

70 | 1959

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

O. Krappinger

**Breite Propeller an der Oberfläche von
tiefem und flachem Wasser**

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

Breite Propeller an der Oberfläche von tiefem und flachem Wasser

O. Krappinger, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1959

© Technische Universität Hamburg-Harburg
Schriftenreihe Schiffbau
Schwarzenbergstraße 95c
D-21073 Hamburg

<http://www.tuhh.de/vss>

Breite Propeller an der Oberfläche von tiefem und flachem Wasser¹

Von Dipl.-Ing. Odo Krappinger, Hamburg

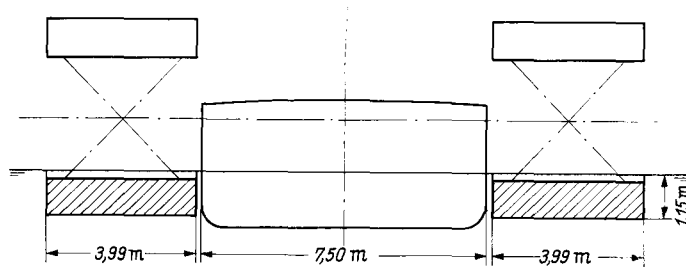
1. Einführung

Zum Antrieb von Binnenschiffen werden häufig Propeller verwendet, die an oder dicht unter der freien Wasseroberfläche arbeiten. Beim Schaufelradpropeller liegt dies in seiner Natur; beim Schraubenpropeller und beim Voith-Schneider-Propeller zwingt die Forderung, große Propulsionsflächen bei geringem Tiefgang unterzubringen, zur Propelleranordnung an oder in der Nähe der Oberfläche. Aus demselben Grund läßt man auch oft mehrere Schrauben- bzw. Voith-Schneider-Propeller nebeneinander arbeiten. Man kann nun eine Gruppe von Schiffsantrieben abgrenzen, deren gemeinsames Kennzeichen darin besteht, daß die Propulsionsfläche – zumindest näherungsweise – die Form eines Rechtecks mit verhältnismäßig großem Seitenverhältnis hat und daß eine lange Seite des Rechtecks mit der Wasseroberfläche zusammenfällt (Bild 1).

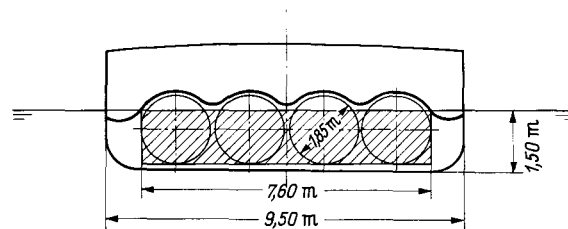
Bisher sind solche Antriebe noch kaum näher untersucht worden. Dies gilt vor allem für das Schaufelrad, den ältesten Propeller, wenn man vom Schiffsantrieb durch Riemen absieht. Es wurden zwar bald nach Einführung der Modellversuchstechnik im Schiffbau auch mit Rädern Modellversuche angestellt. Mangels der Kenntnis der hydrodynamischen Gesetzmäßigkeiten waren viele dieser Versuche nur von recht zweifelhaftem Nutzen.

Einen beachtlichen Fortschritt brachten Versuche von Gebers [1], die er 1939 bis 1943 in der Wiener Versuchsanstalt durchführte und 1952 veröffentlichte. Er folgerte aus der Tatsache, daß das Schaufelrad Wellen erzeugt, daß für die Umrechnung von Modellversuchen mit Schaufelrädern das Froudesche Ähnlichkeitsgesetz gilt. Ferner zeigte er auch, daß sich die Ergebnisse von Versuchen mit Radmodellen nicht in gleicher Weise dimensionslos darstellen lassen wie die von Versuchen mit Schrauben. Er hat deshalb die bei seinen Versuchen gemessenen Größen (Schub und Drehmoment in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit) direkt aufgetragen.

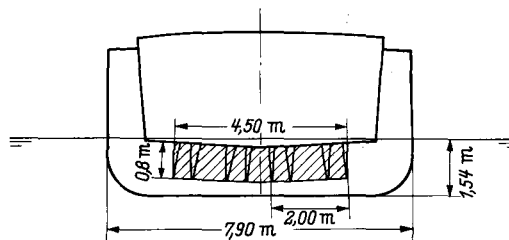
¹ Von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Hochschule Hannover am 22. Oktober 1959 genehmigte Dissertation.



*Dieselelektrischer Schlepper „Szecheny“
(Schema nach „Werft, Reederei, Hafen“ 1939, S. 247)*



*Motorschlepper „Unterwalden“
(Schema nach „Hansa“ 1950, S. 107)*



*Fahrgastschiff „Wiesbaden“
(Schema nach „Hansa“ 1955, S. 415)*

Bild 1

Horn hat versucht, aus den Gerbersschen Versuchen ein Berechnungsverfahren für Schaufelräder abzuleiten (veröffentlicht in einem Anhang zu [1]). Er führte dabei zwar eine aus der Drehzahl hergeleitete Froudesche Zahl ein, beschränkte sich im wesentlichen aber auf die empirische Bestimmung einer Beziehung zwischen den Ergebnissen der einfachen Strahltheorie und der Modellversuche.

Aufgrund der Gerbersschen Arbeit wurde 1954 vom Verfasser ein das Froudesche Ähnlichkeitsgesetz berücksichtigendes Berechnungsverfahren für Schaufelräder, das von Modellversuchsergebnissen ausgeht, angegeben [2]. Dabei wurde u. a. gezeigt, daß auch die Ergebnisse von Radversuchen dimensionslos und in einer für praktische Rechnungen brauchbaren Form dargestellt werden können.

Als besonders wertvoll müssen auch die sehr umfangreichen Schaufelradversuche von Volpich genannt werden [3]. Sie brachten zwar gegenüber [1] und [2] nichts grundlegend Neues, geben aber doch dem Konstrukteur Unterlagen in die Hand, mit denen es möglich ist, aus einer verhältnismäßig großen Mannigfaltigkeit von Rädern das jeweils beste auszuwählen. Diese sicher sehr nützliche Möglichkeit kann aber nicht darüber hinwegtäuschen, daß die Grundlagen der Radberechnung noch immer weitgehend ungeklärt sind.

Sehr ausgiebig hat man sich in den letzten Jahrzehnten auch in Rußland mit Schaufelrädern beschäftigt. Leider ist über diese Arbeiten kaum etwas Näheres bekanntgeworden. Dem Verfasser lag eine zusammenfassende Arbeit von Basin [4] vor, die zeigt, daß der durch die Arbeiten [1], [2] und [3] dargestellte Stand in Rußland schon um die Mitte der dreißiger Jahre erreicht war. Darüber hinaus berichtet Basin auch über theoretische Untersuchungen des Radantriebs: Die Kinematik der Schaufelräder wird in einer alles Bisherige übertreffenden Breite gebracht. Dagegen sind die Ausführungen über die hydrodynamischen Grundlagen des Radantriebs recht knapp. Die Originalarbeiten, auf die sich Basin stützt, sind leider nicht beschaffbar.

Einzelne Schiffsschrauben fallen nicht in den Kreis der hier zu betrachtenden Propulsionsmittel, die ja dadurch gekennzeichnet sein sollen, daß die horizontale Abmessung der Propulsionsfläche ein Vielfaches der vertikalen ist. Trotzdem sollen aber einige Arbeiten angeführt werden, die sich mit Schraubenpropellern, die dicht unter der Oberfläche angeordnet sind, beschäftigen.

An erster Stelle müssen wohl die Arbeiten von Dickmann [5, 6] genannt werden. Anlässlich einer Untersuchung über die Wechselwirkung zwischen Schiff und Propeller erarbeitete er die theoretischen Grundlagen für dicht unter der Oberfläche liegende Propeller. Er zeigte auch, daß mit dieser Theorie die Ergebnisse von Versuchen mit solchen Propellern (z. B. [7], [8]) erklärt werden können.

Mehrere, dicht nebeneinanderliegende, an der Wasseroberfläche arbeitende Propeller sind – soweit bekannt – bisher weder durch Modellversuche noch durch theoretische Berechnungen untersucht worden. Solche Antriebe kommen zwar nur verhältnismäßig selten vor. Weil man sie aber in manchen Fällen, z. B. bei starken, flachgehenden Binnenschleppern, anwenden muß, ist es von Interesse, Näheres über ihre Arbeitsweise zu wissen.

Noch nicht näher untersucht wurde auch der Einfluß beschränkter Wassertiefe auf die Arbeitsweise von Propellern. Bei Untersuchungen auf diesem Gebiet hatte man bisher nur die Wühlwirkung des Propellers, also den Einfluß des Propellers auf den Boden, im Auge [17].

2. Vereinfachungen

Da die hier zu untersuchenden Propeller voraussetzungsgemäß sehr breit sind, kann zunächst angenommen werden, daß das Strömungsbild in allen zur Fortschrittsrichtung des Propellers parallelen Vertikalebene gleich ist oder, mit anderen Worten, daß es sich um eine zweidimensionale Strömung handelt. Um diese Strömung zu bestimmen, muß von den Kräften ausgegangen werden, die vom Propeller auf die Flüssigkeit ausgeübt werden. Eine bis in alle Einzelheiten gehende Erfassung dieser Kräfte erscheint nicht zweckmäßig: Einmal würde der zur genauen Nachbildung aller Einzelerscheinungen notwendige mathematische Apparat sehr verwickelt werden und – soweit überhaupt Lösungen erzielt werden können – die Übersichtlichkeit verringern. Zum anderen blieben die Ergebnisse nur anwendbar auf die untersuchte Propellerart. Da beabsichtigt wird, die Grundlagen der Arbeitsweise von sehr breiten, an der Oberfläche wirkenden Propellern zu klären, soll ein Ansatz gewählt werden, der allen Propellerarten gerecht wird.

Das Gemeinsame aller Propeller ist, daß sie in Fahrtrichtung einen Schub ausüben. Sie unterscheiden sich lediglich in der Technik der Erzeugung der Schubkraft. Die vom Propeller erzeugte Strömung wird daher in erster Linie von zur Fortschrittsrichtung des Propellers parallelen Kräften abhängen. Denkt man sich diese Kräfte an einer sehr dünnen Flüssigkeitsschicht mit Propulsionsquerschnitt angreifend, kommt man zu dem bereits von Froude eingeführten Idealpropeller [9].

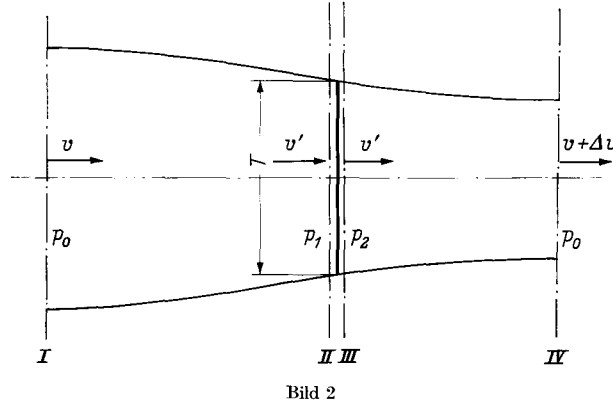
Weiter wird vereinfachend angenommen, daß das Medium, in dem der Propeller arbeitet, eine ideale Flüssigkeit ist. Auch der in Wirklichkeit bei Propellern, die an der freien Oberfläche arbeiten, immer

vorhandene Lufteinbruch bleibt zunächst unberücksichtigt. Schließlich soll noch vorausgesetzt werden, daß die durch das Arbeiten des Propellers entstehenden Wellen im Verhältnis zu ihrer Länge kleine Amplituden haben, so daß die bei der Behandlung von Oberflächenwellen übliche Linearisierung des Problems zulässig wird.

Selbstverständlich müssen die unter Voraussetzung dieser Vereinfachungen entstandenen Ergebnisse entsprechend vorsichtig gedeutet und in jedem praktischen Fall auf ihre Gültigkeit hin überprüft werden.

3. Die einfache Strahltheorie

Die von Rankine [10] begründete und von Froude [9] erweiterte einfache Strahltheorie gilt für tiefgetauchte Propeller. Zur Erlangung einer stationären Strömung wird der Propeller fest im Raum und mit der (ungestörten) Geschwindigkeit v angeströmt gedacht. Weit vor dem Propeller (Querschnitt I in Bild 2) wird diese Geschwindigkeit durch den Propeller nicht beeinflusst. Der Druck in diesem Querschnitt sei p_0 . Knapp vor dem Propeller (Querschnitt II) sei der Druck p_1 und die Geschwindigkeit v' . Aus Gründen der Kontinuität muß die Geschwindigkeit v' auch knapp hinter dem Propeller (Querschnitt III) vorhanden sein. Der Druck springt jedoch beim Übergang von Querschnitt II nach Querschnitt III um Δp auf p_2 . Weiter hinter dem Propeller (Querschnitt IV) herrscht wieder der ungestörte Druck p_0 ; die Abströmgeschwindigkeit im Propellerstrahl sei $v + \Delta v$.



Setzt man die Bernoullische Gleichung für das Gebiet vor und hinter dem Propeller an, so ergibt sich mit ρ als Dichte:

$$\frac{\rho}{2} [v^2 - v'^2] = p_1 - p_0$$

$$\frac{\rho}{2} [(v + \Delta v)^2 - v'^2] = p_2 - p_0.$$

Daraus folgt nach Eliminierung von v' :

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \frac{\rho}{2} [(v + \Delta v)^2 - v^2] = \frac{\rho}{2} \Delta v (2v + \Delta v).$$

Damit wird der Schub je Einheit der Breite:

$$S = \Delta p T = \rho T \Delta v \left(v + \frac{\Delta v}{2} \right). \quad (1)$$

Aus dem Impulssatz ergibt sich

$$S = \rho T v' [(v + \Delta v) - v]. \quad (1a)$$

Damit kann nun $v' = v + \Delta v/2$ berechnet werden.

Die Nutzleistung des Propellers ist

$$L_n = S v = \rho T \Delta v v \left(v + \frac{\Delta v}{2} \right), \quad (2)$$

die effektive Leistung

$$L_e = S v' = \rho T \Delta v v \left(v + \frac{\Delta v}{2} \right)^2. \quad (2a)$$

Die Verlustleistung

$$L_v = L_e - L_n = \frac{1}{2} \rho T \Delta v v^2 \left(v + \frac{\Delta v}{2} \right) \quad (2b)$$

kann leicht als die kinetische Energie der vom Propeller beschleunigten Wassermasse gedeutet werden (Austrittsverlust).

Der Wirkungsgrad wird

$$\eta = \frac{L_n}{L_e} = \frac{L_n}{L_n + L_v} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta v}{2v}}. \quad (3)$$

Definiert man noch den Schubbelastungsgrad

$$\zeta_S = \frac{S}{\frac{1}{2} \rho v^2 T},$$

so folgt aus (1)

$$\zeta_S = 2 \frac{\Delta v}{v} + \left(\frac{\Delta v}{v} \right)^2 \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta v}{v} = -1 + \sqrt{1 + \zeta_S}. \quad (4)$$

Setzt man die letzte Gleichung in Gleichung (3) ein, so kann man für den Wirkungsgrad auch schreiben:

$$\eta = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \zeta_S}}. \quad (3a)$$

Die Strahltheorie sagt noch nichts über den Verlauf der Strömung in der Umgebung des Propellers aus. Diese soll deshalb im nächsten Abschnitt näher untersucht werden.

4. Die durch einen unendlich breiten Idealpropeller erzeugte Strömung

Grundlegende Arbeiten über die Strömung in der Nachbarschaft von Propellern stammen von Oseen (zitiert in [5]) und Burgers [11]. Auch Dickmann hat sich damit beschäftigt [5]. Soweit dem Verfasser bekannt, wurde jedoch der zweidimensionale Fall bisher nicht behandelt. Er soll deshalb

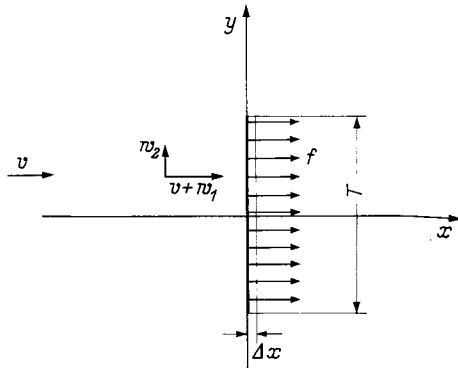


Bild 3

hier einer näheren Betrachtung unterzogen werden, allerdings nur so weit, wie es für den hier verfolgten Zweck notwendig ist. Die Abweichungen betreffen natürlich nicht den grundsätzlichen Gedankengang, sondern nur die das Ergebnis bildenden Funktionen.

Es wird ein rechtwinkliges Koordinatensystem eingeführt (Bild 3): Der Ursprung liegt in der Mitte des Propellers, die x -Achse weist nach rechts, die y -Achse nach oben. Die Parallelströmung v , mit der der Propeller angeströmt wird, sei parallel zur und habe die Richtung der positiven x -Achse. Die durch den Propeller verursachten Geschwindigkeitskomponenten in x - und y -Richtung werden mit w_1 und w_2 bezeichnet. Die Kraft, die der Propeller auf die Raumeinheit der Flüssigkeit ausübt, sei f ; sie wirkt in Richtung der positiven x -Achse.

Mit diesen Bezeichnungen und unter Voraussetzung der Parallelströmung v lauten die Eulerschen Gleichungen für stationäre reibungsfreie Strömung:

$$\begin{aligned} v w_{1x} + w_1 w_{1x} + w_2 w_{1y} &= -\frac{1}{\rho} p_x + \frac{1}{\rho} f, \\ v w_{2x} + w_1 w_{2x} + w_2 w_{2y} &= -\frac{1}{\rho} p_y. \end{aligned} \quad (5)$$

(Hier und im folgenden bedeuten x bzw. y als Index die partiellen Ableitungen nach x bzw. y .)

Hierzu kommt die Kontinuitätsgleichung

$$w_{1x} + w_{2y} = 0. \quad (6)$$

Mit

$$\begin{aligned} w_1 w_{1x} + w_2 w_{1y} &= \left(\frac{w^2}{2} \right)_x - w_2 \gamma \quad \text{und} \\ w_1 w_{2x} + w_2 w_{2y} &= \left(\frac{w^2}{2} \right)_y + w_1 \gamma \end{aligned}$$

(wobei $w^2 = w_1^2 + w_2^2$ und der Wirbelvektor $\gamma = w_{2x} - w_{1y}$) kann man für (5) schreiben:

$$\begin{aligned} v w_{1x} &= -\frac{1}{\varrho} p_x - \left(\frac{w^2}{2}\right)_x + \frac{1}{\varrho} f + w_2 \gamma, \\ v w_{2x} &= -\frac{1}{\varrho} p_y - \left(\frac{w^2}{2}\right)_y - w_1 \gamma. \end{aligned} \quad (7)$$

Mit den Abkürzungen

$$q = p + \frac{1}{2} \varrho w^2 - p_0 \quad (8)$$

(p_0 ist der konstante Druck weit entfernt vom Propeller)

$$g_1 = \varrho w_2 \gamma \quad (9)$$

$$g_2 = \varrho w_1 \gamma$$

$$k_1 = f + g_1 \quad (10)$$

$$k_2 = g_2$$

schreiben sich die Gleichungen (7):

$$\begin{aligned} v w_{1x} &= -\frac{1}{\varrho} q_x + \frac{k_1}{\varrho}, \\ v w_{2x} &= -\frac{1}{\varrho} q_y + \frac{k_2}{\varrho}. \end{aligned} \quad (11)$$

Die Gleichungen (11) erscheinen linear, sind es aber nur, wenn die Kräfte k_1 und k_2 bekannt sind. In diesem Falle können aus ihnen zusammen mit Gleichung (6) die Unbekannten w_1 , w_2 und q und daraus mit Gleichung (8) p bestimmt werden.

