</u>	
a. Parameterdarstellung einer Ellipse.	30
b. Bestimmung der Quellbelegung bei paralleler Anströmung mit Hilfe des komplexen Potentials.	33
c. Der schräg angeströmte elliptische Zylinder.	45
<u>5. Anwendung der Sätze über die Kräfte und Momente auf den Fall eines elliptischen Zylinders in einer Parallelströmung.</u>	
a. Der instationäre Kraftanteil.	47
b. Der stationäre Momentenanteil.	50
c. Der instationäre Momentenanteil.	51

**6. Hinweise für die numerische Auswertung der
Integrale.**

- a. Das Potential der körpereigenen
Quellbelegung an der Kontur. 54
- b. Die von der körpereigenen Quellbelegung
an der Kontur induzierte Normalkomponente
der Geschwindigkeit. 58

Zusammenfassung. 62

Literaturverzeichnis. 63

1. Einleitung .

Ziel dieser Arbeit ist es, über die Grösse und Art der Kräfte und Momente Aufschluss zu erhalten, die zwei Schiffskörper aufeinander ausüben, wenn sie in einem geringen Abstand nebeneinander herfahren, sich begegnen oder der eine den anderen überholt.

Eine exakte theoretische Behandlung dieses Problems dürfte kaum möglich sein. Schon die Umströmung eines einzelnen Schiffskörpers ist auf theoretischem Wege exakt nicht zu erfassen, will man den Einfluss der freien Wasseroberfläche und die Zähigkeit des Mediums berücksichtigen. Beim Zweikörperproblem kommt noch erschwerend hinzu, dass sich beide Körper in einer gekrümmten Strömung befinden. Ausserdem ist - falls sich nicht beide Körper mit gleicher Geschwindigkeit in gleicher Richtung bewegen - diese Strömung instationär, da jeder Körper durch das Feld der Störströmung des anderen hindurchläuft.

Es dürfte jedoch nicht zu bezweifeln sein, dass der grösste Anteil der wechselseitigen Kraftwirkungen von der reinen Verdrängungsströmung herrührt. Man kann also, um das Problem der mathematischen Behandlung leichter zugänglich zu machen, zunächst einmal die Wellen- und Zähigkeitseinflüsse vernachlässigen, d.h. man wird sich darauf beschränken, zwei Körper zu betrachten, die sich in einer nach allen Seiten unbeschränkten, idealen Flüssigkeit bewegen.

Auch wird man, um den numerischen Rechenaufwand gering zu halten, die Betrachtung für recht einfache Körperformen durchführen. Es kommt nicht darauf an, die Kräfte und Momente zu bestimmen, die zwei bestimmte Körper unter bestimmten Bedingungen aufeinander ausüben, es muss vielmehr danach getrachtet werden, einen möglichst geschlossenen Überblick über die physikalischen Zusammenhänge zu gewinnen.

In meinem ersten Bericht habe ich als einfachsten Fall die gegenseitige Beeinflussung zweier unendlich langer Kreiszylinder untersucht (ebenes Problem). Von den Ergebnissen dieser Untersuchung verdienen zwei Tatsachen besonderer Beachtung:

Einmal die Tatsache, dass die instationären Kraftanteile wesentlich grösser und anders gerichtet sein können als die stationären Kraftanteile. Unter den instationären Kraftanteilen sind dabei diejenigen zu verstehen, die davon herrühren, dass die relative Anströmung der Körper infolge ihres gegenseitigen Störeinflusses zeitlich nicht konstant ist. Das bedeutet, dass eine quasi-stationäre Betrachtungsweise zu falschen Ergebnissen führen muss.

Die andere Tatsache ist, dass die Kraft, die ein Körper auf einen zweiten ausübt, nicht unbedingt gleich gross und entgegengesetzt gerichtet sein muss, wie die Kraft, die der zweite auf den ersten ausübt. Es ist so, dass bei zwei gleich grossen Körpern, die sich verschieden schnell bewegen, der schnellere auf den langsameren die grössere Kraft ausübt. Erklären lässt sich diese Tatsache auf folgende Weise: Der schnellere Körper setzt das Wasser in seiner Umgebung mehr in Bewegung als der langsamere.

Der langsamere Körper befindet sich also in einer Strömung, die zeitlich stärker veränderlich ist als die, in der sich der schnellere befindet. Daher wirkt auf ihn eine relativ grössere instationäre Kraft. Das bedeutet, man kann auf die beiden Körper, wenn man sie für sich betrachtet, also den Impuls des sie umgebenden Mediums ausser Betracht lässt, nicht das dritte Newton'sche Axiom - "actio = reactio" - anwenden.

Nun ist ein Kreiszylinder kein gutes Ersatzmodell für einen Schiffskörper. Besonders kommt die Unzulänglichkeit der Kreiszylinder dadurch zum Ausdruck, dass an ihnen - ideale Flüssigkeit vorausgesetzt - keine Momente angreifen können. Um auch über die Grösse und den Drehsinn der durch die gegenseitige Beeinflussung hervorgerufenen Giermomente eine Vorstellung zu erhalten, werden in dieser Arbeit zylindrische Körper mit einer elliptischen Kontur untersucht.

Es handelt sich also, wie schon beim Fall der Kreiszylinder, um die Behandlung eines ebenen Strömungsproblems. Um die Kraftwirkungen - besonders die instationären Anteile - genau erfassen zu können, ist eine möglichst genaue Darstellung beider Körper erforderlich. Diese Darstellung wird erreicht durch eine kontinuierliche Belegung der Körperoberfläche mit Quellen und Senken, eine Darstellung, die sich auch auf räumliche Strömungsprobleme anwenden lässt. Wenn dennoch in dieser Arbeit nur das ebene Problem behandelt werden soll, so deshalb, weil hierbei der Rechenaufwand erheblich geringer ist. Zwar werden die Kräfte und Momente infolge der ebenen Betrachtungsweise

grössenordnungsmässig nicht mit denen übereinstimmen, die für wirkliche Schiffskörper gelten, ihre Richtung jedoch und auch ihre Abhängigkeit von den Geschwindigkeitsverhältnissen und von der Lage beider Körper zueinander dürfte richtig wiedergegeben werden.

Es wurden als Konturen Ellipsen gewählt, da die Ellipse den Vorteil hat, dass man für sie in paralleler Anströmung, also ohne den Störeinfluss eines zweiten Körpers die Oberflächenquellbelegung in geschlossener Form angeben kann. Der Volligkeitsgrad eines elliptischen Zylinders ist :

$$\delta = \frac{\pi}{4} = 0,785$$

Wählt man ein Achsenverhältnis von etwa $a : b = 8$, so dürfte damit eine verhältnismässig gute Übereinstimmung mit einem Schiffskörper bestehen.

2. Sätze über Kräfte und Momente, die auf einen Körper in einer Potentialströmung ausgeübt werden.

a. Kraftwirkungen auf einen Körper in stationärer Strömung.

Literatur: [2] [3]

Es ist bekannt, dass man Körper, die sich in einer Potentialströmung befinden, darstellen kann durch eine Überlagerung von Strömungen, die von Quellen und Senken sowie anderen Singularitäten erzeugt werden. Dabei können die singulären Stellen im Innern sowie auf der Oberfläche des Körpers liegen. (Vergl. z.B. [1], Seite 775) Die Bestimmungsgleichung für die Singularitäten erhält man aus der Oberflächenbedingung, die besagt, dass durch die Oberfläche des Körpers keine Flüssigkeit hindurchfließen kann, d.h. die resultierende Normalgeschwindigkeit - bezogen auf ein mit dem Körper fest verbundenes Koordinatensystem - muss Null sein.

Es sei nun angenommen, dass das körpereigene Singularitätensystem, womit die Gesamtheit aller den Körper darstellenden Singularitäten gemeint ist, bekannt sei. Gefragt ist nach den Kraftwirkungen, die die Grundströmung auf den Körper ausübt. Zur Bestimmung dieser Kraftwirkungen wäre folgender Berechnungsgang möglich :

Zunächst bestimmt man die resultierende Geschwindigkeit aus der Grundströmung und der vom Körper hervorgerufenen Störströmung. Letztere ist die Strömung, die vom körpereigenen Singularitätensystem induziert wird. Aus der resultierenden Geschwindigkeit an der Körperoberfläche - die laut Oberflächenbedingung eine tangentielle Richtung haben muss - erhält man mit Hilfe der Bernoulli'schen

Gleichung den an der Oberfläche herrschenden Druck p .
Schliesslich ergeben sich durch Integration über die
Körperoberfläche die gesuchten Strömungskräfte und
Momente:

$$\vec{P} = - \iint_0 p \vec{n} d\sigma \quad \text{Gl.1}$$

$$\vec{M} = - \iint_0 [(-p\vec{n}) \times \vec{r}] d\sigma = - \iint_0 p [\vec{r} \times \vec{n}] d\sigma \quad \text{Gl.2}$$

In diesen Gleichungen bedeutet $\vec{n}$ der nach aussen
gerichtete Einheitsnormalenvektor und $\vec{r}$ der Ortsvektor
der Oberfläche. Mit $d\sigma$ ist der Betrag eines Oberflächen-
elementes bezeichnet.

Wesentlich einfacher gestaltet sich die Berechnung - und
das gilt besonders für den Fall, dass das körpereigene
Singularitätensystem bekannt ist - wenn man den Satz
von Lagally anwendet. [2] Dieser Satz besagt: Kann man
einen Körper durch Überlagerung singulärer Strömungen
darstellen, so lassen sich die Kräfte und Momente, die
auf den Körper wirken, aus den Kraftwirkungen ermitteln,
die die Grundströmung auf die einzelnen Singularitäten
ausübt. Für diese Kraftwirkungen, also für die Kraft und
das Moment, die eine Strömung auf eine einzelne Singularität
ausübt, ergeben sich für stationäre Anströmung recht
einfache Ausdrücke. [3]

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird nur von der Körper-
darstellung durch Quellen und Senken Gebrauch gemacht.
Aus diesem Grunde wird auf die Kraftwirkungen einer
Strömung auf andere Singularitäten - wie z.B. Potential-
wirbel oder Dipole - an dieser Stelle nicht näher
eingegangen.

Wendet man den Impulssatz auf eine einzelne Quelle in einer beliebigen (also auch krummlinigen) stationären Strömung an, wobei man um die Quelle eine Kontrollfläche herumlegt und für diese Kontrollfläche einen Grenzübergang macht, indem man sie auf den Punkt der Quelle zusammenschrumpfen lässt, so erhält man für die Kraft :

$$\vec{P} = -\rho Q \vec{V}_a = -\rho Q \text{grad } \phi_a$$

Gl. 3

Dabei bedeutet ρ die Dichte der Flüssigkeit, $\vec{V}_a$ die relative ungestörte Anströmgeschwindigkeit (also diejenige Geschwindigkeit, die am Ort der Quelle herrschen würde, wenn die Quelle nicht vorhanden wäre) und ϕ_a das Potential der ungestörten Anströmgeschwindigkeit. Die Ergiebigkeit Q der Quelle ist gleich der in der Zeiteinheit aus ihr herausströmenden Wassermenge. Für die Dimension gilt :

Für eine räumliche Quelle: Volumen pro Zeiteinheit = $\left[\frac{m^3}{s} \right]$

Für eine ebene Quelle: Volumen pro Zeit- und
Längeneinheit

= $\left[\frac{m^2}{s} \right]$

Aus der Gleichung 3, die sowohl für räumliche als auch für ebene* Quellen und Senken Gültigkeit hat, ergibt sich, dass die Kraft für eine Quelle der Anströmung entgegengesetzt gerichtet ist. Bei einer Senke, die Wasser aufnimmt, ist die Ergiebigkeit negativ und damit die Kraft mit der Anströmung gleichgerichtet.

Ein Moment wird auf eine einzelne Quelle bzw. Senke nicht ausgeübt.

Besteht nun das körpereigene Singularitätensystem aus n einzelnen Quellen und Senken, so erhält man die auf den Körper wirkende Kraft durch vektorielle Addition aller auf die Quellen und Senken wirkenden Einzelkräfte.

* Im ebenen Fall gilt Gl. 3 für die Kraft pro Längeneinheit

Auf den Körper wirkt dann die Kraft :

$$\vec{P} = -g \sum_{i=1}^n Q_i \vec{v}_{ai} \quad \text{Gl.4}$$

Besonders einfach ist diese Formel dadurch, dass man nur die jeweils am Ort der Quelle Q_i herrschende relative Grundströmung $\vec{v}_{ai}$ einzusetzen braucht. Die Tatsache, dass die einzelnen Quellen und Senken Geschwindigkeiten induzieren und damit gegenseitig Kräfte aufeinander ausüben, braucht nicht berücksichtigt zu werden, da diese sogenannten inneren Kräfte sich in ihrer Gesamtheit aufheben.

Das auf den Körper wirkende Moment erhält man, indem man die Momente dieser Einzelkräfte in bezug auf einen beliebigen Punkt - beispielsweise den Körpermittelpunkt - bildet. Ist $\vec{r}_i$, der Ortsvektor der Quelle Q_i in bezug auf diesen Punkt, so ergibt sich :

$$\vec{M} = g \sum_{i=1}^n Q_i [\vec{v}_{ai} \times \vec{r}_i] \quad \text{Gl.5}$$

Besteht das körpereigene Singularitätensystem nicht aus diskreten Quellen und Senken sondern aus einer kontinuierlichen Quellverteilung $q = \frac{dQ}{ds}$ längs einer Belegungskurve S , so muss lediglich das Summenzeichen in den Gleichungen 4 und 5 durch ein Integralzeichen ersetzt werden.

$$\vec{P} = -g \int_S q \vec{v}_a ds \quad \text{Gl.6}$$

$$\vec{M} = g \int_S q [\vec{v}_a \times \vec{r}] ds \quad \text{Gl.7}$$

Ausser der diskreten Quell-Senken-Verteilung und einer kontinuierlichen Quellverteilung längs einer Belegungskurve sind noch weitere Verteilungen wie kontinuierliche Quellverteilungen über eine Belegungsfläche oder über ein Volumen denkbar. Auch Kombinationen von diskreten Quellen und Senken mit kontinuierlichen Verteilungen sind möglich. Die Gleichungen 6 und 7 sind jedoch für das in dieser Arbeit behandelte Problem, die gegenseitige Beeinflussung zweier unendlich langer zylindrischer Körper, die durch eine Oberflächenquellbelegung dargestellt werden, ausreichend.

