

531 | März 1993

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Axel Busch

Ein anisotropes Materialgesetz zur Berechnung lastinduzierter Eigenspannung an Rissen

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

Ein anisotropes Materialgesetz zur Berechnung lastinduzierter Eigenspannung an Rissen

Axel Busch, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1993

ISBN: 3-89220-531-0

© Technische Universität Hamburg-Harburg
Schriftenreihe Schiffbau
Schwarzenbergstraße 95c
D-21073 Hamburg

<http://www.tuhh.de/vss>

Ein anisotropes Materialgesetz
zur Berechnung
lastinduzierter Eigenspannungen
an Rissen

Genehmigte Dissertation
zur Erlangung des Grades
Doktor-Ingenieur
der Universität Hamburg

vorgelegt von
Axel Busch
aus Hannover

Hamburg
Juli 1992

Tag der Disputation: 7. Dezember 1992

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. H. Schimmöller
Prof. Dr.-Ing. H. Petershagen

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr. 531

Ein anisotropes Materialgesetz zur Berechnung lastinduzierter Eigenspannungen an Rissen

Axel Busch

März 1993

Vorwort:

Diese Arbeit ist während meiner Tätigkeit als Wissenschaftlicher Mitarbeiter im Institut für Schiffbau der Universität Hamburg im Fachgebiet Festigkeitslehre und Werkstoffmechanik entstanden.

Mein besonderer Dank gilt Prof. Dr.-Ing. H. Schimmöller, der diese Arbeit betreut und in besonderer Weise gefördert hat.

Prof. Dr.-Ing. E. Lehmann (TU Hamburg–Harburg) und Prof. Dr.-Ing. H. Petershagen danke ich für ihre Kritik und Anregungen.

Desweiteren danke ich allen Mitarbeitern und Studenten des Institutes für Schiffbau, die durch Diskussionen vorsätzlich oder auch ohne ihr Wissen auf diese Arbeit Einfluß genommen haben.

Zusammenfassung:

In der vorliegenden Arbeit werden die Last- und Eigenspannungszustände für eine angerissene Probe mit Hilfe der Finiten-Element-Methode unter Wechsellast ermittelt. Die nichtlineare Berechnung erfolgt an Volumenelementen. Der Rißuferkontakt wird berücksichtigt.

Hierzu wird das Finite-Element-Programm **ADINA** mit einem selbstentwickelten, anisotropen Materialgesetz verwendet. Es basiert auf der Gestaltänderungsenergiehypothese und enthält als Verfestigungsgesetz eine Kombination aus kinematischer und isotroper Verfestigung, um sowohl den Bauschinger-Effekt als auch Kaltverfestigung zu erfassen. Dieses Materialgesetz ist für zyklische Belastungen im Bereich weniger Lastwechsel (LCF) geeignet; es wird vorgestellt und erläutert.

Inhaltsverzeichnis

Symboltabelle	IV
1 Einleitung	1
2 Analytische 2D-Rechnung	4
2.1 Linear-elastische Scheibenrechnung	4
2.2 Elastisch-plastische Scheibenrechnung	7
3 Das 2D-Scheibenmodell	12
3.1 Die <i>Gap</i> -Elemente	14
4 Linear-elastische FE-Scheibenrechnung	16
4.1 Vergleich mit der analytischen Rechnung	16
4.2 Der Spannungsintensitätsfaktor	18
5 Nichtlineare FE-Scheibenrechnung	19
5.1 Handhabung der nichtlinearen Rechnung	19
5.2 Variation einzelner Parameter in der nichtlinearen 2D-Rechnung	21
5.2.1 Ideal-plastische Rechnung	22
5.2.2 Isotrope oder kinematische Verfestigung	29
5.2.3 EDZ – ESZ	35
5.2.4 Die Breite der Probe	38
5.2.5 Ausrundung der Rißspitze	38
5.2.6 Große Dehnungen und große Verschiebungen	38
5.2.7 Zusammenfassung der 2D-Rechnungen	40
6 Das 3D-Modell	44
7 Das zyklische, anisotrope Materialgesetz	48
7.1 Aufruffolge des Materialgesetzes	51
7.2 Parameterübergabe und Initialisierung des Materialgesetzes	52

7.3	Linearisieren der Materialsteifigkeitsmatrix	53
7.3.1	Das linear-elastische Material	53
7.3.2	Die nichtlineare Rechnung	54
7.3.3	Isotrope Verfestigung	55
7.3.4	Anisotrope Verfestigung	59
7.4	Die Materialkonstanten	60
7.5	Die Elementspannungen	63
7.5.1	Selektion des Types der Rechnung	63
7.5.2	Abspalten des elastischen Anteils eines Lastschrittes	65
7.5.3	Die plastischen Dehnungs- und Spannungszuwächse	68
7.5.4	Abschließende Fehlerkorrektur – <i>Radial return</i>	69
7.6	Ausdruck der Ergebnisse	69
8	Ergebnisse der 3D-Rechnung	72
8.1	Die Spannungen an der Rißspitze	74
8.2	Die lastinduzierten Eigenspannungen	81
8.3	Die Spannungen unter Drucklast	83
8.4	Die Rißuferverschiebung	85
8.5	Vergleich mit röntgenographischen Messungen	87
9	Zusammenfassung und Ausblick	90
	Literaturverzeichnis	92
10	Anhang A: Variablenbelegung in CUSER3.FOR	96
11	Anhang B: Material-Datei	97
12	Anhang C: Alternative Steifigkeitsmatrix	99
13	Anhang D: FORTRAN-Source des Materialgesetzes	100

Symboltabelle:

In der Symboltabelle steht eine kurze Beschreibung, sowie die Gleichungsnummer und die Seitenzahl auf der das Symbol Verwendung findet. Angegeben ist nicht unbedingt das erste Auftreten des Symbols, sondern möglichst die definierende Gleichung.

Bezeichnungen, die sich auf Eigennamen beziehen, sind *kursiv* wiedergegeben.

In der Schriftart **Typewriter** werden Variablennamen etc. geschrieben, die speziell im Programm **ADINA** vorkommen. In anderen Programmsystemen mögen die entsprechenden Variablen andere Namen tragen.

Lateinische Zeichen:

Symbol	Bezeichnung	Gl.Nr.	Seite
a	halbe Rißbreite eines Innenrisses		4
b	Gesamte Breite der Probe		4
c	$\frac{2}{3}$ des kinematischen Elastizitätsmoduls für α_{ij}	86	62
d	halbe Dicke der Probe		
D_{ijkl} D	Spannungs-Dehnungs-Tensor / -Matrix		
D_{ijkl}^e D^e	elastischer Spannungs-Dehnungs-Tensor / -Matrix	37	53
D_{ijkl}^{ep} D^{ep}	elastisch-plastischer		
	Spannungs-Dehnungs-Tensor / -Matrix	79	59
E	Elastizitätsmodul $f(\epsilon)$		
E^t	Tangentenmodul $f(\epsilon)$	58	57
E^{eff}	effektiver Tangentenmodul $f(\epsilon^p)$	61	57
EDZ	ebener Dehnungs- oder ebener Verzerrungszustand		
ESZ	ebener Spannungszustand		
F	Fließkriterium	39	54
G	Gleitmodul		
G	Energiefreisetzungsrate, Rißantriebskraft		18
K_I	Spannungsintensitätsfaktor ($1\text{ Nm}^{-3/2} = 31.6\text{ kNm}^{-3/2}$)	15	7
K_{Ic}	kritischer Spannungsintensitätsfaktor		7
p	Ableitung Fließkriterium / plast. Dehnung	52	56
q	Ableitung Fließkriterium / Spannung	54	56
r	Abstandskoordinate zur Rißspitze	6	5
R_e	Fließgrenze		
r_f	Ausdehnung der plastischen Zone im Ligament	19	9
s_{ij} s	kinematischer, deviatorischer Spannungstensor / -vektor	40	54
t, u	Skalarfaktoren für den elastischen Anteil	110f	67
Y	Formfaktor zu K_I	15	7

Griechische Zeichen:

Symbol	Bezeichnung	Gl.Nr.	Seite
α, β, γ	Skalarfaktoren für den elastischen Anteil	104ff	67
$\alpha_{ij} \quad \bar{\alpha}$	kinematischer Spannungstensor / -vektor	76	59
$\epsilon_{ij} \quad \bar{\epsilon}$	Dehnungstensor / -vektor	51	56
$\epsilon_{ij}^p \quad \bar{\epsilon}^p$	plastischer Dehnungstensor / -vektor	42	54
$\epsilon_{ij}^e \quad \bar{\epsilon}^e$	elastischer Dehnungstensor / -vektor	46	55
$\epsilon^p \quad \epsilon_{vgl}^p$	plastische Vergleichsdehnung	62	57
ϵ'	wahre (logarithmische) plastische Dehnung	88	62
δ	Rißspitzenverschiebung		42
λ	Skalarfaktor	49	56
ν	Querkontraktionszahl		
ν^p	plastische Querkontraktionszahl ($\nu^p = 0.5$)	64	57
Π	elastisches Potential	28	18
$\sigma_{ij} \quad \bar{\sigma}$	Spannungstensor / Spannungsvektor	46	55
σ_0	Nennspannung an der Probe $\sigma_0 = F/A_0$	1	4
σ_{vgl}	Vergleichsspannung lt. Gestaltänderungsenergiehyp.	34	22
σ_{vgl}^{kin}	kinematische Vergleichsspannung	120	69
σ_y	Fließspannung	59	57
σ'	wahre Spannung	89	62
$\bar{\tau}_{ij}$	Schubspannungen in $\bar{\sigma}$		

Indizes:

Index	Bezeichnung
$^{max} \otimes$	Maximum über alle bisherigen Zeitschritte
$^t \otimes$	letzter (stabiler) Zeitschritt
$^\tau \otimes$	ein Zwischenergebnis $t < \tau < T$
$^T \otimes$	nächster Zeitschritt $T = t + dt$
$\otimes_a$	anisotrop
$\otimes_i$	isotrop
$\otimes_k$	kinematisch
$\otimes_1, \otimes_2 \dots$	laufender Zähler für Vergleiche

1 Einleitung

In gebauten Konstruktionen kommt es durch verschiedene Ursachen immer wieder zur Rißbildung. Der Grund kann in ungeeigneter Geometrie, in Materialfehlern, Fertigungsfehlern oder auch in falscher Lastannahme liegen. In sicherheitskritischen Anlagen müssen Risse, mit den Ausmaßen der Meßgenauigkeit, als vorhanden angesehen werden. Die Bewertung dieser Risse ist bisher nicht immer mit befriedigender Genauigkeit möglich. Es stehen zwei Gruppen von Berechnungsverfahren zur Verfügung: für den Spröbruch und für den Zähbruch. Beide haben zum Ziel, einen gefährdungsfreien Gebrauch einer rißbehafteten Konstruktion zu garantieren.

Die erste Gruppe umfaßt die linear-elastische Bruchmechanik (LEBM), gekennzeichnet durch eine verschwindend kleine plastische Zone. Die Berechnungsverfahren werden meist unter Zuhilfenahme einfacher Korrekturen auf kleine plastische Zonen (*Small Scale Yielding*) ausgedehnt. Mit einer linear-elastischen Rechnung wird der Spannungsintensitätsfaktor K_I , der am Bauteil vorliegt, ermittelt und mit einer gerade noch zulässigen Materialkonstanten K_{Ic} , dem kritischen Spannungsintensitätsfaktor, verglichen, die an einer Vergleichsprobe gemessen wurde. Die tatsächliche Bauteilgeometrie wird mittels überschlägiger Formfaktoren oder durch eine FEM-Rechnung angepaßt. Diese Rechnung sichert gegen den instabilen Spröbruch. Sie liefert für spröde Materialien oder Bruchvorgänge ein sehr gutes Kriterium.

Für den Fall des stabilen Rißwachstums unter Schwinglast wird dieses Konzept erweitert. Ausgehend von der Schwingbreite des Spannungsintensitätsfaktors ΔK_I , wird ein kleiner Zuwachs der Rißlänge pro Lastspiel ermittelt. Dem Kontakt der Rißufer bei Wechselbelastungen wird durch eine Verminderung der Schwingbreite Rechnung getragen. Für Einstufenbelastungen werden gute Ergebnisse erzielt.

Dieses Verfahren nimmt im allgemeinen keine Rücksicht auf besondere Eigenspannung (z.B. aus Reihenfolgeeinfluß oder *Overstressing* [Wel87]) und es ist nicht für große plastische Zonen geeignet, wie sie im Bereich der Kurzzeitfestigkeit (LCF) auftreten. Empirische Korrekturen liefern dann nur noch eine Abschätzung des Rißverhaltens.

In der zweiten Gruppe der Berechnungsverfahren, der Fließbruchmechanik, wird eine plastische Zone vor der Rißspitze akzeptiert und in das Berechnungsverfahren aufgenommen. Das Rißspitzenöffnungs-Konzept und das J-Integral sind die verbreitetsten Methoden dieser Gruppe. Als weitere Verfahren sollen das Leck-vor-Bruch-Konzept und das Zwei-Kriterien-Verfahren erwähnt werden.

Beim Rißspitzenöffnungskonzept (CTOD = *Crack Tip Opening Displacement*) wird die Verschiebung der beiden Rißufer in der Rißspitze mit einer materialspezifischen, kritischen Verschiebung δ_c verglichen. Die Messung der tatsächlichen Verschiebung am Bauteil erweist sich dabei als schwierig, da die gewünschte Meßstelle unzugänglich ist. Häufig wird daher in einiger Entfernung die Rißöffnungsverschiebung (CMOD = *Crack Mouth Opening Displacement*) bestimmt und auf die Rißspitze extrapoliert.

Das J-Integral wird auf einem beliebigen geschlossenen Weg um die Rißspitze bestimmt. Wenn der Integrationsweg ein rein elastisches Gebiet ohne Singularität umschließt, dann ist das J-Integral gleich Null. Andernfalls charakterisiert das J-Integral die Singularität plus

aller vom Integrationsweg umschlossenen plastischen Vorgänge. Das J-Integral entspricht auch der pro neuer Reißoberfläche freigesetzten elastischen Energie und ermöglicht so eine Erweiterung des Grundgedankens von Griffith auf große plastische Zonen: Die freiwerdende elastische Energie muß die benötigte Oberflächenenergie übersteigen, um ein instabiles Reißwachstum zu ermöglichen. Eine ausführliche Betrachtung zum Energiefluß bei großen plastischen Zonen findet sich bei Westendorf [Wes87, Wes88] und Redmer [Red81].

Beide Verfahren, das CTOD-Konzept und das J-Integral, lassen sich für kleine plastische Zonen direkt in die LEBM mit dem Spannungsintensitätsfaktor umrechnen. Die Entwicklung dieser Konzepte ist derzeit noch nicht abgeschlossen, aber sie lassen schon jetzt eine befriedigende Abschätzung der Zuverlässigkeit angerissener Bauteile zu.

Der jeweilige genaue Rechnungsablauf der hier erwähnten Konzepte wird in dem DVS-Merkblatt [DVS89] sehr anschaulich beschrieben und es werden Anhaltswerte gegeben, bis zu welchen Grenzen die einzelnen Konzepte zuverlässig sind. In zahlreichen anderen Schriften wird die Theorie hinter diesen Konzepten ausführlich dargestellt [Schw80, Bro88, Kan85, Ric68, Neu85, Rad74].

Allen bisher genannten Methoden ist gemeinsam, daß versucht wird, die Wirkung des Risses mit einer Zahl zu bewerten. Die Verfahren haben damit einen integralen Charakter, da jeder Punkt des Reißspitzenumfeldes auf diese Bewertungszahl einwirkt und die interne Spannungsverteilung innerhalb der plastischen Zone keine wesentliche Rolle spielt. Aus diesem Grund können auch die Eigenspannungen, die nach außen keine resultierenden Kräfte erzeugen, schlecht erfaßt werden. Ein Ausweg aus dieser Situation ist die Anwendung eines örtlichen Konzeptes, das den Spannungszustand unmittelbar vor der Reißspitze, unter Berücksichtigung der weiteren Umgebung, als Kriterium für die Reißausbreitung verwendet.

Die rasche Entwicklung der Finite-Element-Methode macht die Anwendung dieses Konzeptes möglich. Notwendigerweise wird ein FEM-Programm benötigt, das nichtlineare Berechnungen mit plastischen Vorgängen zuläßt. Das Programm ADINA (*Automatic Dynamic Incremental Nonlinear Analysis*) [Adi84] erfüllt diese Bedingung; durch wiederholtes Linearisieren und Iterieren können nichtlineare Material- und Geometrieverhalten nachgebildet werden. Die beiden Hilfsprogramme ADINA-IN und ADINA-PLOT gestatten es, die Modelleingabe und -kontrolle sowie die graphische Ausgabe der Rechenergebnisse, einigermaßen komfortabel zu verwirklichen.

Die Rechnung wird in erheblichem Maße dadurch erschwert, daß für die unmittelbare Umgebung der Reißspitze keine zuverlässigen Spannungs- und Dehnungsmessungen vorhanden sind, um den korrekten Ablauf der Rechnung zu stützen. Durch röntgenographische Aufnahmen können nur die elastischen Spannungen in einem oberflächennahen Gebiet wiedergegeben werden, auch sind die Meßpunkte relativ grob. Mit Markierungen werden die Dehnungen nur an der Probenoberfläche erfaßt. Alle oberflächenabtragenden Methoden zerstören auch den lokal stark begrenzten Eigenspannungszustand.

Auf der anderen Seite stehen analytische Rechnungen nur für das ideal-elastische Materialverhalten im zweidimensionalen Raum zur Verfügung. Daraus ergibt sich, daß man sehr behutsam vorgehen muß und zunächst die Anwendbarkeit der FEM mit der darin enthaltenen Spannungssingularität durch den Vergleich mit der analytischen Lösung überprüfen muß. Danach wird festgestellt, auf welche Parameter das System besonders empfindlich

reagiert, um auf der einen Seite diese dann besonders sorgfältig einstellen zu können und zum anderen die unwesentlichen Parameter zugunsten der Rechenzeit zu vereinfachen.

Diese Parameterstudie führt man vorzugsweise an dem zweidimensionalen Modell durch, da sich die Rechenzeit hier noch in erträglichem Rahmen hält. Für die Rechnungen mit Volumenelementen sind dann alle verfügbaren Maßnahmen zu ergreifen, um die Rechenzeit zu reduzieren.

Die erfolgreiche Rechnung soll am Ende den Spannungszustand wiedergeben, der sich nach einer Belastung mit einer äußeren Kraft an einer vorhandenen Rißspitze einstellt. Bei plastischen Vorgängen ist das Materialverhalten wegabhängig. Der Belastungsablauf muß daher in vollem Umfang simuliert werden. Nur so stellen sich die korrekten Eigenspannungszustände ein. Indem dann die Belastungsgeschichte eines lokalen Elementes vor der Rißspitze bekannt ist, wird es möglich, ein sehr viel individuelleres Versagenskonzept anzuwenden [Low81, Low84], als dies bislang mit dem J-Integral oder dem CTOD-Konzept möglich ist.

2 Analytische 2D-Rechnung

2.1 Linear-elastische Scheibenrechnung

Im Weiteren erfolgen die Berechnungen an einer Probengeometrie, an der Hellwig [Hel72] die lastinduzierten Eigenspannungen röntgenographisch gemessen hat. Dabei handelt es sich um eine dünne Probe mit einem zentralen Mittelriß aus Ck 45. Die Abmessungen sind der Abb. 1 zu entnehmen. Neben dieser Probengeometrie hat Hellwig auch verschiedene Vergütungszustände geprüft. Außer für den direkten Vergleich werden für die FEM-Simulation die Materialdaten für den höherfesten Schiffbaustahl HF 36 bzw. ST 52-3 zugrunde gelegt.

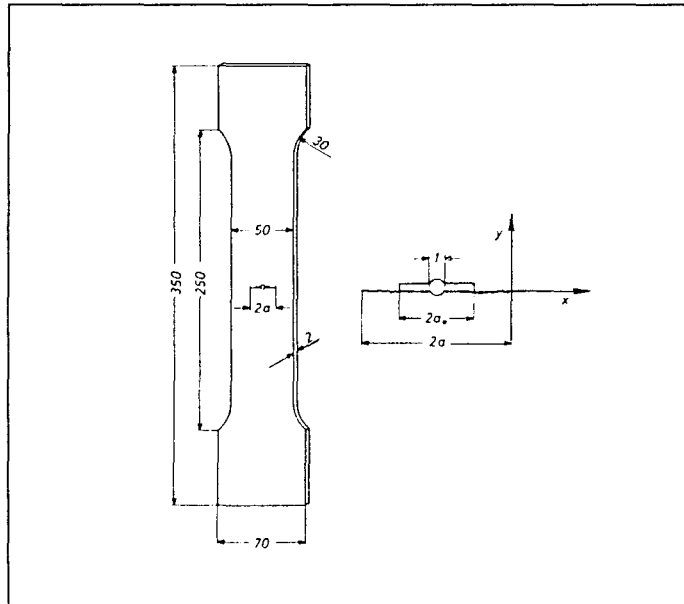


Abbildung 1: Abmessungen der Vergleichsprobe

Da diese Probe dünn ist, kann zunächst mit einem zweidimensionalen Ansatz im ebenen Spannungszustand gerechnet werden. Für eine unendliche Scheibe mit zentralem Innenriß unter allseitigem Zug steht eine exakte Lösung in Form einer komplexen Spannungsfunktion (Gl. 1) nach Westergaard [Wes39] zur Verfügung¹.

$$Z(z) = \sigma_0 \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad , \quad \text{mit} \quad z(r, \varphi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (1)$$

Danach betragen die Spannungen auch in großem Abstand von der Rißspitze:

$$\sigma_x(r, \varphi) = \operatorname{Re}(Z) - y \operatorname{Im}(Z') \quad (2)$$

$$\sigma_y(r, \varphi) = \operatorname{Re}(Z) + y \operatorname{Im}(Z') \quad (3)$$

$$\sigma_{xy}(r, \varphi) = -y \operatorname{Re}(Z') \quad (4)$$

¹In den Gleichungen 1 bis 5 liegt der Ursprung des Koordinatensystems ausnahmsweise in der Symmetrieebene und nicht – wie im folgenden immer – in der Rißspitze

Auf dem Ligament ($\varphi = 0$) vereinfacht sich diese Formel zu:

$$\sigma_y(r) = \sigma_0 \frac{|r| - a}{\sqrt{(r - a)^2 - a^2}} \quad \text{mit } |r| > a \quad (5)$$

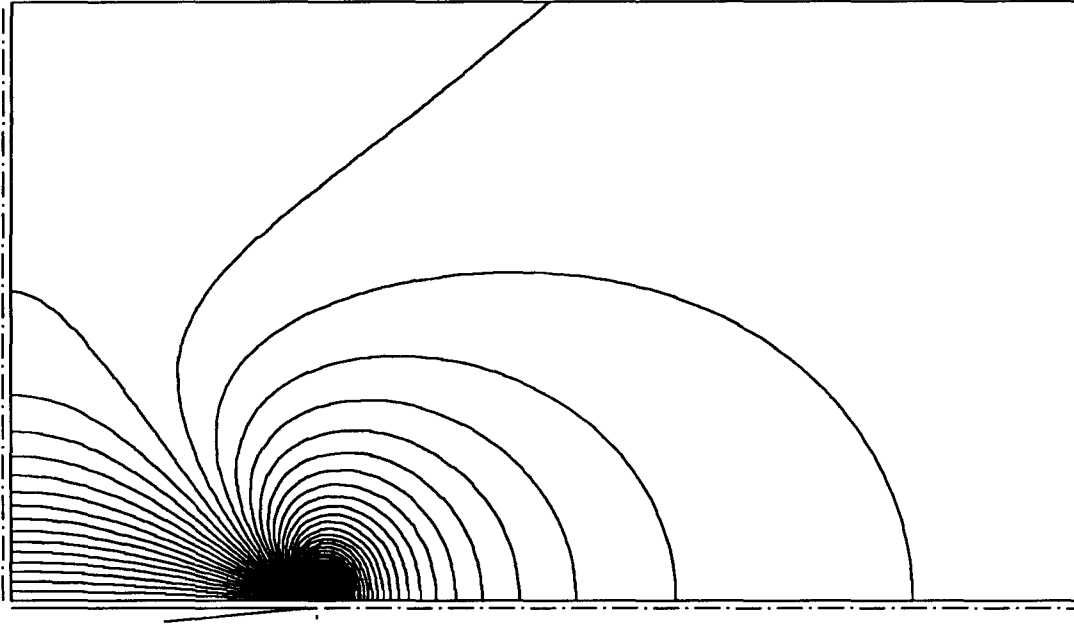


Abbildung 2: Vergleichsspannung σ_{vgl} an der Rißspitze nach *Westergaard*

Die Vergleichsspannung σ_{vgl} nach der Gestaltänderungsenergiehypothese für eine unendliche Scheibe mit Riß unter allseitigem Zug (d.h. mit den Spannungen aus den Gl. 1 ff) ist in der Abb. 2 dargestellt.

Die Abb. 3 zeigt die Vergleichsspannungen, wenn die äußeren Lasten in der Querrichtung gleich null sind – also der Belastungsfall, der auf eine Zugprobe mit endlicher Probenbreite zutrifft. Diese Belastung wird aus der *Westergaard*-Lösung durch einfaches Addieren einer Druckspannung in Querrichtung erzeugt. Der Unterschied zu Abb. 2 ist erheblich.

In der unmittelbaren Nähe der Rißspitze lassen sich die Gleichungen Gl. 2ff nach *Irwin* und *Williams* [Irw57, Wil57] wesentlich vereinfachen (Koordinatenursprung jetzt in der Rißspitze) zu:

$$\sigma_x(r, \varphi) = \sigma_0 \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\varphi}{2} \left(1 - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3}{2}\varphi \right) \quad (6)$$

$$\sigma_y(r, \varphi) = \sigma_0 \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\varphi}{2} \left(1 + \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3}{2}\varphi \right) \quad (7)$$

$$\sigma_{xy}(r, \varphi) = \sigma_0 \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3}{2}\varphi \quad (8)$$

Der ebene Spannungszustand (ESZ) verlangt eine verschwindende Spannung in Dickenrichtung, während sich im ebenen Dehnungszustand (EDZ) über die Bedingung $\epsilon_z = 0$

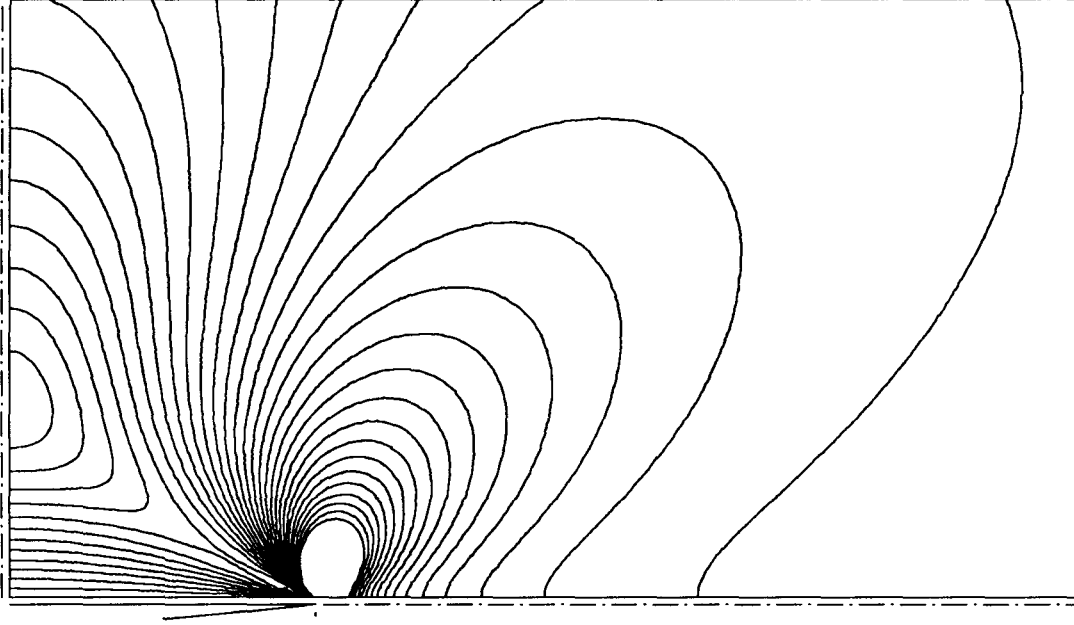


Abbildung 3: Vergleichsspannung σ_{vgl} ohne äußere Querspannung

eine nennenswerte Spannung in Dickenrichtung ergibt.

$$\text{ESZ:} \quad \sigma_z(r, \varphi) = 0 \quad (9)$$

$$\text{EDZ:} \quad \sigma_z(r, \varphi) = \nu(\sigma_x + \sigma_y) = 2\nu\sigma_0\sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\varphi}{2} \quad (10)$$

Der geöffnete Riß hat dabei die Kontur einer Ellipse mit einer kleinen Halbachse von $2a\sigma_0/E$ [Schim85]. Die Längsspannung (nahe der Rißspitze!) auf dem Ligament beträgt dann:

$$\sigma_y(r) = \sigma_0\sqrt{\frac{a}{2r}} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (11)$$

Hieraus leitet sich der Spannungsintensitätsfaktor² ab, der die Stärke der Spannungssingularität in der Rißspitze im Mode I (Längsspannung) beschreibt:

$$K_I = \sigma_0\sqrt{\pi a} \quad (12)$$

Für andere Geometrien als eine unendliche Scheibe werden die Gl. 6 ff mit einem Formfaktor Y multipliziert, der entweder empirisch oder durch FE-Rechnungen gefunden wurden.

Der Spannungsintensitätsfaktor K_I für die in Abb. 1 gezeigte Probe mit einer Rißlänge $a = 4 \text{ mm}$ beträgt nach einer aus Versuchen gewonnenen Näherungsformel von Irwin [Irw57]:

$$K_{I1} = \sigma_0\sqrt{\pi a}Y = \sigma_0\sqrt{\pi a}\sqrt{\frac{2b}{\pi a}\tan\frac{\pi a}{2b}} = 200\sqrt{\pi 4} \cdot 1.011 = \quad (13)$$

$$= 716.6 \text{ Nmm}^{-3/2} \quad (14)$$

²Eine andere Herleitung verwendet eine Grenzwertbetrachtung der Spannungsfunktion nach Neuber [Neu85] für eine unendlich scharfe Innenkerbe; sie liefert die gleiche Formel.

In anderen Veröffentlichungen werden ähnliche Formfaktoren genannt ([DVS89] $Y = 1.015$, [Fri86] $Y = 1.016$), die aus FEM-Rechnungen abgeleitet wurden. Danach beträgt der Spannungsintensitätsfaktor:

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a} \sqrt{\sec \frac{\pi a}{2b}} = 709. \text{ Nmm}^{-3/2} \cdot 1.016 = \quad (15)$$

$$= 720.4 \text{ Nmm}^{-3/2} \quad (16)$$

Von Schwalbe [Schw80] wird als kritischer Spannungsintensitätsfaktor für ST 52-3 der Wert $K_{Ic} = 2000 \text{ Nmm}^{-3/2}$ für $R_m = 600 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ genannt; bei Dahl wird $K_c = 2900 \text{ Nmm}^{-3/2}$ angegeben [Dah80], wobei auf die starke Abhängigkeit von Temperatur und Belastungsgeschwindigkeit hingewiesen wird.

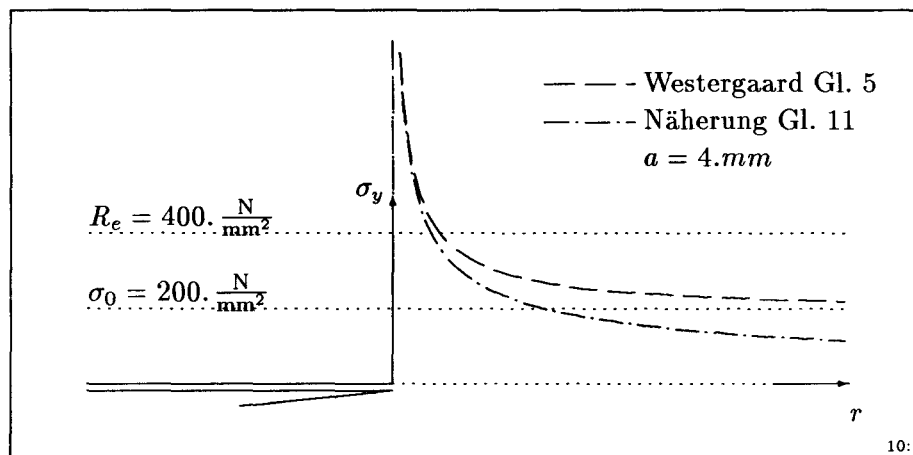


Abbildung 4: Längsspannungen über dem Ligament

In der Abb. 4 ist der Verlauf der Längsspannung σ_y über dem Abstand r zur Rißspitze im Ligament eingetragen – sowohl die exakte linear-elastisch, als auch die Näherungslösung. Der Vergleich zeigt, daß schon in der Nähe der Rißspitze die Abweichung erheblich ist. Bei großem Abstand von der Rißspitze verschwindet in der Näherungslösung die Spannung sehr schnell und strebt nicht gegen die angelegte Nennspannung σ_0 , wie es die exakte Lösung verlangt.

Noch deutlicher wird dieser Unterschied in der Abb. 5. Dort sind die Längsspannungen in einer Probe mit einem 2 mm Riß über dem Abstand von der Rißspitze aufgetragen. Die Spannungen sind als röntgenographische Messung und aus zwei Rechnungen eingezeichnet. Mit durchgezogenem Strich nach der Näherungslösung in Gl. 11 und strich-punktiert mit der Westergaard-Lösung aus Gl. 5. Das Gebiet, in dem die Näherung zutrifft, ist offensichtlich kleiner als die plastische Zone selbst.

2.2 Elastisch-plastische Scheibenrechnung

Schon für dieses Problem gibt es keine exakte Lösung mehr. Die Näherungen sind aus dem Westergaard-Ansatz abgeleitet.

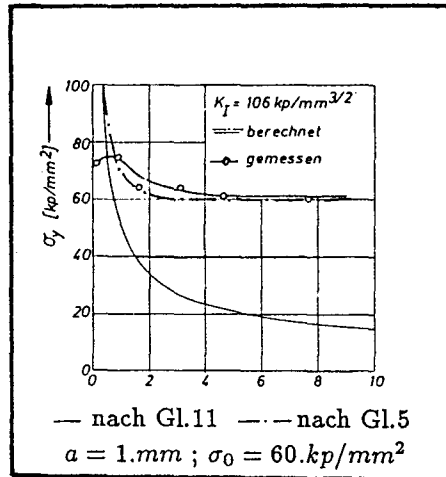


Abbildung 5: Längsspannungen über Ligament aus [Hel72]

Eine erste, sehr grobe Näherung für die Größe der plastischen Zone erhält man aus Gl. 11, indem das Gebiet mit einer Vergleichsspannung (Gestaltänderungsenergiehypothese) über der Fließspannung R_e als plastische Zone deklariert wird. Bei den gegebenen Abmessungen der Probe hat diese plastische Zone folgende Ausdehnung r_{f0} auf dem Ligament:

$$\text{ESZ: } r_{f0} = \frac{a}{2} \left(\frac{\sigma_0}{R_e} \right)^2 Y^2 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{R_e} \right)^2 = 0.51 \text{ mm} \quad (17)$$

$$\text{EDZ: } r_{f0} = (1 - 2\nu)^2 \cdot \frac{a}{2} \left(\frac{\sigma_0}{R_e} \right)^2 Y^2 = 0.082 \text{ mm} \quad (18)$$

Demnach hat die plastische Zone in der Probenmitte (EDZ) eine sehr viel kleinere Abmessung als an der Probenoberfläche (ESZ). Die Abb. 6 skizziert die plastische Zone; sie wird Hundeknochen-Modell genannt.

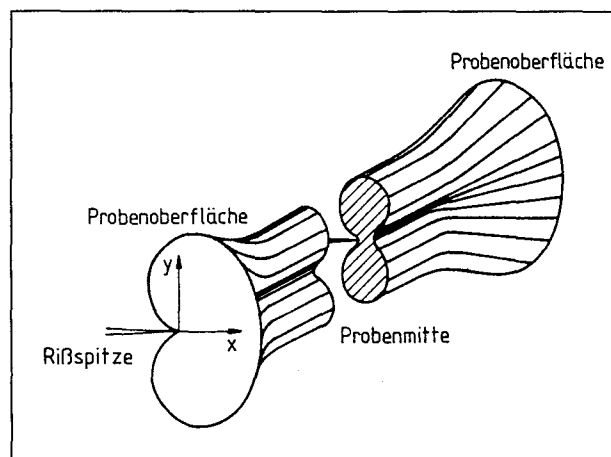


Abbildung 6: Das Hundeknochen-Modell von Irwin

Die Lösung für r_{f0} erfüllt aber noch nicht einmal das Gleichgewicht in Längsrichtung, da ein Teil der Spannungen einfach abgeschnitten wurde.

Eine Verbesserung nach Irwin ergibt sich, wenn man den Riß um eine fiktive Länge da verlängert, die so gewählt ist, daß das Gleichgewicht – nach dem Abschneiden oberhalb der Fließspannung – wieder stimmt. Das Gleichgewicht wäre bei einer fiktiven Rißlänge von $a^* = a - r_{f0} = 3.49 \text{ mm}$ gerade wieder hergestellt. Das Vorgehen wird in der Abb. 7 veranschaulicht: die schraffierte Fläche oberhalb der Fließspannung ist flächengleich mit der Fläche $A = r_{f0} \cdot R_e = \int_0^{r_{f0}} (\sigma(r) - R_e) dr$.

Gewöhnlich ist es nicht von Interesse, bei welcher fiktiven, verkürzten Rißlänge das Gleichgewicht wieder herrscht. Es muß vielmehr für einen vorhandenen Riß die Ausdehnung der plastischen Zone bestimmt werden. Dazu wird a^* in a umgetauft und von diesem Wert aus die Gleichung neu formuliert.

$$r_{f1} = \frac{1}{\left(\frac{R_e}{\sigma_0} \frac{1}{Y}\right)^2 - \frac{1}{2}} \cdot a = 1.185 \text{ mm} \approx 2 \cdot r_{f0} \quad (19)$$

Die geringe Abweichung zur üblichen Formel $r_f = 2 \cdot r_{f0}$ entsteht dadurch, daß die Abhängigkeit der plastischen Zone von der Rißlänge in der Gl. 19 richtig beachtet wird.

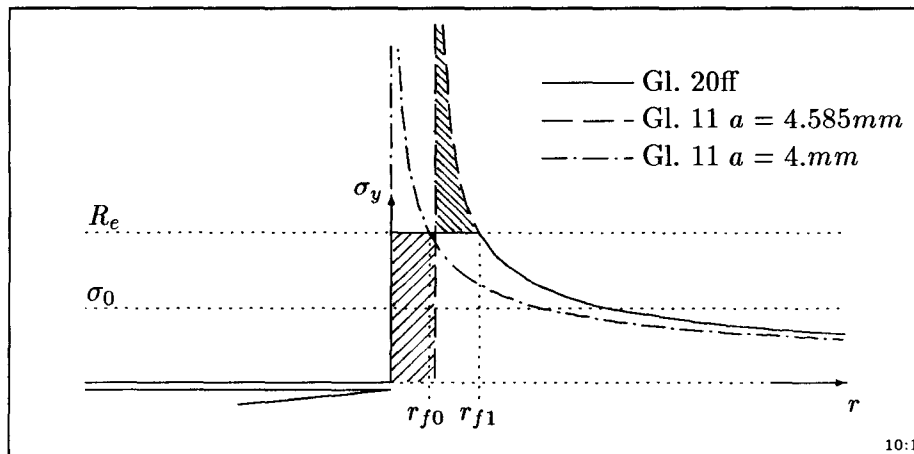


Abbildung 7: Längsspannung über dem Ligament

Genaugenommen ist auch der Geometriefaktor $Y(a)$ eine Funktion der Rißlänge und die Gl. 19 muß dann iterativ gelöst werden. Dieser Einfluß ist aber vernachlässigbar gering.

Die Spannungen können nun in den einzelnen Bereichen berechnet werden (Abb. 7):

$$\sigma_y = 0 \quad ; \quad 0 < r < a \quad (20)$$

$$\sigma_y = R_e \quad ; \quad a < r < r_{f1} \quad (21)$$

$$\sigma_y = \sigma_0 \sqrt{\frac{a + \frac{1}{2} r_{f1}}{2r - r_{f1}}} Y \quad ; \quad r_{f1} < r \quad (22)$$

Folgt auf die Belastungsphase eine Entlastung, so entspricht dieses einer Belastung in der Gegenrichtung bei einer verdoppelten Fließgrenze, die von der ersten Belastung subtrahiert

werden muß. Die Längsspannungen nach der Entlastung σ_y sind damit nach Gl. 24ff als Näherung für die Rißspitze berechenbar; sie sind in der Abb. 8 dargestellt. Die Abmessung der plastischen Zone r_{f2} nach der Entlastung beträgt:

$$r_{f2} = \frac{1}{\left(\frac{2R_e}{\sigma_0} \frac{1}{Y}\right)^2 - \frac{1}{2}} \cdot a = 0.264 \text{ mm} \approx \frac{1}{4} r_{f1} \quad (23)$$

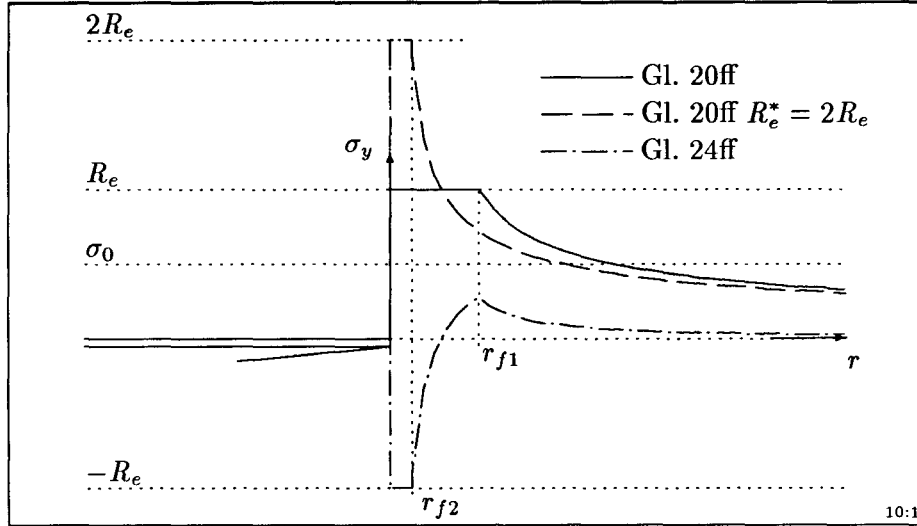


Abbildung 8: Längsspannung über dem Ligament nach der Entlastung

$$\sigma_y = 0 \quad ; \quad 0 < r < a \quad (24)$$

$$\sigma_y = -R_e \quad ; \quad a < r < r_{f2} \quad (25)$$

$$\sigma_y = R_e - \sigma_0 \sqrt{\frac{a + \frac{1}{8} r_{f1}}{2r - \frac{1}{4} r_{f1}}} Y \quad ; \quad r_{f2} < r < r_{f1} \quad (26)$$

$$\sigma_y = \sigma_0 \left(\sqrt{\frac{a + \frac{1}{8} r_{f1}}{2r - r_{f1}}} - \sqrt{\frac{8a + r_{f1}}{16r - 2r_{f1}}} \right) Y \quad ; \quad r_{f1} < r \quad (27)$$

Ein Kontakt der beiden Rißufer ist in dieser Abschätzung nicht enthalten. Es ist aber leicht abzusehen, daß dieser Kontakt durch die eingepprägten Dehnungen in der plastischen Zone verhindert wird und noch nicht stattfindet. Erst wenn die Probe anschließend gedrückt wird, berühren sich die Rißufer und die Rißspitze wird dann stark entlastet.

In der plastischen Zone werden die Gitterebenen voraussichtlich in der Ebene mit maximaler Schubspannung abgleiten. Durch die Gl. 6f lassen sich diese Ebenen berechnen.

Im EDZ kann keine Verformung in der Dickenrichtung stattfinden, daher erstreckt sich die plastische Zone halbkreisförmig um die Rißspitze und die Gleitebenen liegen senkrecht zur Probenoberfläche (Abb. 9). Beim ESZ dominieren die Schubspannungen unter 45°

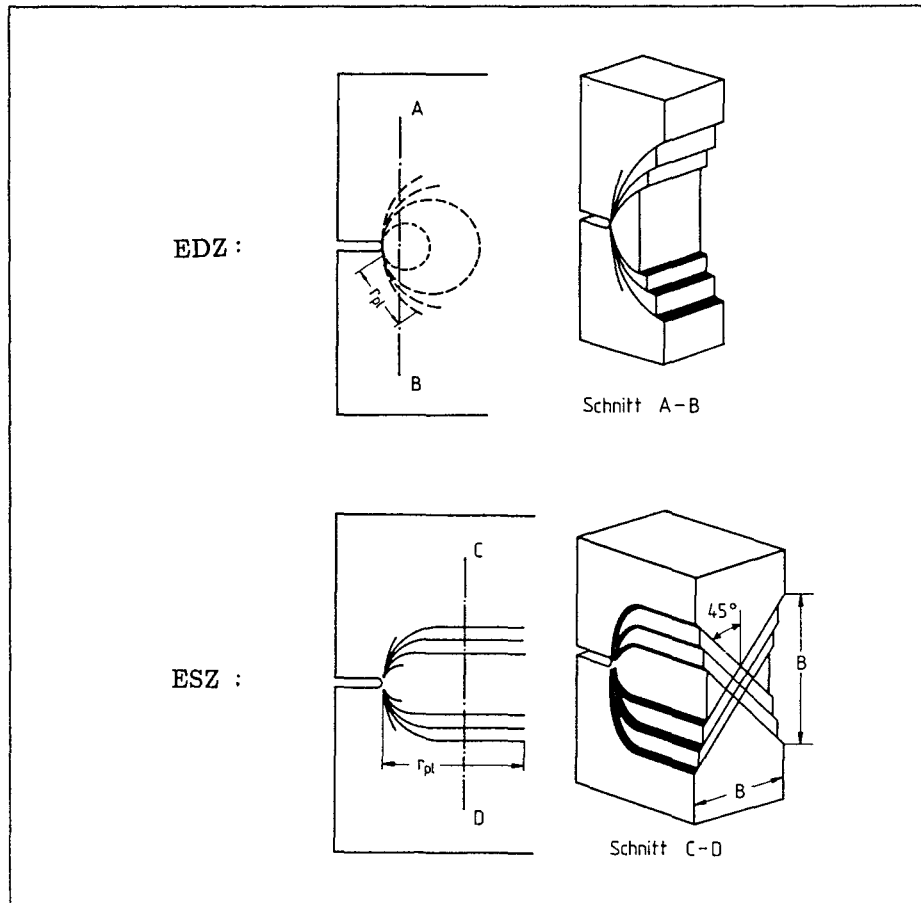


Abbildung 9: Abgleitebenen im ebenen Spannungs- und Dehnungszustand (aus [Wel85])

zur Oberfläche, so daß das Material keilförmig einsinkt. Beobachtungen bestätigen diese Mechanismen: die plastische Zone verläuft zunächst im EDZ senkrecht zum Ligament, um dannach in den ESZ überzugehen, wenn die Ausdehnung der plastischen Zone r_f die Probendicke überschreitet [Kan85, Bro88, Hel72].

Es muß noch einmal darauf hingewiesen werden, daß diese Überlegungen auf den linear-elastischen Näherungsgleichungen für das unmittelbare Rißspitzenumfeld basieren. Die Abb. 4 macht aber deutlich, daß diese Annahme für die Grenze der plastischen Zone r_f (bei $R_e/\sigma_0 = 0.5$) nur noch eine Abschätzung ist. Es wird auch nur das Gleichgewicht in der Längsrichtung für die Gesamtprobe wiederhergestellt, ohne die Scheibengleichungen zu erfüllen oder irgendwelche Fließregeln zu beachten.

Auch wird stillschweigend die Längsspannung gleich der Vergleichsspannung gesetzt. Im EDZ findet man durch Einsetzen der Spannungen aus Gl. 6ff in die Fließbedingung nach v. Mises eine Längsspannung, die um den Faktor 3 größer ist als die Fließspannung [Bro78]. Aber Beobachtungen an Proben haben immerhin bestätigt, daß die Größenordnung der zu beobachtenden plastischen Zone richtig erfaßt wird.

3 Das 2D-Scheibenmodell

Zunächst folgen einige Rechnungen mit einem FE-Modell aus Scheibenelementen. Zweck dieser Rechnungen ist es, einen direkten Vergleich mit bekannten Lösungen und Näherungen zu ermöglichen, die zum überwiegenden Teil im zweidimensionalen, ebenen Spannungs- oder Dehnungszustand formuliert sind.

Das FE-Modell wird aus isoparametrischen Scheibenelementen mit 8 Knoten [Bat86, Adi84] gebildet. Auch aus eigenen Beobachtungen liefert die numerische Integration nach der Gauss-Quadratur mit 2×2 Stützstellen die besten Ergebnisse [Schmi82, Red81, Yu77]. Es wurde ganz besonderer Wert darauf gelegt, daß die Elemente trotz der Netzverfeinerung zur Rißspitze hin möglichst rechtwinklig sind und daß sie ein Seitenverhältnis besser als 1:5 haben. Die Netzteilung orientierte sich dazu natürlicherweise an den Hauptspannungslinien.

Gleichzeitig war es zweckmäßig eine Netzeinteilung zu verwenden, die die Vorzüge der Elementgenerierung [Adi83] für die Scheiben- und die Volumenelemente voll ausnutzt.

Das gesamte Netz teilt sich in zwei Gebiete: den Fernbereich und den Nahbereich. Im Fernbereich befinden sich nur linear-elastische Elemente. Er wird bei den Rechnungen bis auf die Kopplungsknoten zum Nahbereich kondensiert. So ist es möglich, auch eine komplizierte Umgebung des Risses zu berücksichtigen, ohne daß die Rechenzeit bei den aufwendigen nichtlinearen Iterationen unnötig ansteigt. Alle nichtlinearen Elemente umfaßt der Nahbereich.

