

325 | März 1975

## SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

O. Grim

**Elastische Schwingungen des Schiffes,  
erregt durch nichtlineare Kräfte des  
natürlichen, unregelmäßigen  
Seegangs**

**TUHH**

*Technische Universität Hamburg-Harburg*

Elastische Schwingungen des Schiffes, erregt durch nichtlineare Kräfte des natürlichen, unregelmäßigen Seegangs

o. Grim, 1. Auflage, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1975

© Technische Universität Hamburg-Harburg

Schriftenreihe Schiffbau

Schwarzenbergstraße 95c

D-21073 Hamburg

<http://www.tuhh.de/vss>

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr. 325

Elastische Schwingungen des Schiffes, erregt durch  
nichtlineare Kräfte des natürlichen, unregelmäßigen Seegangs

O. Grim

Hamburg, März 1975

Entstanden im Sonderforschungsbereich 98 "Schiffstechnik und  
Schiffbau"

## 1. Einleitung

Elastische Schwingungen des Schiffskörpers werden nicht nur durch laufende Maschinen erregt sondern oft auch durch den Seegang. Seit langem ist bekannt, daß dies in schwerem Seegang geschieht, wenn z.B. der Boden des Vorschiffes über die Wasseroberfläche kommt und danach beim Wiedereintauchen auf die Wasseroberfläche aufschlägt. Es werden dann durch "hydrodynamische Stöße" (= Slamming) elastische Eigenschwingungen des Schiffskörpers angestoßen. Es liegen Schadensstatistiken vor, die erkennen lassen, wie folgenreich und schwerwiegend dieses Phänomen ist. Elastische Schwingungen werden aber oft auch schon erregt, wenn es nicht zum Austauchen des Vorschiffes und zu ausgeprägten hydrodynamischen Stößen kommt. Sie erscheinen dann mehr oder weniger kontinuierlich als erzwungene, unregelmäßige, relativ hochfrequente Schwingungen.

Die elastischen Schwingungen sind den relativ niederfrequenten Seegangsbewegungen des als starr gedachten Schiffskörpers überlagert. Sie tragen zur resultierenden Bewegung kaum etwas bei; ihr Beitrag zu den resultierenden Beschleunigungen und zu den resultierenden Belastungen der tragenden Verbände des Schiffskörpers kann jedoch nennenswert sein. Die Abb. 1, die [7] entnommen ist, zeigt das an einem Meßergebnis für eine Spannung: Einem niederfrequenten Anteil 1b.) ist ein hochfrequenter Anteil 1a.) überlagert und dies führt zu der resultierenden Spannung 1c.). Es liegen Meßergebnisse vor, die zeigen, daß der hochfrequente Anteil bis 30 % des niederfrequenten Anteiles erreichen kann. Außerdem wird die Zahl der Lastwechsel durch diesen hochfrequenten Anteil vervielfacht.

Eine quantitative Voraussage dieser zusätzlichen durch elastische Schwingungen verursachten Belastung ist z.Z. nicht möglich. Sie wäre von großem Nutzen für eine optimalere Dimensionierung oder auch nur für eine bessere Beurteilung der tragenden Verbände des Schiffskörpers.

Ein Spektrum für eine Belastung in unregelmäßigem Seegang ist - wenn zusätzlich zu den niederfrequenten Seegangsbewegungen elastische Schwingungen erregt werden - gekennzeichnet durch ein breites niederfrequentes Band, das etwa bei den gleichen Frequenzen liegt wie die maßgebenden Kräfte des Seegangs, und deutlich hiervon getrennt durch eine ausgeprägte Spitze in einem schmalen Frequenzband, das bei einer sehr viel höheren Frequenz liegt. Ein Beispiel zeigt die Abb. 2, die ebenfalls [7] entnommen ist und die für die gleiche Messung gilt wie die Abb. 1. Für die durch das niederfrequente Band dargestellte Belastung spielt die Elastizität des Schiffskörpers, spielen die elastischen Schwingungen keine nennenswerte Rolle. Die hochfrequente Belastung ist dagegen ausschließlich eine Folge der elastischen Schwingungen. Natürlich werden elastische Deformationen auch durch die niederfrequenten Belastungen verursacht. Sie bleiben jedoch klein. Große elastische Deformationen, d.h. Schwingungen, werden erst erzeugt, wenn Resonanzschwingungen erregt werden, wenn die Frequenz der erregenden Kraft gleich oder annähernd gleich einer Eigenfrequenz des elastischen Schiffskörpers ist. Dann genügt sogar schon eine sehr kleine periodische Kraft, da bekannt ist, daß die Dämpfung der elastischen Schwingung für den betroffenen Schwingungsgrad sehr klein ist. Die hochfrequente Spitze des Belastungsspektrums liegt daher bei der Eigenfrequenz des niedrigsten, des ersten Grades der Querschwingung des Schiffskörpers in vertikaler Richtung, und wegen der kleinen Schwingungsdämpfung wird dieses hochfrequente Band immer sehr schmal sein. Für Resonanzschwingungen höheren Grades oder <sup>in</sup>anderer Richtungen ist die Erregung sicherlich viel kleiner, vermutlich unbedeutend.

Der niederfrequente Teil eines Belastungsspektrums liegt in dem Frequenzbereich, in dem die dominierenden Anteile des Seeganges und der Seegangskräfte liegen. Die elastischen Deformationen des Schiffskörpers können bei der Bestimmung dieser niederfrequenten Belastungen außer acht bleiben. Auch kann als sicher gelten, daß in diesem Bereich für die Bewegungen und Belastungen des Schiffskörpers lineare Prozesse maßgebend sind.

Für die Beschreibung des Seeganges, die Bestimmung und Beschreibung der in linearen Prozessen erzeugten Bewegungen und Belastungen gibt es Methoden, die heute schon zur Routine geworden sind. Ein Seegangsspektrum endet nicht abrupt bei irgendeiner endlichen Frequenz. Es ist daher denkbar, daß noch bei der hohen Frequenz der Eigenschwingung ersten Grades harmonische Komponenten des Seeganges existieren, durch die auf direktem, linearem Wege periodische Kräfte auf den Schiffskörper erzeugt werden. Insbesondere bei großer Geschwindigkeit des Schiffes gegen die See und bei sehr elastischem Schiffskörper kann das erwartet werden. Die Bestimmung solcher auf linearem Wege erregten Kräfte und elastischen Schiffskörperschwingungen ist zwar nicht problemlos, sie ist jedoch relativ leicht und überschaubar. Mehrere Autoren haben sich damit beschäftigt ([1] bis [6]). Alle verfügbaren Ergebnisse und Abschätzungen deuten jedoch darauf hin, daß diese Art der Erregung sehr klein ist und nicht für die gemessenen elastischen Schwingungen verantwortlich sein kann, selbst wenn man in Betracht zieht, daß die Dämpfung klein ist und daher schon kleine Kräfte für eine merkliche Erregung genügen. Es muß daher damit gerechnet werden, daß die maßgebende Erregung durch nichtlineare Kräfte erfolgt, in denen sicherlich höherfrequente Anteile stärker vertreten sind als in den linearen Kräften.

Dafür, daß die elastischen Schwingungen bislang nicht vorausbestimmt werden können, sind 3 Aspekte verantwortlich, über die unsere Kenntnisse nicht ausreichend sind:

- a. Größe und Art der Dämpfung einer elastischen Schwingung
- b. Größe und Art der nichtlinearen Kräfte
- c. Behandlung nichtlinearer Prozesse im natürlichen Seegang

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem 3. Aspekt. Wir haben es in den letzten 20 Jahren gelernt, den natürlichen Seegang und die linear von ihm abhängigen Bewegungen, Belastungen usw. eines Schiffes in diesem Seegang zu behandeln und zu statistischen Aussagen über diese Größen zu kommen. Das ist vielfach schon zur Routine geworden. Es gibt aber keine

analogen Methoden für nichtlineare Prozesse und dem Verfasser sind aus der Literatur kaum Ansätze hierfür bekannt. Nichtlineare Prozesse spielen jedoch - wie wir wissen - in mancherlei Weise im Seegang mit, insbesondere wenn es um extreme Fälle oder gar um die Sicherheit des Schiffes geht. Eine Methode zur Behandlung nichtlinearer Prozesse im unregelmäßigen Seegang kann daher von weitreichender Bedeutung sein, und zwar nicht nur für das spezielle Problem der seegangserregten, elastischen Schwingungen. Jedoch scheint dem Verfasser das spezielle Problem für einen Beginn besonders geeignet zu sein.

Die beiden erstgenannten Aspekte werden in dieser Arbeit nicht behandelt. Es werden hierfür Annahmen eingeführt, soweit es für die Bearbeitung des dritten Aspektes notwendig ist. Beide Aspekte sind in der Literatur behandelt und über beide Aspekte gibt es einige wenige quantitative Aussagen. Es wird wohl durchaus möglich sein, in relativ kurzer Zeit hierüber weitere Unterlagen zu erarbeiten, insbesondere wenn das zur vollständigen Bearbeitung des angesprochenen Themas für notwendig gehalten werden wird.

1.) Über Größe und Art der Dämpfung wird hier nur vorausgesetzt:

Die Schwingungsform der erregten elastischen Schwingung ist identisch mit der Eigenform des ersten Grades

Die mittlere Leistung der Dämpfung ist für die der Größe nach normierte Schwingung quantitativ bekannt

Die Dämpfungskräfte wachsen linear, die mittlere Leistung wächst quadratisch mit dem Schwingungsweg eines Punktes der Schwingungsform

Die erste Voraussetzung trifft sicher zu. Die Dämpfungsleistung wurde in einer Reihe von Großversuchen experimentell bestimmt; das wird fortgesetzt werden müssen. Als dritte Voraussetzung könnte auch eine andere Gesetzmäßigkeit für die Dämpfungsleistung eingeführt werden, wenn eine solche bekannt wäre.

Viele Experimentatoren bemühen sich, Daten über die Dämpfung zu gewinnen. Die Aufnahme eines Belastungsspektrums (wie z.B. in Abb. 2) mit einer hochfrequenten Spitze stellt - wenn das genügend genau möglich ist - einen weiteren Weg zur Bestimmung einer normierten mittleren Dämpfungsleistung dar, denn für die Form - nicht für die Größe - dieser hochfrequenten Spitze sind alle mitspielenden Daten bekannt bis auf die Dämpfungsleistung.

- 2.) Über Größe und Art der nichtlinearen Kräfte wird zunächst vorausgesetzt, daß sie hydrostatischer Natur sind. Später wird auch für die nichtlinearen hydrodynamischen Kräfte eine einfache Annahme eingeführt werden. Für die Bearbeitung des obengenannten dritten unbekanntem Aspektes, die Behandlung einer nichtlinearen Schwingungserregung im natürlichen Seegang, wird das vorläufig ausreichen.

Für einen beliebigen Spant (Abb. 3) wird vorausgesetzt, daß die Relativbewegung  $s(t)$  durch nichtlineare Kraftanteile nicht wesentlich beeinflußt wird und daher aus der linearen Behandlung der Bewegungen des Schiffes im Seegang bekannt ist. Es werden, wenn die Spantkontour im Schnittpunkt mit der mittleren Wasserlinie nicht vertikal sondern schräg verläuft oder gar gekrümmt ist, nichtlineare "hydrostatische" Kraftanteile erzeugt, die bei bekannter Relativbewegung  $s(x, t)$  ebenfalls bekannt sind. Die "hydrostatische" Kraft beträgt

$$F = \rho g (B \cdot s + a \cdot s^2 + b \cdot s^3 + \dots) \quad (1)$$

Der erste Kraftanteil  $B \cdot s$  ist linear und schon in der bekannten linearen Behandlung des Systems enthalten. Hier interessieren die nichtlinearen Anteile:

der Anteil 2. Ordnung  $a \cdot s^2$   
der Anteil 3. Ordnung  $b \cdot s^3$  und  
evtl. weitere Anteile höherer Ordnungen

Später wird für die einfache Abschätzung nichtlinearer hydrodynamischer Kraftanteile vorausgesetzt werden, daß sie als Trägheitskräfte erscheinen, die ebenfalls durch die Relativbewegung und die spezielle Spantform verursacht sind. Es wird als hydrodynamische Trägheitskraft an dem Spant abgeschätzt:

$$\frac{d}{dt} (m^{\prime\prime} \dot{s}) \quad \text{mit} \quad m^{\prime\prime} \sim \int \frac{\bar{h}}{\bar{s}} (B + 2as + 3bs^2 + \dots) \quad (2)$$

wobei  $(B + 2as + 3bs^2 + \dots)$  die Breite in der momentanen Wasserlinie bedeutet. Aus (2) resultiert

$$m^{\prime\prime} \ddot{s} + \dot{s} \frac{d m^{\prime\prime}}{dt} \quad (3)$$

mit den folgenden Anteilen

$$\begin{aligned} & \int \frac{\bar{h}}{\bar{s}} B^2 \ddot{s} + \dots \text{ linear} \\ + & \int \frac{\bar{h}}{\bar{s}} Ba (s\ddot{s} + \dot{s}^2) + \dots \text{ 2. Ordnung} \\ + & \int \frac{\bar{h}}{4} (3Bb + 2a^2) (s^2\ddot{s} + 2s\dot{s}^2) + \dots \text{ 3. Ordnung} \\ & + \text{ Glieder höherer Ordnungen} \end{aligned} \quad (4)$$

Der lineare Anteil ist in einer genaueren Form ebenfalls schon in der linearen Bearbeitung enthalten. Es interessieren hier wieder nur die nichtlinearen Glieder.