Nun sind aber in k_1 und k_2 wegen Gleichung (9) und (10) auch die Produkte der unbekannten Geschwindigkeitskomponenten mit ihren Ableitungen enthalten. Allerdings sind bei kleiner Belastung des Propellers die Größen g_1 und g_2 von höherer Ordnung klein. Darüber hinaus verschwinden sie überall dort, wo keine Wirbel vorhanden sind. Wenn man sie zunächst vernachlässigt, also $k_1 = f$, $k_2 = 0$ setzt, kann die Gleichung (11) gelöst werden. Man erhält so eine erste Näherungslösung und damit auch Näherungswerte für die zunächst vernachlässigten Größen g . Berücksichtigt man diese bei der Bestimmung neuer k -Werte und setzt diese k -Werte in Gleichung (11) ein, so bekommt man eine zweite gegenüber der ersten verbesserte Näherungslösung. Führt man damit fort, so hat man ein Iterationsverfahren zur Bestimmung von w_1 , w_2 und q bzw. p . Dieses Verfahren wurde von Oseen angegeben.

Um die Gleichungen (11) zu berechnen, differenziert man die erste partiell nach x , die zweite nach y und addiert sie. Unter Berücksichtigung von Gleichung (6) erhält man:

$$q_{xx} + q_{yy} = k_{1x} + k_{2y}. \quad (12)$$

Vorstehende Gleichung hat die Form der Poissonschen Potentialgleichung; ihre Lösung ist:

$$q = -\frac{1}{2\pi} \iint (k_{1x} + k_{2y}) \ln \frac{1}{r} d\xi d\eta. \quad (13)$$

Das Integral ist über den ganzen Bereich, in dem die Kräfte wirken, zu erstrecken. r bezeichnet den Abstand des Aufpunktes (x, y) , in dem q bestimmt werden soll, von einem Volumselement $d\xi d\eta \cdot 1$ an der Stelle (ξ, η) , an dem die Kräfte k_1 und k_2 angreifen.

Gleichung (13) kann man umformen:

$$q = \frac{1}{2\pi} \iint \frac{k_1(x-\xi) + k_2(y-\eta)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\xi d\eta. \quad (13a)$$

Bevor q nun in die Gleichungen (11) eingesetzt wird, werden diese nochmals etwas umgeformt, indem die Flüssigkeitsbewegung aufgeteilt wird in eine wirbelfreie, die sich durch ein Potential φ darstellen läßt, und in eine wirbelbehaftete mit den Geschwindigkeitskomponenten u_1 und u_2 :

$$\begin{aligned} w_1 &= u_1 + \varphi_x \\ w_2 &= u_2 + \varphi_y. \end{aligned} \quad (14)$$

Setzt man die Gleichungen (14) in die Gleichungen (11) ein, so folgt durch Vergleich

$$\begin{aligned} v u_{1x} &= \frac{k_1}{\varrho} \\ v u_{2x} &= \frac{k_2}{\varrho} \\ v \varphi_x &= -\frac{q}{\varrho} . \end{aligned} \quad (15)$$

Integrieren der Gleichungen (15) ergibt, wenn man berücksichtigt, daß die Propellerwirkung stromaufwärts ($x \rightarrow -\infty$) abklingt:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\varrho v} \int_{-\infty}^x k_1 d\xi \\ u_2 &= \frac{1}{\varrho v} \int_{-\infty}^x k_2 d\xi \\ \varphi &= -\frac{1}{\varrho v} \int_{-\infty}^x q d\xi . \end{aligned} \quad (15a)$$

Für die erste Näherung ist

$$\begin{aligned} k_1 &= f & \text{für } -\frac{T}{2} < y < +\frac{T}{2}, \quad 0 < x < \Delta x \\ k_1 &= 0 & \text{im ganzen übrigen Raum} \\ k_2 &= 0 & \text{im ganzen Raum.} \end{aligned}$$

Damit wird nach Gleichung (13a)

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\Delta x} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{k_1(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\xi d\eta = \frac{1}{2\pi} \Delta p \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{x}{x^2 + (y-\eta)^2} d\eta = \\ &= \frac{\Delta p}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{\frac{T}{2} - y}{x} + \operatorname{arctg} \frac{\frac{T}{2} + y}{x} \right] . \end{aligned}$$

Dabei wurde berücksichtigt, daß $\int_0^{\Delta x} k_1 d\xi = \Delta p$ ist.

Mit den Gleichungen (15a) erhält man

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\Delta p}{\varrho v} \int_{-\infty}^x \left(\operatorname{arctg} \frac{\frac{T}{2} - y}{\xi} + \operatorname{arctg} \frac{\frac{T}{2} + y}{\xi} \right) d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\Delta p}{\varrho v} \left\{ x \left(\operatorname{arctg} \frac{y - \frac{T}{2}}{x} - \operatorname{arctg} \frac{y + \frac{T}{2}}{x} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(y - \frac{T}{2} \right) \ln \left[x^2 + \left(y - \frac{T}{2} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \left(y + \frac{T}{2} \right) \ln \left[x^2 + \left(y + \frac{T}{2} \right)^2 \right] \right\} + \text{const} , \end{aligned} \quad (16)$$

$$u_1 = \frac{1}{\varrho v} \int_0^{\Delta x} k_1 d\xi = \frac{\Delta p}{\varrho v} ; \quad u_2 = 0 . \quad (17)$$

Das Potential kann als gleichmäßige Belegung des Propellers mit Senken gedeutet werden. Eine solche Senkenbelegung hat nämlich das Potential

$$\bar{\varphi} = -\frac{e}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \frac{1}{2} \ln [x^2 + (y - \eta)^2] d\eta.$$

Führt man diese Integration aus, so stellt man fest, daß $\bar{\varphi}$ mit φ aus Gleichung (16) bis auf eine Konstante übereinstimmt, wenn man für die Schluckfähigkeit je Flächeneinheit $e = \Delta p / \varrho v$ setzt. Das Ergebnis entspricht dem im dreidimensionalen Fall, wo das Potential

$$\varphi = \frac{\Delta p}{\varrho v} \iint -\frac{1}{4\pi r} d\xi d\eta$$

gefunden wurde. φ stellt hier das Geschwindigkeitspotential einer Strömung dar, die entsteht, wenn die Propellerfläche gleichmäßig mit Flächensenken der Schluckfähigkeit $e = \Delta p / \varrho v$ belegt ist.

Die der durch φ dargestellten Strömung überlagerte Strömung hinter dem Propeller ist im dreidimensionalen Fall gleich wie die durch Gleichung (17) bestimmte im zweidimensionalen.

Auf die weitere Durchführung des oben angedeuteten Iterationsverfahrens von Oseen wird hier verzichtet. Der Grund dafür ist, daß eine linearisierte Behandlung der Oberflächenwellen nur bei kleinen Propellerbelastungen zulässig ist. Auch werden bei der linearisierten Berechnung der Oberflächenwellen alle Größen, die von höherer Ordnung klein sind, vernachlässigt. Ihre Kenntnis ist deshalb nicht erforderlich.

Die Gleichungen (16) und (17) können unter der Voraussetzung, daß Δp klein ist, noch etwas umgeformt werden. Aus der zweiten der Gleichungen (4) findet man

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\zeta s}{2} - \frac{\zeta s^2}{8} + \frac{\zeta s^3}{16} - + \dots$$

Wegen $\frac{\Delta p}{\varrho v^2} = \frac{\zeta s}{2}$ kann man für kleine ζs (gleichbedeutend mit kleinem Δp) auch schreiben:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta p}{\varrho v^2} \quad \text{oder} \quad \Delta v = \frac{\Delta p}{\varrho v}.$$

Damit wird, wenn man auch noch die Konstante wegläßt,

$$\begin{aligned} \varphi = \frac{1}{2\pi} \Delta v \left\{ x \left(\operatorname{arctg} \frac{y - \frac{T}{2}}{x} - \operatorname{arctg} \frac{y + \frac{T}{2}}{x} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(y - \frac{T}{2} \right) \ln \left[x^2 + \left(y - \frac{T}{2} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \left(y + \frac{T}{2} \right) \ln \left[x^2 + \left(y + \frac{T}{2} \right)^2 \right] \right\}; \end{aligned} \quad (16a)$$

$$u_1 = \Delta v; \quad u_2 = 0. \quad (17a)$$

Zum Schluß wird noch das Potential für einen Propeller angegeben, der nicht symmetrisch zur x -Achse liegt, sondern um die Strecke $\pm a$ gegenüber der x -Achse verschoben ist.

$$\begin{aligned} \varphi = \frac{\Delta v}{2\pi} \left\{ x \left(\operatorname{arctg} \frac{y \mp a - \frac{T}{2}}{x} - \operatorname{arctg} \frac{y \mp a + \frac{T}{2}}{x} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(y \mp a - \frac{T}{2} \right) \ln \left[x^2 + \left(y \mp a - \frac{T}{2} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \left(y \mp a + \frac{T}{2} \right) \ln \left[x^2 + \left(y \mp a + \frac{T}{2} \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (16b)$$

Diese Gleichung folgt aus Gleichung (16a) durch eine einfache Koordinatentransformation.

5. Allgemeines über an der freien Oberfläche arbeitende Propeller

Es kann mit großer Wahrscheinlichkeit angenommen werden, daß die Unterschiede zwischen tiefgetauchten und an der Oberfläche arbeitenden Propellern in erster Linie mit der Wellenerzeugung erklärt werden können. Auf diese Annahme gründet sich auch die in Abschnitt 2 eingeführte Vernachlässigung des Luftgehaltes des Wassers an der Oberfläche.

Wie wirken sich nun die Wellen auf den Antrieb aus?

Die Antwort liefert eine Energiebetrachtung: Die hinter dem Propeller abwandernden Wellen enthalten eine bestimmte Energie. Diese Energie muß vom Propeller aufgebracht werden, und zwar zusätzlich zu der, die notwendig ist, um den Schub zu erzeugen. Die effektive Propellerleistung Le wird daher gleich der Summe aus Nutzleistung L_n , Austrittsverlust L_v und dem Energietransport der Wellen je Zeiteinheit L_w :

$$Le = L_n + L_v + L_w.$$

Damit wird der Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{L_n}{L_n + L_v + L_w}.$$

Um die Wellenenergie bestimmen zu können, müssen zunächst die durch den Propeller erzeugten Wellen berechnet werden. Da das Problem als zweidimensional angenommen wurde, genügt es dabei, die Wellen in einem sehr großen Abstand hinter dem Propeller zu bestimmen.

6. Berechnung der Oberflächenwellen

Es wird ein Koordinatensystem eingeführt, das sich mit der Anströmgeschwindigkeit des Propellers v bewegt. Die auf dieses System bezogene Bewegung ist daher stationär. Die x -Achse soll in der Wasseroberfläche liegen, die y -Achse zeige senkrecht nach oben. Die Propellermite liege in der Entfernung a unter dem Ursprung (für den Propeller gilt daher: $x = 0$, $-(h + T) < y < -h$, wobei $h = a - T/2$ ist).

Das Strömungsbild des unter der Oberfläche $y = 0$ arbeitenden Propellers erhält man durch Spiegelung, d. h., man denkt sich spiegelbildlich zum Propeller einen zweiten Propeller über der Oberfläche angebracht.

Mit dem allgemeinen Geschwindigkeitspotential

$$\Phi = v x + \varphi + \varphi_1 \quad (18)$$

(v Parallelströmung weit vor dem Propeller,

φ Potential der durch den Propeller und den gespiegelten Propeller hervorgerufenen Strömung nach Gleichung (16b),

φ_1 Potential der Wellenbewegung)

lautet die Bernoullische Gleichung für ebene, stationäre, wirbelfreie Strömung:

$$\frac{1}{2} (\Phi_x^2 + \Phi_y^2) + g y + \frac{p}{\rho} = \text{const.} \quad (19)$$

(g = Erdbeschleunigung)

Die Bewegung der Oberfläche muß übereinstimmen mit der Bewegung der gerade an der Oberfläche befindlichen Flüssigkeitsteilchen. Setzt man für die freie Oberfläche $y = \vartheta(x)$ (unabhängig von der Zeit, da stationäre Bewegung!) und nimmt man die Normale zur Oberfläche näherungsweise parallel zur y -Achse an, muß deshalb gelten:

$$\Phi_y - \vartheta_x \Phi_x = 0. \quad (20)$$

Vernachlässigt man die Quadrate oder Produkte aus je zwei der als klein angenommenen Größen Δv , φ_{1x} , φ_{1y} , ϑ und ϑ_x , so erhält man aus Gleichung (19) bzw. (20) nach Einsetzen von Gleichung (18) für die Oberfläche ($y = 0$)

$$g \vartheta + \frac{1}{2} v^2 + \frac{\Delta v \cdot v}{\pi} \left\{ -\operatorname{arctg} \frac{a + \frac{T}{2}}{x} + \operatorname{arctg} \frac{a - \frac{T}{2}}{x} \right\} + v \varphi_{1x} = \text{const}; \quad (19a)$$

$$v \vartheta_x - \varphi_{1y} \approx 0. \quad (20a)$$

Wird aus diesen Gleichungen ϑ eliminiert, ergibt sich für $y = 0$

$$\varphi_{1xx} + \frac{g}{v^2} \varphi_{1y} = \frac{\Delta v}{\pi} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{a + \frac{T}{2}}{x} - \operatorname{arctg} \frac{a - \frac{T}{2}}{x} \right\}_x. \quad (21)$$

Die weitere Rechnung folgt einem auf Keldysh zurückgehenden Verfahren, das auch von Stoker [16], Kotschin [12] und anderen schon mehrfach zur Behandlung von Wellenproblemen angewandt worden ist.

Es wird das komplexe Strömungspotential

$$w_1(z) = \varphi_1(x, y) + i \psi_1(x, y) \quad (22)$$

eingeführt. Man kann nun für Gleichung (21) wegen $\varphi_{1y} = -\psi_{1x}$ schreiben:

$$\varphi_{1xx} + \frac{g}{v^2} \psi_{1x} = \frac{\Delta v}{\pi} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{a + \frac{T}{2}}{x} - \operatorname{arctg} \frac{a - \frac{T}{2}}{x} \right\}_x \text{ für } y = 0.$$

Wenn man diese Gleichung integriert und für $g/v^2 = k$ setzt, erhält man für $y = 0$

$$\varphi_{1x} - k \psi_1 = \frac{\Delta v}{\pi} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{a + \frac{T}{2}}{x} - \operatorname{arctg} \frac{a - \frac{T}{2}}{x} \right\}. \quad (21a)$$

Mit Benutzung des komplexen Potentials nach Gleichung (22) kann Gleichung (21a) in die Form

$$\operatorname{Im}(i w_{1z} - k w_1) = \frac{\Delta v}{\pi} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{a + \frac{T}{2}}{x} - \operatorname{arctg} \frac{a - \frac{T}{2}}{x} \right\} \quad (21b)$$

gebracht werden.

Nun wird eine analytische Funktion $F(z)$ eingeführt, die durch die Gleichung

$$i w_{1z} - k w_1 = F(z) \quad (23)$$

definiert ist. Der Wert des Imaginärteiles dieser Funktion auf der reellen Achse wird durch Gleichung (21b) vorgeschrieben.

Wie man leicht feststellen kann, entspricht

$$F(z) = \frac{\Delta v}{\pi} \ln \frac{z - i \left(a - \frac{T}{2} \right)}{z - i \left(a + \frac{T}{2} \right)} \quad (24)$$

dieser Vorschrift.

Es bleibt nun noch die lineare inhomogene Differentialgleichung

$$w_{1z} + i k w_1 = i \frac{\Delta v}{\pi} \left\{ \ln \left[z - i \left(a + \frac{T}{2} \right) \right] - \ln \left[z - i \left(a - \frac{T}{2} \right) \right] \right\}$$

zu integrieren. Die homogene Lösung dieser Gleichung lautet:

$$w_1 = c e^{-ikz}.$$

Durch Variation der Konstanten findet man für die inhomogene Lösung

$$w_1 = \frac{i \Delta v}{\pi} e^{-ikz} \left\{ \int e^{ikz} \left\{ \ln \left[z - i \left(a + \frac{T}{2} \right) \right] - \ln \left[z - i \left(a - \frac{T}{2} \right) \right] \right\} dz + c \right\}. \quad (25)$$

Es interessieren die Geschwindigkeitskomponenten der Welle φ_{1x} und φ_{1y} . Man bestimmt sie aus der Beziehung

$$\frac{dw_1}{dz} = \varphi_{1x} - i \varphi_{1y}. \quad (26)$$

Durch Ableitung von Gleichung (25) erhält man nach einigen Umformungen

$$\begin{aligned} \frac{dw_1}{dz} &= \frac{i \Delta v}{\pi} e^{-ikz} \left\{ \int \left(\frac{e^{ikz}}{z - i \left(a - \frac{T}{2} \right)} - \frac{e^{ikz}}{z - i \left(a + \frac{T}{2} \right)} \right) dz + c \right\} = \\ &= \frac{i \Delta v}{\pi} e^{-ikz} \int_{z_0}^z \left(\frac{e^{ikt}}{t - i \left(a - \frac{T}{2} \right)} - \frac{e^{ikt}}{t - i \left(a + \frac{T}{2} \right)} \right) dt. \end{aligned} \quad (27)$$

Die untere Grenze dieses Integrals kann aus der Bedingung bestimmt werden, daß weit vor dem Propeller ($x \rightarrow -\infty$) keine Wellen vorhanden sein sollen. Es muß daher gelten

$$\int_{z_0}^{-\infty} \left(\frac{e^{ikt}}{t-i\left(a-\frac{T}{2}\right)} - \frac{e^{ikt}}{t-i\left(a+\frac{T}{2}\right)} \right) dt = 0.$$

Daraus folgt $z_0 = -\infty$. Damit und unter Berücksichtigung von Gleichung (26) erhält man aus Gleichung (27)

$$\begin{aligned} \varphi_{1x} &= \operatorname{Re} i \frac{\Delta v}{\pi} e^{-ikz} \int_{-\infty}^z \left(\frac{e^{ikt}}{t-i\left(a-\frac{T}{2}\right)} - \frac{e^{ikt}}{t-i\left(a+\frac{T}{2}\right)} \right) dt \\ \varphi_{1y} &= -\operatorname{Im} i \frac{\Delta v}{\pi} e^{ikz} \int_{-\infty}^z \left(\frac{e^{ikt}}{t-i\left(a-\frac{T}{2}\right)} - \frac{e^{ikt}}{t-i\left(a+\frac{T}{2}\right)} \right) dt. \end{aligned}$$

Um die Geschwindigkeiten φ_{1x} und φ_{1y} weit hinter dem Propeller ($x \rightarrow \infty$) zu bestimmen, müssen

Integrale vom Typ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikt}}{t-ib} dt$ berechnet werden. Dazu wird ein solches Integral erweitert durch

ein über einen Halbkreis mit dem Radius ∞ , der in der oberen Halbebene liegt, erstrecktes Integral. Der Wert dieses Integrals ist Null. Der Wert des zu berechnenden Integrals ist daher gleich dem des Integrals über den erweiterten Integrationsweg. Da innerhalb des neuen Integrationsweges an der Stelle $t = ib$ ein Pol des Integranden liegt, ist der Wert des Integrals das $2i\pi$ -fache des Residuums der Funktion an der Stelle $t = ib$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikt}}{t-ib} dt = 2i\pi e^{-kb}.$$

Man erhält also weit hinter dem Propeller

$$\begin{aligned} \varphi_{1x} &= -2 \Delta v e^{ky} \left[e^{-k\left(a-\frac{T}{2}\right)} - e^{-k\left(a+\frac{T}{2}\right)} \right] \cos kx; \\ \varphi_{1y} &= -2 \Delta v e^{ky} \left[e^{-k\left(a-\frac{T}{2}\right)} - e^{-k\left(a+\frac{T}{2}\right)} \right] \sin kx. \end{aligned} \quad (28)$$

Daraus und aus der Energiegleichung an der Oberfläche (Gleichung 19a) folgt für $x \rightarrow \infty$, $y = 0$

$$\vartheta = \frac{2v}{g} \Delta v \left[e^{-k\left(a-\frac{T}{2}\right)} - e^{-k\left(a+\frac{T}{2}\right)} \right] \cos kx. \quad (29)$$

