

# **Minimal-redundante Antennen-Arrays für MIMO-Radare**

Vom Promotionsausschuss der  
Technischen Universität Hamburg-Harburg  
zur Erlangung des akademischen Grades  
Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)  
genehmigte Dissertation

von  
Kamil Rezer  
aus Petropawlowsk

**2015**

1. Gutachter: Herr Prof. Dr.-Ing. Arne F. Jacob
  2. Gutachter: Herr Prof. Dr.-Ing. Michael Höft
- Tag der mündlichen Prüfung: 8. Oktober 2015

## **Danksagung**

Diese Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Hochfrequenztechnik der Technischen Universität Hamburg-Harburg. Dem Institutsleiter Herrn Prof. Dr.-Ing. Arne F. Jacob danke ich für die Ermöglichung und Unterstützung meiner Promotion. Meinen ehemaligen Kolleginnen und Kollegen danke ich für die freundschaftliche Arbeitsatmosphäre. Ich danke herzlich meiner Familie und insbesondere meiner Frau Tatjana für die bedingungslose Rückhalt und Vertrauen während dieser Zeit.

*Kamil Rezer*

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen der Antennen-Arrays</b>	<b>4</b>
2.1	Radargleichung . . . . .	4
2.2	Radare mit stufenförmiger Frequenzmodulation . . . . .	5
2.3	Radarsysteme mit phasengesteuerten und Mehrkanal-Arrays . . . . .	7
2.4	SIMO-Arrays . . . . .	8
2.5	MIMO-Arrays . . . . .	9
2.6	Spektralschätzung der Array-Antwort . . . . .	11
2.7	Modell des Ko-Arrays . . . . .	13
2.7.1	Kreuzprodukte . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Lineare SIMO-Arrays mit minimaler Redundanz</b>	<b>16</b>
3.1	Ausgedünnte Arrays . . . . .	16
3.2	Nicht-redundante und minimal-redundante Arrays . . . . .	18
3.2.1	Syntheseverfahren für minimal-redundante SIMO-Arrays . . . . .	20
3.3	Verfahren zur Nebenkeulenreduzierung in Radaren mit minimal-redundanten Arrays	23
<b>4</b>	<b>Lineare MIMO-Arrays mit minimaler Redundanz</b>	<b>29</b>
4.1	Modell des äquivalenten Empfangs-Arrays . . . . .	29
4.2	Anzahl der Freiheitsgrade von MIMO-Arrays . . . . .	30
4.3	Bistatische minimal-redundante MIMO-Arrays . . . . .	32
4.4	Monostatische minimal-redundante MIMO-Arrays . . . . .	34
4.4.1	Array-Optimierung . . . . .	37
4.5	Ausgedünnte MIMO-Arrays mit vorgegebenem Mindestelementabstand . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Quadratische MIMO-Arrays mit minimaler Redundanz</b>	<b>56</b>
5.1	Syntheseverfahren für quadratische minimal-redundante MIMO-Arrays . . . . .	58
5.2	Allgemeine quadratische MIMO-Arrays . . . . .	63

<b>6 Fehler in minimal-redundanten Arrays</b>	<b>67</b>
6.1 Bildfehler infolge des additiven Rauschens in minimal-redundanten Arrays . . . . .	67
6.1.1 Cramer-Rao-Schranke für minimal-redundante SIMO-Arrays . . . . .	70
6.1.2 Cramer-Rao-Schranke für minimal-redundante MIMO-Arrays . . . . .	72
6.2 Amplituden- und Phasenfehler . . . . .	76
6.3 Fokussierungsfehler . . . . .	81
<b>7 Experimentelle Untersuchungen</b>	<b>84</b>
7.1 Lineares minimal-redundantes MIMO-Array . . . . .	86
7.2 Quadratisches minimal-redundantes MIMO-Array . . . . .	90
<b>8 Zusammenfassung</b>	<b>95</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>98</b>