Die Relativbewegung ist in bekannter Weise für jede Koordinate (Spant)  $x$  durch ein Spektrum  $s'_s(x, \omega)$  gegeben

$$s = s'(x, t) = \sum_{n=1}^N s'_{s,n} \cos(\omega_n t + \varepsilon_n) \quad (5)$$

$$s'_{s,n} = \sqrt{2 \cdot \int s'_s(x, \omega_n) \cdot \Delta W}$$

oder durch das Seegangsspektrum  $\mathcal{S}_{\xi}^s(\omega)$  und die Übertragungsfunktion  $Y_{\xi, \zeta}(x, \omega)$  für die Relativbewegung

$$s_{A, \eta} = \sqrt{2 \cdot \mathcal{S}_{\xi}^s(\omega) \cdot [Y_{\xi, \zeta}(x, \omega_n)]^2}$$

### 3.) Erregung durch Kraftanteile 2. Ordnung

In diesem Abschnitt wird nur die Erregung durch die Kraftanteile 2. Ordnung behandelt und beschrieben wird diese Behandlung der einfacheren Beschreibung wegen nur für die "hydrostatischen" Kraftanteile

$$\int \int a_{\zeta^2} = \int \int \sigma \cdot \tan(\beta(x)) \cdot s^2(x, t) \quad (6)$$

Zunächst wird auch noch nicht die Schwingungserregung sondern nur die nichtlineare Größe  $s^2(x, t)$  diskutiert, wobei das für eine Stelle  $x$  genügt und daher der Parameter  $x$  nicht mitgeschrieben zu werden braucht.

Man könnte wie folgt vorgehen: Für einen gegebenen Verlauf von  $s(t)$  über einen langen Zeitraum von z.B. 30 Minuten wird in kleinen Zeitintervallen Punkt für Punkt  $s^2(t)$  gebildet (Abb. 4) und aus dem so erhaltenen Verlauf von  $s^2(t)$  die harmonische Komponente von  $s^2(t)$  mit einer gewünschten Kreisfrequenz, z.B. der Kreisfrequenz der Eigenschwingung  $\omega_{E_1}$  des Schiffskörpers in bekannter Weise bestimmt. Dieser Prozeß wird wiederholt für benachbarte Kreisfrequenzen, und er wird wiederholt für sehr viele andere Verläufe von  $s(t)$ , die aus dem gleichen Spektrum  $\mathcal{S}_{\xi}^s(\omega)$  aber mit anderen zufälligen Phasenverschiebungen  $\varepsilon$  gewonnen sind. So könnte man vermutlich für das schmale interessierende Frequenzband um  $\omega_{E_1}$  zu einem Spektrum  $\mathcal{S}_{\zeta^2}^s(\omega)$  für die nichtlineare Größe  $s^2(t)$  kommen.

Es stellt sich die Frage, ob dieses Ziel - ein Spektrum für  $s^2(t)$  - nicht direkter und einfacher erreicht werden kann. Diese Frage wird nun zu beantworten versucht.

Die Rechenregel

$$s^2(t) = \left[ \sum_{n=1}^N s_{A,n} \cos(\omega_n t + \varepsilon_n) \right]^2 \quad (7)$$

verlangt, daß jedes Glied der Reihe mit sich selbst und mit jedem anderen Glied multipliziert wird. Es gibt daher quadratische und gemischte Glieder

$$s^2(t) = \sum_{n=1}^N s_{A,n}^2 \cos^2(\omega_n t + \varepsilon_n) + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N s_{A,n} s_{A,m} \cos(\omega_n t + \varepsilon_n) \cdot \cos(\omega_m t + \varepsilon_m) \quad (8)$$

wobei in der Doppelreihe die Glieder  $n=m$  nicht enthalten sein dürfen. In der Doppelreihe ist jedes Glied  $n,m$  zweimal vertreten. Sie kann daher einfacher gebildet werden

$$2 \sum_{n=1}^N \sum_{m=(n+1)}^N s_{A,n} s_{A,m} \cos(\omega_n t + \varepsilon_n) \cdot \cos(\omega_m t + \varepsilon_m) \quad (9)$$

Die Quadrate und Produkte der Kreisfunktionen werden nun umgewandelt:

$$s^2(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N s_{A,n}^2 \left[ 1 + \cos(2\omega_n t + 2\varepsilon_n) \right] + \sum_{n=1}^N \sum_{m=n+1}^N s_{A,n} s_{A,m} \left\{ \cos[(\omega_n + \omega_m)t + \varepsilon_n + \varepsilon_m] + \cos[(\omega_m - \omega_n)t + \varepsilon_m - \varepsilon_n] \right\} \quad (10)$$

Die ersten Glieder der ersten Zeile liefern den von der Zeit unabhängigen Mittelwert von  $s^2$

$$s^2(t)_{\text{Mittel}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N s_{A,n}^2 \quad (11)$$

und nach der Darstellung der Amplituden  $s_{A,n}$  durch das Spektrum  $s_s(\omega)$  sowie nach dem Grenzübergang  $\Delta\omega \rightarrow 0 \leadsto N \rightarrow \infty$

$$s^2(t)_{\text{Mittel}} = \int_0^{\infty} s_s(\omega) d\omega \quad (12)$$

Das ist natürlich kein unerwartetes oder gar neues Ergebnis. Es entspricht vielmehr der Definition des Spektrums, wonach der Mittelwert der quadratischen Größe  $s^2(t)$  gleich der Varianz des Spektrums der linearen Größe ist.

Aus den zweiten Gliedern der ersten Zeile von (10) resultiert für jede Kreisfrequenz  $2\omega_n$  nur jeweils ein Glied. Beim Grenzübergang  $\Delta\omega \rightarrow 0$  und  $N \rightarrow \infty$  gibt das unendlich viele, aber unendlich kleine Glieder, es gibt ein über alle Frequenzen laufendes Spektrum mit unendlich kleinen Ordinaten. Diese Glieder liefern daher keinen endlichen Beitrag.

Es bleiben die gemischten Glieder - die Doppelreihe in (10) -, die interessanter sind für unser Thema.

Diese Doppelreihe kann noch anders geordnet werden, und zwar nach resultierenden Kreisfrequenzen  $\omega_{res}$ . Es gibt 2 Bildungsgesetze für die resultierende Kreisfrequenz

$$\begin{aligned} \omega_{res} &= \omega_n + \omega_m & \text{und} \\ \omega_{res} &= \omega_m - \omega_n \end{aligned} \quad (13)$$

Es kann daher die Doppelreihe wie folgt geschrieben werden :

$$\begin{aligned} & \sum_r \sum_n s_{A,n} \cdot s_{A,r-n} \cos(\omega_r t + \varepsilon_n + \varepsilon_{r-n}) + \\ & + \sum_r \sum_n s_{A,n} \cdot s_{A,r+n} \cos(\omega_r t + \varepsilon_{r+n} - \varepsilon_n) \end{aligned} \quad (14)$$

wobei z.B. der Index r-n bedeutet, daß die indizierte Größe für die Kreisfrequenz  $\omega_{res} - \omega_n$  gilt und wobei die Grenzen für die Reihen nicht vermerkt sind.

Eine harmonische Komponente von  $s^2(t)$  mit einer vorgegebenen Kreisfrequenz resultiert also zu

$$A \sum s_{A,n} \cdot s_{A,r-n} \cdot \cos(\omega_r t + \varepsilon_n + \varepsilon_{r-n}) + A \sum s_{A,n} \cdot s_{A,r+n} \cdot \cos(\omega_r t + \varepsilon_{r+n} - \varepsilon_n) \quad (15)$$

Wenn die Phasenverschiebungen  $\varepsilon$  der linearen Größe zufällig verteilt sind, sind es auch die Summen der Phasenverschiebungen, die in (15) erscheinen. Für den gesamten Wert von  $s^2(t)$  bedarf dies einer sorgfältigen Prüfung. Aus (15) ergibt sich für zufällig verteilte Phasenverschiebungen der mittlere Wert der Amplitude der harmonischen Komponente  $r$  als geometrische Summe der Amplituden in (15)

$$s_{r, res}^2 = \sqrt{n \sum s_{A,n}^2 \cdot s_{A,r-n}^2 + n \sum s_{A,n}^2 \cdot s_{A,r+n}^2} \quad (16)$$

Wenn die Amplituden der harmonischen Komponenten von  $s^2(t)$  durch ein Spektrum  $s_{s^2}(\omega)$  für die quadratische Größe dargestellt werden, muß das für  $\omega_{res}$  geschehen durch

$$s_{r, res}^2 = \sqrt{2 \cdot \int_{s^2}(\omega_{res}) \cdot \Delta\omega} \quad (17)$$

Die Darstellung der Amplituden der linearen Größen ist bekannt (siehe (3)). Es kann anstelle von (16) geschrieben werden

$$\sqrt{2 \int_{s^2}(\omega_{res}) \Delta\omega} = \sqrt{n \sum (2 \int_{s^2}(\omega_n) \Delta\omega) \cdot (2 \int_{s^2}(\omega_r - \omega_n) \Delta\omega) + n \sum (2 \int_{s^2}(\omega_n) \Delta\omega) \cdot (2 \int_{s^2}(\omega_r + \omega_n) \Delta\omega)} \quad (18)$$

oder nach dem Grenzübergang

$$\int_{s^2}(\omega_{res}) = 2 \int_0^{\frac{\omega_{res}}{2}} \int_{s^2}(\omega) \cdot \int_{s^2}(\omega_{res} - \omega) d\omega + 2 \int_0^{\infty} \int_{s^2}(\omega) \cdot \int_{s^2}(\omega_{res} + \omega) d\omega \quad (19)$$

wobei nun die Grenzen für die Integrale leicht erkennbar sind, nämlich aus der oben eingeführten Bedingung, daß die 2. Kreisfrequenz  $\omega_{res} + \omega$  größer sein muß als die erste Kreisfrequenz  $\omega$ .

Die Formel (19) erlaubt die Berechnung eines vollständigen Spektrums für  $s^2(t)$ . Allerdings ist durch dieses Spektrum - und zusammen mit dem Mittelwert nach (12) - nicht sichergestellt, daß ein Momentanwert von  $s^2(t)$  immer positiv sein muß. Das liegt vermutlich daran, daß zwischen Phasenverschiebungen von harmonischen Komponenten Verknüpfungen bestehen, die nicht berücksichtigt sind. Wenn jedoch, wie für das angesprochene Thema, nur ein schmales Frequenzband um die hohe Frequenz  $\omega_{N_0} = \omega_{Ei}$  benötigt wird, dürfte diesem Umstand keine Bedeutung zukommen.

Die Abb. 5 zeigt das Ergebnis einer Berechnung des Spektrums 2. Ordnung, wobei - um kennzeichnende Merkmale besser erkennen zu können - für die lineare Größe ein schmales Spektrum mit konstanter Ordinate gewählt ist. Man erkennt:

Der zeitunabhängige Mittelwert von  $s^2(t)$  ist durch einen Doppelstrich bei  $\omega = 0$  eingetragen.

Ein anschließender dreieckförmiger Flächenteil beschreibt den sehr niederfrequenten Anteil von  $s^2(t)$ . Er resultiert aus dem 2. Integral in (19).