Da der Strömungsverlauf bei einem unendlich langen Zylinder in allen Ebenen die senkrecht zur Zylinderachse liegen, gleich ist, genügt es, eine solche Ebene zu betrachten. Daher ist die Strömung um den Zylinder vollständig beschrieben, wenn man in dieser Ebene die den Körper darstellenden zweidimensionalen Quellen und Senken kennt. Eine Belegung der gesamten Oberfläche - von minus unendlich bis plus unendlich - mit räumlichen Quellen und Senken ist gleichbedeutend mit einer zweidimensionalen Quell-Senken-Belegung auf der Kontur.

Der Vollständigkeit halber sei am Schluss dieses Absatzes noch darauf hingewiesen, dass die Gesamtergiebigkeit aller Quellen und Senken, die einen Körper darstellen, Null sein muss. Es gilt also für eine diskrete Quell-Senken-Verteilung:

$$\sum_{i=1}^n q_i = 0 \quad \text{Gl. 8}$$

und für eine kontinuierliche Quellverteilung auf einer Belegungskurve:

$$\int_S q \, dS = 0 \quad \text{Gl. 9}$$

Diese Tatsache gilt sowohl für eine Quellbelegung auf der Oberfläche als auch für den Fall, dass die Quellen und Senken alle innerhalb der Körperumrandung liegen. Im letzteren Fall ist der Beweis sehr leicht einzusehen. Wäre die Gesamtergiebigkeit von Null verschieden, so müsste über die Körperoberfläche Flüssigkeit austreten, wenn die Quellen überwiegen, bzw. eintreten, wenn die Senken überwiegen. Die Oberflächenbedingung wäre also nicht erfüllt. Auf entsprechende Weise lässt sich der Beweis auch für die Oberflächenquellbelegung durchführen, wenn man die Sprungrelation für die Normalableitung eines Flächenpotentials beachtet. (Vergl. Abschnitt 3a)

Mit Hilfe dieser Beziehung lässt sich das Dirichlet'sche Paradoxon nachweisen, welches besagt, dass ein Körper in einer gleichförmigen Parallelströmung - ideale Flüssigkeit vorausgesetzt - keinen Widerstand erleidet. Man braucht nur in den Gleichungen 4 und 6 die Anströmgeschwindigkeit vor das Summen bzw. Integralzeichen zu ziehen, was im Falle paralleler Anströmung gestattet ist, um zu zeigen, dass auf den Körper keine Kraft wirken kann.

Liegt eine beliebige Anströmung $\vec{v}_a$ vor, die sich aufspalten lässt in einen parallelen Anteil $\vec{v}_{ap}$ und einen rein krummlinigen Anteil $\vec{v}_{ak}$, so übt nur der krummlinige Anteil eine Kraft auf den Körper aus.

$$\vec{v}_a = \vec{v}_{ak} + \vec{v}_{ap}$$

$$\vec{P} = -\rho \int_S \vec{v}_a dS = -\rho \int_S \vec{v}_{ak} dS$$

Gl. 10

Von dieser Beziehung soll später Gebrauch gemacht werden.

b. Kraftwirkungen auf einen Körper in instationärer Strömung.

Literatur: [4] [5]

Der Satz von Lagally wurde von Cummins [4] für den Fall erweitert, dass sich ein Körper in einer instationären Strömung befindet. Ist die Anströmung zeitlich veränderlich, so müssen sich auch die Singularitäten zeitlich ändern, mit deren Hilfe die Randbedingung erfüllt wird. Es ändert sich im allgemeinen sowohl die Lage als auch der Betrag der Singularitäten. (Ist der Körper durch Dipole dargestellt, bei denen es sich um Vektoren handelt, so kann sich auch deren Richtung ändern.)

Der Satz von Cummins besagt nun, dass zu den stationären Kraft- und Momentanteilen, die man erhält, indem man in die obigen Gleichungen die augenblickliche Anströmgeschwindigkeit einsetzt, noch folgende instationäre Anteile hinzukommen:

Wird der Körper durch n diskrete Quellen und Senken dargestellt, so gilt für den instationären Kraftanteil :

$$\vec{P}_{inst.} = -\varrho \sum_{i=1}^n \left(\frac{dQ_i}{dt} \vec{r}_i + Q_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) = -\varrho \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n Q_i \vec{r}_i \quad \text{Gl. 11}$$

Bei einer kontinuierlichen Quellverteilung längs einer Belegungskurve S muss lediglich wieder das Summenzeichen durch ein Integralzeichen ersetzt werden.

$$\vec{P}_{inst.} = -\varrho \int_S \left(\frac{dq}{dt} \vec{r} + q \frac{d\vec{r}}{dt} \right) dS = -\varrho \frac{d}{dt} \int_S q \vec{r} dS \quad \text{Gl. 12}$$

Für den instationären Momentenanteil gelingt es nicht, einen Ausdruck zu finden, der das Moment in direkter Abhängigkeit von den Singularitäten darstellt. Hier muss in jedem Fall eine Integration über die Körperoberfläche durchgeführt werden. Aus der Bernoulli'schen Gleichung für instationäre Strömung

$$\frac{\rho}{2} v^2 + p - \gamma h + \rho \frac{d\phi}{dt} = \text{Konst.} \quad \text{Gl. 13}$$

erkennt man, dass der instationäre Druckanteil aus dem Term

$$\Delta p_{\text{inst.}} = -\rho \frac{d\phi}{dt}$$

besteht. Daraus erhält man: (Vergl. Gl. 2)

$$\vec{M}_{\text{inst.}} = \rho \frac{d}{dt} \iint_0 \phi [\vec{r} \times \vec{n}] d\sigma \quad \text{Gl. 14}$$

Es muss bemerkt werden, dass ϕ das Potential der Gesamtströmung ist, welches sich zusammensetzt aus dem Potential der Anströmung ϕ_a und dem Potential der körpereigenen Singularitäten ϕ_q .

Die gesamte Kraft, die auf den Körper in instationärer Strömung wirkt, und das gesamte Moment erhält man schliesslich durch vektorielle Addition der stationären und instationären Anteile. Bei einer Darstellung eines unendlich langen zylindrischen Körpers durch eine zweidimensionale Quellbelegung auf der Kontur ergibt sich pro Längeneinheit des Zylinders:

$$\vec{P}_{\text{ges.}} = -\rho \int_S \nabla \phi_a dS - \rho \frac{d}{dt} \int_S q \vec{r} dS \quad \text{Gl. 15}$$

$$\vec{M}_{\text{ges.}} = \rho \int_S q [\nabla \phi_a \times \vec{r}] dS + \rho \frac{d}{dt} \int_S (\phi_a + \phi_q) [\vec{r} \times \vec{n}] dS \quad \text{Gl. 16}$$

c. Die gegenseitige Beeinflussung zweier zylindrischer Körper.

Es sollen die Kräfte und Momente bestimmt werden, die zwei Körper aufeinander ausüben, wenn sie nebeneinander herfahren, sich begegnen oder überholen. Es wird nur das ebene Problem betrachtet, d.h. es soll sich um unendlich lange zylindrische Körper handeln.

Die beiden Körper seien durch eine zweidimensionale Quell-Senken-Belegung auf der Kontur dargestellt. Die Funktion der Quellbelegung sei an dieser Stelle als bekannt vorausgesetzt, auf ihre Bestimmung wird später eingegangen.

Beim Begegnen bzw. Überholen befinden sich die Körper in einer gekrümmten instationären Strömung, da jeder Körper durch das Feld der Störströmung des anderen hindurchläuft. Die Quellbelegung muss sich also zeitlich ändern. Nur für den Fall, dass beide Körper sich mit gleicher Geschwindigkeit in gleicher Richtung fortbewegen, ist die relative Anströmung stationär und damit die Quellbelegung konstant.

In bezug auf die Körperform und die Bewegung der beiden Körper sollen folgende einschränkende Annahmen getroffen werden: Die Kontur beider zylindrischer Körper sei symmetrisch zu einer Achse. Die Körper sollen sich in einer ruhenden Grundströmung befinden, sich in Richtung ihrer Symmetrieachse gleichförmig, d.h. gradlinig mit konstanter Geschwindigkeit fortbewegen und dabei keine Drehung um die Zylinderachse ausführen. Die Bahnen, auf denen sich die beiden Körper bewegen, seien zueinander parallel.

Diese Einschränkungen erfordern, dass die Körper zur Aufrechterhaltung ihres gleichförmigen Bewegungszustandes als zwangsläufig geführt anzunehmen sind, da die Bewegung sonst durch die gegenseitige Beeinflussung verändert würde.

Die auftretenden Kräfte würden eine Änderung der Geschwindigkeit hervorrufen, die Momente eine Drehung bewirken.

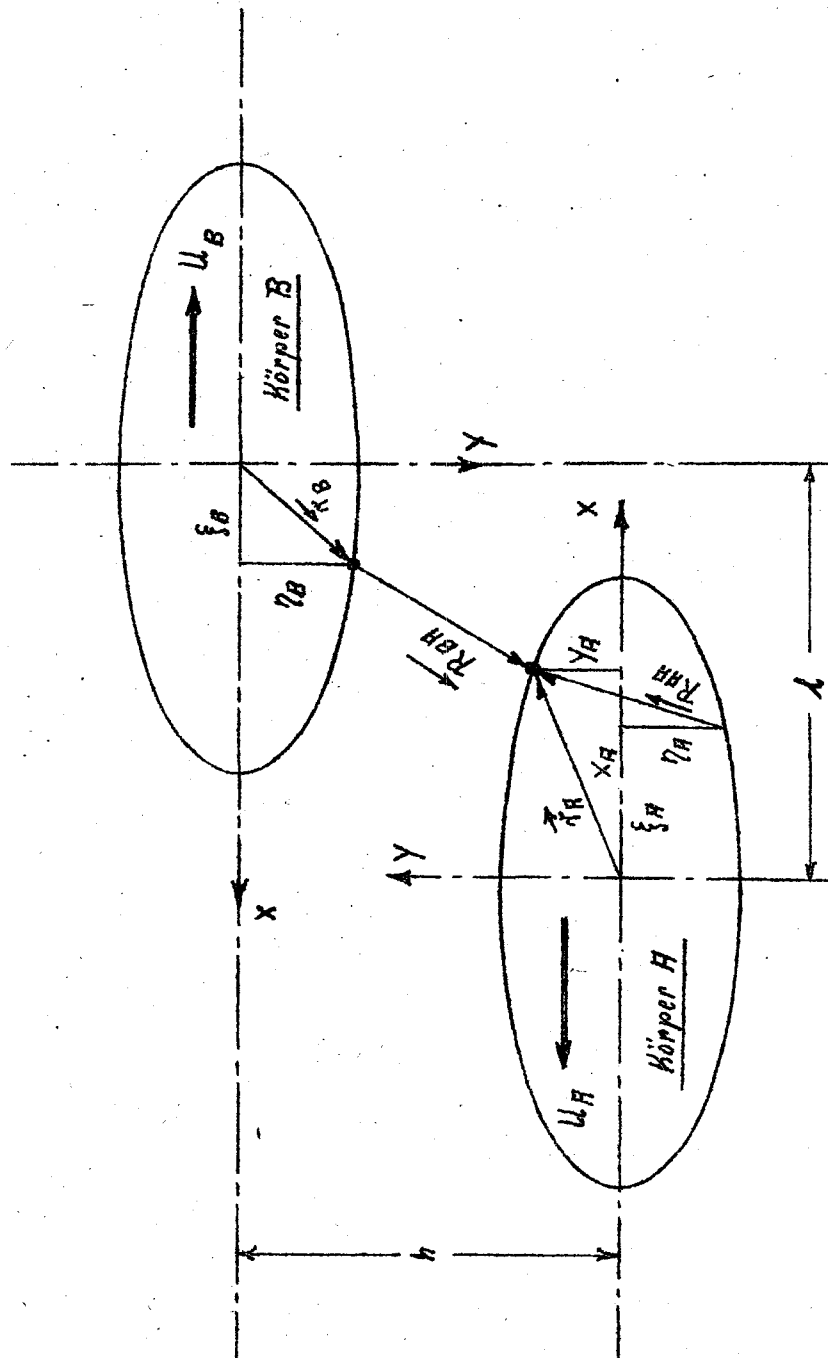
Ferner bedeuten diese Einschränkungen unter der Voraussetzung idealer Flüssigkeit, dass auf jeden der beiden Körper nur Kräfte und Momente wirken, die durch die Beeinflussung des anderen Körpers hervorgerufen werden. Sind die beiden Körper sehr weit voneinander entfernt, so kann man die Störströmung des einen Körpers am Ort des anderen Körpers vernachlässigen. Jeder Körper bewegt sich dann mit konstanter Geschwindigkeit in einer ruhenden Flüssigkeit. Nach dem Umkehrprinzip ist das identisch mit dem Fall eines ruhenden Körpers, der sich in einer stationären Parallelströmung befindet. Es wurde bereits gezeigt, dass in diesem Fall auf den Körper keine Kraft wirken kann. Ein Moment greift am Körper nicht an, da vorausgesetzt wurde, dass die Körper zur Fortbewegungsrichtung symmetrisch sein sollen.

Die Skizze auf der nächsten Seite zeigt zwei Körper, die einander begegnet sind zu einem Zeitpunkt, wo sie bereits wieder auseinanderstreben. Der Körper A bewege sich mit der Geschwindigkeit U_A (nach links), der Körper B mit der Geschwindigkeit U_B (nach rechts). Der Abstand der beiden parallelen Bahnen sei mit h bezeichnet. Mit l , parallel zu den Bahnen gemessen, sei die augenblickliche Lage der beiden Körper zueinander angegeben.

Es werden nun zwei kartesische Koordinatensysteme eingeführt, die um 180° gegeneinander gedreht und mit je einem Körper fest verbunden sind. Die positive Richtung der x-Achse sei für beide Koordinatensysteme entgegengesetzt

Skizze zur Wahl der Koordinatensysteme.