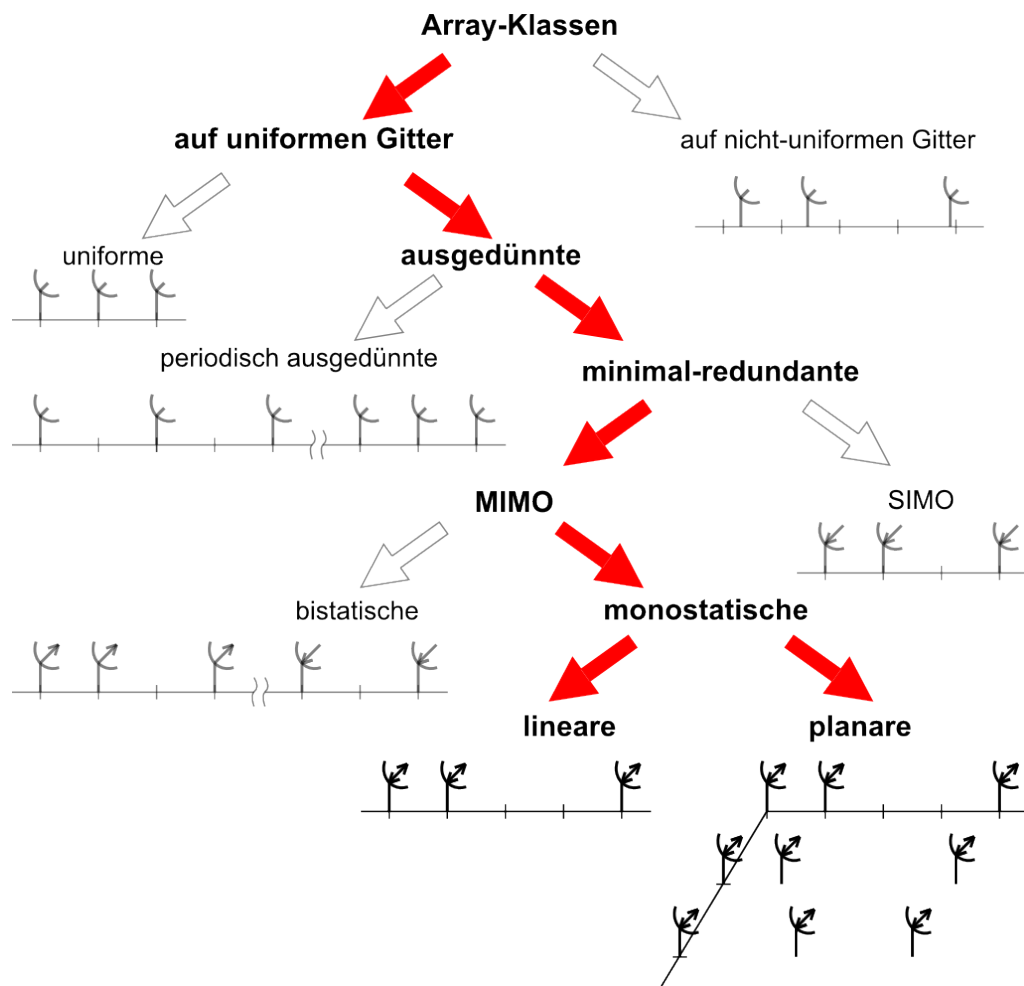
# 1 Einleitung

In dieser Arbeit geht es um minimal-redundante Antennen-Arrays für bildgebende MIMO-Radare. Die MIMO (*Multiple-Input Multiple-Output*) Antennen-Arrays weisen verglichen mit SIMO (*Single-Input Multiple-Output*) mehr Freiheitsgrade und Antennendiversität auf [1], weshalb die MIMO-Arrays immer mehr Verbreitung in modernen Radaren finden. Die Entwicklung von Radarelektronik mit stets steigender Komplexität sowie die ständige Weiterentwicklung von leistungsfähigen Signalprozessoren und Algorithmen beschleunigen zusätzlich die Verbreitung dieser Array-Klasse.