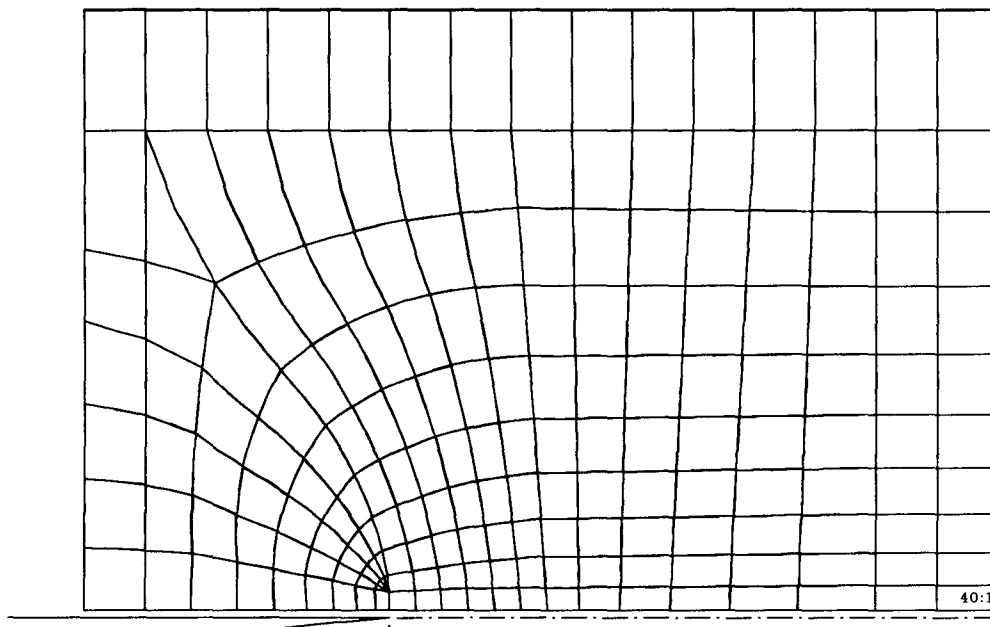


Abbildung 10: Das Netz im Nahbereich der Rißspitze

Die Elementspannungen werden nur für den Nahbereich berechnet und ausgewertet (mit Ausnahme einiger Kontrollrechnungen).

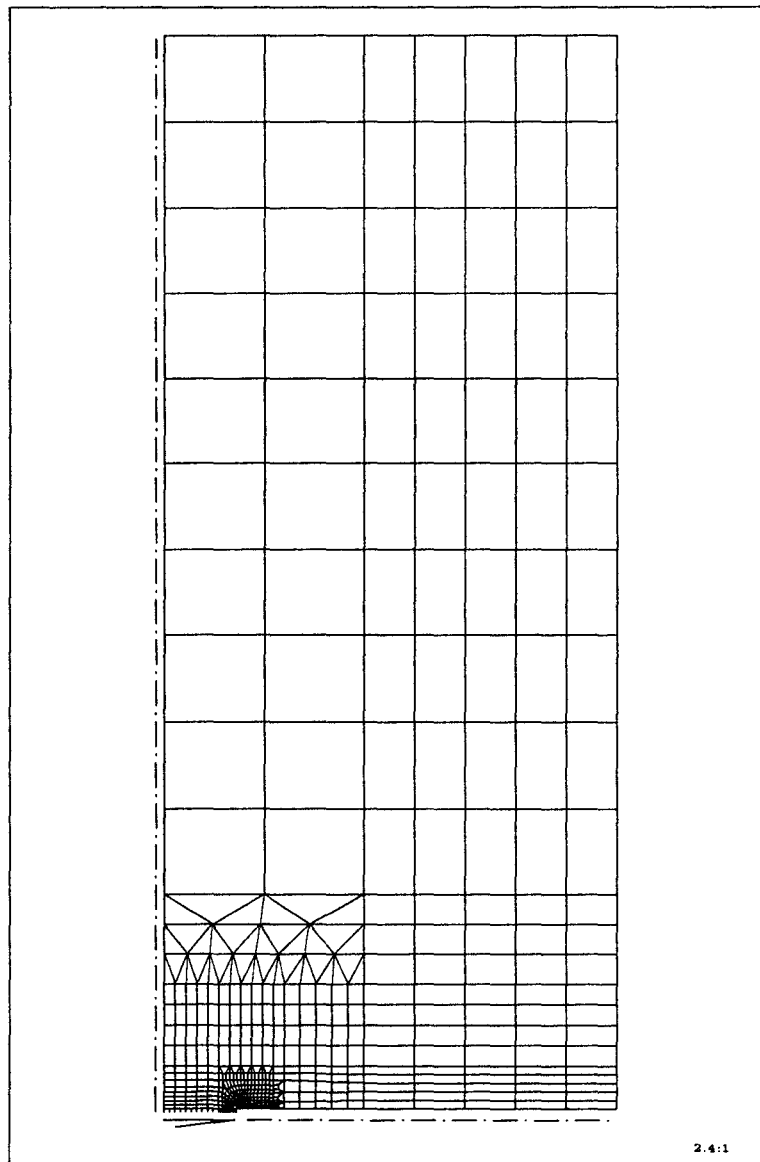


Abbildung 11: Das Netz der FE-Rechnung

Das gesamte Elementnetz ist in der Abb. 11 dargestellt. Die Symmetrieebenen werden genutzt, so daß nur $\frac{1}{4}$ Modell zu erstellen ist. In der Abb. 11 greift oben die Längskraft als Streckenlast an. Unten links sind die *Gap*-Elemente, die das Rißschließen erfassen können, entlang des Rißufers als Stäbe zu erkennen.

Das Modell umfaßt insgesamt 576 isoparametrische 8-Knoten Elemente, 26 *Gap*-Elemente mit 3684 Freiheitsgraden. Eine linear-elastische Rechnung verbraucht ca. 2:06 min. CPU-Zeit auf einer VAX 6310.

Auf Grund unabänderlicher Eigenheiten des ADINA-Programms muß die x-Achse in Dickenrichtung der Scheiben zeigen. In die Längsrichtung (in Abb. 11 nach oben) weist die z-Koordinate und in die Querrichtung (nach rechts) die y-Achse.

3.1 Die *Gap*-Elemente

Die *Gap*-Elemente sind spezielle Stabelemente, die durch ein geeignetes Materialgesetz Kontaktprobleme lösen können. Ihr Einsatz ist praktisch auf Formulierungen mit kleinen Verschiebungen beschränkt. Das Materialgesetz dieser Elemente ist nichtlinear: im Bereich der Zugspannungen wird der Elastizitätsmodul gleich Null gesetzt, so daß keine Zugkräfte aufgenommen werden. Im Druckbereich steht der übliche Elastizitätsmodul zur Verfügung. Allerdings bestehen dort auch die üblichen Einschränkungen, so darf der Tangentenmodul mit steigender Dehnung nur abnehmen. Es wäre aber gerade im Interesse der Konvergenz wünschenswert den Elastizitätsmodul langsam zu steigern. Da dieses aus den o.g. Gründen nicht erlaubt ist, bleibt als einzig sinnvolles Materialgesetz nur das bilineare, das in der Abb. 12 gezeigt wird.

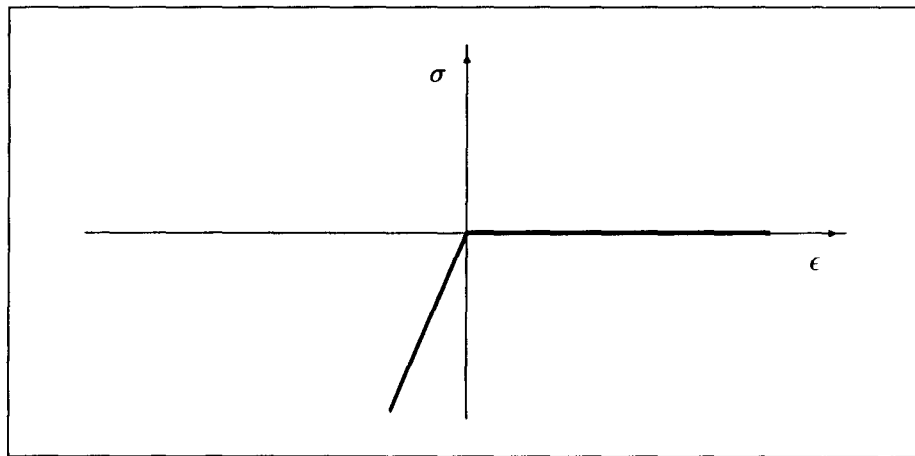


Abbildung 12: Das Materialgesetz für die *Gap*-Elemente

Um einen Kontakt der Rißufer (also in der Symmetrieebene) zu simulieren, muß man eigentlich eine sehr große Steifigkeit $c = \frac{EA}{l^*}$ des *Gap*-Elementes vorsehen. Aus den o.g. Gründen der Konvergenz der Gesamtrechnung muß man davon jedoch Abstand nehmen und eine kleine Verschiebung der Rißufer über die Symmetrieebene akzeptieren.

Bewährt hat sich eine fiktive Länge der Stäbe von $l^* = 0.02$ mm in Verbindung mit einem E-Modul und einer Fläche A , die der angrenzenden Scheibe entspricht. Die Überlappung beträgt dann max. 10^{-7} mm über die Symmetrieebene hinaus und ist damit bedeutungslos klein.

Bei der zweidimensionalen Scheibenrechnung ergeben sich zunächst noch keine Besonderheiten, aber bei einer Rechnung mit isoparametrischen Volumenelementen ist unbedingt zu beachten, daß ein konstanter Flächendruck zu konsistenten Knotenkräften führt, die in den Eckpunkten dem Druck entgegengesetzt sind. Die *Gap*-Elemente müssen in den Eckknoten also 'verkehrt' herum und in den Mittelknoten richtig herum installiert werden.

4 Linear-elastische FE-Scheibenrechnung

4.1 Vergleich mit der analytischen Rechnung

Ein Vergleich der exakten analytischen Lösung mit einer entsprechenden FE-Rechnung zeigt eine ausgezeichnete Übereinstimmung. Die FE-Rechnung wurde dabei mit Scheibenelementen im ebenen Spannungszustand ausgeführt. Für die an die Rißspitze grenzenden Elemente gilt, daß die Mittelknoten auf ein $\frac{1}{4}$ -Kantenlänge liegen, um die $\frac{1}{\sqrt{r}}$ Spannungssingularität besser zu erfassen. In der Abb. 13 sind die Iso-Vergleichsspannungslinien

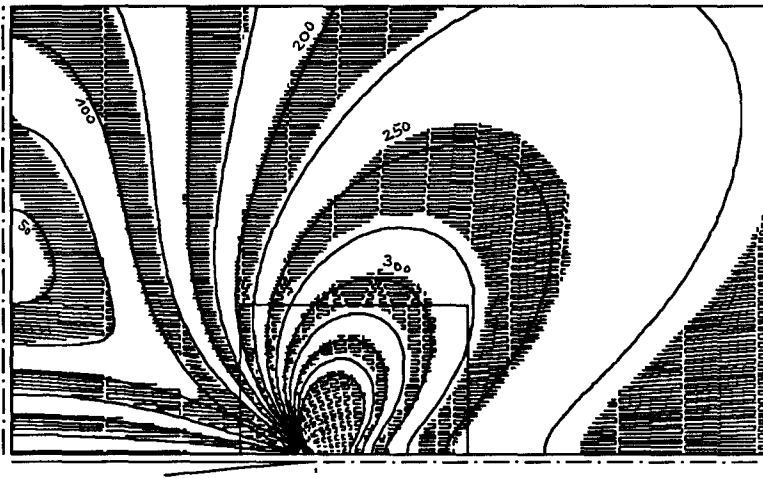


Abbildung 13: Vergleichsspannung σ_{vgl}

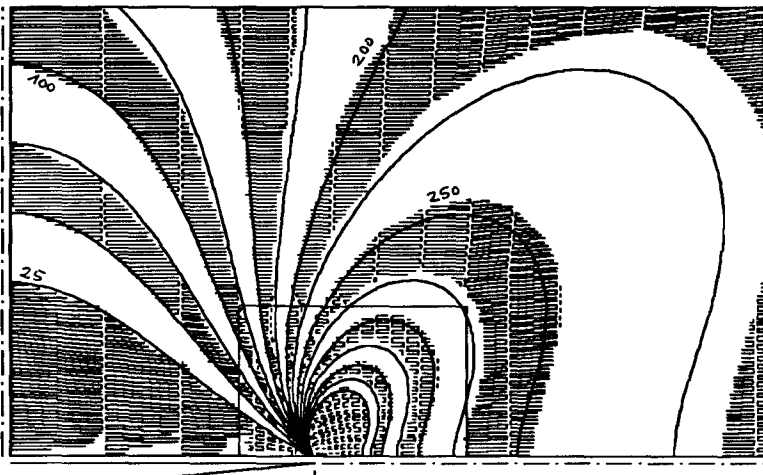


Abbildung 14: Normalspannung in Längsrichtung

entsprechend der analytischen Rechnung (wie in Abb. 3), sowie das Ergebnis aus der FE-Rechnung (als Schraffur) gleichzeitig dargestellt. Das kleine Rechteck um die Rißspitze umfaßt den Nahbereich, der später mit nichtlinearen Elementen modelliert wird.

Die Übereinstimmung kann besonders im Bereich der Rißspitze als sehr gut bezeichnet werden. Nur im rechten Bereich, also zu der freien Außenkante hin, weichen die Spannungen voneinander ab. Der Grund liegt darin, daß die analytische Rechnung von einer unendlich breiten Scheibe ausgeht, während in der FE-Rechnung die Breite auf 2x25mm begrenzt ist. Dies führt zu einer Erhöhung der Längsspannungen wie es die Abb. 14, in der die entsprechenden Isolinien und Schraffuren für die Längsspannung gezeigt werden, belegt.

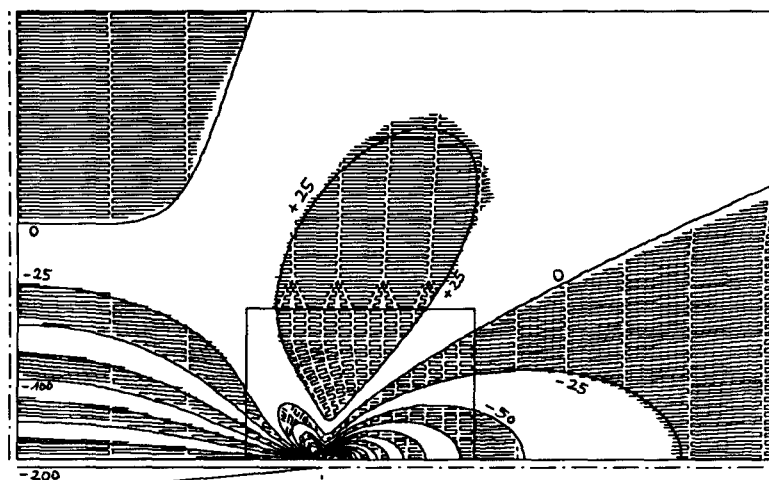
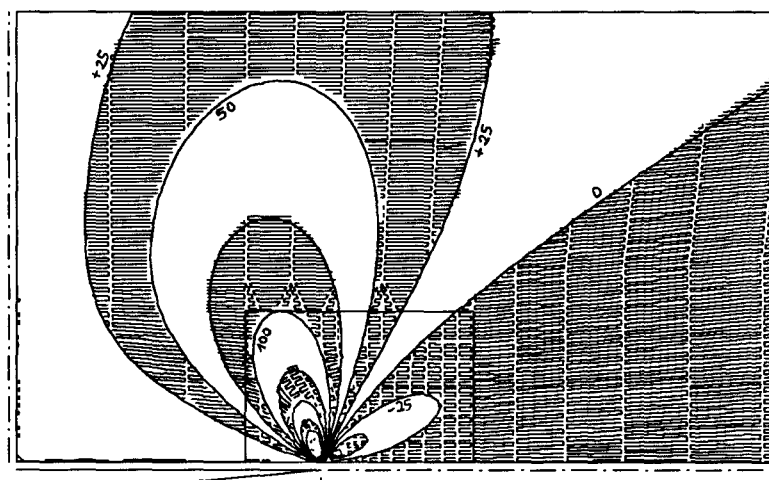


Abbildung 15: Normalspannung in Querrichtung

Abbildung 16: Schubspannung σ_{xy}

Der Vergleich der Querspannungen (Abb. 15) und der Schubspannungen (Abb. 16) ist so gut, daß kein Kommentar notwendig ist. Interessant ist die Querspannung im Bereich parallel zu den Rißufern. Sie erreicht am Rißufer das gleiche Niveau wie die Nennspannung und schlägt sich deutlich in der Vergleichsspannung nieder. Bei dünnen Proben kann es durch diese Druckspannungen auch zum Beulen kommen.

4.2 Der Spannungsintensitätsfaktor

Schon auf Seite 7 in Gl. 16 ist der Spannungsintensitätsfaktor zu $K_{I1} = 720.4 \text{ Nmm}^{-3/2}$ berechnet worden. Dieser Wert berücksichtigt bereits die endliche Scheibenbreite.

Ein in ADINA eingebauter Automat [Sus85] bestimmt die Ableitung des elastischen Potentials in Rißrichtung $d\Pi/da$ für den Rißspitzenknoten, das entspricht der negativen Energiefreisetzungsrate G und dem J-Integral, solange die plastische Zone sehr klein ist. Bei dieser Berechnung ist es absolut zwingend, die Rißspitze mit Dreieckselementen aufzumessen, deren seitlicher Mittelknoten auf $1/4$ Seitenlänge liegen und deren kollabierte Seite nur noch einen Knoten besitzt, damit der Spannungsansatz in diesen isoparametrischen Elementen gerade die vorliegende $1/\sqrt{r}$ Singularität aufweist [Bat86]. Andernfalls ist der Fehler trotz eines sehr feinen Netzes größer als 20%. Mit der Gl. 28f läßt sich dann leicht der Spannungsintensitätsfaktor zu $K_{I2} = 725.2 \text{ Nmm}^{-3/2}$ berechnen³.

$$\text{im EDZ: } K_{I2} = \sqrt{-2 \cdot \frac{E}{t(1-\nu^2)} \cdot \frac{d\Pi}{dy}} \quad (28)$$

$$\text{oder im ESZ: } K_{I2} = \sqrt{-2 \cdot \frac{E}{t} \cdot \frac{d\Pi}{dy}} \quad (29)$$

$$= 725.2 \text{ Nmm}^{-3/2} \quad (30)$$

Dieser Wert wird durch die manuelle Methode, den Rißspitzenknoten um eine Elementlänge zu lösen mit $K_{I3} = 720.2 \text{ Nmm}^{-3/2}$, nach (Gl. 31ff) bestätigt. Er stimmt gut mit dem analytischen Spannungsintensitätsfaktor $K_{I1}^*(a^*) = 724.2 \text{ Nmm}^{-3/2}$ überein, bei dem dann aber in die Gl. 15 die mittlere Rißlänge $a^* = a + 1/2 da$ eingesetzt wird.

Im Gegensatz zu dem ADINA-Automaten erhält man bei der manuellen Methode deutlich bessere Werte, wenn die Rißspitze ohne Berücksichtigung der speziellen Singularität aufgemessen wird. Der Grund liegt in der völlig deplazierten Spannungssingularität nach der Rißverlängerung. Es muß auch streng darauf geachtet werden, daß der Riß um ein ganzes Element vergrößert wird, da sonst die ungleiche Knotenkraftverteilung (1:4:1) eines isoparametrischen Elementes unter konstanter Last negativ durchschlägt.

$$K_{I3} = \sqrt{E \cdot \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{2}{\Delta a} \int_0^{\Delta a} \frac{1}{2} \sigma v dx} \quad (31)$$

$$= \sqrt{\frac{E \cdot \frac{1}{2} \sum F_y 2v_y}{t \Delta a}} \quad (32)$$

$$= 720.2 \text{ Nmm}^{-3/2} \quad (33)$$

Insgesamt kann man festhalten, daß die Übereinstimmung zwischen der analytischen Rechnung und FE-Rechnung sehr gut ist und daß das FE-Modell für die weiteren Berechnungen verwendet werden kann.

³Der Faktor 2 enthält den fehlenden, symmetrischen Anteil des Modells.

5 Nichtlineare FE-Scheibenrechnung

Die linear-elastische Rechnung führt schon bei kleinsten äußeren Lasten zu einer unendlich hohen Spannung in der Rißspitze. Das bedeutet, daß jede Fließspannung sofort überschritten wird. Offensichtlich versagen Bauteile aber nicht unbedingt, sondern es bildet sich eine plastische Zone.

Diese plastische Zone bewirkt zunächst eine Abrundung der Rißspitze und damit eine endliche Spannungsüberhöhung. Gleichzeitig vermindert sich mit dem Fließbeginn der Elastizitätsmodul für das Rißspitzenelement ganz erheblich, so daß nur noch ein geringer Spannungszuwachs erfolgt. Insgesamt entspricht das Verhalten eines einzelnen Elementes in der Rißspitze einem dehnungsgesteuerten Versuch und zwar aufgrund der großen elastischen Umgebung und des hohen Spannunggradienten [Red81].

Der Frage, ob ein ebener Dehnungszustand (EDZ) oder ein ebener Spannungszustand (ESZ) vorliegt, kommt eine besondere Bedeutung zu. An der Oberfläche der Probe und in großem Abstand von der Rißspitze liegt auf jeden Fall der ESZ vor. An der Rißspitze in der Probenmitte herrscht bei dicken Proben durch den hohen Spannungs- und Dehnungsgradienten sicherlich der EDZ. Im Übergangsbereich muß eine Mischform, also ein allgemeiner dreidimensionaler Spannungs- und Dehnungszustand vorliegen.

Aus den Spannungsfunktionen von Westergaard läßt sich die Größe der plastischen Zone für den EDZ und den ESZ abschätzen. Diese Zone ist im ESZ erheblich größer als im EDZ. Das sich daraus ergebende Modell der plastischen Zone über der Probendicke wurde von Irwin als Hundeknochenmodell (Abb. 6) bezeichnet.

5.1 Handhabung der nichtlinearen Rechnung

Die Rechnung ist in doppelter Hinsicht nichtlinear: erstens liegt für das Rißspitzengebiet ein nichtlineares Materialgesetz vor und zweitens wird das Schließen des Risses durch sog. *Gap*-Elemente simuliert. Für die Lösung eines solchen Problems wird die äußere Belastung schrittweise aufgebracht und in jedem Lastschritt iterativ durch wiederholtes Linearisieren und Korrigieren ein Gleichgewichtszustand hergestellt.

In dem ADINA-System stehen drei Lösungsalgorithmen für das linearisierte Gleichungssystem zur Verfügung: Modified Newton, Full-Newton-Raphson-Iteration und das Verfahren von Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shannosche (BFGS) [Bat86].

Die Steifigkeitsmatrix wird bei dem modifizierten Verfahren von *Newton-Raphson* nach fest vorgegebenen Intervallen der Lastschritte neu berechnet. Dies führt bei sprunghaft geänderter Steifigkeitsmatrix (z.B. durch den Rißuferkontakt) zu mangelnder Konvergenz und damit zum Abbruch der Rechnung.

Das BFGS-Verfahren hat erhebliche Schwierigkeiten, den Vorzeichenwechsel der Belastungszuwächse ($t = 10s$) zu verarbeiten. Häufig divergiert hier die Rechnung und wird erfolglos abgebrochen.

Bei der Full-Newton-Raphson-Iteration wird die Steifigkeitsmatrix nach jeder Iteration neu

berechnet, dies kostet pro Iterationsschritt sehr viel Rechenzeit. Bei den hier vorliegenden Unstetigkeiten in der Steifigkeitsmatrix ist es aber das einzige Verfahren, das zuverlässig konvergiert.

Bei allen iterativen Methoden muß die Iteration nach Erreichen einer zunächst unbekannten Anzahl von Verbesserungen abgebrochen werden. Als Konvergenzkriterium wird hier eine Energiebetrachtung verwendet, d.h. das Produkt der nicht ausbalancierten Kräfte mit den Verschiebungszuwächsen. Die nicht ausgeglichene Energie in der nullten Iteration des Lastschrittes wird bestimmt und der Iterationsvorgang abgebrochen, wenn die nicht ausgeglichene Energie der aktuellen Iteration 0,1 % hiervon unterschreitet.

Der Schrittweite, in der die Last aufgebracht wird, kommt eine wesentliche Bedeutung zu: Wählt man sie zu klein, so kommt die Rechnung nicht voran; wählt man sie zu groß, so verliert man den Vorteil wieder durch vermehrte Iterationsschritte. Es kann sogar vorkommen, daß die gefundene Lösung bei zu großer Schrittweite trotz Konvergenz nicht mehr korrekt ist. Es hat sich bewährt, die volle Zugbelastung in 20 Einzelschritten aufzubrin-

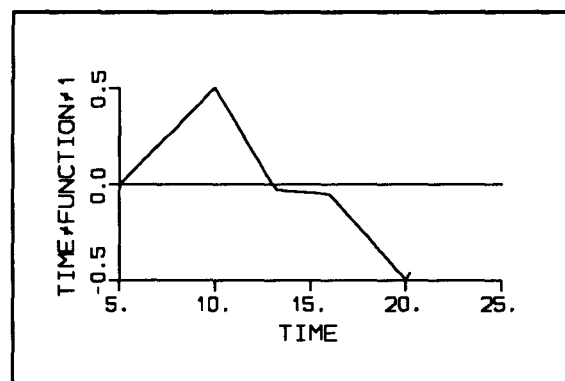


Abbildung 17: Der zeitliche Verlauf der Belastung

gen, danach die Last in 12 Schritten wieder auf Null abzusenken, dann den ersten Kontakt der Rißufer mit 12 Einzelschritten zu ertasten, um abschließend mit weiteren 16 Schritten volle Druckbelastung zu erreichen. Der Verlauf der Belastung wird durch eine Zeitfunktion gesteuert, die in Abb. 17 dargestellt wird. Sie wird mit konstanten Zeitschritten zu 0.25s abgearbeitet. Die Zeit ist hier nur eine zweckmäßige Variable, um eine veränderliche Lasthöhe zu definieren; sie versteht sich nicht im Sinn einer d'Alembertschen Trägheitskraft oder eines rheonomen Materialverhaltens.

Zum Startzeitpunkt $t = 5s$ und zur Zeit $t = 13s$ ist die äußere Last gleich null, bei $t = 10s$ herrscht die volle Zuglast von $\sigma_0 = 0.5R_e = 200 \frac{N}{mm^2}$ und bei $t = 20s$ die volle Drucklast $\sigma_0 = -200 \frac{N}{mm^2}$. Insgesamt werden 60 Lastschritte für die alternierende Belastung gerechnet.

Um sicherzustellen, daß die Schrittweite und Toleranz ausreichend klein sind, wurden als Gegenprobe Rechnungen mit feinerer Teilung gemacht. Die Ergebnisse dieser Rechnungen unterschieden sich nicht mehr von denen der oben beschriebenen Einteilung – die folglich geeignet ist. In den einzelnen Lastschritten sind bei dieser Einteilung 2 bis 3 Iterationen

notwendig. Das Gleichungssystem muß damit insgesamt ca. 150 mal linearisiert und gelöst werden.

5.2 Variation einzelner Parameter in der nichtlinearen 2D-Rechnung

Die Berechnung von Eigenspannungen an der Rißspitze hängt sicherlich von vielen Parametern ab. Es sind hier sowohl rechentechnische Parameter (z.B. Verfestigungsgesetz) wie auch reale Einflußgrößen (z.B. Rißspitzenradius) zu nennen.

Um den Grad des Einflusses zu bestimmen und damit zu finden, ab wann eine Ungenauigkeit tolerierbar ist, wurde eine Reihe von Rechnungen mit dem 2D-Modell durchgeführt. Die Tabelle 1 gibt einen Überblick, welche Parameterkombinationen gerechnet wurden.

Name	E^t	RB	Mat.ges.	$b/2a$	r	Besonderheit
A0	-	ESZ	-	6.	0.0	linear-elastisch
A1	0.	ESZ	-	6.	0.0	elast./ideal-plastisch
A2	210.	ESZ	iso.H.	6.	0.0	E^t sehr klein
A3	10000.	ESZ	iso.H.	6.	0.0	bilinear
A4	10000.	EDZ	iso.H.	6.	0.0	ebener Dehnungszustand
A40	0.	EDZ	-	6.	0.0	EDZ ideal-plastisch
A5	10000.	ESZ	kinem.H.	6.	0.0	kinematische Verfestigung
A6	10000.	ESZ	iso.H.	20.	0.0	Probenbreite 2x80.mm
A60	10000.	ESZ	kinem.H.	20.	0.0	Probenbreite 2x80.mm
A7	multi.	ESZ	iso.H.	6.	0.0	multilinearer $\sigma - \epsilon$ Verlauf
A9	10000.	ESZ	iso.H.	6.	0.08	Kerbradius
A10	10000.	ESZ	iso.H.	6.	0.0	Update Lagrange Formul.
A11	10000.	EDZ	kinem.H.	6.	0.0	kinem. Verfestigung + EDZ

Die einzelnen Spalten bedeuten:

Name : interne Benennung der Rechnung

E^t : Tangentenmodul im plastischen Bereich $\left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$ (*multi.=multilinear*)

RB : Scheibenrandbed.: *ebener Dehnungs-/Spannungszustand*

Mat.ges. : Verfestigungsgesetz : *isotrope / kinematische Verfestigung*

$b/2a$: Breiten/Rißlängen -Verhältnis

r : Kerbradius [mm]

Tabelle 1: Variationen der FE-Scheibenrechnungen

Die Rechnungen wurden z.T. mit zwei verschiedenen Netzen ausgeführt. Da hierbei keine unerwarteten Effekte auftraten, wird darauf nicht näher eingegangen. Eine Fehlerbetrachtung beim Übergang zu sehr groben Netzen ist in [Boh90] enthalten.

Im Folgenden sind die einzelnen Einflußgrößen dargestellt, wobei die Rechnung A3 i.allg. als Referenzrechnung dient.

5.2.1 Ideal-plastische Rechnung

Unter der Bezeichnung A1 wurde eine erste Rechnung mit folgenden Parametern gemacht: Ebener Spannungszustand (ESZ), elastisch/ideal-plastisches Materialgesetz, Fließgrenze $R_e = 400 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, Nennspannung $\sigma_0 = 200 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, halbe Rißlänge $a = 4 \text{ mm}$ und einer Probenbreite $b = 50 \text{ mm}$.

In 20 Belastungsschritten (bis zur Zeit $t = 10 \text{ s}$) wurde die volle Nennbelastung aufgebracht; vor der Rißspitze hat sich die entsprechende plastische Zone aufgebaut. Der Verlauf der Beträge der Spannungen wird über dem Ligament in der Abb. 18 oben wiedergegeben.

Das Diagramm zeigt drei dünne Kurven: die oberste Kurve stellt die Normalspannungen in der Längsrichtung σ_z der Probe dar, darunter wird der Verlauf der Vergleichsspannung σ_{vgl} gezeigt und die unterste Kurve gibt die Spannungen quer zur Probe also parallel zu den Rißufern σ_y wieder. Die Schubspannung σ_{yz} muß hier aus Symmetriegründen verschwinden.

Mit dickem Stift wurde die Längs- und die Vergleichsspannung hineingezeichnet, wie sie sich aus der Westergaard-Lösung (Gl. 2ff) für eine Rißlänge $a^* = a + \frac{1}{2}r_{f1} = 4.585 \text{ mm}$ (Gl. 19) ergeben würde. Obwohl die Abschätzung der Größe von der plastischen Zone aus der Näherungslösung kam, ist die Übereinstimmung mit der FEM-Rechnung sehr gut.

Die Vergleichsspannung wird nach Huber-v.Mises-Hencky oder auch nach der Gestaltänderungsenergiehypothese bestimmt:

$$\sigma_{vgl} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + 3(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)} \quad (34)$$

Bei Scheibenelementen verschwinden die Schubspannungen σ_{xy} und σ_{xz} natürlich immer. Die Spannung in Dickenrichtung σ_x ist im ESZ definitionsgemäß gleich null.

Die Ausdehnung der plastischen Zone mit ihrer Begrenzung auf eine Vergleichsspannung von $\sigma_{vgl} = 400 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ ist deutlich zu erkennen. Die Spannung in Längsrichtung σ_z nimmt den Maximalwert des ESZ an $\sigma_z = \sqrt{\frac{4}{3}} R_e = 461.9 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ mit der dazugehörigen Spannung in Querrichtung $\sigma_y = 0.5 \sigma_z = 230.9 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$. Entlang des Rißufers wird die Vergleichsspannung nur noch durch die Spannung in Querrichtung σ_y beherrscht.

Der Spannungsabfall unmittelbar an der Rißspitze – zum freien Rißufer hin – erfolgt sehr rapide; es kommt auch zu einigen kleinen Überschwüngen in allen Spannungen. Die absolute Ausdehnung dieser Störung läßt sich durch eine feinere Elementierung vermindern, aber sie reicht immer ein bis zwei Elemente weit.

Die Spannungen werden auch nicht exakt auf dem Ligament ausgegeben, sondern in den am nächsten gelegenen Integrationspunkten (ca. $\frac{1}{4}$ Elementbreite vom Ligament entfernt). Dadurch sind noch geringe Längsspannungen am freien Rißufer möglich.

In der Abb. 18 unten wird flächenhaft die Verteilung der Vergleichsspannung mittels eines Bandplotts aufgezeigt. Bei diesem Bandplott werden alle Gebiete deren Vergleichsspan-

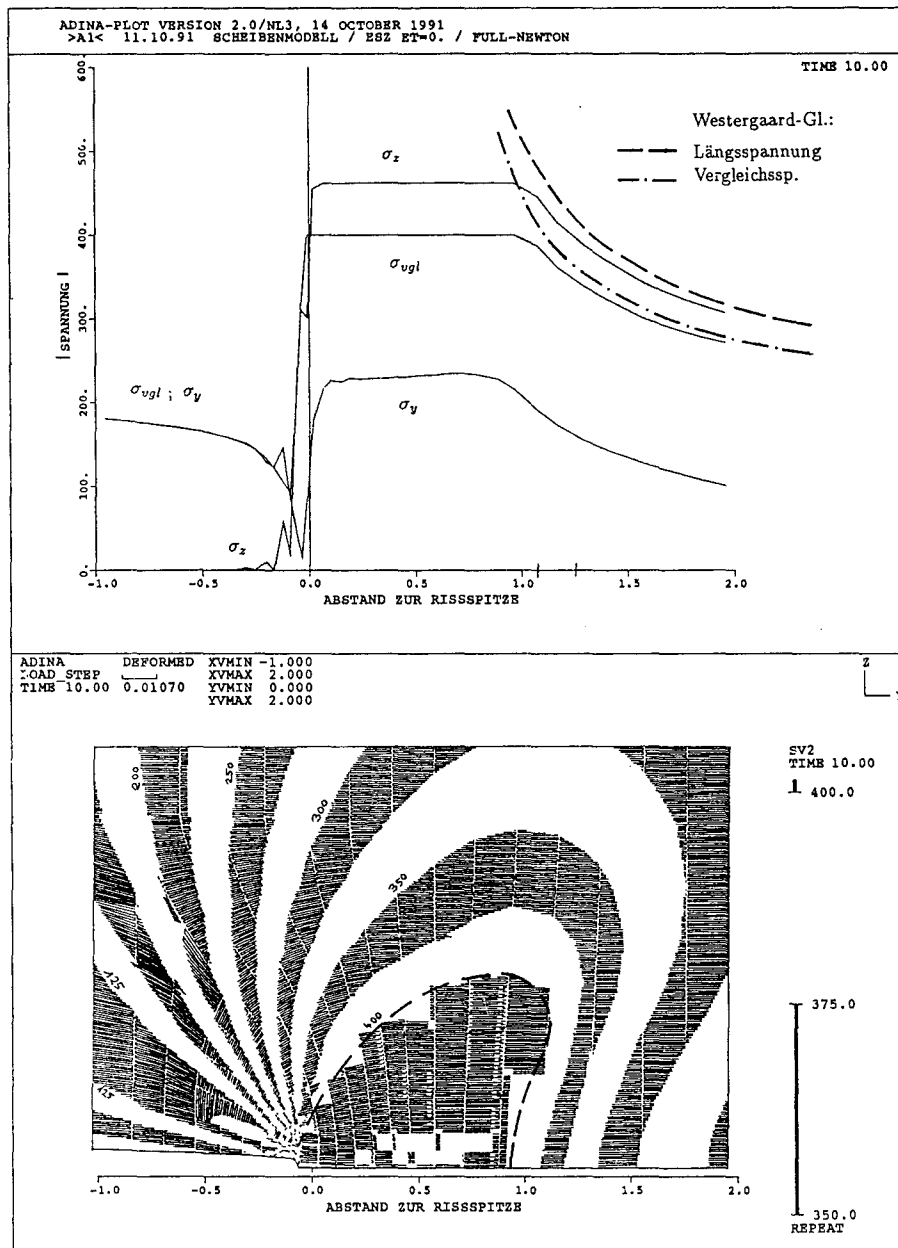


Abbildung 18: Ideal-plastische Rechnung A1 (Zuglast)

nung innerhalb eines Invalles von hier $\Delta\sigma = 25 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ liegen in der gleichen Farbe dargestellt. Als Farben wurden dabei nur schwarz und weiß verwendet, die sich stetig abwechseln. Oberhalb der Fließspannung $R_e = 400 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ kommt nur noch schwarz zur Anwendung. Die Legende des Bandplots befindet sich an der rechten Seite der Zeichnung.

Der Bandplot ist in der verformten Geometrie abgebildet, daher hat sich die Rißspitze etwas (nach links in der Abb. 18) zur Symmetrielinie hin verschoben. Die Deformationen sind circa um den Faktor 25 überzeichnet.

Verglichen mit der Kontur der Isospannungslinien in der linearen Rechnung in Abb. 3 ist die plastische Zone in dieser Rechnung eher dreieckig, mit einer vorderen Flanke unter 45° . Die maximale Ausdehnung beträgt 1.4 mm, auf dem Ligament erstreckt sich die plastische Zone 1.05 mm weit und liegt damit in der Abschätzung nach Irwin aus Gl. 19 mit $r_{f1} = 1.17$ mm.

Es fällt auf, daß die Kontur der plastischen Zone im Gegensatz zu den übrigen Spannungsbändern sehr eckig ist. Die Spannungsbänder werden aus den Dehnungsansätzen und dem Stoffgesetz berechnet. Für ein Element, bei dem der eine Teil der Integrationspunkte bereits plastiziert ist und der andere noch nicht, ergibt dieser Ansatz einen inkompatibelen Spannungsverlauf, der eine Schrankenüberschreitung ausschließlich in den Integrationspunkten (bzw. auf deren Verbindungslinien) zuläßt⁴. Dieses Phänomen läßt sich leicht wie in Abb. 18 durch einen Strak von Hand beheben.

In der plastischen Zone sind einige Elemente zu sehen, deren Vergleichsspannung unter der Fließgrenze liegt. Der erste Verdacht, daß die endliche Schrittweite der Belastung an diesem Fehler schuld ist, hat sich nicht bestätigt. Auch mit stark verkleinerten Schritten bleiben diese Elemente unter dem Limit. Der Effekt beruht auf einer numerischen Ungenauigkeit – die Vergleichsspannung liegt auch nur wenig (bis zu $2 \frac{N}{mm^2}$) unter der Fließgrenze. Bei der Rechnung A2 mit einem geringfügig positiven Tangentenmodul verschwindet dies ganz.

Im Anschluß an die erste Belastung wird das Modell in 12 Schritten entlastet ($t = 13s$), bis die äußere Kraft ganz verschwunden ist. In der linear-elastischen Rechnung wären nun auch alle inneren Spannungen gleich null, aber durch die bleibenden plastischen Dehnungen, die in der plastischen Zone eingepreßt sind, stellt sich nun ein nichttrivialer Spannungszustand ein.

Die Abb. 19 zeigt wieder im oberen Teil den Verlauf der Beträge der Spannungen und im unteren Teil den dazugehörigen Bandplott der Vergleichsspannung. Im Diagramm werden wieder die absoluten Beträge der Spannungen gezeigt. Das Vorzeichen ist in der kleinen Skizze zu sehen. Die obere Spannungskurve gehört zur Längsspannung σ_z , darunter dann die Vergleichsspannung σ_{vgl} und die Spannung in Querrichtung σ_y . Unmittelbar an der Rißspitze herrschen Druckspannungen – beim Abstand von $r = 0.6$ mm erfolgt der Nulldurchgang. Der Rand der ehemaligen plastischen Zone hat sich als Zugspannungsmaximum eingepreßt. Insgesamt stimmen die Spannungsverläufe qualitativ mit den Erwartungen nach Abb. 8 überein.

Die flächige Verteilung der Vergleichsspannung wird in dem Bandplott der Abb. 19 dargestellt. In einiger Entfernung von der Rißspitze sind alle Spannungen verschwindend klein. Unmittelbar vor der Rißspitze liegt ein Gebiet mit hohen Druckspannungen und davor ein kleiner Bereich mit Zugspannungen.

Die Zusammensetzung der Vergleichsspannung ist aus der Abb. 22 deutlicher zu erkennen. Hier wird die Vergleichsspannung σ_{vgl} , die Spannung in Längs- und Querrichtung (σ_z und σ_y), sowie die Schubspannung σ_{yz} als Bandplott gezeigt. Im wesentlichen bestimmen die Längsspannungen mit der Druck- und Zugzone die Vergleichsspannungen.

⁴Diese Betrachtung gilt streng genommen nur für orthogonale Elemente, deren Hauptspannungen parallel zu den Elementkanten liegen.

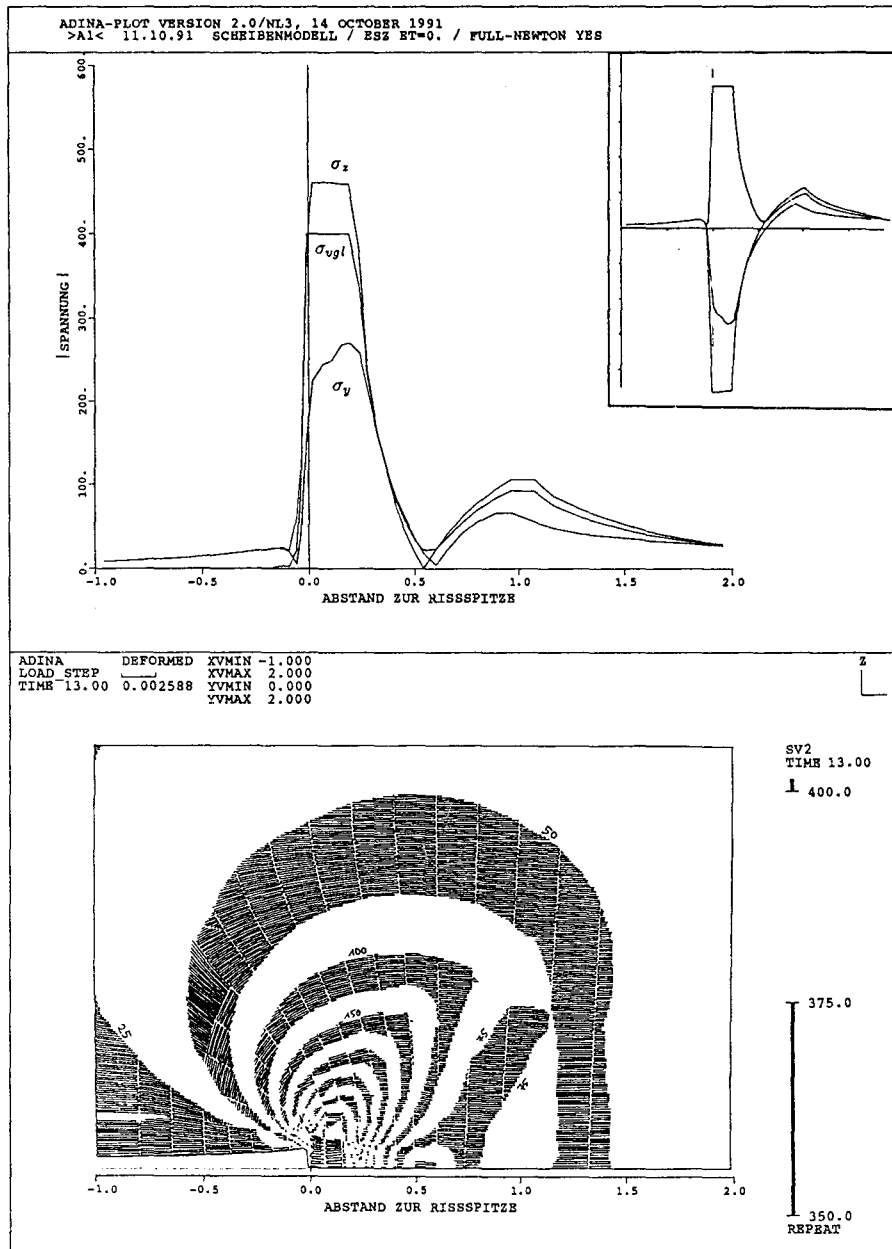


Abbildung 19: Ideal-plastische Rechnung A1 (entlastet)

Nach der Entlastung wird das Modell langsam mit einer Druckspannung beaufschlagt. Ohne die *Gap*-Elemente würden sich die Rißufer überschneiden und der Spannungszustand wäre das vorzeichenverkehrte Gegenstück zur Belastung. Durch das Abstützen der Rißufer wird die plastische Zone aber sehr stark entlastet. Das Ergebnis bei der vollen Druckspannung von $\sigma_0 = -200 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ ist in der Abb. 20 dargestellt. Die Normalspannungen σ_z und σ_y sind Druckspannungen und im Diagramm durch die Betragsbildung hochgeklappt. In guter Näherung kann man sagen, daß dem entlasteten Zustand in Abb. 19 nur eine konstante Druckspannung in Längsrichtung aufaddiert wurde – so als wäre der Riß nicht vorhanden. Da die Fließgrenze weiterhin vorhanden ist, dehnt sich die plastische Zone auch ein wenig

aus. Ein Effekt wie bei der Entlastung (Subtraktion mit doppelter Fließgrenze) ist aber nicht zu beobachten.

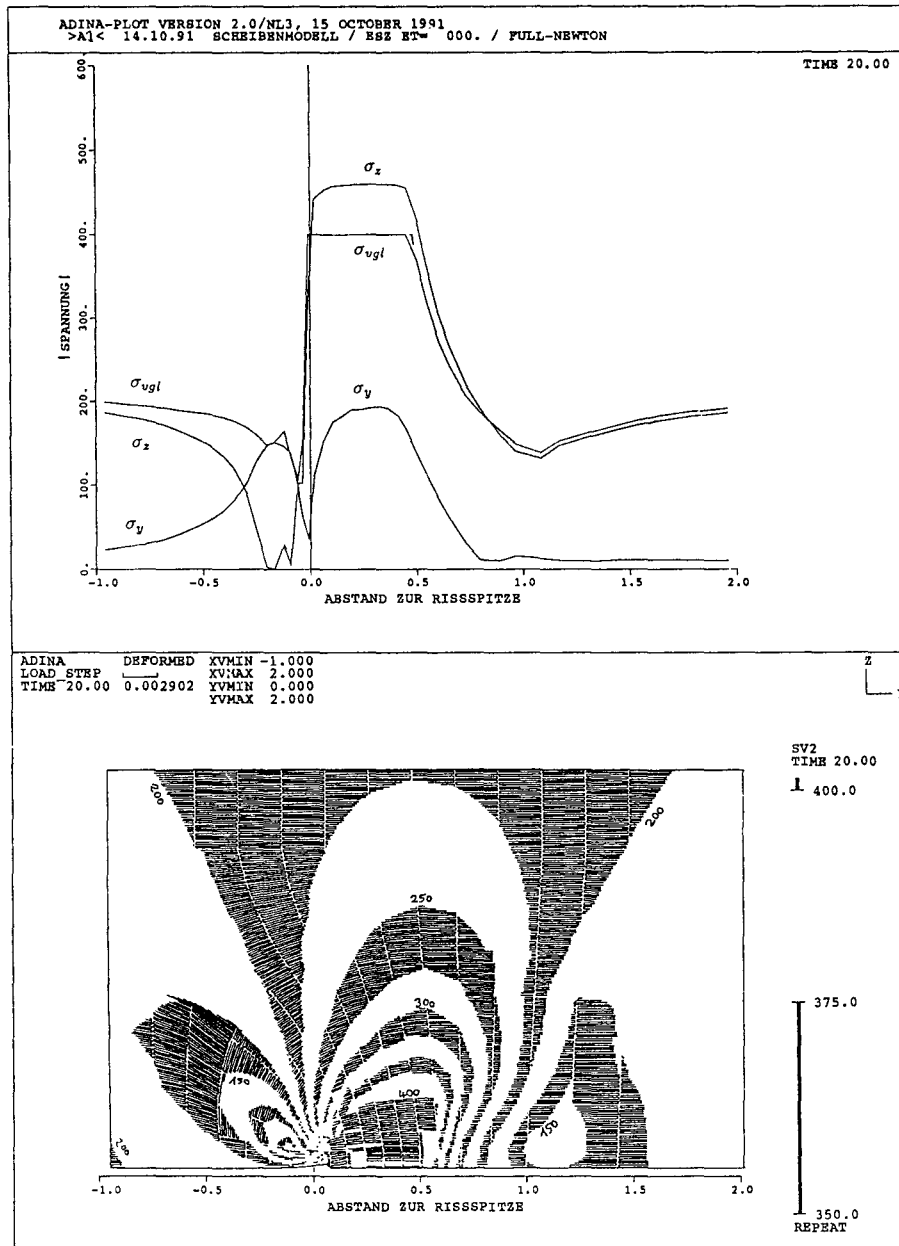


Abbildung 20: Ideal-plastische Rechnung A1 (Drucklast)

Der erste Rißuferkontakt tritt bei einer Nennspannung von $\sigma_0 \approx -0.033R_e = -13 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ auf. Dieser Wert hängt vom Verhältnis der Probenbreite zur Rißlänge $b/2a$ und dem Spannungsverhältnis R_e/σ_0 ab. Je größer die Zuglast war und je größer das Breitenverhältnis desto mehr Druckspannung ist notwendig, um den Riß zu schließen. Der Kontakt setzt zuerst in der Probenmitte und dann zur Rißspitze hin ein. Unmittelbar an der Rißspitze befindet sich ein kleiner Bereich, der sich nie schließt. In der gleichen Weise wie man einen plastisch gebogenen Balken durch einfaches Zurückbiegen nicht wieder geradbiegen kann,

so kann man auch einen Riß mit plastischer Zone durch Druck nicht wieder vollständig schließen. Die plastische Zone bleibt unwiderruflich eingepreßt.