(Gezeichnet für den Fall des Begegnens)



wie die Richtung der Fortbewegung des jeweiligen Körpers. Alle Grössen, die auf das mit dem Körper A fest verbundene Koordinatensystem bezogen sind, sollen den Index A erhalten. Der Index B gilt sinngemäss für alle Grössen, relativ zum System B.

Dann gelten zwischen den beiden Koordinatensystemen die Beziehungen:

$$x_B = \lambda - x_A \qquad y_B = h - y_A \qquad \text{Gl.17}$$

Die zeitliche Abhängigkeit der beiden Koordinatensysteme ist gegeben durch die Gleichung

$$\lambda = (u_A + u_B)(t - t_0) \qquad \text{Gl.18}$$

Dabei sei mit t_0 der Zeitpunkt bezeichnet, an dem sich beide Körper direkt gegenüber stehen.

Diese Anordnung der beiden Koordinatensysteme ist etwas ungewöhnlich. Sie wurde gewählt, da sie den Vorteil hat, dass keines der beiden Systeme vor dem anderen in irgend einer Hinsicht ausgezeichnet ist. Man braucht nur die Gleichungen für die Kräfte und Momente aufzustellen, die auf den Körper A wirken. Infolge der Gleichwertigkeit beider Systeme ergeben sich die Kraftwirkungen auf den Körper B, indem man lediglich die Indizes A und B in den entsprechenden Gleichungen vertauscht.

Bevor mit der Aufstellung der Gleichungen für die Kräfte und Momente begonnen wird, soll noch etwas über die Vorzeichen der Fortbewegungsgeschwindigkeiten gesagt werden. Die beiden um 180° gedrehten Koordinatensysteme wurden so eingeführt, dass im Fall des Begegnens sich jeder der beiden

Körper in Bezug auf das System des anderen Körpers in Richtung der positiven x-Achse bewegt. In die Gleichung 18 sind dann beide Translationsgeschwindigkeiten positiv einzusetzen.

Soll nun der Fall betrachtet werden, dass der eine Körper den anderen überholt oder mit gleicher Geschwindigkeit neben ihm herfährt, und will man die gewählten Koordinatensysteme beibehalten, so braucht man nur das Vorzeichen der Fortbewegungsgeschwindigkeit des Körpers A negativ einzusetzen.

Es lassen sich also durch das Verhältnis der Geschwindigkeiten verschiedene "Begegnungsarten" darstellen. So bedeuten z.B. die Verhältnisse:

- | | | |
|-----|----------------------------|---|
| a.) | $\frac{u_A}{u_B} > 0$ | Beide Körper begegnen sich. |
| b.) | $\frac{u_A}{u_B} = 1$ | Begegnung speziell für den Fall, dass beide Körper gleiche Geschwindigkeit haben. |
| c.) | $\frac{u_A}{u_B} = 0$ | Der Körper B fährt am ruhenden Körper A vorbei. |
| d.) | $0 > \frac{u_A}{u_B} > -1$ | Der Körper B überholt den Körper A. |
| e.) | $\frac{u_A}{u_B} = -1$ | Beide Körper fahren nebeneinander her. |

Dass das Verhältnis zweier in bezug auf die ruhende Grundströmung gleichgerichteter Translationsgeschwindigkeiten negativ, das Verhältnis zweier entgegengesetzt gerichteter Geschwindigkeiten positiv erscheint, liegt an der eigentümlichen Wahl der beiden Koordinatensysteme.

Es werde nun der Körper A betrachtet. Die Kräfte und Momente, die durch die Anwesenheit des Körpers B am Körper A hervorgerufen werden, sollen nach Gl.15 und 16 ermittelt werden.

Das Potential der körpereigenen Quellbelegung für den Körper A lautet:

$$\phi_{qA} = \frac{1}{2\pi} \int_{S_A} q_A \ln |\vec{R}| d\zeta_A \quad \text{Gl.19}$$

Dabei bedeutet $\vec{R}$ der Ortsvektor vom Quellelement zum Aufpunkt. Die Lage des Quellelementes sei durch die laufenden Ordinaten (ξ_A, η_A) bezeichnet. Liegt der Aufpunkt auf der Kontur an der Stelle (x_A, y_A) , so gilt für den Ortsvektor:

$$|\vec{R}_{AA}| = \sqrt{(x_A - \xi_A)^2 + (y_A - \eta_A)^2} \quad \text{Gl.20}$$

Damit wird:

$$\begin{aligned} \phi_{qA} &= \frac{1}{2\pi} \int_{S_A} q_A \ln \sqrt{(x_A - \xi_A)^2 + (y_A - \eta_A)^2} d\zeta_A \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_A} q_A \ln [(x_A - \xi_A)^2 + (y_A - \eta_A)^2] d\zeta_A \end{aligned} \quad \text{Gl.21}$$

Das Potential der relativen Anströmung setzt sich aus zwei Anteilen zusammen, dem Potential der ungestörten, als ruhend angenommenen Grundströmung:

$$\phi_{tA} = u_A \cdot x_A \quad \text{Gl.22}$$

und dem Potential der Störströmung des anderen Körpers, also dem Potential der Quellbelegung des Körpers B:

$$\phi_{qB} = \frac{1}{2\pi} \int_{S_B} q_B \ln |\vec{R}_{BA}| d\zeta_B \quad \text{Gl.23}$$

Für den Ortsvektor $\vec{r}_{BA}$, der vom Quellelement $q_B d\zeta_B$ auf der Kontur des Körpers B zum Aufpunkt auf der Kontur des Körpers A weist, gilt:

$$|\vec{r}_{BA}| = \sqrt{(\lambda - x_A - \xi_B)^2 + (h - y_A - \eta_B)^2} \quad \text{Gl.24}$$

Damit ergibt sich das Potential der relativen Anströmung zu:

$$\begin{aligned} \phi_{aH} &= \phi_{tH} + \phi_{qB} \\ &= u_H x_H + \frac{1}{4\pi} \int_{S_B} q_B \ln [(\lambda - x_H - \xi_B)^2 + (h - y_H - \eta_B)^2] d\zeta_B \end{aligned} \quad \text{Gl.25}$$

Durch partielle Differentiation nach x_A und y_A erhält man daraus die Geschwindigkeitskomponenten der relativen Anströmung:

$$v_{ax} = \frac{\partial \phi_{aH}}{\partial x_H} = u_H - \frac{1}{2\pi} \int_{S_B} q_B \frac{\lambda - x_H - \xi_B}{(\lambda - x_H - \xi_B)^2 + (h - y_H - \eta_B)^2} d\zeta_B \quad \text{Gl.26}$$

$$v_{ay} = \frac{\partial \phi_{aH}}{\partial y_H} = - \frac{1}{2\pi} \int_{S_B} q_B \frac{h - y_H - \eta_B}{(\lambda - x_H - \xi_B)^2 + (h - y_H - \eta_B)^2} d\zeta_B \quad \text{Gl.27}$$

Der Ortsvektor $\vec{r}_A$, der die Kontur des Körpers A beschreibt, hat die Komponenten:

$$\vec{r}_A = \{x_H; y_H\} \quad \text{Gl.28}$$

Bezeichnet α_H den Winkel zwischen der x-Achse und der Normalen, so kann man für den Einheitsnormalenvektor schreiben:

$$\vec{n}_H = \{\cos \alpha_H; \sin \alpha_H\} \quad \text{Gl.29}$$

Für die nachstehenden vektoriellen Produkte ergibt sich daraus:

$$[\nabla \phi_{aH} \times \vec{\tau}_H] = v_{ax} \gamma_H - v_{ay} x_H \quad \text{Gl. 30}$$

$$[\vec{\tau}_H \times \vec{n}_H] = x_H \sin \alpha_H - \gamma_H \cos \alpha_H \quad \text{Gl. 31}$$

Beachtet man nun noch, dass eine stationäre Parallelströmung keine Kraft auf einen Körper ausüben kann, (vergl. Gl. 9 und 10)

$$-g \int_{S_H} q_H u_H dS_H = 0 \quad \text{Gl. 32}$$

und dass ferner das Potential der Grundströmung zeitlich unveränderlich ist, da eine gleichförmige Fortbewegungsgeschwindigkeit der Körper vorausgesetzt wurde,

$$\frac{d}{dt} \phi_{tH} = 0 \quad \text{Gl. 33}$$

so erhält man für die Komponenten der Kraft und für das Moment:

$$\begin{aligned} P_{HX} &= -g \int_{S_H} q_H \frac{\partial \phi_{qB}}{\partial x_H} dS_H - g \frac{d}{dt} \int_{S_H} q_H \tau_{HX} dS_H \\ &= \frac{g}{2\pi} \iint_{S_H S_B} q_H q_B \frac{\lambda - x_H - \xi_B}{(\lambda - x_H - \xi_B)^2 + (h - \gamma_H - \eta_B)^2} d\xi_B dS_H - g \frac{d}{dt} \int_{S_H} q_H x_H dS_H \end{aligned} \quad \text{Gl. 34}$$

$$\begin{aligned} P_{HY} &= -g \int_{S_H} q_H \frac{\partial \phi_{qB}}{\partial y_H} dS_H - g \frac{d}{dt} \int_{S_H} q_H \tau_{HY} dS_H \\ &= \frac{g}{2\pi} \iint_{S_H S_B} q_H q_B \frac{h - \gamma_H - \eta_B}{(\lambda - x_H - \xi_B)^2 + (h - \gamma_H - \eta_B)^2} d\xi_B dS_H - g \frac{d}{dt} \int_{S_H} q_H y_H dS_H \end{aligned} \quad \text{Gl. 35}$$

$$\begin{aligned}
 M_A &= \oint_{S_A} q_A [\nabla \phi_{aA} \times \vec{r}_A] dS_A + \oint_{S_A} \frac{d}{dt} (\phi_{qB} + \phi_{qA}) [\vec{r}_A \times \vec{n}_A] dS_A \\
 &= \oint_{S_A} q_A \left[U_A \gamma_A - \frac{1}{2\pi} \oint_{S_B} q_B \frac{(\lambda - \xi_B) \gamma_A - (h - \eta_B) x_A}{(\lambda - x_A - \xi_B)^2 + (h - \gamma_A - \eta_B)^2} d\phi_B \right] dS_A + \\
 &\quad + \frac{q}{4\pi} \frac{d}{dt} \int_{S_A} \left\{ \oint_{S_B} q_B \ln [(\lambda - x_A - \xi_B)^2 + (h - \gamma_A - \eta_B)^2] d\phi_B + \right. \\
 &\quad \left. + \oint_{S_A} q_A \ln [(\lambda - \xi_A)^2 + (\gamma_A - \eta_A)^2] d\phi_A \right\} (x_A \sin \alpha_A + \gamma_A \cos \alpha_A) dS_A
 \end{aligned} \tag{Gl. 36}$$

Entsprechend wie in Gl. 15 und 16 gelten die Kräfte und Momente für die Längeneinheit des Zylinders. Das Moment ist dabei so definiert, dass es positiv ist, wenn es eine Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn bewirkt - genauer gesagt, bewirken würde, falls die Körper nicht zwangsläufig geführt wären.

Es wurde bereits gesagt, dass man infolge der Gleichwertigkeit beider Koordinatensysteme die Kräfte und Momente, die auf den Körper B wirken, aus den für den Körper A geltenden Gleichungen erhält, indem man lediglich die Indizes A und B vertauscht. Aus diesem Grunde erübrigt es sich, die für den Körper B geltenden Formeln gesondert aufzuführen.

Betrachtet man die ersten Terme der Gleichungen 34 und 35, die die stationären Kraftkomponenten darstellen, so erkennt man, dass sich der Wert der Integrale durch Vertauschen der Indizes nicht ändert. Das bedeutet: Die stationäre Kraft, die der Körper B auf den Körper A ausübt, ist gleich gross und - da die beiden Koordinatensysteme um 180° gegeneinander gedreht sind - entgegengesetzt gerichtet wie die stationäre Kraft, die der Körper A auf den Körper B ausübt.

Für die instationären Kräfte gilt dergleichen nicht. Die auf die beiden Körper wirkenden instationären Kraftanteile sind im allgemeinen sowohl im Betrag als auch in der Richtung verschieden, Gleichheit der gesamten Kraft (stationärer plus instationärer Kraftanteil) ist nur in den folgenden zwei Fällen zu erwarten.

- a. Wenn beide Körper - sie können verschieden gross und verschieden geformt sein - mit gleicher Geschwindigkeit nebeneinander herfahren. ($U_A: U_B = -1$) Dann ist die Strömung stationär, der instationäre Kraftanteil entfällt.
- b. Wenn beide Körper gleich gross sind, gleiche Form haben und sich mit gleicher Geschwindigkeit begegnen. ($x_A = x_B, y_A = y_B, U_A: U_B = 1$) Da sowohl die Konturen wie auch die relativen Anströmungen für beide Körper übereinstimmen, sind in diesem Fall die Funktionen der Quellbelegungen für beide Körper zu jedem Zeitpunkt gleich. D.h., dass auch die instationären Kraftanteile gleich gross und entgegengesetzt gerichtet sein müssen.

Es muss noch etwas im Hinblick auf die zeitlichen Ableitungen gesagt werden. In den Integralausdrücken für die instationären Kraftanteile ist lediglich die Quellbelegung q , im Integralausdruck für den instationären Momentenanteil die Quellbelegung q und der Abstand l zeitlich veränderlich. Die Quellbelegung q hängt von der augenblicklichen Lage ab. Da durch den Abstand l die augenblickliche Lage gegeben ist, kann man die Integralausdrücke in Abhängigkeit von l bestimmen.

Zwischen dem Abstand l und der Zeit t gilt die Zuordnung Gl. 18. Daraus erhält man durch Anwendung der Kettenregel :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial l} \cdot \frac{dl}{dt} = (u_H + u_B) \frac{\partial}{\partial l} \quad \text{Gl.37}$$

Zum Schluss sei noch eine Schwierigkeit erwähnt. Beim Potential der körpereigenen Quellbelegung (siehe Gl.21), das zur Bestimmung des instationären Momentenanteils benötigt wird, muss ein uneigentliches Integral gelöst werden. Der Integrand wird nämlich für $x = \int$ unendlich. Es soll an dieser Stelle nicht näher auf dieses Problem eingegangen werden, da auch in den Bestimmungsgleichungen für die Quellbelegung Integrale auftreten, deren Kerne scheinbar singulär werden. Die Lösung dieser Integrale wird später - speziell für den Fall, dass die Kontur der beiden Zylinder Ellipsen sind - in einem gesonderten Abschnitt behandelt.