Ein zweiter dreieckförmiger Flächenteil liegt in einem Band, das die doppelten Frequenzen des linearen Spektrums umfaßt. Durch diesen Flächenteil werden die hochfrequenten Anteile von  $s^2(t)$  beschrieben. Er resultiert aus dem ersten Integral in (19).

Die Abbildung enthält im Vorgriff auf Späteres auch das analog erhaltene Spektrum  $s_{s^3}(\omega)$  für die Größe  $s^3(t)$  3. Ordnung.

Die dargestellten Ergebnisse erscheinen als plausibel. Eine Nachprüfung hinsichtlich einer Verknüpfung von Phasenverschiebungen bleibt abzuwarten. Für die hier behandelte Aufgabe - die Bestimmung der seegangserregten elastischen Schiffsschwingungen - interessiert jedoch nur ein sehr schmales Band um

$\omega = \omega_{Ei}$ , praktisch sogar nur die Spektraldichten

$$s_{s^1}(\omega_{Ei}), s_{s^2}(\omega_{Ei}), s_{s^3}(\omega_{Ei}) \quad u.s.w.$$

Damit ist die Frage nach  $s^2(t)$  bzw. dem Spektrum 2. Ordnung in einem für die gestellte Aufgabe ausreichenden Ausmaße beantwortet. Gefragt ist jedoch vor allem nach der Erregung elastischer Schiffsschwingungen. Hierfür werden die Werte  $s^2(t)$  an allen Stellen  $x$  des Schiffskörpers und außerdem eine zeitliche Zuordnung dieser Werte gebraucht. Dies ergibt sich jedoch einfach daraus, daß die  $s^2(t)$  für alle  $x$  durch den gleichen Seegang erregt werden. Schon in (4) ist die Übertragungsfunktion für die Relativbewegung eingeführt. Der resultierende Vektor dieser Übertragungsfunktion muß nun jedoch, zerlegt in Real- und Imaginärteil, eingeführt werden:

$$Y_{s^2} (x, \omega) = Y_{re} (x, \omega) + i \cdot Y_{im} (x, \omega) \quad (20)$$

Die Relativbewegung kann daher auch wie folgt geschrieben werden

$$s^2(x, t) = \sum_{n=1}^N \int_{A_n} \left[ Y_{re}(x, \omega_n) \cos(\omega_n t + \varepsilon_n) - Y_{im}(x, \omega_n) \sin(\omega_n t + \varepsilon_n) \right] \quad (21)$$

Beide Teile der Übertragungsfunktion können auf bekanntem Wege aus der Behandlung des linearen Systems bestimmt werden und daher als bekannt gelten.

Die Kraft 2. Ordnung auf den Schiffskörper beträgt daher an der Stelle  $x$  pro Längeneinheit

$$f(x, t) = \int_{\sigma} \tan(\beta(x)) \cdot s^2(x, t) = \int_{\sigma} \tan(\beta(x)) \left\{ \sum_{n=1}^N \int_{A_n} \left[ Y_{re}(x, \omega_n) \cos(\omega_n t + \varepsilon_n) - Y_{im}(x, \omega_n) \sin(\omega_n t + \varepsilon_n) \right] \right\}^2 \quad (22)$$

Um die durch diese Kraftanteile erregte elastische Schiffsschwingung zu berechnen, wird eine Energiemethode angewandt. Dies erscheint als ausreichend genau.

Es wird nun das elastische System betrachtet, und zwar wird zugrunde gelegt:

daß die erregte Schwingung proportional der normierten Eigenform  $Eig(x)$  ist, also

$$K \cdot Eig(x) \quad (23)$$

daß hierbei durch die Dämpfung die folgende mittlere Leistung verbraucht wird

$$K^2 D \quad (24)$$

und daß, um die Schwingung aufrechtzuerhalten, im Resonanzfall  $\omega = \omega_{Ei}$  im Mittel durch die erregenden Kräfte die gleiche Leistung zugeführt werden muß.

Die zugeführte Leistung beträgt im Resonanzfall

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} dt \int_{\text{Schiffslänge } L} f(x, t) \cdot K \cdot \omega_{Ei} \cdot Eig(x) \cdot \sin(\omega_{Ei} t + \varepsilon_{Ei}) dx \quad (25)$$

Für den Resonanzfall wird die Kraft für  $\omega = \omega_{Ei}$  gebraucht, und es wird sich eine Phasenverschiebung einstellen von "im Mittel" Null Grad zwischen Kraft und Schwingungsgeschwindigkeit. Im Resonanzfall wird daher aus (25)

$$\frac{K}{2} \omega_{Ei} \int_L f_A(x) \cdot Eig(x) dx \quad (26)$$

Allerdings ist die Amplitude der erregenden Kraft  $f_A(x)_{\omega_{Ei}}$  nicht eindeutig definiert. Die Phasen der erregenden Kraft werden an verschiedenen Stellen  $x$  verschieden sein.

Es wird nun auf analogem Wege wie von (7) bis (10) die harmonische Komponente der Kraft (22) mit der Kreisfrequenz  $\omega_{Ei}$  bestimmt. Sie beträgt

$$\begin{aligned}
 & \rho \cdot y \cdot \tan(\beta(x)) \cdot \left\{ \begin{aligned} & \sum_{A,n} \left\{ \sum_{A,1} \left[ \begin{aligned} & \left[ Y_{re}(x, \omega_n) \cdot Y_{re}(x, \omega_1) - Y_{in}(x, \omega_n) \cdot Y_{im}(x, \omega_1) \right] \cos(\omega_{Ei} t + \varepsilon_{n,1}) + \right. \\ & \left. + \left[ Y_{re}(x, \omega_n) \cdot Y_{im}(x, \omega_1) + Y_{in}(x, \omega_n) \cdot Y_{re}(x, \omega_1) \right] \cdot \sin(\omega_{Ei} t + \varepsilon_{n,1}) \right] \right\} + \\ & \sum_{A,n} \left\{ \sum_{A,2} \left[ \begin{aligned} & \left[ Y_{re}(x, \omega_n) \cdot Y_{re}(x, \omega_2) + Y_{in}(x, \omega_n) \cdot Y_{in}(x, \omega_2) \right] \cos(\omega_{Ei} t + \varepsilon_{n,2}) + \right. \\ & \left. + \left[ Y_{in}(x, \omega_n) \cdot Y_{re}(x, \omega_2) - Y_{re}(x, \omega_n) \cdot Y_{im}(x, \omega_2) \right] \cdot \sin(\omega_{Ei} t + \varepsilon_{n,2}) \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (27)
 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

wobei  $\omega_1$  für  $\omega_{Ei} - \omega_n$  und  $\omega_2$  für  $\omega_{Ei} + \omega_n$  steht.

Im Hinblick auf (26) wird jede Amplitude von (27) mit der Eigenform  $Eig(x)$  multipliziert und dann über die Schiffslänge integriert. Wenn in diese Integration nur die von  $x$  abhängigen Faktoren einbezogen werden, werden die folgenden 4 Integrale erhalten

$$\begin{aligned}
 E1(\omega) &= \int_L \tan(\beta(x)) \cdot Eig(x) \cdot \left[ Y_{re}(x, \omega) \cdot Y_{re}(x, \omega_1) - Y_{im}(x, \omega) \cdot Y_{in}(x, \omega_1) \right] dx, \\
 E2(\omega) &= \int_L \tan(\beta(x)) \cdot Eig(x) \cdot \left[ Y_{re}(x, \omega) \cdot Y_{im}(x, \omega_1) + Y_{im}(x, \omega) \cdot Y_{re}(x, \omega_1) \right] dx, \\
 E3(\omega) &= \int_L \tan(\beta(x)) \cdot Eig(x) \cdot \left[ Y_{re}(x, \omega_2) \cdot Y_{re}(x, \omega) + Y_{in}(x, \omega) \cdot Y_{in}(x, \omega_2) \right] dx, \\
 E4(\omega) &= \int_L \tan(\beta(x)) \cdot Eig(x) \cdot \left[ Y_{in}(x, \omega) \cdot Y_{re}(x, \omega_2) - Y_{re}(x, \omega) \cdot Y_{im}(x, \omega_2) \right] dx, \quad (28)
 \end{aligned}$$

Als mittlere zugeführte Leistung gilt bei zufällig verteilten Phasenverschiebungen die geometrische Summe aller Leistungsamplituden

$$\frac{K}{2} \omega_{Ei} \rho y \sqrt{\sum \xi_A^2(\omega) \xi_A^2(\omega) [E1^2(\omega) + E_2^2(\omega)] + \sum \xi_A^2(\omega) \xi_A^2(\omega) [E3^2(\omega) + E4^2(\omega)]} \quad (29)$$

Diese zugeführte Leistung wird der abgeführten Leistung (24) gleichgesetzt, und daraus resultiert die folgende erzwungene Resonanzschwingung

$$K \cdot E_{iy}(x) = \frac{\rho y \omega_{Ei}}{2 D} E_{iy}(x) \cdot \sqrt{\text{wie in (29)}} \quad (30)$$

Tatsächlich treten die erregten Schwingungen in einem schmalen Frequenzband um  $\omega = \omega_{Ei}$  auf. Als Ziel sollte daher ein Spektrum in dem schmalen Frequenzband für diese Schwingungen erhalten werden.

Wenn der Schiffskörper als elastischer gerader Balken angesehen wird, lautet die Gleichung für eine elastische Querschwingung mit dem Schwingungsweg  $y(x, t)$

$$E \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( y \frac{\partial y}{\partial x} \right) + N \frac{\partial y}{\partial t} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = f_A(x) \cdot e^{i \omega t} \quad (31)$$

wobei links für die unbekannte, aber notwendige Dämpfung ein einfacher Ansatz gewählt ist und rechts eine über die Länge verteilte harmonische Kraft steht. Selbstverständlich soll in der Masse  $m$  die hydrodynamische Masse mit enthalten sein.

In diese Schwingungsgleichung wird, entsprechend einer oben getroffenen Vereinbarung, eingesetzt

$$y(x, t) = K \cdot E_{iy}(x) \cdot e^{i(\omega t + \varepsilon)} \quad (32)$$

Damit wird aus (31)

$$K \cdot \left[ i\omega N + m (\omega_{Ei}^2 - \omega^2) \right] \cdot E_{iy}(x) e^{i\xi} = f_{\theta}(x) \quad (33)$$

Diese Gleichung - N und m sind Funktionen von (x) - kann nicht für jedes x erfüllt sein, das liegt an der eingeführten vereinfachenden Annahme über die Schwingungsform. Um aber bei der Vereinfachung bleiben zu können, werden die beiden Seiten über die Schiffslänge integriert und dann die Integrale gleichgesetzt, wobei es sinnvoll erscheint, beide Seiten vor der Integration noch zu gewichten durch Multiplikation mit Eig(x), d.h.

$$K \cdot \left\{ i\omega \int_L N [E_{iy}(x)]^2 dx + (\omega_{Ei}^2 - \omega^2) \int_L m [E_{iy}(x)]^2 dx \right\} e^{i\xi} = \int_L f_{\theta}(x) E_{iy}(x) dx \quad (34)$$

Die beiden Integralwerte auf der linken Seite sind in der Phase um  $90^\circ$  gegeneinander verschoben, als resultierende Amplitude resultiert daher die geometrische Summe der beiden Glieder. Ferner ist das erste Integral proportional der oben eingeführten mittleren Dämpfungsleistung D, und zwar

$$\omega \int_L N [E_{iy}(x)]^2 dx = \frac{2D}{\omega} \quad (35)$$

Die erzwungene Schwingung beträgt daher für beliebige  $\omega$  in der nächsten Umgebung von  $\omega_{Ei}$ :

$$K \cdot E_{iy}(x) = \frac{E_{iy}(x) \cdot \int_L f_{\theta}(x) \cdot E_{iy}(x) dx}{\left[ \left( \frac{2D}{\omega} \right)^2 + (\omega_{Ei}^2 - \omega^2)^2 \cdot \left( \int_L m [E_{iy}(x)]^2 dx \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (36)$$

und dieser Ausdruck stimmt für  $\omega = \omega_{Ei}$  mit (30) überein, da für  $\omega = \omega_{Ei}$  gelten muß

$$\int_L f_0(x) \bar{E}_{iy}(x) dx = \rho g \sqrt{w_{ic}} \quad (29) \quad (37)$$

Im übrigen wird (37) auch für  $\omega \neq \omega_{Ei}$  beibehalten werden können, ohne daß ein nennenswerter Fehler verursacht wird.