Führt man nun noch eine Froudesche Zahl

$$\mathfrak{F} = \frac{v}{\sqrt{gT}} \quad (30)$$

ein und berücksichtigt, daß $k = g/v^2$ ist, so kann man für die Oberfläche schreiben

$$\vartheta = 2 \frac{\Delta v}{v} \mathfrak{F}^2 T \left[e^{-\frac{1}{\mathfrak{F}^2} \left(\frac{a}{T} - \frac{1}{2} \right)} - e^{-\frac{1}{\mathfrak{F}^2} \left(\frac{a}{T} + \frac{1}{2} \right)} \right] \cos \frac{1}{\mathfrak{F}^2} \frac{x}{T} \quad (31)$$

oder, wenn man $a = h + \frac{T}{2}$ setzt (vgl. Bild 4):

$$\vartheta = 2 \frac{\Delta v}{v} \mathfrak{F}^2 T \left[e^{-\frac{1}{\mathfrak{F}^2} \cdot \frac{h}{T}} - e^{-\frac{1}{\mathfrak{F}^2} \left(1 + \frac{h}{T} \right)} \right] \cos \frac{1}{\mathfrak{F}^2} \cdot \frac{x}{T}. \quad (31a)$$

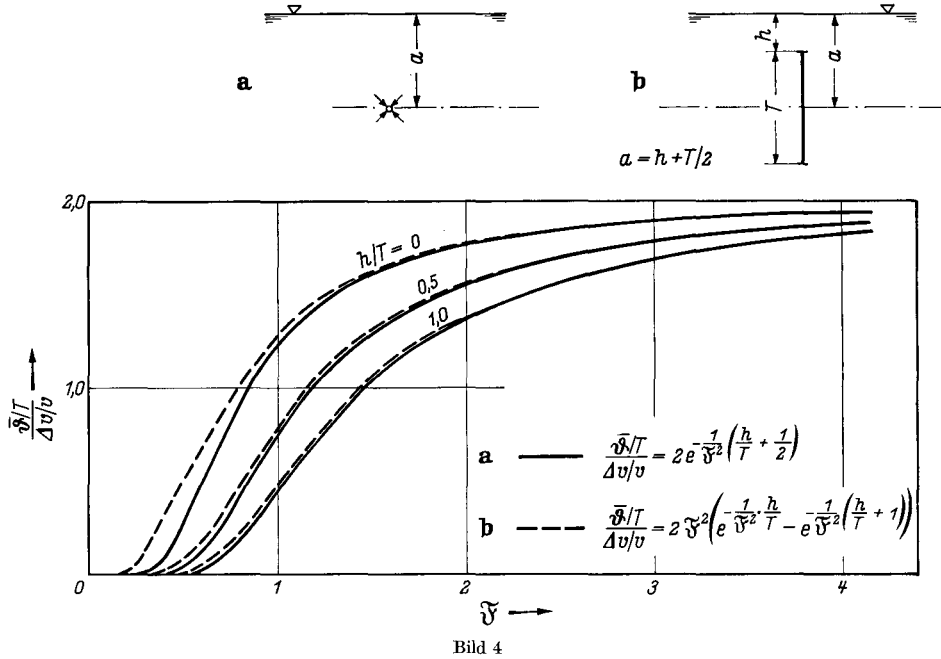
Dies ist die Gleichung einer Welle, deren

$$\text{dimensionslose Amplitude } \frac{\bar{\vartheta}}{T} = 2 \frac{\Delta v}{v} \mathfrak{F}^2 \left[e^{-\frac{1}{\mathfrak{F}^2} \frac{h}{T}} - e^{-\frac{1}{\mathfrak{F}^2} \left(1 + \frac{h}{T}\right)} \right],$$

$$\text{dimensionslose Wellenlänge } \frac{\lambda}{T} = 2 \pi \mathfrak{F}^2 \quad \text{und} \quad (32)$$

deren Fortschrittsgeschwindigkeit v beträgt.

Bevor aus diesem Ergebnis weitere Folgerungen gezogen werden, soll es noch mit den Wellen, die durch eine Einzelsenke entstehen, verglichen werden.



Kotschin gibt für die Amplituden $\bar{\vartheta}$ erzwungener Wellen, die durch eine in der Tiefe a parallel zur Wasseroberfläche mit der Geschwindigkeit c bewegte Quelle von der Intensität Q weit hinter der Quelle entstehen, an ([12], S. 435):

$$\text{Wellenamplitude } \bar{\vartheta} = \frac{2Q}{c} e^{-ka}. \quad (33)$$

Mit der Senke $-Q = \Delta v T$ und $c = -v$ erhält man

$$\frac{\bar{\vartheta}}{T} = \frac{2 \Delta v}{v} e^{-\frac{1}{\mathfrak{F}^2} \cdot \frac{a}{T}} \quad (34)$$

wobei $\mathfrak{F}$ durch Gleichung (30) definiert ist.

In Bild 4 sind die dimensionslosen und durch $\Delta v/v$ geteilten Wellenamplituden in Abhängigkeit von der Froudeschen Zahl aufgetragen. Sowohl für den (durch eine Streckensenke dargestellten) Propeller als auch für die Einzelsenke sind die dimensionslosen Amplituden für $\mathfrak{F} = 0$ Null und nähern sich mit wachsender Froudescher Zahl asymptotisch dem Wert 2. Die Übereinstimmung zwischen den Wellen als Folge der Störung der Strömung durch Propeller und durch Einzelsenken ist um so besser, je tiefer der Propeller bzw. die Einzelsenke eingetaucht ist. Bei sehr großen Froudeschen Zahlen ist die Übereinstimmung auch bei geringer Eintauchung gut. Im Grenzfall $\mathfrak{F} \rightarrow \infty$ ist die Eintauchung, ausgedrückt durch a/T bzw. h/T , überhaupt ohne Einfluß.

Die weiteren Untersuchungen werden auf einen Idealpropeller beschränkt, der bis zur Wasseroberfläche reicht. Für einen solchen Propeller ist $h = 0$ bzw. $a = T/2$. Der Grund dafür ist einerseits, daß die Ergebnisse leicht auf andere Fälle übertragen werden können, andererseits, daß sie in diesem

Fall Versuchen gegenübergestellt werden können. Denn soweit dem Verfasser bekannt, wurde bisher von den in Bild 1 angedeuteten Propellern nur das Schaufelrad näher untersucht.

Mit $a = T/2$ bzw. $h = 0$ lautet die erste der Gleichungen (32)

$$\frac{\bar{\theta}}{T} = 2 \frac{\Delta v}{v} \Im^2 \left[1 - e^{-\frac{1}{\Im^2}} \right]. \quad (32a)$$

An den beiden letzten der Gleichungen (32) ändert sich durch diese Voraussetzung nichts.

7. Energiebilanz und Impulsbilanz. Wirkungsgrad des Idealpropellers

Auf Grund der Kenntnis der Geschwindigkeit weit vor und hinter dem Propeller kann die vom Propeller dem Wasser zugeführte Energie bestimmt werden. Dabei wird ähnlich vorgegangen wie bei der Widerstandsermittlung von Körpern aus dem Nachlauf (vgl. z. B. [15], Seite 266).

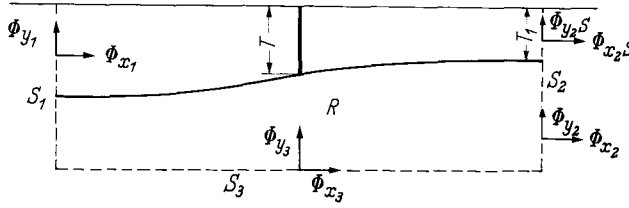


Bild 5

Man denkt sich weit vor und weit hinter dem Propeller senkrecht zur x -Achse liegende Ebenen S_1 und S_2 sowie eine weit unter dem Propeller senkrecht zur y -Achse liegende Ebene S_3 (vgl. Bild 5) und bestimmt die durch diese Kontrollflächen hindurchtretende Energie je Breiteneinheit des Propellers.

Soweit es sich dabei um Energieanteile handelt, die von Wellen herrühren, wird der Mittelwert der Energie über eine Wellenperiode genommen.

Zunächst werden nochmals die Geschwindigkeiten angeschrieben und die zur Energiebestimmung benötigten Summen ihrer Quadrate bestimmt.

$$x \rightarrow -\infty, \quad -\infty < y < 0:$$

$$\Phi_{x1} = v;$$

$$\Phi_{y1} = 0;$$

$$\Phi_{x1}^2 + \Phi_{y1}^2 = v^2.$$

$$x \rightarrow +\infty, \quad -T_1 < y < 0:$$

$$\Phi_{x2s} = v + \Delta v - 2 \Delta v e^{ky} [1 - e^{-kT}] \cos kx;$$

$$\Phi_{y2s} = -2 \Delta v e^{ky} [1 - e^{-kT}] \sin kx;$$

$$\Phi_{x2s}^2 + \Phi_{y2s}^2 = (v + \Delta v)^2 - 4(v + \Delta v) \Delta v e^{ky} [1 - e^{-kT}] \cos kx + 4 \Delta v^2 e^{2ky} [1 - e^{-kT}]^2.$$

$$x \rightarrow +\infty, \quad -\infty < y < -T_1:$$

$$\Phi_{x2} = v - 2 \Delta v e^{ky} [1 - e^{-kT}] \cos kx;$$

$$\Phi_{y2} = -2 \Delta v e^{ky} [1 - e^{-kT}] \sin kx;$$

$$\Phi_{x2}^2 + \Phi_{y2}^2 = v^2 - 4 \Delta v e^{ky} [1 - e^{-kT}] \cos kx + 4 \Delta v^2 e^{2ky} [1 - e^{-kT}]^2.$$

$$-\infty < x < +\infty, \quad y \rightarrow -\infty:$$

$$\Phi_{x3} = v;$$

$$\Phi_{y3} = 0;$$

$$\Phi_{x3}^2 + \Phi_{y3}^2 = v^2.$$

Durch die Kontrollfläche S_1 , die zunächst bis zur Tiefe H (H sei sehr groß) reichen möge, tritt in der Zeiteinheit die Energie

$$L_1 = - \int_{-H}^0 v \cdot \frac{1}{2} \rho v^2 dy$$

in den einerseits durch die Kontrollflächen, andererseits durch die Wasseroberfläche begrenzten Raum R ein.

Durch das vom Propellerstrahl begrenzte Stück der Kontrollfläche S_2 tritt aus R die Energie

$$L_{2S} = \int_{-T_1}^0 (v + \Delta v) \frac{1}{2} \rho (v + \Delta v)^2 dy + \int_{-T_1}^0 (v + \Delta v) 2 \rho \Delta v^2 e^{2ky} [1 - e^{-kT}]^2 dy.$$

Durch das zwischen $-T_1$ und $-H$ liegende Stück der Kontrollfläche S_2 tritt die Energie

$$L_2 = \int_{-H}^{-T_1} v \frac{1}{2} \rho v^2 dy + \int_{-H}^{-T_1} v 2 \rho \Delta v^2 e^{2ky} [1 - e^{-kT}] dy.$$

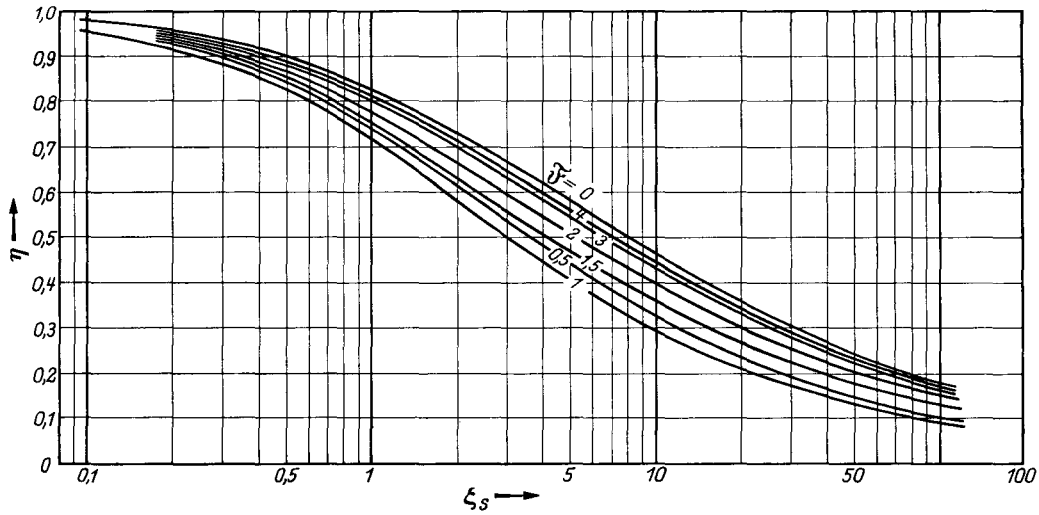


Bild 6

Damit die Bedingung der Kontinuität erfüllt wird, muß gelten

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{y(y \rightarrow -\infty)} dx = \Delta v T_1.$$

Durch die Kontrollfläche S_3 tritt deshalb je Zeiteinheit die Energie

$$L_3 = -\Delta v T_1 \frac{1}{2} \rho v^2$$

in den Raum R ein.

Der Energieüberschuß $L_e = L_1 + L_{2S} + L_2 + L_3$ ist gleich der dem Wasser vom Propeller zugeführten Energie. Aus vorstehenden Gleichungen erhält man für $H \rightarrow \infty$ und mit

$$\mathfrak{F}^2 = \frac{v^2}{g \cdot T} \quad \text{und} \quad T_1 = T \frac{v + \frac{\Delta v}{2}}{v + \Delta v}$$

$$L_e = \rho T \Delta v \left\{ \left(v + \frac{\Delta v}{2} \right)^2 + \Delta v \mathfrak{F}^2 \left(1 - e^{-\frac{1}{\mathfrak{F}^2}} \right)^2 \left[v + \Delta v \left(1 - e^{-\frac{2}{\mathfrak{F}^2} \frac{v + \frac{\Delta v}{2}}{v + \Delta v}} \right) \right] \right\}. \quad (35)$$

Das zweite Glied in vorstehender Klammer entspricht der Energie, die der Propeller zur Erzeugung der Wellen aufbringen muß.

Die Impulsbilanz wird ähnlich wie die Energiebilanz durchgeführt. Der Impulsüberschuß ist gleich dem vom Propeller erzeugten Schub. Man erhält dafür nach einigen einfachen Rechnungen

$$S = \rho T \Delta v \left(v + \frac{\Delta v}{2} \right). \quad (36)$$

Vergleicht man diese Gleichung mit Gleichung (1), so stellt man fest, daß der Propellerschub für tiefgetauchte und für an der Oberfläche arbeitende Propeller gleich ist. Der Grund dafür ist, daß die für den Impuls maßgebende über eine Wellenlänge gemittelte Geschwindigkeit im Strahl weit hinter einem

an der Oberfläche arbeitenden Propeller gleich ist wie die Geschwindigkeit im Strahl weit hinter einem tiefgetauchten Propeller. Die Nutzleistung wird

$$L_n = S v = \rho T \Delta v \cdot v \left(v + \frac{\Delta v}{2} \right). \quad (36a)$$

Der Wirkungsgrad des Idealpropellers ist

$$\eta = \frac{L_n}{L_e}.$$

Nach Einsetzen von Gleichung (35) und (36a) erhält man nach einigen Umformungen

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{\Delta v}{2v} + \frac{\frac{\Delta v}{v}}{1 + \frac{\Delta v}{2v}} \cdot \delta^2 \left(1 - e^{-\frac{1}{\delta^2}} \right)^2 \left[1 + \frac{\Delta v}{v} \left(1 - e^{-\frac{2}{\delta^2} \frac{1 + \frac{\Delta v}{2v}}{1 + \frac{\Delta v}{v}}} \right) \right]} \quad (37)$$

Wie bei Propellern in tiefem Wasser kann auch hier η als Funktion des Schubbelastungsgrades dargestellt werden. Wegen Gl. (36) gilt nämlich auch bei an der Oberfläche arbeitenden Propellern die Gl. (4), die den Zusammenhang zwischen Schubbelastungsgrad und Δv angibt. Es ist jedoch nicht zweckmäßig, in Gl. (37) $\Delta v/v$ durch den Schubbelastungsgrad zu ersetzen, da die Gleichung dann sehr unübersichtlich werden würde. Um den Wirkungsgrad η als Funktion des Schubbelastungsgrades zu bestimmen, wird deshalb $\Delta v/v$ aus dem Schubbelastungsgrad zahlenmäßig berechnet und damit dann η bestimmt.

In Bild 6 ist η über dem Schubbelastungsgrad für verschiedene Froudesche Zahlen aufgetragen. Der Wirkungsgrad wird bis zur Froudeschen Zahl $\bar{\delta} = 1$ mit wachsender Froudescher Zahl kleiner und steigt bei größer werdenden Froudeschen Zahlen wieder an bis zu den Werten, die auch für tiefgetauchte Propeller gelten. Besser als Bild 6 zeigt Bild 7 die Abhängigkeit des Wirkungsgrades von der Froudeschen Zahl. In dieses Bild sind auch bei Schaufelrädern gemessene Wirkungsgrade eingetragen. Auf sie wird im nächsten Abschnitt noch eingegangen.

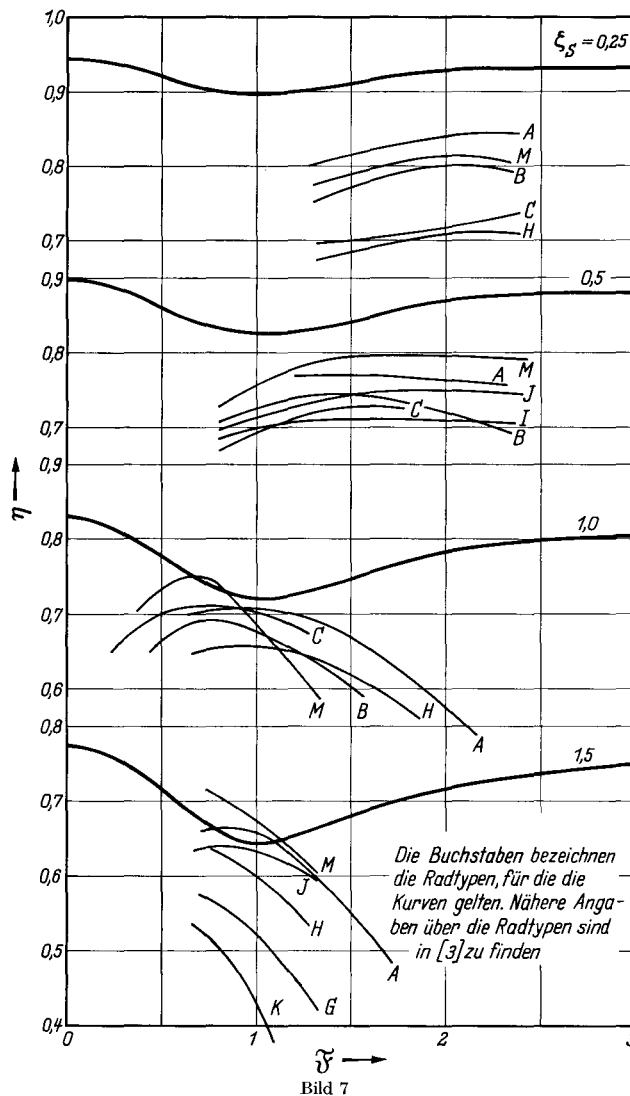


Bild 7

8. Anwendung der Ergebnisse der Strahltheorie. Vergleich von Rechnung und Versuch

Damit an der Oberfläche arbeitende Idealpropeller dynamisch ähnlich sind, müssen sie bei gleicher Belastung (ausgedrückt durch den Schubbelastungsgrad) ähnliche Wellen erzeugen. Die Bedingungsgleichungen für die dynamische Ähnlichkeit lauten deshalb:

$$\zeta_s = \text{const} \quad \text{und} \quad \frac{\bar{\delta}}{T} = \text{const}. \quad (38)$$

Für wirkliche an der Oberfläche arbeitende Propeller ist die Erfüllung dieser Bedingungen ebenfalls notwendig, aber noch nicht hinreichend. Damit solche Propeller dynamisch ähnlich sind, müssen des-

halb nicht nur die Bedingungen (38) erfüllt sein; die Propeller müssen außerdem geometrisch und im Hinblick auf die der Zähigkeit proportionalen Kräfte ähnlich sein (die letztgenannte Forderung läuft auf die Erfüllung des Reynoldsschen Gesetzes hinaus).