3. Darstellung von zylindrischen Körpern durch Oberflächenquellbelegungen.

a. Darstellung eines zylindrischen Körpers in einer beliebigen Strömung.

Wie bereits erwähnt wurde, kann man einen unendlich langen zylindrischen Körper in einer beliebigen krummlinigen Potentialströmung darstellen durch eine zweidimensionale Quell-Senken-Belegung auf der Kontur. Es soll nun die Bestimmungsgleichung aufgestellt werden, mit deren Hilfe man für einen vorgegebenen Körper in einer vorgegebenen Strömung die Funktion der Quellbelegung ermitteln kann.

Die Körperdarstellung durch eine Oberflächenquellbelegung ist in der Literatur mehrfach behandelt worden. [6] [7] [8] [9] Aus diesem Grunde soll hier nur das Problem soweit erläutert werden, wie es für die weitere Rechnung notwendig ist. Es wird nur die ebene Strömung behandelt. Die Bestimmungsgleichung für die Quellbelegung wird in einer Form gebracht, die in einer einfachen Weise eine Erweiterung auf den Fall zweier Körper gestattet.

Es wird wieder ein kartesisches Koordinatensystem eingeführt, das mit dem Körper fest verbunden ist. Die Kontur des Körpers, von der lediglich gefordert wird, dass sie stetig ist und überall eine eindeutige Tangente besitzt, sei gegeben durch :

$$y = y(x)$$

Das Potential der relativen Anströmung sei ϕ_a .

Dann ist die nach aussen gerichtete Normalkomponente der Anströmgeschwindigkeit:

$$v_{an} = \frac{\partial \phi_a}{\partial n} \quad \text{Gl. 39}$$

Sind die Komponenten der Anströmgeschwindigkeit bekannt,

$$v_{ax} = \frac{\partial \phi_a}{\partial x} \quad v_{ay} = \frac{\partial \phi_a}{\partial y} \quad \text{Gl. 40}$$

so ist die nach aussen gerichtete Normalkomponente der Anströmgeschwindigkeit gegeben durch die Beziehung:

$$v_{an} = (\nabla \phi_a \cdot \vec{n}) = v_{ax} \cos \alpha + v_{ay} \sin \alpha \quad \text{Gl. 41}$$

Dabei ist α , wie schon vorher definiert, der Winkel zwischen der x-Achse und der Normalen.

Diese Normalgeschwindigkeit muss nun zusammen mit der Normalgeschwindigkeit, die von der körpereigenen Quellbelegung induziert wird, Null ergeben. Das Potential einer kontinuierlichen Quellbelegung auf der Kontur lautet: (Vergl. Gl. 21)

$$\phi_q = \frac{1}{4\pi} \int_S q \ln [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2] d\zeta \quad \text{Gl. 42}$$

Will man aus diesem Potential die Normalgeschwindigkeit ableiten, so ist folgendes zu beachten: Aus der Potentialtheorie ist bekannt, dass das Potential ϕ_q einer Quellbelegung q auf einer Kurve mitsamt seiner tangentialen

ersten Ableitung beim Durchgang durch die Belegungskurve stetig bleibt, während die normale Ableitung, also die Normalkomponente der Geschwindigkeit, einen Sprung der Grösse q aufweist.

Ferner gilt: Die normale Ableitung des Potentials nimmt auf der Belegungskurve den Mittelwert an zwischen den beiden Werten, die man erhält, wenn man von beiden Seiten einen Grenzübergang macht.

Für eine geschlossene Belegungskurve S gilt demnach, wenn P ein Punkt ausserhalb und P_0 ein Punkt auf der Kurve ist :

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \phi_q = \phi_q /_{P=P_0} \quad \text{Gl. 43}$$

$$v_{qn} = \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{\partial}{\partial n} \phi_q = \frac{q}{2} + \frac{\partial}{\partial n} \phi_q /_{P=P_0} \quad \text{Gl. 44}$$

Das bedeutet: Die nach aussen gerichtete Normalkomponente der Geschwindigkeit ist um $\frac{q}{2}$ grösser als der Wert, der sich durch Ableitung nach der Normalen aus Gl. 42 ergibt. Man spricht von der Sprungrelation für die Normalableitung.
[11] [12] [13]

Die x - und y - Komponenten der Geschwindigkeit, die von der Quellbelegung an der Kontur selbst induziert werden, lauten also:

$$v_{qx} = \frac{q}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2\pi} \int_S q \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\sigma \quad \text{Gl. 45}$$

$$v_{qy} = \frac{q}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2\pi} \int_S q \frac{y-\eta}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\sigma \quad \text{Gl. 46}$$

Für die nach aussen gerichtete Normalkomponente gilt analog zu Gl. 41 :

$$\begin{aligned} V_{qn} &= V_{qx} \cos \alpha + V_{qy} \sin \alpha \\ &= \frac{q}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_S q \frac{(x-\xi) \cos \alpha + (y-\eta) \sin \alpha}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\sigma \end{aligned} \quad \text{Gl.47}$$

Damit lautet die Bestimmungsgleichung für die Quellbelegung:

$$\begin{aligned} V_{an} + V_{qn} &= 0 \\ V_{ax} \cos \alpha + V_{ay} \sin \alpha + \frac{q}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_S q \frac{(x-\xi) \cos \alpha + (y-\eta) \sin \alpha}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\sigma &= 0 \end{aligned} \quad \text{Gl.48}$$

Es handelt sich hierbei um eine Fredholm'sche Integralgleichung zweiter Art, (vergl. [1], Seite 192). Sie lässt sich auf iterativem Wege lösen.

Schreibt man die Gl.48 in folgender Form:

$$q_{k+1} = -2(V_{ax} \cos \alpha + V_{ay} \sin \alpha) - \frac{1}{\pi} \int_S q_k \frac{(x-\xi) \cos \alpha + (y-\eta) \sin \alpha}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\sigma \quad \text{Gl.48a}$$

und wählt für q_k einen geeigneten Ansatz, indem man beispielsweise mit einer Funktion beginnt, die der Normalkomponente der Anströmgeschwindigkeit proportional ist,

$$q_1 = -(V_{ax} \cos \alpha + V_{ay} \sin \alpha)$$

so erhält man für q_2 eine bessere Näherung. Dieses Iterationsverfahren ist solange fortzusetzen, bis sich

nach einer gewissen Anzahl von Schritten die neu berechnete Belegung von der vorherigen nur noch um die zulässige Rechentoleranz unterscheidet.

Damit ist die Lösung der Integralgleichung auf die Lösung eines Integrals zurückgeführt. Es hat den Anschein, als ob der Kern dieses Integrals für $\xi = x$, $\eta = y$ unendlich wird, da der Zähler einfach, der Nenner dagegen quadratisch gegen Null geht. Das ist jedoch nicht der Fall. Es handelt sich vielmehr um eine unbestimmte Form mit einem endlichen Wert, wie im Abschnitt 6 "Hinweise für die numerische Auswertung der Integrale" gezeigt werden soll.

b. Darstellung zweier Körper, die sich gegenseitig beeinflussen.

Die oben abgeleitete Bestimmungsgleichung gilt für eine beliebige, also auch krummlinige Anströmung. Daher bereitet es keine Schwierigkeit, sie auf den Fall zweier Körper zu erweitern, die sich gegenseitig beeinflussen.

Für den im Abschnitt 2c behandelten Fall sind die Komponenten der relativen Anströmgeschwindigkeit für den Körper A gegeben durch die Gleichungen 26 und 27. Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die Gleichung 48a erhält man für die Quellbelegung des Körpers A :

$$q_A = -2u_A \omega \alpha + \frac{1}{\pi} \int_{S_B} q_B \frac{(\lambda - x_A - \xi_B) \omega \alpha + (h - \gamma_A - \eta_B) \sin \alpha}{(\lambda - x_A - \xi_B)^2 + (h - \gamma_A - \eta_B)^2} d\delta_B - \frac{1}{\pi} \int_{S_A} q_A \frac{(x_A - \xi_A) \omega \alpha + (\gamma_A - \eta_A) \sin \alpha}{(x_A - \xi_A)^2 + (\gamma_A - \eta_A)^2} d\delta_A \quad \text{Gl. 49}$$

Eine entsprechende Gleichung erhält man für den Körper B:

$$q_B = -2u_B \cos \alpha + \frac{1}{\pi} \int_{S_A} q_A \frac{(\lambda - x_B - \xi_A) \cos \alpha + (h - y_B - \eta_A) \sin \alpha}{(\lambda - x_B - \xi_A)^2 + (h - y_B - \eta_A)^2} d\xi_A - \frac{1}{\pi} \int_{S_B} q_B \frac{(x_B - \xi_B) \cos \alpha + (y_B - \eta_B) \sin \alpha}{(x_B - \xi_B)^2 + (y_B - \eta_B)^2} d\xi_B \quad \text{Gl. 50}$$

Beim Zweikörperproblem muss also ein Gleichungssystem gelöst werden, welches aus zwei Fredholm'schen Integralgleichungen besteht. Auch hier lassen sich mittels Iteration die Lösungen finden, wenn man in die Gleichungen mit geeigneten Ansätzen hineingeht. Sind die Belegungsfunktionen bekannt für beide Körper allein, d.h. ohne Störeinfluss des jeweiligen anderen Körpers, so kann man diese Funktionen als erste Näherung verwenden.

Die Konvergenz der Iteration wird durch folgende Überlegung plausibel: (Siehe auch [10]) Da die Quellströmung der Kontinuitätsgleichung genügen muss, erreicht jeweils nur ein Teil der von einem Quellelement des einen Körpers induzierten Störströmung den Aufpunkt auf der Kontur des anderen Körpers. Beim Iterationsprozess wird diese Wirkung gewissermassen durch eine Gegenbelegung ausgeglichen, von der wiederum nur ein Teil auf den Punkt des ursprünglichen Quellelementes zurückwirkt. Da die erforderlichen Korrekturbelegungen dementsprechend immer kleiner werden, wird man schliesslich einen Endzustand erreichen, der die Strömung um beide Körper darstellt.

4. Die Quellbelegung für einen elliptischen Zylinder in einer Parallelströmung.

Bisher wurden alle Betrachtungen für beliebig geformte Zylinder durchgeführt. Nun soll der spezielle Fall behandelt werden, dass die Zylinder elliptische Konturen haben. Um die Ausgangsfunktionen für den Iterationsprozess zur Bestimmung der Quellbelegung zu erhalten, wird zunächst einmal eine einzelne Ellipse in einer Parallelströmung untersucht.

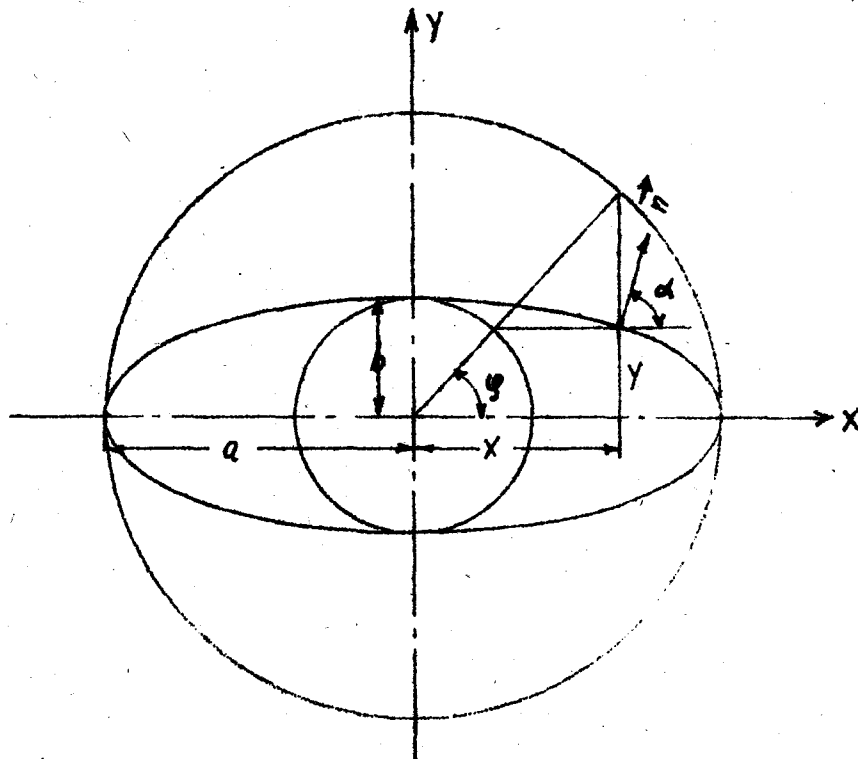
a. Parameterdarstellung einer Ellipse.

Für eine Ellipse mit den Halbachsen a und b gilt folgende Parameterdarstellung:

$$x = a \cos \varphi$$

$$y = b \sin \varphi$$

Gl. 51



Bezeichnet man einen laufenden Punkt auf der Ellipse mit,

$$\xi = a \cos \gamma \quad \eta = b \sin \gamma \quad \text{Gl.52}$$

so erhält man aus,

$$d\xi = -a \sin \gamma \, d\gamma \quad d\eta = b \cos \gamma \, d\gamma \quad \text{Gl.53}$$

für das Linienelement $d\sigma$ die Beziehung:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2} = \sqrt{a^2 \sin^2 \gamma + b^2 \cos^2 \gamma} \, d\gamma \\ &= a \sqrt{1 - \cos^2 \gamma + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 \gamma} \, d\gamma \\ &= a \sqrt{1 - (1 - \frac{b^2}{a^2}) \cos^2 \gamma} \, d\gamma \end{aligned} \quad \text{Gl.54}$$

Führt man die numerische Exzentrizität ein,

$$\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad \text{Gl.55}$$

so ergibt sich:

$$d\sigma = a \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \gamma} \, d\gamma \quad \text{Gl.56}$$

Sowohl in den Bestimmungsgleichungen für die Quellbelegung als auch in den Ausdrücken für die Kräfte und Momente treten Linienintegrale auf. Die gewählte Parameterdarstellung ist in zweifacher Hinsicht für die numerische Auswertung dieser Integrale von Vorteil. Wählt man beispielsweise für die Auswertung die Simpson-Regel, und

teilt den Umfang des Einheitskreises 2π in gleiche Teile $\Delta\gamma$ auf, so liegen die Stützstellen an den "Spitzen" der Ellipse enger zusammen als im übrigen Bereich. Hier hat aber die Ergiebigkeit der Quellbelegung absolut die grössten Werte. Man erreicht also ohne Mehraufwand eine grössere Genauigkeit, als wenn man den Umfang S in gleiche Teile $\Delta\zeta$ oder gar die grosse Achse $2a$ in gleiche Teile $\Delta\xi$ aufteilt.