Um eine Spektraldarstellung zu erhalten, wird die erregte Schwingung durch ein Spektrum dargestellt

$$K. \bar{E}_{iy}(x) = \sum_n \sqrt{2 \int_{SK} (x, \omega_n) \Delta \omega} \cdot \cos(\omega t + \varepsilon) \quad (38)$$

und die Seegangsamplituden in (29) werden durch das Spektrum des Seeganges dargestellt. Das liefert das Spektrum der erregten Schwingung:

$$\begin{aligned} S'_{SK}(x, \omega) &= \frac{2 \cdot \left[ \int_L \bar{E}_{iy}(x) \right]^2}{\left( \frac{2D}{\omega} \right)^2 + (\omega_{Ei}^2 - \omega^2)^2 \cdot \left( \int_m \left[ \bar{E}_{iy}(x) \right]^2 dx \right)^2} \cdot \\ &\cdot \left\{ \int_0^{\frac{\omega_{Ei}}{2}} S_f(\omega) \cdot S_f(\omega_{Ei} - \omega) \cdot [E_1^2(\omega) + E_2^2(\omega)] d\omega + \right. \\ &\left. + \int_0^{\infty} S_f(\omega) \cdot S_f(\omega_{Ei} + \omega) \cdot [E_3^2(\omega) + E_4^2(\omega)] d\omega \right\} \quad (39) \end{aligned}$$

Damit ist das Ziel erreicht, selbstverständlich ist es nun leicht, weitere interessierende Größen wie z.B. die durch die Schwingungen erzeugte Biegebelastung des Schiffskörpers zu bestimmen.

In allen Formeln sind nur die "hydrostatischen" Kräfte (1) 2. Ordnung berücksichtigt. Es ist leicht, zusätzlich die nach (4) abgeschätzten "hydrodynamischen" Kräfte 2. Ordnung zu berücksichtigen. Es ist hierzu nur erforderlich, in den 4 Integralen (28) die Integranden mit dem Faktor

$$1 - \frac{\bar{\pi}}{4} \frac{B(x)}{\int} W_{Ei}^2 \quad (40)$$

zu multiplizieren.

#### 4.) Erregung durch Kraftanteile 3. Ordnung

Die Erregung zweiter Ordnung wird, ein Ausfall (= Neigung) der Spantkonturen im Vor- und Hinterschiff vorausgesetzt, immer stärker sein als die lineare Erregung, da der Energieinhalt linear wirkender Komponenten des Seeganges immer sehr klein sein wird.

Es kann erwartet werden, daß auch noch höhere Ordnungen eine Rolle spielen. Allerdings hängt das nicht nur von der Energieverteilung im Seegang ab sondern ebenso von den Spantformen. Wenn die Spantkonturen z.B. nicht gekrümmt sind, gibt es auch keine Erregung 3. Ordnung. Selbst wenn sie gekrümmt sind, wirkt gegen eine starke Erregung 3. Ordnung, daß die Krümmung der Spantkonturen an verschiedenen Stellen des Schiffskörpers oft verschiedene Vorzeichen hat, d.h. es wird oft konkav und konvex gekrümmte Konturen geben.

Eine besondere Ergänzung wird notwendig sein für extreme Fälle, in denen der Schiffsboden austaucht oder das Deck überspült wird. Das soll jedoch einer späteren Bearbeitung vorbehalten bleiben.

Die Methode zur Bestimmung der Erregung 3. Ordnung ist analog der oben beschriebenen Methode für die 2. Ordnung, allerdings im Arbeitsaufwand ein Mehrfaches.

Es wird zunächst wieder nur die nichtlineare "hydrostatische" Kraft in Rechnung gestellt (s. Abb. 3)

$$\int y. b(x). s^3(x,t) \quad (41)$$

Zunächst wird nur die 3. Potenz der linearen Größe  $s(t)$  diskutiert (wobei der Parameter  $x$  außer acht gelassen werden kann).

$s(t)$  ist durch (5) gegeben. Für  $s^3(t)$  gibt es dreierlei Glieder

$$\begin{aligned} s^3(t) = & \sum_1^N s_{\rho,n}^3 \cdot \cos^3(\omega_n t + \varepsilon_n) + \\ & + 3 \cdot \sum_1^N \sum_1^N s_{\rho,n}^2 \cdot \cos^2(\omega_n t + \varepsilon_n) \cdot s_{\rho,m} \cdot \cos(\omega_m t + \varepsilon_m) + \\ & + \sum_1^N \sum_1^N \sum_1^N s_{\rho,h} \cdot s_{\rho,m} \cdot s_{\rho,k} \cdot \cos(\omega_h t + \varepsilon_h) \cdot \cos(\omega_m t + \varepsilon_m) \cdot \cos(\omega_k t + \varepsilon_k) \end{aligned} \quad (42)$$

eine einfache Reihe, eine Doppelreihe und eine Dreifachreihe. Um alle Glieder zu erfassen, muß vor der Doppelreihe der Faktor 3 stehen, und vor die Dreifachreihe kann der Faktor 6 gestellt werden, wenn in dieser Dreifachreihe vereinbart wird, daß die Indizes  $m$  und  $k$  nicht mit Eins beginnen sondern so, daß jede Kombination  $n, m, k$  nur einmal erscheint, d.h.

$$n > h \quad \text{und} \quad k > m \quad (43)$$

Die einfache Reihe liefert nach dem Grenzübergang  $\Delta u \rightarrow 0$  und  $N \rightarrow \infty$  nur unendlich kleine Amplituden und Energieinhalte für jede Frequenz; sie liefert daher keinen Beitrag.

Die Doppelreihe liefert einen Beitrag, der sofort zu erkennen ist.

$$\cos^2(\omega_n t + \varepsilon_n) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos(2\omega_n t + 2\varepsilon_n) \right] \quad (44)$$

Das erste Glied dieser Umformung liefert in der Doppelreihe den Beitrag

$$\frac{3}{\lambda} \sum_1^N s_{A,n}^2 \sum_1^N s_{A,m} \cos(\omega_m t + \varepsilon_m) \quad (45)$$

und mit (11) oder (12)

$$3 \cdot s^2(t)_{n.Hel} \sum_1^N s_{A,m} \cos(\omega_m t + \varepsilon_m) \quad (46)$$

oder, wenn für den gesuchten Wert eine Spektraldarstellung

$$s^3(t) = \sum_1^{NN} s_{A,n}^3 \cos(\omega_n t + \varepsilon_n) \quad (47)$$

$$(s^3)_{A,n} = \sqrt{\lambda \cdot \int_{S^3} (u_n) \cdot \Delta \omega}$$

erwartet wird, den folgenden <sup>ersten</sup> Beitrag zu dem Spektrum 3. Ordnung

$$\begin{aligned} \int_{1,3}^3 (u) &= \mathcal{P} \left[ s^2(t)_{n.Hel} \right]^2 \cdot \int_S (u) = \\ &= \mathcal{P} \left[ \int_0^\infty \int_S^3 (u) d\omega \right]^2 \cdot \int_S (u) \end{aligned} \quad (48)$$

Das zweite Glied in (47) liefert, in die Doppelreihe (42) eingeführt, keinen Beitrag zu dem Spektrum dritter Ordnung.

Es bleibt die Dreifachreihe in (42) zu diskutieren

$$6 \sum_1^N \sum_{n+1}^N \sum_{n+1}^N s_{A,n} \cdot s_{A,n} \cdot s_{A,k} \cdot \cos(\omega_n t + \varepsilon_n) \cdot \cos(\omega_n t + \varepsilon_n) \cdot \cos(\omega_k t + \varepsilon_k) \quad (49)$$

Das Produkt der 3 Kreisfunktionen wird umgewandelt

$$\cos(\omega_n t + \varepsilon_n) \cdot \cos(\omega_m t + \varepsilon_m) \cdot \cos(\omega_k t + \varepsilon_k) = \frac{1}{4} \cdot \left. \begin{aligned} & \cos \left[ (\omega_n + \omega_m + \omega_k) \cdot t + \varepsilon_n + \varepsilon_m + \varepsilon_k \right] + \\ & + \cos \left[ (\omega_n + \omega_m - \omega_k) \cdot t + \varepsilon_n + \varepsilon_m - \varepsilon_k \right] + \\ & + \cos \left[ (\omega_n - \omega_m + \omega_k) \cdot t + \varepsilon_n - \varepsilon_m + \varepsilon_k \right] + \\ & + \cos \left[ (\omega_n - \omega_m - \omega_k) \cdot t + \varepsilon_n - \varepsilon_m - \varepsilon_k \right] \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

und dann die Dreifachreihe nach resultierenden Kreisfrequenzen geordnet.

Es resultieren 4, wenn das Vorzeichen beachtet wird 5, Bildungsgesetze für die resultierende Kreisfrequenz

$$\begin{aligned} \text{a.) } \omega_{res} &= \omega_n + \omega_m + \omega_k & \text{mit } 0 < \omega_n < \frac{\omega_{res}}{3} \\ & & \omega_n < \omega_m < \frac{\omega_{res} - \omega_n}{3} \\ \\ \text{b.) } \omega_{res} &= \omega_n + \omega_m - \omega_k & \text{mit } \omega_{res} < \omega_n < \infty \\ & & \omega_n < \omega_m < \infty \\ \\ \text{c.) } \omega_{res} &= -\omega_n - \omega_m + \omega_k & \text{mit } 0 < \omega_n < \infty \\ & & \omega_n < \omega_m < \infty \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned}
 \text{d.) } \quad \omega_{R_3} &= \omega_n - \omega_m + \omega_k & \text{mit } & 0 < \omega_n < \omega_{R_3} \\
 & & & \omega_n < \omega_m < \infty
 \end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e.) } \quad \omega_{R_3} &= -\omega_h + \omega_m + \omega_k & \text{mit } & 0 < \omega_h < \omega_{R_3} \\
 & & & \omega_h < \omega_m < \frac{\omega_{R_3} + \omega_h}{3}
 \end{aligned}$$

Die Vorzeichen der Bildungsgesetze sowie die angegebenen Grenzen für  $\omega_h$  und  $\omega_m$  resultieren aus der getroffenen Vereinbarung (43).

Aus dem ersten Bildungsgesetz (51a.) wird für eine hohe resultierende Kreisfrequenz  $\omega_{R_3}$  der größte Beitrag resultieren. Die Diskussion wird daher nur für dieses Bildungsgesetz weitergeführt. Aus (49) folgt für eine Kreisfrequenz  $\omega_{R_3}$  aus diesem Bildungsgesetz

$$\frac{3}{2} \sum_{h=1}^3 \sum_{m=h+1}^3 s_{R,h} \cdot s_{R,m} \cdot s_{R,r-n-m} \cdot \cos(\omega_{R_3} \cdot t + \varepsilon_h + \varepsilon_m + \varepsilon_{r-n-m})$$

(52)

Die resultierende Amplitude dieser harmonischen Komponente ist nach dem Grenzübergang  $\omega \rightarrow 0$  und für zufällig verteilte Phasenverschiebungen im Mittel gleich der geometrischen Summe der Amplituden aller Glieder, d.h.

$$\frac{3}{2} \left\{ \sum \sum (s_{R,h} \cdot s_{R,m} \cdot s_{R,r-n-m})^2 \right\}^{1/2} \tag{53}$$

Zu der Spektraldichte  $S_{S,3}(\omega_{R_3})$  des Spektrums 3. Ordnung liefert dieses Bildungsgesetz daher den Beitrag

$$\omega_n = \frac{\omega_r}{3} \quad \omega_m = \frac{\omega_r - \omega_n}{3}$$

$$\int_{2,3} \int_{3,3} (\omega_r) = \int_{\omega_n=0}^{\omega_r} \int_{\omega_m=\omega_n}^{\omega_r - \omega_n} \int_{\omega_n}^{\omega_r} (\omega_n) d\omega_n \int_{\omega_m}^{\omega_r} (\omega_m) \cdot \int_{\omega_n}^{\omega_r - \omega_n - \omega_m} (\omega_r - \omega_n - \omega_m) d\omega_m \quad (54)$$

Weitere, bei hohen resultierenden Kreisfrequenzen viel kleinere Beiträge liefern die weiteren in (51) aufgeführten Bildungsgesetze, z.B. (51e.)

$$\omega_n = \omega_r \quad \omega_m = \frac{\omega_r + \omega_n}{3}$$

$$\int_{3,3} \int_{3,3} (\omega_r) = \int_{\omega_n=0}^{\omega_r} \int_{\omega_m=\omega_n}^{\omega_r + \omega_n} \int_{\omega_n}^{\omega_r} (\omega_n) d\omega_n \int_{\omega_m}^{\omega_r} (\omega_m) \cdot \int_{\omega_n}^{\omega_r + \omega_n - \omega_m} (\omega_r + \omega_n - \omega_m) d\omega_m \quad (55)$$

Die Spektraldichten (48), (54), (55) und eventuell noch die aus den restlichen Bildungsgesetzen resultierenden sind arithmetisch zu addieren, wobei allerdings der Vorbehalt notwendig ist, daß keine Verknüpfungen von Phasenverschiebungen vorliegen dürfen.