Weil ein Idealpropeller wesentliche Eigenschaften eines wirklichen Propellers besitzt, kann man annehmen, daß man bei wirklichen Propellern auch dann schon eine für manche Zwecke genügende, näherungsweise dynamische Ähnlichkeit erhält, wenn man dafür sorgt, daß die für Idealpropeller geltenden Bedingungen (38) erfüllt werden. Für eine Anwendung auf wirkliche Propeller ist die zweite der Gleichungen (38) nicht zu gebrauchen. Sie wird deshalb umgeformt: Mit $\zeta_s = \text{const}$ folgt aus Gleichung (4) $\Delta v/v = \text{const}$ und damit aus Gleichung (32a) für $\vartheta/T = \text{const}$ die praktisch brauchbare Bedingung $\mathfrak{F} = \text{const}$. Auch die in der Bedingung $\zeta_s = \text{const}$ enthaltene Bedingung $\Delta v/v = \text{const}$ kann den Verhältnissen bei wirklichen Propellern besser angepaßt werden. Bezeichnet man die Geschwindigkeit des Propellers, die maßgebend für die Schubzeugung ist, mit u (z. B. beim Schaufelrad $u = n \cdot R_z$ mit n = Drehzahl und R_z = Zapfenkreisradius; beim Schraubenpropeller $u = n \cdot H$ mit H = Steigung der Propellerflügel), so kann man $\Delta v/v$ proportional $\left(\frac{u-v}{v}\right)$ setzen. $\Delta v/v = \text{const}$ ist dann gleichbedeutend mit $(u/v) - 1 = \text{const}$ oder $u/v = \text{const}$.

Die für die Anwendung auf wirkliche Propeller umgeformten Ähnlichkeitsbedingungen für Idealpropeller lauten also:

$$\mathfrak{F} = \frac{v}{\sqrt[3]{g T}} = \text{const} \quad (39)$$

$$\zeta_s = \frac{S}{\frac{1}{2} \varrho v^2 B T} = \text{const} \quad (40)$$

(bei wirklichen Propellern ist der Schubbelastungsgrad auf die Breite B zu beziehen)

$$\frac{u}{v} = \text{const} . \quad (41)$$

Diese Bedingungen können noch vereinfacht werden: Wegen der Bedingungen $\mathfrak{F} = \text{const}$ und $\zeta_s = \text{const}$ muß auch die Bedingung $\mathfrak{F}^2 \cdot \zeta_s = \text{const}$ gelten. Ferner muß wegen $\mathfrak{F} = \text{const}$ und $u/v = \text{const}$ auch $\mathfrak{F} \cdot u/v = \text{const}$ gelten. Man kann für die beiden letzten der vorstehenden drei Bedingungsgleichungen also auch schreiben:

$$t_s = \frac{S}{\varrho g B T^2} = \text{const} \quad (40a)$$

$$\mathfrak{F}_n = \frac{u}{\sqrt[3]{g T}} = \text{const} . \quad (41a)$$

Die Gleichungen (40a) und (41a) haben gegenüber den Gleichungen (40) und (41) den Vorteil, daß sie auch für $\mathfrak{F} = 0$ noch definiert sind.

An Hand der von Volpich mitgeteilten Radversuche [3] soll nun gezeigt werden, wieweit die aus der Strahltheorie abgeleiteten Bedingungen für wirkliche Propeller – in diesem speziellen Fall Schaufelradpropeller – anwendbar sind.

Die Ergebnisse der Versuche von Volpich liegen in der in [2] eingeführten Darstellungsweise vor [13]. Dabei werden u. a. folgende dimensionslose Kennziffern benutzt:

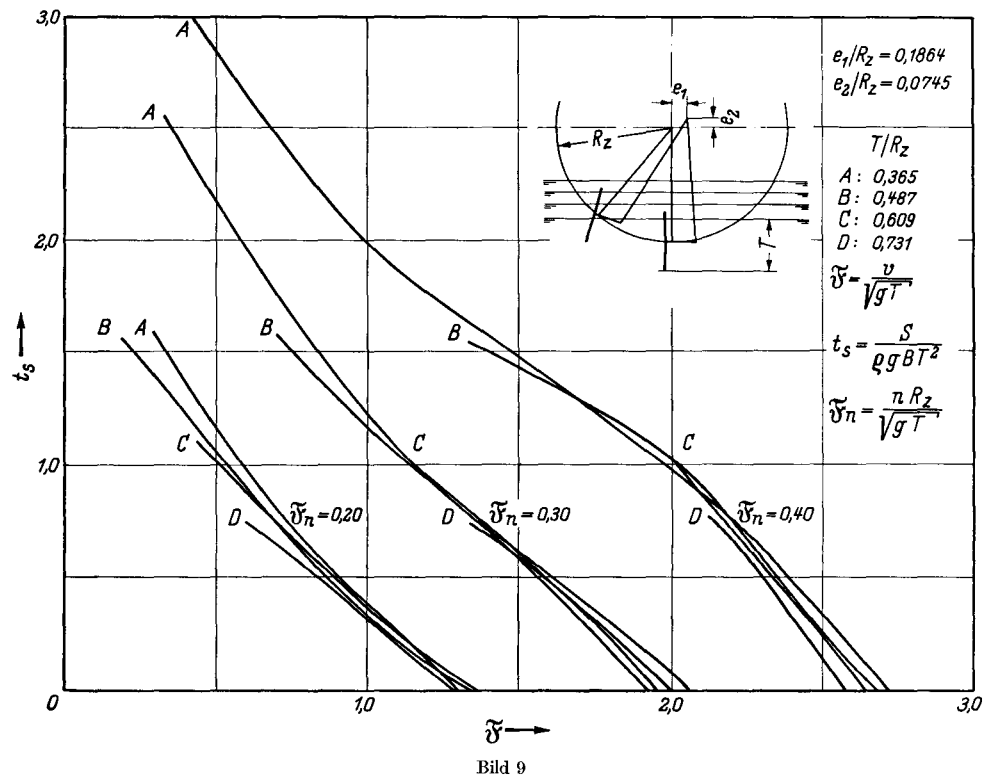
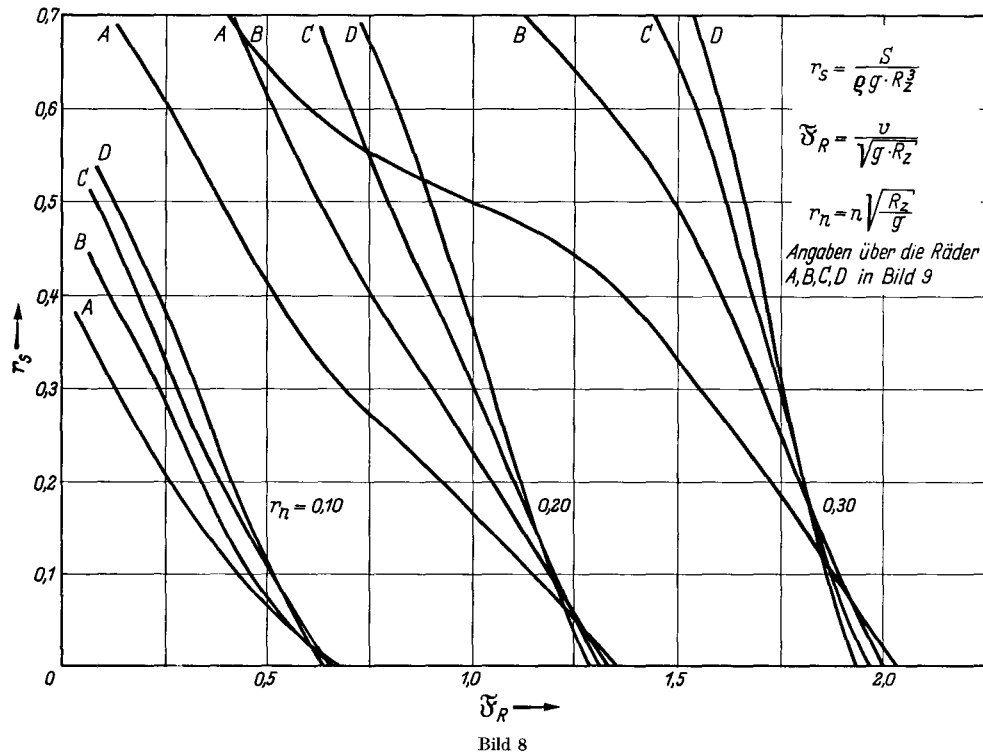
$$\text{Geschwindigkeitskennziffer } \mathfrak{F}_R = \frac{v}{\sqrt[3]{g R_z}} \quad (42)$$

$$\text{Schubkennziffer } r_s = \frac{S}{g \varrho R_z^3} \quad (43)$$

$$\text{Drehzahlkennziffer } r_n = n \sqrt{\frac{R_z}{g}} . \quad (44)$$

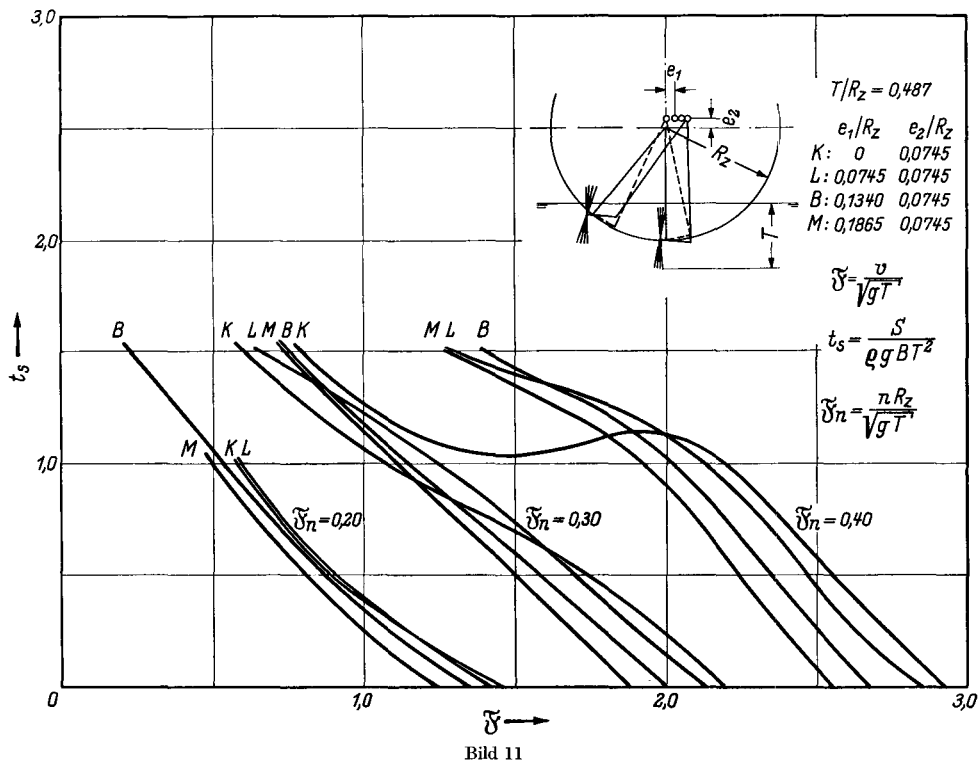
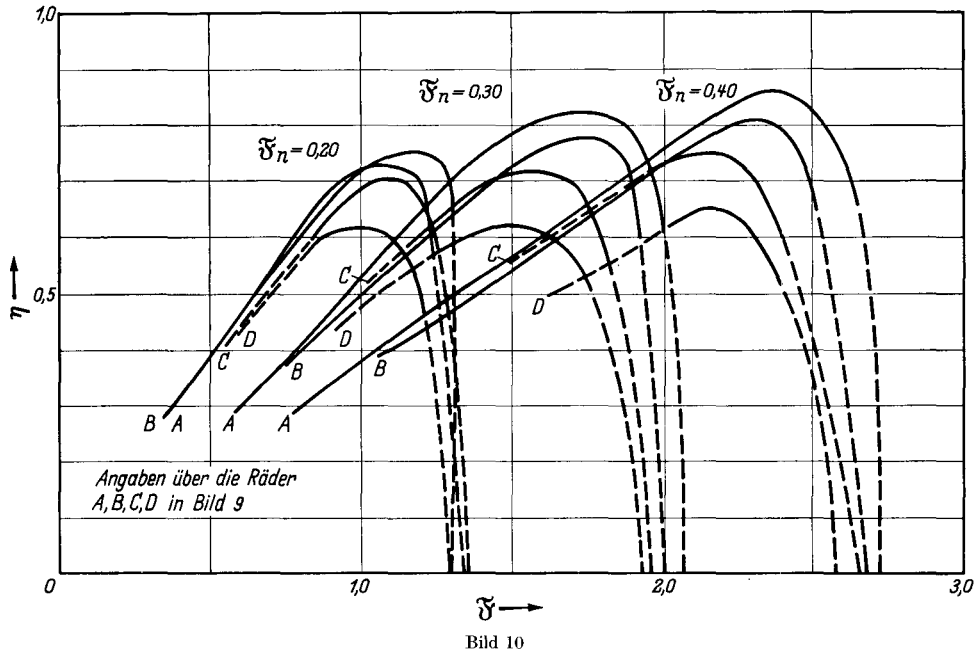
$\mathfrak{F}_R$ wird als Abszisse und r_s als Ordinate dargestellt, r_n erscheint als Parameter (vgl. Bild 8). Bei geometrisch ähnlichen Rädern (solche müssen auch hinsichtlich ihrer Eintauchung geometrisch ähnlich sein; für sie gilt daher $T/R_z = \text{const}$ und $B/R_z = \text{const}$) genügt diese dimensionslose Darstellung auch den aus der Strahltheorie abgeleiteten Bedingungsgleichungen (39), (40a) und (41a). Die Versuche von Gebers und Volpich zeigen, daß die Erfüllung dieser Bedingungen und der Forderung nach geometrischer Ähnlichkeit genügt, um für praktische Zwecke ausreichende dynamische Ähnlich-

keit zu erhalten. Das bedeutet, daß die Forderung nach konstanter Reynoldsscher Zahl nicht erfüllt zu werden braucht. Welche Auswirkung hat es, wenn man nun noch die Forderung nach geometrischer



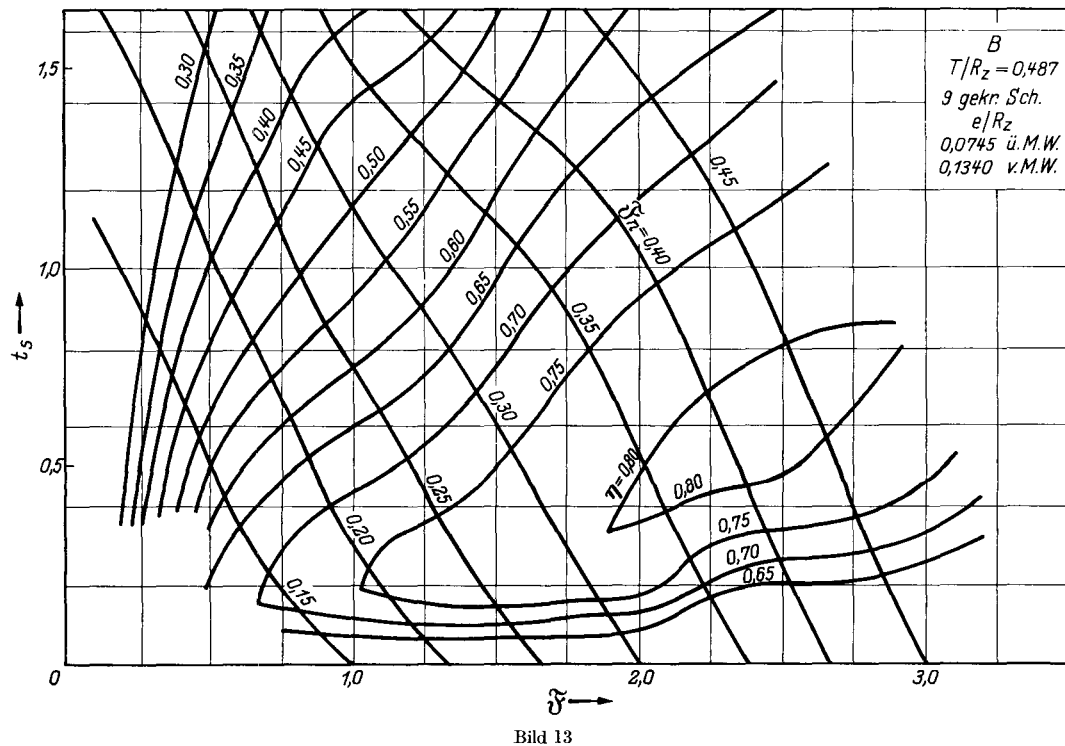
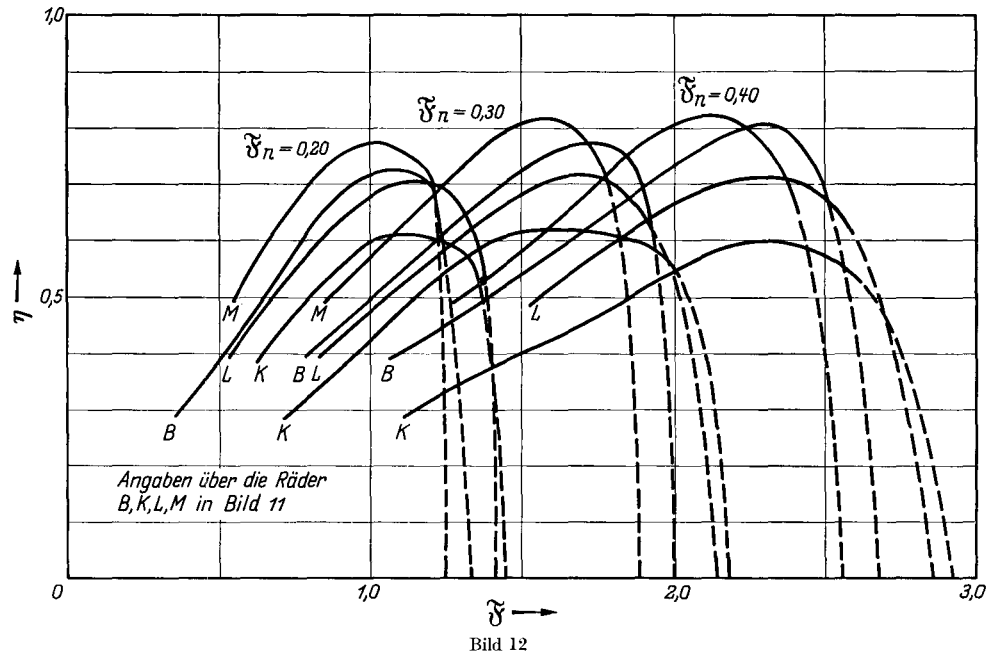
Ähnlichkeit zum Teil fallen läßt und sich nur auf die Erfüllung der für Idealpropeller notwendigen Ähnlichkeitsgesetze beschränkt? Die Antwort für zwei spezielle Fälle kann man aus den Bildern 8 bis 12 ablesen.