Ein weiterer Vorteil der Parameterdarstellung ist, dass $\frac{d\zeta}{d\gamma}$ für $\gamma = 0$ bzw. π endlich bleibt.

$$\left. \frac{d\zeta}{d\gamma} \right|_{\gamma=0,\pi} = a\sqrt{1-\varepsilon^2} = b \quad \text{Gl.57}$$

Wählt man dagegen als unabhängige Veränderliche ξ , so gilt für die gleichen Punkte, d.h. für $\xi = \pm a$:

$$\left. \frac{d\zeta}{d\xi} \right|_{\xi=\pm a} = \pm \infty \quad \text{Gl.58}$$

Für die Integrale bedeutet das, dass der Integrand (teilweise zusätzlich) an diesen Punkten singulär wird.

Es muss nun noch der Winkel α , also der Winkel zwischen der x -Achse und der Normalen, in Abhängigkeit vom Parameter φ dargestellt werden. Da die Normale senkrecht auf dem Linienelement dS steht, erhält man für den Cosinus und Sinus:

$$\cos \alpha = \frac{dy}{dS} = \frac{b}{a} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2 \varphi}} \quad \text{Gl.59}$$

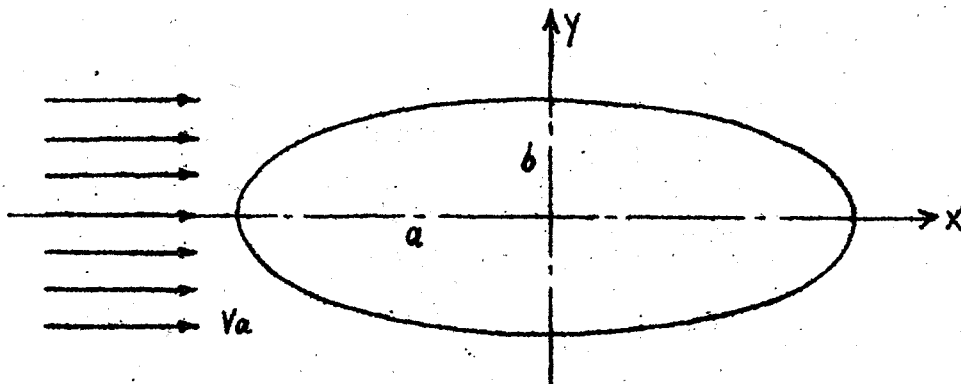
$$\sin \alpha = -\frac{dx}{dS} = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2 \varphi}} \quad \text{Gl.60}$$

Das Minus-Zeichen in der letzten Gleichung erklärt sich aus der Tatsache, dass bei der gewählten Parameterdarstellung im Bereich ($0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$) für wachsendes φ (entgegen dem Uhrzeigersinn) dx abnimmt, während dy wie auch dS zunehmen.

b. Bestimmung der Quellbelegung bei paralleler Anströmung mit Hilfe des komplexen Potentials.

Die elliptische Kontur stellt insofern einen Sonderfall dar, als es möglich ist, die Bestimmungsgleichung für die Quellbelegung im Fall paralleler Anströmung auf analytischem Wege exakt zu lösen. Es ergibt sich, dass die Quellbelegung bei Anströmung in Richtung einer der beiden Achsen der Normalkomponente der Anströmgeschwindigkeit direkt proportional ist. Für den schräg angeströmten elliptischen Zylinder erhält man die Quellbelegung, wenn man die Anströmgeschwindigkeit in ihre Komponenten in Richtung der Achsen zerlegt, für beide Komponenten getrennt die Quellbelegung bestimmt und diese dann überlagert. (Siehe Abschnitt 4c)

Es sei ein elliptischer Zylinder betrachtet, der in Richtung der positiven x -Achse mit der Geschwindigkeit $v_a = v_{ax}$ angeströmt wird.



Die nach aussen gerichtete Normalkomponente der Anströmgeschwindigkeit lautet dann;

$$v_{an} = v_{ax} \cos \alpha = v_{ax} \frac{b}{a} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}} \quad \text{Gl. 61}$$

Macht man für die Quellbelegung den Ansatz,

$$q(\varphi) = q_0 \cos \alpha = q_0 \frac{b}{a} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}} \quad \text{Gl. 62}$$

und setzt diesen Ausdruck in Gl. 47 ein, so ergibt sich für die von der Quellverteilung induzierte Normalkomponente:

$$\begin{aligned} v_{qn} &= \frac{q}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_S q \frac{(x-\xi) \cos \alpha + (y-\eta) \sin \alpha}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\sigma \\ &= q_0 \frac{b}{a} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}} \left[\frac{1}{2} + \frac{a \cdot b}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \gamma \frac{(\cos \varphi - \cos \gamma) + (\sin \varphi - \sin \gamma) \varepsilon \varphi}{a^2 (\cos \varphi - \cos \gamma)^2 + b^2 (\sin \varphi - \sin \gamma)^2} d\gamma \right] \end{aligned} \quad \text{Gl. 63}$$

Es ist also lediglich das in dieser Gleichung stehende Integral zu lösen, um mit Hilfe von Gl. 61 und der Oberflächenbedingung

$$v_{an} + v_{qn} = 0$$

den Wert q_0 bestimmen zu können, der nur noch von der Anströmgeschwindigkeit v_{ax} und dem Achsenverhältnis $a:b$ abhängig ist.

Leider zeigt es sich, dass man bei der Ausrechnung des Integrals auf recht grosse Schwierigkeiten stösst, deshalb soll hier ein anderer Weg - die Bestimmung der Quellverteilung mit Hilfe des komplexen Potentials - eingeschlagen werden.

Das komplexe Potential, dessen Realteil aus dem Potential ϕ besteht, und dessen Imaginärteil die Stromfunktion γ ist, lautet für eine zweidimensionale Quellbelegung auf der Kontur eines zylindrischen Körpers:

$$\Omega = \phi + i\gamma = \frac{1}{2\pi} \int_S q \ln |z - \xi| d\xi \quad \text{Gl. 64}$$

Dabei sei mit $z = x + iy$ ein Aufpunkt ausserhalb der Kontur bezeichnet und mit $\xi = \xi + i\eta$ ein laufender Punkt auf der Kontur. Mit dem Ansatz

$$q(\gamma) = q_0 \frac{b}{a} \frac{\cos \gamma}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \gamma}}$$

und den für die Ellipse geltenden Beziehungen

$$\xi = a \cos \gamma \quad \eta = b \sin \gamma \quad d\xi = -a \sin \gamma d\gamma \quad d\eta = b \cos \gamma d\gamma$$

erhält man :

$$\Omega = \frac{q_0 \cdot b}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |z - a \cos \gamma - ib \sin \gamma| \cos \gamma d\gamma \quad \text{Gl. 65}$$

Führt man die Substitution ein,

$$z = e^{i\gamma} \quad \text{Gl. 66}$$

so folgt aus der Ableitung von z nach γ :

$$\frac{dz}{d\gamma} = ie^{i\gamma} \longrightarrow d\gamma = -i \frac{dz}{z} \quad \text{Gl. 67}$$

Für den Cosinus und Sinus von γ erhält man:
(Siehe [1], Seite 76)

$$\cos \gamma = \frac{1}{2} (e^{i\gamma} + e^{-i\gamma}) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad \text{Gl. 68}$$

$$\sin \gamma = \frac{1}{2i} (e^{i\gamma} - e^{-i\gamma}) = -\frac{i}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) \quad \text{Gl. 69}$$

Damit ergibt sich für den laufenden Punkt

$$\begin{aligned} \zeta &= a \cos \gamma + ib \sin \gamma \\ &= \frac{a}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) + \frac{b}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) \\ &= \frac{a+b}{2} z + \frac{a-b}{2} \frac{1}{z} \end{aligned} \quad \text{Gl. 70}$$

und für das komplexe Potential :

$$\Omega = -i \frac{q_0 b}{4\pi} \oint \ln \left(z - \frac{a+b}{2} z - \frac{a-b}{2} \frac{1}{z} \right) \left(1 + \frac{1}{z^2} \right) dz \quad \text{Gl. 71}$$

Das Integral erstreckte sich für die Variable γ von 0 bis 2π . Das bedeutet für die neue Variable z einen Umlauf längs des Einheitskreises $|z|=1$.

Um den Residuensatz anwenden zu können, soll der Integrand in eine Reihe entwickelt werden. Dazu wird zunächst folgende Umformung gemacht :

$$\begin{aligned} z - \frac{a+b}{2} z - \frac{a-b}{2} \frac{1}{z} &= -\frac{1}{z} \left(\frac{a+b}{2} z^2 - z + \frac{a-b}{2} \right) \\ &= -\frac{1}{z} (z_1 - z)(z_2 - z) \\ &= z_1 \left(1 - \frac{z}{z_1} \right) \left(1 - \frac{z}{z_2} \right) \end{aligned} \quad \text{Gl. 72}$$

Die Konstanten z_1 und z_2 , d.h. die Wurzeln der Gleichung

$$\frac{a+b}{2} z^2 - z + \frac{a-b}{2} = 0$$

ergeben sich zu:

$$z_{1,2} = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)}}{a+b} \quad \text{Gl.73}$$

Für z_1 soll das Plus-Zeichen, für z_2 das Minus-Zeichen gelten.

Mit Hilfe der Umformung lässt sich der Logarithmus in drei Anteile aufspalten. Man erhält :

$$\Omega = -i \frac{q_0 b}{4\pi} \oint \left[\ln(z_1) + \ln\left(1 - \frac{z}{z_1}\right) + \ln\left(1 - \frac{z_2}{z}\right) \right] \left(1 + \frac{1}{z^2}\right) dz \quad \text{Gl.74}$$

Der Vorteil dieser Umformung liegt darin, dass nun die einzelnen Glieder für sich in eine Reihe entwickelt werden können.

Zunächst muss jedoch untersucht werden, ob die komplexen Grössen z_1 und z_2 innerhalb oder ausserhalb des Einheitskreises liegen, d.h. ob der Betrag dieser Werte grösser oder kleiner als Eins ist. Aus der Gleichung 73 ist das nicht ohne weiteres ersichtlich.

Aus diesem Grunde sollen elliptische Koordinaten eingeführt werden. (Vergl. [14], Seite 148) Der Zusammenhang mit den kartesischen Koordinaten ist gegeben durch die Beziehung :

$$\left. \begin{aligned} x &= c \cosh u \cosh v \\ y &= c \sinh u \sinh v \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 0 &\leq u \leq \infty \\ 0 &\leq v \leq 2\pi \end{aligned} \quad \text{Gl.75}$$

Die Linien $\eta = \text{konst.}$ stellen konfokale Ellipsen, die Linien $\xi = \text{konst.}$ konfokale Hyperbeln dar. Die elliptische Kontur des Zylinders sei durch $\eta = \eta_0$ gegeben. Dann muss für einen Aufpunkt ausserhalb der Kontur $\eta > \eta_0$ sein.

Für einen laufenden Punkt auf der Kontur kann man demnach schreiben :

$$\begin{aligned}\xi &= c \cosh \eta_0 \cos \varphi \\ \eta &= c \sinh \eta_0 \sin \varphi\end{aligned}\tag{Gl.76}$$

Durch einen Vergleich mit der Gleichung 52 erkennt man, dass zwischen den Grössen c und η_0 einerseits und den Halbachsen a und b andererseits die Zuordnungen

$$a = c \cosh \eta_0 \quad b = c \sinh \eta_0\tag{Gl.77}$$

gelten müssen. Mit Hilfe des Additionstheorems

$$\cosh^2 \eta_0 - \sinh^2 \eta_0 = 1$$

ergibt sich daraus:

$$\frac{a^2 - b^2}{c^2} = 1 \longrightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}\tag{Gl.78}$$

Und aus den Theoremen

$$\begin{aligned}\cosh \eta_0 + \sinh \eta_0 &= e^{\eta_0} \\ \cosh \eta_0 - \sinh \eta_0 &= e^{-\eta_0}\end{aligned}$$

folgt:

$$\begin{aligned}e^{\eta_0} &= \frac{a+b}{c} = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \\ e^{-\eta_0} &= \frac{a-b}{c} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\end{aligned}\tag{Gl.79}$$

Für die Grösse $z = x + iy$, die in der komplexen Ebene die Lage des Aufpunktes beschreibt, erhält man in

Abhängigkeit von den elliptischen Ordinaten:

$$z = \sqrt{a^2 - b^2} (\cosh u \cosh v + i \sinh u \sinh v) \quad \text{Gl.80}$$

Dafür kann man auch schreiben : (Vergl. [1], Seite 76)

$$z = \sqrt{a^2 - b^2} \cos(y - ial) \quad \text{Gl.81}$$

Führt man diesen Ausdruck in Gl.73 ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \cos(y - ial) \pm \sqrt{(a^2 - b^2) \cos^2(y - ial) - (a^2 - b^2)}}{a + b} \\ &= \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} [\cos(y - ial) \pm \sqrt{\cos^2(y - ial) - 1}] \end{aligned} \quad \text{Gl.82}$$

Setzt man nun nach Gl.79

$$\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} = e^{-\alpha_0}$$

und bedenkt, dass

$$\sqrt{\cos^2(y - ial) - 1} = i \sqrt{1 - \cos^2(y - ial)} = i \sinh(y - ial)$$

ist, so erhält man:

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= e^{-\alpha_0} [\cos(y - ial) \pm \sinh(y - ial)] \\ &= e^{-\alpha_0} e^{\pm i(y - ial)} \end{aligned} \quad \text{Gl.83}$$

Für z_1 galt das Plus-Zeichen, für z_2 das Minus-Zeichen.
Es ist also:

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{\alpha - \alpha_0} e^{iy} \longrightarrow |z_1| > 1 \\ z_2 &= e^{-\alpha - \alpha_0} e^{-iy} \longrightarrow |z_2| < 1 \end{aligned} \quad \text{Gl.84}$$

Der Betrag von $e^{\pm i\varphi}$ ist Eins. Da, wie bereits gesagt wurde, für einen Aufpunkt ausserhalb der Kontur $\lambda > \lambda_0$ sein muss, ist es nun leicht zu ersehen, dass der Betrag von z_1 grösser, der von z_2 kleiner als Eins ist.