Die Winkelauflösung von Antennen-Arrays hängt grundsätzlich von der Array-Größe ab. Weil der Abstand zwischen den Array-Elementen eines herkömmlichen uniformen Arrays meistens die halbe Betriebswellenlänge beträgt, ist die gesamte Anzahl der Array-Elemente umgekehrt proportional zu der geforderten Array-Auflösung: Je feiner die Auflösung sein soll, desto länger muss das Array werden und entsprechend mehr Elemente muss es erhalten [2]. Das erfordert wiederum eine komplexere Systemarchitektur und Signalverarbeitung. Eine Alternative mit feiner Auflösung und kleiner Elementanzahl bieten hierzu minimal-redundante Antennen-Arrays [3]. Eine schematische Einteilung dieser Array-Klasse ist in Bild 1.1 dargestellt.

Der dargestellten Einteilung zufolge zählen die minimal-redundanten Arrays zu der Klasse der ausgedünnten Arrays – d.h. ihre Array-Elemente befinden sich auf Knoten eines uniformen Gitters. Das unterscheidet die ausgedünnten Arrays von den nicht-uniformen Antennen-Arrays, bei deren Elementverteilung keine solche Einschränkung gefordert wird. Ein Vorteil der uniformen Arrays ist eine effiziente Bildsignalverarbeitung mit der schnellen Fourier-Transformation der Array-Antwort. Dies verhilft wiederum zur Vereinfachung der Systemarchitektur des Radars [4].

Der Preis für die Array-Ausdünnung liegt vor allem bei den hohen Nebenkeulen im Array-Diagramm, was wiederum in bildgebenden, kohärenten Radaren die Bildung von störenden Kreuzprodukten begünstigt [5]. Die klassische Fensterung der Array-Antwort zum Zweck der Nebenkeulenreduzierung ist als Verfahren für ausgedünnte Arrays fraglich, weil die Array-Antwort eben nichtlinear ist. Andererseits ist das Ko-Array eines minimal-redundanten Arrays per Definition (zumindest zum größten Teil) uniform. Das Ko-Array kann aus der Array-Antwort mittels Autokorrelationsfolge generiert und zum Zweck der Nebenkeulenreduzierung mit herkömmlichen Fensterfunktionen gewichtet wer-



**Abbildung 1.1:** Minimal-redundante MIMO-Arrays als Array-Unterklasse.

den [6].

Das Aufstellen der Array-Elemente eines minimal-redundanten Antennen-Arrays ist in der Regel ein empirisches Verfahren. An den Verfahren und Algorithmen zur Positionierung der Elemente in minimal-redundanten SIMO-Arrays wurde bereits in den 1950-er geforscht [7]. Die Verbreitung der ausgedünnten MIMO-Arrays und der Bedarf an Entwurfsverfahren für diese Array-Klasse sind eher in den letzteren Jahren entstanden. Das Ziel dieser Arbeit sind die Entwicklung von empirischen Verfahren für sowie Analyse, Optimierung und Synthese von minimal-redundanten MIMO-Arrays.

Neben den linearen Arrays wird dem Entwurf von planaren Arrays für dreidimensionale bildgebende Radarverfahren eine wichtige Rolle zuteil. Ein Schritt in Richtung von planaren minimal-redundanten MIMO-Arrays wird in dieser Arbeit durch den Entwurf und die Analyse von quadratischen minimal-redundanten MIMO-Arrays getan. Ebenso werden in dieser Arbeit Amplituden-

---

und Phasenfehler in minimal-redundanten Arrays untersucht und Einflüsse des additiven Gaußschen Rauschens auf das Array-Spektrum diskutiert.