Wendet man die aus der Strahltheorie abgeleiteten Ähnlichkeitsbedingungen auf Räder an, die zwar hinsichtlich ihrer Konstruktion, nicht aber auch hinsichtlich ihrer Eintauchung ähnlich sind, so kommt man zu einer Darstellung gemäß Bild 9 und 10. Diese Bilder zeigen, daß sich hinsichtlich des Schubes



eine recht gute näherungsweise Ähnlichkeit ergibt: die den Kurvenbüscheln in Bild 8 in Bild 9 entsprechenden Kurven fallen beinahe zusammen. Hinsichtlich der Wirkungsgrade (oder der Drehmomente, was ja auf das gleiche hinauskommt) gilt dies jedoch nicht (Bild 10).

Bei Rädern, die wohl hinsichtlich ihrer Eintauchung, nicht aber hinsichtlich ihrer Konstruktion ähnlich sind, ist es durch Anwendung der aus der Strahltheorie abgeleiteten Bedingungen nur schlecht möglich, den Schub näherungsweise ähnlich zu machen (Bild 11). Für die Wirkungsgrade bzw. Drehmomente läßt sich unter diesen Bedingungen auch keine näherungsweise Ähnlichkeit erzielen (Bild 12).



Aus diesem Ergebnis kann man folgern, daß die Strahltheorie für unendlich breite Propeller nicht ausreicht, um Aussagen über den Wirkungsgrad von endlich breiten wirklichen Propellern zu machen. Der Vergleich der in Bild 8 eingetragenen, bei Schaufelrädern gemessenen Wirkungsgrade mit denen für Idealpropeller bestätigt dies. Die aus der Strahltheorie abgeleiteten Ähnlichkeitsbedingungen können aber sehr gut verwendet werden, um Versuchsergebnisse von an der Oberfläche arbeitenden Propellern in eine für praktische Rechnungen brauchbare Form zu bringen. Ein Beispiel dafür zeigt Bild 13. Näheres Eingehen auf praktische Radberechnungen würde den hier vorgegebenen Rahmen sprengen.

9. Der Einfluß beschränkter Wassertiefe auf die Strömung im Strahl

Wie schon eingangs erwähnt, kommen die hier behandelten Propeller in erster Linie auf Schiffen für flache Gewässer zur Anwendung. Es ist deshalb von besonderem Interesse, den Einfluß von flachem Wasser auf die Arbeitsweise der Propeller kennenzulernen. Das Problem ist hier schwieriger als in dem vorstehend behandelten Fall unbeschränkter Wassertiefe: Dies nicht nur deshalb, weil die Berechnung der vom Propeller erzeugten Wellen bei Flachwasser verwickelter ist. Auch wenn man von den Wellenerscheinungen zunächst absieht, kann man die bekannten Ergebnisse der Froude-Rankineschen Strahltheorie hier nicht ohne weiteres anwenden. Vor der Behandlung der Oberflächenwellen wird deshalb zunächst auf diese Fragen näher eingegangen werden.

Es wird vorausgesetzt, daß die Änderung der Wassertiefe durch die Propellerwirkung im Verhältnis zur Propellereintauchung T bzw. zur Wassertiefe H vernachlässigbar klein ist. Bezeichnet man den Propellerschub mit S und die Propulsionsfläche mit F , so kann man diese Voraussetzung durch die Ungleichung

$$\frac{S}{\rho g F} \ll T \quad (45)$$

ausdrücken.

Wie früher wird auch hier nur ein unendlich breiter Propeller behandelt. Der Rechnung wird ein Ausschnitt des Propellers von der Breite 1 (Fläche $F = T \cdot 1$) zugrunde gelegt.

Wegen der Voraussetzung der Ungleichung (45) kann man sich Propeller und Boden um die Wasseroberfläche gespiegelt denken. Die Verhältnisse entsprechen dann denen bei einem in einem geschlossenen Kanal arbeitenden Propeller (Bild 14). Der Propeller wird wieder feststehend und mit der Geschwindigkeit v angeströmt gedacht. Weit vor dem Propeller herrscht eine Parallelströmung mit der Geschwindigkeit v_1 , die größer ist als die Propellergeschwindigkeit v , die hier gegenüber dem Boden zu messen ist. Der größeren Geschwindigkeit v_1 entspricht ein Druck p_1 , der kleiner ist als der Atmosphärendruck p . Weit hinter dem Propeller ist die Geschwindigkeit im Propellerstrahl mit der Fläche $T_2 \cdot 1$ gleich v'_2 . Außerhalb des Propellerstrahls ist die Geschwindigkeit v_2 kleiner als die Propellergeschwindigkeit; der Druck p_2 weit hinter dem Propeller ist größer als der Atmosphärendruck p . Die Geschwindigkeit, mit der das Wasser durch den Propeller tritt, sei v' .

Es gilt nun, den Zusammenhang zwischen den eben genannten Größen und dem Propellerschub festzustellen. Ein ähnliches Problem tritt bei der Untersuchung von Propellern in einem geschlossenen Windkanal auf. Dort wird nach der Geschwindigkeit $\bar{v}$ gefragt, mit der ein Propeller, der im unbeschränkten Medium arbeitet, angeströmt werden muß, damit der Propellerschub S und die Geschwindigkeit an der Stelle des Propellers v' und damit die dem Propeller zugeführte Leistung gleich sind wie bei einem Propeller in einem Kanal, in dem weit vor dem Propeller die Geschwindigkeit v_1 herrscht (vgl. [26], Bd. IV, S. 296). Im vorliegenden Fall ist die Fragestellung eine andere: Wie groß ist die Geschwindigkeit eines Propellers auf flachem Wasser v , damit er den gleichen Schub abgibt und die gleiche Leistung aufnimmt wie ein Propeller, der sich in tiefem Wasser mit der Geschwindigkeit $\bar{v}$ bewegt? Die Beantwortung dieser Fragen ist durch Anwendung von Kontinuitätsgleichung, Impulssatz und Energiegleichung möglich.

Aus Kontinuitätsgründen gilt (vgl. Bild 14):

$$H v_1 = T v' + (H - T) v; \quad (46)$$

$$T_2 v'_2 = T v'; \quad (47)$$

$$(H - T_2) v_2 = H v_1 - T v'. \quad (48)$$

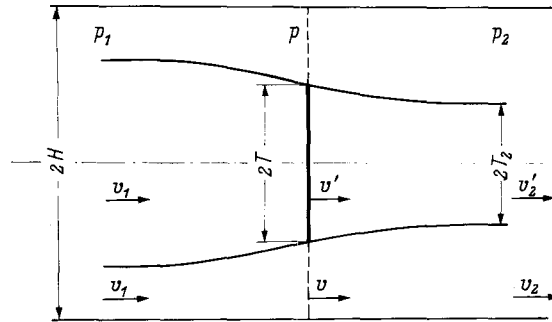


Bild 14

Außerhalb des Propellerstrahles bleibt die Energie in der Flüssigkeit konstant. Es ist daher:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \varrho (v_2^2 - v_1^2) \quad \text{und} \quad (49)$$

$$\Delta p = \frac{1}{2} \varrho (v_2'^2 - v_2^2)$$

(Δp ist der vom Propeller bewirkte Drucksprung).

Damit wird der Propellerschub

$$S = \Delta p \cdot T = \frac{1}{2} \varrho T (v_2'^2 - v_2^2). \quad (50)$$

Die Impulsgleichung für die gesamte Strömung lautet:

$$S + (p_1 - p_2) H = T_2 \varrho v_2' (v_2' - v_1) + (H - T_2) \varrho v_2 (v_2 - v_1). \quad (51)$$

Mit v_2' aus Gleichung (47), v_2 aus Gleichung (48) und $p_1 - p_2$ aus Gleichung (49) sowie mit einem Schubbelastungsgrad (gültig für den Propeller in tiefem Wasser)

$$\zeta_s = - \frac{S}{\frac{\varrho}{2} T v^2} \quad (52)$$

kann man für die Gleichungen (50) bzw. (51) schreiben:

$$\zeta_s \bar{v}^2 T_2^2 (H - T_2)^2 = v'^2 T^2 (H - T_2)^2 - (v_1 H - v' T)^2 T_2^2$$

oder nach einigen Umformungen

$$\zeta_s \bar{v}^2 T_2^2 (H - T_2)^2 = 2 v' T H (v' T - v_1 T_2) (H - T_2) - H^2 (v' T - v_1 T_2)^2 \quad (50a)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \zeta_s \bar{v}^2 T_2 T (H - T_2)^2 &= v_1^2 H T_2 (H - T_2)^2 - H T_2 (v_1 H - v' T)^2 + \\ &+ 2 v' T (v' T - v_1 T_2) (H - T_2)^2 + 2 T_2 (H - T_2) (v_1 H - v' T) (v_1 T_2 - v' T) \end{aligned}$$

oder nach einigen Umformungen

$$\zeta_s \bar{v}^2 T T_2 (H - T_2)^2 = 2 v' T H (v' T - v_1 T_2) (H - T_2) - H T_2 (v' T - v_1 T_2)^2. \quad (51a)$$

Durch Kombination der Gleichungen (50a) und (51a) erhält man zwei gleichwertige, einfachere Gleichungen:

$$\zeta_s \bar{v}^2 T_2 (H - T_2) (T - T_2) = H (v' T - v_1 T_2)^2 \quad (53)$$

$$\zeta_s \bar{v}^2 T_2 (T H - T_2^2) = 2 v' T H (v' T - v_1 T_2) \quad (54)$$

Mit den Abkürzungen $T/H = \alpha$ und $T_2/T = \beta$ schreiben sich diese Gleichungen, wenn man sie noch durch $\bar{v}^2$ teilt

$$\zeta_s \beta (1 - \alpha \beta) (1 - \beta) = \left(\frac{v'}{\bar{v}} - \frac{v_1}{\bar{v}} \beta \right)^2 \quad (53a)$$

$$\zeta_s \beta (1 - \alpha \beta^2) = 2 \frac{v'}{\bar{v}} \left(\frac{v'}{\bar{v}} - \frac{v_1}{\bar{v}} \beta \right). \quad (54a)$$

Für den Schubbelastungsgrad eines im unbeschränkten Medium arbeitenden Propellers gilt

$$\zeta_s = 4 \frac{v'}{\bar{v}} \left(\frac{v'}{\bar{v}} - 1 \right). \quad (55)$$

Setzt man dies in die Gleichungen (53a) und (54a) ein, so erhält man

$$4 \frac{v'}{\bar{v}} \left(\frac{v'}{\bar{v}} - 1 \right) \beta (1 - \beta) (1 - \alpha \beta) = \left(\frac{v'}{\bar{v}} - \frac{v_1}{\bar{v}} \beta \right)^2 \quad (53b)$$

$$2 \frac{v'}{\bar{v}} \left(\frac{v'}{\bar{v}} - 1 \right) \beta (1 - \alpha \beta^2) = \left(\frac{v'}{\bar{v}} - \frac{v_1}{\bar{v}} \beta \right). \quad (54b)$$

Quadriert man Gleichung (54b) und teilt sie dann durch Gleichung (53b), so ergibt sich

$$\frac{\beta \left(\frac{v'}{\bar{v}} - 1 \right) (1 - \alpha \beta^2)^2}{\frac{v'}{\bar{v}} (1 - \beta) (1 - \alpha \beta)} = 1. \quad (56)$$

Aus dieser Gleichung bestimmt man

$$\frac{v'}{v} = \frac{\beta (1 - \alpha \beta^2)^2}{\beta (1 - \alpha \beta^2)^2 - (1 - \beta) (1 - \alpha \beta)} \quad (57)$$

Aus Gleichung (54b) kann $v_1/\bar{v}$ berechnet werden:

$$\frac{v_1}{v} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{v'}{v} - 2 \left(\frac{v'}{v} - 1 \right) (1 - \alpha \beta^2) \quad (58)$$

Aus Gleichung (46) folgt schließlich:

$$\frac{v}{v'} = \frac{\frac{v_1}{v} - \alpha \frac{v'}{v}}{1 - \alpha} \quad (59)$$

Der Schubbelastungsgrad kann aus Gleichung (55) bestimmt werden.

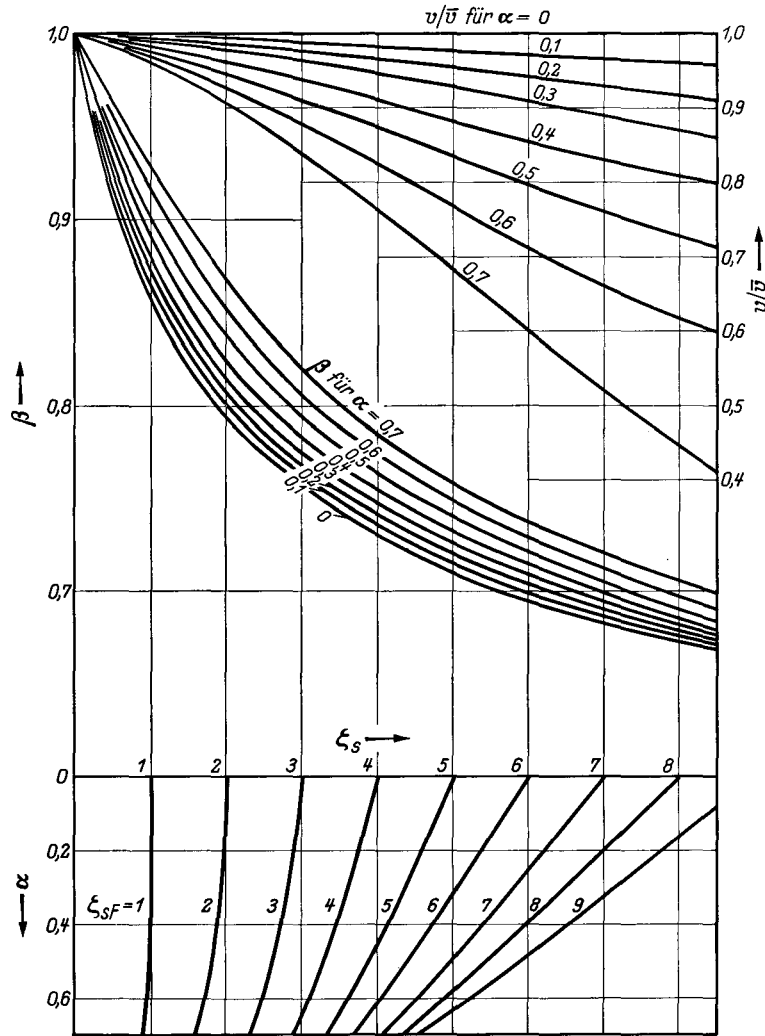


Bild 15

Mit diesen Gleichungen können nun bei gegebenem Verhältnis α durch Annahme verschiedener Verhältniswerte β korrespondierende Geschwindigkeitsverhältnisse $v/\bar{v}$ und Schubbelastungsgrade ζ_s berechnet werden. Mit Hilfe eines Diagramms, in dem $v/\bar{v}$ über ζ_s aufgetragen ist, kann für jede Belastung eines Propellers im tiefen Wasser die Geschwindigkeit v ermittelt werden, bei der dieser Propeller auf Wasser von der Tiefe $H = T/\alpha$ die gleiche Leistung aufnimmt und den gleichen Schub abgibt wie im tiefen Wasser bei der Geschwindigkeit $\bar{v}$.

Nun wird noch ein Schubbelastungsgrad für den auf flachem Wasser arbeitenden Propeller eingeführt:

$$\zeta_{SF} = \frac{S}{\frac{1}{2} \rho T v^2} \quad (60)$$

Er kann aus dem Schubbelastungsgrad für tiefes Wasser ζ_s und aus dem Geschwindigkeitsverhältnis $v/\bar{v}$ berechnet werden:

$$\zeta_{SF} = \zeta_s \left(\frac{\bar{v}}{v} \right)^2 \quad (61)$$

Damit kann nun $v/\bar{v}$ auch als Funktion von ζ_{SF} und α dargestellt werden (Bild 15). Diese Darstellung wird im folgenden zur Berechnung der Erhöhung der Wassergeschwindigkeit durch den Propeller und zur Bestimmung einer Mitstromziffer benutzt. Zur Bestimmung der Wellenenergie hinter dem

Propeller wird auch der die Strahlkontraktion kennzeichnende Verhältnisswert β als Funktion des Schubbelastungsgrades und des Wertes α benötigt. Er ist deshalb ebenfalls in Bild 15 eingezeichnet.

Bei auf flachem Wasser arbeitenden Propellern hat die im Abschnitt 3 angeführte Beziehung zwischen Schubbelastungsgrad und Geschwindigkeitserhöhung durch die Propulsionswirkung keine Gültigkeit mehr. Der für Flachwasser geltende Zusammenhang zwischen Schubbelastungsgrad und Geschwindigkeitserhöhung durch die Propulsionswirkung kann aus vorstehenden Angaben hergeleitet werden. Es war dort von den Bedingungen ausgegangen worden, daß ein Propeller auf tiefem und flachem Wasser den gleichen Schub abgeben und daß die Geschwindigkeit an der Stelle des Propellers in beiden Fällen gleich sein soll:

$$v' = \bar{v} + \frac{\Delta v}{2} = v + \frac{\Delta v}{2}$$

(Die quergestrichenen Größen gelten für den Propeller im unbeschränkten Medium, die ungestrichenen für den im beschränkten Wasser. v' gilt für beide Propeller.)

Daraus folgt

$$\Delta v = \Delta \bar{v} + 2(v - \bar{v}) \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta \bar{v}}{v} \cdot \frac{\bar{v}}{v} + 2 \left(\frac{\bar{v}}{v} - 1 \right) \quad (62)$$

Die Geschwindigkeitserhöhung $\Delta \bar{v}/\bar{v}$ für den im tiefen Wasser arbeitenden Propeller kann aus dem Schubbelastungsgrad für tiefes Wasser (Gleichung 52) nach der zweiten der Gleichungen (4) berechnet werden. Der Schubbelastungsgrad für tiefes Wasser ζ_s folgt aus dem für flaches Wasser ζ_{SF} aus Gleichung (61). $v/\bar{v}$ kann für den Schubbelastungsgrad ζ_{SF} aus Bild 15 entnommen werden. Damit läßt sich $\Delta v/v$ nach Gleichung (62) berechnen. Das Ergebnis dieser Rechnung ist in Bild 16 aufgetragen.

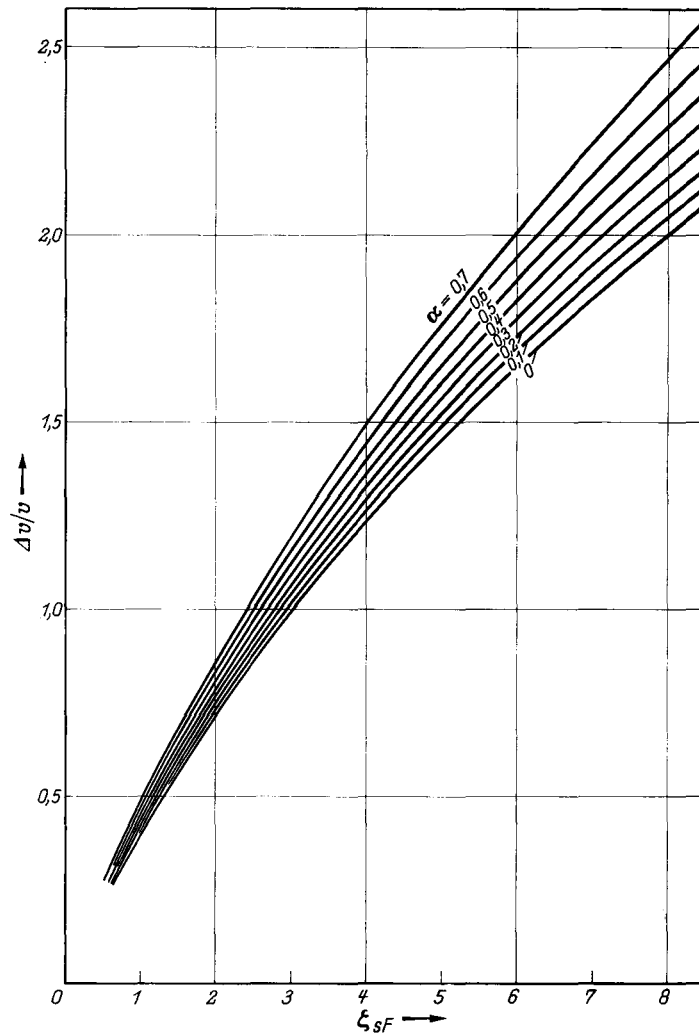


Bild 16

10. Vorstrom durch beschränkte Wassertiefe

Wenn man von den Oberflächenwellen zunächst absieht, kann dem Einfluß von flachem Wasser durch die Annahme eines Vorstroms Rechnung getragen werden. Mit dieser Annahme wird in vielen Fällen die Arbeit bei Propellerrechnungen vereinfacht. Der Vorstrom kann formal gleich berücksichtigt werden wie der Mitstrom: der Mitstromziffer als Maß für den Mitstrom entspricht deshalb hier eine Vorstromziffer

$$\psi_F = 1 - \frac{\bar{v}}{v}. \quad (63)$$

Sie gilt für freifahrende, nicht von einem Schiff beeinflusste Propeller und ist ein Maß für die Erhöhung der Zuströmgeschwindigkeit zum Propeller durch die Beschränkung der Wassertiefe.