Untersuchungen an Rissen unter zyklischer Wechsellast [Wel85] haben gezeigt, daß sich dort der Riß zuerst an der Rißspitze schließt. Im Eigenspannungszustand werden die Rißufer aufeinandergepret. Nach einer einzelnen Überlast liegen auch dort Eigenspannungen in der Form der Abb. 19 vor.

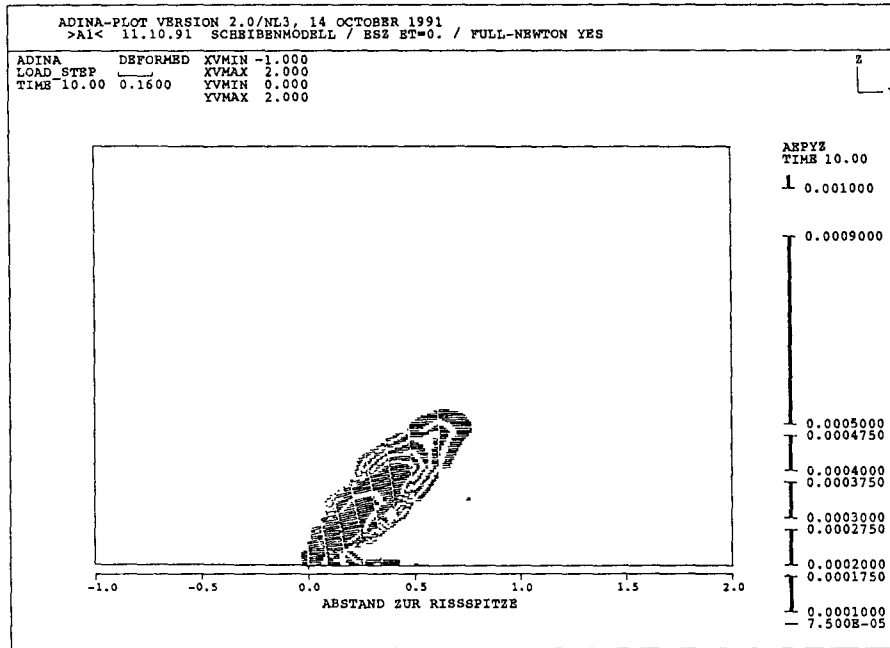


Abbildung 21: Lüders-Bänder in der ideal-plastischen Rechnung A1

An der realen Probe ist nach einer Belastung mit plastischen Effekten eine sichtbare Veränderung der Probenoberfläche, die sog. Lüders-Bänder festzustellen. Dieses sind die Gebiete, in denen die Gitterebenen durch die Schubspannungen versetzt werden. In der FEM-Analyse werden dieses Bänder durch die Gebiete mit großer plastischer Schubdehnung repräsentiert. Die Abb. 21 zeigt einen Bandplott mit dem Absolutbetrag der plastischen Schubdehnungen zur Zeit $t = 10s$ (Zugbelastung). Ab einer plastischen Schubdehnung von $|\epsilon_{yz}^p| = 0.0001$ wird das Gebiet schwarz markiert. Die „Höhenlinien“ dieser Darstellung können der Legende des Bandplott entnommen werden. Diese Zone erstreckt sich in eine Länge von $r_f = 1.0$ mm und unter einem Winkel von 45° in die Probe.

Der minimal dargestellte Wert von $|\epsilon_{yz}^p| = 0.0001$ ist im Vergleich mit der maximal möglichen elastischen Schubdehnung sehr klein:

$$\epsilon_{yz}|_{max} = \frac{2(1+\nu)}{\sqrt{3}} \frac{R_e}{E} = 0.0029 \quad (35)$$

Wenn diese Zone mit dem Lüders-Band auch quantitativ identisch ist, dann wird an der realen Probe eine Ausdehnung der plastischen Zone von $r_f = 1.0$ mm gemessen, statt wie oben beschrieben $r_f = 1.4$ mm. Die anschließende Drucklast verändert die Lüders-Bänder in der Rechnung nicht mehr.

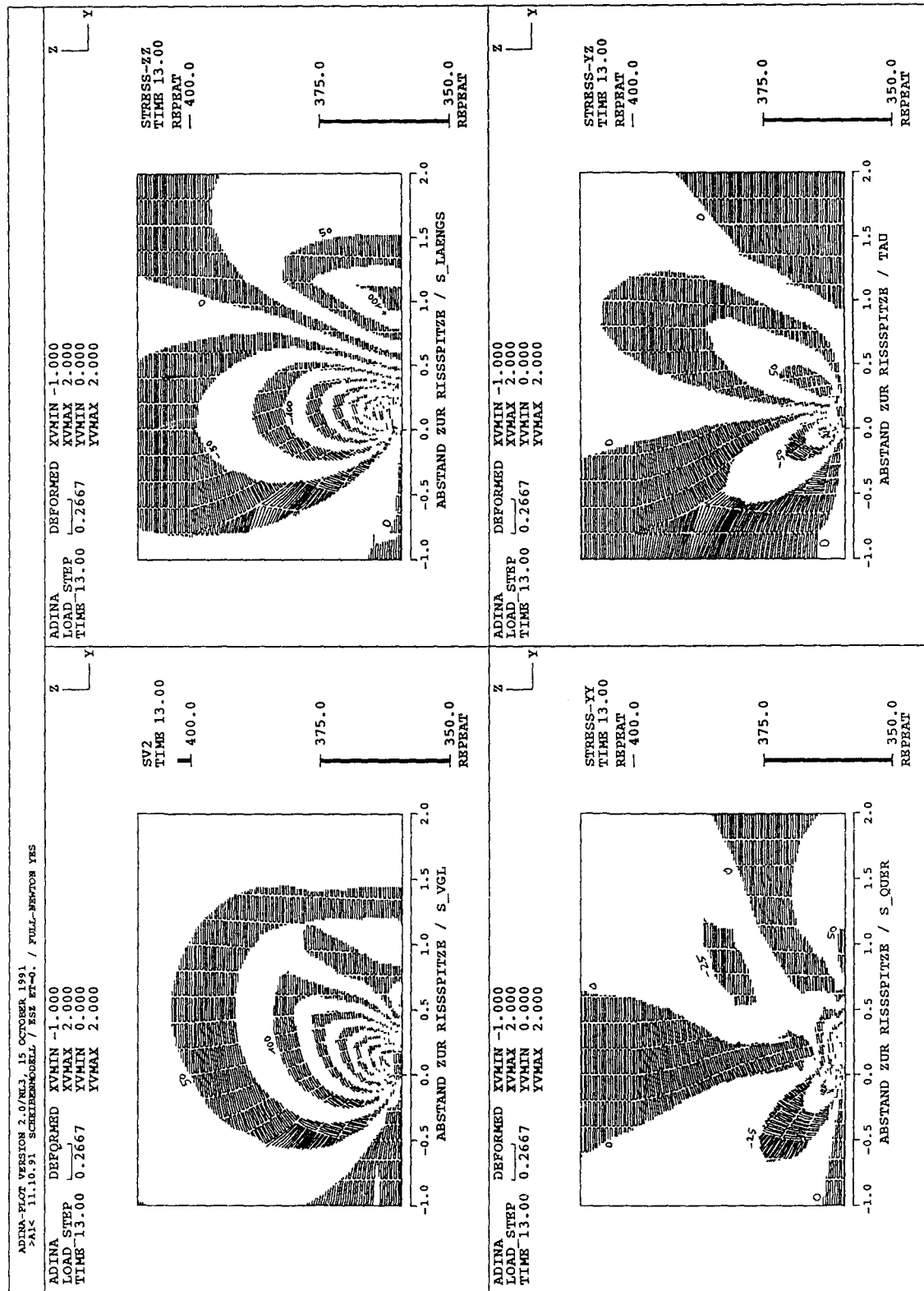


Abbildung 22: Die Spannungen in der ideal-plastischen Rechnung A1 (entlastet)

5.2.2 Isotrope oder kinematische Verfestigung

Zunächst sollen die beiden Verfestigungsarten kurz erläutert werden⁵.

Erreicht die Vergleichsspannung den Wert der Fließspannung, so steigt bei beiden Verfestigungsarten die Vergleichsspannung nur noch proportional zur Vergleichsdehnung mit dem Tangentenmodul an.

$$\delta\sigma_{vgl} = E^t \cdot \delta\epsilon_{vgl} \quad (36)$$

Im zweidimensionalen Fall entspricht die Kurve konstanter Vergleichsspannung (Fließfläche) einer Ellipse in der Hauptspannungsebene mit der großen Halbachse unter 45° .

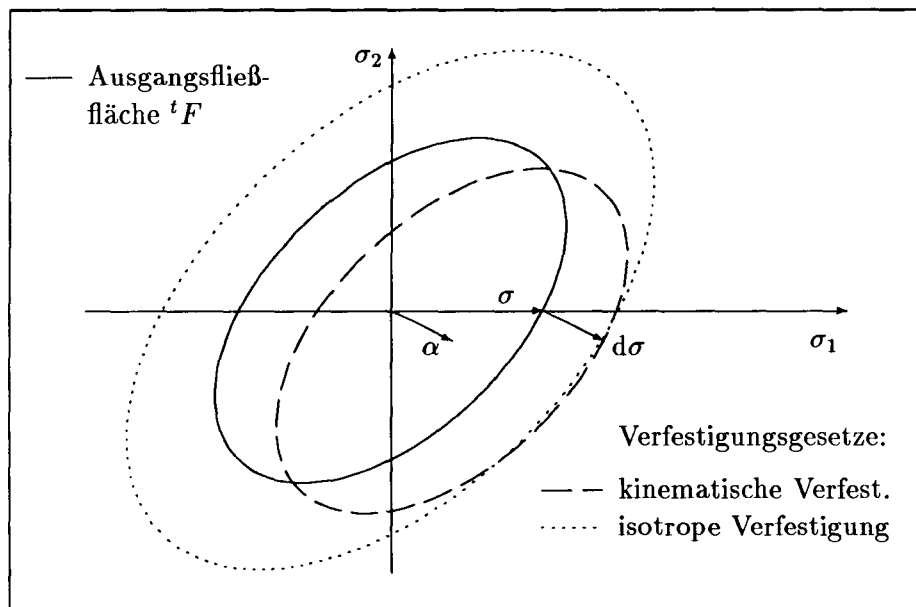


Abbildung 23: Vergleich der Fließflächen bei isotroper/kinematischer Verfestigung

Bei der isotropen Verfestigung wird diese Fließfläche nun mit steigender Dehnung vergrößert; der Mittelpunkt verschiebt sich nicht (Abb. 23). Hingegen wird bei der kinematischen Verfestigung die Fließfläche mit dem Einsetzen der plastischen Dehnung nur verschoben, aber nicht vergrößert. Der Verschiebungsvektor des Mittelpunktes wird dabei als kinematische Spannung α bezeichnet und bei der Berechnung der Vergleichsspannung berücksichtigt.

Für einen dehnungsgeregelten Zugversuch (Dehnungsverhältnis $R = -1$) ist die Konsequenz im σ - ϵ -Diagramm in der Abb. 24 für diese beiden Varianten gegenübergestellt.

Das Vorzeichen der plastischen Dehnung spielt offensichtlich bei der isotropen Verfestigung keine Rolle, das Material verfestigt sich immer weiter. Ein Bauschinger-Effekt wird überhaupt nicht berücksichtigt und eine zyklische Belastung zieht eine monoton steigende Verfestigung nach sich. Die kinematische Verfestigung ist für zyklische Belastungen

⁵Eine eingehende Darstellung bezüglich der inneren Mechanismen wird im Kapitel 8 gegeben.

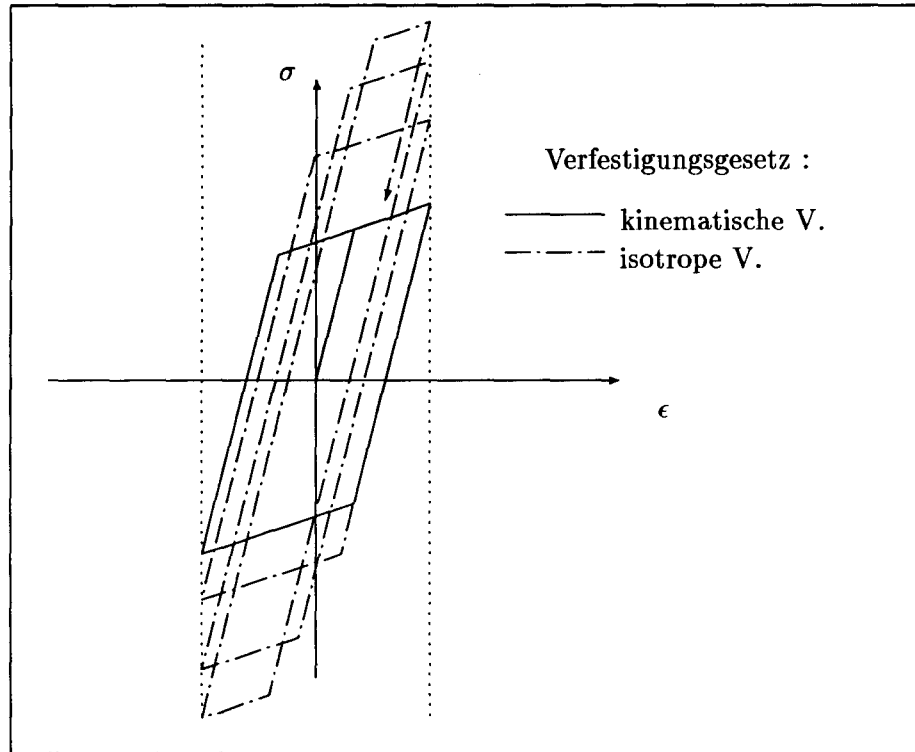


Abbildung 24: Vergleich isotrope/kinematische Verfestigung

grundsätzlich geeignet, aber ihr fehlt ein Anstieg der Fließgrenze infolge der Kaltverfestigung. Diese beiden Verfestigungsarten stellen die Grenzwerte dar, die mit der Fließbedingung von Huber-v.Mises-Hencky möglich sind. Der allgemeine Fall, daß die Fließfläche sowohl vergrößert, als auch verschoben wird, läßt sich nicht erfassen.

Die nächste Rechnung (A3) wurde mit den folgenden Parametern ausgeführt: isotrope Verfestigung, Ebener Spannungszustand (ESZ), bilineares Materialgesetz $E^t = 10000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, Fließgrenze $R_e = 400 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, Nennspannung $\sigma_0 = 200 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$, halbe Rißlänge $a = 4 \text{ mm}$ und einer Probenbreite $b = 50 \text{ mm}$.

Direkt zu vergleichen ist diese Rechnung mit A5 bei der sich nur das Verfestigungsgesetz unterscheidet; A5 wurde mit kinematischer Verfestigung berechnet.

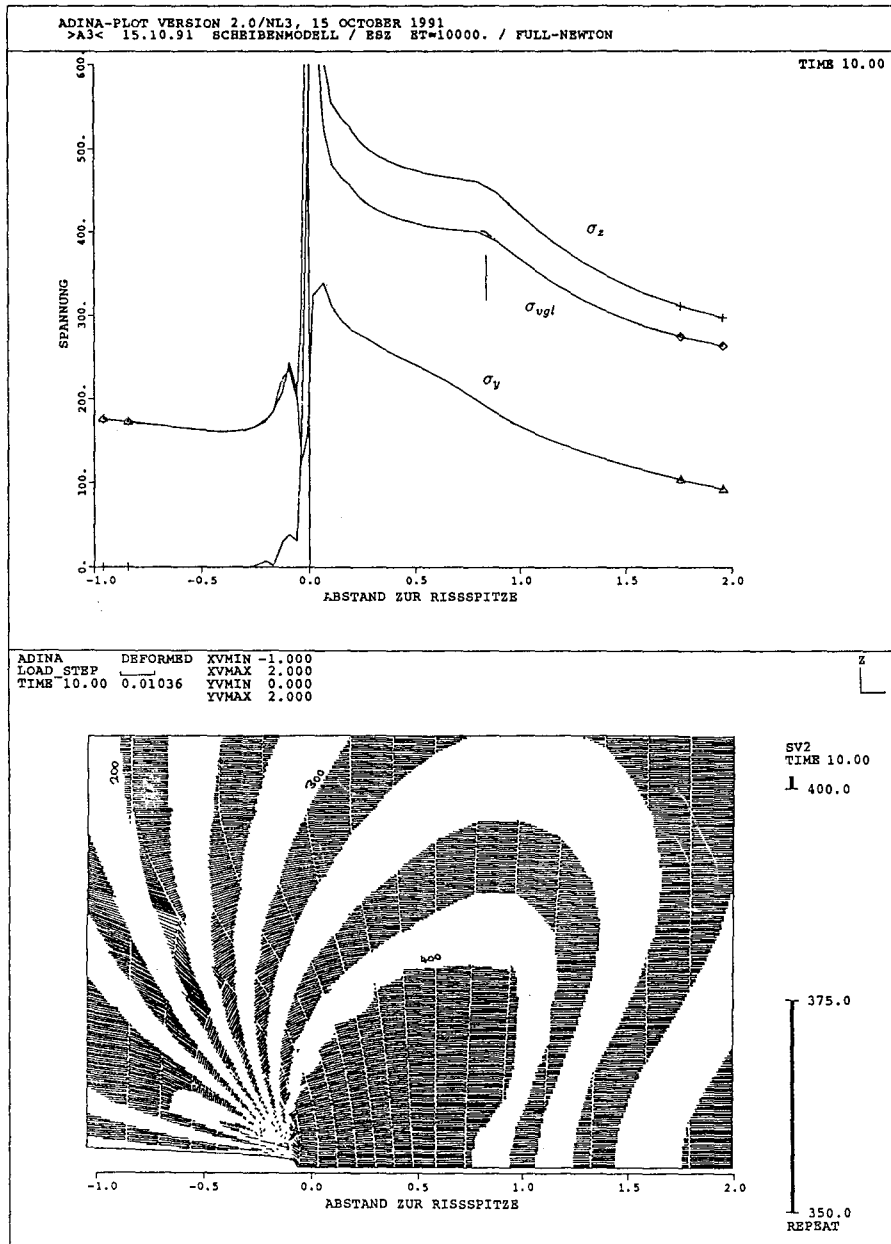


Abbildung 25: Isotrope Verfestigung A3 (Zuglast)

Die Abb. 25 zeigt die plastische Zone (von A3) nachdem die volle Zugspannung $\sigma_0 = 200 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ aufgebracht wurde. Oben werden in dem Diagramm die Beträge der Spannungen dargestellt, darunter ist der Bandplott der Vergleichsspannung. Im Gegensatz zur idealplastischen Rechnung (Abb. 18) steigen die Spannungen nicht nur zur plastischen Zone hin entsprechend der Singularität an, sondern auch innerhalb der plastischen Zone beginnt wieder ein Spannungsanstieg. Es ist nun leicht vorstellbar, wie der Spannungsverlauf bei einem multi-linearen Materialgesetz aussieht: jeder Knick im Materialgesetz führt zu einer Girlandenspitze.

Die plastische Zone in der Rechnung mit Verfestigung ist auch ein wenig kleiner als in

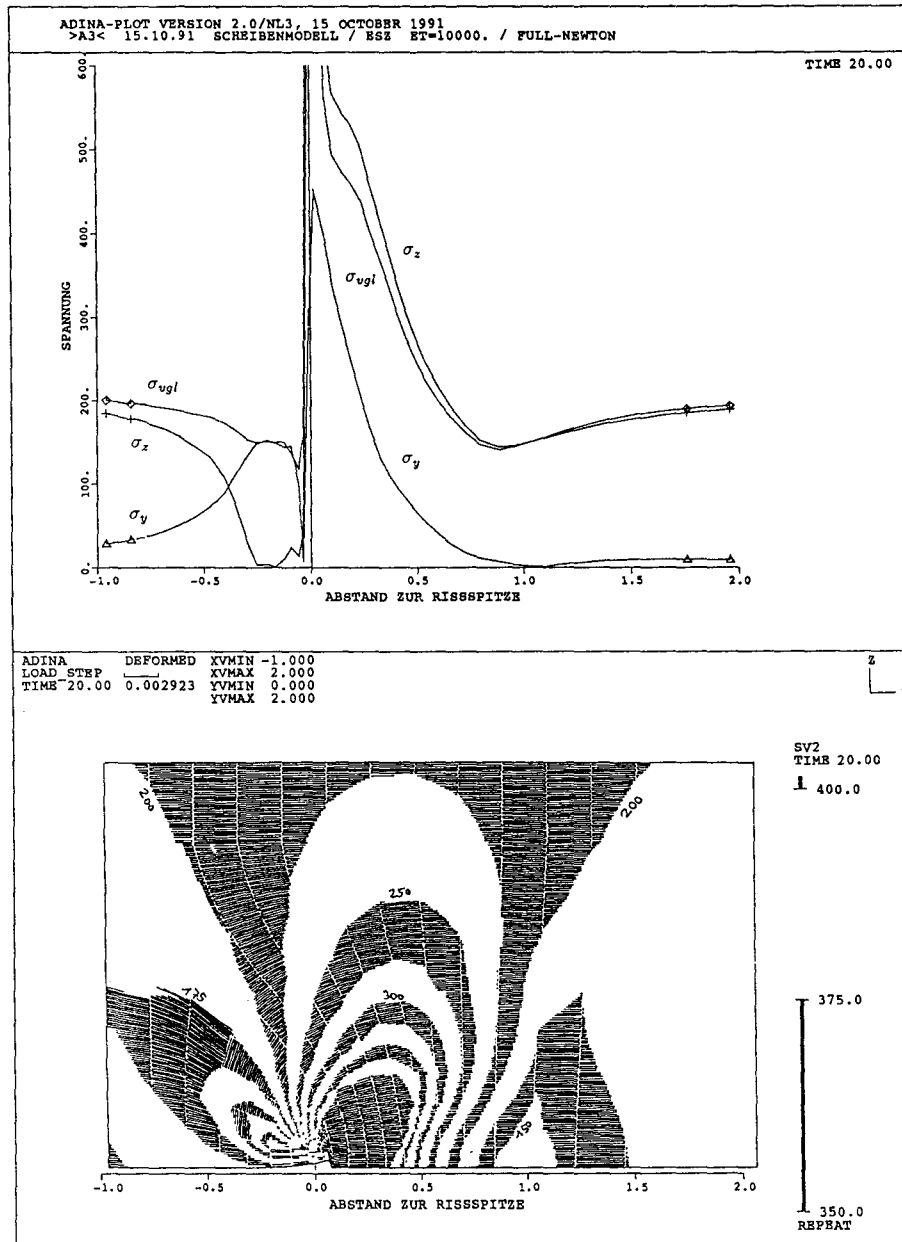


Abbildung 26: Isotrope Verfestigung A3 (Drucklast)

der ideal-plastischen Rechnung. Eine einfache Betrachtung des Kräftegleichgewichtes in Längsrichtung läßt dieses auch erwarten. Die Ausdehnung im Ligament beträgt $r_f = 0.85 \text{ mm}$ und die max. Größe $r = 1.41 \text{ mm}$ liegt unter 45° .

Die Abb. 26 zeigt den Zustand, der sich nach dem Beaufschlagen mit der Druckspannung von $\sigma_0 = -200 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ einstellt. Die Kontur der plastischen Zone hat sich weitgehend verwischt und die Spannungen können aus den o.g. Gründen fast beliebig hoch ansteigen. Das Ergebnis dieser Rechnung ist als Folge der isotropen Verfestigung fehlerhaft.

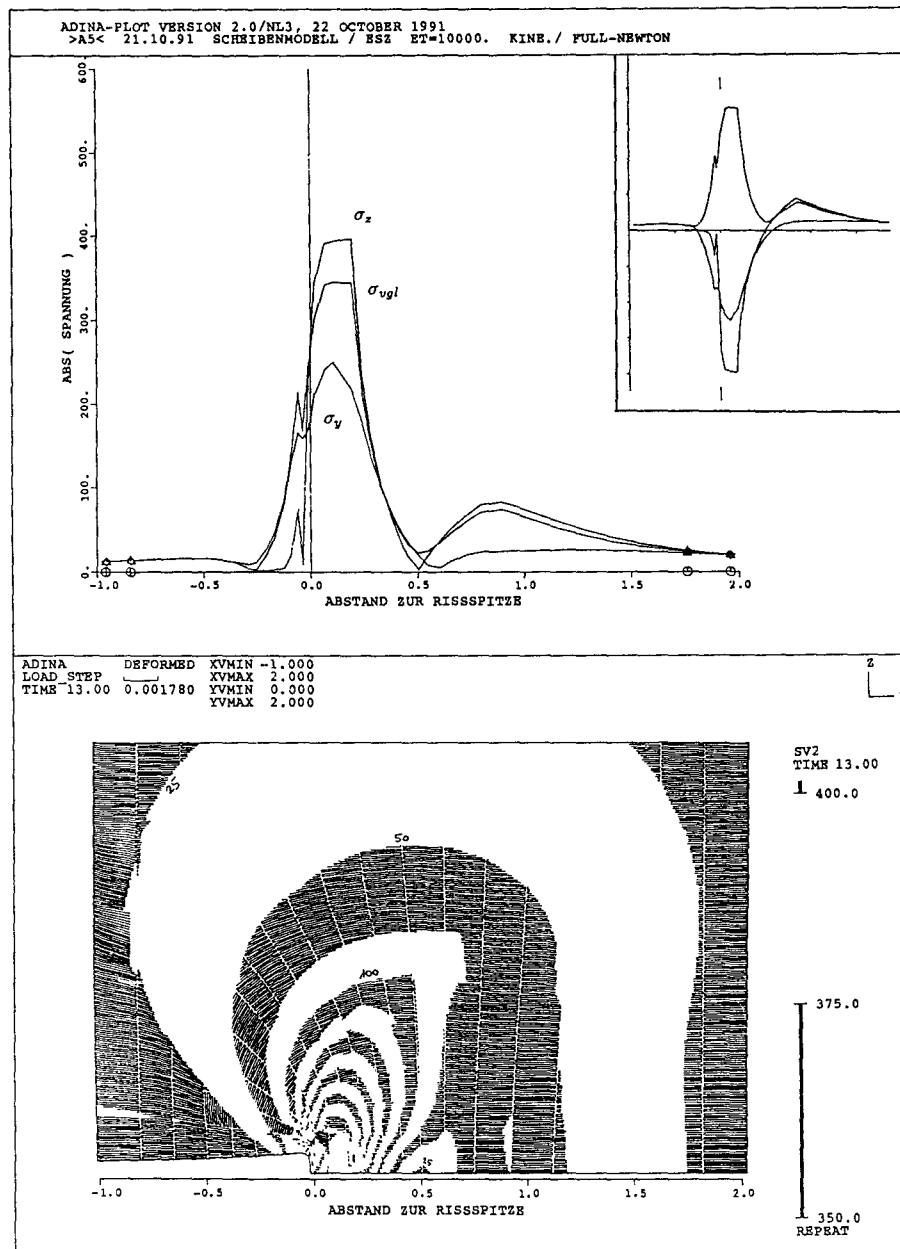


Abbildung 27: Kinematische Verfestigung A5 (entlastet)

In der Rechnung mit kinematischer Verfestigung A5 sieht die Belastung mit der Zugspannung genauso aus wie bei der isotropen Verfestigung. Der Unterschied, ob die Fließfläche vergrößert (isotrop) oder verschoben (kinematisch) wird, ist bei monotoner Belastung nahezu bedeutungslos. Erst bei der anschließenden Entlastung Abb. 27 und bei der Drucklast Abb. 28 weicht die kinematische Verfestigung von der isotropen ab.

Nach der Entlastung ist die plastische Zone im Ligament $r_f = 0.19$ mm groß. Der Begriff 'plastische Zone' ist hier stets so zu verstehen, daß das Gebiet angesprochen ist, in dem das Fließkriterium erfüllt ist. Es spielt dabei keine Rolle, ob die Vergleichsspannung

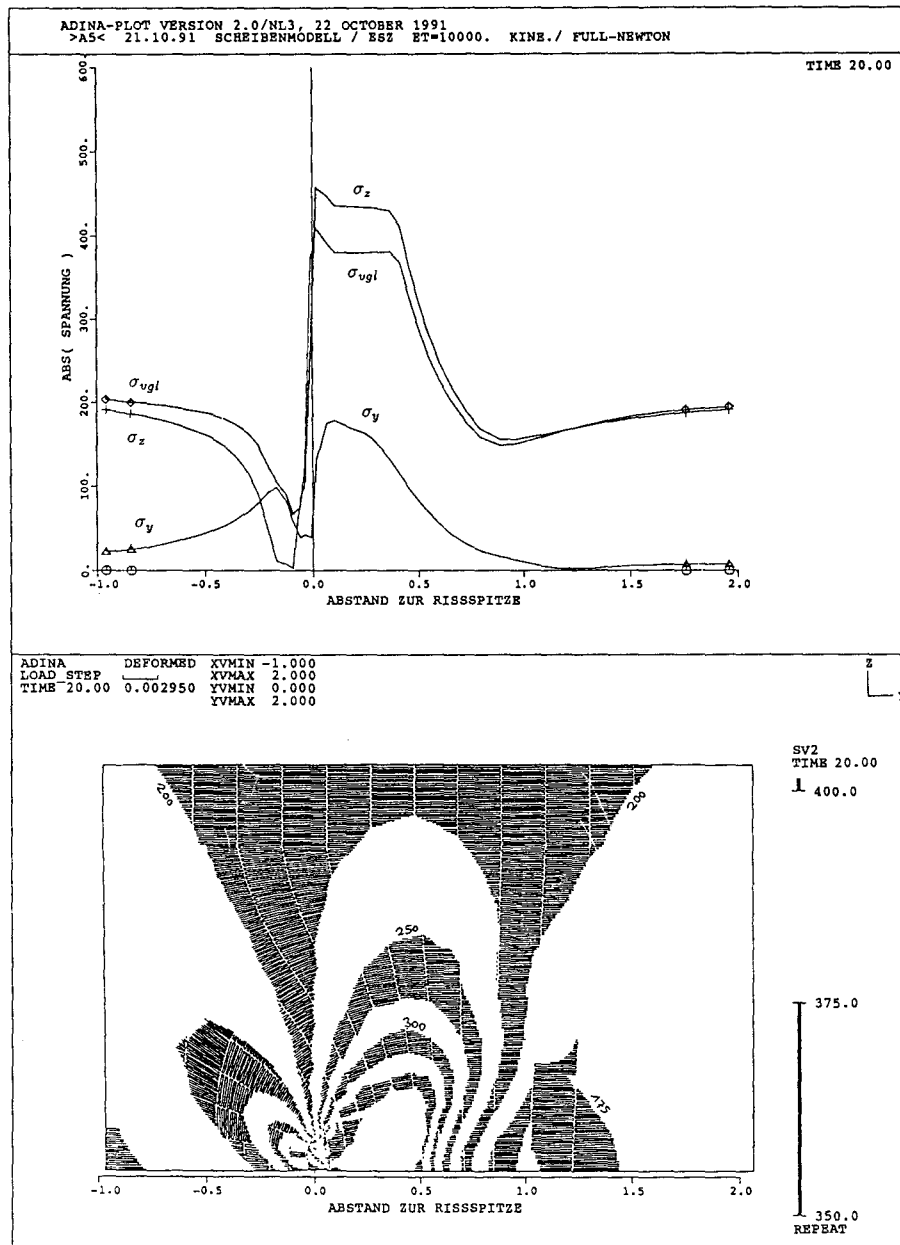


Abbildung 28: Kinematische Verfestigung A5 (Drucklast)

über oder unter der Fließgrenze R_e ist. Hieraus ergibt sich sofort eine Schwierigkeit bei der Darstellung der plastischen Zone: Nur das Fließkriterium ist zur Kennzeichnung des plastischen Gebietes geeignet. Evtl. kann man noch die Differenz der plastischen Dehnung zwischen zwei Schritten als Kriterium heranziehen.

Die anschließende Druckbelastung bringt quasi nur noch eine Addition von $\sigma = -200 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ mit einer geringfügigen Vergrößerung der plastischen Zone. Die Vorgänge sind direkt mit der ideal-plastischen Rechnung vergleichbar. Die plastische Zone hat am Ende einen Radius von $r_f = 0.4 \text{ mm}$.

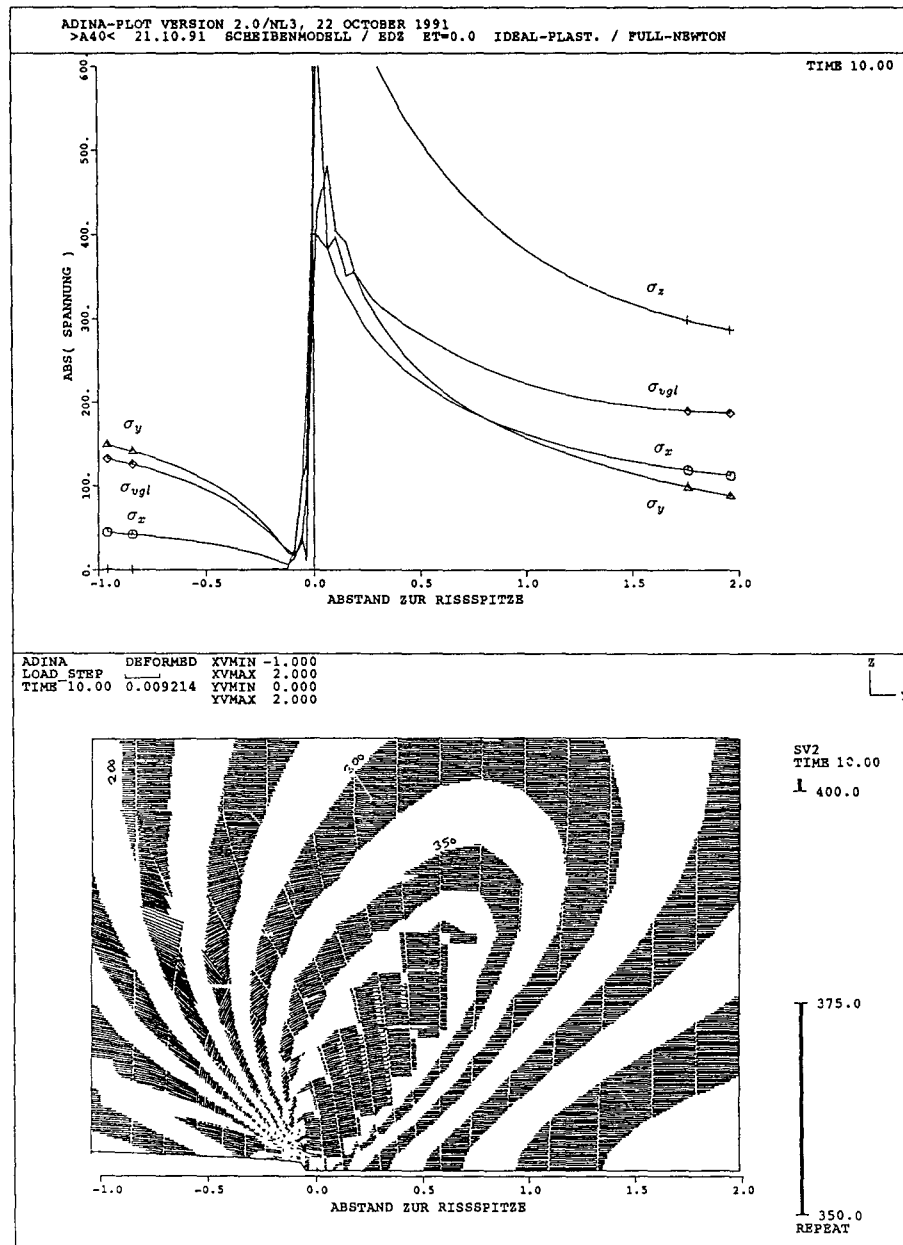


Abbildung 29: Ideal-plastische EDZ-Rechnung A40 (Zuglast)

5.2.3 EDZ – ESZ

Bei allen Rechnungen mit Scheibenelementen muß man zwischen den beiden Varianten ebener Dehnungszustand (EDZ) und ebener Spannungszustand (ESZ) wählen. Im Allgemeinen ist eine eindeutige Zuordnung problemlos möglich. Bei angerissenen Zugproben liegt aber immer eine Mischform zwischen diesen beiden Extremen vor. Selbst dünne Proben haben durch den hohen Spannungsgradienten noch eine Dehnungsbehinderung in der Rißspitze. Der EDZ läßt sich auch in einer dicken Probe nur in der Probenmitte zu-

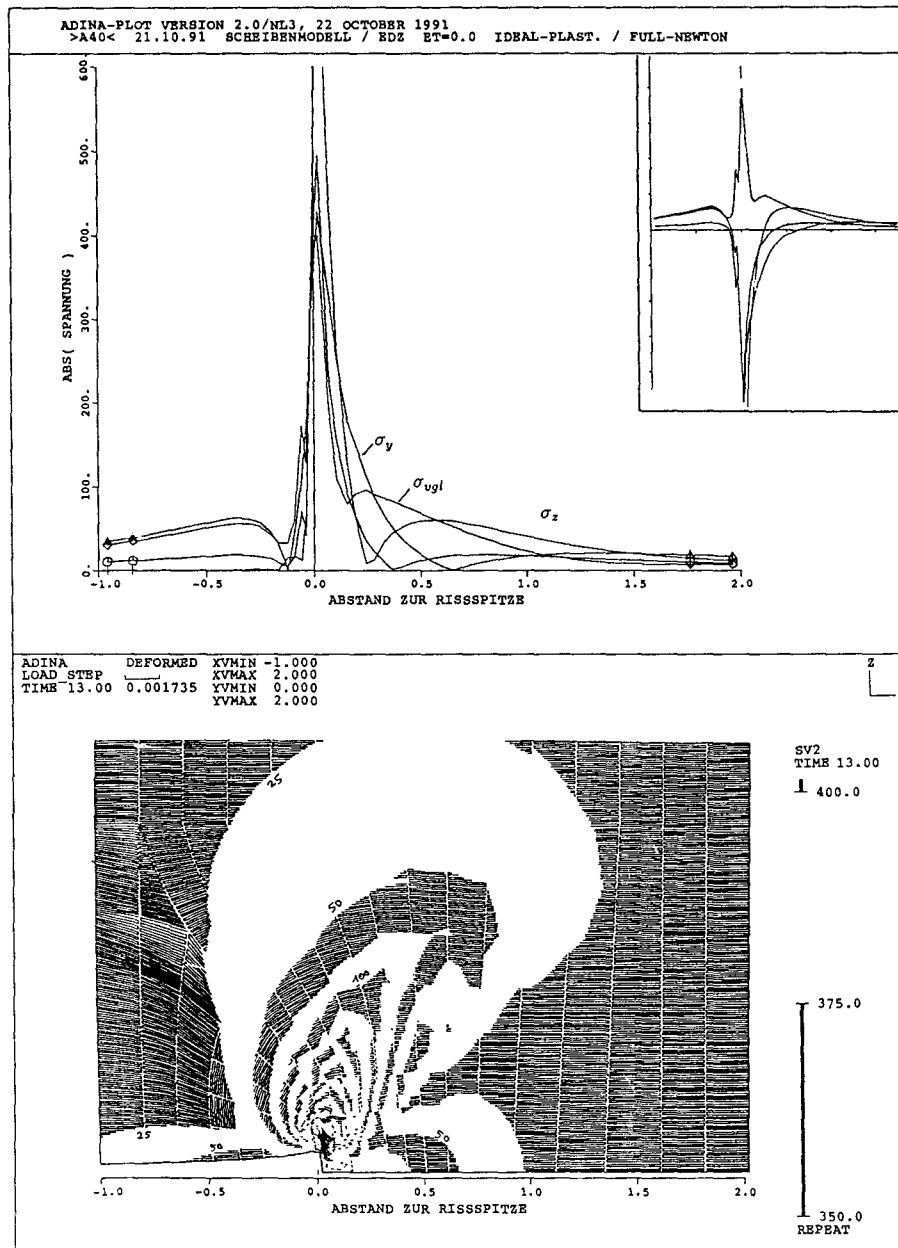


Abbildung 30: Ideal-plastische EDZ-Rechnung A40 (entlastet)

verlässig erzwingen und dort auch nur im Bereich mit hohem Spannungsgradienten, also unmittelbar an der Rißspitze. Schon bei einem mäßigen Abstand von der Rißspitze wird auch die dicke Probe nur noch der ESZ herrschen.

Die beiden Randbedingungen führen zu sehr unterschiedlichen Werten für die Spannungen und für die Dehnungen. Es gibt drei Rechnungspaare, die den direkten Vergleich ermöglichen: die beiden ideal-plastischen Rechnungen A1 verglichen mit A40, die isotrope Verfestigung A3 mit A4 und die kinematische Verfestigung A5 mit A11 (jeweils ESZ verglichen mit EDZ).

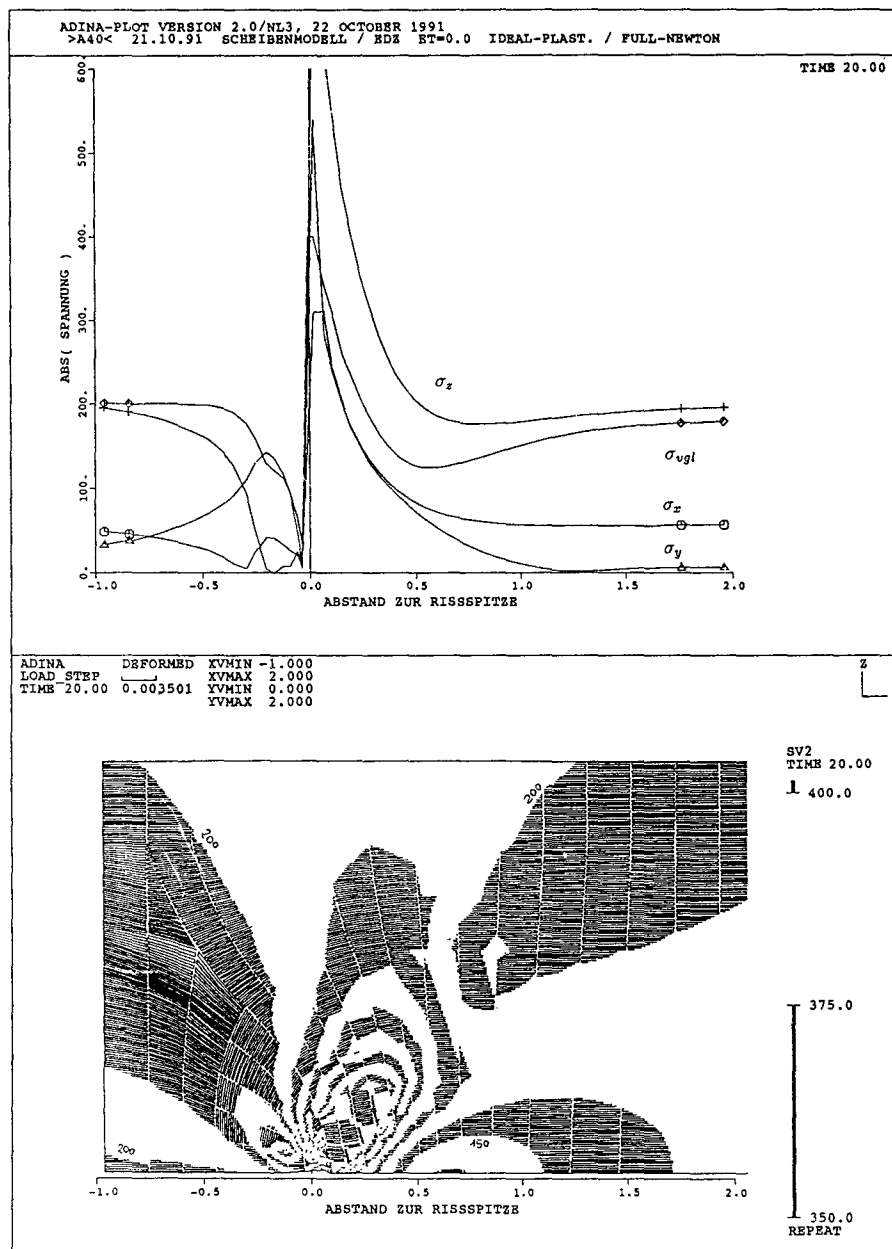


Abbildung 31: Ideal-plastische EDZ-Rechnung A40 (Drucklast)

In allen EDZ-Rechnungen ist die plastische Zone im Ligament sehr klein ($r_f = 0.16/0.12/0.16$ mm). Dieses liegt an der sehr starken Dehnungsbehinderung: in Dickenrichtung durch die Definition des EDZ, in Querrichtung durch den hohen Spannungsgradienten und in Längsrichtung durch die Forderung der Volumenkonstanz bei plastischem Fließen. Ein Versagen oder auch nur eine Schädigung ist aber unter 'hydrostatischem Zug' bei einem v.Mises-Fließkriterium nicht möglich.

Die maximale Ausdehnung ist im EDZ mit ($r_f = 1.30/1.36/1.30$ mm) unerwartet groß – läßt doch das Hundeknochen-Modell eine im Vergleich zum ESZ kleine plastische Zone

erwarten.

In den Abb. 29 bis 31 sind die Spannungsverläufe und der Bandplot der Vergleichsspannung für die ideal-plastische Rechnung A40 dargestellt. Die Abb. 29 zeigt die Situation nach Aufbringen der Zugbelastung, in Abb. 30 ist die Probe wieder entlastet und in Abb. 31 wurde der Riß durch die Druckspannung von $\sigma_0 = -200 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ wieder zugeedrückt.

5.2.4 Die Breite der Probe

Die Bedeutung der Gesamtbreite der Probe kann schon an der kleinen Formzahl $Y = 1.015$ abgeschätzt werden. Da diese Zahl aber aus einer elastischen Rechnung abgeleitet wurde, ist es doch sinnvoll, ihren Einfluß auf eine plastische Zone zu verifizieren.

Die Probenbreite $b = 160 \text{ mm}$ in der Rechnung A6 führt zu genau der gleichen plastischen Zone wie bei $b = 50 \text{ mm}$ in A3. Die Spannung in Längsrichtung ist erwartungsgemäß im elastischen Gebiet vor der Rißspitze um etwa 1% kleiner. Alle anderen Spannungen und Dehnungen sind nahezu gleich groß.

Eine veränderte Probenbreite läßt sich also mit den Mitteln der linear-elastischen Bruchmechanik gut abschätzen.

5.2.5 Ausrundung der Rißspitze

Das FE-Modell hat in der Abb. 10 ganz offensichtlich eine unendlich scharfe Rißspitze. In realen Bauteilen können aber nur endlich kleine Radien vorkommen. Spätestens nach dem Einsetzen des Fließens rundet sich die Rißspitze aus. Um den Einfluß des Spitzenradius festzustellen, werden zwei Rechnungen mit dem Rißspitzenradius $r = 0.0 \text{ mm}$ in A3 und $r = 0.08 \text{ mm}$ in A9 miteinander verglichen.

Unter der Voraussetzung, daß die plastische Zone größer als der Spitzenradius ist, unterscheiden sich die beiden Konturen der plastischen Zonen und die Eigenspannungen praktisch nicht [Hel72]. Bei sehr kleiner Belastung (damit auch kleiner plastischer Zone) oder bei großem Spitzenradius liegen quasi linear-elastische Verhältnisse vor (vgl. [Neu85]), und die Spannungen sind dann natürlich nicht mehr identisch, sondern unmittelbar vom Radius abhängig (Kerbspannung).

Im elastischen Feld vor der plastischen Zone ist nur die Spannung in Querrichtung der Probe geringfügig größer als bei dem scharfen Riß. Und die Überschwinger unmittelbar an der Rißspitze vermindern sich. Es bietet sich damit an, die Rißspitze mit einem sehr kleinen Rißspitzenradius aufzumessen.

5.2.6 Große Dehnungen und große Verschiebungen

Bei einer nichtlinearen Rechnung taucht sofort die Frage auf, ob die kinematischen Verhältnisse nicht derart sind, daß mit großen Verschiebungen und großen Dehnungen gerechnet werden muß. Eine solche Rechnung erfolgt dann in der Update Lagrangeschen Formulierung,

und sie verbraucht erheblich mehr Rechenzeit.

Bei der Rechnung A5 (ESZ) tritt als größte Dehnung in Längsrichtung über alle Zeitschritte $\epsilon_z = 0.0291$ am Element 48 (Rißspitze) auf. In den Rechnungen mit EDZ ist die maximale Dehnung grundsätzlich noch kleiner, z.B. ist $\epsilon_z \leq 0.0123$ in der Rechnung A40. Bei diesen kleinen Maximaldehnungen kann ohne Einschränkung mit technischen Spannungen und Dehnungen gerechnet werden.

Direkt neben den Elementen mit den Maximalwerten klingen die Dehnungen schnell ab, so daß man zu Recht annehmen darf, daß eine kinematisch nichtlineare Rechnung keine Verbesserung bringt. Als Nagelprobe wurde die Rechnung A10 mit großen Verschiebungen und Dehnungen durchgeführt. Die Ergebnisse unterscheiden sich praktisch nicht von der Rechnung A3. Lediglich bei den Überschwängern an der Rißspitze erscheinen andere, aber keine besseren Zahlenwerte.

Folglich kann auch die 3D-Rechnung ohne Bedenken mit kleinen Verschiebungen und den technischen Spannungs-Dehnungs-Relationen durchgeführt werden.

5.2.7 Zusammenfassung der 2D-Rechnungen

Die Berechnungen der Spannungen und Eigenspannungen an der unendlich scharfen Rißspitze zeigen, daß die Rechnung numerisch stabil ist. Die lokale Geometrie hat nur einen geringen Einfluß auf die plastische Zone und die Eigenspannungen, und sie kann ohne besondere Schwierigkeiten den aktuellen Gegebenheiten angepaßt werden.

An die Netzeinteilung⁶ in der Rißspitze werden keine besonderen Ansprüche gestellt. Auf die Anordnung eines $1/4$ -Mittelknoten sollte man bei plastischen Rechnungen verzichten. Bei einer unendlich scharfen Rißspitze sind die Ergebnisse unmittelbar an dem Rißspitzenelement kaum bewertbar, da sie zum Oszillieren neigen. Dieser Fehler ist bei Materialien mit Verfestigung geringer.