Es war gesetzt worden: $e^{i\varphi} = z$, d.h. $|z| = 1$, daraus folgt:

$$\left| \frac{z}{z_1} \right| < 1 \quad \text{und} \quad \left| \frac{z_2}{z} \right| < 1$$

Für die Reihenentwicklung im Komplexen gilt (analog zur Reihenentwicklung im Reellen, siehe [1], Seite 80) für $|z| \leq 1$ mit Ausnahme des Wertes $z = -1$:

$$\ln(1-z) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

Für den gesamten Integranden des Integrals in Gl.74 erhält man demzufolge:

$$\begin{aligned} & \left[\ln(z_1) + \ln\left(1 - \frac{z}{z_1}\right) + \ln\left(1 - \frac{z_2}{z}\right) \right] \left(1 + \frac{1}{z^2}\right) = \\ & = \left[\ln z_1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{z}{z_1}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{z_2}{z}\right)^n \right] \left(1 + \frac{1}{z^2}\right) = \\ & = \ln z_1 \left(1 + \frac{1}{z^2}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{z^n}{z_1^n} + \frac{z^{n-2}}{z_1^n} + \frac{z_2^n}{z^n} + \frac{z_2^n}{z^{n+2}} \right) \end{aligned} \quad \text{Gl.85}$$

Wendet man nun den Residuensatz auf diese Reihe an, so ist das Integral gleich dem $2\pi i$ -fachen der Summe aller Koeffizienten von z^{-1} . Die Potenz -1 tritt lediglich im 2. und 3. Term hinter dem Summenzeichen auf. (Jeweils für $n = 1$) Die Residuen sind:

$$R_1 = -\frac{1}{z_1} \quad R_2 = -z_2 \quad \text{Gl.86}$$

Damit wird :

$$\begin{aligned}
 \Omega &= -j \frac{q_0 b}{4\pi} \cdot 2\pi i (R_1 + R_2) \\
 &= -\frac{q_0 b}{2} \left(\frac{1}{z_1} + z_2 \right) \\
 &= -\frac{q_0 b}{2} (e^{-\lambda + \lambda_0} e^{-i\varphi} + e^{-\lambda - \lambda_0} e^{-i\varphi}) \\
 &= -\frac{q_0 b}{2} (e^{\lambda_0} + e^{-\lambda_0}) e^{-\lambda} e^{-i\varphi}
 \end{aligned}
 \tag{Gl.87}$$

Durch Aufspaltung in Real- und Imaginärteil

$$\Omega = \phi + i\gamma$$

erhält man für das Potential:

$$\phi = -\frac{q_0 b}{2} (e^{\lambda_0} + e^{-\lambda_0}) e^{-\lambda} \cos \varphi \tag{Gl.88}$$

und für die Stromfunktion:

$$\gamma = \frac{q_0 b}{2} (e^{\lambda_0} + e^{-\lambda_0}) e^{-\lambda} \sin \varphi \tag{Gl.89}$$

Diese Gleichungen gelten nur für die von der Quellbelegung hervorgerufene Strömung ausserhalb der elliptischen Kontur. Für einen Aufpunkt innerhalb der Kontur liegen die Konstanten z_1 und z_2 beide innerhalb des Einheitskreises. Die Reihenentwicklung Gl.85 hat dann keine Gültigkeit mehr.

Es sei bemerkt, dass die von der Oberflächenquellbelegung induzierte Innenströmung eine Parallelströmung ist. Der Beweis wird hier nicht gebracht, da die Innenströmung für die weitere Betrachtung ohne Interesse ist.

Es soll nun aus dem Potential die an der Kontur herrschende Normalkomponente der von der Quellbelegung induzierten Geschwindigkeit bestimmt werden.

Die elliptischen Koordinaten stellen ein orthogonales System dar, d.h. die Linien $\eta = \text{konst.}$ und $\varphi = \text{konst.}$ stehen senkrecht aufeinander. Die nach aussen gerichtete Normalkomponente ist also die η -Komponente des Gradienten von Φ für $\eta \rightarrow \eta_0$.

$$V_{qn} = \text{grad}_{\eta} \Phi / \eta \rightarrow \eta_0 \quad \text{Gl.90}$$

Da es sich um ein krummliniges Koordinatensystem handelt, erhält man die η -Komponente nicht wie im Fall kartesischer Koordinaten einfach durch Ableitung des Potentials nach η , es gilt vielmehr :
(Siehe [14], Seite 148)

$$\text{grad}_{\eta} \Phi = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}}{c \sqrt{\sinh^2 \eta + \sin^2 \varphi}} \quad \text{Gl.91}$$

Es ist:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \frac{q_0 b}{2} (e^{\eta_0} + e^{-\eta_0}) e^{-\eta} \cos \varphi \quad \text{Gl.92}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} / \eta \rightarrow \eta_0 &= \frac{q_0 b}{2} (1 + e^{-2\eta_0}) \cos \varphi \\ &= \frac{q_0 b}{2} \left(1 + \frac{a-b}{a+b}\right) \cos \varphi \\ &= q_0 \frac{a \cdot b}{a+b} \cos \varphi \end{aligned} \quad \text{Gl.93}$$

$$\begin{aligned} \sinh^2 \eta_0 &= \frac{1}{4} (e^{\eta_0} - e^{-\eta_0})^2 \\ &= \frac{1}{4} (e^{2\eta_0} - 2 + e^{-2\eta_0}) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{a+b}{a-b} - 2 + \frac{a-b}{a+b} \right) \\ &= \frac{b^2}{a^2 - b^2} \end{aligned} \quad \text{Gl.94}$$

$$\begin{aligned}
 c \sqrt{\sinh^2 \alpha_0 + \sin^2 \varphi} &= \sqrt{a^2 - b^2} \sqrt{\frac{b^2}{a^2 - b^2} + \sin^2 \varphi} \\
 &= \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \cos^2 \varphi} \\
 &= \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \varphi} \\
 &= a \sqrt{1 - (1 - \frac{b^2}{a^2}) \sin^2 \varphi} \\
 &= a \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}
 \end{aligned}
 \tag{Gl.95}$$

Damit wird:

$$V_{qn} = \frac{q_0 \frac{a \cdot b}{a+b} \cos \varphi}{a \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}} = q_0 \frac{b}{a+b} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}}
 \tag{Gl.96}$$

Diese Normalkomponente muss nun zusammen mit der Normalkomponente der Anströmung (siehe Gl.61) Null ergeben.

$$V_{an} + V_{qn} = V_{ax} \frac{b}{a} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}} = q_0 \frac{b}{a+b} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}} = 0
 \tag{Gl.97}$$

Daraus lässt sich q_0 ermitteln:

$$q_0 = -V_{ax} \frac{a+b}{a} = V_{ax} \left(1 + \frac{b}{a}\right)
 \tag{Gl.98}$$

Zusammenfassend kann gesagt werden: Ein elliptischer Zylinder, der in Richtung seiner positiven x-Achse mit der Geschwindigkeit v_{ax} angeströmt wird, für den also gilt,

$$V_{ax} = V_a \quad V_{ay} = 0$$

$$V_{an} = V_{ax} \cos \alpha = V_{ax} \frac{b}{a} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}}$$

lässt sich darstellen durch eine zweidimensionale Quellbelegung auf der Kontur, die zur Normalkomponente der Anströmgeschwindigkeit proportional ist.

Mit dem Ansatz,

$$q = q_0 \cos \alpha = q \frac{b}{a} \frac{\cos y}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 y}}$$

erhält man für den Proportionalitätsfaktor:

$$\frac{q}{V_{ax}} = \frac{q_0}{V_{ax}} = - \left(1 + \frac{b}{a} \right) \quad \text{Gl.99}$$

Vollständig ausgeschrieben lautet die Funktion der Quellbelegung :

$$q(y) = -V_{ax} \left(1 + \frac{b}{a} \right) \frac{b}{a} \frac{\cos y}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 y}} \quad \text{Gl.100}$$

Es interessiert nun noch der Wert, den das Potential dieser Quellbelegung auf der Kontur, d.h. für $r = r_0$ annimmt. Macht man die entsprechenden Umformungen wie in Gl.93, so erhält man aus Gl.88

$$\phi_q / r = r_0 = -q_0 \frac{a \cdot b}{a + b} \cos y \quad \text{Gl.101}$$

Mit der Beziehung Gl.98 bzw.99 ergibt sich :

$$\phi_q / r = r_0 = V_{ax} \frac{a+b}{a} \cdot \frac{a \cdot b}{a+b} \cos y = V_{ax} b \cos y \quad \text{Gl.102}$$

Würde die Ellipse nicht in Richtung der positiven x-Achse, sondern in Richtung der positiven y-Achse angeströmt,

$$V_{ax} = 0 \quad V_{ay} = V_a$$

so wäre die Quellbelegung proportional zur Normalkomponente:

$$V_{an} = V_{ay} \sin \alpha = V_{ay} \frac{\sin y}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 y}}$$

Den Proportionalitätsfaktor erhält man aus Gl. 99 durch Vertauschen des Achsenverhältnisses:

$$\frac{q}{V_{an}} = \frac{q_0}{V_{ay}} = - \left(1 + \frac{a}{b}\right) \quad \text{Gl.103}$$

Die Quellbelegung lautet dann:

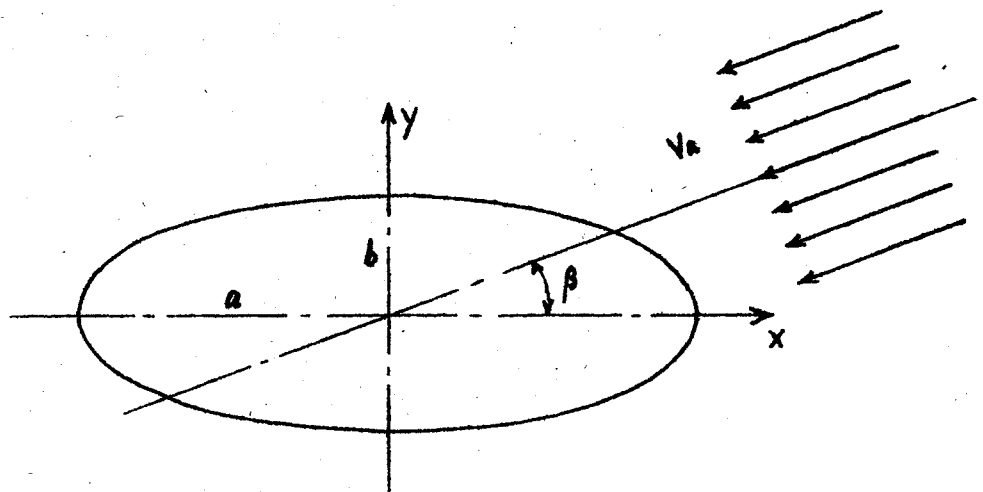
$$q(y) = -V_{ay} \left(1 + \frac{a}{b}\right) \frac{\sin y}{\sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 y}} \quad \text{Gl.104}$$

Für das Potential auf der Kontur gilt:

$$\phi_{q/a=b_0} = -q_0 \frac{a \cdot b}{a+b} \sin y = V_{ay} a \sin y \quad \text{Gl.105}$$

c. Der schräg angeströmte elliptische Zylinder.

Nun soll ein elliptischer Zylinder betrachtet werden, der schräg angeströmt wird. Die x-Achse des Zylinders bilde mit der Anströmgeschwindigkeit v_a den Winkel β .



Dann lässt sich die Anströmgeschwindigkeit in ihre Komponenten aufspalten:

$$V_{ax} = -V_a \cos \beta \quad V_{ay} = -V_a \sin \beta$$

Für die x-Komponente wird die Oberflächenbedingung durch eine Quellbelegung nach Gl.100, für die y-Komponente nach Gl.104 befriedigt. Durch Superposition beider Ausdrücke ergibt sich die Quellbelegung für den schräg angeströmten elliptischen Zylinder zu :

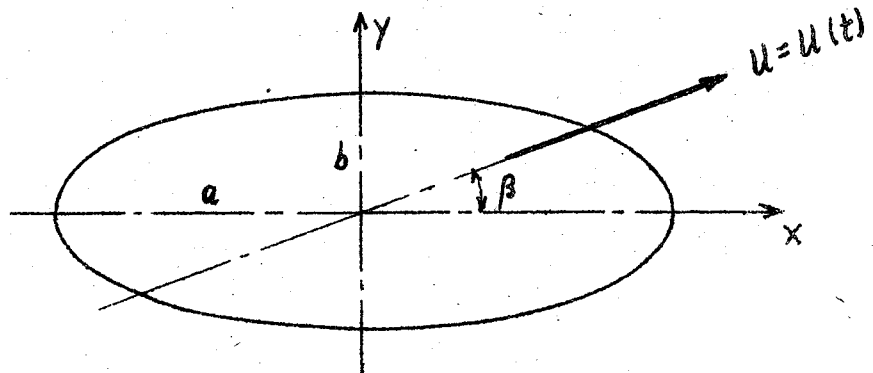
$$\begin{aligned} q(\varphi) &= -V_{ax} \left(1 + \frac{b}{a}\right) \frac{b}{a} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}} - V_{ay} \left(1 + \frac{a}{b}\right) \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}} \\ &= \frac{V_a}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}} \left[\left(1 + \frac{b}{a}\right) \frac{b}{a} \cos \beta \cos \varphi + \left(1 + \frac{a}{b}\right) \sin \beta \sin \varphi \right] \end{aligned} \quad \text{Gl.106}$$

Ebenfalls durch Superposition erhält man aus den Gleichungen 102 und 105 für das Potential dieser Quellbelegung auf der Kontur :

$$\begin{aligned} \Phi_9 / a_0 &= V_{ax} b \cos \varphi + V_{ay} a \sin \varphi \\ &= -V_a (b \cos \beta \cos \varphi + a \sin \beta \sin \varphi) \end{aligned} \quad \text{Gl.107}$$

5. Anwendung der Sätze über die Kräfte und Momente auf den Fall eines elliptischen Zylinders in einer Parallelströmung.

Es sollen die Kräfte und Momente bestimmt werden, die auf einen elliptischen Zylinder wirken, der sich gradlinig, beschleunigt fortbewegt. Die Fortbewegungsrichtung bilde wie im vorherigen Fall mit der Richtung der x-Achse den Winkel β .