Weil das Thema der MIMO-Arrays umfangreich ist, konzentriert sich diese Arbeit auf monostatische MIMO-Arrays, in welchen jedes Array-Element sowohl die Sende- als auch die Empfangsfunktion erfüllt. Im Vergleich zu bistatischen MIMO-Arrays (deren Array-Elemente entweder senden oder empfangen können) bieten die monostatischen Arrays etwa doppelt so viele Freiheitsgrade [1]. Das resultiert in hohen Ausdünnungsraten der monostatischen MIMO-Arrays [8]. Ebenso wenig wird in dieser Arbeit auf periodisch ausgedünnte Arrays eingegangen, die zwar mit einfachen Syntheseverfahren generiert werden können, aber weniger Freiheitsgrade bzw. kleineres Ausdünnungsvermögen als minimal-redundante Antennen-Arrays aufweisen [3, 5].

### **Gliederung der Arbeit**

Diese Arbeit ist wie folgt gegliedert. Die Grundlagen der Antennen-Arrays sowie der bildgebenden Radare sind in Kapitel 2 dargestellt. Ein Optimierungsverfahren sowie eine Synthesemethode zur Elementpositionierung in linearen minimal-redundanten MIMO-Arrays sind in Kapitel 4 dargestellt. Die Synthesemethode ist ihrerseits abgeleitet von dem Verfahren für lineare SIMO-Arrays. Darauf wird in Kapitel 3 eingegangen. In dem Kapitel sind ebenso das Konzept des Ko-Arrays sowie das Verfahren der Fensterung der Ko-Array-Antwort dargestellt. Die Problematik der störenden Kreuzprodukte im Radarspektrum von minimal-redundanten Antennen-Arrays ist hier auch besprochen.

Eine Synthesemethode zur Elementpositionierung in quadratischen minimal-redundanten MIMO-Arrays ist in Kapitel 5 dargestellt. In Kapitel 6 werden Mechanismen der Amplituden- und Phasenfehler in minimal-redundanten Arrays beschrieben sowie die Streuung der Hauptkeulenrichtung des Arrays infolge des additiven Rauschens analysiert. Kapitel 7 beschreibt den experimentellen Teil der Arbeit. Hierbei werden ein lineares und ein quadratisches minimal-redundantes MIMO-Array in einer Radaranwendung eingesetzt und untersucht.

## 2 Grundlagen der Antennen-Arrays

In diesem Kapitel sind die wichtigsten Grundlagen der Radare mit Antennen-Arrays gegeben. Neben der Radargleichung wird hier zuerst auf den Aufbau von Radarsystemen mit phasengesteuerten und Mehrkanal-Arrays eingegangen. Auch ein Verfahren zur Auflösung der Ziele nach ihrer Entfernung ist dargestellt. Dafür wird das Modell des Radars mit Frequenzmodulation besprochen. Das Modell ist auch wichtig für die Signalverarbeitung im experimentellen Teil der Arbeit. Als nächstes werden die Modelle der Array-Antwort von SIMO- und MIMO-Arrays dargestellt. Darauf basiert das Modell des Ko-Arrays. Mit Hilfe des Ko-Array-Modells wird in diesem Kapitel die Entstehung von störenden Kreuzprodukten analysiert.