Im Gegensatz zur Mitstromziffer ist die Vorstromziffer immer negativ. Bild 17 zeigt ihre Abhängigkeit von der Beschränkung der Wassertiefe und der Propellerbelastung.

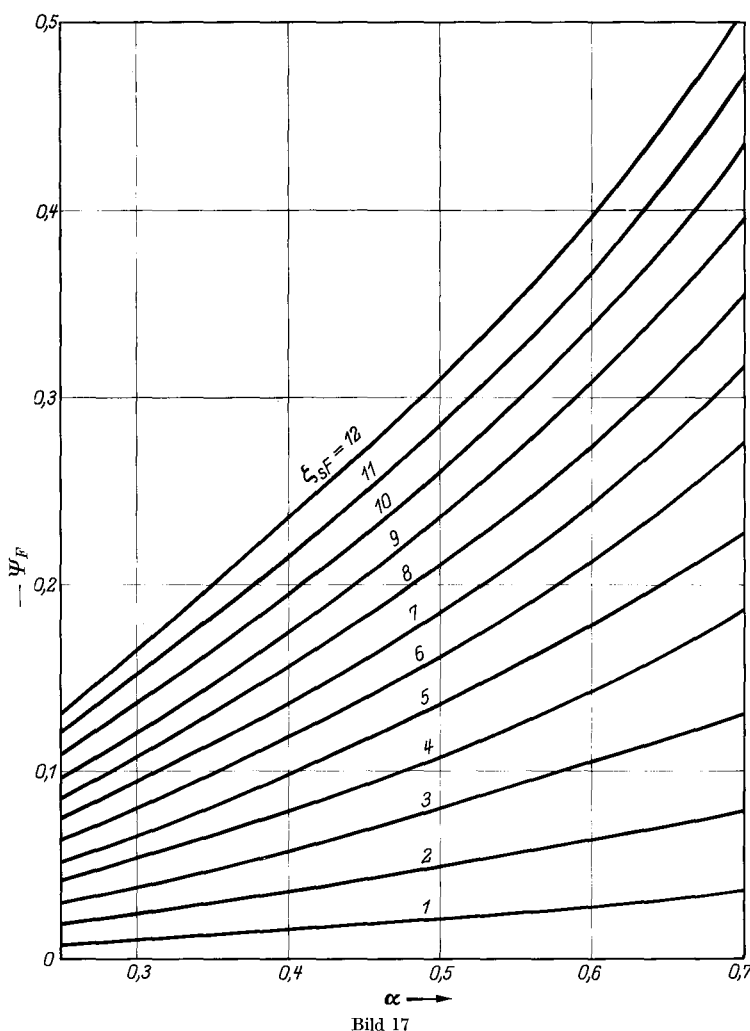
Die Möglichkeit, den Flachwassereinfluß durch einen Vorstrom zu berücksichtigen, hat bereits Gebers [1] erkannt. Er hat auch aus seinen Versuchsergebnissen Vorstromziffern abgeleitet. Da ihm aber nur wenige Daten zur empirischen Bestimmung der Vorstromziffer zur Verfügung standen, war es ihm nicht möglich, auch ihre Abhängigkeit von der Propellerbelastung zu erkennen. Die von Gebers mitgeteilten Vorstromziffern erscheinen deshalb als reine Funktion der Beschränkung der Wassertiefe.

11. Die durch Propeller auf flachem Wasser erzeugten Wellen

Zur Berechnung der durch Propeller erzeugten Wellen ist es nicht zweckmäßig, gleich wie im Abschnitt 6 vorzugehen. Vielmehr erweist sich hier ein Verfahren als recht brauchbar, das bereits von Stoker [16] zur Berechnung von Wellen auf flachem Wasser, die durch eine Störung an der Wasseroberfläche erregt werden, verwendet worden ist. Dabei wird nicht von der stationären Bewegung ausgegangen, sondern von geeignet gewählten Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$. Für $t \rightarrow \infty$ erhält man dann als Grenzwert die stationäre Bewegung.

Zunächst werden nicht die durch den Propeller erzeugten Wellen berechnet, sondern die von einer in der Tiefe b unter der Wasseroberfläche bewegten Senke erregten. Durch geeignete Überlagerung dieser Wellen wird dann die Oberflächenstörung durch den Propeller bestimmt.

Es wird wieder ein mit der Senke fest verbundenes Koordinatensystem eingeführt. Die x -Achse liegt in der Wasseroberfläche, die y -Achse weist senkrecht nach oben (vgl. Bild 18). In dem Koordinatensystem herrscht eine Parallelströmung mit der Geschwindigkeit v in Richtung der positiven x -Achse.



Die Senke soll die Schluckfähigkeit $-Q$ haben. Zur Erzeugung des Strömungsbildes denkt man sie sich entsprechend Bild 18 wiederholt gespiegelt. Das Strömungspotential dieser gespiegelten Strömung ist:

$$\varphi = \frac{-Q}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{ \ln [x^2 + (y + 2nH + b)^2] + \ln [x^2 + (y + 2nH - b)^2] \}. \quad (64)$$

Daraus erhält man die Geschwindigkeitskomponenten

$$\begin{aligned} \varphi_x &= \frac{-Q}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x}{x^2 + (y + 2nH + b)^2} + \frac{x}{x^2 + (y + 2nH - b)^2} \right) \\ \varphi_y &= \frac{-Q}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{y + 2nH + b}{x^2 + (y + 2nH + b)^2} + \frac{y + 2nH - b}{x^2 + (y + 2nH - b)^2} \right). \end{aligned} \quad (65)$$

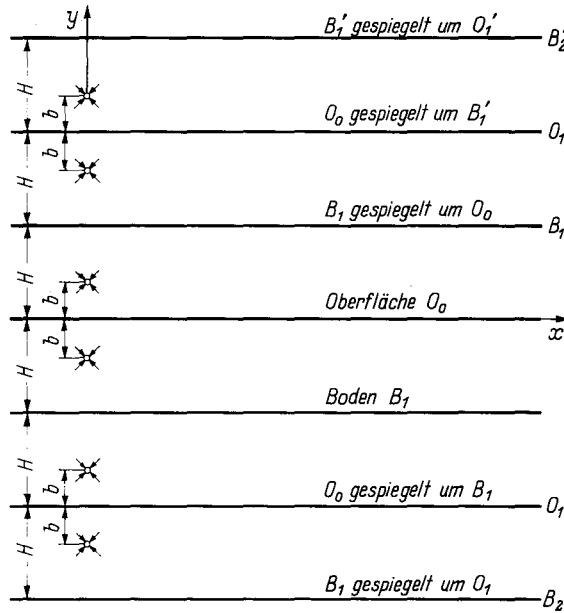


Bild 18

An der Oberfläche müssen wieder die Bernoullische Gleichung

$$\frac{1}{2} (\Phi_x^2 + \Phi_y^2) + g \vartheta + \Phi_t = \text{const} \quad (66)$$

und die kinematische Beziehung

$$\Phi_x \vartheta_x - \Phi_y + \vartheta_t = 0 \quad (67)$$

gelten.

Dabei ist

$$\Phi = v \cdot x + \varphi + \varphi_1 \quad (68)$$

mit $v \cdot x$ Potential der Parallelströmung,

φ Potential der gespiegelten Senkenströmung nach Gl. (64),

φ_1 Potential der Wellenbewegung.

Nach Einsetzen dieser Werte und Vernachlässigen der Produkte bzw. Quadrate der als klein angenommenen Größen φ_{1x} ; φ_{1y} ; ϑ ; ϑ_x und Q erhält man für die Gln. (66) bzw. (67)

$$g \vartheta + \varphi_{1t} + v \varphi_{1x} + \frac{1}{2} v^2 - \quad (66a)$$

$$- \frac{Qv}{2\pi} 2 \left\{ \frac{x}{x^2 + b^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + (2nH + b)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + (2nH - b)^2} \right\} = \text{const}.$$

$$\vartheta_t + v \vartheta_x - \varphi_{1y} = 0. \quad (67a)$$

Diese Gleichungen müssen erfüllt werden für $y = 0$ und jede Zeit $t > 0$.

Wenn man daraus ϑ eliminiert, erhält man

$$\begin{aligned} \varphi_{1tt} + 2v \varphi_{1xt} + v^2 \varphi_{1xx} + g \varphi_{1y} &= \\ = \frac{Qv^2}{\pi} \left\{ \frac{x}{x^2 + b^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + (2nH + b)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + (2nH - b)^2} \right\}_x. \end{aligned} \quad (69)$$

Am Boden ($y = -H$) besteht die Bedingung

$$\varphi_{1y} = 0 \text{ für } t \geq 0. \quad (70)$$

Zu Beginn der Störung, das heißt für $t = 0$ sei nur die ungestörte Parallelströmung vorhanden; deshalb wird für $t = 0$ vorgeschrieben:

$$\begin{aligned} \varphi &= 0 & \vartheta &= 0 \\ \varphi_1 &= 0 & \varphi_{1t} &= 0 \end{aligned} \quad (71)$$

φ_1 muß der Laplaceschen Gleichung

$$\Delta \varphi_1 = \varphi_{1xx} + \varphi_{1yy} = 0 \quad (72)$$

genügen.

Wendet man auf diese Gleichung die Fouriertransformation in bezug auf x an, so erhält man

$$\bar{\varphi}_{1yy} - s^2 \bar{\varphi}_1 = 0. \quad (73)$$

$\bar{\varphi}_1$ ist dabei die Transformation von φ_1 . Durch Anwendung der Fouriertransformation wird implizite noch die Bedingung eingeführt, daß φ_1 im Unendlichen ($x \rightarrow \pm \infty$) gegen Null gehen soll. Diese Bedingung ist plausibel, da die Parallelströmung unendlich weit entfernt von der Senke nicht gestört wird.

Unter Berücksichtigung der Bedingungsgleichung (70) ist die Lösung von Gleichung (73)

$$\bar{\varphi}_1 = A(s, t) \operatorname{ch} s(y + H). \quad (74)$$

Die Funktion A wird mit Hilfe der Gleichung (69) bestimmt. Dazu wird auf diese Gleichung ebenfalls die Fouriertransformation angewandt:

$$\begin{aligned} & \bar{\varphi}_{1tt} + 2 i s v \bar{\varphi}_{1t} - v^2 s^2 \bar{\varphi}_1 + g \bar{\varphi}_{1y} = \\ & = \frac{i s Q v^2}{\pi} \left\{ \frac{x}{x^2 + b^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + (2nH + b)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + (2nH - b)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (75)$$

Setzt man in vorstehende Gleichung $\bar{\varphi}_1$ nach Gleichung (74) ein, so erhält man, wenn für die Fouriertransformation des Ausdrucks in der geschwungenen Klammer $\bar{a}$ gesetzt wird:

$$A_{tt} + 2 i s v A_t + (g s t h s H - v^2 s^2) A = \frac{i s Q v^2}{\pi \operatorname{ch} s H} \bar{a}. \quad (76)$$

Mit dem Ansatz $A = e^{\lambda t}$ findet man aus der homogen gemachten Gleichung (76) $\lambda_{1,2} = -i s v \pm \sqrt{g s t h s H}$. Mit einer partikulären Lösung für die inhomogene Differentialgleichung, die sich leicht angeben läßt, wird die Lösung von Gleichung (76)

$$A(s, t) = c_1 e^{-it(sv + \sqrt{g s t h s H})} + c_2 e^{-it(sv - \sqrt{g s t h s H})} - \frac{1}{g s t h s H - v^2 s^2} \cdot \frac{i s Q v^2}{\pi \operatorname{ch} s H} \bar{a}. \quad (77)$$

Die Konstanten c_1 und c_2 werden aus den Bedingungen (71) bestimmt. Wegen Gleichung (74) folgt für $\varphi_1 = 0$ bzw. $\bar{\varphi}_{1t} = 0$ auch $A = 0$ und $A_t = 0$ für $t = 0$. Nach einigen einfachen Rechnungen findet man

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{i s v^2 Q}{\pi \operatorname{ch} s H} \cdot \frac{1}{s v + \sqrt{g s t h s H}} \cdot \frac{1}{2 \sqrt{g s t h s H}} \bar{a} \\ c_2 &= \frac{-i s v^2 Q}{\pi \operatorname{ch} s H} \cdot \frac{1}{s v - \sqrt{g s t h s H}} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{g s t h s H}} \bar{a}. \end{aligned} \quad (78)$$

Mit

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \frac{1}{\sqrt{2} \pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{x}{x^2 + b^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + (2nH + b)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + (2nH - b)^2} \right\} e^{-isx} dx = \\ &= -\sqrt{\frac{\pi}{2}} i \operatorname{sgn} s \left\{ e^{-|s|b} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-|s|(2nH + b)} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-|s|(2nH - b)} \right\} \end{aligned} \quad (79)$$

und den Gleichungen (78) wird Gleichung (77)

$$\begin{aligned} A(s, t) &= \frac{s v^2 Q \operatorname{sgn} s}{\sqrt{2} \pi \operatorname{ch} s H} \left\{ e^{-|s|b} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-|s|(2nH + b)} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-|s|(2nH - b)} \right\} \\ &\cdot \left[\frac{1}{v^2 s^2 - g s t h s H} + \frac{1}{s v + \sqrt{g s t h s H}} \cdot \frac{e^{-it(sv + \sqrt{g s t h s H})}}{2 \sqrt{g s t h s H}} - \frac{1}{s v - \sqrt{g s t h s H}} \cdot \frac{e^{-it(sv - \sqrt{g s t h s H})}}{2 \sqrt{g s t h s H}} \right]. \end{aligned} \quad (78a)$$

Es bleibt nun noch, von $\bar{\varphi}_1$ wieder auf φ_1 überzugehen. Mit Gleichung (74) und Gleichung (77a) wird

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, y, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A \operatorname{ch} s (y + H) e^{isx} ds = \\ &= \frac{v^2 Q}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s}{\operatorname{ch} s H} \left\{ e^{-|s|b} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-|s|(2nH+b)} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-|s|(2nH-b)} \right\} \cdot \\ &\quad \cdot \left[\frac{1}{v^2 s^2 - g s \operatorname{th} s H} + \frac{1}{s v + \sqrt{g s \operatorname{th} s H}} \cdot \frac{e^{-it(sv + \sqrt{g s \operatorname{th} s H})}}{2 \sqrt{g s \operatorname{th} s H}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{s v - \sqrt{g s \operatorname{th} s H}} \cdot \frac{e^{-it(sv - \sqrt{g s \operatorname{th} s H})}}{2 \sqrt{g s \operatorname{th} s H}} \right] \operatorname{ch} s (y + H) e^{isx} ds.\end{aligned}\quad (80)$$

Es wird nun gezeigt, daß dieses Integral für $-h \leq y < 0$ für jede Zeit t gleichmäßig konvergent ist: Wegen

$$\operatorname{ch} s (y + H) / \operatorname{ch} s \cdot H = \operatorname{ch} s y + \operatorname{sh} s y \operatorname{th} s H$$

verhält sich dieses Glied des Integranden für sehr große Werte s wie e^{sy} . Die Nenner der Glieder in der eckigen Klammer verhalten sich für große Werte s wie s^2 . Wie durch Anwendung der Regel von de l'Hospital leicht nachgewiesen werden kann, gilt dies auch, wenn s die Wurzel eines dieser Nenner ist. Der Integrand verhält sich also für große Werte von s wie

$$e^{|s|y/s} \left(e^{-|s|b} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-|s|(2nH+b)} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-|s|(2nH-b)} \right).$$

Da $y < 0$ ist, folgt daraus die gleichmäßige Konvergenz des Integrals.

Nach dem Riemann-Lebesgueschen Lemma geht das Integral und damit φ_1 für $|x| \rightarrow \infty$ unabhängig von der Zeit t gegen 0. Das bedeutet, daß weit vor und hinter der Senke keine Störung der Wasseroberfläche vorhanden ist. Daß weit vor der Senke die Strömung nicht gestört wird, liegt auf der Hand; daß aber auch weit hinter dem Propeller keine Oberflächenstörung vorhanden sein soll, bedarf einer Erklärung: Wegen der Voraussetzung einer idealen Flüssigkeit pflanzt sich zwar die Störung mit unendlich großer Geschwindigkeit fort, die am Ort der Senke erzeugten Wellen wandern aber nur mit endlicher Geschwindigkeit nach hinten ab. Bis sie sich unendlich weit von der Senke entfernt haben, vergeht deshalb auch unendlich viel Zeit. Der Grenzübergang kann nicht durchgeführt werden, indem man einfach in Gleichung (80) $t \rightarrow \infty$ gehen läßt. Dies würde auch der der Fouriertransformation zugrunde liegenden Voraussetzung, daß φ_1 gegen Null gehen soll, wenn x gegen unendlich geht, widersprechen. Man kommt jedoch zum Ziel, wenn man den Grenzübergang für die in der eckigen Klammer des Integranden der Gleichung (80) stehenden Glieder einzeln durchführt. Dabei wird von den Geschwindigkeiten φ_{1x} und φ_{1y} ausgegangen.

Für φ_{1x} findet man aus Gleichung (80):

$$\begin{aligned}\varphi_{1x} &= \frac{iQv^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s}{\operatorname{ch} s H} \left\{ e^{-|s|b} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-|s|(2nH+b)} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-|s|(2nH-b)} \right\} \cdot \\ &\quad \cdot \left[\frac{1}{v^2 s^2 - g s \operatorname{th} s H} + \frac{1}{s v + \sqrt{g s \operatorname{th} s H}} \cdot \frac{e^{-it(sv + \sqrt{g s \operatorname{th} s H})}}{2 \sqrt{g s \operatorname{th} s H}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{s v - \sqrt{g s \operatorname{th} s H}} \cdot \frac{e^{-it(sv - \sqrt{g s \operatorname{th} s H})}}{2 \sqrt{g s \operatorname{th} s H}} \right] \operatorname{ch} s (y + H) e^{isx} ds.\end{aligned}\quad (81)$$

Vor der Auswertung dieses Integrals wird die im Nenner stehende Funktion $N(s) = v^2 s^2 - g s \operatorname{th} s H = g s \left(\frac{v^2}{g H} s H - \operatorname{th} s H \right)$ auf ihre Nullstellen untersucht. Analytisch ist die Bestimmung der Wurzeln nicht möglich, wohl aber graphisch (Bild 19). $N(s)$ hat entweder eine oder drei Nullstellen, je nachdem, ob $v^2/gH \geq 1$ oder $v^2/gH < 1$ ist. Man kann leicht feststellen, daß $s = 0$ eine Doppelwurzel ist, wenn $v^2/gH \neq 1$ und eine vierfache Wurzel für $v^2/gH = 1$. Die im Fall $v^2/gH < 1$ außerdem noch auftretenden Wurzeln liegen symmetrisch bei $s = \pm \delta$.