Dieses Problem gehört nicht zum eigentlichen Thema dieser Arbeit - der gegenseitigen Beeinflussung zweier Körper. Wenn dennoch diese Betrachtung hier durchgeführt wird, so deshalb, weil einmal an einem einfachen Beispiel die Anwendung der im Abschnitt 2 gebrachten Formeln erläutert werden soll. Ausserdem bietet dieser Fall die Möglichkeit, eine Fehlerbetrachtung im Hinblick auf das Problem zweier Körper durchzuführen. Diese Betrachtung wird im Teil B " Berechnung und Ergebnisse " gebracht.

a. Der instationäre Kraftanteil.

Nimmt man die Grundströmung als ruhend an, so ist die relative Anströmung eine Parallelströmung. Ein stationärer Kraftanteil tritt also nicht auf. Es wirkt lediglich eine

instationäre Kraft. Diese Kraft ist nach dem d'Alembert'schen Prinzip :

$$\vec{P}_{inst.} = - (m + m'') \frac{d\vec{u}}{dt} \quad \text{Gl.108}$$

Dabei ist m die Masse des Körpers, m'' die hydrodynamische Masse, eine fiktive Masse, die die Reaktionskraft der Flüssigkeit auf den Körper wiedergibt.

Die Masse eines elliptischen Zylinders pro Längeneinheit ist :

$$m = \rho \pi a b \quad \text{Gl.109}$$

Dabei sei angenommen, dass die mittlere Dichte des Körpers gleich der Dichte des Wassers ist. Der Körper soll also im Wasser schweben.

Die hydrodynamische Masse einer Ellipse für eine Beschleunigung in x-Richtung ist bekanntlich gleich der Masse eines Kreises mit dem Radius der kleinen Achse b . (Siehe [15] , Seite 245)

$$m_x'' = \rho \pi b^2 \quad \text{Gl.110}$$

Für eine Beschleunigung in y-Richtung ist sie gleich der Masse eines Kreises mit dem Radius der grossen Achse a .

$$m_y'' = \rho \pi a^2 \quad \text{Gl.111}$$

Die Trägheitskoeffizienten, d.h. die Verhältnisse der hydrodynamischen Masse zur verdrängten Wassermasse, lauten damit für eine Ellipse:

$$k_x = \frac{b}{a} \quad k_y = \frac{a}{b} \quad \text{Gl.112}$$

Nun ist für das Beispiel die Beschleunigung in x-Richtung :

$$\frac{dU_x}{dt} = \frac{dU}{dt} \cos \beta$$

Die in y-Richtung:

$$\frac{dU_y}{dt} = \frac{dU}{dt} \sin \beta$$

Für die Komponenten der gesamten instationären Kraft, die auf die Längeneinheit der Ellipse wirkt, erhält man demzufolge:

$$P_{inst. x} = -m(1+k_x) \frac{dU_x}{dt} = -\rho \pi a b \left(1 + \frac{b}{a}\right) \frac{dU}{dt} \cos \beta \quad \text{Gl. 113}$$

$$P_{inst. y} = -m(1+k_y) \frac{dU_y}{dt} = -\rho \pi a b \left(1 + \frac{a}{b}\right) \frac{dU}{dt} \sin \beta \quad \text{Gl. 114}$$

Die gleichen Kräfte müssen sich ergeben, wenn man von der Quellbelegung ausgeht. Aus Gl. 12 erhält man für die instationären Kraftkomponenten:

$$P_{inst. x} = -\rho \frac{d}{dt} \int_S q \cdot x \cdot dS = \frac{d}{dt} \left\{ -\rho a^2 \int_0^{2\pi} q \cos \varphi \sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2 \varphi} d\varphi \right\} \quad \text{Gl. 115}$$

$$P_{inst. y} = -\rho \frac{d}{dt} \int_S q \cdot y \cdot dS = \frac{d}{dt} \left\{ -\rho a b \int_0^{2\pi} q \sin \varphi \sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2 \varphi} d\varphi \right\} \quad \text{Gl. 116}$$

Setzt man die für den schräg angeströmten elliptischen Zylinder geltende Quellbelegung Gl. 106 ein, so erhält man:

$$P_{inst. x} = \frac{d}{dt} \left\{ -\rho a^2 U \left[\left(1 + \frac{b}{a}\right) \frac{b}{a} \cos \beta \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi + \left(1 + \frac{a}{b}\right) \sin \beta \int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \right] \right\} \quad \text{Gl. 117}$$

$$P_{inst. y} = \frac{d}{dt} \left\{ -\rho a b U \left[\left(1 + \frac{b}{a}\right) \frac{b}{a} \cos \beta \int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi + \left(1 + \frac{a}{b}\right) \sin \beta \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \right] \right\} \quad \text{Gl. 118}$$

Bedenkt man, dass

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi = 0$$

ist, so ergibt sich

$$P_{inst. x} = \frac{d}{dt} \left\{ -g a^2 U \left(1 + \frac{b}{a}\right) \frac{b}{a} \cos \beta \pi \right\} = \frac{d}{dt} \left\{ -g \pi a b \left(1 + \frac{b}{a}\right) U \cos \beta \right\} \quad \text{Gl. 119}$$

$$P_{inst. y} = \frac{d}{dt} \left\{ -g a b U \left(1 + \frac{a}{b}\right) \sin \beta \pi \right\} = \frac{d}{dt} \left\{ -g \pi a b \left(1 + \frac{a}{b}\right) U \sin \beta \right\} \quad \text{Gl. 120}$$

In diesen Ausdrücken ist lediglich U zeitlich veränderlich. Man erhält also wiederum.: (Siehe Gl. 113 und 114)

$$P_{inst. x} = -g \pi a b \left(1 + \frac{b}{a}\right) \frac{dU}{dt} \cos \beta$$

$$P_{inst. y} = -g \pi a b \left(1 + \frac{a}{b}\right) \frac{dU}{dt} \sin \beta$$

b.) Der stationäre Momentenanteil:

Das stationäre Moment, das auf einen schräg angeströmten Zylinder wirkt, lässt sich nach folgender Formel bestimmen: (Munk, siehe auch [16], Seite 249)

$$M_{stat.} = -\frac{g}{2} m (k_y - k_x) U^2 \sin 2\beta = -\frac{g}{2} \pi a b \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) U^2 \sin 2\beta \quad \text{Gl. 121}$$

In der Gleichung 16 entspricht der erste ~~Therm~~ diesem stationären Moment.

$$M_{stat.} = \rho \int_S [\vec{v} \phi_a \times \vec{r}] dS$$

(Siehe auch Gl.7) Mit Hilfe von Gleichung 30 erhält man daraus:

$$\begin{aligned} M_{stat.} &= \rho \int_S (v_{ax} \cdot y - v_{ay} \cdot x) dS \\ &= U \cos \beta \left\{ -\rho \int_S y y dS \right\} - U \sin \beta \left\{ -\rho \int_S x x dS \right\} \end{aligned} \quad \text{Gl. 122}$$

Die Ausdrücke in den geschweiften Klammern entsprechen den Gleichungen für die instationären Kräfte (Gl. 115 u. 116) Es fehlt lediglich die zeitliche Ableitung. Man erhält also in Übereinstimmung mit Gleichung 121:

$$\begin{aligned} M_{stat.} &= U \cos \beta \left\{ -\rho \pi a b \left(1 + \frac{a}{b}\right) U \sin \beta \right\} - U \sin \beta \left\{ -\rho \pi a b \left(1 + \frac{b}{a}\right) U \cos \beta \right\} \\ &= -\rho \pi a b \left[\left(1 + \frac{a}{b}\right) - \left(1 + \frac{b}{a}\right) \right] U^2 \cos \beta \sin \beta \\ &= -\frac{\rho}{2} \pi a b \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) U^2 \sin 2\beta \end{aligned}$$

c. Der instationäre Momentenanteil.

Um den instationären Momentenanteil zu bestimmen, benötigt man das Potential der Gesamtströmung. Das Potential der relativen Anströmung ist :

$$\phi_a = v_{ax} \cdot x + v_{ay} \cdot y = -U (x \cos \beta + y \sin \beta) \quad \text{Gl. 123}$$

Für die Kontur gilt :

$$x = a \cos \varphi \quad y = b \sin \varphi$$

$$\phi_a = -U (a \cos \beta \cos \varphi + b \sin \beta \sin \varphi) \quad \text{Gl. 124}$$

Addiert man dazu das Potential der Quellbelegung,
(siehe Gl. 107)

$$\phi_q = -U (b \cos \beta \cos \varphi + a \sin \beta \sin \varphi)$$

so erhält man für das Potential der Gesamtströmung :

$$\phi_{\text{ges.}} = -U (a+b) (\cos \beta \cos \varphi + \sin \beta \sin \varphi) = -U (a+b) \cos (\beta - \varphi) \quad \text{Gl. 125}$$

In der Gleichung für den instationären Momentenanteil tritt ein Term

$$[\vec{r} \times \vec{n}] dS$$

auf. Mit Hilfe von Gl. 31

$$[\vec{r} \times \vec{n}] = x \sin \alpha - y \cos \alpha$$

und mit Hilfe der Gleichungen 56, 59 und 60 erhält man dafür:

$$\begin{aligned} [\vec{r} \times \vec{n}] dS &= \left(a \cos \varphi \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2 \varphi}} - b \sin \varphi \frac{b}{a} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2 \varphi}} \right) a \sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2 \varphi} d\varphi \\ &= (a^2 - b^2) \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{a^2 - b^2}{2} \sin 2\varphi d\varphi \end{aligned} \quad \text{Gl. 126}$$

Damit ergibt sich :

$$\begin{aligned} M_{\text{inst.}} &= \oint_S \frac{d}{dt} \int (\phi_a + \phi_q) [\vec{r} \times \vec{n}] dS \\ &= -\oint \frac{dU}{dt} (a+b) \frac{a^2 - b^2}{2} \int_0^{2\pi} \cos (\beta - \varphi) \sin 2\varphi d\varphi = 0 \end{aligned} \quad \text{Gl. 127}$$

Das Integral verschwindet, d.h. es wirkt kein instationärer Momentenanteil. Auch dieses Ergebnis stimmt mit den

Ergebnissen überein, die man auf andere Weise erhält. Kotschin ([16], Seite 355) weist mit Hilfe der kinetischen Energie nach, dass auf einen Körper, der sich in einer ruhenden Grundströmung bewegt, nur dann ein instationärer Momentenanteil wirkt, wenn der Körper sich mit einer zeitlich veränderlichen Winkelgeschwindigkeit dreht. Letzteres ist in diesem Beispiel nicht der Fall.

6. Hinweise für die numerische Auswertung der Integrale.

a. Das Potential der körpereigenen Quellbelegung an der Kontur.

Ist ein zylindrischer Körper durch eine zweidimensionale Quellbelegung auf der Kontur dargestellt, so lautet das Potential dieser Quellbelegung.

$$\phi_q = \frac{1}{4\pi} \int_S q \ln [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2] d\delta \quad (\text{Siehe Gl.21})$$

Zur Bestimmung des instationären Momentenanteils wird die Funktion benötigt, die dieses Potential an der Kontur selbst annimmt. In diesem Fall handelt es sich, wie schon im Abschnitt 2c angedeutet wurde, um ein uneigentliches Integral. Fällt nämlich der laufende Punkt (ξ, η) mit dem Aufpunkt (x, y) zusammen, so geht der Logarithmus gegen minus Unendlich.

Im allgemeinen ist nun die Quellbelegung nicht analytisch gegeben, sondern man kennt die Werte von q nur für einzelne Stützstellen. D.h. man ist genötigt, die Bestimmung des Integrals auf graphischem Wege oder mit Hilfe einer Näherungsformel, beispielsweise der Trapez- oder Simpson-Regel, durchzuführen. Diese Methoden versagen jedoch an der singulären Stelle.

Eine Möglichkeit zur Lösung des Integrals wäre, in einem kleinen Bereich um die singuläre Stelle den Integranden in eine Reihe zu entwickeln, und den Beitrag dieses Bereiches gesondert zu berechnen. Hier soll nun ein anderer

Weg aufgezeigt werden.

Spaltet man von der Quellbelegung q einen Teil q^* ab, so kann man für das Potential der körpereigenen Quellbelegung schreiben:

$$\begin{aligned} \phi_q = \frac{1}{4\pi} \int_S (q - q^*) \ln [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2] d\sigma + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_S q^* \ln [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2] d\sigma \end{aligned} \quad \text{Gl. 128}$$

Wählt man für die Teilquellbelegung q^* eine Funktion, die analytisch gegeben ist, so lässt sich das zweite Integral auf analytischem Wege lösen. Dabei kann q^* beliebig sein. Man wird also die Funktion so wählen, dass die Bestimmung dieses Integrals recht einfach wird. Fordert man noch, dass die Differenz zwischen der Quellbelegung und dieser Teilquellbelegung für den Punkt $(\xi=x)$ Null sein soll, d.h. :

$$q^*(\xi=x) = q(\xi=x) \quad \text{Gl. 129}$$

so wird der Integrand des ersten Integrals an dieser Stelle Null und man kann dieses Integral graphisch oder numerisch mit Hilfe einer der angeführten Näherungslösungen bestimmen.

$$\lim_{\xi \rightarrow x} (q - q^*) \ln [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2] = 0 \quad \text{Gl. 130}$$

Um diese Tatsache zu beweisen, werde

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = u \quad \text{Gl. 131}$$

gesetzt, und man denke sich die Differenz $(q - q^*)$ in eine

Potenzreihe von u entwickelt.

$$q - q^* = \sum_{k=1}^n a_k u^k \quad \text{Gl. 132}$$

(Ein Koeffizient a_0 kann nicht auftreten, da für $u = 0$ nach Voraussetzung $q - q^* = 0$ sein soll.) dann ist :

$$(q - q^*) \ln [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2] = \sum_{k=1}^n a_k u^k \ln u \quad \text{Gl. 133}$$

Geht u gegen Null, so ist der Grenzwert jedes einzelnen Gliedes dieser Reihe gleich Null, da bekanntlich der Logarithmus schwächer gegen Unendlich strebt, als jede noch so kleine Potenz von $\frac{1}{u}$. Damit ist auch der Grenzwert der ganzen Reihe gleich Null.