Damit ist die Diskussion für die Größe  $s^3(t)$  beendet, und es beginnt die Diskussion der Schwingungserregung durch die nichtlinearen Kräfte 3. Ordnung (41).

Zuerst wird der dem ersten Beitrag zu  $s^3(t)$ , d.h. zu (45) analoge Kraftanteil diskutiert. Die entsprechende Kraft pro Längeneinheit auf den Schiffskörper beträgt

$$\frac{3}{2} \rho g b(x) \sum_{n=1}^N \left[ \int_{A_1}^N (x, \omega_n) \right]^2 \cdot \sum_{m=1}^N \int_{A_1}^N (\omega_m) \left[ Y_{re}(x, \omega_m) \cdot \omega_s(\omega_m t + \varepsilon_m) - Y_{ih}(x, \omega_m) \cdot \Delta m(\omega_m t + \varepsilon_m) \right] \quad (56)$$

wobei die Abhängigkeit von dem Parameter  $x$  berücksichtigt und die Übertragungsfunktion  $Y$  für die Relativbewegung in 2 Komponenten benutzt ist.

Es wird wieder, wie schon oben für die Erregung 2. Ordnung, das Gleichgewicht an dem schwingenden Stab nicht für alle Längenelemente dieses Stabes hergestellt sondern unter Voraussetzung der Schwingungsform für den ganzen Stab. Dies erfordert eine Gewichtung der erregenden Kraft mit dem normierten Schwingungsweg des Stabes, d.h. eine Multiplikation mit der Eigenform und anschließend eine Integration über die Stablänge. Wenn in diese Integrationen nur die von  $x$  abhängigen Terme eingeschlossen werden, sind die folgenden Integrale zu lösen:

$$F1(\omega) = \int_L b(x) \cdot E \cdot y(x) \cdot \left[ \dot{s}^2(x,t) \right]_{M.H.U.} \cdot Y_{re}(x, \omega) dx, \quad (57)$$

$$F2(\omega) = \int_L b(x) \cdot E \cdot y(x) \cdot \left[ \dot{s}^2(x,t) \right]_{M.H.U.} \cdot Y_{im}(x, \omega) dx,$$

und als Spektraldichte für diese gewichtete erregende Kraft resultiert

$$N_{1,F3}(\omega) = \rho \cdot p^2 \cdot y^2 \cdot N_s(\omega) \cdot \left[ F1^2(\omega) + F2^2(\omega) \right], \quad (58)$$

wobei  $N_s(\omega)$  das Seegangsspektrum bedeutet und der Mittelwert von  $\dot{s}^2$  als Funktion von  $x$  aus dem Spektrum der Relativbewegung an der Stelle  $x$  nach Formel (12) zu berechnen ist. Diese Spektraldichte wird natürlich vorwiegend für die Kreisfrequenz  $\omega_{E1}$  gebraucht werden.

Es bleibt, den der Dreifachreihe (49) analogen Kraftanteil zu bestimmen.

Zunächst werden nur die in (49) stehenden Glieder der Dreifachreihe durch die Seegangsamplituden und die Übertragungsfunktionen der Relativbewegung ersetzt, um die Abhängigkeit von dem Parameter  $x$  zu erfassen.

Anstelle von

$$S_A \cdot \cos(\omega t + \varepsilon)$$

wird geschrieben

$$\frac{1}{2} \cdot S_A \cdot \left[ Y \cdot e^{i\omega t} + \tilde{Y} \cdot e^{-i\omega t} \right] \quad (59)$$

wobei  $Y$  als komplexe, von  $x$  und  $\omega$  abhängige Größe und  $\tilde{Y}$  als konjugiert komplexe Größe anzusehen sind. Entsprechend (49) ist zu bestimmen

$$\frac{1}{8} \cdot \left[ Y_n e^{i\omega_n t} + \tilde{Y}_n e^{-i\omega_n t} \right] \left[ Y_m e^{i\omega_m t} + \tilde{Y}_m e^{-i\omega_m t} \right] \left[ Y_k e^{i\omega_k t} + \tilde{Y}_k e^{-i\omega_k t} \right]$$

und dies ist 1/8 mal

$$\begin{aligned} & Y_n \cdot Y_m \cdot Y_k \cdot e^{i(\omega_n + \omega_m + \omega_k)t} + \tilde{Y}_n \cdot \tilde{Y}_m \cdot \tilde{Y}_k \cdot e^{-i(\omega_n + \omega_m + \omega_k)t} \\ & + Y_n \cdot Y_m \cdot \tilde{Y}_k \cdot e^{i(\omega_n + \omega_m - \omega_k)t} + \tilde{Y}_n \cdot \tilde{Y}_m \cdot Y_k \cdot e^{-i(\omega_n + \omega_m - \omega_k)t} \\ & + Y_n \cdot \tilde{Y}_m \cdot Y_k \cdot e^{i(\omega_n - \omega_m + \omega_k)t} + \tilde{Y}_n \cdot Y_m \cdot \tilde{Y}_k \cdot e^{-i(\omega_n - \omega_m + \omega_k)t} \\ & + Y_n \cdot \tilde{Y}_m \cdot \tilde{Y}_k \cdot e^{i(\omega_n - \omega_m - \omega_k)t} + \tilde{Y}_n \cdot Y_m \cdot Y_k \cdot e^{-i(\omega_n - \omega_m - \omega_k)t} \end{aligned} \quad (60)$$

Die 4 Bildungsgesetze der resultierenden Kreisfrequenz sind wie in (50) zu erkennen.

Für das erste Bildungsgesetz (siehe (51a.)) wird nur die erste Zeile gebraucht. Sie beträgt

$$\frac{1}{4} \cdot (Y_n \cdot Y_m \cdot Y_k)_{re} \cdot \cos(\omega_{rest} t) - \frac{1}{4} \cdot (Y_n \cdot Y_m \cdot Y_k)_{im} \cdot \sin(\omega_{rest} t) \quad (61)$$

wobei gilt

$$\left( Y_n \cdot Y_m \cdot Y_k \right)_{re} = Y_{n,re} \cdot Y_{m,re} \cdot Y_{k,re} - Y_{n,re} \cdot Y_{m,im} \cdot Y_{k,im} - Y_{n,im} \cdot Y_{m,re} \cdot Y_{k,im} - Y_{n,im} \cdot Y_{m,im} \cdot Y_{k,re} \quad (62)$$

$$\left( Y_n \cdot Y_m \cdot Y_k \right)_{im} = Y_{n,re} \cdot Y_{m,re} \cdot Y_{k,im} + Y_{n,re} \cdot Y_{m,im} \cdot Y_{k,re} + Y_{n,im} \cdot Y_{m,re} \cdot Y_{k,re} - Y_{n,im} \cdot Y_{m,im} \cdot Y_{k,im}$$

und der jeweils 2. Index reell oder imaginär bedeutet.

Die aus diesem Bildungsgesetz für  $\omega_{res}$  folgende erregende Kraft beträgt also

$$\frac{3}{2} \iint b(x) \sum_{n=1}^n \sum_{m=1}^m \left\{ \begin{matrix} \int_{i,n} \\ \int_{r,m} \\ \int_{r,n-m} \end{matrix} \left( Y_n \cdot Y_m \cdot Y_{r-n-m} \right)_{re} \cos(\omega_{res} t + \varepsilon_{r,n,m}) + \left( Y_n \cdot Y_m \cdot Y_{r-n-m} \right)_{im} \sin(\omega_{res} t + \varepsilon_{r,n,m}) \right\} \quad (63)$$

Diese Kraft wird durch Multiplizieren mit der normierten Eigenfunktion gewichtet und dann über die Schiffslänge integriert. Es werden 8 Integrale gebraucht, wobei nur die von  $x$  abhängigen Faktoren in die Integranden aufgenommen sind.

$$E1(\omega_n, \omega_m) = \int_L b(x) \cdot E_{ij}(x) \cdot Y_{re}(x, \omega_n) \cdot Y_{re}(x, \omega_m) \cdot Y_{re}(x, \omega_{res} - \omega_n - \omega_m) \cdot dx \quad ,$$

$$E2(\omega_n, \omega_m) = \int_L b(x) \cdot E_{ij}(x) \cdot Y_{re}(x, \omega_n) \cdot Y_{im}(x, \omega_m) \cdot Y_{im}(x, \omega_{res} - \omega_n - \omega_m) \cdot dx \quad ,$$

⋮

$$E8(\omega_n, \omega_m) = \int_L b(x) \cdot E_{ij}(x) \cdot Y_{im}(x, \omega_n) \cdot Y_{im}(x, \omega_m) \cdot Y_{im}(x, \omega_{res} - \omega_n - \omega_m) \cdot dx \quad (64)$$

Die Kombinationen der Übertragungsfunktionen in diesen Formeln ergeben sich aus (62). Die Integrale sind 2parametrische Funktionen, wobei die Grenzen für die beiden Parameter durch (51a.) festgelegt sind. Als Spektraldichte für die gewichtete und über die Länge integrierte Kraft folgt nun:

$$\int_{2,F3} (w) = \mathcal{D} \int_0^2 \int_0^2 \int_{\omega_n=0}^{\omega_n=\frac{w}{3}} \int_{\omega_m=\omega_n}^{\omega_m=\frac{w-\omega_n}{3}} \int_{\omega_n}^{\omega_n+\omega_m} \left\{ \begin{aligned} & [E1(\omega_n, \omega_m) - E2(\omega_n, \omega_m) - E3(\omega_n, \omega_m) - E4(\omega_n, \omega_m)]^2 + \\ & + [E5(\omega_n, \omega_m) + E6(\omega_n, \omega_m) + E7(\omega_n, \omega_m) - E8(\omega_n, \omega_m)]^2 \end{aligned} \right\} d\omega_m \quad (65)$$

Damit ist die aus dem Bildungsgesetz (51a.) für die resultierende Kreisfrequenz folgende Spektraldichte gewonnen, und es wird noch der aus (51e.) folgende Anteil angeschrieben:

$$\int_{3,F3} (w) = \mathcal{D} \int_0^2 \int_0^2 \int_{\omega_n=0}^{\omega_n=w} \int_{\omega_m=\omega_n}^{\omega_m=\frac{w+\omega_n}{3}} \int_{\omega_n}^{\omega_n+\omega_m} \left\{ \begin{aligned} & [E1(\omega_n, \omega_m) - E2(\omega_n, \omega_m) + E3(\omega_n, \omega_m) + E4(\omega_n, \omega_m)]^2 + \\ & + [E5(\omega_n, \omega_m) + E6(\omega_n, \omega_m) - E7(\omega_n, \omega_m) + E8(\omega_n, \omega_m)]^2 \end{aligned} \right\} d\omega_m \quad (66)$$

wobei die Integrale E1 bis E8 analog (64) gebildet werden, nur für einen veränderten, aus (66) zu ersehenden Bereich der Frequenzen  $\omega_n$  und  $\omega_m$  sowie für veränderte Parameter in der 3. Übertragungsfunktion, und zwar

$$Y(x, w + \omega_n - \omega_m) \text{ anstelle von } Y(x, w - \omega_n - \omega_m) \quad (67)$$

Die veränderten Vorzeichen der E-Funktionen in (66) gegenüber

(65) folgen aus (60) und (62).