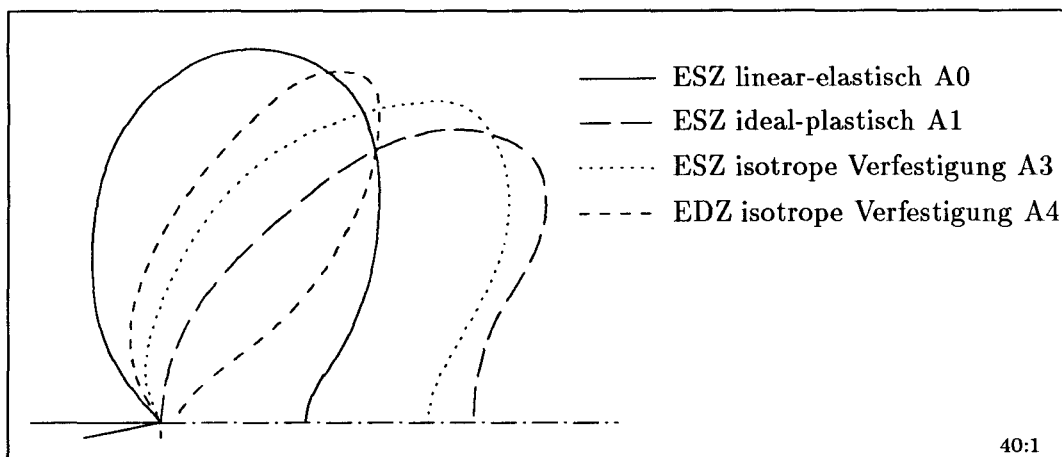


Abbildung 32: Die plastischen Zonen in den 2D-Rechnungen (Zuglast)

Die Abb. 32 zeigt die plastischen Zonen nach der Belastung mit einer Zuglast von $\sigma_0 = 200 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$. Es ist die Abschätzung der plastischen Zone aus der linear-elastischen Rechnung nach Irwin im ESZ zu sehen; sowie zwei weitere Rechnungen im ESZ mit echten plastischen Zonen und unterschiedlichen Verfestigungen. Desweiteren ist eine plastische Zone aus einer Rechnung im EDZ mit Verfestigung eingezeichnet. Das bekannte „Hundeknochenmodell“ hätte eine gegenüber dem ESZ stark verkleinerte plastische Zone erwarten lassen, aber beide Spannungszustände liefern in der Maximalausdehnung gleich große plastische Zonen. Lediglich im Ligament ist die plastische Zone im EDZ ganz wesentlich kleiner.

Zwischen isotroper und kinematischer Verfestigung muß bei monoton steigender Belastung nicht unterschieden werden, da dann die Abweichung von einer verschobenen zu einer vergrößerten Fließfläche verschwindend gering ist.

Die Entscheidung, ob ein ebener Dehnungszustand oder ein ebener Spannungszustand vorliegt, ist an der Rißspitze nicht eindeutig zu fällen. An der Probenoberfläche und in einiger Entfernung von der Rißspitze ist der ESZ korrekt. Der EDZ trifft aber auf dicke Proben im Bereich der Rißspitze mit dem hohen Spannungsgradienten zu, und er

⁶Die üblichen Einschränkungen aller FEM-Netze gelten natürlich weiterhin.

ist für die Rißinitiierung und den Rißfortschritt entscheidend (Dehnungsversprödung). In der 3D-Modellierung entfällt dieses Problem. Da der größte Spannungsgradient an der Probenoberfläche zu erwarten ist, sollte die Elementteilung zur Probenoberfläche hin feiner ausfallen.

Die plastischen Zonen durch Eigenspannungen (ohne äußere Belastung) sind in der Abb. 33 dargestellt.

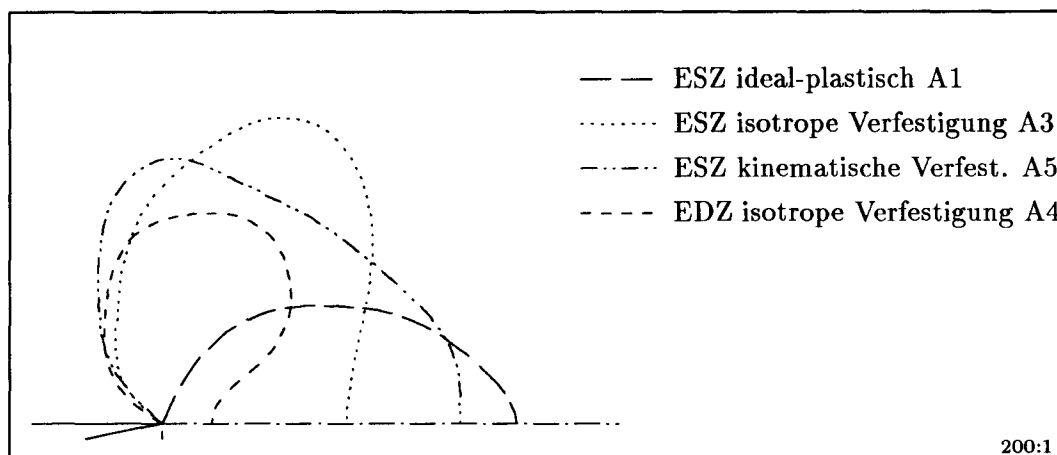


Abbildung 33: Die plastischen Zonen in den 2D-Rechnungen (entlastet)

Form und Größe hängen ganz erheblich von dem verwendeten Materialgesetz ab. Hierbei sind die in ADINA implementierten Materialgesetze nur unbefriedigend. Notwendig ist ein Materialgesetz, das eine Zwischenstufe zwischen isotroper und kinematischer Verfestigung verwendet und dieses muß für zyklische Belastungen geeignet sein. Besonders deutlich ist die Differenz zwischen der isotropen (A3) und der kinematischen (A5) Verfestigung.

Da keine der in Abb. 33 gezeigten Kurven „richtiger“ als eine andere ist, reichen die Rechnungen nur zu der Feststellung, daß die Abschätzung der plastischen Zone nach Irwin in Gl. 23 die richtige Größenordnung wiedergibt.

In allen Fällen ergaben sich plausible Zonen mit plastischer Schubdehnung. Die linear-elastische Theorie (vgl. Abb. 9) sagt auf Grund der Lage der maximalen Schubspannungen im ESZ das Abgleiten unter 45° zur Probendicke voraus. Beobachtungen zeigen im ESZ keilförmige und im EDZ halbkreisförmige plastische Zonen [Hel72]. Die Abb. 34 kann diese Prognose bestätigen, obwohl im ESZ die Schubspannungen in der Dickenrichtung fehlen. Auffällig ist, daß trotz der sehr geringen Darstellungsschwelle von $\epsilon_{yz}^p > 0.0001$ die Ausdehnung des Gebietes mit nennenswerter plastischer Schubdehnung erheblich kleiner ist als die plastischen Zone (lt. Fließkriterium) in der jeweiligen Rechnung.

In allen Rechnungen wurde auch die verformte Kontur der Rißufer ausgeplottet. Die Abb. 35 zeigt diese Kontur bei der vollen Zugspannung für einige ausgewählte Rechnungen. Im Gegensatz zur linear-elastischen Rechnung hat der Riß nach dem Plastizieren keine exakt elliptische sondern eher eine ovale Form – mit nahezu parallelen Rißufern und einer stark aufgeweiteten Rißspitze. Die maximale Öffnung des Risses in der Symmetrie-

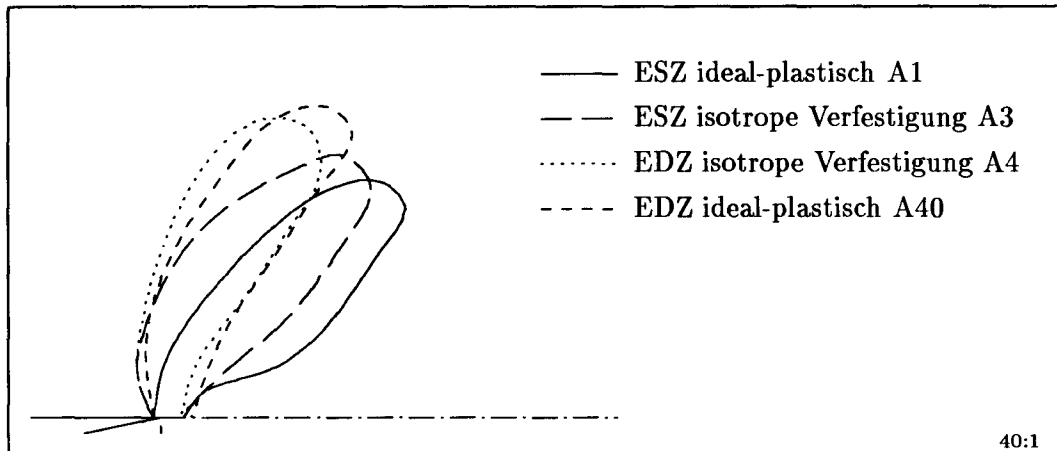


Abbildung 34: Die Gleitbänder in den 2D-Rechnungen

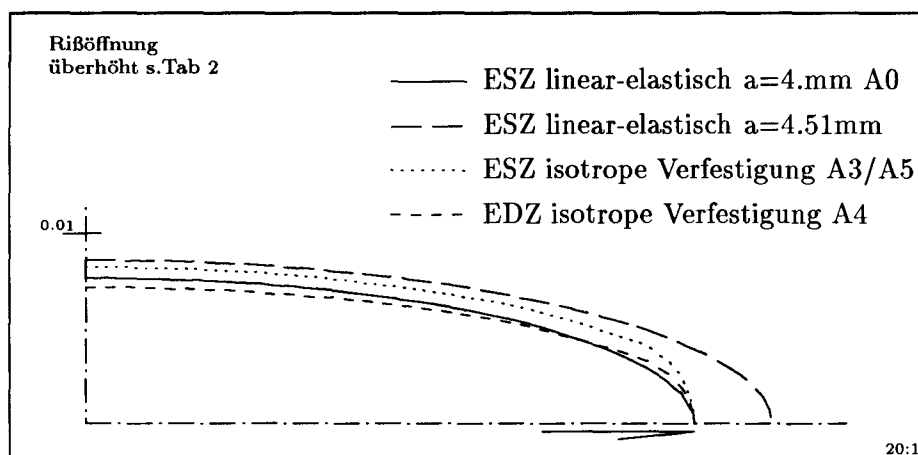


Abbildung 35: Die Rißuferverschiebungen in den 2D-Rechnungen (Zuglast)

ebene beträgt in der linear-elastischen Rechnung $\delta_{A0} = 2a\sigma_0/E$. Dieser Wert und einige Vergleichszahlen sind in der folgenden Tabelle 2 für den belasteten ($t = 10\text{ s}$) und den entlasteten Zustand ($t = 13\text{ s}$) abgedruckt.

Verglichen mit der linear-elastischen Rechnung ist der Riß in der Probenmitte geringfügig (ca. 8%) weiter geöffnet. Alle Rechnungen im ebenen Dehnungszustand weisen eine geringere Rißöffnung auf als die jeweiligen ESZ-Rechnungen. Die Korrektur der Rißlänge nach Irwin stellt im Bezug auf die Rißuferverschiebung keine Verbesserung dar; der Riß ist in der entsprechenden Rechnung mit einer Rißlänge $a = 4.51\text{ mm}$ zu weit geöffnet.

Wird nach der Zugbelastung die äußere Kraft entfernt, so schließt sich der Riß in der linear-elastischen Rechnung gerade wieder vollständig. In allen Rechnungen mit plastischen Verformungen wird der Ursprungszustand nicht mehr erreicht. Die plastische Zone wirkt mit den eingepprägten Dehnungen wie ein Dorn, der die Rißufer auseinander treibt.

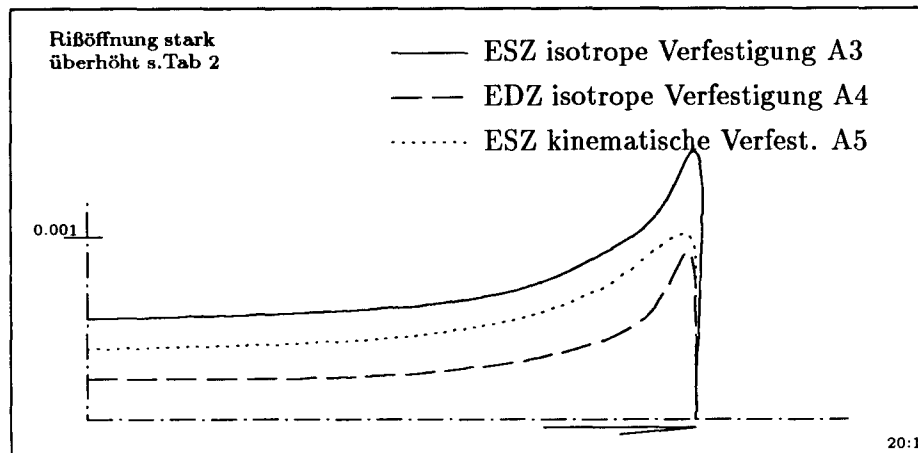


Abbildung 36: Die Riuferverschiebungen in den 2D-Rechnungen (entlastet)

Rechnung	A0	A3	A4	A40	A5
Verfestigung	lin.-elast.	iso.	iso.	-	kinem.
2D-RB.	ESZ	ESZ	EDZ	EDZ	ESZ
Zuglast	0.0076	0.0082	0.0072	0.0073	0.0082
entlastet	0.0	0.00055	0.00022	0.00023	0.00039

Tabelle 2: CMOD in [mm] für verschiedene 2D-Rechnungen

Der Zustand, der sich nach einer Zugbelastung einstellt, wenn keine äußere Last mehr anliegt, wird in der Abb. 36 gezeigt. In der Probenmitte haben sich die Rißufer schon wieder sehr stark angenähert, während sie vor der Rißspitze noch einen deutlichen Abstand voneinander haben.

Wird danach die Belastungsrichtung umgekehrt und die Proben insgesamt durch eine Drucklast beaufschlagt, schließt sich der Riß ausgehend von der Probenmitte zu den Rispitzen hin. Der Moment des ersten Rißuferkontaktes ist numerisch sehr brisant. Ohne besondere Maßnahmen konvergiert die Rechnung nicht mehr, da die unausgeglichene Kräfte zwischen dem Kontaktproblem und der plastischen Zone von Iteration zu Iteration hin und her pendeln. Nur bei Verwendung sehr kleiner Belastungsschritte und der *Full-Newton*-Iteration konvergiert dieser Rißuferkontakt. Nach dem Kontakt wird die plastische Zone so stark entlastet, so daß keine nennenswerten weiteren plastischen Deformationen mehr auftreten. Der übliche Ansatz [Mem90, Beg89, Schw80, Elb70], bei Dauerfestigkeitsproblemen mit einer effektiven Spannungsintensittsnderung ΔK^{eff} zu rechnen, wird hier bestätigt.

6 Das 3D-Modell

Das dreidimensionale Modell ist prinzipiell genauso aufgebaut, wie das Modell für die 2D-Scheibenrechnung: die Probe ist in ein Fernfeld und ein Nahfeld eingeteilt. Das Fernfeld wird bis auf die Kontaktknoten zum Nahfeld kondensiert; es vergrößert damit das Gleichungssystem nicht mehr.

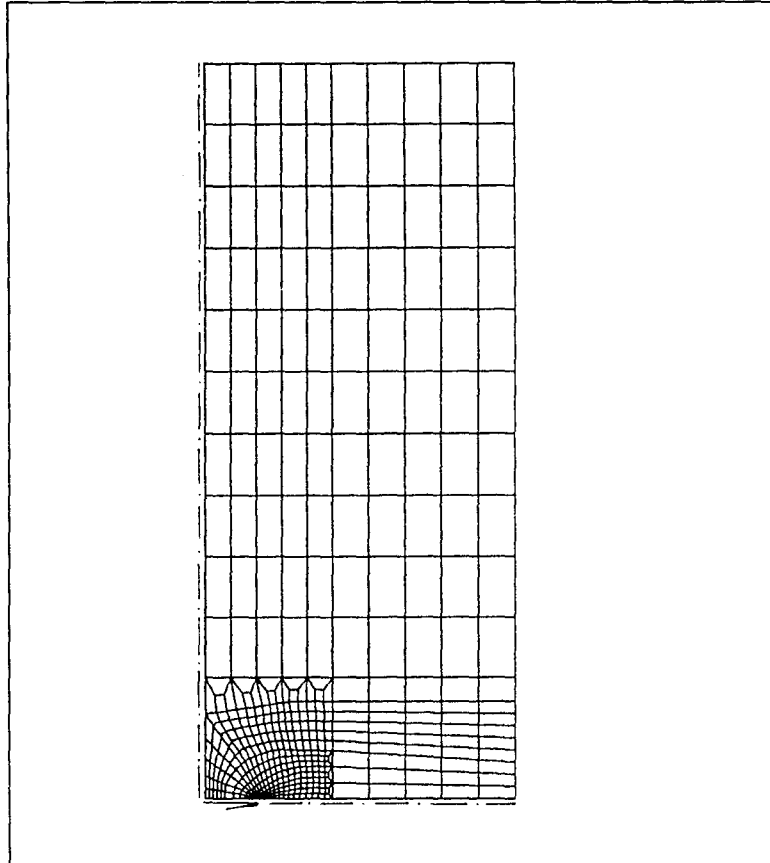


Abbildung 37: Das gesamte 3D-Modell

Während das Fernfeld aus 2D-Elementen besteht, wird das Nahfeld durch isoparametrische Volumenelemente gebildet. An den Übergangsknoten werden alle Freiheitsgrade, die parallel zur Probenebene liegen, fest gekoppelt (*constraints*). Der Freiheitsgrad in Dickenrichtung ist im Gegensatz hierzu noch frei. Die Kontrolle des Gradienten in Dickenrichtung ergab akzeptabel kleine Spannungsveränderungen. Für alle Elemente ist das Seitenverhältnis besser als 1:5.

Die Abb. 37 zeigt eine Sicht parallel zur Dickenrichtung auf die gesamte Probe mit Nah- und Fernfeld. In der Abb. 38 ist aus der gleichen Perspektive der Nahbereich gezeigt. Da die einzelnen Elementlagen eine identische Kontur haben, verdecken sie sich und erscheinen wie Scheibenelemente.

Die Abmessungen des Nahfeldes sind im Vergleich zur 2D-Rechnung größer geworden, da

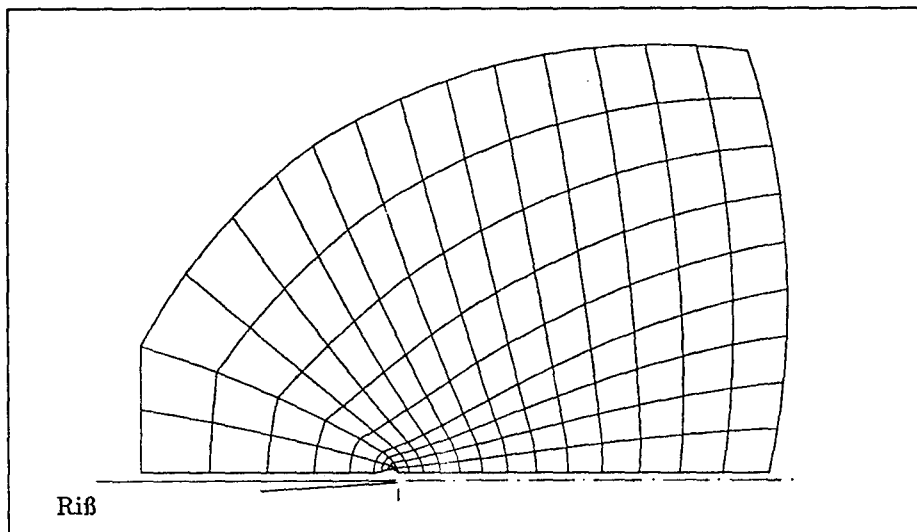


Abbildung 38: Das Nahfeld im 3D-Modells

nun nicht nur die plastische Zone hineinpassen muß, sondern auch noch der Bereich in dem die Spannungen und Dehnungen in der Dickenrichtung abklingen. Aus diesem Grund ist auch die Kontur des Nahfeldes verändert worden, so daß es zwar möglichst klein ist – aber doch noch den Bereich mit echt-räumlichen Spannungen abdeckt. Für die numerische Integration nach der Gauss-Quadratur werden entsprechend $2 \times 2 \times 2$ Integrationspunkte verwendet.

Die Symmetrie ermöglicht es jetzt, nur noch $\frac{1}{8}$ des Modell zu berechnen. Die äußere Last greift wieder (in der Abb. 37) als Streckenlast der Stärke $\sigma_0 \cdot d$ an der oberen Kante an.

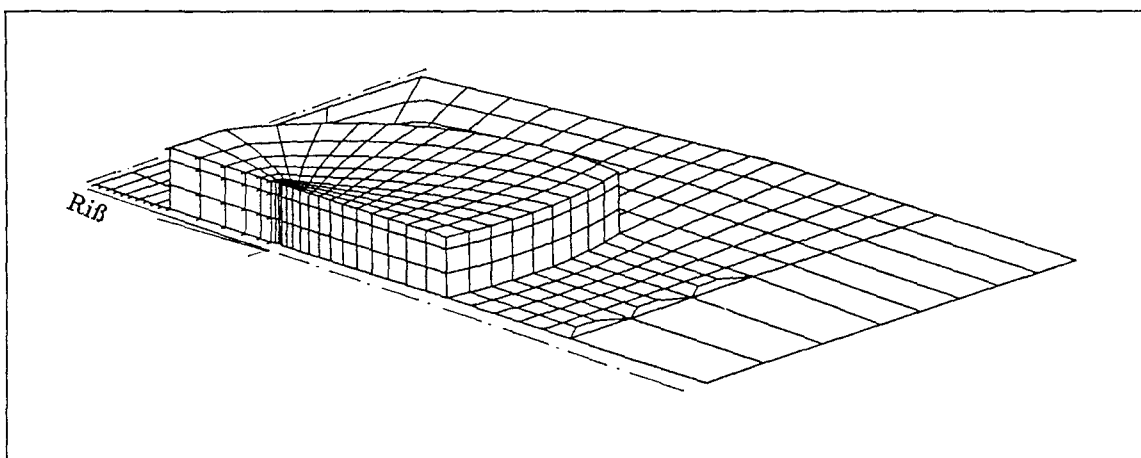


Abbildung 39: Perspektivische Ansicht des Nahfeldes und des Übergangsbereiches

Die perspektivische Abb. 39 gibt einen räumlichen Eindruck vom Modell im Bereich des Nahfeldes. Insbesondere der Übergang von den Volumenelementen zu den Scheibenele-

menten ist gut zu erkennen. Die Dicke der Elementlagen nimmt zur freien Oberfläche hin ab.

Die freien Rißufer sind mit *Gap*-Elementen bestückt, um den Rißuferkontakt zu erfassen. Diese Elemente sind in der Abb. 39 und 40 als kurze Stäbe im Rißufer zu erkennen. Für die *Gap*-Elemente ergibt sich in der Kombination mit isoparametrischen Volumenelementen noch eine besondere Schwierigkeit: konstanter Druck in einer kantenparallelen Richtung führt bei einem isoparametrischen 20-Knoten Element zu einer Knotenkraftverteilung im Verhältnis $-1/4/-1$; d.h. an den Eckknoten ist die äquivalente Knotenkraft dem Druck entgegengesetzt und die *Gap*-Elemente müßten 'verkehrt' herum angebracht werden. Abhilfe wird durch den Verzicht auf die Mittelknoten der Elementkanten geschaffen, da dann die Geometrie ebenso wie der Verschiebungsansatz ohne den mittleren Knoten formuliert wird und die Eckknoten je ein Viertel der 'vorzeichenrichtigen' Kraft aufnehmen müssen.

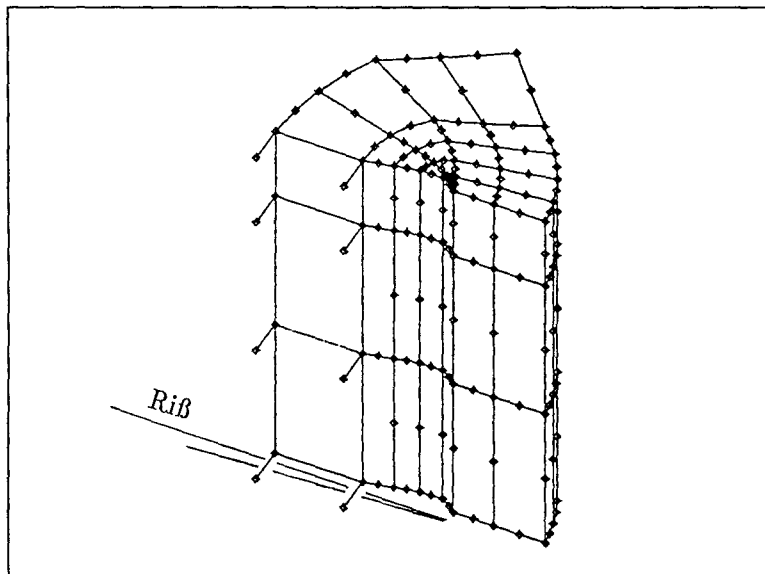


Abbildung 40: Die Rißspitze

In der Abb. 40 sind die Elemente und Knoten zu sehen, die unmittelbar an der Rißspitze angreifen. Offensichtlich ist die Rißspitze entsprechend der Erkenntnisse aus dem 2D-Modell ein klein wenig ausgerundet. Dieses hat keinen wesentlichen Einfluß auf die plastische Zone, stabilisiert aber die Spannungen unmittelbar an der Rißspitze.

Die Belastung wird ähnlich wie bei den 2D-Rechnungen in gleichmäßigen Zeitschritten zu 0.25s aufgebracht und wieder entfernt (Abb. 41). In 20 Lastschritten wird die Zuglast bis zum Maximum gesteigert, anschließend in einem Schritt ein wenig vermindert und darauf bis zum 32. Schritt auf Null reduziert. Zur Zeit $t = 13s$ herrschen damit im Modell nur noch die Eigenspannungen. Die Drucklast wird darauf zunächst mit 12 kleinen Lastinkrementen, um den Rißuferkontakt zu ertasten, und dann in 16 größeren Schritten aufgebracht.

Die Rechnung erfolgt ebenfalls in der Full Newton-Raphson-Iteration, mit einer Linearisierung der Steifigkeitsmatrix nach jedem Iterationsschritt.

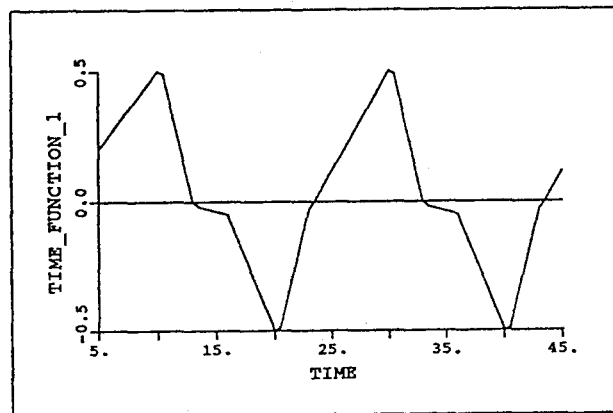


Abbildung 41: Zeitfunktion für das 3D-Modell ($\sigma_0 \max = 200 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$)

Das Modell umfaßt insgesamt 405 Volumen-, 330 Scheiben- und 46 *Gap*-Elemente mit 7800 Freiheitsgraden. Für eine linear-elastische Rechnung werden etwa 56 CPU-Minuten auf einer VAX 6310 benötigt. Bei den nichtlinearen Rechnungen verbrauchte jeder Zeitschritt mit seinen 2-3 Iterationen ca. 160 CPU-Minuten. Die Rechenzeit wird dabei zu 80% zum Lösen des Gleichungssystems benutzt und 15% entfallen auf das Errechnen der Elementspannungen.

7 Das zyklische, anisotrope Materialgesetz

Im Kapitel 5 wurde anhand der Abb. 33 und 24 erläutert, warum keines der in ADINA verfügbaren Materialgesetze für zyklische Belastungen geeignet ist. Benötigt wird ein Material, das sich in Abhängigkeit von der plastischen Dehnung verfestigt, aber es soll sich bei einer zyklischen Belastung mit konstantem Niveau nicht fortwährend verfestigen. Der Bauschinger-Effekt soll berücksichtigt werden, sowie die von Bergmann [Ber83] formulierten drei Arten des Werkstoffgedächtnisses. Ein solches Materialgesetz wird im Folgenden formuliert und die Spannungen an der Rißspitze werden damit errechnet.

Zunächst sollen die sehr komplexen Eigenschaften des Materials noch einmal präziser unterschieden werden. Es gibt intern drei mögliche Zustände:

- **Linear-elastisches Verhalten.** Es tritt auf, wenn das Fließkriterium nicht erfüllt ist ($F < 0$).
- **kinematische Verfestigung herrscht**, wenn das Fließkriterium erfüllt ist ($F = 0$) und wenn die aktuelle plastische Vergleichsdehnung kleiner ist als irgendeine plastische Vergleichsdehnung je zuvor war (${}^t\epsilon_{vgl}^p \leq {}^{max}\epsilon_{vgl}^p$). In diesem Fall ändert sich die Fließspannung (Radius des Fließzylinders) nicht $d\sigma_y = 0$ und es ist möglich, zyklische Beanspruchungen zu rechnen, ohne daß die Fließspannung ständig ansteigt. Die kinematische Spannung α wird nach der Regel von Prager berechnet ($d\alpha_{ij} = c d\epsilon_{ij}^p$); der Fließzylinder verschiebt sich also proportional zu den plastischen Dehnungen.
Bei einer Wechselbeanspruchung bewegt sich das Material nun in einer geschlossenen Hysterese. Die kleinere Vergleichsspannung beim Fließbeginn nach einem Vorzeichenwechsel der Belastung, entspricht dem zuerst von Bauschinger [Bau81] beschriebenen Werkstoffverhalten [Dah74, Rob69].
- **anisotrope Verfestigung liegt vor**, wenn das Fließkriterium erfüllt ist ($F = 0$) und die plastische Vergleichsdehnung das Maximum über alle Zeiten angenommen hat (${}^t\epsilon_{vgl}^p > {}^{max}\epsilon_{vgl}^p$). Die Fließspannung ist nun eine Funktion der plastischen Vergleichsdehnung und ändert sich mit $\sigma_y = f(\epsilon_{vgl}^p)$. Die sonst in ADINA übliche inkrementelle Abhängigkeit $\Delta\sigma_y = E^t \cdot \Delta\epsilon$ wird nicht angewendet, da sich solch ein Material zyklisch immer weiter verfestigen würde. Die kinematische Spannung α_{ij} wird weiter mitgeführt und entsprechend korrigiert. Die anisotrope Verfestigung unterscheidet sich somit nur durch die Erweiterung $d\sigma_y \neq 0$ von der kinematischen Verfestigung. Das Materialverhalten entspricht nun der Kaltverfestigung.

Mit dieser Einteilung ist es möglich, zyklische Beanspruchungen zu berechnen. Die zyklische Spannungs-Dehnungskurve ist aber im allg. auch von der aktuellen Zykluszahl⁷ abhängig. Sie muß daher mehrfach, für jede Zykluszahl genau einmal, aufgemessen werden. Erst bei sehr hoher Zykluszahl wird das stabilisierte Spannungs-Dehnungs-Verhalten erreicht.

⁷Die Zählweise der Zyklen erfolgt so, daß die Spanne von einem Umkehrpunkt der Belastungsrichtung zum nächsten als ein Zyklus bezeichnet wird. Man mag einwenden, daß dies nur ein halber Zyklus sei, da man erst nach zwei dieser Zyklen wieder am Ausgangspunkt ankommt. Aber diese Zählweise vermeidet gebrochene Zykluszahlen und wird daher bevorzugt.

Der Kurvenverlauf wird in einer Datei abgelegt, deren Name und exakter Aufbau im Anhang B wiedergegeben wird. Die zyklische Spannungs-Dehnungskurve kann mit sehr vielen Stützstellen als Polygonzug aufgemessen werden. Für den kinematischen Tangentenmodul steht eine Steigung zur Verfügung. Die Beschränkung auf ein bilineares Verhalten im Bereich der konstanten Lastzyklen scheint zunächst eine erhebliche Einschränkung zu sein. Da aber zumeist nur der Spannungszustand in den Lastspitzen von Interesse ist und ein gleichmäßiger (exponentieller) Spannungsanstieg erheblich aufwendiger zu berechnen ist, kann man mit diesem Ansatz ohne Verlust an Genauigkeit auskommen.

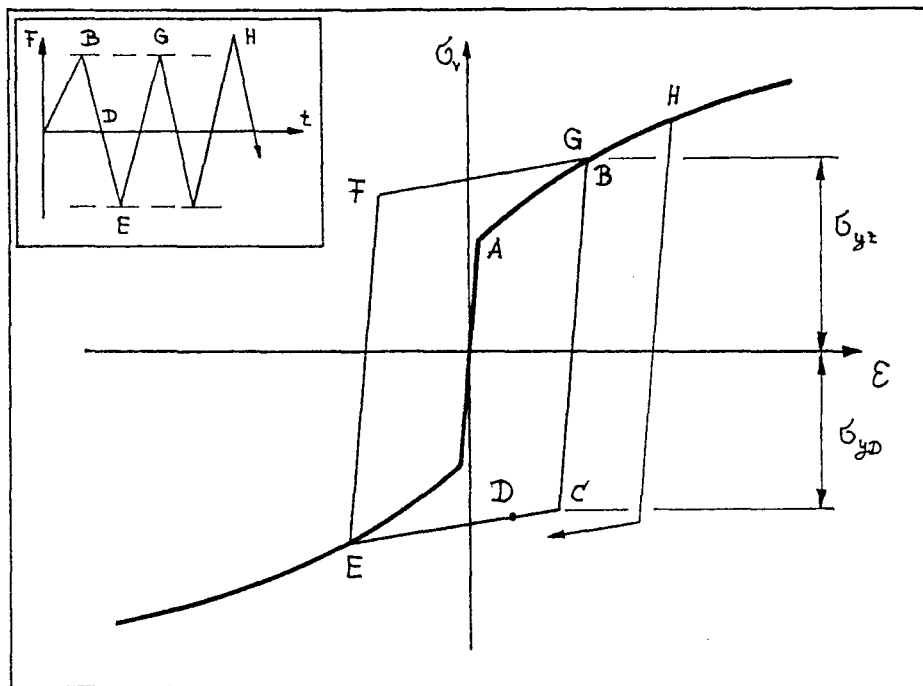


Abbildung 42: zyklisches Spannungs-Dehnungs-Diagramm

In der Abb. 42 ist ein Beispiel für den zeitlichen Spannungsverlauf eingetragen. Es ist fett der Verlauf der stabilisierten zyklischen Spannungs-Dehnungskurve eingezeichnet. Auf eine Abhängigkeit dieser Kurve von der Zykluszahl wurde hier zunächst verzichtet.

Das Beispiel zeigt eine Wechselbelastung an einer angerissenen Zugprobe:

Für ein Materialelement nahe der Rißspitze steigt die Vergleichsspannung ausgehend vom Nullpunkt durch eine außen an der Probe angelegte Spannung sehr schnell an, überschreitet beim Punkt A die Fließspannung und folgt der Spannungs-Dehnungskurve bis zum Punkt B. Wird nun die äußere Zuglast von der Probe genommen, entlastet das Materialelement zunächst elastisch und gerät dann beim Punkt C wieder in den plastischen Bereich, diesmal in den plastischen Druckbereich. Selbst wenn die äußere Last gleich Null ist, plastiziert das Materialelement noch (Punkt D); in der Probe befinden sich Eigenspannungen. Die Fließspannung für den Druckbereich σ_{yD} ist, als Folge der vorangegangenen Zugspannung, geringer als die Zug-Fließspannung $\sigma_{yz} < \sigma_{yD}$ (vgl. Abb. 42).

Kehrt man nun die äußere Belastungsrichtung um, so wandert die Vergleichsspannung

weiter auf der Kurve bis zum Punkt E der spiegelsymmetrisch zu B liegt. Der Punkt E wird dabei genau erreicht, wenn die Spannungsamplitude der äußeren Last gleich groß war, wenn kein Reißerkontakt stattfindet und wenn die Spannung-Dehnungskurve unabhängig von der Zykluszahl ist. Folgt nun wieder eine Zuglast, so wird über den Punkt F wieder der Punkt $G=B$ erreicht. Anschließend kann diese Hysterese beliebig oft durchlaufen werden. Die Spannungen werden sich dabei nur durch innere Spannungumlagerungen geringfügig ändern.

Sollte die Lastamplitude der äußeren Last dann noch einmal angehoben werden, wird die Vergleichsspannung über B (oder E) hinaus bis zu einem höheren Niveau H auf der zyklischen Spannung-Dehnungskurve anwachsen. Von hier aus ist dann wieder eine geschlossene Hysterese auf einem höheren Niveau möglich.

Nutzt man auch noch die Möglichkeit die Spannungs-Dehnungs-Kurve von Zyklus zu Zyklus zu ändern, wird sich eine Kurve ergeben, wie sie in Abb. 43 dargestellt ist. Mit fettem Stift sind die Spannungs-Dehnungs-Kurven für den ersten, zweiten und dritten Zyklus eingezeichnet.

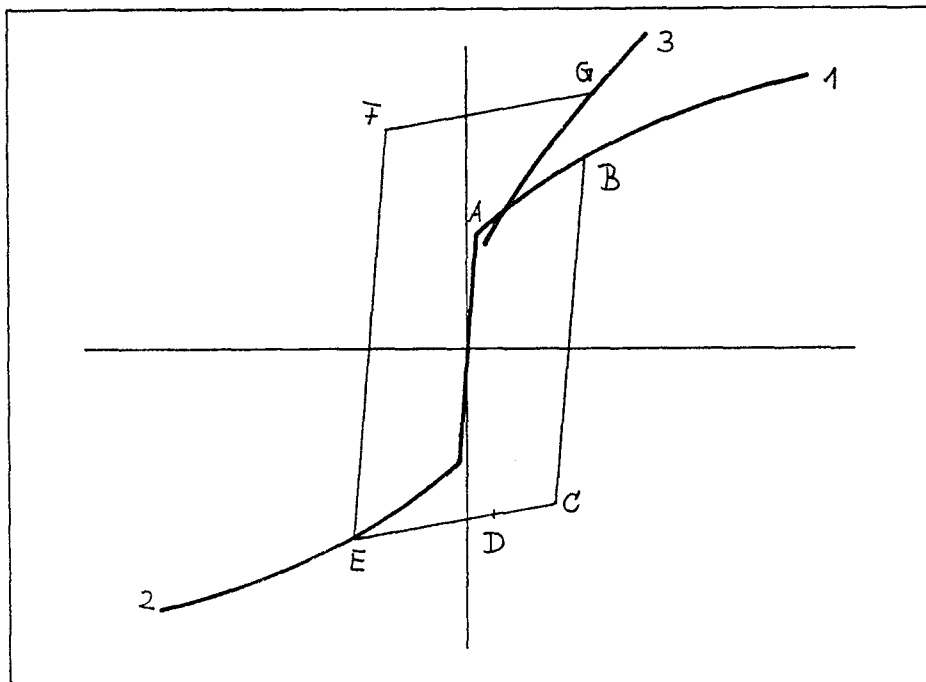


Abbildung 43: zyklisches Spannungs-Dehnungs Diagramm

Auch hier steigt die Spannung vom Nullpunkt über A bis zum Punkt B an. Danach ändert sich die Belastungsrichtung und die Vergleichsspannung wandert über C, D zu Punkt E. Liegt ein zyklisch entfestigendes Material vor, so ist der Punkt E schon ein wenig auf der zyklischen Spannung-Dehnungskurve des 2. Zyklus heraufgeschoben.

Folgt anschließend wieder eine Zuglast, schließt sich die Hystereseschleife nicht mehr wie in Abb. 42, sondern über den Punkt F gelangt man zu einem neuen Punkt G, der auf der Spannung-Dehnungskurve des 3. Zyklus liegt. Dabei wird der Punkt G die gleiche pla-

stische Vergleichsdehnung wie der Punkt B und E haben. Grundsätzlich ist eine Reißspitze mit einer dehnungsgeregelten Last beaufschlagt.

Die Frage, ob der Punkt G überhaupt erreicht wird, hängt ganz wesentlich von der plastischen Zone ab. Durch Spannungsumlagerungen kann es zu einer relativen Entlastung in einzelnen Bereichen kommen. Die Spannung würde dann vor dem Punkt G stehenbleiben. Allgemein kann man sagen, daß die Hysterese um so größer ist, je näher der betrachtete Punkt an der Reißspitze ist und um so mehr er auf der Vorderflanke der plastischen Zone liegt, also in dem in der Abb. 34 dargestellten Gebiet.

7.1 Aufruffolge des Materialgesetzes

Das Materialgesetz in dem Unterprogramm CUSER3 wird von ADINA in 4 verschiedenen Modi aufgerufen. Die Steuerung dieser Modi erfolgt, wie in der Abb. 44 zu sehen ist, über die Variable KEY:

Bei KEY=1 wird das Materialgesetz initiiert, d.h. es werden alle Startwerte in die beiden Arbeitsfelder ARRAY und IARRAY eingetragen. Ist KEY=2 dann werden die tatsächlichen Spannungen in den Elementen berechnet, die sich nach einem Lastschritt unter Berücksichtigung aller nichtlinearen Effekte ergeben. Bei KEY=3 wird die Materialsteifigkeitsmatrix zum Lösen des globalen Gleichungssystems linearisiert. Ein Ausdruck der Elementspannungen erfolgt jeweils bei einem Aufruf mit KEY=4.

Notwendigerweise wird das Materialgesetz zunächst einmal mit KEY=1 aufgerufen, um die lokalen Variablen zu initiieren. Danach folgt für jeden Lastschritt die Sequenz: KEY=3,2,3,2,...,3,2,4,3 – linearisieren – korrigieren – ... – ausdrucken. Die Häufigkeit der KEY=3,2 Wiederholungen hängt von der Anzahl der Iterationen ab, die notwendig sind, um das Gleichgewicht an den globalen Knoten wiederherzustellen.

Da die linearisierte plastische Materialsteifigkeitsmatrix beim Lösen des globalen Gleichungssystems verloren geht und die Sequenz daher mit KEY=3 startet, ist mit Rücksicht auf den Speicherplatz akzeptabel. Leider wird das Materialgesetz in ADINA noch weit häufiger aufgerufen.

7.2 Parameterübergabe und Initiierung des Materialgesetzes

Dem Unterprogramm CUSER3 werden via ADINA-IN oder durch das ADINA-Eingabefile feste 8 Parameter im Vektor CTI(8) (*Constants Temperatur Independent*), 4 Parameter im Vektor SCP(4) (*Solution Control Parameter*), sowie 5 Parameter in CTD(5) (*Constants Temperatur Dependent*) übergeben. Letztere sind für konstante Temperatur ebenfalls Konstanten.

Die Belegung aller Variablen ist im Anhang A aufgelistet.

Die ersten Elemente des Feldes CTI enthalten den Elastizitätsmodul, die Querkontraktionszahl und den kinematischen Tangentenmodul.

Von dem Inhalt der Variablen CTI(4) hängt eine Fallunterscheidung ab:

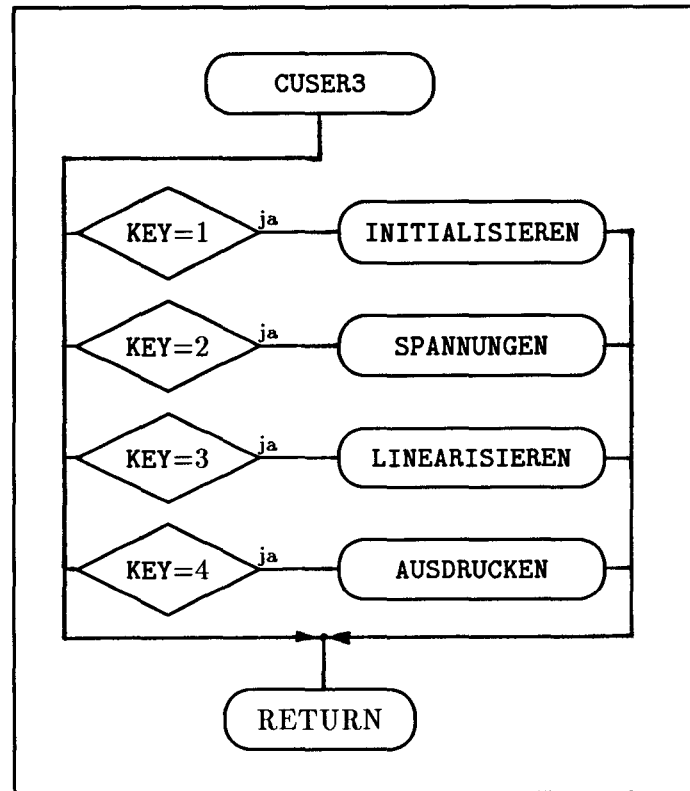


Abbildung 44: Flußdiagramm der Hauptzweige

- Ist $CTI(4) \leq 0$, dann werden alle weiteren Materialdaten via einer Datei eingelesen, die im Anhang B beschrieben ist. $CTI(4)$ bis $CTI(8)$ sind dann bedeutungslos.
- Ist $CTI(4) > 0$, dann wird dieser Wert als Anfangs-Fließspannung angesehen und die folgenden beiden Zahlenpaare bestimmen die Eckpunkte eines trilinearen Spannungsverlaufs der anisotropen Fließspannung.

Die SCP aktivieren nur echte Kontrollfunktionen und können normalerweise gleich Null gesetzt werden. (Damit ergibt sich auch die kürzeste Rechenzeit.) Werden für SCP Werte angegeben, so wird damit ein besonderer Integrationspunkt ausgewählt, für den sehr viele Zwischenergebnisse auf dem Kanal 111 abgelegt werden.

Die temperaturabhängigen Konstanten CTD werden nicht gebraucht.

Neben diesen Übergabeparametern werden jedem Integrationspunkt zwei interne Arbeitsfelder **ARRAY(65)** und **IARRAY(2)** zur permanenten Speicherung von Zwischenergebnissen zur Verfügung gestellt. Bei Iterationen werden diese Felder immer mit den gleichen Startwerten gefüllt an **CUSER3** übergeben.

Der Inhalt dieser Felder ist ebenfalls im Anhang A wiedergegeben.

Die Initiierung des Materials, angezeigt durch **KEY=1**, wird für jedes Element genau einmal mit dem ersten Integrationspunkt durchlaufen. Alle Kennwerte werden dabei so eingestellt, als wäre ein linear-elastischer Rechenschritt vorangegangen.

Beim ersten Element jeder Elementgruppe wird zusätzlich ein Feld namens DE(6,6) angelegt, das die linear-elastische Steifigkeitsmatrix enthält. Es dient nur der Vereinfachung und Beschleunigung der folgenden Algorithmen.

7.3 Linearisieren der Materialsteifigkeitsmatrix

Drei wesentliche Eigenschaften kennzeichnen das Materialverhalten bei elastisch-plastischen Rechnungen:

- das Fließkriterium⁸ das festlegt, ob plastisches Fließen stattfindet;
- das Fließgesetz⁹ oder *Fließregel*, das beschreibt wie Fließen funktioniert;
- das Verfestigungsgesetz, das die Veränderung des Fließkriteriums infolge des Fließens festlegt.

Zahlreiche Autoren geben eine gute Einführung in dieses Gebiet: [Bat86, Bet85, Bur92, Goe85, Ism79, Reck67, Uhl85].

7.3.1 Das linear-elastische Material

Falls das Fließkriterium nicht erfüllt ist ($F < 0$), wird die Steifigkeitsmatrix nach dem linear-elastischen Gesetz gebildet. In diesem Fall entspricht das Material einem ganz normalen Hookeschen Stoff. Die Materialsteifigkeitsmatrix lautet:

$$\mathbf{D}^e = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1-\nu & \nu & \nu & & & \\ \nu & 1-\nu & \nu & & & \\ \nu & \nu & 1-\nu & & & \\ \hline & & & 0 & & \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \end{array} \right] \quad (37)$$

Die Spannungszuwächse sind dann für die finiten Lastschritte:

$$d\bar{\sigma} = \mathbf{D}^e \cdot d\bar{\epsilon}^e \quad (38)$$

Es bietet sich an, alle Elemente dieser elastischen Materialsteifigkeitsmatrix $\mathbf{D}^e$ in einem Feld DE(6,6) permanent zu speichern, da sie häufig benutzt werden.

⁸Das *Fließkriterium* (oder die *Fließbedingung*) ist erfüllt, wenn es gleich Null ist; Zustände in denen das Fließkriterium größer als Null ist, sind unzulässig. Bei Werten unter Null wird das linear-elastische Hooke-sche Gesetz herangezogen.

⁹*Fließgesetz*

7.3.2 Die nichtlineare Rechnung

Das Fließkriterium:

Für das Fließkriterium F gibt es auf der Grundlage der Vergleichsspannung nach Huber-v.Mises-Hencky [Mis28] eine Reihe gleichwertiger Ansätze¹⁰. Gewählt wird:

$$F(\sigma, \alpha, \epsilon^p) = \frac{3}{2} s_{ij} \cdot s_{ij} - \sigma_y^2 \quad (39)$$

Hierin ist die kinematische, deviatorische Spannung s_{ij} enthalten.

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \alpha_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{mm} \quad (40)$$

Die kinematische Spannung α_{ij} beschreibt die Verschiebung der Fließfläche $F = 0$.

Allgemein ist das Fließkriterium auch von der Temperatur und Verformungsgeschwindigkeit abhängig [Dah80] und es ist orthotrop; diese Abhängigkeiten werden hier nicht berücksichtigt.

Die Formulierung nach Mròz [Mro67] mit gestaffelten Fließkriterien wird nicht verwendet, da diese viel Rechenaufwand benötigt, um die Verschiebung der einzelnen Fließflächen zu bestimmen [Ott87]. In einem Vergleich verschiedener Werkstoffgesetze bestätigt Nyman [Nym87], daß die kombinierte anisotrope (kinematische + isotrope) Verfestigung für zyklische Belastungen gute Ergebnisse liefert. Er hat das Werkstoffgesetz von Mròz mit der kinematischen und mit der isotropen Verfestigung verglichen, sowie Kleinproben geprüft.

Die Verfestigung nach Mròz hat auch zur Konsequenz, daß die zyklische Spannungs-Dehnungs-Kurve genau der verdoppelten statischen Kurve entsprechen muß. Eine Eigenart die nur für Materialien ohne ausgeprägte Streckgrenze annehmbar ist und als *Masing-Hypothese* [Mas26] bezeichnet wird. In der hier dargestellten Formulierung sind hingegen die statische und die zyklische Spannungs-Dehnungs-Kurve voneinander unabhängig.