Das Integral Gleichung (81) wird nun entsprechend den Gliedern in der eckigen Klammer des Integranden aufgeteilt. Zuerst werden die Teilintegrale, die die Zeit t enthalten, berechnet, und zwar für $t \rightarrow \infty$, da ja der stationäre Zustand interessiert. Ist $v^2/gH > 1$, so liegen bei beiden Teilintegralen, die die Zeit enthalten, auf der reellen Achse keine Singularitäten. Zu ihrer Berechnung kann daher das Prinzip der stationären Phase verwendet werden (z. B. [16], Seite 163). Da die Ableitung nach s des Faktors der im Exponenten stehenden Zeit t in beiden Fällen ungleich Null ist, gehen diese Integrale für $t \rightarrow \infty$ wie $1/t$ gegen Null. Das heißt, der von der Zeit abhängige instationäre Teil der Bewegung klingt im Laufe der Zeit ab.

Ist $v^2/gH < 1$, so haben die Integranden der die Zeit enthaltenden Teilintegrale bei $s = +\delta$ bzw. $s = -\delta$ Polstellen. Bei $s = 0$ ist auch hier keine Singularität vorhanden. Nun wird der Integrationsweg so umgeformt, daß der Pol $+\delta$ bzw. $-\delta$ des jeweiligen Integranden durch einen kleinen in der

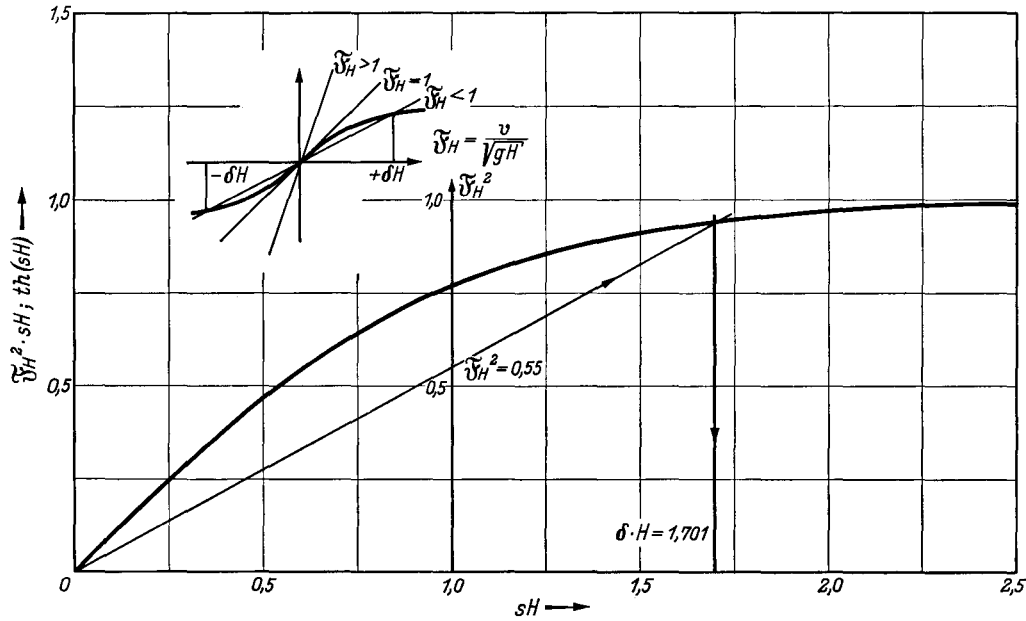


Bild 19

unteren Halbebene liegenden Halbkreis umgangen wird (Bild 20). Für die geraden Teile des Integrationsweges findet man für beide Teilintegrale nach dem Prinzip der stationären Phase, daß sie für $t \rightarrow \infty$ gegen Null gehen. Da die erste Ableitung des Faktors der im Exponenten stehenden Zeit t zwischen $-\delta$ und 0 bzw. zwischen 0 und $+\delta$ verschwindet, die zweite Ableitung an diesen Stellen jedoch ungleich Null ist, gehen die Teilintegrale für $t \rightarrow \infty$ wie $1/\sqrt{t}$ gegen Null. Für die kleinen Halbkreise um $\pm \delta$ wird der Realteil des Faktors der im Exponenten stehenden Zeit t negativ. Für $t \rightarrow \infty$ verschwinden die Teilintegrale daher auch über die Halbkreise. Auch in diesem Fall klingt also der instationäre Teil der Bewegung im Laufe der Zeit ab.

Der Grenzfall $v^2/gH = 1$ wird zunächst übergangen und später behandelt.

Für $v^2/gH \leq 1$ und $t \rightarrow \infty$ bleibt noch der stationäre Teil des Integrals Gleichung (81)

$$\varphi_{1x}^{(s)} = \frac{iQv^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s|s| \operatorname{ch} s(y+H) e^{isx}}{\operatorname{ch} s \cdot H (v^2 s^2 - g s \operatorname{th} s H)} \left\{ e^{-|s|b} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-|s|(2nH+b)} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-|s|(2nH-b)} \right\} ds \quad (81a)$$

zu berechnen.

Für $v^2/gH > 1$ hat der Integrand keine Singularität. Nach dem Riemann-Lebesgueschen Lemma geht deshalb $\varphi_{1x}^{(s)}$ für $|x| \rightarrow \infty$ gegen Null. Das heißt, daß weit vor und auch weit hinter der Senke keine Wellen auftreten.

Ist $v^2/gH < 1$, so hat der Integrand in Gleichung (81a) Pole für $s = \pm \delta$. Der Integrationsweg wird daher entsprechend Bild 20 umgeformt. Für $x < 0$ hat der Exponent von e^{isx} in der unteren Halbebene einen negativen Realteil. Der Wert des Integrals über die beiden Halbkreise geht deshalb für

$x \rightarrow -\infty$ gegen Null. Über die geraden Teile des Integrationsweges wird das Integral für $|x| \rightarrow \infty$ nach dem Riemann-Lebesgueschen Lemma Null. Das heißt, daß weit vor der Senke keine Wellen auftreten.

Für $x > 0$ ist der Realteil von e^{isx} in der unteren Halbebene positiv, in der oberen negativ. Zur Berechnung des Integrals Gleichung (81a) wird der Integrationsweg erweitert durch einen Halbkreis

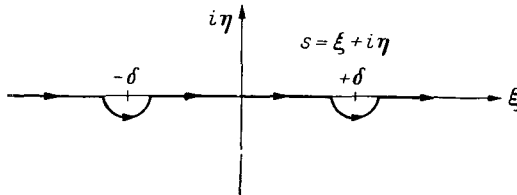


Bild 20

mit unendlich großem Radius, der in der oberen Halbebene liegt. Das über diesen Halbkreis erstreckte Integral ist für $x \rightarrow \infty$ = Null. Der Wert des zu berechnenden Integrals ist deshalb gleich dem Wert des über den erweiterten Integrationsweg erstreckten Integrals. Da innerhalb des neuen Integrationsweges an den Stellen $s = \pm \delta$ Pole des Integranden liegen, ist der Wert des Integrals das 2π -fache der Summe der Residuen der Funktion an den Stellen $s = \pm \delta$.

$$\begin{aligned} \varphi_{1x}^{(s)} = & 2i\pi \cdot \frac{Qiv^2}{2\pi} \cdot \frac{\delta^2 ch \delta (y+H)}{ch \delta H} \cdot \left\{ e^{-\delta b} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\delta (2nH+b)} + \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\delta (2nH-b)} \right\} \cdot \left(\frac{e^{i\delta x}}{\delta v^2 - \frac{g\delta H}{ch^2 \delta H}} - \frac{e^{-i\delta x}}{-\delta v^2 + \frac{g\delta H}{ch^2 \delta H}} \right). \end{aligned}$$

(Es wurde berücksichtigt, daß $\delta^2 v^2 - g\delta th \delta H = 0$ ist.)

Setzt man wieder $g/v^2 = k$ und berücksichtigt, daß

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{k} &= th \delta H \\ e^{-\delta b} &= ch \delta b - sh \delta b \\ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\delta (2nH+b)} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\delta (2nH-b)} &= 2ch \delta b \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\delta nH} \\ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\delta nH} &= cth \delta H^1 \end{aligned}$$

ist, so erhält man endgültig für die Geschwindigkeitskomponente in x -Richtung der Störung weit hinter der Senke

$$\varphi_{1x}^{(s)} = \frac{2Qkch\delta(y+H)ch\delta(H-b)}{kH - ch^2\delta H} \cdot \cos \delta x. \quad (82)$$

Für φ_{1y} folgt aus Gleichung (80)

$$\begin{aligned} \varphi_{1y} = & \frac{Qv^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|s|s}{ch s H} \left\{ e^{-|s|b} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-|s|(2nH+b)} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-|s|(2nH-b)} \right\} \cdot \\ & \cdot \left[\frac{1}{v^2 s^2 - g s th s H} + \frac{1}{sv + \sqrt{g s th s H}} \cdot \frac{e^{-it(sv + \sqrt{g s th s H})}}{2\sqrt{g s th s H}} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{sv - \sqrt{g s th s H}} \cdot \frac{e^{-it(sv - \sqrt{g s th s H})}}{2\sqrt{g s th s H}} \right] sh s (y+H) e^{isx} ds. \end{aligned} \quad (83)$$

Durch die gleichen Überlegungen wie oben findet man für die Vertikalkomponente der Störung weit hinter der Senke

$$\begin{aligned} \varphi_{1y}^{(s)} &= 0 \quad \text{für} \quad \frac{v^2}{gH} > 1 \\ \varphi_{1y}^{(s)} &= \frac{2Qksh\delta(y+H)ch\delta(H-b)}{kH - ch^2\delta H} \sin \delta x \quad \text{für} \quad \frac{v^2}{gH} < 1. \end{aligned} \quad (84)$$

Die hier ermittelten Geschwindigkeiten stimmen mit denen überein, die aus von Wehausen [23] angegebenen Formeln abgeleitet werden können (die den von Wehausen gegebenen Formeln zugrunde liegenden Rechnungen waren dem Verfasser nicht zugänglich. Offensichtlich wurde dabei jedoch ein anderer Weg beschritten als hier).

¹ Diese Beziehung konnte in keiner Formelsammlung gefunden werden. Ihre Richtigkeit läßt sich aber leicht nachweisen.

Der Grenzfall $v^2/gH = 1$ kann am besten an Hand der Ableitung der Gleichung (80) nach der Zeit untersucht werden. Diese Ableitung ist

$$\varphi_{1t} = -\frac{v^2 Q i}{4 \pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|s| \operatorname{ch} s (y+H)}{\operatorname{ch} s H} \cdot \frac{e^{i s x}}{\sqrt{g s \operatorname{th} s H}} \left\{ e^{-|s| b} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-s|(2nH+b)|} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-|s|(\varepsilon n H - b)} \right\} \left[e^{-i t(s v - \sqrt{g s \operatorname{th} s H})} - e^{-i t(s v + \sqrt{g s \operatorname{th} s H})} \right] d s.$$

Der Integrationsweg ist die reelle Achse. Nach dem Prinzip der stationären Phase geht das Integral für $t \rightarrow \infty$ wie $1/t^{1/3}$ gegen Null. Es ist nämlich

$$\frac{d}{ds} (s v + \sqrt{g s \operatorname{th} s H}) = v + \frac{g \operatorname{th} s H + g s \frac{H}{\operatorname{ch}^2 s H}}{2 \sqrt{g s \operatorname{th} s H}}; \\ \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} (s v + \sqrt{g s \operatorname{th} s H}) = v - \sqrt{g H} = 0 \text{ weil } \frac{v^2}{g H} = 1 \text{ ist.}$$

Ähnlich findet man auch

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^2}{ds^2} (s v + \sqrt{g s \operatorname{th} s H}) = 0 \\ \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} (s v - \sqrt{g s \operatorname{th} s H}) = 0 \\ \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^2}{ds^2} (s v - \sqrt{g s \operatorname{th} s H}) = 0.$$

Die dritte Ableitung dieser Ausdrücke ist ungleich Null für $s = 0$. Da φ_{1t} für $t \rightarrow \infty$ wie $1/t^{1/3}$ gegen Null geht, wird mit $t \rightarrow \infty$ φ_1 wie $t^{2/3}$ unendlich. Wenn man als stationären Zustand den Grenzzustand bei $t \rightarrow \infty$ definiert, so bedeutet $\varphi_1 \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$, daß es in diesem Fall keinen stationären Zustand gibt. Auch dieses Ergebnis paßt in das Bild, das von anderen Wellenerscheinungen auf flachem Wasser her bekannt ist.

Die Geschwindigkeitskomponenten der Wellen weit hinter dem Idealpropeller findet man leicht durch Überlagerung der Geschwindigkeiten, die durch Senken der Intensität $dQ = \Delta v \, db$ entstehen. Dabei sind diese Senken auf einer Vertikalen $x = 0$, $-T < b < 0$ angeordnet. Mit der Bezeichnung φ_{1x} und φ_{2x} für die Komponenten der Störung weit hinter dem Propeller erhält man für den Fall $v^2/gH < 1$

$$\varphi_{1x} = \frac{2 \Delta v k \operatorname{ch} \delta (y+H)}{k H - \operatorname{ch}^2 \delta H} \cos \delta x \int_{-T}^0 \operatorname{ch} \delta (H-b) db = \\ = \frac{2 \Delta v \operatorname{ch} \delta (y+H)}{k H - \operatorname{ch}^2 \delta H} \cdot \frac{k}{\delta} [sh \delta H - sh \delta (H-T)] \cos \delta x; \quad (85)$$

$$\varphi_{1y} = \frac{2 \Delta v sh \delta (y+H)}{k H - \operatorname{ch}^2 \delta H} \cdot \frac{k}{\delta} [sh \delta H - sh \delta (H-T)] \sin \delta x. \quad (86)$$

Mit Hilfe der Gleichung (85) kann nun die Form der Oberfläche weit hinter dem Propeller angegeben werden:

$$\vartheta = -2 \frac{\Delta v}{v} \cdot \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\operatorname{ch} \delta H}{k H - \operatorname{ch}^2 \delta H} [sh \delta H - sh \delta (H-T)] \cos \delta x.$$

Setzt man wieder $v^2/gT = \mathfrak{F}^2$ und $v^2/gH = \mathfrak{F}_H^2$, so wird

$$\vartheta = -2 \frac{\Delta v}{v} T \mathfrak{F}^2 \operatorname{cth} \delta H \frac{\operatorname{ch} \delta H}{\frac{1}{\mathfrak{F}_H^2} - \operatorname{ch}^2 \delta H} [sh \delta H - sh \delta (H-T)] \cos \delta x. \quad (87)$$

Für $H \rightarrow \infty$ gehen $\operatorname{ch} \delta H \rightarrow sh \delta H \rightarrow \frac{1}{2} e^{\delta H}$, $sh \delta (H-T) \rightarrow \frac{1}{2} e^{\delta H} \cdot e^{-\delta T}$, $\operatorname{cth} \delta H \rightarrow 1$ und $\delta \rightarrow k$.

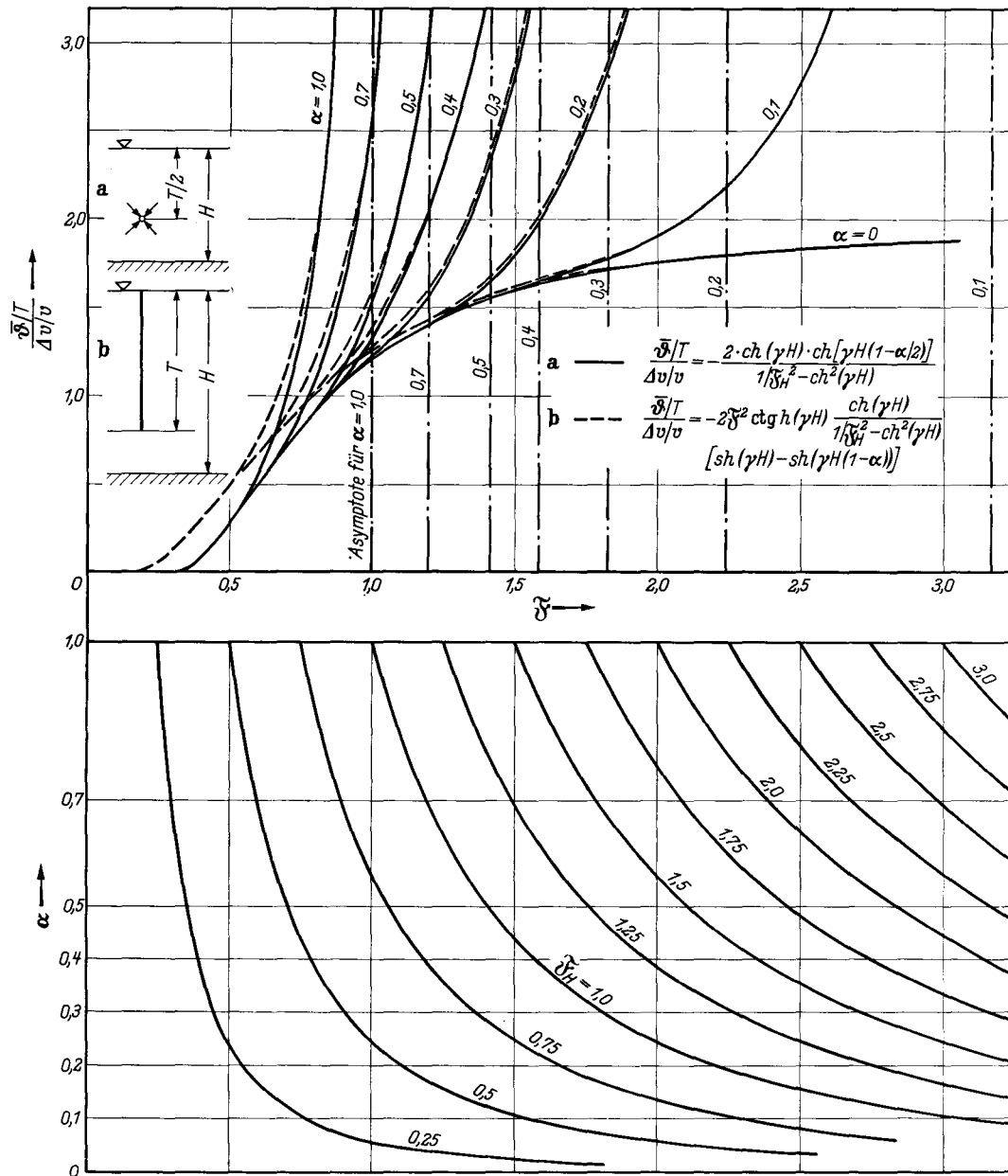
Damit wird

$$\vartheta_{\infty} = \lim_{H \rightarrow \infty} -2 \frac{\Delta v}{v} T \mathfrak{F}^2 \frac{\frac{1}{2} e^{kH}}{k H - \frac{1}{4} e^{2kH}} \left[\frac{1}{2} e^{kH} - \frac{1}{2} e^{kH} \cdot e^{-kT} \right] \cos kx = +2 \frac{\Delta v}{v} T \mathfrak{F}^2 [1 - e^{-kT}] \cos kx$$

(nach de l'Hospital).

Vorstehende Gleichung stimmt überein mit Gleichung (32a), die auf einem ganz anderen Wege gefunden wurde.

Für den Fall, daß $v^2/gH > 1$ ist, sind weit hinter dem Propeller keine Wellen vorhanden.

Bild 21¹

Die dimensionslosen Wellenamplituden für Propeller und für in der Tiefe $T/2$ unter der Oberfläche bewegte Senken von der Schluckfähigkeit $Q = \Delta v T$ sind in Bild 21 als Funktion von $\mathfrak{F}$ aufgetragen. In dieses Diagramm ist auch $\mathfrak{F}_H = f(\mathfrak{F}, \alpha)$ eingetragen, und zwar so, daß aus diesem Bild die dimensionslosen Wellenamplituden auch als Funktion von $\mathfrak{F}_H$ entnommen werden können. Bei kleinen auf die Tiefe bezogenen Froudeschen Zahlen ist die Beschränkung der Wassertiefe ohne Einfluß. Bei größeren auf die Tiefe bezogenen Froudeschen Zahlen werden die Wellenamplituden sehr groß. Bei

¹ In den Formeln in Bild 21 ist γ durch δ zu ersetzen.