Die Beiträge (58), (65), (66) und eventuell weitere 3 Beiträge aus den nicht diskutierten Bildungsgesetzen (51b.) bis (51c.) werden arithmetisch addiert, wobei als sicher gelten kann, daß der Beitrag (65) immer weitaus am größten ist. Dies gibt dann - insbesondere für  $\omega_{E_i} = \omega_{E_i}$  und die benachbarten Kreisfrequenzen - das resultierende Spektrum für die gewichtete und integrierte schwingungserregende Kraft.

Dieses Spektrum mit dem gleichen Vorfaktor wie (40)

$$\frac{2 \cdot \left[ \rho \cdot y \cdot E_{1y}(x) \right]^2}{\left( \frac{2D}{\omega} \right)^2 + (\omega_{E_i}^2 - \omega^2)^2 \cdot \left[ \int_L m \cdot [E_{1y}(x)]^2 dx \right]^2}$$

multipliziert, gibt das Spektrum für die durch die nicht-linearen Kräfte 3. Ordnung erregte elastische Schwingung an der Stelle  $x$ .

Auch für die Kräfte 3. Ordnung ist es leicht, zusätzlich die "hydrodynamischen" Kräfte nach (4) zu berücksichtigen. Es ist hierfür nur notwendig, sowohl die beiden Integrale (58) als auch alle Integrale (64) in den Integranden zu multiplizieren mit dem Faktor

$$1 - \frac{\pi}{12 \cdot g} \left[ 3 \cdot B(x) + 2 \cdot \frac{a^2(x)}{b(x)} \right] \omega_{E_i}^2 \quad (68)$$

5.) Hydrodynamische Kraftanteile

Die hydrodynamischen Kraftanteile nach (4) sind durch die Faktoren (40) bzw. (68) voll berücksichtigt. Das wird nun ausführlich erklärt.

Zunächst für die Kraftanteile 2. Ordnung:

Das Verhältnis der gesamten Kraftanteile (hydrostatisch plus hydrodynamisch) zu dem hydrostatischen Kraftanteil beträgt

$$1 + \frac{\pi}{2} \frac{B}{g} \frac{\dot{s} \ddot{s} + \dot{s}^2}{s^2} \quad (69)$$

Es ist als Nächstes  $(\dot{s} \ddot{s} + \dot{s}^2)$  analog zu behandeln wie  $\dot{s}^2$  von (8) bis (19). Anstelle der ersten Zeile von (8) erhält man hierfür

$$\sum_{n=1}^N s_{n,n}^2 \left[ -\omega_n^2 \cdot \cos^2(\omega_n t + \varepsilon_n) + \omega_n^2 \cdot \sin^2(\omega_n t + \varepsilon_n) \right] \quad (70)$$

Dies liefert nach dem Grenzübergang  $\Delta U \rightarrow 0$  und  $N \rightarrow \infty$  keinen endlichen Beitrag. In der Doppelreihe von (8) ist jede Kombination  $n, m$  zweimal enthalten. Es muß daher für  $\dot{s} \ddot{s}$  jedes Glied mit  $-\frac{\omega_n^2 + \omega_m^2}{2}$  multipliziert werden und für  $\dot{s}^2$  muß erstens jedes Glied mit  $\omega_n \cdot \omega_m$  multipliziert werden, zweitens müssen die Cosinus-Funktionen durch Sinus-Funktionen ersetzt werden. Das liefert für  $(\dot{s} \ddot{s} + \dot{s}^2)$  in der Form (10) der Doppelreihe

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=n+1}^N s_{A,n} \cdot s_{A,m} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \left[ -\frac{\omega_n^2 + \omega_m^2}{2} - \omega_n \cdot \omega_m \right] \cdot \cos \left[ (\omega_n + \omega_m) t + \varepsilon_n + \varepsilon_m \right] + \\ + \left[ -\frac{\omega_n^2 + \omega_m^2}{2} + \omega_n \cdot \omega_m \right] \cdot \cos \left[ (\omega_m - \omega_n) t + \varepsilon_m - \varepsilon_n \right] \end{array} \right\} =$$

$$= \sum_{n=1}^N \sum_{m=n+1}^N s_{A,n} \cdot s_{A,m} \cdot \left\{ \begin{array}{l} -\frac{(\omega_n + \omega_m)^2}{2} \cos \left[ (\omega_n + \omega_m) t + \varepsilon_n + \varepsilon_m \right] + \\ -\frac{(\omega_m - \omega_n)^2}{2} \cos \left[ (\omega_m - \omega_n) t + \varepsilon_m - \varepsilon_n \right] \end{array} \right\} \quad (71)$$

Das heißt, jedes Glied der Doppelreihe muß mit dem Quadrat der resultierenden Kreisfrequenz des betreffenden Gliedes und mit  $-\frac{1}{2}$  multipliziert werden.

Das Verhältnis (69) der resultierenden zu der hydrostatischen Kraft beträgt daher für die Komponente mit der resultierenden Kreisfrequenz  $\omega_{\varepsilon i}$

$$1 - \frac{\pi}{4} \frac{B}{g} \omega_{\varepsilon i}^2 \quad (72)$$

Es genügt daher, die Integranden von (28) mit diesem Faktor zu multiplizieren, wie in (40) behauptet ist.

Für die Kraftanteile 3. Ordnung nach (1) und (4) sowie für den Faktor (68) ist die Beweisführung analog.

Das Verhältnis von resultierender Kraft zu hydrostatischer Kraft beträgt für die 3. Ordnung

$$1 + \frac{\pi}{4 \cdot g} \left( 3B + 2 \frac{a^2}{b} \right) \cdot \frac{\dot{s}^2 \ddot{s} + 2 \cdot \dot{s} \cdot \dot{s}^2}{s^3} \quad (73)$$

Zuerst wird der zur 2. Zeile von (42) analoge Ausdruck für  $(\dot{s}^2 \ddot{s} + 2 \cdot \dot{s} \cdot \dot{s}^2)$  untersucht. (Der der ersten Zeile analoge Ausdruck liefert keinen endlichen Beitrag).

Man erhält

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N s_{A_1 n}^2 \cdot s_{A_1 m} \cdot \left\{ \begin{aligned} & (-2\omega_n^2 - \omega_m^2) \cdot \cos^2(u_n t + \varepsilon_n) \cdot \cos(u_n t + \varepsilon_n) + 2\omega_n^2 \cdot \sin^2(u_n t + \varepsilon_n) \cdot \cos(u_n t + \varepsilon_n) + \\ & + 4\omega_n \cdot \omega_m \cdot \cos(u_n t + \varepsilon_n) \cdot \sin(u_n t + \varepsilon_n) \cdot \sin(u_m t + \varepsilon_m) \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Hiervon liefert nur der unterstrichene Term einen endlichen Beitrag, und zwar nach der Umwandlung von  $\cos^2(u_n t + \varepsilon_n)$

den Beitrag

$$-\frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^N s_{\beta,n}^2 \cdot \sum s_{\beta,m} \cdot \omega_m^2 \cdot \cos(u_n t + \xi_m) \quad (75)$$

Wenn man diesen Ausdruck dem entsprechenden Ausdruck (45) für  $s^3$  gegenüberstellt, erkennt man, daß für diesen Teil das Verhältnis (73) die Form

$$1 - \frac{\pi}{2g} \cdot \left( 3B + 2 \frac{a^2}{b} \right) \cdot \omega_m^2 \quad (76)$$

annimmt. Und das ist (68) identisch.

Zu dem gleichen Ergebnis führt eine entsprechende Analyse der Dreifachreihe in (42) oder (49). Für diesen Beweis genügt nun wohl eine sehr knappe Darstellung. Anstelle des Ausdruckes in (49) wird geschrieben für ein beliebiges Glied der Dreifachreihe

$$\text{für } s^3 \quad e^{i(\pm u_n) \cdot t} \cdot e^{i(\pm u_m) \cdot t} \cdot e^{i(\pm u_k) \cdot t} = e^{i(\pm u_n \pm u_m \pm u_k) \cdot t} \quad (77)$$

und es werden alle möglichen Kombinationen von Vorzeichen in dem Exponenten zugelassen. Hieraus wird für  $s^2, s^3$ , da die zweimalige Differentiation in allen 3 Faktoren denkbar ist

$$\text{für } s^2, s^3 \quad = - \frac{\omega_n^2 + \omega_m^2 + \omega_k^2}{3} \cdot e^{i(\pm u_n \pm u_m \pm u_k) \cdot t} \quad (78)$$

Für  $2, s, s^2$  ist die einmalige Differentiation in jeweils 2 Faktoren erforderlich, d.h. man erhält

$$\text{für } 2, s, s^2 \quad = - \frac{2}{3} \left[ \left( \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} u_n \right) \cdot \left( \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} u_m \right) + \left( \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} u_n \right) \cdot \left( \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} u_k \right) + \left( \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} u_m \right) \cdot \left( \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} u_k \right) \right] \cdot e^{i(\pm u_n \pm u_m \pm u_k) \cdot t} \quad (79)$$

Es gilt daher für die Summe  $(\dot{s}, \dot{s} + 2 \cdot \dot{s}, \dot{s}^2)$

$$= - \frac{(\omega_n + \omega_m + \omega_k)^2}{3} \cdot e^{i(\omega_n + \omega_m + \omega_k) \cdot t}$$

(80)

d.h., es muß jedes Glied mit  $-\frac{1}{3}$  und mit dem Quadrat der resultierenden Kreisfrequenz des jeweiligen Gliedes multipliziert werden. Damit ist auch hierdurch (76) oder (68) bestätigt.

#### 6.) Verteilungen der nichtlinearen Größen

Hinsichtlich der berechneten Spektren für nichtlineare Größen wurden oben Vorbehalte erwähnt. Sie ergaben sich daraus, daß mögliche Phasenverknüpfungen nicht berücksichtigt wurden. So läßt z.B. das Spektrum für  $s^2$  nicht erkennen, daß diese Größe nicht kleiner als Null werden kann und daß (fast) alle ihre Minima bei Null liegen.

Zusätzlich zu den berechneten Spektren können Verteilungen für die Ordinaten und für die Maxima berechnet werden, vorausgesetzt, solche Verteilungen sind für die lineare Größe bekannt. Die Verteilungen resultieren aus der einfachen Formel

$$f(y) = f(x) \cdot \frac{dx}{dy}$$

wobei  $y = g(x)$  = Funktion von  $x$  und  
 $f(x)$  sowie  $f(y)$  = Verteilungen von  $x$  und  $y$  sind

Es gelten also folgende Verteilungen, wobei die Verteilungen für  $s(t)$  vorausgesetzt sind:

	$s(t)$	$s^2(t)$	$s^3(t)$
Ordinalen	<p>normalverteilt</p> $\frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot m_{0,3}}} \cdot e^{-\frac{s^2}{2m_{0,3}}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot m_{0,3}} \cdot  s } \cdot e^{-\frac{s^2}{2m_{0,3}}}$	$\frac{1}{3 \sqrt{2\pi \cdot m_{0,3}} \cdot s^2} \cdot e^{-\frac{s^2}{2m_{0,3}}}$
Maxima	<p>Rayleigh</p> $\frac{s_M}{m_{0,3}} \cdot e^{-\frac{s_M^2}{2m_{0,3}}}$	$\frac{1}{2m_{0,3}} \cdot e^{-\frac{s_M^2}{2m_{0,3}}}$	$\frac{1}{3 \cdot m_{0,3} \cdot s_M} \cdot e^{-\frac{s_M^2}{2m_{0,3}}}$

Für das sehr schmale Spektrum der elastischen Schwingungen sind jedoch die Ordinalen normal und die Maxima nach Rayleigh verteilt?

### 7.) Literatur

- 1 Bell, A.O. and Taylor, K.V.: "Wave-Excited Hull Vibration, Measurements on a 47 000 tdw Tanker", Shipping World and Shipbuilder, Febr. 1968
- 2 Schulz, H.G.: "The Esso Norway Project, Full Scale Tanker Investigation", ISSC 1970
- 3 Goodman, R.A.: "Wave-Excited Main Hull Vibration in Large Tankers and Bulk Carriers", TRINA 1970
- 4 van Gunsteren, F.F.: "Springing Wave-Induced Ship Vibrations", ISP Vol. 17, Nov, 1970, No. 195
- 5 Kumai, T.: "Wave-Induced Force Exciting Hull Vibration and its Response", Report of Interim Meeting of ISSC (Feltham 1972)

- 6           Laudan, J.: "Vibrationserregung eines Schiffskörpers durch regelmäßigen Seegang", HSVA-Bericht Nr. F 7/74, SFB 98
  
- 7           Söding H. und Mitarbeiter im Arbeitsbericht zur Begehung 1975 des SFB 98

8.) Nachtrag (Juli 1975):

Die Arbeit ist nicht abgeschlossen. Die für die nichtlinearen Grössen berechneten Spektren können nicht so behandelt werden wie die Spektren linearer stochastischer Prozesse. Das zeigen die unter 6.) genannten Verteilungsgesetze und das ist natürlich verursacht durch Phasenverknüpfungen, die auf Seite 11 erwähnt, bisher aber nicht beachtet sind.