Das Fließgesetz:

Die Dehnungen setzen sich aus einem elastischen und einem plastischen Anteil zusammen, nur die elastischen Dehnungen rufen Spannungen lt. Gl. 38 hervor.

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p \quad (41)$$

Die plastischen Dehnungen $d\epsilon_{ij}^p$ müssen parallel zu der Normalen auf der Fließfläche $F = 0$ sein (*assoziiertes Fließgesetz* oder *Normalenregel*):

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (42)$$

¹⁰In diesem Kapitel wird hauptsächlich die Tensorschreibweise benutzt. Zur Unterscheidung werden die Variablen in dünner Schrift und ohne - gesetzt: $\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}, D_{ijkl}$ statt $\bar{\sigma}, \bar{\epsilon}, \bar{D}_{ij}$

Das Fließkriterium (2):

In dem Fließkriterium (Gl. 39) wird der hydrostatische Druck als nicht schädigend angenommen. Eine Annahme, die sich bei den üblichen Konstruktionen bewährt hat, die aber im Rißspitzenbereich bei hohen plastischen Dehnungen weniger gut zutrifft. Da lt. Gl. 42 die plastischen Dehnungen parallel zu dem Fließkriteriumgradient ist und das Fließkriterium nicht von σ_{mm} abhängt, folgt daraus, daß auch die plastische Volumendehnung ϵ_{mm}^p verschwindet. Diese Volumenkonstanz entspricht zunächst auch allen Beobachtungen, aber vor der Rißspitze bilden sich Mikrorisse, die bei großen plastischen Dehnungen mit erfaßt werden müssen, um brauchbare Ergebnisse zu erzielen.

Bewährt hat sich in diesem Sinn das Materialmodell von Needleman und Tvergaard [Nee87, Tve91, Mee90, Shi84] mit dem Fließkriterium F^* :

$$F^* = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}s_{ij}}{\sigma_y^2} - 1 + q_1 f^* \left(2 \cdot \cosh \frac{\sigma_{mm}}{2\sigma_y} - (q_1 f^*) \right) \quad (43)$$

Wobei f^* eine Funktion der Hohlräume im Material und q_1 eine Grenze für den Volumenanteil der Voids [Sun88] ist.

Verglichen mit dem v.Mises-Kriterium in Gl. 39 ist der letzte Term hinzugekommen, der zu Beginn der Rechnung über $f^* = 0$ noch verschwindet und erst bei hohem hydrostatischen Zug wirksam wird. Die Verbesserung dieses Materialgesetzes schlägt sich aber erst bei hohen Dehnungen $\epsilon^p > 10\%$ nieder [Sun88]. Bis dahin sind die Abweichungen zu dem einfacheren v.Mises-Kriterium gering. Derart hohe Dehnungen treten erst beim Vollplastizieren kurz vor dem Durchriß auf. Da das v.Mises-Kriterium zu sehr viel einfacheren Gleichungen und Ableitungen führt, wird es mit Rücksicht auf die Rechenzeit in dieser Arbeit verwendet.

7.3.3 Isotrope Verfestigung

Während des Fließens muß das totale Differential des Fließkriteriums F verschwinden, damit $F = 0$ erfüllt ist:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \alpha_{ij}} d\alpha_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}^p} d\epsilon_{ij}^p = 0 \quad (44)$$

Die Bezeichnung *isotrop* ist hier so zu verstehen, daß sich im Fall der isotropen Verfestigung die kinematische Spannung α_{ij} zwar nicht ändert — aber vorhanden ist¹¹. Die Gl. 44 reduziert sich damit auf:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}^p} d\epsilon_{ij}^p = 0 \quad (45)$$

Die Gleichungen 38 und 41 können zusammenfaßt

$$d\sigma_{kl} = D_{ijkl}^e \cdot d\epsilon_{ij}^e \quad (46)$$

$$= D_{ijkl}^e \cdot (d\epsilon_{ij} - d\epsilon_{ij}^p) \quad (47)$$

¹¹Der Spannungszustand ist damit natürlich immer noch anisotrop (vgl. [Bal65]), aber die weiteren Änderungen sind isotrop.

und in Gl. 45 eingesetzt werden:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} D_{ijkl}^e (d\epsilon_{ij} - d\epsilon_{ij}^p) + \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}^p} d\epsilon_{ij}^p = 0 \quad (48)$$

Aus der Fließregel (Gl. 42) folgt dann für den Skalar $d\lambda$:

$$d\lambda = \frac{-\frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} D_{ijkl}^e}{\frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}^p} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} D_{ijkl}^e \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}} \cdot d\epsilon_{ij} \quad (49)$$

Somit ergibt sich der elastisch-plastische Steifigkeitstensor D_{ijkl}^{ep} für die isotrope Verfestigung zu:

$$d\sigma_{kl} = \left(D_{ijkl}^e + \frac{D_{mnkl}^e \frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{op}} D_{ijop}^e}{\frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}^p} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} D_{ijkl}^e \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}} \right) \cdot d\epsilon_{ij} = D_{ijkl}^{ep} \cdot d\epsilon_{ij} \quad (50)$$

bzw. in der Matrizenschreibweise:

$$d\bar{\sigma} = \left(\mathbf{D}^e - \frac{\mathbf{D}^e \mathbf{q} (\mathbf{D}^e \mathbf{q})^T}{\mathbf{p}^T \mathbf{q} + \mathbf{q}^T \mathbf{D}^e \mathbf{q}} \right) d\bar{\epsilon} = \mathbf{D}^{ep} \cdot d\bar{\epsilon} \quad (51)$$

mit den Abkürzungen $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$:

$$\mathbf{p}^T = - \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{\epsilon}_1^p}, \frac{\partial F}{\partial \bar{\epsilon}_2^p}, \frac{\partial F}{\partial \bar{\epsilon}_3^p}, 2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\epsilon}_4^p}, 2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\epsilon}_5^p}, 2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\epsilon}_6^p} \right) \quad (52)$$

$$= - \left(\frac{\partial F}{\partial \epsilon_{11}^p}, \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{22}^p}, \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{33}^p}, \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{12}^p}, \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{23}^p}, \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{31}^p} \right) \quad (53)$$

$$\mathbf{q}^T = \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}_1}, \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}_2}, \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}_3}, 2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}_4}, 2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}_5}, 2 \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}_6} \right) \quad (54)$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{11}}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_{22}}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_{33}}, 2 \frac{\partial F}{\partial \sigma_{12}}, 2 \frac{\partial F}{\partial \sigma_{23}}, 2 \frac{\partial F}{\partial \sigma_{31}} \right) \quad (55)$$

Die Produkte in Gl. 51 mit der linear-elastischen Steifigkeitsmatrix lassen sich für den Zähler und den 2. Term im Nenner noch zu einem einfachen Vektor bzw. Skalar zusammenfassen:

$$\mathbf{D}^e \mathbf{q} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} (1-\nu)q_1 + \nu q_2 + \nu q_3 \\ \nu q_1 + (1-\nu)q_2 + \nu q_3 \\ \nu q_1 + \nu q_2 + (1-\nu)q_3 \\ \frac{1-2\nu}{2} q_4 \\ \frac{1-2\nu}{2} q_5 \\ \frac{1-2\nu}{2} q_6 \end{array} \right\} \quad (56)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}^T \mathbf{D}^e \mathbf{q} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) + \\
&+ \frac{2E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (q_1 q_2 + q_2 q_3 + q_3 q_1) + \\
&+ \frac{E}{2(1+\nu)} (q_4^2 + q_5^2 + q_6^2)
\end{aligned} \quad (57)$$

In der Gl. 50 sind noch die beiden Ableitungen des Fließkriteriums nach der plastischen Dehnung bzw. nach den Spannungen enthalten.

Das Spannungs-Dehnungs-Verhalten wird üblicherweise in einem σ - ϵ Diagramm dargestellt. Dabei wird an einen Zugstab gedacht, der eindimensionale Zugspannungen in seiner Längsachse aufweist und sich in drei Dimensionen dehnt. Der Tangentenmodul E^t ist damit definiert:

$$d\sigma_x = E^t \cdot d\epsilon_x \quad (58)$$

Der untere Index $_x$ steht für die Stablängsrichtung x .

Will man diese Eigenschaften auf einen allgemeinen 3D Fall ausdehnen, so daß das o.G. ein Sonderfall daraus ist, dann interpretiert man das Spannungs-Dehnungs-Diagramm als eine Auftragung der 2. Invarianten der Spannung über der 2. Invarianten der Dehnung; bzw. der Fließ- oder Vergleichsspannung über der Vergleichsdehnung. Der Übergang von der Vergleichsspannung σ_{vgl} zur Fließspannung σ_y wird dabei durch das Fließkriterium $F = 0$ hergestellt.

$$\sigma_y = \sigma_{vgl} = f(\epsilon_{vgl}) \quad (59)$$

Der elastische Anteil an den Dehnungen ist ohne Bedeutung und kann herausgezogen werden. Im Fall eines konstanten Tangentenmoduls ergibt sich ein effektiver Tangentenmodul nach Gl. 61 aus der Anpassung an den üblichen Zugversuch in Gl. 58.

$$d\sigma_y(\epsilon_{vgl}^p) = E^{\text{eff}} d\epsilon_{vgl}^p \quad (60)$$

$$\text{mit} \quad E^{\text{eff}} = \frac{E \cdot E^t}{E - E^t} \quad (61)$$

Die plastische Vergleichsdehnung ϵ_{vgl}^p ist dabei als

$$\epsilon^p = \epsilon_{vgl}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \epsilon_{ij}^p \cdot \epsilon_{ij}^p} \quad (62)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3} (\bar{\epsilon}_1^p \bar{\epsilon}_1^p + \bar{\epsilon}_2^p \bar{\epsilon}_2^p + \bar{\epsilon}_3^p \bar{\epsilon}_3^p + 0.5(\bar{\epsilon}_4^p \bar{\epsilon}_4^p + \bar{\epsilon}_5^p \bar{\epsilon}_5^p + \bar{\epsilon}_6^p \bar{\epsilon}_6^p))} \quad (63)$$

definiert und entspricht damit der 2. Invarianten der plastischen Dehnungen. Da die plastische Volumendehnung gleich Null sein muß, verschwindet die 1. Invariante der plastischen Dehnungen $I_1^p = \frac{1}{3} \epsilon_{mm}^p = 0$. Das bedeutet für die plastische Querkontraktionszahl:

$$\nu^p = 0.5 \quad (64)$$

Damit läßt sich nun die partielle Ableitung, die in Gl. 50 benötigt wird, herleiten:

$$\frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}^p} = \frac{\partial (\frac{3}{2} s_{ij} \cdot s_{ij} - \sigma_y^2)}{\partial \epsilon_{ij}^p} = \frac{\partial \sigma_y^2}{\partial \epsilon_{ij}^p} \quad (65)$$

$$= -\frac{4}{3} \cdot \sigma_y \cdot \frac{\partial \sigma_y(\epsilon^p)}{\partial \epsilon^p} \cdot \frac{1}{\epsilon^p} \cdot \epsilon_{ij}^p \quad (66)$$

bzw. es berechnet sich $\mathbf{p}$ in Gl. 52 mit der Gl. 60:

$$\mathbf{p} = \frac{4}{3} \frac{\partial \sigma_y}{\partial \epsilon^p} \frac{\sigma_y}{\epsilon^p} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11}^p \\ \epsilon_{22}^p \\ \epsilon_{33}^p \\ \epsilon_{12}^p \\ \epsilon_{23}^p \\ \epsilon_{31}^p \end{Bmatrix} = \frac{2}{3} \frac{\partial \sigma_y}{\partial \epsilon^p} \frac{\sigma_y}{\epsilon^p} \begin{Bmatrix} 2\bar{\epsilon}_1^p \\ 2\bar{\epsilon}_2^p \\ 2\bar{\epsilon}_3^p \\ \bar{\epsilon}_4^p \\ \bar{\epsilon}_5^p \\ \bar{\epsilon}_6^p \end{Bmatrix} = \frac{2}{3} E^{\text{eff}} \frac{\sigma_y}{\epsilon^p} \begin{Bmatrix} 2\bar{\epsilon}_1^p \\ 2\bar{\epsilon}_2^p \\ 2\bar{\epsilon}_3^p \\ \bar{\epsilon}_4^p \\ \bar{\epsilon}_5^p \\ \bar{\epsilon}_6^p \end{Bmatrix} \quad (67)$$

Eine Schwierigkeit besteht noch darin, daß der Term $\frac{\epsilon_{ij}^p}{\epsilon^p}$ beim Fließbeginn noch nicht definiert ist ($\frac{0}{0}$). Ersatzweise wird dort ($\epsilon^p < 0.00001$) mit der elastischen Dehnung und Vergleichsdehnung gerechnet:

$$\frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}^p} = -\frac{4}{3} \cdot \sigma_y \cdot \frac{\partial \sigma_y(\epsilon^p)}{\partial \epsilon^p} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3} \epsilon_{ij} \cdot \epsilon_{ij}}} \cdot \epsilon_{ij} \quad (68)$$

Die zweite partielle Ableitung in Gl. 50 läßt sich ebenfalls noch konkreter schreiben:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \left[\frac{3}{2} s_{ij} \cdot s_{ij} - \sigma_y^2 \right] \quad (69)$$

$$= 3(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{mm} - (\alpha_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \alpha_{mm})) \quad (70)$$

Da α_{ij} stets proportional zu ϵ_{ij}^p ist und die plastische Volumendehnung $\epsilon_{mm}^p = 0$ ist, kann der letzte Term $\frac{1}{3} \delta_{ij} \alpha_{mm}$ entfallen.

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = 3(\sigma_{ij} - \alpha_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{mm}) = 3 s_{ij} \quad (71)$$

Aus der Gl. 42 wird damit die bekannte Levy-v.Mises-Fließregel [Bet85]:

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = 3d\lambda s_{ij} \quad (72)$$

In der Matrixschreibweise wird $\mathbf{q}$ in Gl. 54 mit der Gl. 71 zu:

$$\mathbf{q} = 3 \begin{Bmatrix} s_{11} \\ s_{22} \\ s_{33} \\ 2s_{12} \\ 2s_{23} \\ 2s_{31} \end{Bmatrix} = 3 \begin{Bmatrix} (\bar{\sigma}_1 - \bar{\alpha}_1 - \sigma_m) \\ (\bar{\sigma}_2 - \bar{\alpha}_2 - \sigma_m) \\ (\bar{\sigma}_3 - \bar{\alpha}_3 - \sigma_m) \\ 2(\bar{\sigma}_4 - \bar{\alpha}_4) \\ 2(\bar{\sigma}_5 - \bar{\alpha}_5) \\ 2(\bar{\sigma}_6 - \bar{\alpha}_6) \end{Bmatrix} ; \quad \sigma_m = \frac{1}{3} \sigma_{ii} \quad (73)$$

Das Produkt im ersten Term des Nenners in Gl. 51 ist damit:

$$\mathbf{p}^T \mathbf{q} = 4 \frac{\partial \sigma_y}{\partial \epsilon^p} \frac{\sigma_y}{\epsilon^p} \left\{ \begin{array}{c} \bar{\epsilon}_1^p \\ \bar{\epsilon}_2^p \\ \bar{\epsilon}_3^p \\ \bar{\epsilon}_4^p \\ \bar{\epsilon}_5^p \\ \bar{\epsilon}_6^p \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} (\bar{\sigma}_1 - \bar{\alpha}_1 - \sigma_m) \\ (\bar{\sigma}_2 - \bar{\alpha}_2 - \sigma_m) \\ (\bar{\sigma}_3 - \bar{\alpha}_3 - \sigma_m) \\ (\bar{\sigma}_4 - \bar{\alpha}_4) \\ (\bar{\sigma}_5 - \bar{\alpha}_5) \\ (\bar{\sigma}_6 - \bar{\alpha}_6) \end{array} \right\} \quad (74)$$

7.3.4 Anisotrope Verfestigung

Während des Fließens gilt wie schon zu Gl. 44 gesagt $dF = 0$. Im Gegensatz zur isotropen Verfestigung (Gl. 45) kann jetzt die kinematische Spannung nicht mehr als konstant angesehen werden.

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \alpha_{ij}} d\alpha_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}^p} d\epsilon_{ij}^p = 0 \quad (75)$$

Nimmt man entsprechend der Pragerschen Fließregel an, daß sich der Mittelpunkt der Fließfläche - die kinematische Spannung α_{ij} - in Richtung der aktuellen plastischen Dehnung verschiebt, dann gilt (vgl. Gl. 42):

$$d\alpha_{ij} = c d\epsilon_{ij}^p = c d\lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (76)$$

Der Proportionalitätsfaktor¹² c enthält den Bauschinger-Effekt [Bau81].

Ebenso wie bei der isotropen Verfestigung von Gl. 46 bis Gl. 51, läßt sich auch hier der elastisch-plastische Materialsteifigkeitstensor aus Gl. 75 und Gl. 76 herleiten.

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl}^e (d\epsilon_{ij} - d\epsilon_{ij}^p) + (c \frac{\partial F}{\partial \alpha_{ij}} + \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}^p}) d\epsilon_{ij}^p = 0 \quad (77)$$

$$d\lambda = \frac{-\frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} D_{ijkl}^e}{c \frac{\partial F}{\partial \alpha_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}^p} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} D_{ijkl}^e \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}} \cdot d\epsilon_{ij} \quad (78)$$

$$d\sigma_{kl} = \left(D_{ijkl}^e + \frac{D_{mnkl}^e \frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{op}} D_{ijop}^e}{c \frac{\partial F}{\partial \alpha_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}^p} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} D_{ijkl}^e \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}} \right) \cdot d\epsilon_{ij} \quad (79)$$

Offensichtlich ist relativ zur isotropen Verfestigung (Gl. 50) nur der Term $c \frac{\partial F}{\partial \alpha_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$ hinzugekommen. Um diesen Skalar zu berechnen, benötigt man die Ableitung des Fließkriteriums nach der kinematischen Spannung. Mit der Gl. 39 und 40 berechnet sich diese Ableitung zu:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_{ij}} = \frac{\partial}{\partial \alpha_{ij}} \left[\frac{3}{2} s_{ij} \cdot s_{ij} - \sigma_y^2 \right] \quad (80)$$

$$= -3s_{ij} \quad (81)$$

¹²In [Goe85] wird für ST45/60 $c = 2970 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ angegeben. Ein Wert den Dahl in [Dah74] bestätigt.

und daraus folgt $\frac{\partial F}{\partial \alpha_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = -3s_{ij} \cdot 3s_{ij}$ mit $F = 0 = \frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} - \sigma_y^2$ während des Fließens:

$$c \frac{\partial F}{\partial \alpha_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = -6c\sigma_y^2 \quad (82)$$

In der Matrizenschreibweise ergibt sich damit für die Spannungszuwächse:

$$d\bar{\sigma} = \left(\mathbf{D}^e - \frac{\mathbf{D}^e \mathbf{q} (\mathbf{D}^e \mathbf{q})^T}{-6c\sigma_y^2 + \mathbf{p}^T \mathbf{q} + \mathbf{q}^T \mathbf{D}^e \mathbf{q}} \right) d\bar{\epsilon} = \mathbf{D}^{ep} \cdot d\bar{\epsilon} \quad (83)$$

Die elastisch-plastische Materialsteifigkeitsmatrix in Gl. 83 ist nun mit Gleichung 56, 74 und 57 leicht zu berechnen.

Nunmehr sind in dieser allgemeinen Form von Gl. 83 alle internen Materialtypen enthalten:

- lineare-elastische Rechnung $\Rightarrow$ der zweite Term in Gl. 83 entfällt.
- ideal-plastische Rechnung $\Rightarrow c = 0$ und $|\mathbf{p}| = 0$
- isotrope Verfestigung $\Rightarrow c = 0$
- kinematische Verfestigung $\Rightarrow |\mathbf{p}| = 0$
- anisotrope Verfestigung $\Rightarrow$ alle Terme besetzt.

Die einzige Spezialisierung steckt in dem Fließkriterium (Gl. 39) selbst: die Form der Fließoberfläche ändert sich nicht. Sie bleibt immer ein Zylinder, der parallel zur ersten Raumdiagonalen im Hauptspannungsraum liegt. Der Radius (Fließspannung) und die Position (kinematische Spannung) sind aber veränderlich.

Die Abb. 45 gibt noch einen Überblick über den Entscheidungsablauf und über die Gleichungen beim Linearisieren der Materialsteifigkeitsmatrix.

7.4 Die Materialkonstanten

In der Gl. 83 sind nunmehr zwei Konstanten enthalten, die das Verhältnis der Fließspannung zur Dehnung steuern:

- Der kinematische Proportionalitätsfaktor c und
- Die Ableitung der Fließspannung nach den plastischen Dehnungen $\frac{d\sigma_y}{d\epsilon^p}$, die den Vektor $\mathbf{p}$ in Gl. 74 skaliert.

Beide werden in Anlehnung an den Zugversuch bestimmt. Dabei läßt sich wie auf Seite 57 (Gl. 60) dargestellt schreiben ¹³:

$$d\sigma_y = E_a^{\text{eff}} \cdot d\epsilon^p \quad (84)$$

¹³Der obere Index *eff* bei dem Tangentenmodul steht für *effektiv*, also bezieht er sich auf die plastische Vergleichsdehnung. Während sich der Tangentenmodul ansonsten auf die gesamte (elastische plus plastische) Dehnung bezieht. Der untere Index z.B. bei E_k steht für den *kinematischen*, E_i für den *isotropen* und E_a steht für den *anisotropen* Tangentenmodul.

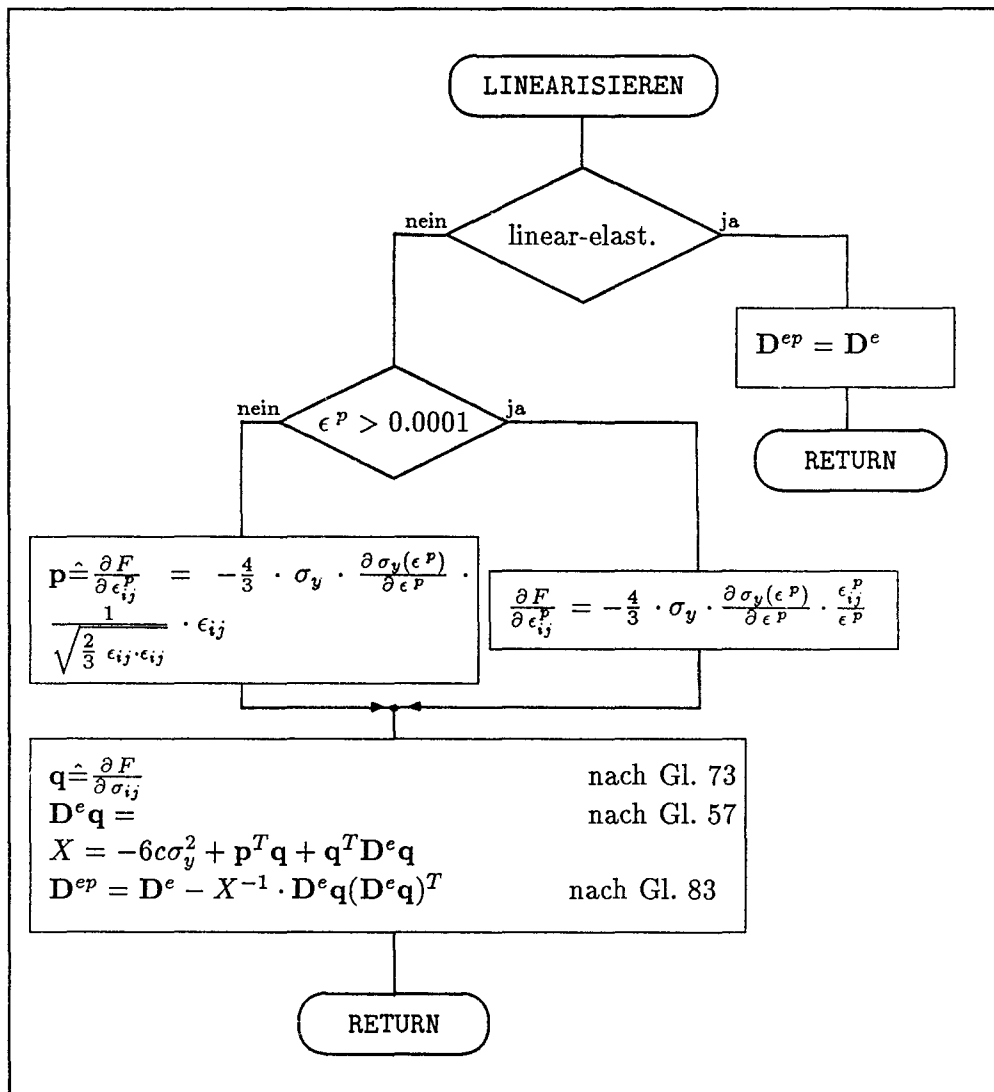


Abbildung 45: Flußdiagramm zum Linearisieren der Materialsteifigkeitsmatrix

Im Zugversuch selbst kann natürlich nur die gesamte, also anisotrope Verfestigung, bestimmt werden. Diese setzt sich additiv aus der kinematischen plus der isotropen Verfestigung zusammen.

Folgt auf eine Belastungsphase eine Lastumkehr, so daß Fließen in der alternierenden Richtung (Zug/Druck) auftritt, ist an der entsprechend kleineren Fließspannung in dieser Gegenrichtung der kinematische Spannungsanteil abzulesen; dies entspricht dem Bauschinger-Effekt¹⁴.

Bei der Umrechnung von den einzelnen Steifigkeitsanteilen findet im Gegensatz zu Gl. 61 eine Wechselwirkung statt:

Soll in einer anisotropen Rechnung der effektive Tangentenmodul E_i^{eff} für den isotropen Anteil berechnet werden, so muß der Einfluß des kinematischen Tangentenmoduls berücksichtigt werden. Gl. 61 wird ersetzt durch:

$$E_i^{\text{eff}} = \frac{E \cdot E_i}{E - E_a} = \frac{\partial \sigma_y}{\partial \epsilon^p} \quad (85)$$

Der Tangentenmodul E_i^{eff} entspricht dann der Ableitung der Fließspannung nach der plastischen Vergleichsdehnung $\frac{\partial \sigma_y}{\partial \epsilon^p}$, die in Gl. 67 für $\mathbf{p}$ benötigt wird.

Für den rein kinematischen Tangentenmodul bedeutet dieses in Gl. 76:

$$c = \frac{2}{3} E_k^{\text{eff}} = \frac{2}{3} \frac{E \cdot E_k}{E - E_a} \quad (86)$$

Der Faktor $\frac{2}{3}$ entsteht durch den Einfluß der Querkontraktion auf α und damit auf die Vergleichsspannung.

Entnimmt man den effektiven, anisotropen Tangentenmodul z.B. der Dissertation von Klee [Kle73], so berechnet sich der anisotrope Tangentenmodul nach Gl. 87 unter Berücksichtigung der wahren Spannungen σ' (Gl. 87) und der wahren Dehnungen¹⁵ ϵ' (Gl. 88). Anschließend sind $\frac{d\sigma_y}{d\epsilon^p}$ und c über die Gl. 85 und Gl. 86 zu berechnen.

$$E_a = \frac{E \cdot E_a^{\text{eff}}}{E + E_a^{\text{eff}}} = E_k + E_i \quad (87)$$

$$\epsilon = e^{\epsilon'} - 1 \quad (88)$$

$$\sigma = \sigma' \left(1 - \frac{1}{2} \epsilon\right)^2 \quad (89)$$

Im allgemeinen Fall sind alle Tangentenmodule über der plastischen Vergleichsdehnung nicht konstant sondern veränderlich. In dieser Arbeit ist $E_a = E_a(\epsilon)$ eine Polygonkurve aus Messungen und E_k eine von der Vergleichsdehnung unabhängige Konstante.

¹⁴Während der Bauschinger-Effekt nach [Back72] in einen temporären und einen bleibenden Anteil aufgeteilt wird, soll in dieser Arbeit unter Bauschinger-Effekt nur der bleibende Anteil verstanden werden. Der temporäre Anteil ist mit einem linearen Ansatz des Tangentenmoduls nach Prager nicht zu erfassen.

¹⁵Die wahre Dehnung wird auch *logarithmische* Dehnung, *natürliche* Dehnung oder *Umformgrad* genannt.

7.5 Die Elementspannungen

Jeder Zeitschritt beginnt damit, daß die Steifigkeitsmatrix bezüglich des letzten, erfolgreichen Schrittes linearisiert wird und das lineare Gleichungssystem gelöst wird. Nunmehr müssen die Spannungen an den einzelnen Elementen überprüft und ggf. korrigiert werden. Anschließend wird das Gleichungssystem sofort mit den nicht ausgewogenen Kräften belastet, bis eine gegebene Iterationsgrenze unterschritten wird. Für infinitesimal kleine Lastschritte könnte diese Korrektur komplett entfallen.

Die Konstruktion der Materialsteifigkeitsmatrix wurde im vorausgegangenen Kapitel dargestellt, das Lösen des linearisierten Gleichungssystems wird von ADINA intern organisiert. Im Folgenden wird gezeigt, wie aus den berechneten und damit vorgegebenen Dehnungen die zugehörigen tatsächlichen Spannungen ermittelt werden.

Da in diesem Kapitel die Zustandsgrößen der verschiedenen Zeitschritte sorgfältig auseinandergehalten werden müssen, wird ein Zeitindex links oben eingeführt (z.B.: tF). Die Zeit des vergangenen (stabilen) Schrittes wird mit t bezeichnet, der aktuell zu errechnende Schritt mit $t + dt$ oder kurz: T . Für Iterationen etc. innerhalb der Zeitschritte wird das Symbol τ benutzt. Die Relation $t \leq \tau \leq T$ ist dabei nicht im Sinn einer zeitlichen Entwicklung, sondern einer iterativen Verbesserung zu verstehen.

7.5.1 Selektion des Types der Rechnung

Schon bei der Berechnung der Materialsteifigkeitsmatrix wurde abgelegt in welchem Zustand der letzte Schritt ausgeführt wurde. Die Variable IARRAY(1) zeigt den Zustand an: (-1 = linear-elastisch, 0 = kinematisch, +1 = anisotrop).

Nachdem die Materialsteifigkeitsmatrix (Gl. 83) restauriert¹⁶ wurde, wird eine erste Näherung für $d\bar{\sigma}$ gemacht:

$$d\bar{\sigma} = {}^tD^{ep} \cdot d\bar{\epsilon} \quad (90)$$

$$\tau\bar{\sigma} = {}^t\bar{\sigma} + d\bar{\sigma} \quad (91)$$

Für die kommenden Fallunterscheidungen wird ein Zeiger benötigt:

$$sds = {}^t\mathbf{s} \cdot \mathbf{D}^e \cdot d\bar{\epsilon} \quad (92)$$

Der skalar Zeiger sds gibt an, ob eine Umkehr der Belastung erfolgt ist. sds ist kleiner als Null, solange eine Entlastung des jeweiligen Elementes stattfindet. Es wird hierzu das Skalarprodukt aus der kinematischen, deviatorischen Spannung ${}^t\bar{\mathbf{s}}$ mit der Spannung, die die gegebenen Dehnungenzuwächse $d\bar{\epsilon}$ an der linear-elastischen Materialsteifigkeitsmatrix $\mathbf{D}^e$ erzeugen würden, errechnet. Dieses Kriterium versagt weder bei ideal-plastischem Material, noch wenn der elastische Bereich in einem Schritt durchquert wird.

Die mittlere Spannung (hydrostatischer Druck) wird benötigt

$$\sigma_m = \frac{1}{3} (\tau\bar{\sigma}_1 + \tau\bar{\sigma}_2 + \tau\bar{\sigma}_3) \quad (93)$$

¹⁶Die Materialsteifigkeitsmatrix wird leider beim Lösen des globalen Gleichungssystems gelöscht

und damit kann die erste, vorläufige Annahme für die kinematischen, deviatorischen Spannungen ausgeführt werden

$$\tau s_i = \tau \bar{\sigma}_i - {}^t \bar{\alpha}_i - \sigma_m \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (94)$$

$$\tau s_i = \tau \bar{\sigma}_i - {}^t \bar{\alpha}_i \quad ; \quad i = 4, 5, 6 \quad (95)$$

Das Fließkriterium (Zeitzuordnung beachten) lautet damit:

$${}^T F(\tau \sigma, {}^t \alpha, {}^t \epsilon^p) = \frac{3}{2} \tau s_{ij} \tau s_{ij} - {}^t \sigma_y^2 \quad (96)$$

Nunmehr folgt ein Block in dem entschieden werden muß, von welcher Art dieser Lastschritt war, da bisher nur eine Theorie für den reinen elastischen und eine Theorie für den plastischen Belastungsschritt vorhanden ist. Es liegt aber in der Natur der finiten Rechnung, daß auch die Belastung in finiten Schritten aufgebracht wird und damit aller Wahrscheinlichkeit nach der Übergang vom elastischen zum plastischen Bereich nicht genau auf einer Schrittgrenze liegt.

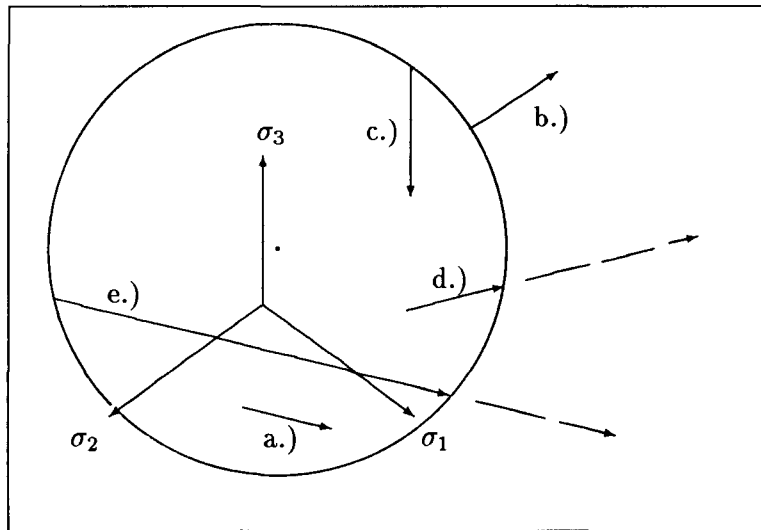


Abbildung 46: Mögliche Pfade im Hauptspannungsraum

Überschreitet man aktuell diese Grenze, muß der Lastschritt intern in einen elastischen und einen plastischen Teilschritt zerlegt werden.

Die folgenden Konfigurationen sind dabei denkbar (vgl. Abb. 46):

- a.) Innerhalb des elastischen Bereichs: so muß ${}^T \text{ARRAY}(1) = -1$ gewesen sein und ${}^T F < 0$
In diesem Fall sind nur noch alle Werte zu aktualisieren:

$${}^T \bar{\sigma} = \tau \bar{\sigma} \quad ; \quad {}^T \bar{\alpha} = {}^t \bar{\alpha} \quad \text{etc.} \quad (97)$$

und die Rechnung für diesen Lastschritt ist vollständig beendet. Die gewöhnliche linear-elastische Theorie wird angewandt.

- b.) Ein rein plastischer Schritt: schon der letzte Lastschritt war plastisch $\dot{\epsilon}_{\text{ARRAY}}(1) \geq 0$ und nun ist der Spannungszuwachs $d\bar{\sigma}$ auswärts der Fließfläche gerichtet $sds \geq 0$ (Gl. 92). Später ist noch zu untersuchen, ob anisotrope bzw. kinematische Verfestigung vorliegt. Alle Rechnungen erfolgen mit der plastischen Theorie, wie sie im Kapitel 7.3.4 und im Folgenden beschrieben wird.
- c.) Die Rückkehr aus dem plastischen zum elastischen Bereich (Entlastung); $\dot{\epsilon}_{\text{ARRAY}}(1) \geq 0$ und $sds < 0$. Da Gl. 91 in jedem Fall ausgeführt wurde, ist zunächst die Spannung wieder auf den Originalwert bei Betreten des Unterprogramms zu bringen, dann muß $\text{IARRAY}(1) = -1$ gesetzt werden und danach müssen die Gleichungen Gl. 90 bis Gl. 96 mit $\dot{\mathbf{D}}^{\text{ep}} = \dot{\mathbf{D}}^e$ neu berechnet werden; so als hätte der Schritt infinitesimal innerhalb des elastischen Bereichs begonnen.

Die Möglichkeit, daß der elastische Bereich vollständig durchquert und die Fließfläche wieder erreicht wird, kann mit der folgenden Prüfung abgefangen werden.

- d.) Das Verlassen des elastischen Gebietes in den plastischen Bereich hinein $\dot{\epsilon}_{\text{ARRAY}}(1) = -1$ und $\tau F \geq 0$. Dieses Mal ist weit mehr zu tun, da der elastische Anteil abgespalten werden muß (nächstes Kapitel) und erst dann für die verbliebene Dehnung wie im Fall b.) verfahren werden kann.
- e.) Das Entlasten aus dem plastischen Gebiet heraus – durch den elastischen Bereich hindurch – wieder ins Plastische. Rechnung zunächst wie unter c) dann d) und b). Diese Möglichkeit mutet zunächst etwas exotisch an, da scheinbar die Schrittweite der Belastung sehr groß ist. Für das Element unmittelbar an der Rißspitze wird dieser Fall aber bei einer Verminderung der äußeren Kraft sofort eintreten.

Die Abb. 47 gibt einen Einblick über die Entscheidungen und Pfade in diesem Programmteil.

7.5.2 Abspalten des elastischen Anteils eines Lastschrittes

Da der letzte Lastschritt im elastischen Bereich endete, muß $\tau F < 0$ sein und die vorläufige Berechnung für τF nach Gl. 96 hat einen Wert größer als Null ergeben. Der Spannungszuwachs aus der Gl. 90 wird nun derart mit einem Skalar t (mit $0 < t < 1$) multipliziert, daß $\tau F = 0$ wird (vgl. Gl. 98 und Abb. 48). Für diese Spannungszuwächse $d\bar{\sigma}$ lassen sich dann die entsprechenden elastischen Dehnungen $d\bar{\epsilon}^e$ ermitteln und von $d\bar{\epsilon}$ abziehen. Danach kann so weitergerechnet werden, als hätte der Lastschritt schon im plastischen Bereich begonnen.

$$\tau\sigma = {}^t\sigma + t \cdot d\sigma \quad (98)$$

$$\tau F(\tau\sigma, {}^t\alpha, {}^t\epsilon) = \frac{3}{2} \tau s_{ij}(t) \tau s_{ij}(t) - {}^t\sigma_y^2 \stackrel{!}{=} 0 \quad (99)$$

Mit der entsprechend modifizierten kinematischen Spannung:

$$\tau s_{ij}(t) = {}^t s_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} {}^t \sigma_{mm} - {}^t \alpha_{ij} + t \cdot (d s_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} d \sigma_{mm}) \quad (100)$$

$$= {}^t s_{ij} + t \cdot (b_{ij}) \quad (101)$$

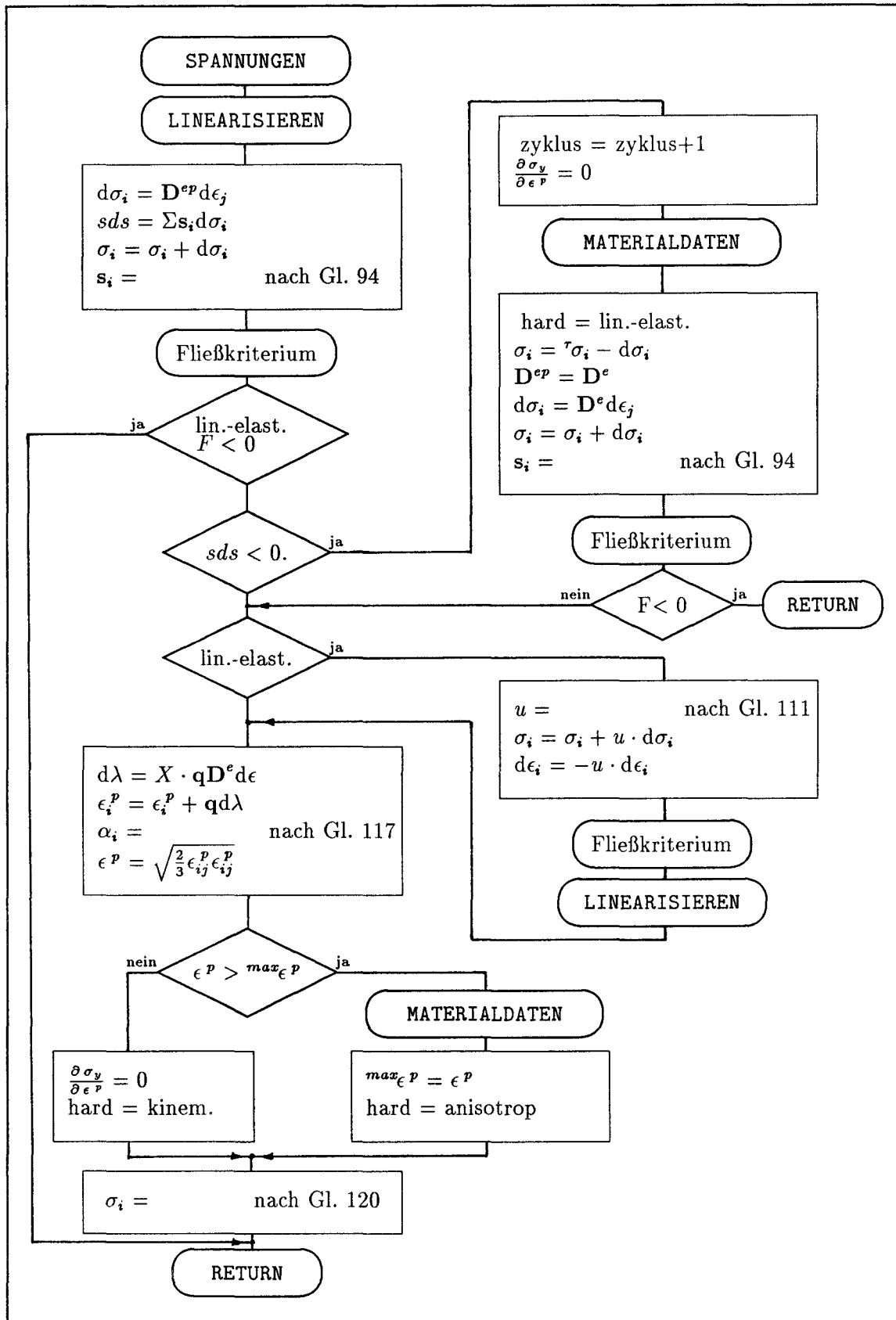


Abbildung 47: Flußdiagramm zur Berechnung der tatsächlichen Spannungen

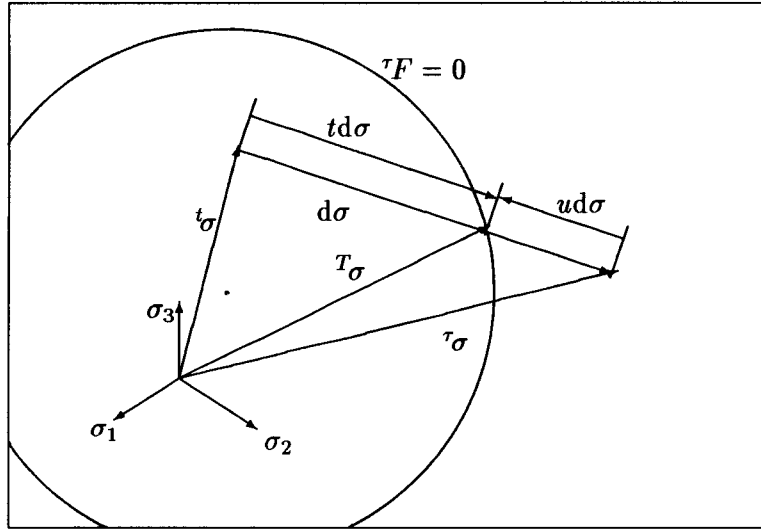


Abbildung 48: Abspaltung des elastischen Anteils

Die Gl. 99 und Gl. 101 kann mit den Hilfsskalaren α , β und γ nach t aufgelöst werden:

$$t_{1,2} = -\frac{\beta}{\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{2}{3} \frac{\sigma_y^2}{\alpha}} \quad (102)$$

$$= -\frac{\beta}{\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - \frac{2}{3\alpha} tF} \quad (103)$$

$$\alpha = b_{ij} b_{ij} = (d\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} d\sigma_{mm})(d\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} d\sigma_{mm}) \quad (104)$$

$$= d\sigma_{ij} d\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} d\sigma_{mm}^2 \quad (105)$$

$$\beta = {}^t s_{ij} b_{ij} = ({}^t \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} {}^t \sigma_{mm} - {}^t \alpha_{ij})(d\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} d\sigma_{mm}) \quad (106)$$

$$\gamma = {}^t s_{ij} {}^t s_{ij} = ({}^t \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} {}^t \sigma_{mm} - {}^t \alpha_{ij})({}^t \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} {}^t \sigma_{mm} - {}^t \alpha_{ij}) \quad (107)$$

$$= {}^t \sigma_{ij} {}^t \sigma_{ij} + {}^t \alpha_{ij} {}^t \alpha_{ij} - 2 {}^t \sigma_{ij} {}^t \alpha_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} {}^t \sigma_{mm}^2 \quad (108)$$

Da immer ${}^t F \leq 0$ ist, kommt für $0 < t < 1$ nur die Addition der Wurzel in Gl. 102 in Betracht. In dem Grenzfall ${}^t F = 0$ wird t erwartungsgemäß $t = 0$, d.h. der elastische Anteil entfällt. Die obere Grenze ergibt sich, wenn das Fließkriterium nach dem Lastschritt gerade $\tau F = 0$ erreichen würde. Es läßt sich genau die gleiche Rechnung ausgehend von $\tau \bar{\sigma} = \tau \bar{\sigma} + u \cdot d\bar{\sigma}$ aufstellen – woraus folgt, daß $(1 + u) = t \leq 1$ bleiben muß.

Die elastischen Spannungszuwächse lassen sich also nach Gl. 109 berechnen und es verbleiben die Dehnungszuwächse nach Gl. 112 für den folgenden plastischen Anteil des Lastschrittes.

$$\tau \bar{\sigma} = {}^t \bar{\sigma} + t \cdot d\bar{\sigma} = \tau \bar{\sigma} + u d\bar{\sigma} \quad (109)$$

$$\text{mit } t = -\frac{{}^t s_{kl} b_{kl}}{b_{ij} b_{ij}} + \sqrt{\left(\frac{{}^t s_{kl} b_{kl}}{b_{ij} b_{ij}}\right)^2 - \frac{2}{3b_{ij} b_{ij}} {}^t F} \quad ; \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (110)$$

$$\text{oder } u = -\frac{\tau s_{kl} b_{kl}}{b_{ij} b_{ij}} + \sqrt{\left(\frac{\tau s_{kl} b_{kl}}{b_{ij} b_{ij}}\right)^2 - \frac{2}{3b_{ij} b_{ij}} \tau F} = t - 1 \quad (111)$$

$$d\bar{\epsilon} = (1 - t) \cdot d\bar{\epsilon} = -ud\bar{\epsilon} \quad (112)$$

Damit ist der elastische Anteil in diesem Lastschritt abgearbeitet. Nun muß noch die elastisch-plastische Steifigkeitsmatrix, die zu dem Punkt ${}^T F({}^T \sigma, {}^t \alpha, {}^t \epsilon)$ gehört, berechnet werden und die Gl. 90 und Gl. 91 müssen ausgeführt werden, um den gleichen Zustand zu erreichen, als hätte der Lastschritt bereits plastisch begonnen.

7.5.3 Die plastischen Dehnungs- und Spannungszuwächse

Mit Hilfe der Gl. 78 und $d\bar{\epsilon}$ aus Gl. 112¹⁷ läßt sich der Skalarfaktor $d\lambda$ berechnen:

$$d\lambda = \frac{{}^t \mathbf{q}^T \mathbf{D}^e}{-6c {}^t \sigma_y^2 + {}^t \mathbf{p}^T {}^t \mathbf{q} + {}^t \mathbf{q}^T \mathbf{D}^e {}^t \mathbf{q}} d\bar{\epsilon} \quad (113)$$

danach kann mit Hilfe der Gl. 42 und Gl. 76 der plastische Dehnungszuwachs in Gl. 115 und die Änderung der kinematischen Spannung in Gl. 117 errechnet werden, wobei $\mathbf{p}$ aus Gl. 52, $\mathbf{q}$ aus Gl. 54 und c aus Gl. 86 genommen wird.

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (114)$$

$$d\bar{\epsilon}^p = d\lambda {}^t \mathbf{q} \quad (115)$$

$$d\alpha_{ij} = c \cdot d\epsilon_{ij}^p \quad (116)$$

$$d\bar{\alpha} = c \cdot \begin{Bmatrix} d\bar{\epsilon}_1^p \\ d\bar{\epsilon}_2^p \\ d\bar{\epsilon}_3^p \\ \frac{1}{2} d\bar{\epsilon}_4^p \\ \frac{1}{2} d\bar{\epsilon}_5^p \\ \frac{1}{2} d\bar{\epsilon}_6^p \end{Bmatrix} = \frac{2}{3} \frac{E \cdot E_k}{E - E_a} \cdot \begin{Bmatrix} 2d\bar{\epsilon}_1^p \\ 2d\bar{\epsilon}_2^p \\ 2d\bar{\epsilon}_3^p \\ d\bar{\epsilon}_4^p \\ d\bar{\epsilon}_5^p \\ d\bar{\epsilon}_6^p \end{Bmatrix} \quad (117)$$

Es sei noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen¹⁸, daß α_{ij} proportional zu ϵ_{ij}^p ist, aber $\bar{\alpha}$ nicht proportional zu $\bar{\epsilon}^p$.

Nun kann die plastische Vergleichsdehnung ${}^T \epsilon^p$ nach Gl. 62 berechnet werden. Liegt diese plastische Vergleichsdehnung über der jemals aufgetretenen maximalen Vergleichsdehnung ${}^{max} \epsilon^p$, dann liegt anisotropes Verhalten vor und die Fließspannung muß lt. Gl. 60 auf ${}^T \sigma_y$ erhöht werden. Andernfalls wird die Ableitung der Fließspannung nach der plastischen Vergleichsdehnung $\frac{\partial \sigma_y}{\partial \epsilon^p}$ gleich Null gesetzt und dadurch mit kinematischer Verfestigung weitergerechnet.