$\tilde{\gamma}_H = 1$ gehen sie gegen unendlich. Bei einem Vergleich der Wellen von Propeller und Senke stellt man das gleiche fest wie im Fall unbeschränkter Wassertiefe: Bei kleinen Geschwindigkeiten sind die Amplituden der vom Propeller erzeugten Wellen größer als die der Wellen, die von der Senke herrühren. Bei größeren Geschwindigkeiten nähern sich die Amplituden für beide Fälle immer mehr denselben Werten.

12. Der Wirkungsgrad von Propellern auf flachem Wasser

Da die Ergebnisse von Abschnitt 8 sinngemäß auch auf an der Oberfläche von flachem Wasser arbeitende Propeller übertragen werden können und außerdem in Abschnitt 11 bereits Energie- und Impulsgleichungen für diese Propeller aufgestellt wurden, kann hier auf eine ausführliche Energie- und Impulsbilanz verzichtet werden.

Für den Fall, daß die auf die Wassertiefe bezogene Froudesche Zahl $\tilde{\gamma}_H^2 = v^2/gH > 1$ ist, ist die Berechnung des Wirkungsgrades von auf flachem Wasser arbeitenden Propellern sehr einfach. Wie die Rechnungen im vorstehenden Abschnitt gezeigt haben, sind nämlich in diesem Fall weit hinter dem Propeller keine Wellen vorhanden; der Propeller braucht deshalb auch keine Energie zur Erzeugung von Wellen aufzubringen. Der Wirkungsgrad wird daher

$$\eta = \frac{S \cdot v}{S \cdot v'} = \frac{1}{1 + \frac{A v}{2 v}}. \quad (88)$$

$A v/v$ kann aus Bild 16 als Funktion des Schubbelastungsgrades ζ_{sF} und des Verhältnisses Propellereintauchung zur Wassertiefe $T/H = \alpha$ entnommen werden.

Man kann für den Wirkungsgrad aber auch eine Gleichung angeben, die ξ enthält und ähnlich aufgebaut ist wie die entsprechende Gleichung für in unbeschränkten Medien arbeitende Propeller. Für solche war in Abschnitt 3 die Gleichung

$$\bar{\eta} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \zeta_s}}. \quad (89)$$

angegeben worden.

Wenn η der Wirkungsgrad eines im unbeschränkten Medium arbeitenden Propellers ist, der bei der Geschwindigkeit $\bar{v}$ den Schub S erzeugt und dabei die Leistung $v' S$ aufnimmt, und wenn mit η der Wirkungsgrad eines auf flachem Wasser arbeitenden Propellers bezeichnet wird, der die gleiche Leistung aufnimmt und bei der Geschwindigkeit v gegen den Boden den gleichen Schub erzeugt, so gilt

$$\eta = \bar{\eta} \frac{v}{\bar{v}}. \quad (90)$$

Mit $\zeta_s = \zeta_{sF} (v/\bar{v})^2$ und $\bar{\eta}$ aus Gleichung (89) erhält man aus Gleichung (90)

$$\eta = \frac{2}{\frac{\bar{v}}{v} + \sqrt{\left(\frac{\bar{v}}{v}\right)^2 + \zeta_{sF}}}. \quad (91)$$

$v/\bar{v} = f(\zeta_{sF}, \alpha)$ kann aus Bild 15 entnommen werden.

Eine dritte Möglichkeit ist noch, den Wirkungsgrad mit Hilfe der Mitstromziffer zu bestimmen. Dabei wird ähnlich vorgegangen wie bei der Berechnung eines hinter einem Schiff arbeitenden Propellers: aus der Propellergeschwindigkeit für flaches Wasser wird die entsprechende Geschwindigkeit für tiefes Wasser berechnet (Gleichung 62):

$$\bar{v} = v(1 - \psi_F).$$

Mit $\bar{v}$ wird der Schubbelastungsgrad $\zeta_s = \frac{S}{\frac{1}{2} \rho T \bar{v}^2}$ bestimmt. Daraus ergibt sich auf bekannte

Weise der Wirkungsgrad für tiefes Wasser $\bar{\eta}$. Der Wirkungsgrad für flaches Wasser wird

$$\eta = \bar{\eta} \frac{1}{1 - \psi_F}. \quad (92)$$

Dieses Verfahren wäre auch dann anzuwenden, wenn aus Versuchsergebnissen für auf tiefem Wasser arbeitende Propeller der Wirkungsgrad für auf flachem Wasser arbeitende Propeller bestimmt werden soll.

Ist die auf die Wassertiefe bezogene Froudesche Zahl $\mathfrak{F}_H < 1$, so ist die zur Erzeugung der in diesem Fall auftretenden Wellen notwendige Energie vom Propeller aufzubringen. Der Wirkungsgrad wird dann

$$\eta_w = \frac{L_n}{L_e + L_w} = \frac{1}{\frac{1}{\eta} + \frac{L_w}{L_n}}. \quad (93)$$

In dieser Gleichung bedeuten

η_w	Wirkungsgrad bei Berücksichtigung der Wellen,
η	Wirkungsgrad ohne Berücksichtigung der Wellen,
$L_n = S v$	Nutzleistung des Propellers,
$L_e = S v'$	Effektivleistung des Propellers ohne Berücksichtigung der Wellen,
L_w	Leistung zur Erzeugung der Wellen.

Die durch eine Kontrollfläche weit hinter dem Propeller gehende, durch die Wellen bedingte Energie wird getrennt für den Propellerstrahl und für den Bereich außerhalb des Propellerstrahls berechnet. Die Rechnung wird mit dimensionslosen Größen durchgeführt.

Für den Propellerstrahl gilt (vgl. auch Bild 14):

$$\begin{aligned} \frac{L_{ws}}{T \varrho v^3} &= \int_{-\alpha\beta}^0 \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\beta} \left(\frac{\Delta v}{v} \right)^2 \frac{v'}{v} \frac{1}{\mathfrak{F}_H^4} \frac{1}{\delta^2 H^2} \frac{[sh \delta H - sh \delta H (1 - \alpha)]^2}{\left(\frac{1}{\mathfrak{F}_H^2} - ch^2 \delta H \right)^2} \\ &\quad \left[ch^2 \delta H \left(1 + \frac{y}{H} \right) + sh^2 \delta \left(1 + \frac{y}{H} \right) \right] d \left(\frac{y}{H} \right). \end{aligned} \quad (94)$$

Außerhalb des Strahles ist die bezogene Energie

$$\begin{aligned} \frac{L_{wa}}{T \varrho v^3} &= \int_{-1}^{-\alpha\beta} \frac{1}{\alpha} \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha\beta} \left(\frac{\Delta v}{v} \right)^2 \frac{1}{\mathfrak{F}_H^4} \frac{1}{\delta^2 H^2} \frac{[sh \delta H - sh \delta H (1 - \alpha)]^2}{\left(\frac{1}{\mathfrak{F}_H^2} - ch^2 \delta H \right)^2} \\ &\quad \left[ch^2 \delta H \left(1 + \frac{y}{H} \right) + sh^2 \delta \left(1 + \frac{y}{H} \right) \right] d \left(\frac{y}{H} \right). \end{aligned} \quad (95)$$

Nach Durchführung dieser Integrationen ergibt sich, wenn noch für $v'/v = 1 + \frac{\Delta v}{2v}$ gesetzt wird

$$\begin{aligned} \frac{L_w}{T \varrho v^3} &= \frac{L_{ws} + L_{wa}}{T \varrho v^3} = \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\Delta v}{v} \right)^2 \frac{1}{\mathfrak{F}_H^4} \frac{1}{\delta^3 H^3} \frac{[sh \delta H - sh \delta H (1 - \alpha)]^2}{\left(\frac{1}{\mathfrak{F}_H^2} - ch^2 \delta H \right)^2} \\ &\quad \left[\left(1 + \frac{\Delta v}{2v} \right) \frac{1}{\beta} sh 2 \delta H + \left(\frac{1 - \alpha}{1 - \alpha\beta} - \left(1 + \frac{\Delta v}{2v} \right) \frac{1}{\beta} \right) sh 2 \delta H (1 - \alpha\beta) \right]. \end{aligned} \quad (96)$$

Mit $\frac{L_n}{T \varrho v^3} = \frac{1}{2} \zeta_{sF}$, η aus Gleichung (88) und $\frac{L_w}{T \varrho v^3}$ aus Gleichung (96) erhält man aus Gleichung (93) für den Wirkungsgrad:

$$\begin{aligned} \eta_w &= \frac{1}{1 + \frac{\Delta v}{2v} + \frac{1}{\zeta_{sF}} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\Delta v}{v} \right)^2 \frac{1}{\mathfrak{F}_H^4} \frac{1}{\delta^3 H^3} \frac{[sh \delta H - sh \delta H (1 - \alpha)]^2}{\left(\frac{1}{\mathfrak{F}_H^2} - ch^2 \delta H \right)^2}} \\ &\quad \cdot \frac{1}{\left[\left(1 + \frac{\Delta v}{2v} \right) \frac{1}{\beta} sh 2 \delta H + \left(\frac{1 - \alpha}{1 - \alpha\beta} - \left(1 + \frac{\Delta v}{2v} \right) \frac{1}{\beta} \right) sh 2 \delta H (1 - \alpha\beta) \right]}. \end{aligned} \quad (97)$$

δH kann als Funktion von $\mathfrak{F}_H$ aus Bild 19 bestimmt werden. $\Delta v/v = f(\zeta_{sF}, \alpha)$ findet man aus Bild 17 und $\beta = f(\zeta_{sF}, \alpha)$ aus Bild 15. Damit kann der Wirkungsgrad für beliebige Werte $\mathfrak{F}_H < 1$, α und ζ_{sF} berechnet werden.

In Bild 22 ist der Wirkungsgrad nach Gleichung (97) für verschiedene Schubbelastungsgrade und Verhältnisse α über der auf die Propellereintauchung bezogenen Froudeschen Zahl aufgetragen. Außerdem ist in dieses Diagramm auch die auf die Wassertiefe bezogene Froudesche Zahl ähnlich wie in Bild 21 eingezeichnet. Die Beschränkung der Wassertiefe wirkt sich in zweierlei Weise auf den Wirkungsgrad aus: erstens durch die erhöhte Zuströmgeschwindigkeit zum Propeller und zweitens durch die auf flachem Wasser unter sonst gleichen Bedingungen wie auf tiefem Wasser größer werdenden Wellen. Der erstgenannte Einfluß ist bei kleinen, auf die Tiefe bezogenen Froudeschen Zahlen ($\mathfrak{F}_H < 0,5$) in Bild 22 deutlich zu erkennen, weil sich hier die Flachwasserwellen kaum von denen auf tiefem Wasser unterscheiden (vgl. Bild 21). Bei großen, auf die Tiefe bezogenen Froudeschen Zahlen überwiegt der Einfluß der Wellen. Der Wirkungsgrad für den Propeller auf flachem Wasser fällt hier gegenüber dem für Propeller auf tiefem Wasser rasch ab und wird bei $\mathfrak{F}_H = 1$ Null.

Leider ist es hier nicht möglich, den theoretisch berechneten Wirkungsgraden Versuchsergebnisse gegenüberzustellen. Gebers [1] hat zwar ein Schaufelrad auch auf flachem Wasser untersucht, aber nur mit einer Drehzahl. Aus diesen Versuchen könnte deshalb für jeden Schubbelastungsgrad in Bild 22 nur je ein Punkt ermittelt werden, nicht aber die in erster Linie interessierende Abhängigkeit des Wirkungsgrades von der Froudeschen Zahl. Aus den Versuchsergebnissen folgt auch, daß in Wirklichkeit für $\mathfrak{F}_H = 1$ der Wirkungsgrad zwar kleiner, aber nicht Null wird. Dies ist auch nicht anders zu erwarten, da für die bei gegen 1 gehenden, auf die Tiefe bezogenen Froudeschen Zahlen sehr groß werdenden Wellen die linearisierte Behandlung des Problems nicht mehr zulässig ist.

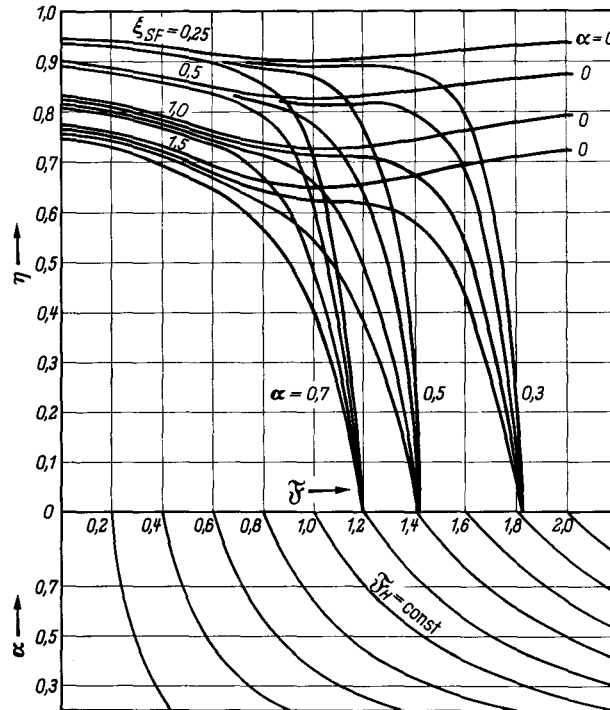


Bild 22

13. Verzeichnis der Bezeichnungen

A	Funktion	L_e	effektive Leistung
B	Breite von Schaufelrädern	L_n	Nutzleistung
a und b	konstante Koordinaten	L_v	Verlustleistung
c	Konstante	L_w	Leistung zur Wellenerzeugung
e	spezifische Schluckfähigkeit von Strecken- oder Flächensenken	N	Funktion
e_1 und e_2	Exzenterkoordinaten von Schaufelrädern	n	Propellerdrehzahl
F	Funktion	p	Druck
F' als Index	auf flaches Wasser bezogen	Δp	Druckerhöhung durch den Propeller
$\mathfrak{F}$	Froudesche Zahl	Q	Intensität einer Quelle
$\mathfrak{F}_R$ und $\mathfrak{F}_n$	dimensionslose Kennziffer, wie Froudesche Zahlen aufgebaut	q	Summe aus statischem Druck und Staudruck
f	Kraft je Raumeinheit	R_z	Zapfenkreisradius bei Schaufelrädern
g	Erdbeschleunigung	r_s und r_n	dimensionslose Kennziffern
g_1 und g_2	Komponenten einer Kraft je Raumeinheit	S	Propellerschub
H	Wassertiefe	s	transformierte Veränderliche
H als Index	auf die Wassertiefe bezogen	T	Propellereintauchung, vertikale Propellerabmessung
h	Abstand der Oberkante des Propellers von der Wasseroberfläche	t	Hilfsveränderliche
$k := g/v^2$	Hilfsgröße	t als Index	partielle Ableitung nach der Zeit
k_1 und k_2	Komponenten einer Kraft je Raumeinheit	t_s	dimensionslose Kennziffer
		u	Geschwindigkeit am wirklichen Propeller
		u_1 und u_2	Geschwindigkeitskomponenten

v	Propellergeschwindigkeit	β	Verhältnis der Propellerfläche zur Strahlfläche weit hinter dem Propeller
v'	Geschwindigkeit am Ort des Propellers		
$\bar{v}$	äquivalente Propellergeschwindigkeit	γ	Wirbelvektor
Δv	Geschwindigkeitserhöhung durch den Propeller	δ	Nullstelle der Funktion N
		η	Wirkungsgrad
w_1	komplexer Strömungspotential	ϑ	Koordinate der Oberfläche
w_1 und w_2	Geschwindigkeitskomponenten	ϑ	Wellenamplitude
$w =$		ζ_s	Schubbelastungsgrad
$\sqrt{w_1^2 + w_2^2}$	resultierende Geschwindigkeit	λ	Wellenlänge
x und y	Koordinaten	ξ und η	Koordinaten
x und y		ϱ	Dichte
als Index	partielle Ableitung nach x bzw. y	φ	Potential der Propellerströmung
z	komplexe Veränderliche	φ_1	Potential der Wellenbewegung
α	Verhältnis der Propellereintauchung zur Wassertiefe	Φ	gesamtes Potential
		ψ_1	Stromfunktion der Wellenbewegung
		ψ_F	Vorstromziffer

Schrifttum

- [1] Gebers, F.: Das Schaufelrad im Modellversuch. Mit einem Beitrag von F. Horn, Wien 1952.
- [2] Krappinger, O.: Schaufelradberechnung. Forschungshefte für Schiffstechnik 1954, Heft 6.
- [3] Volpich, H., und I. C. Bridge: Paddle Wheels, Part I: Preliminary Model Experiments, Trans. Inst. E. S. S. 1955, S. 327; Part II: Systematic Model Experiments, Trans. Inst. E. S. S. 1956, S. 468; Part IIa: Further Model Experiments und Part III: Ship Model Correlation, Trans. Inst. E. S. S. 1957, S. 505.
- [4] Basin, A. M.: Grundlagen der Theorie und Berechnung von Schiffsschaukelrädern. Leningrad und Moskau 1948.
- [5] Dickmann, H. E.: Schiffskörpersog, Wellenwiderstand eines Propellers usw. Ingenieur Archiv 1938, S. 452.
- [6] Dickmann, H. E.: Wechselwirkung zwischen Propeller und Schiff unter besonderer Berücksichtigung des Welleneinflusses. Jb. STG 1939, S. 234.
- [7] Kempf, G.: Immersion of Propellers. Trans. N. E. C. Inst. 1933, S. 225.
- [8] Yamagata: Wake Meas. by a working Propeller. Internation. Tagung der Leiter der Schleppversuchsanstalten, Berlin 1937, S. 67.
- [9] Froude, R. E.: On the Part played in Propulsion by difference of fluid pressure. TINA 1889, S. 390.
- [10] Rankine, W. J. M.: On the Mechanical Principles of the Action of Propellers. TINA 1865, S. 13.
- [11] Burgers, J. M.: On the application of Oseens hydrodynamical equations to the problem of the slipstream from an ideal propeller. Proc. Koninkl. Akad. v. Wetenschappen t. Amsterdam 1929, S. 1278.
- [12] Kotschin, N. J., I. A. Kibel und N. W. Rose: Theoretische Hydromechanik, Bd. I, Berlin 1954.
- [13] Müller, M.: Diplomarbeit am Lehrstuhl f. Entwerfen v. Schiffen des Instituts für Schiffbau. Hamburg 1959. Nicht veröffentlicht.
- [14] Dickmann, H.: Schiffsantrieb mit instationären Vortriebsorganen. Schiff und Hafen 1950, S. 252.
- [15] Kaufmann, W.: Techn. Hydro- und Aeromechanik. 2. Auflage. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1958.
- [16] Stoker, J. J.: Water Waves. New York/London 1957.
- [17] Hitzler, Th.: Versuche zur Minderung der Wühlwirkung bei Selbstfahrern mit freier Schraube. Werft-Rederei-Hafen 1938, S. 310.
- [18] Rothe, R., und W. Schmeidler: Höhere Mathematik, Teil VII, Stuttgart 1956.
- [19] Doetsch, G.: Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Basel und Stuttgart 1958.
- [20] Gröbner, W., und Hofreiter: Integraltafel, Wien/Innsbruck 1949/50.
- [21] Baule, B.: Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs. Band 1 bis 4 und Band 6, Zürich 1948.
- [22] Ryshik, I. M., und I. S. Gradstein: Summen-, Produkt- und Integraltafeln. Berlin 1957.
- [23] Wehausen, J. V.: Water Waves I. Manuskript für die Neuauflage des „Handbuchs der Physik“.
- [24] Carathéodory, C.: Funktionentheorie I und II. Basel 1950.
- [25] Behnke, H., und F. Sommer: Theorie der Analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1955.
- [26] Durant, W. F.: Aerodynamic Theory, Band II und Band IV. Berlin 1935.