Vielleicht spielt das keine Rolle für die sehr schmalen Spektren der erregten, elastischen Schwingungen. Der Beweis hierfür müsste jedoch erbracht werden.

Ebenfalls müsste der benutzte einfache Ansatz für die hydrodynamische Kraft (2) überprüft und gegebenenfalls ersetzt werden durch einen besseren Ansatz.

Trotz dieser offenen Aspekte wurde eine numerische Rechnung versucht. Ein Ergebnis zeigt die Abb.6, und zwar das Biegemoment im Hauptspant für ein Schiff in einem Seegang, bei einem Begegnungswinkel aber bei 3 Froude-Zahlen. Zu erkennen sind die Biegemomente des als starr behandelten Körpers bei niedrigen Frequenzen und die durch elastische Resonanzschwingungen verursachten Biegemomente bei  $\omega = 5,0 \text{ sec}^{-1}$ . Die letzteren Biegemomente sind unterteilt dargestellt, und zwar nach der Art der Erregung: hydrostatisch oder hydrostatisch + hydrodynamisch, sowie nach der Ordnung: linear, 2. und 3. Ordnung.

Es fällt auf: Der Einfluss der hydrostatischen Erregung ist sehr klein gegenüber dem Einfluss der hydrodynamischen Erregung und die Erregungen wachsen sehr rasch mit wachsender Geschwindigkeit.

Dies scheint plausibel, ob es quantitativ brauchbar ist, muss noch festgestellt werden.

Abb. 1

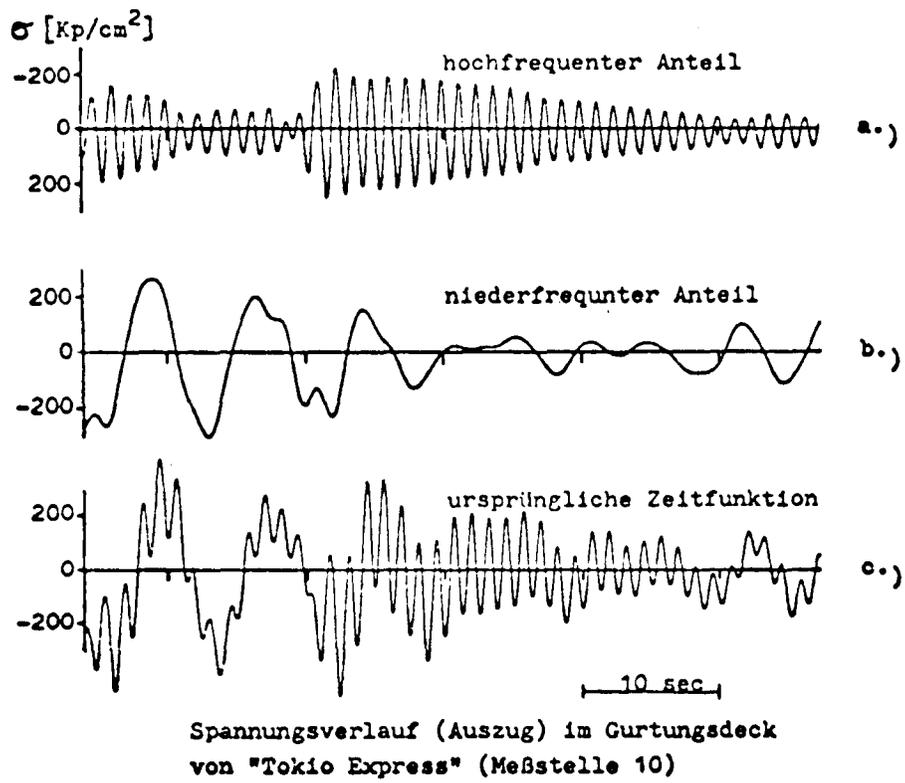


Abb. 2

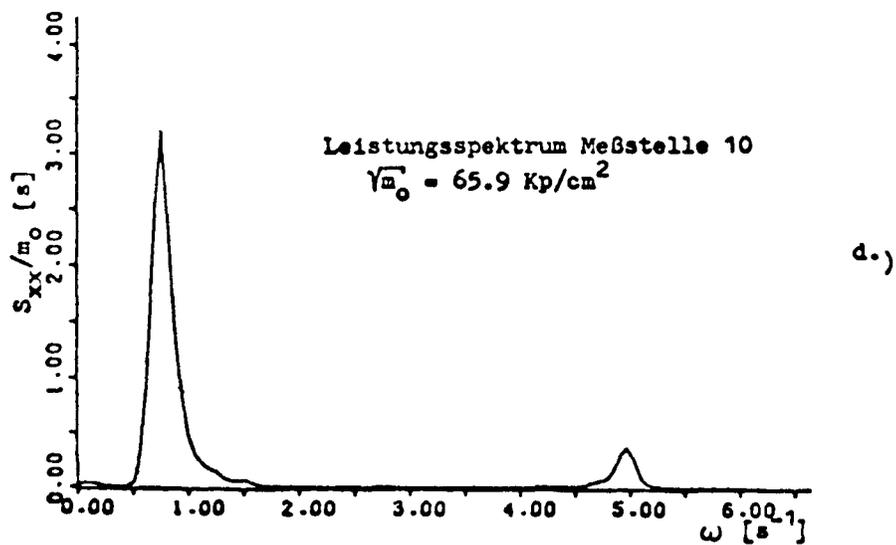


Abb. B1-4a...d

Abb. 3

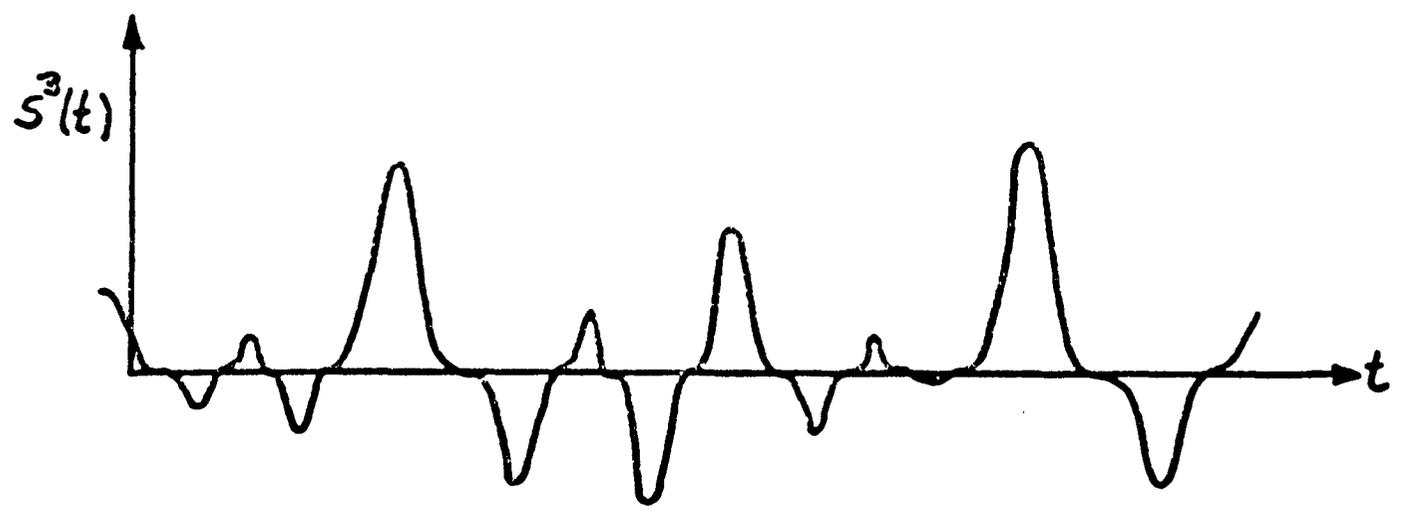
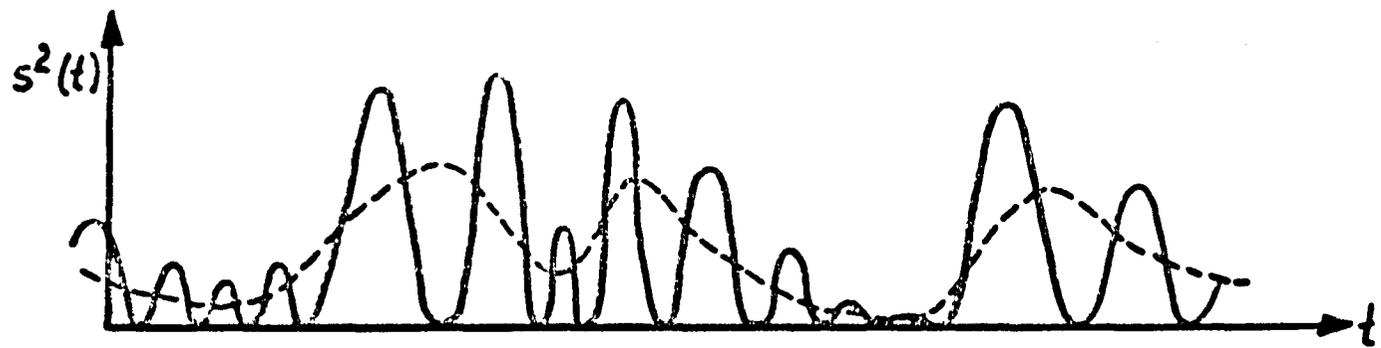
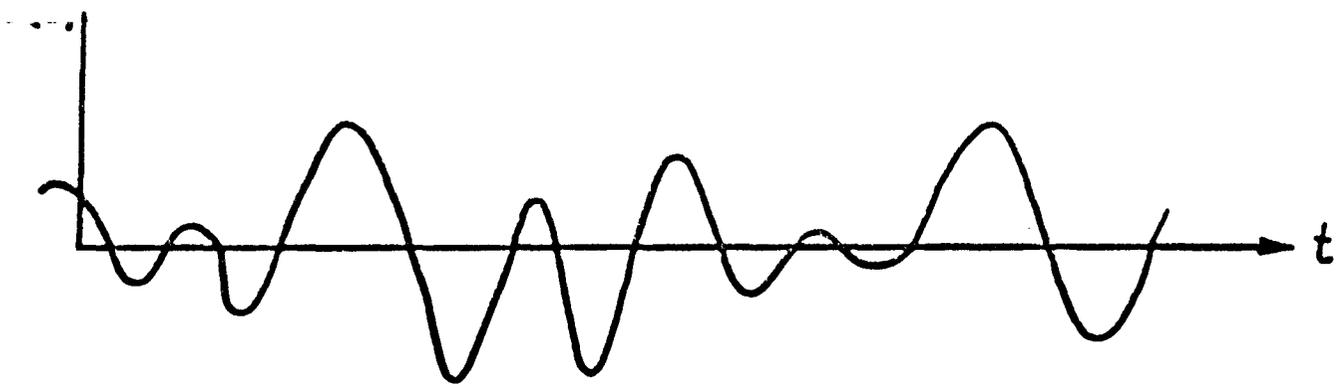
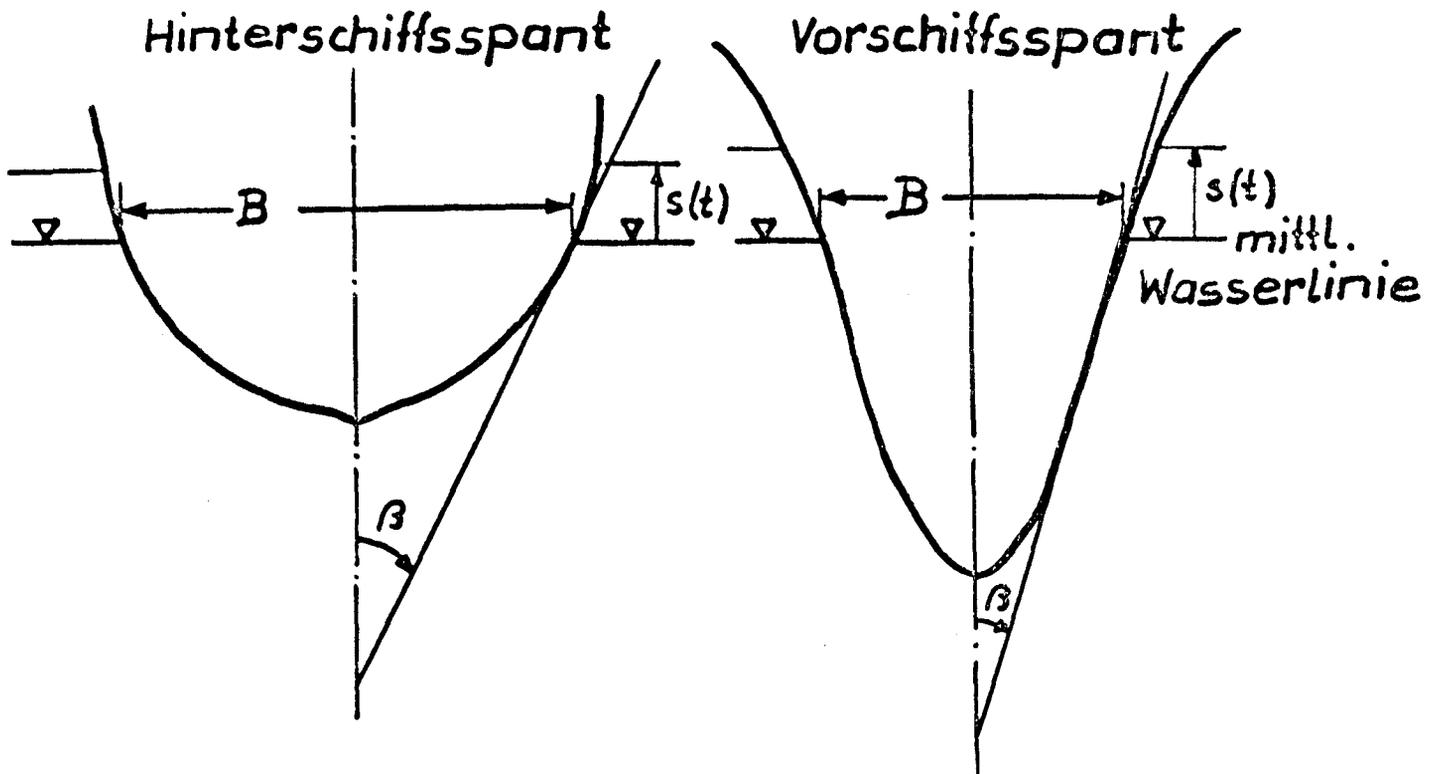