Der Zeiger IARRAY(1) und ggf. die neue maximale Vergleichsdehnung ${}^{max} \epsilon^p$ wird gesetzt, alle Variablen werden noch aktualisiert und für die nächste Iteration oder den nächsten

¹⁷Wurde die Gl. 112 nicht ausgeführt, so ist $t = 0$ zu setzen

¹⁸Vgl. die Diskussion in [Uhl85] bzgl. dieses „Widerspruchs“

Lastschritt abgelegt:

$$T_{\bar{\epsilon}}^p = t_{\bar{\epsilon}}^p + d\bar{\epsilon}^p \quad (118)$$

$$T_{\bar{\alpha}} = t_{\bar{\alpha}} + d\bar{\alpha} \quad (119)$$

7.5.4 Abschließende Fehlerkorrektur – Radial return

In den vorangegangenen Schritten wurde des öfteren mit finiten Schritten gerechnet und so nur eine Näherung der gewünschten Differentialgleichungen erzielt. Zum Abschluß jedes Schrittes, der in den nichtlinearen Bereich hineinreicht, muß eine Korrektur durchgeführt werden, damit das Fließkriterium $T_F = 0$ auch wirklich erfüllt ist. Dies geschieht, indem auf dem kürzesten Weg – radial – zur Fließfläche zurückgekehrt wird:

$$T_{\bar{\sigma}} = \tau_{\bar{\sigma}} + \left(\frac{T_{\sigma_y}}{t_{\sigma_{vgl}}^{kin}} - 1 \right) \tau_s = \tau_{\bar{\sigma}} + \left(\frac{T_{\sigma_y}}{\sqrt{\frac{3}{2}} \tau_{s_{ij}} \tau_{s_{ij}}} - 1 \right) \tau_s \quad (120)$$

Da diese Korrektur effektiv im ersten Schritt berechnet werden kann, entfallen alle Einschachtelungen, wie sie bei anderen Korrekturverfahren auftreten [Red81].

Abschließend wird auch noch die kinematische, deviatorische Spannung auf ihren Endwert gesetzt:

$$T_{s_i} = T_{\bar{\sigma}_i} - T_{\bar{\alpha}_i} - \sigma_m \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (121)$$

$$T_{s_i} = T_{\bar{\sigma}_i} - T_{\bar{\alpha}_i} \quad ; \quad i = 4, 5, 6 \quad (122)$$

Dieser Korrekturschritt erfolgt in jedem Fall nach einer plastischen Rechnung, auch wenn das Fließkriterium $T_F < 0$ nach der Erhöhung der Fließspannung von t_{σ_y} auf T_{σ_y} eigentlich nicht mehr erfüllt ist.

Wenn diese Korrektur mehr als 10% der Fließspannung ausmacht, erfolgt eine Warnung und man sollte die Schrittweite verringern.

Nunmehr sind alle Bedingungen erfüllt und die nächste Iteration oder der nächste Lastschritt kann mit der Berechnung der Materialsteifigkeitsmatrix beginnen.

7.6 Ausdruck der Ergebnisse

8	345.47	0.	1018.95	605.67	605.67	-4.28	-4.28	0.00
	0.0149737	413.42	0.018066	-0.006909	-0.006909	0.001070	0.001070	0.000000
	#### ANISOTROPE V.		0.014946	-0.007473	-0.007473	0.001121	0.001121	0.000000
			1018.9991	609.9275	601.3618			
NEL: 5 EGR: 1 #TIME= 20.00								
IPT	YLD	F	STRESS-XX	STRESS-YY	STRESS-ZZ	STRESS-XY	STRESS-YZ	STRESS-ZX
	EPV	SVGL	E-XX	E-YY	E-ZZ	GAMMA-XY	GAMMA-YZ	GAMMA-ZX
			EP-XX	EP-YY	EP-ZZ	GAMMAP-XY	GAMMAP-YZ	GAMMAP-ZX
			S1	S2	S3			
1	338.24	0.	317.16	-136.05	-136.05	-26.37	-26.37	0.00
	0.0263268	457.79	0.028299	-0.014106	-0.014106	-0.000511	-0.000511	0.000000
	#### ANISOTROPE V.		0.026326	-0.013163	-0.013163	-0.000173	-0.000173	0.000000
			318.6929	-110.4716	-163.1548			
2	338.91	0.	935.97	481.63	481.63	-7.52	-7.52	0.00
	0.0252688	454.71	0.028299	-0.012341	-0.012341	-0.000460	-0.000460	0.000000
	#### ANISOTROPE V.		0.025267	-0.012633	-0.012633	-0.000368	-0.000368	0.000000
			936.0923	489.0800	474.0488			

Abbildung 49: Ausdruck der Elementspannungen und -dehnungen

Beim Aufruf des Materialgesetzes mit KEY=4 werden die errechneten Spannungen und Dehnungen auf dem Kanal 6 ausgedruckt.

Jede neue Seite und jede neue Elementgruppe wird von ADINA mit dem üblichen Header versehen. Danach übernimmt das Unterprogramm CUSER3 (Materialgesetz) den Ausdruck für jeden einzelnen Integrationspunkt.

Die Abb. 49 zeigt einen Ausschnitt aus einem Print für Elemente mit 2x2x2 Integrationspunkten. In der Abb. 50 sind die einzelnen Posten noch einmal deutlich herausgestellt.

NEL: 5 ⁽²⁾ EGR: 1 ⁽³⁾ #TIME= 20.00 ⁽⁴⁾									
M	IPT	YLD	F	STRESS-XX	STRESS-YY	STRESS-ZZ	STRESS-XY	STRESS-YZ	STRESS-ZX
		EPV	SVGL	E-XX	E-YY	E-ZZ	GAMMA-XY	GAMMA-YZ	GAMMA-ZX
				EP-XX	EP-YY	EP-ZZ	GAMMAP-XY	GAMMAP-YZ	GAMMAP-ZX
				S1	S2	S3			
1 ⁽⁵⁾	338.24 ⁽⁶⁾	0. ⁽⁷⁾	317.16 ⁽⁸⁾	-136.05	-136.05	-26.37	-26.37	0.00 ⁽⁸⁾	
	0.0263268 ⁽⁹⁾	457.79 ⁽¹⁰⁾	0.028299 ⁽¹¹⁾	-0.014106	-0.014106	-0.000511	-0.000511	0.000000 ⁽¹¹⁾	
	#### ANISOTROPE V. ⁽¹²⁾		0.026326 ⁽¹³⁾	-0.013163	-0.013163	-0.000173	-0.000173	0.000000 ⁽¹³⁾	
			318.6929 ⁽¹⁴⁾	-110.4716	-163.1548 ⁽¹⁴⁾				

Abbildung 50: Der Ergebnis-Ausdruck im Detail

Pro Element wird ein fünfzeiliger Kopf (1) ausgedruckt. Er enthält die Elementnummer (2), die Elementgruppe (3) und den Zeitpunkt (4), für den die Ergebnisse gelten.

Es folgen für jeden Integrationspunkt bis zu vier Zeilen:

In der ersten Zeile stehen die Nummer des Integrationspunktes (5), die Fließspannung σ_y (6) und der Wert des Fließkriteriums F (7), gefolgt von den drei Normal- und drei Schubspannungen (8) in globalen Koordinaten. Die Fließspannung versteht sich als isotrope Fließspannung, d.h. der Radius des Fließzylinders. Der Wert des Fließkriteriums kann kleiner als Null sein, dann sind die Spannungszuwächse gerade elastisch, oder es kann gleich Null sein, dann ist das Material plastisch. Werte größer als Null können definitionsgemäß nicht eintreten¹⁹.

In der zweiten Zeile pro Integrationspunkt stehen die plastische Vergleichsdehnung ϵ^p (9) und die Vergleichsspannung σ_{vgl} (10), ohne die Berücksichtigung von α , gefolgt von den sechs Dehnungen (11).

Die dritte Zeile gibt ggf. einen kurzen Text (12) wieder und listet danach die plastischen Anteile (13) der sechs Dehnungen auf.

Als Text kommt einer der folgenden kurzen Hinweise in Frage:

++++ KINEMAT. VERFEST.	kein Text: so sind die Spannungszuwächse linear-elastisch
==== ISOTROPE VERFEST.	steht für eine rein kinematische Verfestigung ($E_i = 0$)
#### ANISOTROPE V.	steht für rein isotrope Verfestigung ($E_k = 0$)
** ENTLASTUNG **	steht für anisotrope Verfestigung oder
	falls das Fließkriterium durch diesen Lastschritt von $F=0$ in
	den negativen Bereich abfällt (linear-elastische Entlastung).
	Der Zyklusähler wird dabei inkrementiert.

Eine vierte Zeile pro Integrationspunkt erscheint nur, wenn als *Solution-Control-Parameter* SCP(3)=2 in der Eingabedatei von ADINA-IN für das USER-DEFINED MATERIAL angegeben wurde. Sie enthält dann die drei Hauptspannungen des Integrationspunktes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, berechnet nach dem Verfahren von François Viete aus den Jahr 1615 [Pre89].

¹⁹ Da diese Bedingung nicht zwingend als Programmzeile eingebaut ist, wäre $F > 0$ grundsätzlich zwar möglich – aber eben ein Zeichen einer schweren Verwirrung innerhalb des Materialgesetzes.

8 Ergebnisse der 3D-Rechnung

Nachdem die Berechnung durchgeführt wurde, muß eine sehr große Datenmenge gesichtet und auf ihre Plausibilität hin geprüft werden. Dann wird eine kleine Auswahl der Ergebnisse getroffen, die sinnvoll (graphisch) dargestellt werden.

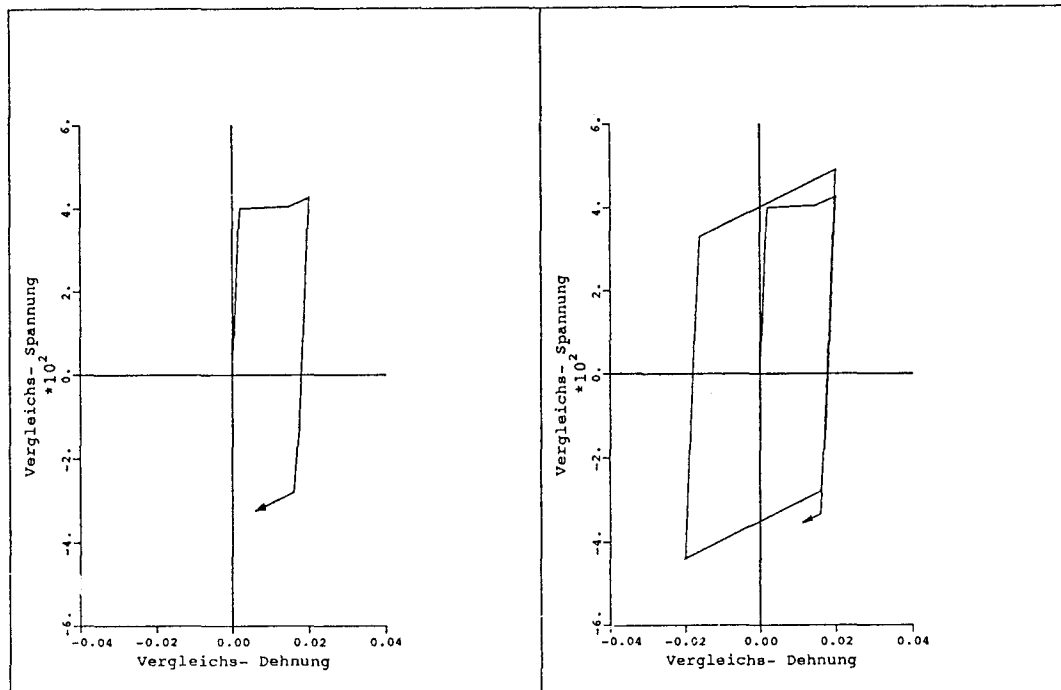


Abbildung 51: Spannungs-Dehnungskurve für ST 52-3

Zunächst soll das Spannungs-Dehnungsdiagramm gezeigt werden, wie es sich mit den Daten für ST 52-3 unter einer Wechselbeanspruchung ergibt: In der Abb. 51 sind zwei Diagramme zu sehen. Die Eingangswerte für die Materialdatei wurden den Diagrammen von Klee [Kle73] entnommen. Das linke Bild zeigt die Längsspannung über der Dehnung für die erste Beanspruchung eines dehnungskontrollierten Zugversuches. Die Spannung steigt auf der Hookeschen Geraden bis zur Fließspannung R_e linear an. Danach verhält sich das Material ideal-plastisch bis es die Lüders-Dehnung erreicht. Anschließend folgt es dem aufgemessenen Polygonzug bis die Zugbelastung ihr Maximum angenommen hat. Die Entlastung verläuft zunächst linear-elastisch bis zur Fließgrenze im Druckbereich. Diese Fließgrenze ist als Folge des Bauschinger-Effektes niedriger als das Gegenstück im Zugbereich. Nachdem nun das Fließen unter Druck eingesetzt hat, folgt die Spannungs-Dehnungskurve einem Tangentenmodul E_k , der als Eingabewerte über ADINA-IN in der Variablen CTI(3) auf $E_k = 4460 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ eingestellt worden ist.

Das rechte Diagramm setzt die Belastung fort. Über den Umkehrpunkt im Druckbereich, der die gleiche plastische Vergleichsdehnung wie jener unter Zug besitzt, geht es wieder zunächst elastisch und dann mit dem kinematischen Tangentenmodul in Richtung Zugmaximum. Diese Hystereseschleife ließe sich beliebig oft identisch durchlaufen, wenn nicht für die verschiedenen Zyklen verschiedene Spannungs-Dehnungskurven vorgegeben wären.

So wird ein Zugmaximum angesteuert, das zu der gleichen plastischen Vergleichsdehnung gehört wie das im ersten Zugmaximum, aber eben die (hier) höhere Vergleichsspannung des dritten Zyklus aufweist.

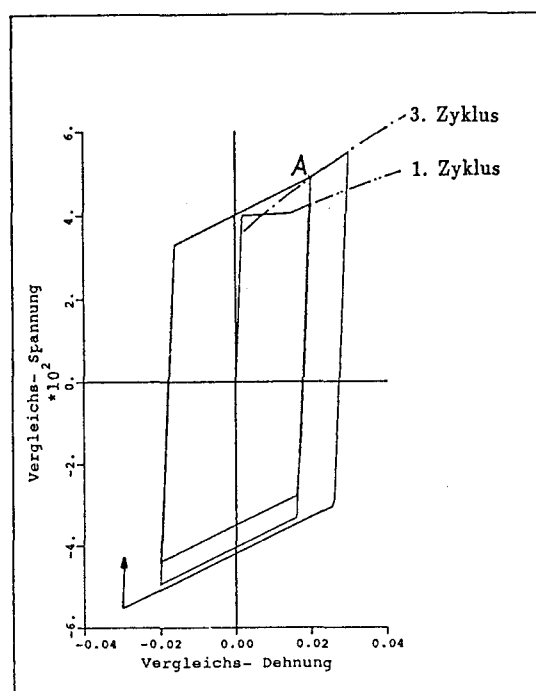


Abbildung 52: Spannungs-Dehnungskurve ST 52-3 unter Mehrstufenlast

Wird der Versuch durch eine mehrstufige Belastung fortgesetzt, dann verläßt das Material die Gerade der kinematischen Verfestigung (bei A in Abb. 52) und folgt wieder der Spannungs-Dehnungslinie des entsprechenden Zyklus. Von nun an hat die vorangegangene kleinere Hystereseschleife keinerlei Wirkung mehr. Bei einer Mehrstufenlast bestimmt also nur die größte Belastung den Bereich, in dem mit kinematischer Verfestigung gerechnet wird. Eine Hystereseschleife mit kleinerer Last wird also komplett kinematisch gerechnet.

8.1 Die Spannungen an der Rißspitze

Die Abb. 53 vermittelt einen Eindruck von den Verformungen des Modells unter Zuglast. Dargestellt ist der mit Volumenelementen nachgebildete Nahbereich der Zugprobe. Man blickt von oben auf die Probenoberfläche; rechts ist der Verlauf des Risses angezeichnet. Die Richtung der Längskraft F ist durch Kraftpfeile veranschaulicht. In dem Modell gibt es drei Symmetrieebenen, die in dieser Zeichnung unten, vorn und in einem Abstand rechts zu finden sind.

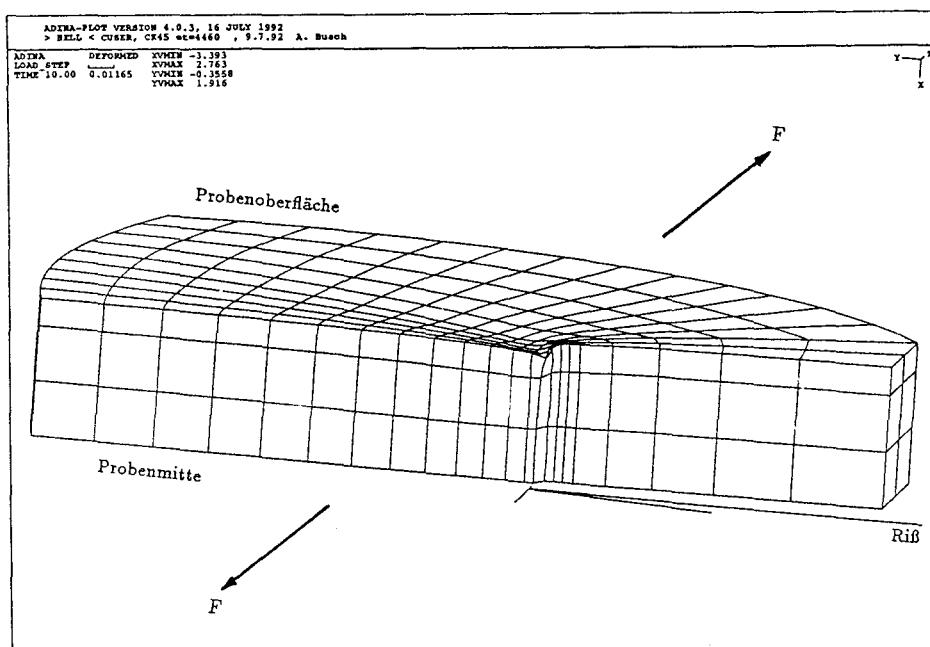


Abbildung 53: Das verformte FEM-Modell

Es ist deutlich zu sehen, wie das Material vor der Rißspitze an der Oberfläche einsinkt. Direkt daneben hat es entlang der Rißufer noch die Ausgangshöhe, da hier keine Längszugspannung sondern Druckspannung in der Querrichtung wirkt.

Von der längslaufenden Symmetrieebene bis ca. zur doppelten Rißlänge reicht die Breite in der Abb. 54. Sie zeigt damit auch den Übergang von den Volumenelementen im Nahbereich zu den einfachen Scheibenelementen im Fernbereich unter der Nennspannung von $\sigma_0 = 200 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$. Die Iso-Längsspannungslinien des Bandplottes haben einen Abstand von $50 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$. Innerhalb des Nahbereiches sind Spannungen in einer Ebene dargestellt, die um $0.4d$ außerhalb der Probenmitte liegt. Der Netzübergang wird durch die beiden Pfeile und durch die beiden Eckknoten des Nahbereichs gekennzeichnet. Zwischen diesen Punkten folgt er dem Elementgitter. Die Abbildung verdeutlicht, daß der Wechsel zwischen den beiden Elementtypen sehr harmonisch verläuft. Auf der Übergangslinie variiert die Längsspannung um maximal $\sigma_z = \pm 5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ über der Dicke.

In der folgenden Abb. 55 wird die Vergleichsspannung im Nahbereich als Bandplott gezeigt. Der Ausschnitt hat die gleiche Größe wie in den Abb. 18ff. Die Isospannungsbänder

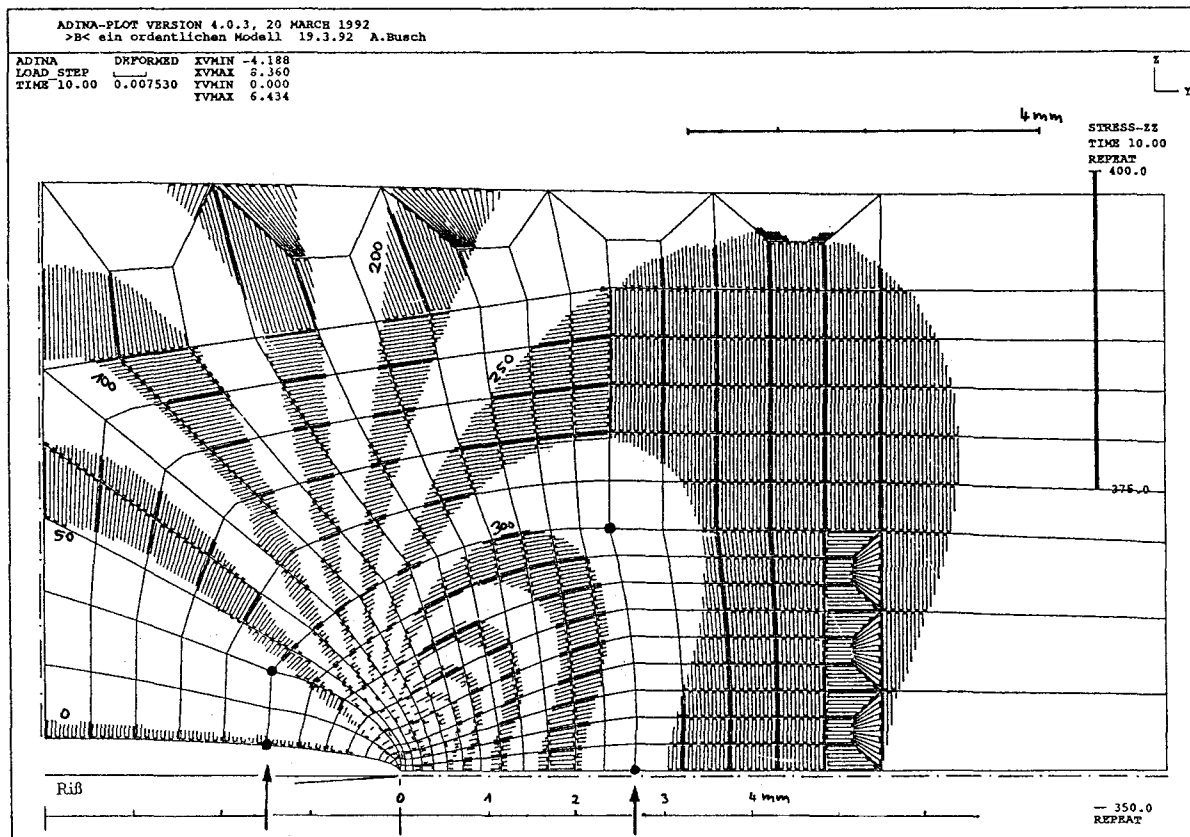


Abbildung 54: Längsspannungen im weiteren Umfeld des Risses

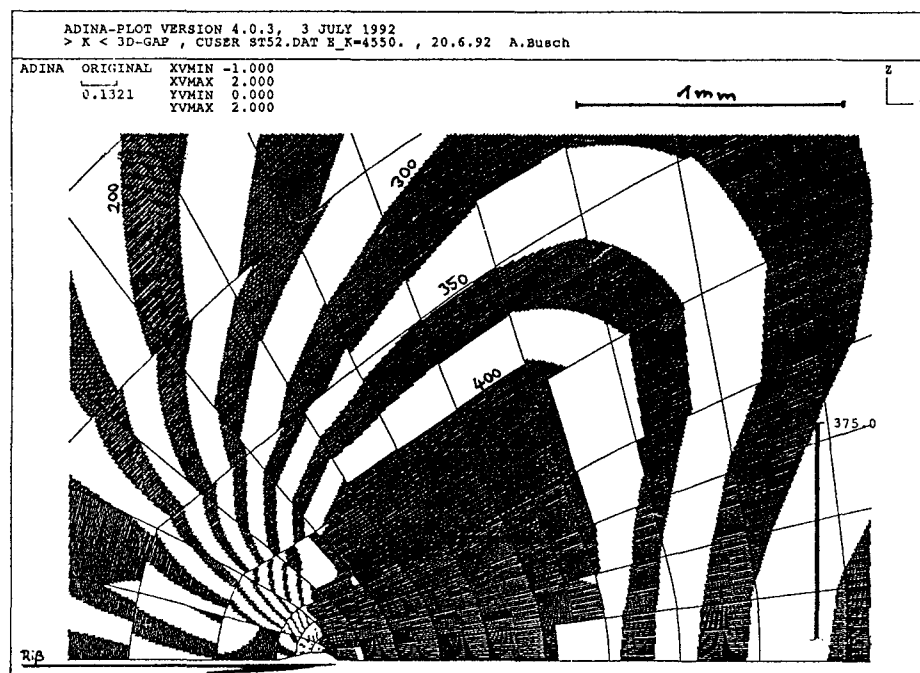


Abbildung 55: Vergleichsspannung unter Zuglast (Probenmitte)

kennzeichnen auch hier die Bereiche, in denen die Vergleichsspannung um $25 \frac{N}{mm^2}$ differiert.

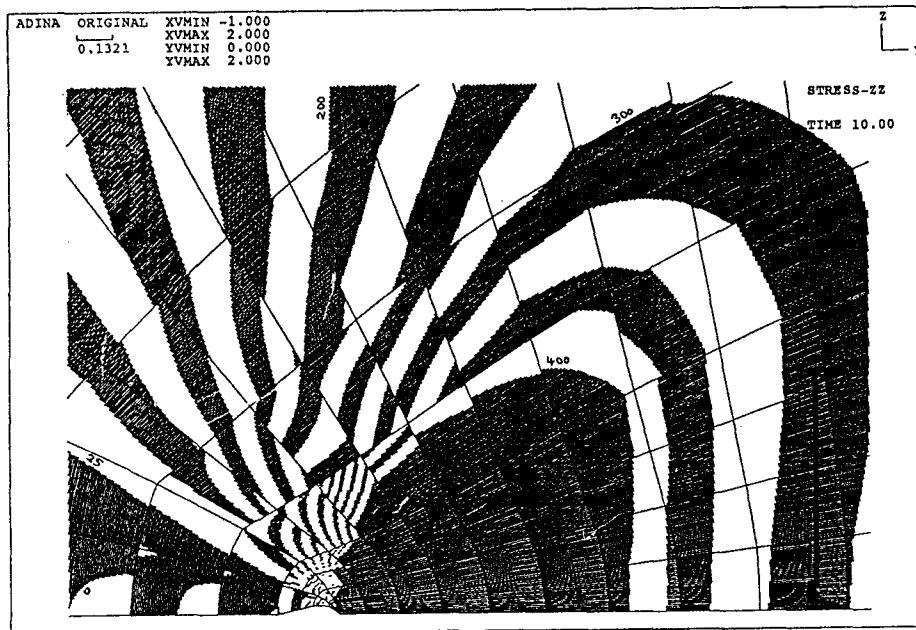


Abbildung 56: Längsspannung unter Zuglast (Probenmitte)

Oberhalb der Fließspannung von $R_e = 400 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ ist das Gebiet schwarz markiert.

Die Kontur der plastischen Zone ist aus den gleichen, harmlosen Gründen wie bei den zweidimensionalen Rechnungen etwas eckig. Dieser Effekt verschwindet schon wenn man in gleicher Weise die Längsspannungen σ_z selbst ausplottet. Die Abb. 56 zeigt diese Spannungen als Bandplott und wie bei Höhenlinien üblich, sind auch hier die enger beieinanderliegenden Bänder ein Zeichen für einen hohen Gradienten.

Die Darstellung in jeweils einer Ebene erweist sich bei den Volumenelementen als unzureichend, da gerade die Veränderung über der Dicke interessant ist. Daher wird die Vergleichsspannung in der Abb. 57 noch einmal perspektivisch gezeigt. Im oberen Teil der Abbildung schaut man auf die Probenmitte und das Ligament, während unten die abgesenkte Oberfläche der Probe zu sehen ist. Die Teilung der Bandplotts entspricht der Abb. 55. Offensichtlich ist die Ausdehnung der plastischen Zone im Ligament an der Probenoberfläche geringer als im Probeninneren.

Diese Feststellung steht zunächst im Widerspruch zu dem Modell, das aus der linear-elastischen, zweidimensionalen Rechnung entstanden ist. Demnach hätte die plastische Zone die Form eines Hundeknochens haben sollen. Die Modellvorstellung weist jedoch einen wesentlichen Fehler auf: Die plastische Zone wird für den EDZ und den ESZ getrennt berechnet und dabei werden beide Modelle mit der gleichen Kraft belastet. Im EDZ verformt sich die Probe jedoch viel weniger als im ESZ. Die Verträglichkeit zwischen den inneren Lagen eines Volumenmodells und der Probenoberfläche erzwingt aber eine nahezu gleiche Dehnung und nicht eine gleiche Kraft. Dadurch wird die Oberflächenschicht stark entlastet und die Probenmitte muß diesen Anteil mit übernehmen.

Die naheliegende Konsequenz, beide Scheibenmodelle mit den gleichen Verformungen zu

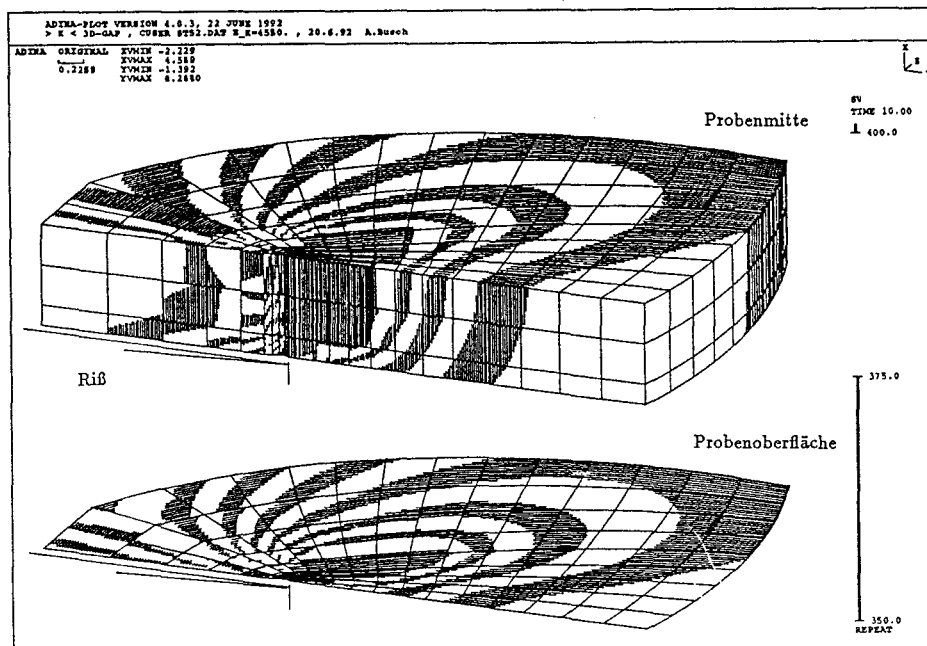


Abbildung 57: Vergleichsspannung unter Zuglast

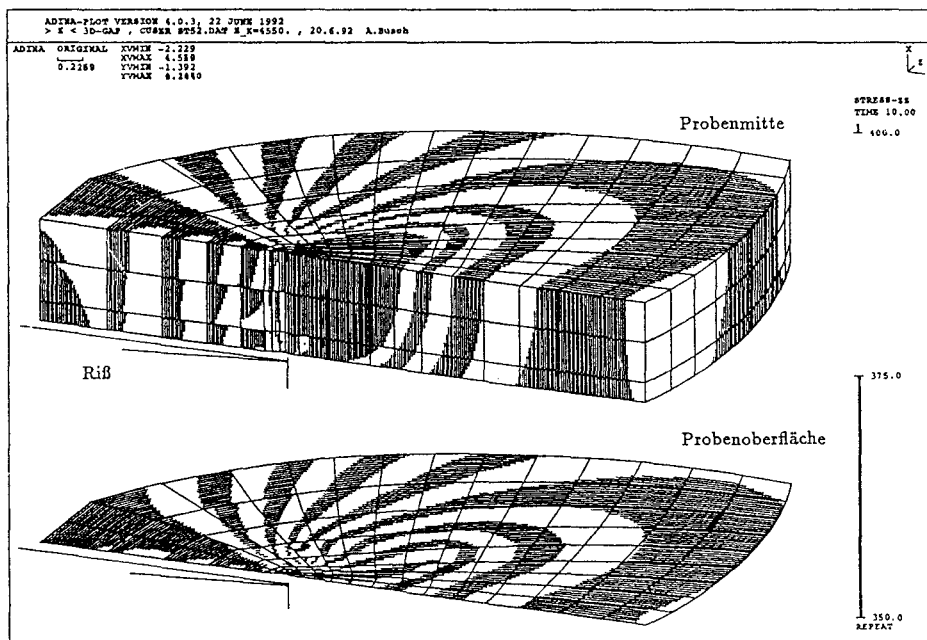


Abbildung 58: Längsspannung unter Zuglast

belasten, führt auch nicht zu einer Verbesserung, da dann ein Spannungssprung an der Berandung auftreten würde. Tatsächlich liegt eine Mischform zwischen ESZ und EDZ vor, die nicht ohne weiteres getrennt werden kann.

In mehreren Veröffentlichungen [Dah80, Kan85, Bro78] wird darauf hingewiesen, daß ein

zweidimensionales Rechenmodell für die Vorgänge an der Rißspitz nicht ausreicht. Ebenso zeigen Schliffbilder, daß die plastische Zone im Ligament und an der Oberfläche eine sehr kleine Ausdehnung hat [Kan85]. Dieses entspricht genau dem Versagensmodell in der Abb. 9: Zunächst ist die plastische Zone klein im Vergleich zur Probendicke und breitet sich damit halbkreisförmig um die Rißspitze aus. Mit zunehmender Ausdehnung geht die plastische Zone dann zu dem ESZ-Typ über, der Abgleitebenen unter 45° zur Probenoberfläche besitzt.

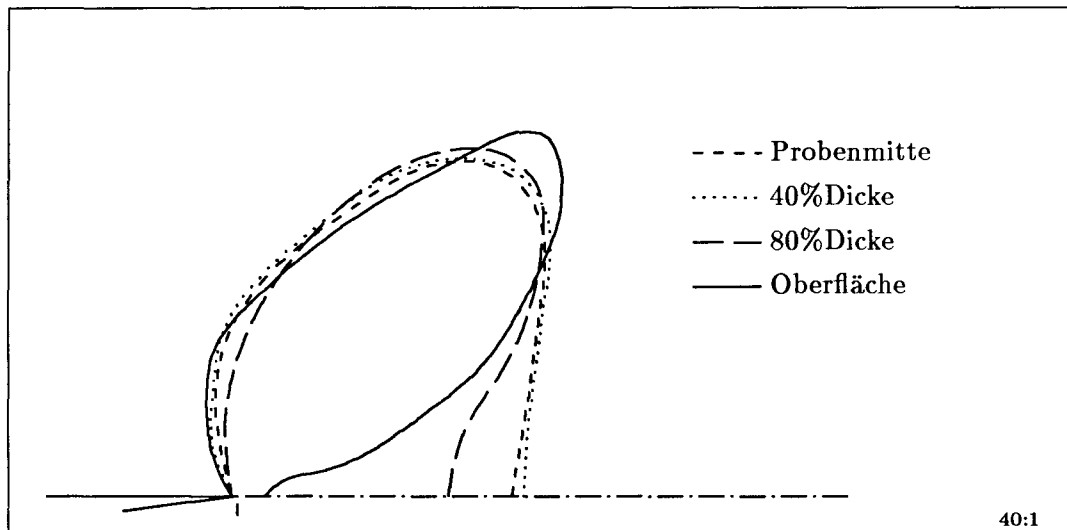


Abbildung 59: Die plastische Zone in verschiedenen Ebenen

Die Verteilung der plastischen Zone in vier Ebenen nach der FEM-Rechnung wird in der Abb. 59 gezeigt. Die Ebenen liegen bei $x = 0; 0.4d; 0.8d; d$. Auf der Vorderseite gleichen sich die Konturen, während sie im Ligament an der Oberfläche, die kleinste Erstreckung hat. Die maximale Ausdehnung der plastischen Zone beträgt $r_f = 1.7 \text{ mm}$ und ist damit größer als in der 2D-Rechnungen.

Entsprechend der Vergleichsspannung wird in der Abb. 62 die wirkende Längsspannung (Isolinie $\sigma_z = 400 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$) in den vier Ebenen dargestellt. Die Abbildung zeigt, daß die Längsspannung an der Probenoberfläche in einem zurückgeneigten, schmalen Band wirkt. Diese Kontur erinnert an die Gleitbänder in der Abb. 34: halbkreisförmig in der Probenmitte und unter 45° an der Oberfläche. Ein Nachweis, daß auch bei dem Volumenmodell diese Gleitbänder zu finden sind, konnte nicht erbracht werden. Die Elementauflösung ist hier wohl noch nicht ausreichend.

Die Spannungsverteilung der Vergleichs-, Längs- und Querspannungen zeigt die Abb. 60 für die Probenmitte und die Abb. 61 für die freie Oberfläche der Probe. Aufgetragen sind die Spannungen über dem Ligament in den nächstgelegenen Integrationspunkten ($x = 0.08d$ und $x = 0.96d$). Ab einem Abstand, der ungefähr die doppelte Länge der plastischen Zone besitzt, sind die Spannungen an der Oberfläche und im Inneren gleich groß und die Spannung in der Dickenrichtung σ_x verschwindet. Daran kann abgeschätzt werden, wie klein der Bereich mit dem EDZ ist. Die plastische Zone selber ist in der Probenmitte wesentlich ausgeprägter als an der Oberfläche. Auch ist im Inneren die hydrostatische

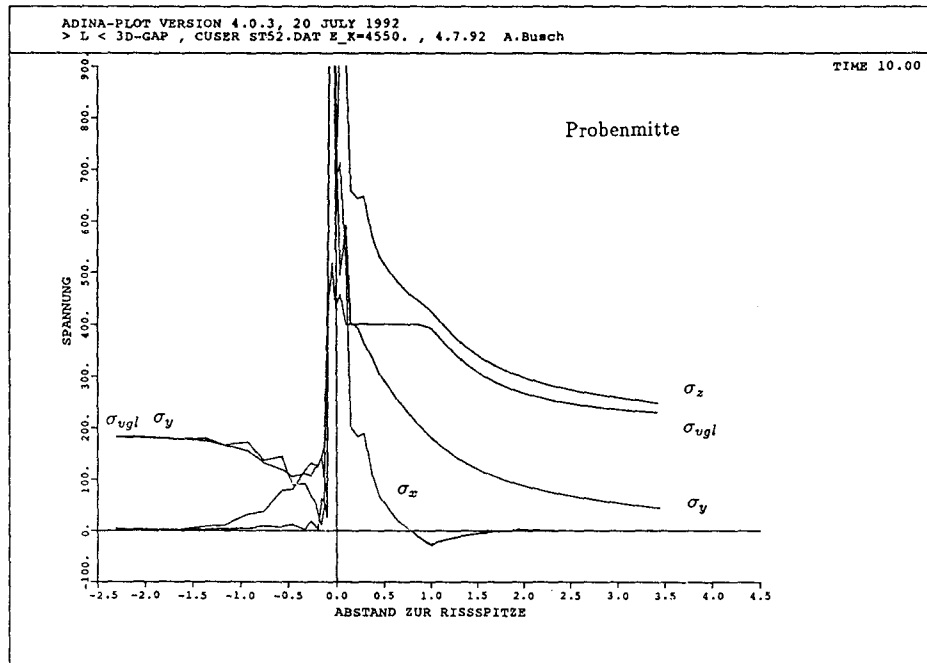


Abbildung 60: Spannungen über dem Ligament (Probenmitte)

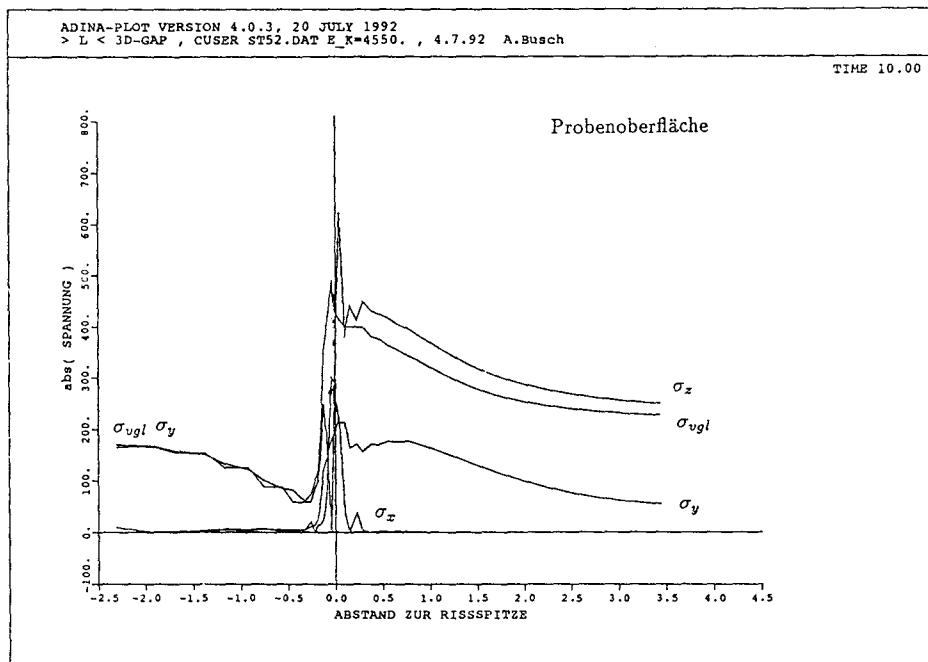


Abbildung 61: Spannungen über dem Ligament (Oberfläche)

Spannung viel größer. In einem Abstand von ca. $r = 0.4 \text{ mm}$ vor der Rißspitze zeigen alle Spannungen im Probeninnern eine Stufe (für die Längsspannung auf einem Niveau von $\sigma_z = 660 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$). Der Grund hierfür ist unklar. Folgende Begründungen können durch eine Gegenprobe ausgeschlossen werden: die grobe Teilung in Dickenrichtung, der Radius in der Rißspitze und das Materialgesetz.

Insgesamt zeigen die Spannungen einen plausibelen Verlauf.

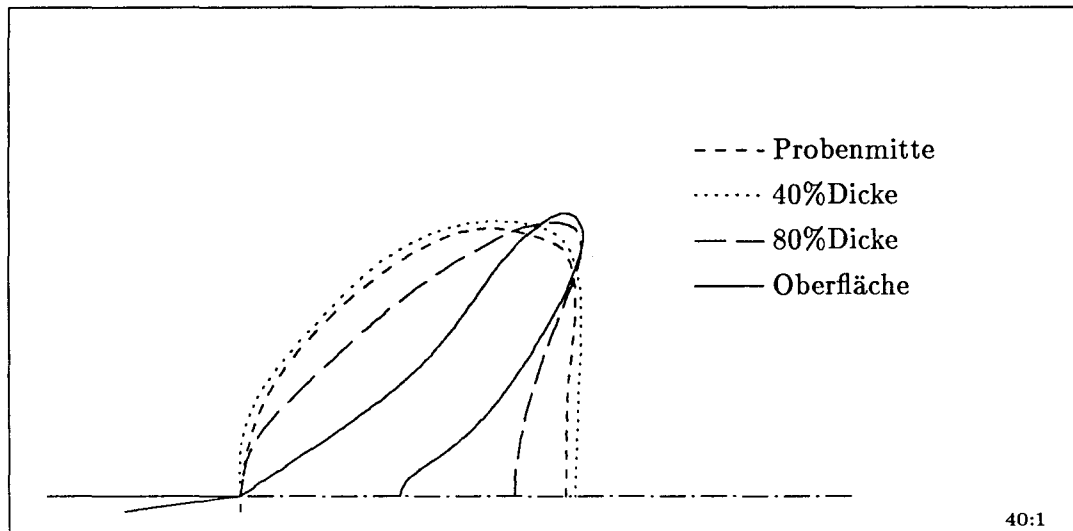
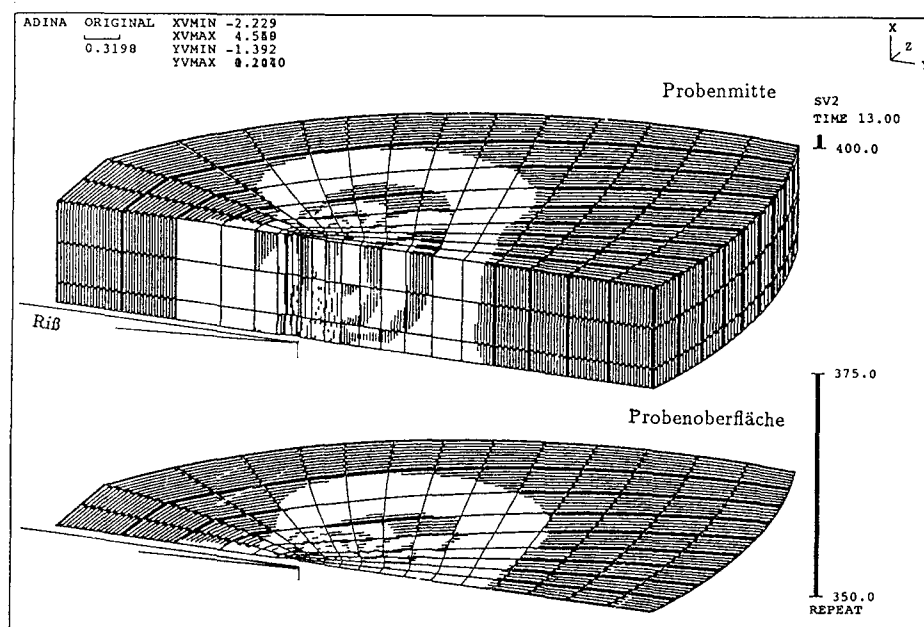
Abbildung 62: Die Längsspannungen σ_z in verschiedenen Ebenen

Abbildung 63: Vergleichsspannung (Eigenspannung)

8.2 Die lastinduzierten Eigenspannungen

Nachdem die Zuglast auf die Probe gewirkt hat, wird die Spannung zurückgenommen, bis schließlich nur noch Eigenspannungen in dem Modell verbleiben. Die Abb. 63 zeigt die aus diesen Eigenspannungen resultierende Vergleichsspannung in perspektivischer Ansicht.

Das Gebiet, in dem das Fließkriterium erfüllt ist, zeichnet sich hier nicht durch eine Vergleichsspannung über der statischen Fließgrenze aus und ist damit auch nicht unmittelbar zu erkennen. Erst in der Abb. 64 ist die plastische Zone zu sehen. Die Konturen wurden direkt durch Abfrage des Fließkriteriums ermittelt. Auffällig ist, daß wider Erwarten die plastische Zone in allen Schichten gleich groß ist.

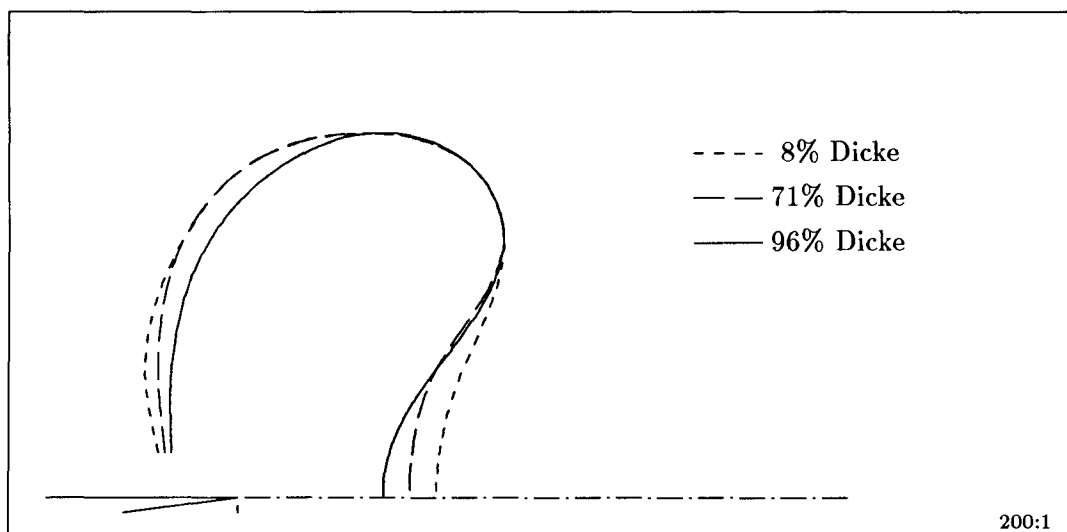


Abbildung 64: Die plastische Zone in verschiedenen Ebenen

Die absolute Erstreckung der plastischen Zone ist mit $r_f = 0.28 \text{ mm}$ deutlich größer als alle Ergebnisse der 2D-Rechnungen, bei denen $r_f < 0.22 \text{ mm}$ war (vgl. Abb. 33).

Die Zuverlässigkeit dieses Ergebnisses ist direkt von der Netzteilung abhängig. In dieser plastischen Zone befinden sich nur noch ca. 30 Volumenelemente. Es wäre wünschenswert mit einem feineren Netz die Konturen besser aufzulösen, aber die hohe Rechenzeit läßt derzeit kein feineres Netz zu. Um über die Zuglast bis zu diesem Stadium zu kommen, sind insgesamt ca. 80 CPU-Stunden notwendig und eine Netzverfeinerung auf die halbe Kantenlänge würde voraussichtlich die 30-fache Rechenzeit verbrauchen.

An dem 2D-Modell ließ sich ein Vergleich der Kontur der plastischen Zone mit einem entsprechend grobem und einem um den Faktor 3 feineren Netz durchführen. In diesem Fall wurde die Kontur aus der groben Teilung durch die feinere bestätigt. Es scheinen sich somit keine grundsätzlichen Fehler einzuschleichen.