Für den speziellen Fall der elliptischen Kontur lautet das Potential der körpereigenen Quellbelegung mit den im Abschnitt 4a abgeleiteten Beziehungen :

$$\phi_q(\varphi) = \frac{a}{4\pi} \int_0^{2\pi} q(\gamma) \ln [a^2(\cos \varphi - \cos \gamma)^2 + b^2(\sin \varphi - \sin \gamma)^2] \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \gamma} d\gamma \quad \text{Gl. 134}$$

Oder, wenn man eine Umformung entsprechend Gl. 128 macht:

$$\begin{aligned} \phi_q(\varphi) = & \frac{a}{4\pi} \int_0^{2\pi} [q(\gamma) - q^*(\varphi, \gamma)] \ln [a^2(\cos \varphi - \cos \gamma)^2 + b^2(\sin \varphi - \sin \gamma)^2] \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \gamma} d\gamma + \\ & + \frac{a}{4\pi} \int_0^{2\pi} q^*(\varphi, \gamma) \ln [a^2(\cos \varphi - \cos \gamma)^2 + b^2(\sin \varphi - \sin \gamma)^2] \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \gamma} d\gamma \quad \text{Gl. 135} \end{aligned}$$

Für die Teilquellbelegung $q^*(\varphi, \gamma)$ wählt man nun am besten eine Funktion, die der Quellbelegung dieser Ellipse entspricht, wenn sie in Richtung der x-Achse parallel angeströmt wird.

$$q^*(\varphi, \gamma) = q_0 \cos \alpha(\gamma) = q_0 \frac{b}{a} \frac{\cos \gamma}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \gamma}} \quad \text{Gl. 136}$$

Dann bereitet das zweite Integral keine Schwierigkeit. Es wurde bereits im Abschnitt 4b über den Umweg des komplexen Potentials bestimmt. Die Lösung ist :
(Siehe Gl. 101)

$$\phi_q^*(\varphi) = -q_0 \frac{a \cdot b}{a+b} \cos \varphi \quad \text{Gl. 137}$$

Die Forderung, dass für $\gamma = \varphi$, $q^* = q$ sein soll, wird erfüllt, wenn man setzt:

$$q_0 = \frac{q(\varphi)}{\cos \alpha(\varphi)} = q(\varphi) \frac{a}{b} \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}}{\cos \varphi} \quad \text{Gl. 138}$$

Dann lautet die Teilquellbelegung:

$$q^*(\varphi, \gamma) = q(\varphi) \frac{\cos \gamma}{\cos \varphi} \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \gamma}} \quad \text{Gl. 139}$$

Für ϕ_q^* erhält man :

$$\phi_q^* = -q(\varphi) \frac{a}{b} \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}}{\cos \varphi} \frac{a \cdot b}{a+b} \cos \varphi = -q(\varphi) \frac{a^2}{a+b} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi} \quad \text{Gl. 140}$$

Damit ist gewährleistet, dass der Integrand des ersten Integrals von Gl. 135 Null ist, wenn $\gamma = \varphi$ wird, und man hat

damit das uneigentliche Integral auf ein Integral zurückgeführt, für welches der Integrand im ganzen Bereich endlich bleibt.

$$\begin{aligned} \phi_g(\varphi) = & \frac{a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[q(\gamma) - q(\varphi) \frac{\cos \gamma}{\cos \varphi} \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2 \gamma}}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2 \varphi}} \right] \ln \left[a^2 (\cos \varphi - \cos \gamma)^2 + \right. \\ & \left. + b^2 (\sin \varphi - \sin \gamma)^2 \right] \sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2 \gamma} d\gamma - q(\varphi) \frac{a^2}{a+b} \sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2 \varphi} \end{aligned} \quad \text{Gl. 141}$$

b. Die von der körpereigenen Quellbelegung an der Kontur induzierte Normalkomponente der Geschwindigkeit.

Es seien noch einmal die Ausdrücke hingeschrieben, die für die x- und y-Komponente der Geschwindigkeit gelten, die von einer zweidimensionalen Quellbelegung auf der Kontur eines zylindrischen Körpers induziert werden.

$$v_{gx} = \frac{q}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2\pi} \int_S q \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\sigma \quad (\text{Siehe Gl. 45})$$

$$v_{gy} = \frac{q}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2\pi} \int_S q \frac{y-\eta}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\sigma \quad (\text{Siehe Gl. 46})$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke erhält man für die Normalkomponente:

$$v_{gn} = \frac{q}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_S q \frac{(x-\xi) \cos \alpha + (y-\eta) \sin \alpha}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\sigma \quad (\text{Siehe Gl. 47})$$

Beide Grössen gehen mit gleicher Ordnung gegen Unendlich. Im Grenzfall ist der Kern demnach eine unbestimmte Form von der Art $(\infty-\infty)$. Dass dieser Grenzwert endlich ist, soll am Beispiel der Ellipse gezeigt werden.

Für die Ellipse lautet der Kern in Abhängigkeit von φ und γ :

$$\begin{aligned} K(\varphi, \gamma) &= \frac{(x-\xi)\cos\alpha + (y-\eta)\sin\alpha}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \\ &= \frac{a(\cos\varphi - \cos\gamma) \frac{b}{a} \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}} + b(\sin\varphi - \sin\gamma) \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}}}{a^2(\cos\varphi - \cos\gamma)^2 + b^2(\sin\varphi - \sin\gamma)^2} \quad \text{Gl. 144} \\ &= \frac{b\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}} \frac{\cos\varphi - \cos\gamma + (\sin\varphi - \sin\gamma) \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}{a^2(\cos\varphi - \cos\gamma)^2 + b^2(\sin\varphi - \sin\gamma)^2} \end{aligned}$$

Wendet man hierauf die Regel von L'Hospital an (Siehe [1], Seite 88), indem man Zähler und Nenner nach γ ableitet,

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow \varphi} K(\varphi, \gamma) &= \\ &= \frac{b\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}} \lim_{\gamma \rightarrow \varphi} \frac{\sin\gamma - \cos\gamma \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}{2a^2(\cos\varphi - \cos\gamma)\sin\gamma + 2b^2(\sin\varphi - \sin\gamma)(-\cos\gamma)} \quad \text{Gl. 145} \end{aligned}$$

so erhält man wiederum eine unbestimmte Form, da sowohl der Zähler als auch der Nenner gegen Null gehen,

für $\gamma = \varphi$ ist: $\sin\gamma - \cos\gamma \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \sin\varphi - \sin\varphi = 0$

Eine nochmalige Anwendung der Regel von L'Hospital ergibt:

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow \varphi} K(\varphi, \gamma) &= \\ &= \frac{b\cos\varphi}{2\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}} \lim_{\gamma \rightarrow \varphi} \frac{\cos\gamma + \sin\gamma \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}{a^2[\sin^2\gamma + (\cos\varphi - \cos\gamma)\cos\gamma] + b^2[\cos^2\gamma + (\sin\varphi - \sin\gamma)\sin\gamma]} \\ &= \frac{b}{2\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}} \frac{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi} \quad \text{Gl. 146} \end{aligned}$$

Es wurde bereits gezeigt, dass

$$a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi = a^2 (1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi) \quad \text{Gl. 147}$$

ist. (Vergl. Gl. 54-56)

Es ergibt sich also:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \varphi} K(\varphi, \gamma) = \frac{1}{2} \frac{b}{a^2} \frac{1}{(\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi})^3} \quad \text{Gl. 148}$$

Dieser Wert kann nicht singulär werden, da $\varepsilon < 1$ ist. D.h. der Integrand des Integrals I ist im ganzen Bereich endlich.

Sind im Falle des elliptischen Zylinders sowohl die Quellbelegung q als auch der Kern K und das Bogenelement $d\sigma$ in Abhängigkeit von den Parametern φ bzw. γ gegeben, so wird man zur Ermittlung des Integrals den Kern und das Bogenelement zusammenfassen.

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} q(\gamma) K(\varphi, \gamma) \frac{d\sigma(\gamma)}{d\gamma} d\gamma = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} q(\gamma) K^*(\varphi, \gamma) d\gamma \quad \text{Gl. 149}$$

$$\begin{aligned} K^*(\varphi, \gamma) &= K(\varphi, \gamma) \frac{d\sigma(\gamma)}{d\gamma} \\ &= \frac{a \cdot b \cdot \cos \gamma}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}} \frac{\cos \varphi - \cos \gamma + (\sin \varphi - \sin \gamma) \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}}{a^2 (\cos \varphi - \cos \gamma)^2 + b^2 (\sin \varphi - \sin \gamma)^2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \gamma} \end{aligned} \quad \text{Gl. 150}$$

Für den neuen Kern K^* erhält man als Grenzwert, wenn der laufende Punkt mit dem Aufpunkt zusammenfällt:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \varphi} K^*(\varphi, \gamma) = \frac{1}{2} \frac{b}{a^2} \frac{1}{(\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi})^3} a \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi} = \frac{1}{2} \frac{b}{a} \frac{1}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi} \quad \text{Gl. 151}$$

Zusammenfassung.

Es wurde gezeigt, wie man im Fall ebener Strömung das Problem der gegenseitigen Beeinflussung zweier Körper erfassen kann, indem man die Körper durch eine zwei-dimensionale Quellbelegung auf der Kontur darstellt. Die Funktionen der Quellbelegungen erhält man durch iterative Lösung eines Systems zweier Fredholm'scher Integralgleichungen. Sind die Quellbelegungen bekannt, so lassen sich die Kräfte und Momente, die die beiden Körper aufeinander ausüben, mit Hilfe der Sätze von Legally und Cummins bestimmen.

Ferner wurde gezeigt, dass, wenn die Konturen Ellipsen sind, sich die Funktion der Quellbelegung für einen Körper allein, d.h. ohne Störeinfluss des anderen Körpers, in geschlossener Form angeben lässt. Diese Quellbelegung kann für den Fall zweier Körper beim Iterationsprozess als erste Näherung verwendet werden.

Die Kräfte und Momente, die zwei elliptische Zylinder aufeinander ausüben, sind abhängig von:

- a. Dem Geschwindigkeitsverhältnis $U_A : U_B$
- b. dem Verhältnis der Grössen beider Zylinder $a_A : a_B$
- c. den Achsenverhältnissen $a_A : b_A$ und $a_B : b_B$
- d. und schliesslich von der Lage beider Zylinder, die durch die Grössen h und l gegeben ist.

Sobald die Rechnung abgeschlossen ist, sollen die Ergebnisse in Abhängigkeit von den eben genannten Parametern im zweiten Teil dieser Arbeit

Teil b: "Berechnung und Ergebnisse"

mitgeteilt und diskutiert werden.

Literaturverzeichnis

- [1] Hütte I, 28. Auflage
Wilhelm Ernst u. Sohn, Berlin 1955

- [2] M. Lagally
Berechnung der Kräfte und Momente, die
strömende Flüssigkeiten auf ihre
Begrenzung ausüben.
Zeitschrift für Angewandte Mathematik
und Mechanik 1922, Band 2, S.409-422

- [3] A. Betz
Singularitätenverfahren zur Ermittlung
der Kräfte und Momente auf Körper in
Potentialströmungen.
Ingenieur-Archiv 1932, Band 2, S.454-462

- [4] W.E. Cummins
The Force and Moment on a Body in a
Time-Varying Potential Flow.
Journal of Ship Research, April 57, S.7-18

- [5] L. Landweber, C.S. Jih
Forces, moments and added masses for
Rankine bodies.
Journal of Fluid Mechanics, Volume 1, 56

- [6] I. Lotz
Zur Berechnung der Potentialströmung um
quergestellte Luftschiffkörper.
Ingenieur-Archiv 1931, Band 2, S.507-527

- [7] F. Riegels
Die Strömung um schlanke, fast dreh-
symmetrische Körper.
Mitteilungen aus dem Max-Planck-Institut
für Strömungsforschung.
Nr.5, Göttingen 1952

- [8] A.M.O. Smith, I. Pierce
Exakt Solution of the Neumann Problem,
Douglas Aircraft Company, INC. Apr. 58

- [9] I. Landweber
Potential Flow about Bodies of
Revolutions an Symmetric Two-
Dimensional Forms.
Iowa Institute of Hydraulic Research,
Dezember 1959
- [10] H. Nowacki
Über die wechselseitigen Kraft-
wirkungen zwischen schiffsähnlichen
Tauchkörpern.
Schiff und Hafen, September 1960
Heft 9.
- [11] P. Frank, R.v. Mises
Differentialgleichungen der Physik
Vieweg und Sohn, Braunschweig 1930
- [12] R. Rothe, W. Schmeidler
Höhere Mathematik, Teil VII
Teubner, Stuttgart, 1956
- [13] O.D. Kellog
Foundations of Potential Theory.
Frederick Ungar Publishing Comp.
New York, 1929
- [14] W. Magnus, F. Oberhettinger
Formeln und Sätze für die Speziellen
Funktionen der Mathematischen Physik.
Springer, Berlin 1943
- [15] K. Wendel
Hydrodynamische Massen und hydrody-
namische Massenträgheitsmomente.
Jahrbuch der Schiffbautechnischen
Gesellschaft, 44. Band, 1950
- [16] N.J. Kotschin
Theoretische Hydromechanik, Band I
Akademie-Verlag, Berlin 1954