Abb. 4



„Hydrostatische“ Kraft pro Längeneinheit

$$= \rho \cdot g \cdot [B \cdot s + a \cdot s^2 + b \cdot s^3 + \dots] \cdot,$$

„Hydrodynamische“ Trägheitskraft pro  
Längeneinheit

$$= \frac{d}{dt} (m'' \cdot \dot{s}) \sim \frac{d}{dt} \left\{ \rho \cdot \frac{\pi}{8} \cdot (B + 2 \cdot a \cdot s + 3 \cdot b \cdot s^2 + \dots)^2 \cdot \dot{s} \right\} \cdot,$$

$x$  = Koordinate des Spantes

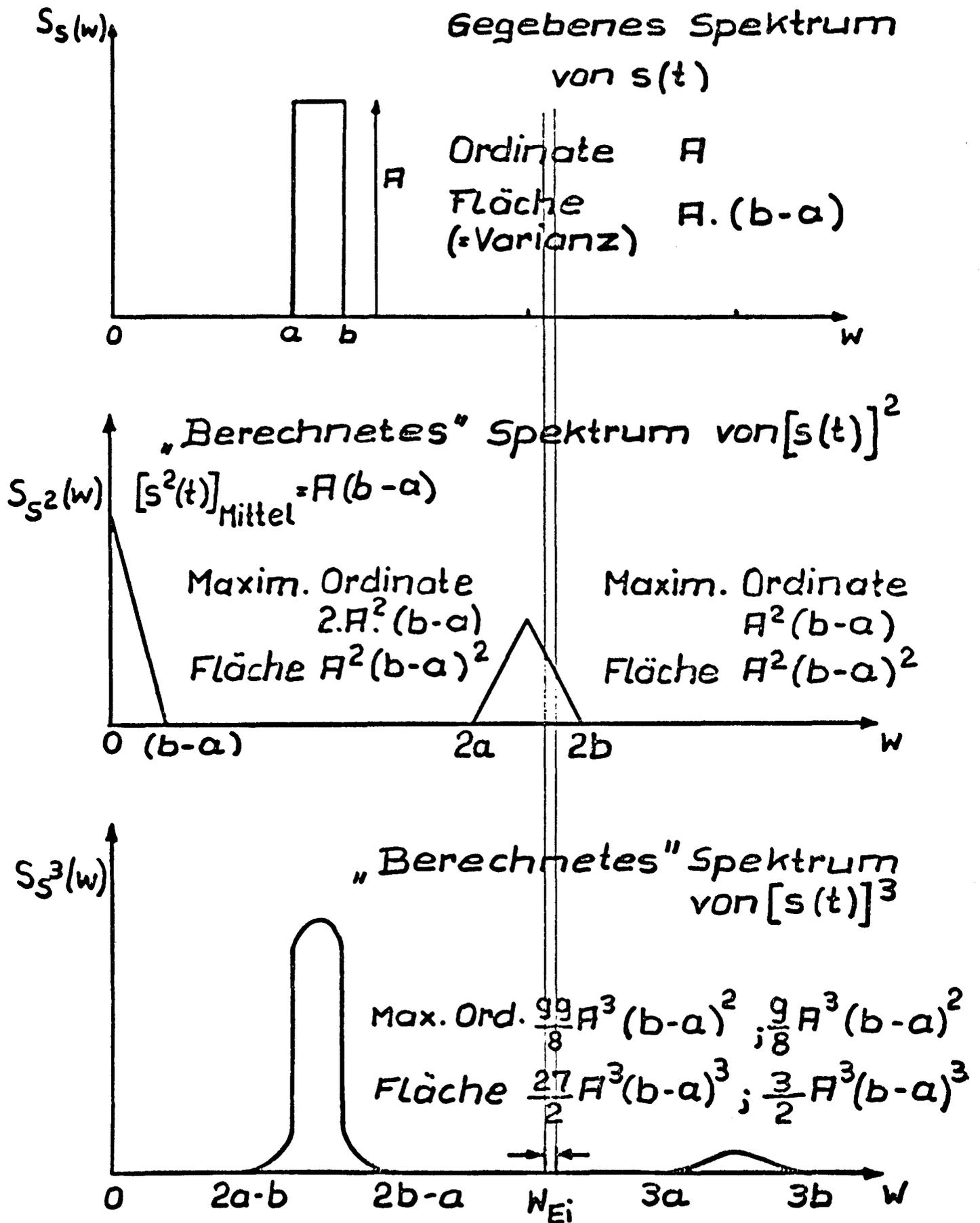
$s = s(x, t)$  = Relativbewegung zwischen  
Spant und Wasseroberfläche

$B = B(x)$  = Breite in der mittl. Wasserlinie  
 $a = a(x) = \tan(\beta(x))$  = Neigung der Spant-  
kontour.

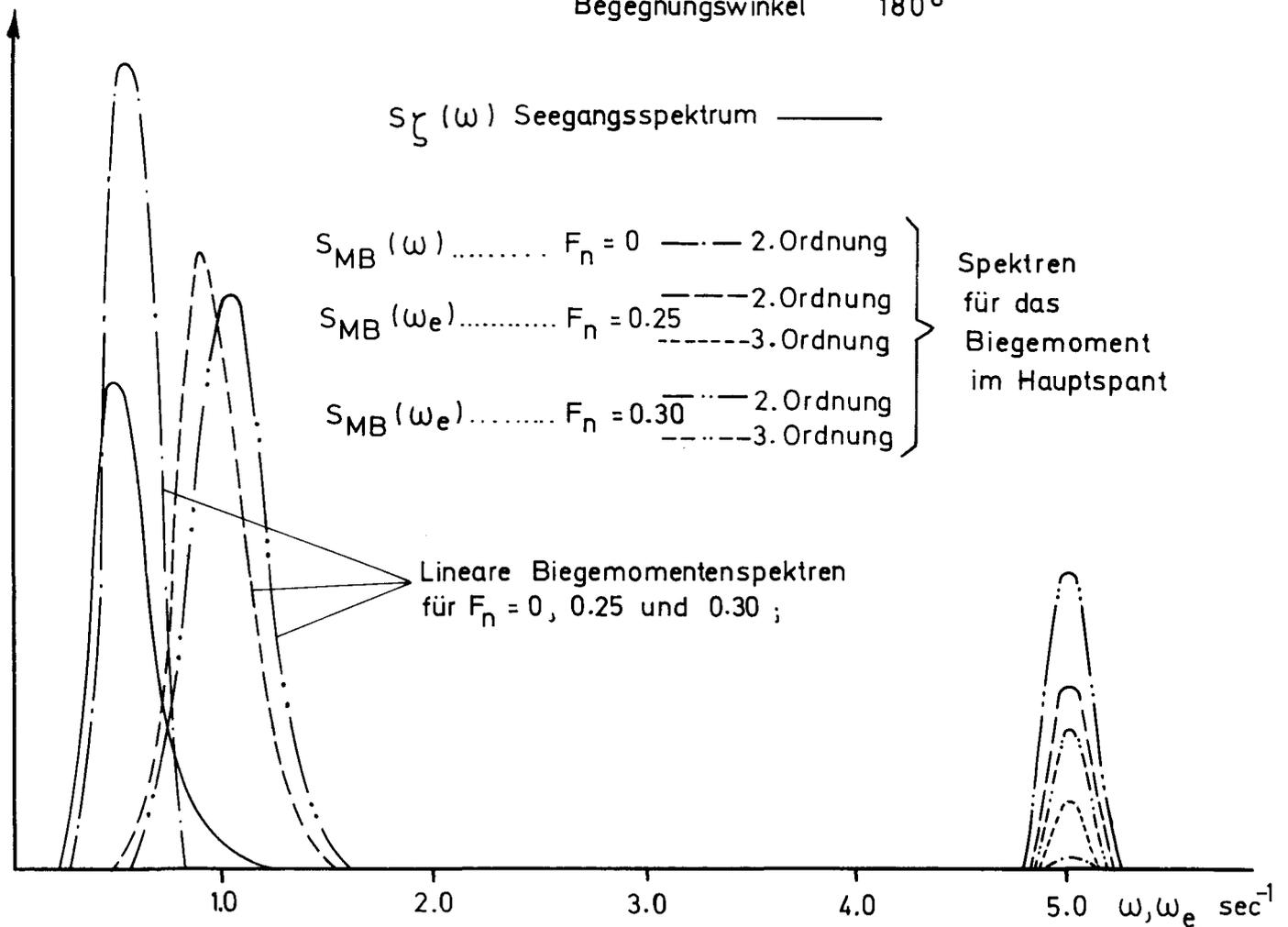
$b = b(x)$  = prop. der Krümmung der Spant-  
kontour.

$m'' = m''(x, s)$  = hydrodynamische Masse

Abb. 5



Länge des Schiffes 175 m  
 Seegang 8  
 Begegnungswinkel 180°



Spitzen bei 5,0 sec<sup>-1</sup> in m<sup>2</sup> sec x (g · g · B · L<sup>2</sup> · 10<sup>-2</sup>)<sup>2</sup> ,

F <sub>n</sub> =	nur hydrostatische Kraftanteile			Hydrostat.+Hydrodyn. Kraftanteile		
	0	0.25	0.30	0	0.25	0.30
S <sub>MB</sub> <sup>(5)</sup>						
Linear					0.0003	0.001
2.Ordnung	0.0005	0.022	0.044	0.12	7.00	11.26
3.Ordnung		0.0003		0.11	3.05	5.45
Resultierend				0.23	10.05	16.71