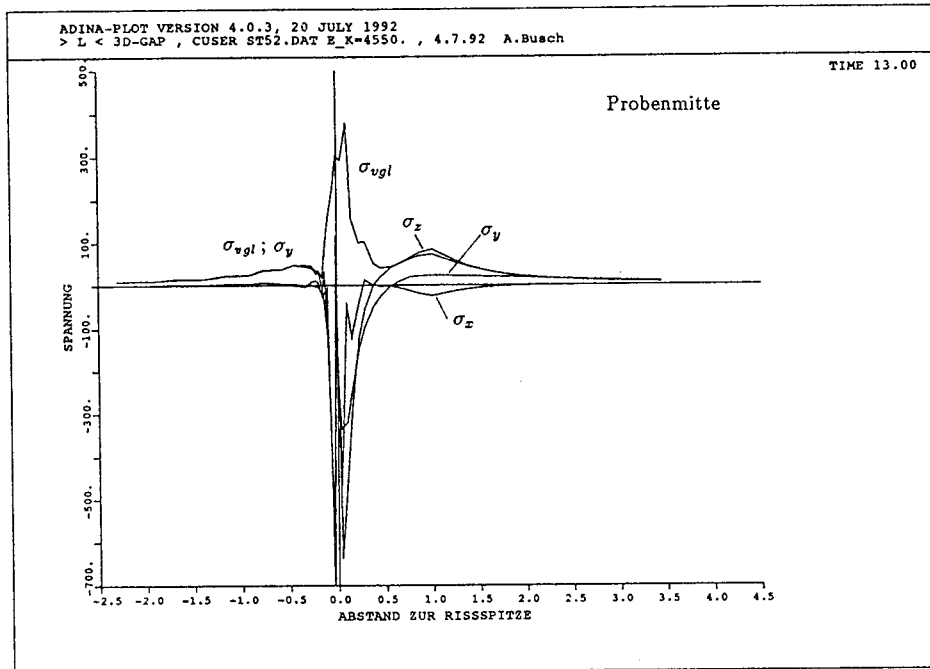


Abbildung 65: Eigenspannungen über dem Ligament (Probenmitte)

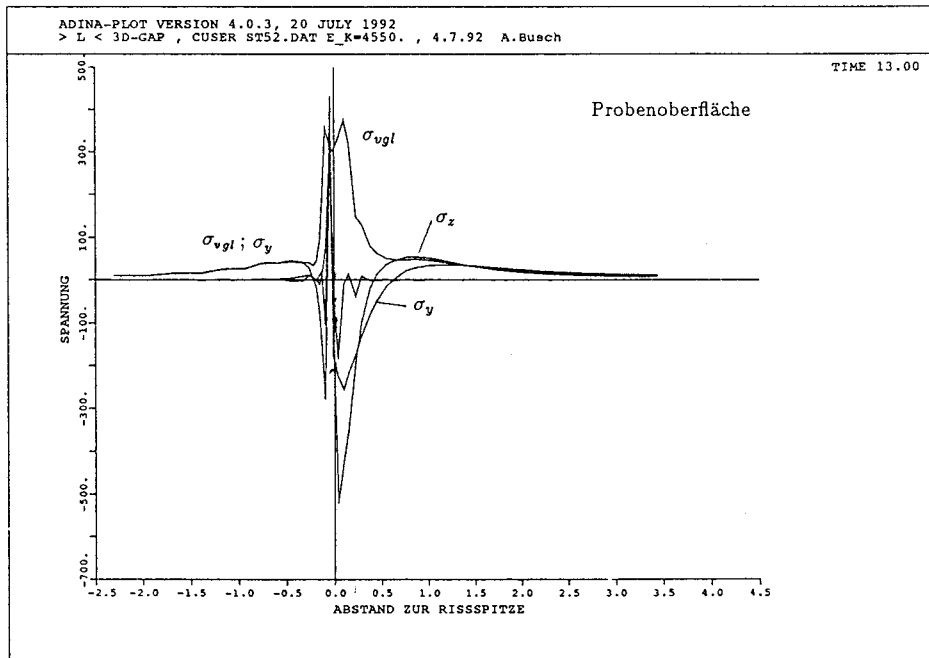


Abbildung 66: Eigenspannungen über dem Ligament (Oberfläche)

Der Spannungsverlauf ist in den Abb. 65 und 66 für die Probenmitte und -oberfläche über dem Rißspitzenabstand aufgetragen. Wie die Abschätzung aus der linear-elastischen Überschlagsrechnung in der Abb. 8 vermuten ließ, zeichnet sich der Rand der ehemaligen plastischen Zone aus der Zuglast als Zugspannungsmaximum ab. Für die Probenoberfläche (ESZ) ist die Position des Maximums in der Mittelebene (EDZ) maßgebend.

8.3 Die Spannungen unter Drucklast

Das Probenmodell wird anschließend weiter mit reiner Drucklast beaufschlagt. Der Rißuferkontakt stellt sich bei einer geringen äußeren Druckspannung von nur $\sigma_0 = 0.02R_e = 8 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ ein. Durch das Abstützen wird die Rißspitze sehr stark entlastet. Die plastische Zone nimmt bei der vollen Nennspannung von $\sigma_0 = -200 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ ein viel kleineres Gebiet ein, als zuvor bei der gleichen Zugspannung. Es ist also berechtigt anzunehmen, daß nur der Teil eines Lastspieles bis zum Rißuferkontakt das Material schädigt.

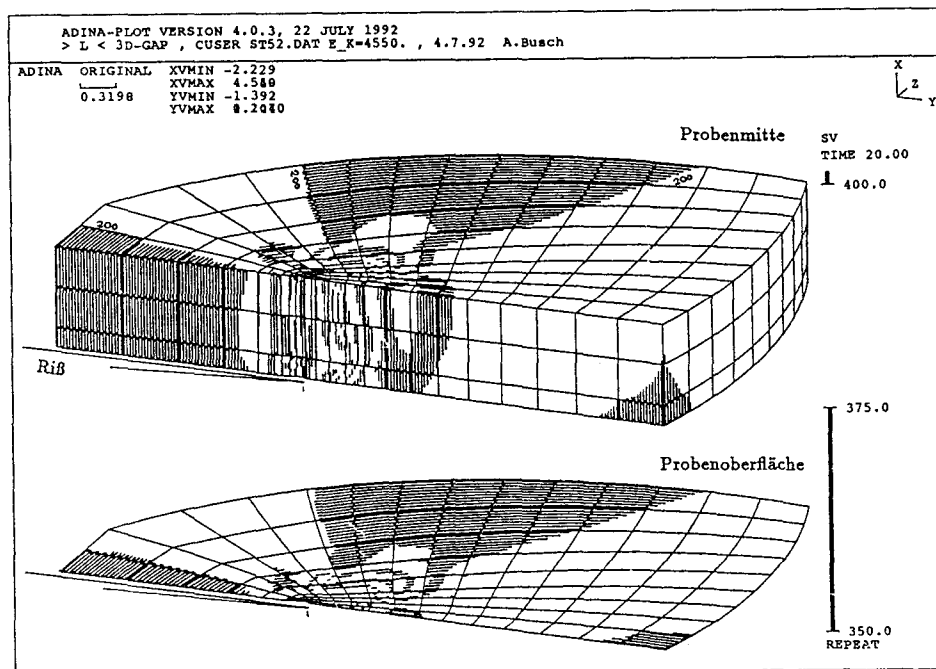


Abbildung 67: Vergleichsspannung unter Drucklast

Die Abb. 67 zeigt die Vergleichsspannungsverteilung, wenn die Probe gedrückt wird. In der Abb. 68 sind die Spannungen über dem Ligament zu sehen. Aus beiden Darstellungen ist zu erkennen, daß die Störung des Spannungsfeldes lokal auf die unmittelbare Rißspitzenumgebung beschränkt ist. Nur in einem sehr kleinen Bereich können sich die eingprägten Dehnungen auswirken.

In der Probenmitte und an der Oberfläche ist für alle Spannungskomponenten der Betrag und der Verlauf über dem Ligament praktisch identisch.

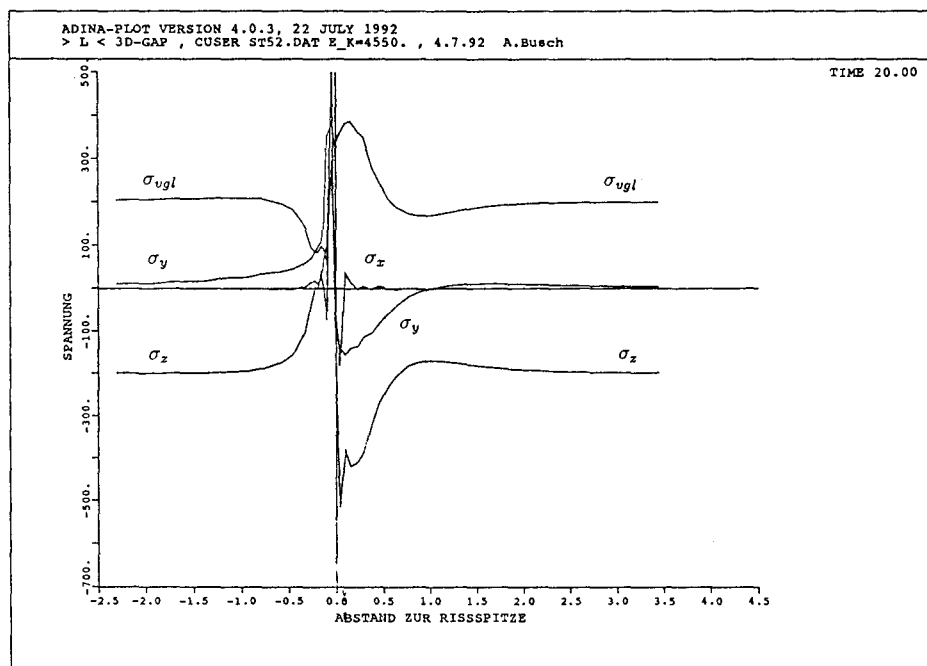


Abbildung 68: Spannungen über dem Ligament unter $\sigma_0 = -200 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ (Probenmitte)

8.4 Die Rißuferverschiebung

Mit steigender Zuglast öffnet sich der Riß, bis er unter $\sigma_0 = 200 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ die in der Abb. 69 gezeigte Kontur erreicht. Zum direkten Vergleich sind neben der Rißuferverschiebung für die 3D-Rechnung mit den Materialdaten für ST 52-3 auch die beiden 2D-Rechnungen im ebenen Spannungszustand und im ebenen Dehnungszustand eingetragen.

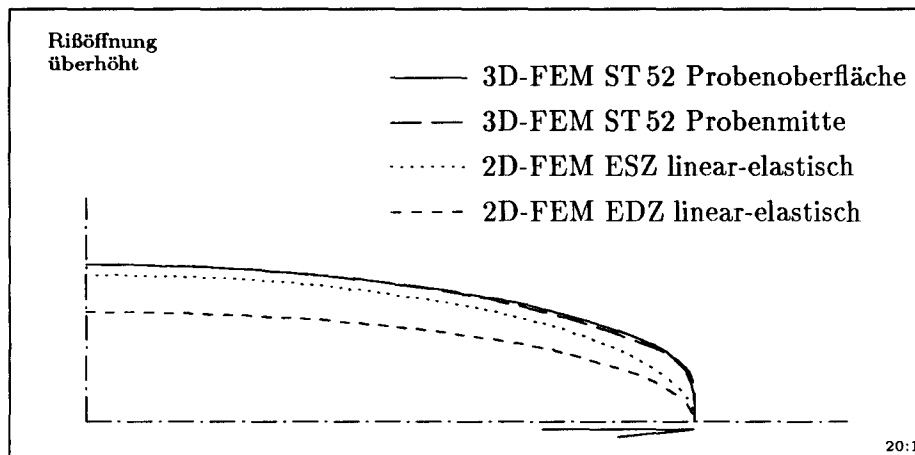


Abbildung 69: Rißuferverschiebung unter Zuglast

Ähnlich wie in den zweidimensionalen Rechnungen in der Abb. 35 ist auch hier die Kontur eher oval als elliptisch. Die 2D-Rechnung im ESZ ergibt nahezu die gleiche Rikontur wie die 3D-Rechnung. In der Nähe der Rißspitze treten auch geringe Unterschiede zwischen Probenmitte und Oberfläche auf, wobei die Rißuferverschiebung unmittelbar vor der Rißspitze im Probeninneren größer ist als auf der Oberfläche.

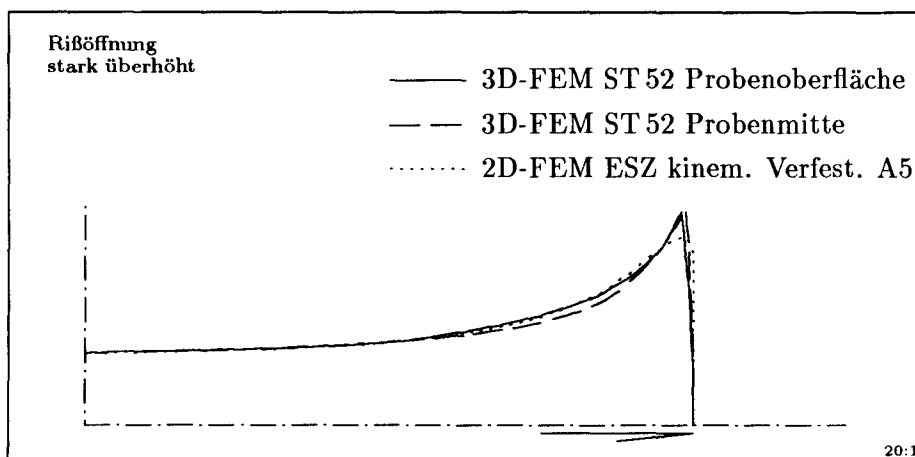


Abbildung 70: Rißuferverschiebung durch Eigenspannungen

Entfernt man anschließend die äußere Belastung schrittweise, nähern sich die Rißufer wie-

der an, aber auch wenn keine äußere Kraft mehr wirkt, berühren sich die Ufer noch nicht Abb. 70. Die durch die eingepprägten Dehnungen verursachten Eigenspannungen halten den Riß offen. Der Abstand der Rißufer in Symmetrieebene beträgt nur 0.00038 mm. Bei einer realen Rißoberfläche, die nicht mathematisch glatt ist, werden sich die ersten erhabenen Körner berühren. Die 2D-Rechnung mit kinematischer Verfestigung im ESZ hat hier die gleiche Kontur geliefert.

Legt man nun eine geringe äußere Druckspannung von $\sigma_0 = 0.02R_e$ an, kommt es zum Kontakt, der zuerst in der Symmetrieebene stattfindet. Das Rißschließen tritt also nach einer einmaligen Belastung nicht von der Rißspitze zur Probenmitte hin auf, wie es bei fortschreitenden Dauerrissen der Fall ist [Wel85], sondern in der Gegenrichtung von der Probenmitte zur Rißspitze hin.

Mit steigender Druckspannung schließt sich der Riß immer weiter, bis er bei einer Drucklast von $\sigma_0 = -200 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ nur noch die letzten 5% des Risses an der Rißspitze offenläßt. Der Rißuferkontakt läßt sich zuverlässig mit den *Gap*-Elementen simulieren. Nur das allererste Abstützen der beiden Rißflächen muß in feiner Schrittweite ausgeführt werden, da sich hier die Gesamtsteifigkeit sprunghaft ändert. Die Rißspitze wird durch den Rißuferkontakt sehr stark entlastet, so daß die Abmessungen der plastischen Zone unter voller Drucklast deutlich geringer sind als unter der gleichen Zuglast.

Es läßt sich feststellen, daß die Rißuferverschiebung des Probenmodells unter Druckspannung in einer Scheibenrechnung fast die gleichen Werte liefert, wenn der ebene Spannungszustand und eine kinematische Verfestigung verwendet werden.

8.5 Vergleich mit röntgenographischen Messungen

Der Vergleich von der FEM-Rechnung mit der röntgenographischen Messung, die Hellwig an einer entsprechenden Probe ausgeführt hat, soll zeigen, daß die beiden Methoden nicht im Widerspruch zueinander stehen.[Hel72]

Die Messungen wurden an einem vergüteten Stahl CK45 mit einer Streckgrenze von $R_e = 815 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ durchgeführt. Die Geometrie von Probe und Riß entspricht der Abb. 1. Der Riß wurde durch eine Zugschwellspannung erzeugt. Dabei wurde die Rißbildung durch einen Sägeschnitt der Länge $2a_0 = 4 \text{ mm}$ initiiert. Anschließend wurden die Ermüdungseigenstressungen durch Anlassen auf 550°C beseitigt. Die thermischen Eigenspannungen waren mit $\sigma_{th} \leq 5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ vernachlässigbar gering.

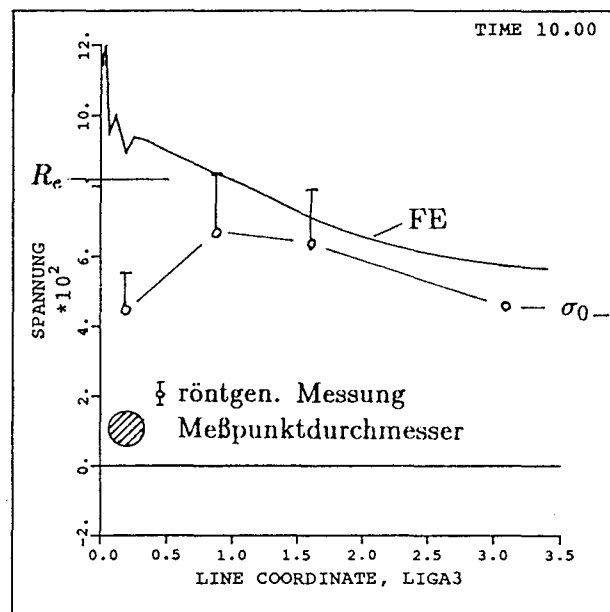


Abbildung 71: Röntgenographische Messung und FEM-Rechnung (CK45),
Längsspannung über dem Rißspitzenabstand (Probenoberfläche)

Die Spannungsmessungen erfolgten nach dem $\sin^2 \psi$ -Verfahren [Mach61] mit Filmregistrierung. Punktweise wurden die Last- und Eigenspannungen in der Probenlängsrichtung in einem oberflächennahen Bereich mit dem Durchmesser 0.3 mm gemessen. Die Meßwerte für eine äußere Längsspannung von $\sigma_0 = 441 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ entsprechend $K_I = 1560 \text{ Nmm}^{-3/2}$ sind in der Abb. 71 eingetragen. Nach eigenen Angaben hat Hellwig um 25% zu kleine Spannungen im Bereich der plastischen Zone gemessen. Diese Abweichung wurde in der Abb. 71 als Fehlerband eingetragen. Sie wird darauf zurückgeführt, daß die röntgenographische Messung nur Oberflächenkristallite erreicht, die durch das Fehlen von Nachbarkörnern eine Sonderstellung einnehmen [Yu77]. Ferner erfaßt der Meßpunkt mit seinem Durchmesser von 0.3 mm mehrere Körner und auch Korngrenzen. So wird mit keiner seiner Messungen die volle Fließspannung von $R_e = 815 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ erreicht.

In der Abb. 71 ist neben den Messungen auch das Ergebnis aus der FEM-Rechnung als

ausgezogene Kurve eingezeichnet. Die Rechnung erfolgte mit Volumenelementen und dem beschriebenen Materialgesetz. Die Spannungs-Dehnungskurve wurde mit sechs Polygonen aufgemessen und der Belastungsvorgang in 32 Schritten simuliert. Die in der Abbildung gezeigten oberflächennahen Längsspannungen stimmen in Anbetracht der Fehlerbänder gut mit Hellwigs Messungen überein.

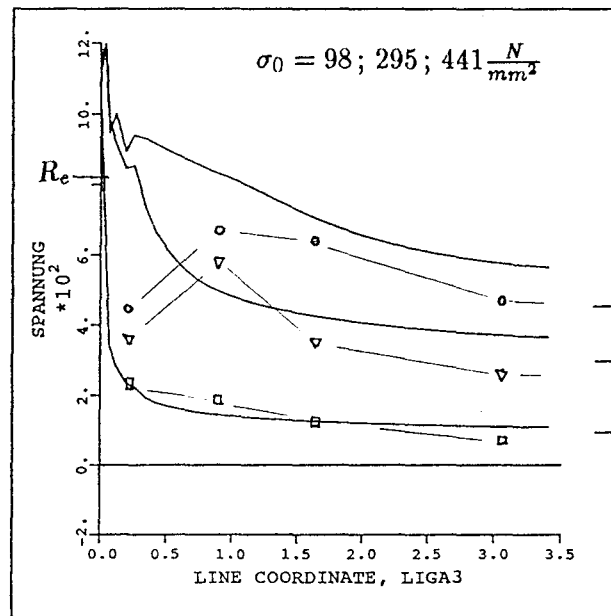


Abbildung 72: Längsspannungen im Vergleich (CK45)

Der Spannungsverlauf ist nicht nur für eine Längsspannung $\sigma_0 = 441 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ von Hellwig gemessen worden, sondern auch für die Zustände $\sigma_0 = 295 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ und $\sigma_0 = 98 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$. Die Abb. 72 zeigt diese Meßergebnisse zusammen mit den entsprechenden Längsspannungen aus der FEM-Rechnung. Die Übereinstimmung ist auch für diese Belastungszustände gut.

Nach den Lastspannungen sind von Hellwig auch die lastinduzierten Eigenspannungen infolge der oben beschriebenen Last von $\sigma_0 = 441 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ gemessen worden. Die Abb. 73 vergleicht diese Messung mit den gerechneten Längsspannungen. Als kleine vertikale Markierung ist die Ausdehnung der plastischen Zone unter Zuglast, sowie die Fließspannung R_e angedeutet. Daß der Meßwert am rißspitzennahen Punkt unter der Rechnung liegt, läßt sich durch den hohen Spannungsgradienten und den großen Durchmesser der Messung erklären. Der Spannungsverlauf weicht nur beim zweiten Meßpunkt von der Rechnung ab.

Ein Vergleich mit dem erwarteten Spannungsverlauf nach Abb. 8 billigt beide Spannungsverläufe.

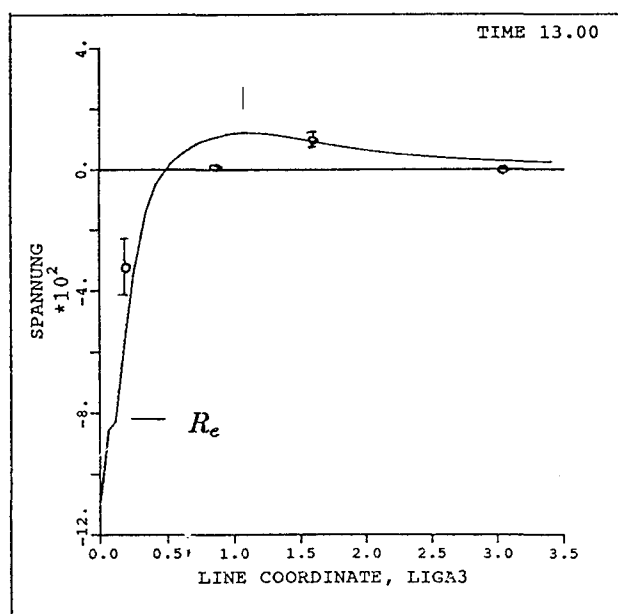


Abbildung 73: Gemessene und gerechnete Eigenspannungen

9 Zusammenfassung und Ausblick

- Der Spannungskonzentrationsfaktor kann mit Hilfe der Finiten-Elemente leicht berechnet werden. Die Spannungssingularität bereitet dabei keine besondere Schwierigkeit. Wenn kein vorgefertigter Automat zur Verfügung steht, so kann man den Spannungsintensitätsfaktor durch Rißverlängerung um ein ganzes Element bestimmen.
- Die Rißuferverschiebung wird unter Zuglast nach der linear-elastischen Rechnung als Ellipse angenommen. Diese Annahme trifft bei plastischen Zonen nur noch näherungsweise zu. Die Form eines Mittellisses gleicht eher einem Oval als einer Ellipse. Das Abschätzen der Rißöffnung durch eine Verlängerung des Risses bis zum Wiederherstellen des Gleichgewichtes, scheint kein geeignetes Mittel zu sein.
- Die Rißuferverschiebung ist nur geringfügig vom Verfestigungsgesetz abhängig.
- Nach einer einmaligen Zugbelastung schließt sich ein Mittellriß zuerst in der längslaufenden Symmetrieebene und von dort aus zu den Rißspitzen. Hierin unterscheidet sich der Riß unter statischer Last von einem Riß unter Einstufen-Schwingbeanspruchung, der sich von der Rißspitze her schließt.
- Wird das Probenmodell im Anschluß an eine Zuglast gedrückt, so kann das Rißschließen durch *Gap*-Elemente simuliert werden. Der Moment des ersten Rißuferkontaktes sollte dabei in kleiner Schrittweite berechnet werden. Die Rechenzeit verlängert sich insgesamt durch diese nichtlinearen Elemente kaum, da das System aufgrund des plastischen Materialgesetzes in jedem Fall iterativ gelöst wird.
- Die Spannungs- und Eigenspannungsverteilung in der plastischen Zone ist berechenbar. Das Ergebnis hängt ganz erheblich von dem gewählten Verfestigungsverhalten des Materialgesetzes ab. Notwendigerweise muß die Spannungs-Dehnungskurve sehr genau aufgemessen werden.
- Das Hundeknochenmodell beschreibt die plastische Zone nicht zutreffend. Der wesentliche Grund liegt in der geringeren Verschiebung im ebenen Dehnungszustand im Vergleich zum ebenen Spannungszustand. Als Folge bilden sich Schubspannungen aus, die die Probenoberfläche stark entlasten. Hingegen trifft die Modellvorstellung von kreisförmigen Gleitbändern im EDZ (bei kleinen plastischen Zonen oder dicken Proben) ebenso zu, wie das Abgleiten unter 45° zur Probenoberfläche und parallel zum Ligament im ESZ.
- Vom Moment des Rißuferkontaktes an bis zur maximalen Drucklast wird das Material in der Rißspitze kaum mehr geschädigt und die plastische Zone vergrößert sich nur wenig.
- Der Versuch, für ein Element (bzw. einen Integrationspunkt) in unmittelbarer Nähe der Rißspitze ein Spannungs-Dehnungsdiagramm zu erstellen, wurde fallen gelassen. Das Netz ist nicht fein genug, um dieses Diagramm als zuverlässige Grundlage für ein lokales Bruchkriterium verwenden zu können.
- Die notwendige Rechenzeit für die Simulation eines vollen Lastzyklus ist derzeit (1992) noch zu hoch, um die FE-Methode allgemein anzuwenden. Die Entwicklung

schnellerer Rechner wird aber in absehbarer Zeit diese Hürde nehmen. Auf einer VAX 6310, einem eher langsamen Rechner (3.8 Specmac's), sind für die Be- und Entlastung ca. 3 CPU-Tage notwendig. Andererseits darf man von schnelleren Rechnern auch keine Wunder erwarten: Ein Modell mit Elementen, deren Kantenlänge halb so groß ist, besitzt 2^3 mal so viele Freiheitsgrade. Wenn es gelingt die Bandbreite des Gleichungssystems nur quadratisch steigen zu lassen, dann ist insgesamt für diese Netzverfeinerung der 2^5 -fache Rechenaufwand notwendig.

- Trotz der wesentlich höheren Rechenzeit sind dreidimensionale Rechnungen den zweidimensionalen vorzuziehen. Nur mit einem Volumenmodell wird der Spannungszustand richtig erfaßt. Eine 3D-Rechnung mit grober Elementauflösung liefert bessere Ergebnisse als ein sehr feines 2D-Modell.
- Das hier gezeigte und verwendete Materialgesetz kommt dem tatsächlichen Materialverhalten sehr nahe. Eine Verbesserung ließe sich erreichen, indem der konstante Tangentenmodul im kinematischen Bereich durch eine Exponentialfunktion ersetzt wird.

Literatur

- [AdiI83] **ADINA R & D** : *ADINA.IN A Program for Generating of Input Data to ADINA* , Watertown, 1984
- [AdiS83] **ADINA R & D** : *ADINA System Theory and Modeling Guide*, Watertown, 1983
- [Adi84] **ADINA R & D** : *ADINA- A Finite Element Program for Automatic Dynamic Incremental Nonlinear Analysis*, Watertown, 1984
- [AdiP87] **ADINA R & D** : *ADINA_PLOT - A Program for Display of Input and Output Using ADINA* , Watertown, 1987
- [Back72] **G. Backhaus**: *Zum Stoffgesetz des elastisch-plastischen Körpers*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 52 (1972), S. T293–T305
- [Bal65] **A. Baltov, A. Sawczuk**: *A Rule of Anisotropic Hardening*, Acta Mechanica I/2, 1965, S. 81–92
- [Bat86] **K.-J. Bathe**: *Finite-Element-Methoden*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1986
- [Bau81] **J. Bauschinger**: *Über die Veränderung der Elastizitätsgrenze und des Elastizitätsmoduls verschiedener Metalle*, Civiling. N. F. 27 (1881), S. 289–348
- [Beg89] **M. Beghini, L. Bertini**: *Analytical and Numerical Evaluation of Residual Stress Effects on Fatigue Crack Growth*, in: *Computers and Experiments in Stress Analyses* Hrsg: G.M. Carlomagno C.A. Brebbia, Springer-Verlag, Berlin, 1989, S. 187–198
- [Ber83] **J. Bergmann**: *Zur Betriebsfestigkeitsbemessung gekerbter Bauteile auf der Grundlage der örtlichen Beanspruchung*, Institut für Stahlbau und Werkstoffmechanik, TH Darmstadt Heft 37 (1983)
- [Bet85] **J. Betten**: *Elastizitäts- und Plastizitätslehre*, Vieweg & Sohn Verlagsges. mbH, Braunschweig, 1985
- [Boh90] **B. Bohlmann**: *Zur Berechnung des Spannungintensitätsfaktors für Normalbeanspruchung mit Hilfe des FEP ADINA*, Inst. für Schiffbau der Universität Hamburg, Schrift Nr.2379, 1990
- [Bro88] **D. Broek**: *The Practical Use of Fracture Mechanics*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, Netherland, 1988
- [Bro78] **D. Broek**: *Elementary Engineering Fracture Mechanics*, Sijthoff & Noordhoff, Alphen a.R., 1978
- [Dah80] **W. Dahl**: *Conclusions from the Results of Joint Research on Toughness Behavior of steel*, Archiv Eisenhüttenwesen 51 (1980) 1, S. 37–39
- [Bur92] **K. Burth, W. Brocks**: *Plastizität: Grundlagen und Anwendungen für Ingenieure*, Vieweg & Sohn Verlagsges. mbH, Braunschweig, Wiesbaden, 1992

- [Dah74] **W. Dahl:** *Festigkeitssteigerung durch Verformung*, in: *Grundlagen des Festigkeits- und Bruchverhaltens* W. Dahl (Hrsg.), Verlag Stahleisen, Düsseldorf, 1974, S. 101–110
- [DVS89] **Deutscher Verband für Schweißtechnik** (Hrsg.): *Bruchmechanische Bewertung von Fehlern in Schweißverbindungen*, Deutscher Verband für Schweißtechnik Verlag, Merkblätter, Bd. 101, Düsseldorf, 1989
- [Elb70] **W. Elber:** *Einfluß der plastischen Zone auf die Rißausbreitung unter Schwingbelastung*, Materialprüfung 12(1970)6, S. 189–193
- [Fri86] **W. Fricke:** *Rißfortschrittsuntersuchungen an versteiften Plattenfeldern*, Inst. für Schiffbau der Universität Hamburg, Bericht: 469, 1986
- [Goe85] **H. Göldner:** *Lehrbuch höherer Festigkeitslehre Bd. II*, Physik-Verlag, Weinheim, 1985
- [Gud90] **J.P. Gudas, J.A. Joyce, E.M. Hackett** (Hrsg.): *Fracture Mechanics: Twenty-First Symposium*, ASTM – STP 1074, Philadelphia, 1990
- [Hel72] **G. Hellwig:** *Röntgenographische Ermittlung der Spannungsverteilung in der Nähe der Rißspitze angerissener Stahlproben*, Dissertation Universität Karlsruhe, 1972 und Schweißen und Schneiden 27(1972)3, S. 109
- [Irw57] **G.R. Irwin:** *Analysis of Stress and Strain near the End of a Crack Transversing a Plate*, ASME Journal of Applied Mechanics 24(1957), S. 361
- [Ism79] **H. Ismar, O. Mahrenholtz:** *Technische Plastomechanik*, Vieweg & Sohn, Braunschweig, Wiesbaden, 1979
- [Kan85] **M.F. Kanninen, C.H. Popelar:** *Advanced Fracture Mechanics*, Oxford University Press, New York, 1985
- [Kim90] **K.S. Kim, R.H. van Stone, J.H. Laflen, T.W. Orange:** *Simulation of Crack Growth and Crack Closure under Large Cyclic Plasticity*, in [Gud90], S. 421–447
- [Kle73] **St. Klee:** *Das zyklische Spannungs-Dehnungs- und Bruchverhalten verschiedener Stähle*, Dissertation Techn. Hochschule Darmstadt FB 14, Heft 22, 1973
- [Low81] **H. Lowak:** *Einfluß von Bauteilgröße, Lastfolge und Lasthorizont auf die Schwingfestigkeitssteigerung durch mechanisch erzeugte Druckeigenspannungen*, Fraunhofer-Institut, Bericht 157, 1981
- [Low84] **H. Lowak:** *Zur Steigerung der Schwingfestigkeit durch mechanisch erzeugte Druckeigenspannungen*, Fraunhofer-Institut LBF, 4.Kolloquium, 1984, S. 249–263
- [Mach87] **E. Macherauch, V. Hauk** (Hrsg.): *Residual Stresses in Science and Technology*, Vol. II DGM Informationsgesellschaft mbH, Oberursel, 1987
- [Mach61] **E. Macherauch, E. und P. Müller:** *Das $\sin^2 \psi$ -Verfahren der röntgenographischen Spannungsmessung*, Zeitschrift für angewandte Physik 13(1961)7, S. 305
- [Mas26] **G. Masing:** *Eigenspannungen und Verformung beim Messing*, Proc. of the 2nd. Intern. Congress of Applied Mechanics, 1926

- [Mee90] **R.M. McMeeking, C.L. Hom:** *Finite Element Analysis of void Growth in Elastic-Plastic Materials*, Int. Jour. of Fracture, 42(1990)1, S. 1–20
- [Mem90] **D. Memhard:** *Untersuchungen zum Einfluß der Belastungsbedingungen auf das Rischlieverhalten von Bruchmechanikproben*, Deutscher Verband für Materialforschung, 22. Bruchmechanik Nürnberg, 1990, S. 331–340
- [Mis28] **R.v. Mises:** *Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 8(1928) S. 161–185
- [Mro67] **Z. Mrz:** *On the Description of Anisotropic Workhardening*, Jour. of Mech. Phys. Solids, 15(1967), S. 163–173
- [Nee87] **A. Needleman, V. Tvergaard:** *An Analysis of Ductile Rupture Modes at a Crack*, Jour. Mech. Phys. Solids 35(1987), S. 151–183
- [Neu85] **H. Neuber:** *Kerbspannungslehre*, (3.Aufl.) Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokio, 1985
- [Nym87] **T. Nyman:** *Analyses of Residual Stresses and Cyclic Plasticity in Aircraft Structures*, in [Mach87], S. 705–712
- [Ott87] **W. Ott:** *Neues Verfahren zur Betriebsfestigkeitsanaylse komplexer Bauteile auf der Grundlage der FEM*, Deutsche Forschung- und Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt e.V. (DFVLR-FB 87-15), Köln, 1987
- [Pae85] **H. Paetzold:** *Beurteilung der Betriebsfestigkeit von Lngsspanntendurchfhrungen auf der Grundlage der örtlichen Dehnungen*, Inst. für Schiffbau, Universität Hamburg, Bericht:455, 1985
- [Pet84] **H. Petershagen et al.:** *Abschlußbericht SFB98-B3: Dynamische Festigkeitsanalyse*, Inst. für Schiffbau, Universität Hamburg, 1984
- [Pre89] **W. Press, B. Flannery, S. Teukolsky, W. Vetterling:** *Numerical Recipes – The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, 1989
- [Rad74] **D. Rada:** *Festigkeitsnachweise*, Deutscher Verlag für Schweißtechnik, Fachbuchreihe Schweißtechnik 64 Teil II, Düsseldorf, 1974
- [Reck67] **K.-A. Reckling:** *Plastizitätstheorie und ihre Anwendung auf Festigkeitsprobleme*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1967
- [Red81] **J. Redmer:** *Zwei- und dreidimensionale elasto-plastische Finite Element Berechnung von bruchmechanischen Problemen*, Dissertation, Techn. Hochschule Aachen, 1981
- [Ric68] **J. R. Rice:** *A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks*, Jour. of Applied Mech. 35(1968), S. 379–386
- [Rob69] **G. Robiller, C. Straßburger:** *Zum Bauschinger-Effekt unlegierter Sthle*, Materialprüfung, 11(1969)3, S. 89–95
- [Ros82] **H.-P. Rossmannith:** *Finite Elemente in der Bruchmechanik*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1982

- [Schim85] **H. Schimmöller:** *Einführung in die Bruchmechanik*, Vorlesungsmanuskript Nr.22, Inst. für Schiffbau der Universität Hamburg
- [Schmi82] **W. Schmitt, D. Siegele:** *Numerische Untersuchungen an Bruchmechanikproben*, in [Ros82], S. 205–242
- [Schw80] **K.-H. Schwalbe:** *Bruchmechanik metallischer Werkstoffe*, Carl Hanser Verlag, München, Wien, 1980
- [Shi84] **C. F. Shih, A. Needleman:** *Fully Plastic Crack Problems*, ASME Jour. of Applied Mechanics 51, S. 48–64
- [Sun88] **D.-Z. Sun, B. Voss, W. Schmitt:** *Numerische und experimentelle Untersuchungen zur Schädigungsvorhersage bei duktilem Bruch*, Deutscher Verband für Materialforschung, 20. Sitzung Bruchmechanik, Frankfurt (1988), S. 478–490
- [Sus85] **T. Sussmann, K.-J. Bathe:** *The Gradient of the Finite Element Variational Inductor with Respect to Nodal Point Co-Ordinates: An Explicit Calculation and Applications in Fracture Mechanics and Mesh Optimization*, Int. Jour. of Num. Methodes in Eng. 21 (1985), S. 763–774
- [Tve91] **V. Tvergaard, A. Needleman:** *Effect of Crack Meandering on Dynamic, Ductile Fracture*, Techn. University of Denmark, Report No. 419, 1991
- [Uhl85] **W. Uhlmann:** *Das kinematische Verfestigungsgesetz in der Formulierung von Prager, Ziegler, Eisenberg/Philipps und Mróz*, Technische Hochschule Darmstadt, Fachgebiet Werkstoffmechanik, FF – 15/1985
- [Wel87] **E. Welsch, D. Eifler, B. Scholtes, E. Macherauch:** *Inhomogeneous plastic Deformations and Residual Stress Distributions in the Crack Tip Region of Fatigued 42CrMo4 and their Consequences on Fatigue Propagation*, In [Mach87], S. 785–792
- [Wel85] **E. Welsch:** *Der Einfluß rißspitzennaher Eigenspannungen auf die Ausbreitung von Ermüdungsrissen*, TH Karlsruhe, Dissertation, 1985
- [Wes39] **H. W. Westergaard:** *Bearing Pressures and Cracks*, ASME Jour. of Applied Mechanics 6 (1939), S. 49–53
- [Wes87] **H. Westendorf:** *Rechnerische Simulation stabilen Rißwachstums in inhomogenen elastisch-plastischen Materialien*, Dissertation, Deutscher Verband für Schweißtechnik Verlag, Düsseldorf, 1988
- [Wes88] **H. Westendorf, E. Steck:** *Energiefluß bei Rißfortschritt in homogenem elastisch-plastischem Material*, Deutscher Verband für Materialforschung, 20. Sitzung Bruchmechanik, Frankfurt, 1988, S. 467–478
- [Wil57] **M. C. Williams:** *On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack*, ASME Jour. of Applied Mechanics 24 (1957), S. 109
- [Yu77] **H.-J. Yu:** *Berechnung von Abkühlungs-, Umwandlungs-, Schweiß-, sowie Verformungsspannungen mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente*, Dissertation, Techn. Hochschule Aachen, 1977

10 Anhang A: Variablenbelegung in CUSER3.FOR

Die einzelnen Parameter der Subroutine CUSER3.FOR (V 1.01) enthalten folgende Werte:

CTI(1)	= E	Elastizitätsmodul
CTI(2)	= ν	Querkontraktionszahl
CTI(3)	= E_k^t	kinematischer Tangentenmodul $\sigma_x = E_k^t \cdot \epsilon_x$
CTI(4)	= $^t\sigma_y$	Fließspannung (Startwert)
CTI(5)	= E^{T1}	eff. anisotroper Tangentenmodul für $\epsilon_{vgl}^p < \epsilon_1^p$
CTI(6)	= ϵ_1^p	plastische Vergleichsdehnung ϵ_1^p
CTI(7)	= E^{T2}	eff. anisotroper Tangentenmodul für $\epsilon_1^p < \epsilon_{vgl}^p < \epsilon_2^p$
CTI(8)	= ϵ_2^p	plastische Vergleichsdehnung ϵ_2^p
CTI(4) bis CTI(8) werden möglichst von der Materialdatei auf Kanal 113 überschrieben		
SCP(1)	= I1	Elementnummer für den Kontrollausdruck auf Kanal 111
SCP(2)	= I2	Integrationspunkt für den Kontrollausdruck
SCP(3)	=	Drucke Iterationen falls SCP(3) > 0
	=	Drucke Hauptspannungen (Zeitintensiv) falls SCP(4) > 2
SCP(4)	= I3	Anzahl der ausfallenden Kontrollausdrucke nach Key=4
ARRAY(1)	= bis	kinematischer Spannungsvektor (Ver-
ARRAY(6)	= $\bar{\alpha}_i$	schiebung der Fließfläche)
ARRAY(7)	= bis	plastischer Dehnungsvektor
ARRAY(12)	= $\bar{\epsilon}_i^p$	
ARRAY(13)	= bis	kinematischer, deviatorischer Spannungsvektor
ARRAY(18)	= s_i	$s_i = \sigma_i - \alpha_i - p_m$
ARRAY(19)	= $^t\sigma_y$	aktuelle Fließspannung
ARRAY(20)	= E_k^{eff}	effektiver kinematischer Tangentenmodul
ARRAY(21)	= $^{max}\epsilon_{vgl}^p$	maximale Vergleichsdehnung
ARRAY(22)	= $^t\epsilon_{vgl}^p$	aktuelle Vergleichsdehnung
ARRAY(23)	= $\frac{\partial ^t\sigma_y}{\partial ^t\epsilon_{vgl}^p}$	Ableitung der isotropen Fließspannung nach der plastischen Vergleichsdehnung
IARRAY(1)	=	Flag welcher interne Materialtyp aktiv ist
	=	-1=lin.elast. / 0=anisotrop / +1=kinem.
IARRAY(2)	=	Zyklusähler: IARRAY(2)= Zyklus minus 1

Zusätzlich werden einige Werte intern in der CUSER3 gespeichert:

DE(6,6) enthält die linear-elastischen Steifigkeitsmatrix D_{ijkl}^e .

ET = c speichert den effektiven Tangentenmodul für den Anteil der kinematische Verfestigung lt. Gl. 86.

11 Anhang B: Material-Datei

Vom Unterprogramm CUSER3 aus wird eine Datei gelesen, die die Daten für das zyklische Materialgesetz enthält. Die Datei wird auf dem Kanal 113 erwartet.

Diese Datei enthält maximal 20 Datensätze von dem folgenden Typ:

- Eine Zeile beginnt in der 1.Spalte mit der Zeichenfolge: "ZYKLUS=" gefolgt von einer Real-Zahl die den Lastwechsel angibt, auf den sich die folgenden Werte beziehen.
- maximal 256 Zahlenpaare mit der technischen, plastischen Vergleichsdehnung und der dazugehörigen technischen Fließspannung. Beide werden in einem Rekord mit dem *-Format als Real-Zahl eingelesen.
- Beliebig viel Kommentarzeilen beginnend mit "C".
- Leerzeilen sind zu vermeiden.
- Der Datensatz endet mit dem Dateiende oder einer neuen "ZYKLUS=" -Zeile.
- Die Rekordlänge darf 80 Zeichen nicht überschreiten.

Die einzelnen Datensätze sind in aufsteigender Zyklusfolge einzugeben. Die Grenze mit 256 Zahlenpaaren bezieht sich auf alle Zyklen zusammen!

Die Werte für die technische plastische Vergleichsdehnung und die technische Fließspannung können direkt dem Zugversuch entnommen werden, wenn die Spannung über der plastischen Dehnung aufgetragen wurde. Andernfalls muß man mit $\epsilon^p = \epsilon - \sigma/E$ umrechnen²⁰ oder die markierte Zeile im Unterprogramm INIAIM freikommentieren.

In der Rechnung wird stets der Materialdatensatz verwendet, dessen Zyklusangabe kleiner-gleich dem aktuellen Zyklus ist. Der aktuelle Zyklus ist beim Programmstart eins. Bei jeder 'Entlastung' aus dem plastischen Gebiet wird der Zyklus-zähler des Integrationspunktes um eins erhöht. Es ist also möglich, daß in einem Modell Elemente mit verschiedenen Zyklen nebeneinander liegen.

Die Daten werden in dem internen Feld SE abgelegt. Die Dimension beträgt SE(4,128). Je vier Werte entsprechen einem Zahlenpaar i der Eingabedatei.

- SE(1,i) = technische, plastische Vergleichsdehnung aus der Materialdatei
- SE(2,i) = technische Fließspannung (Radius des Fließzylinders) zu SE(1,i)
- SE(3,i) = effektiven, isotropen Tangentenmodul lt. Gl. 85
- SE(4,i) = effektiven, kinematischen Tangentenmodul lt. Gl. 86

²⁰Ggf. graphisch indem die Dehnung von der verlängerten Hookeschen Geraden gemessen wird.

Für die interne Verwaltung wird ein zweites Feld `Names ISE` verwendet. Auch mit diesem Feld kommt der normale Benutzer nie in Berührung. Das Integer-Feld hat die Dimension `ISE(0:61)`. Es enthält folgende Informationen für max. 20 Datensätze ($i=1,20$):

- `ISE(3i-2)` Die um eins verminderte Zykluszahl des i -ten Datensatzes
- `ISE(3i-1)` Die Nummer des ersten Dehnungs-Spannungs-Zahlenpaares in Feld `SE`, das zum i -ten Datensatz gehört.
- `ISE(3i)` Die Nummer des letzten Dehnungs-Spannungs-Zahlenpaares in Feld `SE`, das zum i -ten Datensatz gehört.

Die Werte `ISE(0)` und `ISE(61)` dienen nur einem vereinfachten Algorithmus; sie sind belanglos aber notwendig.

Eine Beispieldatei für einen anisotropen Tangentenmodul von $E_a = 2000 \frac{N}{mm^2}$: Falls die Variable `CTI(3)` in der Materialdefinition auf `CTI(3)=0` gesetzt wird, handelt es sich um ein isotropes Material mit einem Tangentenmodul von $2000 \frac{N}{mm^2}$ — ist andernfalls `CTI(3)=2000  $\frac{N}{mm^2}$` , so war es ein rein kinematisches Material. In beiden Fällen beträgt der effektive, anisotrope Tangentenmodul $E_a^{eff} = 10500 \frac{N}{mm^2}$

Beispieldatei:

```
ZYKLUS= 1.0
0.00  400.0
0.01  505.0
0.02  610.0
0.05  925.0
0.1   1450.0
C
C E_A(EPSILON) = 2000. N/mm**2
```

12 Anhang C: Alternative Steifigkeitsmatrix

Eine weitere Möglichkeit die plastische Steifigkeitsmatrix herzuleiten, wird in [Ott87] S.31f dargestellt. Statt der Gl. 45 wird der Umstand genutzt, daß nur der Anteil des Spannungszuwachses $d\sigma_{ij}$ senkrecht zur Fließfläche zum Fließen beiträgt:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = C \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\epsilon_{ij}^p \quad (C1)$$

Auf dem gleichen Weg – wie bei der isotropen Verfestigung – führt das zu den Bestimmungsgleichungen für λ und $d\sigma_{kl}$:

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} D^e}{C \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} D^e \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}} \cdot d\epsilon_{ij} \quad (C2)$$

und

$$d\sigma_{kl} = \left(D^e - \frac{D^e \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} D^e}{C \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} D^e \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}} \right) \cdot d\epsilon_{ij} \quad (C3)$$

mit

$$C = \frac{2}{3} \frac{\partial \sigma_y}{\partial \epsilon^p} \quad \text{z.B.:} \quad C = \frac{2}{3} \frac{E \cdot E^t}{E - E^t} = H' \quad (C4)$$

Praktisch ist die Gl. C3 ist mit der anisotropen Materialsteifigkeitsmatrix in Gl. 79 identisch. Der Term $C \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$ enthält nun aber untrennbar die kinematische und die isotrope Verfestigung.

13 Anhang D: FORTRAN-Source des Materialgesetzes

FILE : CUSER3.FOR

```

-----

1      1      SUBROUTINE CUSER3 (NG,NEL,IPT,STRESS,EPS,STRAIN,DEPS,DEPST,
          +                      THSTR1,THSTR2,KTR,INTER,SCP,ARRAY,IARRAY,D,
          +                      ALFA,CTD,ALFAA,CTDD,CTI,TMP1,TMP2,TIME,DT,
          +                      PHIST,PRST,PHIST1,DPSP,INTEG,ISUBM,INDNL,KEY)

2  465      SUBROUTINE ABHPTS(STRESS, S1,S2,S3)

3  510      SUBROUTINE ABDEP( ARRAY,IARRAY,D,DE, EP, S,
          +                      EPS,Q,DEQ,X, LWRITE)

4  626      SUBROUTINE ABF(STRESS ,ARRAY, F)

5  665      SUBROUTINE ABRADI(ARRAY,STRESS,LWRITE,ng,nel,ipt,time)

6  722      DOUBLE PRECISION FUNCTION TENSUM (A,B)
7  742      subroutine MATTEST

8  770      SUBROUTINE AISOM(EPV, SE, ISE,IA2, YLD, EK, DSDE )

9  810      SUBROUTINE INIAIM(CTI, SE,ISE)

10 915      SUBROUTINE SHWAIM(SE,ISE)

-----

1      1 :      SUBROUTINE CUSER3 (NG,NEL,IPT,STRESS,EPS,STRAIN,DEPS,DEPST,
2      2 :      +                      THSTR1,THSTR2,KTR,INTER,SCP,ARRAY,IARRAY,D,
3      3 :      +                      ALFA,CTD,ALFAA,CTDD,CTI,TMP1,TMP2,TIME,DT,
4      4 :      +                      PHIST,PRST,PHIST1,DPSP,INTEG,ISUBM,INDNL,KEY)
5      5 :C ++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
6      6 :C
7      7 :C      AXEL BUSCH      15.1. / 5.5. / 18.6.92
8      8 :C
9      9 :C      ELASTISCH-plastisches Materialgesetz (ADINA)
10     10 :C      *****
11     11 :C
12     12 :C ++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
13     13 :C
14     14 :C      DIESES UNTERPROGRAMM IST EIN MATERIALGESETZ FUER ADINA
15     15 :C      DIE PARAMETER-UEBERGABE IST IM ANHANG G DES ADINA-MANUELS BESCHRIEBEN
16     16 :C
17     17 :C      CTI(1) = E = ELASTIZITAETS-MODUL      = 210000. N/MM*2

```

```

18 :C CTI(2) = NU = QUERKONTRAKTIONSAZHL = 0.3
19 :C CTI(3) = E_T= KINEMATISCHER TANGENTENMODUL = 10000. N/MM**2
20 :C CTI(4) = YLD= FLEISSPANNUNG = 350 N/MM**2
21 :C CTI(5)...(8) = VOID
22 :C
23 :C SCP(1) = Element-nr. fuer die Kontrollausgabe
24 :C SCP(2) = Integrationspkt. fuer die Kontrollausgabe
25 :C SCP(3) = Iterationen drucken falls >0
26 :C SCP(3) = Hauptspannungen drucken falls | | GROESSER ALS 2
27 :C SCP(4) = Anzahl der entfallenden LWRITE-Ausdrucke nach KEY=4
28 :C -----
29 :C ARRAY( 1- 6) = ALFA(I) = kinematische Spannung
30 :C ARRAY( 7-12) = EP(I) = plastische Dehnung
31 :C ARRAY(13-18) = S(I) = deviator.- kinematische Spannung
32 :C -----
33 :C ARRAY(19) = YLD = aktuelle Fließ-Spannung
34 :C ARRAY(20) = EK = effektiver kinematischer Tangentenmodul
35 :C ARRAY(21) = EPMAX = max. plastische Dehnung
36 :C ARRAY(22) = EPV = plastische Vergleichsdehnung
37 :C ARRAY(23) = DSDE = Ableitung der isotropen Fließspannung nach
38 :C der plast. Dehnung
39 :C -----
40 :C ARRAY(24) = WEPV = PLAST. VGL.-DEHNUNG BEIM ENTLASTEN
41 :C ARRAY(25) = SEPV = SUMME ALLER PLAST. VGL.-DEHNUNGEN
42 :C ARRAY(40-60) = D(6,6) = MATERIALSTEIFIGKEITSMATRIX (gepackt)
43 :C -----
44 :C IARRAY(1) = IFLAG = -1 =lin.elast., 0 =kinem.v., 1 =isot.v.
45 :C IARRAY(2) = IZYKLUS = ZYKLUS-NR. MINUS EINS
46 :C
47 :C *****
48 :C
49 :C DE(6,6) = LIN. ELASTISCHE STEIFIGKEITSMATRIX
50 :C DS(6) = DELTA SIGMA = STRESS(T+DT) - STRESS(T)
51 :C DSS(6) = DELTA SIGMA - HYDROSTATISCHES DELTA SIGMA
52 :C EF(6) = PLASTISCHE DEHNUNG
53 :C P(6), Q(6), DEQ(6,6) = S.U. ODER STIERE BATHE (GL 6.133)
54 :C
55 :C +++++
56 :C LHPTSPN = LOGICAL = HAUPTSPANNUNGEN DRUCKE
57 :C LWRITE = LOGICAL = ZWISCHENWERTE DRUCKEN (ITERATIONEN) (AUF IUSER.)
58 :C LWRITE2 = LOGICAL = ENDWERTE DRUCKEN (AUF IUSER.)
59 :C
60 :C +++++
61 :C
62 :C IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
63 :C KANALNUMMER FUER DIE KONTROLLDATEI
64 :C PARAMETER (IUSER=111)
65 :C
66 :C DIMENSION STRESS(6), STRAIN(6), DEFS(6), ARRAY(23), IARRAY(2), D(6,6)
67 :C DIMENSION CTD(5), CTI(8), EPS(6), SCP(4)
68 :C DIMENSION CTDD(5), DEPT(6), THSTR1(6), THSTR2(6)
69 :C
70 :C DIMENSION DE(6,6), DS(6), Q(6), P(6), DEQ(6), DSS(6), EP(6)
71 :C INTEGER ISE(0:61), I1,I2,I5
72 :C DIMENSION SE(4,256)

```

```

73 : CHARACTER *20,INFO,INFO0,INFO1
74 : LOGICAL LWRITE, LWRITE2, LHPTSPN
75 :C
76 : SAVE
77 : DATA I1,I2,I5 /0,0,0/
78 : DATA NELALT/0/
79 :C =====
80 : LWRITE= NEL.EQ. I1 . AND . IFF.EQ.I2
81 : LWRITE2= LWRITE
82 :C
83 :C I5 IST DER ZAEHLER FUERS AUSSETZEN NACH KEY=4
84 :C IF (LWRITE) I5=I5 + 1
85 :C LWRITE= NINT(SCP(3)).GT. 0 .AND. LWRITE .AND. I5.GT. 0
86 :C
87 :C GO TO (1,2,3,4), KEY
88 :C
89 :C CONTINUE
90 :C INITIALISIERUNG DER VARIABLEN
91 :C
92 :C IF (INDNL.EQ.3) THEN
93 :C WRITE(6,1999)
94 :C FORMAT(/
95 :C + ' SORRY, BUT THIS MATERIAL-MODELL IS NOT QUALIFIED FOR U.L.H.'/)
96 :C STOP
97 :C ENDIF
98 :C IF (NEL.EQ.1) THEN
99 :C if(cti(4).gt. 0.001) then
100 :C CALL INIAIM(CTI, SE, ISE)
101 :C else
102 :C call iniaix(CTI, SE, ISE)
103 :C ENDIF
104 :C CALL AISOM(0.D+00, SE, ISE, 0 , ARRAY(19), ARRAY(20), ARRAY(23))
105 :C
106 :C I1 = INT(SCP(1)+.5)
107 :C I2 = INT(SCP(2)+.5)
108 :C I5 = -2
109 :C
110 :C DO 100 I=1,6
111 :C DO 100 J=1,6
112 :C DE(I,J) = 0.0
113 :C
114 :C DE(1,1) = CTI(1)*(1.-CTI(2))/(1.+CTI(2))*(1.-2.*CTI(2)))
115 :C DE(2,2) = DE(1,1)
116 :C DE(3,3) = DE(1,1)
117 :C DE(4,4) = CTI(1)
118 :C DE(5,5) = DE(4,4)
119 :C DE(6,6) = DE(4,4)
120 :C
121 :C DE(1,2) = CTI(1)* CTI(2)
122 :C DE(1,3) = DE(1,2)
123 :C DE(2,1) = DE(1,2)
124 :C DE(2,3) = DE(1,2)
125 :C DE(3,1) = DE(1,2)
126 :C DE(3,2) = DE(1,2)
127 :C

```

```

128 128 :C KLARTEXT, DER BEI IARRAY(1)=0 BZW. =1 AUSGEGBEN WERDEN SOLL
129 129 : X=CTI(1)*0.00001
130 130 : INFO0='----- IDEAL-PLAST.'
131 131 : IF (CTI(3).GT. X ) INFO0='++++ KINEMAT. VERFEST.'
132 132 : IF (CTI(3).LT. -X ) INFO0='++++ KINEMAT. ENTFEST.'
133 133 : INFO1=INFO0
134 134 : IF (DABS(CTI(3)).LT.1.D-5.AND.DABS(ARRAY(23)).GT.X)
135 135 : + INFO1='==== ISOTROPE VERFEST.'
136 136 : IF (DABS(CTI(3)).GE.1.D-5.AND.DABS(ARRAY(23)).GT.X)
137 137 : + INFO1='#### ANISOTROPE V.'
138 138 : LHFTSPN= (abs(SCP(3))).GT. 1.9
139 139 : ENDF
140 140 :
141 141 :
142 142 : IARRAY(1) = -1
143 143 : IARRAY(2) = 0
144 144 : CALL AISOM(0.D+00,SE, ISE,0 ,ARRAY(19),ARRAY(20),ARRAY(23))
145 145 :
146 146 : IF (NEL.EQ.11 )THEN
147 147 : CALL SHWAIN(SE,ISE)
148 148 :C WRITE(IUSER,1001) NEL, CTI,inter,SCP,(ARRAY(1),I=1,25)
149 149 :C WRITE(IUSER,1001) NEL, CTI,inter,SCP
150 150 :1001 FORMAT(/ ' DAS MATERIAL WIRD INITIALISIERT ! ELE= 'I4 /
151 151 : + ' E = 'F8.1,' nu = 'f8.6,
152 152 : + ' et = 'f8.1,' yld = 'f8.2 /
153 153 : + ' et1= 'f8.1,' epv1= 'f8.6,
154 154 : + ' et2 = 'f8.1,' epv2= 'f8.6 /
155 155 : + ' inter ='i3,' SCP =',4F9.3//
156 156 : + ' *****
157 157 : + ':5(3X,5(F10.3,2X)/)
158 158 : + ' *****
159 159 : ENDF
160 160 :
161 161 : RETURN
162 162 :
163 163 :2 CONTINUE
164 164 :
165 165 :C BERECHNUNG DER TATSACHLICHEN SPANNUNGEN AM ELEMENT
166 166 :C DIE AKTUELLE STEIFIGKEITSMATRIX WIEDERHERSTELLEN
167 167 : INFO=' '
168 168 : IF (IARRAY(1).LT.0, THEN
169 169 : DO 20 I=1,6
170 170 : DO 20 J=I,6
171 171 : D(J,I)=DE(I,J)
172 172 :20 D(I,J)=DE(I,J)
173 173 : ELSE
174 174 : CALL ABDEP(ARRAY,IARRAY, D,DE, ARRAY(7), ARRAY(13),
175 175 : + EPS,Q,DEQ,X, IWRITE)
176 176 : ENDF
177 177 :
178 178 :C *****
179 179 :C SPANNUNG AKTUALISIEREN
180 180 :C DS(I) = DELTA SIGMA(I)
181 181 :C *****
182 182 : DO 241 I=1,6

```

```

183 183 : DS(I)= 0.0
184 184 : DO 241 J=1,6
185 185 : DS(I)=DS(I) + D(I,J) * DEPS(J)
186 186 :241 CONTINUE
187 187 :
188 188 :C ***** BELASTUNG ODER ENTLASTUNG ?
189 189 :C BELASTUNG ODER ENTLASTUNG ?
190 190 :C SDS = KINEM.DEVIA.SPANNUNG * (LINE.ELAST.STEIFIGKEITSM. * GES.DEHNUNG)
191 191 :C *****
192 192 : SDS = 0.
193 193 : DO 248 I=1,6
194 194 : DO 248 J=1,6
195 195 :248 SDS = SDS + ARRAY(I+12)* DE(I,J)* DEPS(J)
196 196 :
197 197 :C *****
198 198 :C VORLAUFIGE SPANNUNG SIGMA(I):
199 199 :C *****
200 200 : DO 25 I=1,6
201 201 : STRESS(I)=STRESS(I) + DS(I)
202 202 :25 CONTINUE
203 203 :
204 204 :C KINEMATISCHE, DEVIATORISCHE SPANNUNGEN UND DAS FLIESSKRITERIUM BERECHNE
205 205 : CALL ABF (STRESS,ARRAY, F)
206 206 :
207 207 :C *****
208 208 :C FALLS F KLINER NULL -> LIN. ELAST. -> RETURN
209 209 :C *****
210 210 : IF (IARRAY(1).LT.0. AND . F.LT. 0.0 ) THEN
211 211 : RETURN
212 212 : ENDF
213 213 :
214 214 :C *****
215 215 :C ALSO NICHT LINEAR !!
216 216 :C *****
217 217 :C
218 218 :C BELASTUNG ODER ENTLASTUNG ??
219 219 :C *****
220 220 :
221 221 : IF 'SDS.LT. -1.D-10 ) THEN
222 222 :C
223 223 :C *****
224 224 :C RUECKKEHR VOM PLASTISCHEN ZUM ELASTISCHEN BEREICH (ENTLASTUNG)
225 225 :C *****
226 226 : IF (IWRITE) WRITE(IUSER,2480) SDS,NG,NEL,IPT,TIME
227 227 :2480 FORMAT(/' ENTLASTUNG AUS DEM PLASTISCHEN HERAUS SDS='G14.4/
228 228 : + ' ELEMENT:', I2,I4,'-',I2,' TIME:',F8.2)
229 229 : INFO='** ENTLASTUNG **'
230 230 :
231 231 :C ZYKLUS-ZAEHLER INKREMENTIEREN
232 232 : IARRAY(2)=IARRAY(2) +1
233 233 : CALL AISOM(ARRAY(22),SE, ISE,IARRAY(2),
234 234 : + ARRAY(19),ARRAY(20),ARRAY(23))
235 235 :
236 236 :C VOREINSTELLUNG AUF KINEM. VERFESTIGUNG
237 237 : ARRAY(23)= 0.0

```

```

238 238 : ARRAY(20)= CTI(1)*CTI(3) / ( CTI(1)-CTI(3))
239 239 : DO 249 I=1,6
240 240 : STRESS(I)=STRESS(I)-DS(I)
241 241 : DS(I)= 0.0
242 242 : DO 249 I=1,6
243 243 : DS(I) =DS(I) +DE(I,J)* DEFS(J)
244 244 : D(I,J) = DE(I,J)
245 245 : CONTINUE
246 246 :2491
247 247 : STRESS(I)=STRESS(I)+DS(I)
248 248 :249
249 249 :
250 250 : C KINEMATISCHE, DEVIATORISCHE SPANNUNGEN UND DAS FLIESSKRITERIUM BERECHNE
251 251 : CALL ABF (STRESS,ARRAY,F )
252 252 :
253 253 : C WURDE DER ELASTISCHE BEREICH NICHT VOLLSTÄNDIG DURCHQUERT
254 254 : C BEIM NÄCHSTEN MAL GLEICH ELASTISCH RECHNEN
255 255 : IARRAY(1) = -1
256 256 : IF ( F .LT. +1.D-10 ) THEN
257 257 : RETURN
258 258 : ENDIF
259 259 :
260 260 : C ANDERFALLS GEHT ES SO WEITER ALS KÄEME MAN AUS DEM ELASTISCHEN BEREICH
261 261 : ENDIF
262 262 :
263 263 : C ++++++
264 264 : C DER SCHRITT GING ALSO IN DEN PLASTISCHEN BEREICH
265 265 : C ++++++
266 266 : C DEN REIN ELASTISCHEN ANTEIL DIESES SCHRITTES ABRECHNEN
267 267 : C ++++++
268 268 : IF (IARRAY(1) .LT.0) THEN
269 269 :
270 270 : C FALLS DER SCHRITT NUR GERADESO INS PLASTISCHE GING, DANN IST U=0.
271 271 : C FALLS DER SCHRITT NUR GERADESO IM ELASTISCHEN BEGANN IST U= -1.
272 272 : U = 0.0
273 273 : IF ( F .LT. +1.D-10) GOTO 2501
274 274 : C DER PLASTISCHE BEREICH WURDE NUR GERADE SO ANGEKRATZT
275 275 :
276 276 : DSM= 0.33333333 * ( DS(1)+DS(2)+DS(3) )
277 277 : DSS(1)=DS(1)-DSM
278 278 : DSS(2)=DS(2)-DSM
279 279 : DSS(3)=DS(3)-DSM
280 280 : DSS(4)=DS(4)
281 281 : DSS(5)=DS(5)
282 282 : DSS(6)=DS(6)
283 283 : ALPHA = TENSUM( DSS , DSS )
284 284 : BETA = TENSUM( DSS , ARRAY(13) ) / ALPHA
285 285 :
286 286 : U = DSQRT(dabs( BETA *BETA -0.6666666666 * F/ALPHA) +
287 287 : + 1.D-32)- BETA
288 288 :
289 289 : DO 250 I=1,6
290 290 : STRESS(I) = STRESS(I) + U * DS(I)
291 291 :
292 292 : IF (1WRITE) WRITE(IUSER,2002) U, NG,NEL,IPT,TIME

```

```

293 293 :2002
294 294 : + ' (0=LIN.E./-1=PLAST.) ELE:' ,I2,I4,'- ' ,I2,' TIME:' ,F8.2)
295 295 :
296 296 : CALL ABF(STRESS, ARRAY,F)
297 297 : C JETZT FEHLEN NOCH EIN PAAR WERTE FÜR DIE KOMMENDE RECHNUNG Q,DEQ,X
298 298 :2501 CALL ABDEP(ARRAY,IARRAY, D,DE, ARRAY(7) , ARRAY(13),
299 299 : + EPS,Q,DEQ,X, LWRITE)
300 300 : DO 251 I=1,6
301 301 : DO 251 J=1,6
302 302 : STRESS(I)= STRESS(I) -U * D(I,J) *DEFS(J)
303 303 :251
304 304 : CONTINUE
305 305 : ELSE
306 306 : U = -1.0
307 307 : ENDIF
308 308 : C ++++++
309 309 : C DEN PLASTISCHEN ANTEIL ABRECHNEN
310 310 : C ++++++
311 311 : C D_LAMBDA AUSRECHNEN (DIE MEISTEN WERTE KOMMEN AUS SUB. ABDEP) :
312 312 :
313 313 : DLAMBDA = 0.0
314 314 : DO 260 I=1,6
315 315 : DLAMBDA = DLAMBDA + DEQ(I)* (-U) * DEFS(I)
316 316 :260 CONTINUE
317 317 : DLAMBDA=X * DLAMBDA
318 318 :
319 319 : C PLASTISCHE VERSCHIEBUNG EP(I)= EP(I) + D_LAMBDA * D_F/D_SIGMA :
320 320 : DO 261 I=1,6
321 321 : ARRAY(I+6) = ARRAY(I+6) + DLAMBDA * Q(I)
322 322 :261 CONTINUE
323 323 :
324 324 : C= 2/3 E_K
325 325 : DLAMBDA = 0.66666667 * DLAMBDA
326 326 : C KINEMATISCHE SPANNUNG ALFA(I) :
327 327 : ARRAY(1)= ARRAY(1) + ARRAY(20) *DLAMBDA* Q(1)
328 328 : ARRAY(2)= ARRAY(2) + ARRAY(20) *DLAMBDA* Q(2)
329 329 : ARRAY(3)= ARRAY(3) + ARRAY(20) *DLAMBDA* Q(3)
330 330 : ARRAY(4)= ARRAY(4) + 0.5* ARRAY(20)* DLAMBDA* Q(4)
331 331 : ARRAY(5)= ARRAY(5) + 0.5* ARRAY(20)* DLAMBDA* Q(5)
332 332 : ARRAY(6)= ARRAY(6) + 0.5* ARRAY(20)* DLAMBDA* Q(6)
333 333 :
334 334 : C PLASTISCH VERGLEICHSDERHUNG:
335 335 : ARRAY(22) = DSQRT(1.D-36 + 0.666666667 * (
336 336 : + ARRAY(7)**2 + ARRAY(8)**2 + ARRAY(9)**2 +
337 337 : + 0.5 * ( ARRAY(10)**2 + ARRAY(11)**2 + ARRAY(12)**2 ) )
338 338 :
339 339 : C ++++++
340 340 : C KINEMATISCHE ODER ISOTROPE VERFESTIGUNG ?
341 341 : C ++++++
342 342 : C FALL ABSOLUTES MAXIMUM, DANN YLD KORRIGIEREN:
343 343 : IF(ARRAY(22).GE.ARRAY(21) )THEN
344 344 :
345 345 : C ISOTROPE VERFESTIGUNG berechnen
346 346 : CALL AISOM(ARRAY(22),SE, ISE,IARRAY(2),
347 347 : + ARRAY(19),ARRAY(20),ARRAY(23))

```

```

348 348 :
349 349 :C AKTUELLE VGL. DEHNUNG ALS MAXIMALE VGL. DEHNUNG SPEICHERN
350 350 :      ARRAY(21)=ARRAY(22)
351 351 :      IARRAY(1)= +1
352 352 :      INFO= INFO1
353 353 :      ELSE
354 354 :
355 355 :C KINEMATISCHE VERFESTIGUNG
356 356 :      ARRAY(23)=0.
357 357 :      IARRAY(1)= 0
358 358 :      INFO= INFO0
359 359 :      ENDIF
360 360 :
361 361 :C ++++++
362 362 :C RADIAL RETURN:
363 363 :C ++++++
364 364 :      CALL ABRADI(ARRAY,STRESS,LWRITE,ng,nel,ipt,time)
365 365 :
366 366 :      if(IT.EQ. ITIME1 .OR. IT.EQ. ITIME2 .OR. IT.EQ. ITIME3) THEN
367 367 :          WRITE(155,1313) NG,NEL,IPT, time
368 368 :          FORMAT(1X,I2,I4,I4,I2,' ',F5.1)
369 369 :          ENDIF
370 370 :
371 371 :      RETURN
372 372 :
373 373 :C CONTINUE
374 374 :C BERECHNUNG DER STEIFIGKEITSMATRIX
375 375 :C VGL. BATHE S. 161
376 376 :C
377 377 :      IF(IARRAY(1).LT. 0 ) THEN
378 378 :          DO 300 I=1,6
379 379 :              DO 300 J=I,6
380 380 :                  D(J,I)=DE(I,J)
381 381 :                  D(I,J)=DE(I,J)
382 382 :
383 383 :              ELSE
384 384 :                  CALL ABDEP(ARRAY,IARRAY, D,DE, ARRAY(7) , ARRAY(13),
385 385 :                      + EPS,Q,DEQ,X, .FALSE. )
386 386 :              ENDIF
387 387 :              RETURN
388 388 :
389 389 :C CONTINUE
390 390 :C AUSDRUCK NACH DEM HERSTELLEN DES GLEICHGEWICHTES
391 391 :C
392 392 :C ++++++
393 393 :C PLASTISCHE DEHNUNG RUECKRECHNEN AUS:
394 394 :C GESAMTE DEHNUNG MINUS HOOKE'SCHE DEHNUNG
395 395 :C ++++++
396 396 :
397 397 :C F = S_kinematisch VGL**2 - YLD**2
398 398 :      F= 1.5 * ( ARRAY(13)**2 + ARRAY(14)**2 + ARRAY(15)**2 ) +
399 399 :          + 3.0* ( ARRAY(16)**2 + ARRAY(17)**2 + ARRAY(18)**2 ) -
400 400 :          - ARRAY(19)**2
401 401 :
402 402 :C Vergleichsspannung ohne alpha

```

```

403 403 :
404 404 :      SVGL= DSQRT( STRESS(1)**2 + STRESS(2)**2 +STRESS(3)**2 -
405 405 :          - STRESS(1)*STRESS(2) - STRESS(2)*STRESS(3) -
406 406 :          * (STRESS(4)**2 +STRESS(5)**2 + STRESS(6)**2) )
407 407 :
408 408 :      IF (IPT.EQ.1) WRITE(6,4010) NEL, NG, TIME
409 409 :      IF (LHAUPTSP .AND. IPT.EQ.1) WRITE(6,4014)
410 410 :      WRITE (6,4020) IPT,ARRAY(19), F, STRESS,
411 411 :          + ARRAY(22),SVGL, STRAIN,INFO, (ARRAY(1),I=7,12)
412 412 :      IF (LHPTSPN) THEN
413 413 :          CALL ABHPTS(STRESS,S1,S2,S3)
414 414 :          WRITE(6,4040) S1,S2,S3
415 415 :      ENDIF
416 416 :
417 417 :      IF (LWRITE2) THEN
418 418 :          WRITE(IUSER,4000) 32,32, TIME,NG
419 419 :          WRITE(IUSER,4010) NEL, NG, TIME
420 420 :          WRITE(IUSER,4013)
421 421 :          IF (LHPTSPN) WRITE(IUSER,4014)
422 422 :          WRITE (IUSER,4020) IPT,ARRAY(19), F, STRESS,
423 423 :          + ARRAY(22),SVGL, STRAIN,INFO, (ARRAY(1),I=7,12)
424 424 :          WRITE(IUSER,4030) ARRAY(23),ARRAY(20),
425 425 :              + (ARRAY(1),I=1,6),(ARRAY(1),I=13,18)
426 426 :          IF (LHPTSPN) WRITE(IUSER,4040) S1,S2,S3
427 427 :          WRITE(IUSER,'(2A1)') 32,36
428 428 :      ENDIF
429 429 :
430 430 :      FORMAT(2A1,' #####' TIME=' , F6.2,' #####',I2 )
431 431 :      FORMAT(/ ' NEL:',I5,' EGR:',I3,' #TIME=' ,F6.2/
432 432 :          + ' IPT YLD F ' ,
433 433 :          + 'STRESS-XX STRESS-YY STRESS-ZZ STRESS-XY STRESS-YZ STRESS-ZX'
434 434 :          + ',,
435 435 :          + ' EPV E-YY E-ZZ GAMMA-XY GAMMA-YZ GAMMA-ZX'
436 436 :          + ',,
437 437 :          + ' EP-XX EP-YY EP-ZZ GAMMAP-XY GAMMAP-YZ GAMMAP-ZX'
440 440 :          + )
441 441 :      FORMAT(' EI EFF EK EFF ' ,
442 442 :          + ' ALPHA-XX ALPHA-YY ALPHA-ZZ ALPHA-XY ALPHA-YZ ALPHA-ZX'
443 443 :          + ',,
444 444 :          + ' S-XX S-YY S-ZZ S-XY S-YZ S-ZX'
445 445 :          + )
446 446 :      FORMAT( ' S1 S2 S3 ' )
447 447 :
448 448 :
449 449 :      FORMAT(/ I3,1X,F10.2,2X,F10.0,3X,6(F10.2,1X) /
450 450 :          + 4X,F10.7,2X,F10.2,3X,6(F10.6,1X) /
451 451 :          + 7X,A20, 2X,6(F10.6,1X) )
452 452 :      FORMAT( 5X,F10.3,2X,F10.3,3X,6(F10.4,1X) ,
453 453 :          + 29X, 6(F10.2,1X) )
454 454 :      FORMAT ( 29X, 3(F10.4,1X) )
455 455 :
456 456 :C FUER DIE NAECHSTEN 3 (ODER 2) DURCHGAENGE KEIN AUSDRUCK !
457 457 :      IF (LWRITE) I5 = - NINT(SCP(4))

```

```

458 458 :
459 459 : RETURN
460 460 : END
461 461 : C -----
462 462 :
463 463 : letzte Aenderung: 6.5.1992 A.Busch
464 464 : C -----

465 1 : SUBROUTINE ABHPTS(STRESS, S1,S2,S3)
466 2 : C
467 3 : C BERECHNEN DER HAUPTSPANNUNGEN S1,S2,S3
468 4 : C AXEL BUSCH (c) 6.1991
469 5 : C
470 6 : IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
471 7 : PARAMETER (E3=0.3333333333333333, PI23=2.094395103)
472 8 : DIMENSION STRESS(6)
473 9 :
474 10 : C BERECHNEN DER INVARIANTEN DES SPANNUNGSZUSTANDES
475 11 : S1=-(STRESS(1)+STRESS(2)+STRESS(3)) *E3
476 12 :
477 13 : S2= STRESS(1)*STRESS(2) + STRESS(2)*STRESS(3) +
478 14 : + STRESS(3)*STRESS(1) - STRESS(4)*STRESS(4) -
479 15 : - STRESS(5)*STRESS(5) - STRESS(6)*STRESS(6)
480 16 :
481 17 : S3= STRESS(1)*STRESS(5)**2+STRESS(2)*STRESS(6)**2+STRESS(3)*
482 18 : * STRESS(4)**2 - STRESS(1)*STRESS(2)*STRESS(3) -
483 19 : - 2.*STRESS(4)*STRESS(5)*STRESS(6)
484 20 : C
485 21 : C SUBROUTINE ABDKUB0(s1,s2,s3,s1,s2,s3)
486 22 : C Dieses Programm findet Nullstellen in kubischen Gleichungen
487 23 : C AXEL BUSCH (c) 6.1991
488 24 : C
489 25 : Q= S1*S1- S2*E3
490 26 : R= S1**3 -0.5*(s1*s2 - S3)
491 27 : IF (DABS(Q) .LT.1.D-10 .AND. DABS(R).LT.1.D-10) THEN
492 28 : S2=S1
493 29 : S3=S1
494 30 : ELSE IF ( Q**3 - R**2. GE .00.0) THEN
495 31 : R=DACOS(R/DSQRT(Q**3 +1.D-36)) *E3
496 32 : Q=-2.*DSQRT(Q)
497 33 : S2= Q*DCOS(R+PI23) - S1
498 34 : S3= Q*DCOS(R+PI23+PI23) - S1
499 35 : S1= Q*DCOS(R) - S1
500 36 : ELSE
501 37 : S2=(DSQRT(R**2-Q**3 +1.D-36) + DABS(R))**E3
502 38 : S1= - DSIGN( 1.D+00 , R ) * (S2+Q/S2) - S1
503 39 : S2=0.
504 40 : S3=0.
505 41 : ENDIF
506 42 : RETURN
507 43 : END
508 44 :
509 45 :
510 1 : SUBROUTINE ABDEF( ARRAY,IARRAY,D,DE, EP, S,

```

```

566 57 :
567 58 : C P(6) = ABL. DES FLIESSKRITERIUM NACH DEM PLAST. DEHNUNGSVEKTOR
568 59 : IF (ARRAY(22).GT. 1.D-05) THEN
569 60 : C FALLS DIE PLAST. VERGLEICHSDENHUNG >> 0. , DANN...
570 61 :
571 62 : PF= 0.6666666666 * ARRAY(19) * ARRAY(23) / ARRAY(22)
572 63 :
573 64 : P(1)=2.* PF* EP(1)
574 65 : P(2)=2.* PF* EP(2)
575 66 : P(3)=2.* PF* EP(3)
576 67 : P(4)= PF* EP(4)
577 68 : P(5)= PF* EP(5)
578 69 : P(6)= PF* EP(6)
579 70 : ELSE
580 71 : C ERSATZBERECHNUNG MIT ELASTISCHEN DEHNUNGEN FALLS EPV SEHR KLEIN
581 72 : C PF= SQRT(2./3.) *DSDE * YLD / SORT(EPS_IJ*EPS_IJ)
582 73 :
583 74 : PF= 0.8165 * ARRAY(19) *ARRAY(23) /
584 75 : * DSQRT( TENSUM(EPS,EPS) + 1.D-36)
585 76 : P(1)=2.* PF* EPS(1)
586 77 : P(2)=2.* PF* EPS(2)
587 78 : P(3)=2.* PF* EPS(3)
588 79 : P(4)= PF* EPS(4)
589 80 : P(5)= PF* EPS(5)
590 81 : P(6)= PF* EPS(6)
591 82 : ENDIF
592 83 :
593 84 :
594 85 : C BERECHNEN DES NENNER X DER REIN PLASTISCHEN TEILMATRIX
595 86 : C X= -6 * 2/3 E_K * YLD**2 + P(I)*Q(I) + (Q(I)*DE(I,J))*Q(J)
596 87 : C KINEMATISCHER ANTEIL :
597 88 : X = +4.* ARRAY(20) * ARRAY(19)**2
598 89 :
599 90 : C UND ISOTROPER ANTEIL + QDEQ
600 91 : DO 380 I=1,6
601 92 : X = X + P(I)*Q(I) + Q(I)*DEQ(I)
602 93 : 380 CONTINUE
603 94 : IF (X.LT.1.E-10) THEN
604 95 : WRITE (IUSER) 'PLASTISCHE ZONE IM 1.SCHRITT ERREICHT !'
605 96 : X=0. ! NUR UM EINEN ABSTURZ ZU VERMEIDEN
606 97 : ELSE
607 98 : X = 1. / X
608 99 : ENDIF
609 100 :
610 101 : C BERECHNEN DER PLASTISCHEN STEIFIGKEITSMATRIX
611 102 : DO 390 I=1,6
612 103 : DO 390 J=I,6
613 104 : D(I,J)= DE(I,J) - X * DEQ(I) * DEQ(J)
614 105 : D(J,I)=D(I,J)
615 106 : 390 continue
616 107 :
617 108 : C if(LWRITE) write(iuser,3099), X, D, P,Q,DEQ
618 109 : 3099 format( ' Am Ende von DEP ist x: ',G14.5, ' UND D(6,6):' /
619 110 : + 6(3x, 6(f10.1,1x) / ) /
620 111 : + ' P(6) : ', 6(G12.6,2X) /' Q(6) : ', 6(G12.6,2X) /

```

```

621 112 : + ' DEQ(6) : ', 6(G12.6,2X) )
622 113 : return
623 114 : end
624 115 :
625 116 :
SUBROUTINE ABF(STRESS ,ARRAY, F)
1 :
2 : C
3 : C ABF BERECHNET DIE KINEMATISCHE DEVIATORISCHE SPANNUNG ARRAY(13)- ARRAY(
UND DAS FLIESSKRITERIUM F
4 : C
5 : C
6 : C A.BUSCH 26.4.1991 / 15.7.91
7 : C
8 : C STRESS(1) BIS
9 : C STRESS(6) - IN - SPANNUNGEN
10 : C
11 : C ARRAY(1) BIS
12 : C ARRAY(6) - IN - ALFA = KINEMATISCHE SPANNUNGEN
13 : C ARRAY(13) BIS
14 : C ARRAY(18) - OUT - KINEMATISCHE DEVIATORISCHE SPANNUNGEN
15 : C F - OUT - FLIESSKRITERIUM
16 : C
17 : implicit double precision (a-h,o-z)
18 : DIMENSION STRESS(6), ARRAY(23)
19 : C
20 : C MITTLERE DRUCKSPANNUNG:
21 : SM= 0.33333333*( STRESS(1)+STRESS(2)+STRESS(3))
22 :
23 : C VORLAEUFIGE KINEMATISCHE, DEVIATORISCHE SPANNUNG S(I):
24 : ARRAY(13)= STRESS(1) - ARRAY(1) - SM
25 : ARRAY(14)= STRESS(2) - ARRAY(2) - SM
26 : ARRAY(15)= STRESS(3) - ARRAY(3) - SM
27 : ARRAY(16)= STRESS(4) - ARRAY(4)
28 : ARRAY(17)= STRESS(5) - ARRAY(5)
29 : ARRAY(18)= STRESS(6) - ARRAY(6)
30 :
31 : C F = S_kinematisch_VGL**2 - YLD**2
32 : F= 1.5 * ( ARRAY(13)**2 + ARRAY(14)**2 + ARRAY(15)**2) +
33 : + 3.* ( ARRAY(16)**2 + ARRAY(17)**2 + ARRAY(18)**2) -
34 : - ARRAY(19)**2
35 :
36 : RETURN
37 : END
38 :
39 :
SUBROUTINE ABRADI (ARRAY,STRESS,LWRITE,ng,nel,ipt,time)
1 :
2 : C ++++++
3 : C AXEL BUSCH 2.6.91
4 : C
5 : C RADIAL RETURN:
6 : C ++++++
7 : C
8 : C ARRAY(13) - IN - KINEM., DEVIAT. SPANNUNGEN
9 : C ARRAY(19) - IN - VERGLEICHSSPANNUNG

```

```

674 10 :C STRESS - I/O - DIE SPANNUNGEN
675 11 :C LWRITE - IN - SCHREIBFLAGE
676 12 :C
677 13 : IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
678 14 : PARAMETER (IUSER=111)
679 15 : DIMENSION ARRAY(23),STRESS(6)
680 16 : LOGICAL LWRITE
681 17 :
682 18 :C SIGMA(I) = SIGMA_TAU(I) + ( YLD / S_VGL - 1.) * S(I)
683 19 :C
684 20 :C MITTLERE DRUCKSPANNUNG:
685 21 : SM= 0.33333333*( STRESS(1)+STRESS(2)+STRESS(3))
686 22 :
687 23 :C VORLAEUFIGE KINEMATISCHE, DEVIATORISCHE SPANNUNG S(I):
688 24 : ARRAY(13)= STRESS(1) - ARRAY(1) - SM
689 25 : ARRAY(14)= STRESS(2) - ARRAY(2) - SM
690 26 : ARRAY(15)= STRESS(3) - ARRAY(3) - SM
691 27 : ARRAY(16)= STRESS(4) - ARRAY(4)
692 28 : ARRAY(17)= STRESS(5) - ARRAY(5)
693 29 : ARRAY(18)= STRESS(6) - ARRAY(6)
694 30 :
695 31 :270 XX = ARRAY(19) /DSQRT( 1.D-30 +
696 32 : + 1.5 *( ARRAY(13)**2 + ARRAY(14)**2 + ARRAY(15)**2) +
697 33 : + 3.0 *( ARRAY(16)**2 + ARRAY(17)**2 + ARRAY(18)**2)) - 1.
698 34 :
699 35 : IF ( DABS(XX).GT. 0.1) WRITE (6,1000) XX,ng,nel,ipt,time
700 36 : IF ( LWRITE .AND. DABS(XX).GT. 0.2)
701 37 : + WRITE (IUSER,1000) XX,ng,nel,ipt,time
702 38 :1000 FORMAT(' ***** WARNING: Radial-Return -> Korrekturfaktor = ',
703 39 : +,G12.4,'/', ' Schrittweite verringern!',
704 40 : + 'Element :',i2,i4,'-',i2,' time : ',f6.2 /)
705 41 :
706 42 : DO 280 I=1,6
707 43 : STRESS(I)= STRESS(I) + XX * ARRAY(I+12)
708 44 :280 CONTINUE
709 45 :
710 46 : SM= 0.33333333*( STRESS(1)+STRESS(2)+STRESS(3))
711 47 :C KINEMATISCHE, DEVIATORISCHE SPANNUNG S(I):
712 48 : ARRAY(13)= STRESS(1) - ARRAY(1) - SM
713 49 : ARRAY(14)= STRESS(2) - ARRAY(2) - SM
714 50 : ARRAY(15)= STRESS(3) - ARRAY(3) - SM
715 51 : ARRAY(16)= STRESS(4) - ARRAY(4)
716 52 : ARRAY(17)= STRESS(5) - ARRAY(5)
717 53 : ARRAY(18)= STRESS(6) - ARRAY(6)
718 54 :
719 55 : RETURN
720 56 : END
721 57 :
722 1 : DOUBLE PRECISION FUNCTION TENSUM (A,B)
723 2 :C
724 3 :C BILDET DIE TENSORIELLE SUMME A_IJ B_IJ, I=1,2,3 J=1,2,3
725 4 :C ABER A UND B WERDEN ALS VEKTOR MIT DEN KOMPONENTEN:
726 5 :C A_11, A_22, A_33, A_12=A_21, A_23=A_32, A_31=A_13
727 6 :C B ENTSPRECHEND EINGESPEIST
728 7 :C
729 8 :C AXEL BUSCH 19.3.1991
730 9 :C
731 10 : IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
732 11 : DIMENSION A(6),B(6)
733 12 :
734 13 : TENSUM = A(1)*B(1) + A(2)*B(2) + A(3)*B(3) +
735 14 : + 2.* (A(4)*B(4) + A(5)*B(5) + A(6)*B(6))
736 15 :
737 16 : RETURN
738 17 : END
739 18 :
740 19 :C ++++++
741 20 :
742 1 : subroutine MATTEST
743 2 :C
744 3 :C PROGRAM MATTEST
745 4 :C
746 5 :C MIT DIESEM PROGRAMM KANN MAN INTERAKTIV DIE WERTE IN AIMPAT PRUEFEN
747 6 :C by A.Busch 17.4.92 / 6.5.92
748 7 :C
749 8 :C PARAMETER (IUSER=111)
750 9 :C IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
751 10 :C DOUBLE PRECISION CTI(8),SE(4,128), EPV, YLD, EK,DSDE
752 11 :C INTEGER ISE(0:31), IZYKL
753 12 :C DATA CTI/210000., 0.3, 10000., 400., 0., 0., 0., 0./
754 13 :C OPEN( IUSER, FILE= 'SYS$OUTPUT', STATUS = 'UNKNOWN' )
755 14 :C
756 15 :C CALL IIMPAT(CTI, SE,ISE)
757 16 :C CALL SHWAIM(SE,ISE)
758 17 :C
759 18 :1 CONTINUE
760 19 : PRINT*, ' PLAST. VERGLEICHSPANNUNG =? UND ZYKLUS =?'
761 20 : READ*, EPV, IZYKL
762 21 : IF (EPV.LT.-0.01) STOP
763 22 : CALL AISOM(EPV, SE, ISE,IZYKL, YLD, EK, DSDE )
764 23 : WRITE (6,1000) EPV, IZYKL,YLD,EK,DSDE
765 24 :1000 FORMAT( ' EPV :',F8.5, ' IZYKL :',I3/
766 25 : + ' YLD :',F8.3, ' E_KIN :',F10.1, ' DSDE :',F10.3 /)
767 26 : GOTO 1
768 27 : END
769 28 :
770 1 : SUBROUTINE AISOM(EPV, SE, ISE,IA2, YLD, EK, DSDE )
771 2 :C
772 3 :C Anisotropes Materialgesetz liefert fuer eine gegebene plastische
773 4 :C Vergleichsdehnung EPV die Ableitung der Fließspannung DSDE und die
774 5 :C Ableitung der kinematischen Spannung nach der plast. Vergleichsdehnung
775 6 :C sowie die Fließspannung YLD.
776 7 :C
777 8 :C AXEL BUSCH (c) 21.6.1991
778 9 :C
779 10 :C EPV - IN - plast. Vergleichsdehnung
780 11 :C SE(1,*) - IN - plast. Vergleichsdehnung am Punkt *

```

```

781 12 : C SE(2,*)- IN - Fliessspannung am Punkt * = Radius des Fliesszylinders
782 13 : C SE(3,*)- IN - eff. isotrope Tangentenmodul nach Punkt *
783 14 : C SE(4,*)- IN - eff. kinem. Tangentenmodul nach Punkt *
784 15 : C ISE(30)- IN - Organisationsfeld fuer SE
785 16 : C IA2 - IN - Nr. des aktuellen Zyklus
786 17 : C
787 18 : C DSDE - OUT - effektiver isotroper Tangentenmodul
788 19 : C EK - OUT - effektiver kinematischer Tangentenmodul
789 20 : C YLD - OUT - Fliessspannung
790 21 : C
791 22 : IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
792 23 : DIMENSION CTI(8), SE(4,*), ISE(0:*)
793 24 :
794 25 : C SUCHE NACH DEM ZYKLUS
795 26 : DO 1 J=1,61,3
796 27 : IF ( IA2.LT. ISE(J) .OR. ISE(J).LT.0 ) GOTO 2
797 28 : 1 CONTINUE
798 29 :
799 30 : C SUCHE NACH DEM DEHNUNGSINTERVALL
800 31 : 2 DO 10 I=ISE(J-2), ISE(J-1)
801 32 : IF ( SE(1,I) .GT. EPV ) GOTO 20
802 33 : 10 CONTINUE
803 34 : 20 I=I-1
804 35 : DSDE=SE(3,I)
805 36 : EK= SE(4,I)
806 37 : YLD= SE(2,I) + (EPV - SE(1,I))*SE(3,I)
807 38 : RETURN
808 39 : END
809 40 :

810 1 : SUBROUTINE INTAIM(CTI, SE, ISE)
811 2 : C
812 3 : C Initialisiert Anisotropes Materialgesetz
813 4 : C
814 5 : C AXEL BUSCH (c) 6.1991 / 3.4.92 / 6.5.92
815 6 : C
816 7 : C CTI(1) - IN - elastischer Elastizitaetsmodul
817 8 : C CTI(3) - IN - kinematischer Tangentenmodul
818 9 : C
819 10 : C SE(1,*)- OUT - plast. Vergleichsdehnung am Punkt *
820 11 : C SE(2,*)- OUT - Fliessspannung am Punkt * = Radius des Fliesszylinders
821 12 : C SE(3,*)- OUT - eff. isotrope Tangentenmodul nach Punkt *
822 13 : C SE(4,*)- OUT - eff. kinem. Tangentenmodul nach Punkt *
823 14 : C ISE(0:61)-OUT - Organisationsfeld fuer SE
824 15 : C
825 16 : C IN DER MATERIALDATEI:
826 17 : C E - TECHN. PLASTISCHE VERGLEICHSDREHNUNG DES PUNKTES
827 18 : C S - TECHN. (ANISOTROPE) FLIESSPANNUNG DES PUNKTES
828 19 : C
829 20 : C PARAMETER (USER=111)
830 21 : C IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
831 22 : C DIMENSION CTI(8), SE(4,*), ISE(0:*)
832 23 : C CHARACTER *80,A
833 24 : C OPEN(113,FILE='$DISK3:[130011.ADINA]AIMAT.DAT',STATUS='OLD')
834 25 : C OPEN(113, STATUS='OLD')

```

```

835 26 : IZ=-2
836 27 : ID=0
837 28 :
838 29 : 1 READ(113, '(A80)',ERR=999,END=990,IOSTAT=IOS) A
839 30 : IF ( A(1:1).EQ.'C'.OR. A(1:1).EQ.'c') GOTO 1
840 31 : IF ( A(1:7).EQ.'ZYKLUS='.OR. A(2:8).EQ.'ZYKLUS=' ) THEN
841 32 : READ (A(8:80),*) ZYKL
842 33 : C DER LETZTE DATENSATZ ENDETE MIT DATUM ID
843 34 : ISE(IZ+2)= ID
844 35 : C NEUER ZYKLUS
845 36 : IZ=IZ+3
846 37 : IF (ID.GT.256) THEN
847 38 : WRITE (*,1008)
848 39 : WRITE (IUSER,1008)
849 40 : 1008 FORMAT(' ***** FATAL ERROR *****' /
850 41 : + ' DIE MATERIALDATEI FUER DAS USER-DEFINED-MATERIAL '
851 42 : + ' ENTHAEILT MEHR ALS 20 DATENSATZE! ')
852 43 : GOTO 990
853 44 : ENDIF
854 45 :
855 46 : ISE(IZ)= NINT(ZYKL) -1
856 47 : ISE(IZ+1)= ID+1
857 48 : GOTO 1
858 49 : ENDIF
859 50 :
860 51 : READ(A,*,END=1,ERR=999) E,S
861 52 : ID=ID+1
862 53 :
863 54 : IF (ID.GT.256) THEN
864 55 : WRITE (*,1009)
865 56 : WRITE (IUSER,1009)
866 57 : 1009 FORMAT(' ***** FATAL ERROR *****' /
867 58 : + ' DIE MATERIALDATEI FUER DAS USER-DEFINED-MATERIAL '
868 59 : + ' ENTHAEILT MEHR ALS 256 MATERIALDATEN! ')
869 60 : GOTO 990
870 61 : ENDIF
871 62 :
872 63 : C GGF. UMRECHNEN VON WAHREN AUF TECHNISCHE DEHNUNG / SPANNUNG :
873 64 : C E= DEXP(E) -1.
874 65 : C S= S/ (1.-0.5*E)**2
875 66 :
876 67 : C GGF. UMRECHNEN VON GESAMTDEHNUNGEN AUF PLASTISCHE DEHNUNGEN :
877 68 : C E = E - CTI(1)*S
878 69 : C
879 70 : SE(1,ID)=E
880 71 : SE(2,ID)=S
881 72 : IF (ID.EQ. ISE(IZ+1)) GOTO 1
882 73 :
883 74 : I=ID-1
884 75 : C EFF. ANISOTROPEN TANGENTENMODUL AUSRECHNEN:
885 76 : E= (SE(2,ID)-SE(2,I)) / (SE(1,ID)-SE(1,I))
886 77 : C UMRECHNEN AUF ANISOTROPEN TANGENTENMODUL
887 78 : E= CTI(1)*E / (CTI(1)+E)
888 79 :
889 80 : C EFF. ISOTROPEN TANGENTENMODUL:

```

```

890 81 : SE(3,I)= CTI(1)* ( E-CTI(3)) / (CTI(1)-E)
891 82 : C EFF. KINEMATISCHEN TANGENTENMODUL:
892 83 : SE(4,I)= CTI(1)* CTI(3) / (CTI(1)-E)
893 84 : C FUER DEN NAECHSTEN PUNKT VORSORGLICH AUF IDEAL-PLASTISCH STELLEN:
894 85 : SE(3,ID)=0.
895 86 : SE(4,ID)=0.
896 87 : GOTO 1
897 88 :
898 89 :990 ISE(IZ+2)=ID ! ENDE DES LETZTEN DATENSATZES
899 90 : ISE(IZ+3) =-10 ! ENDE FUER AIMAT-SUCHE
900 91 :
901 92 : C ALLE SPANNUNGEN UM DEN IN ALFA ENTHALTENEN KINEMATISCHEN ANTEIL BEREINIG
902 93 : DO 20 I=1,ID
903 94 : SE(2,I)=SE(2,I) - SE(4,I)*SE(1,I)
904 95 :20 CONTINUE
905 96 : GOTO 9999
906 97 :
907 98 :999 WRITE(*,1099) IOS
908 99 :1099 FORMAT(' !!! FEHLER BEIM EINLESEN DES MATERIALS !!! '
909 100 : + ' ( IOSTAT= ' ,I4,' ) ' )
910 101 :
911 102 :9999 CLOSE(113,status='KEEP')
912 103 : RETURN
913 104 : END
914 105 :
915 1 : SUBROUTINE SHWAIM(SE,ISE)
916 2 : C
917 3 : C AXEL BUSCH (C) 24.6.91 / 5.5.
918 4 : C
919 5 : C SHOW Anisotropes Material erstellt einen Kontrolldruck der Materialdatei
920 6 : C auf Kanal 111 (IUSER).
921 7 : C
922 8 : PARAMETER (IUSER=111)
923 9 : IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
924 10 :
925 11 : DIMENSION SE(4,*),ISE(0:*)
926 12 :
927 13 : DO 1 I=1,58,3
928 14 : IF(ISE(I).LT. 0) GOTO 999
929 15 : WRITE( IUSER ,1110) ISE(I)+1,ISE(I+1),ISE(I+2)
930 16 :1110 FORMAT(/ ' ZYKLUS= ' ,I10,' VON ' ,I3,' BIS ' ,I3/
931 17 : + ' C TECHN.DEHNUNG SPANNUNG EFF.E_ISOT. E_KINEM. ' )
932 18 :
933 19 : DO 2 J=ISE(I+1),ISE(I+2)
934 20 : WRITE( IUSER ,1000) SE(1,J),SE(2,J),SE(3,J),SE(4,J)
935 21 :1000 FORMAT ( 5x,f10.6,2x,f8.1,2x,f10.1,2x,f10.1 )
936 22 :
937 23 :2 CONTINUE
938 24 :1 CONTINUE
939 25 :
940 26 :999 RETURN
941 27 : END
942 28 :

```