### 2.1 Radargleichung

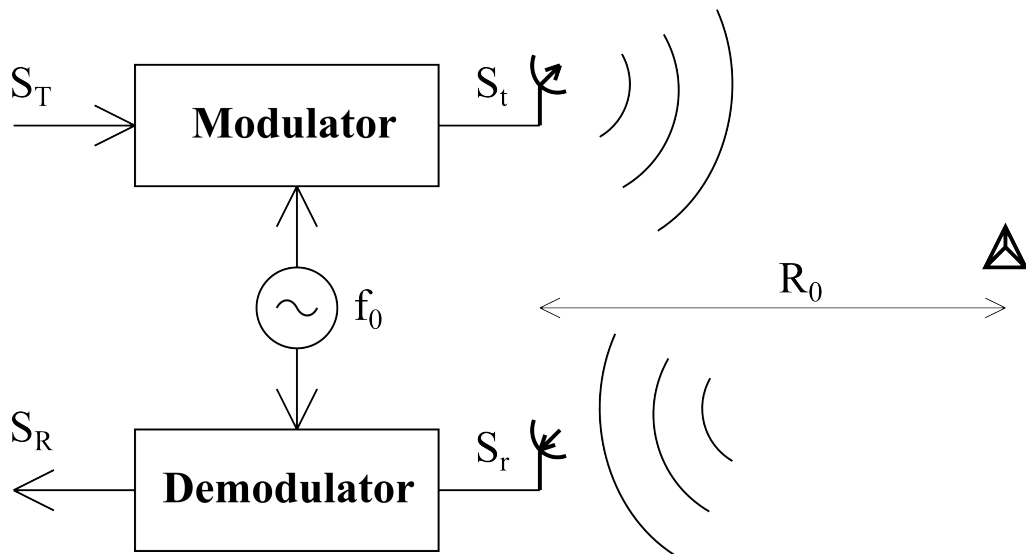
Bildgebende Radare sind Systeme für die Darstellung (Abbildung) der aus dem reflektierten Signal gewonnenen Zielintensität, die wiederum als Funktion des Ortes dargestellt werden kann. Die Helligkeit oder Farbkodierung eines Ziels im Radarbild ist in der Regel proportional zum Radarquerschnitt  $\sigma$  des Ziels. Vom Radarquerschnitt des Ziels hängt die empfangene Leistung  $P_r$  am Radareingang gemäß der Radargleichung

$$P_r = \frac{P_t G_{tr} G_{rec} \sigma \lambda^2}{(4\pi)^3 R_0^4} \quad (2.1)$$

ab, wobei  $P_t$  die Sendeleistung,  $G_{rec}$  und  $G_{tr}$  der Antennengewinn der Empfangs- bzw. der Sendeantenne,  $\lambda$  die Wellenlänge und  $R_0$  die Zielentfernung sind [9].

Um die Entfernungsinformation des Ziels zu gewinnen, werden in der Regel Verfahren zur Laufzeitmessung der reflektierten Welle angewandt. Bei diesen Verfahren werden modulierte Sendesignale verwendet, wobei grundsätzlich zwischen den Impuls- und Dauerstrichradarverfahren unterschieden wird [9].

Das Prinzip des Radars mit Dauerstrichmodulation ist vereinfacht in Bild 2.1 dargestellt. Mit Hilfe des Signalmodulators wird im Radar die Trägerfrequenz  $f_0 = \omega_0/(2\pi)$  mit dem Modulationssignal  $S_T$  moduliert. Das daraus resultierende Sendesignal  $S_t$  wird dann an die Sendeantenne geleitet. Ein



**Abbildung 2.1:** Prinzip der Entfernungsmessung mit frequenzmodulierten Signalen.

Teil  $S_r$  des vom Ziel reflektierten Signals wird von der Empfangsantenne aufgenommen und im Demodulator mit dem gleichen Trägersignal ins Basisband umgesetzt. Daraus entsteht das demodulierte Signal  $S_R$ , das die Information über die Zielentfernung enthält [9].

Die Betriebsart von Dauerstrichradaren mit Frequenzmodulation wird in *lineare* und *frequenzcodierte* eingeteilt, wobei im Verfahren mit Frequenzcodierung eine stufenförmige Frequenzmodulation am häufigsten verwendet wird. Da im experimentellen Teil dieser Arbeit ein Radarsystem mit der frequenzcodierten Modulation verwendet wird, wird das Modulationsverfahren hier näher betrachtet. Für einen breiteren Überblick über die Modulationsarten in Radaren wird auf [9] verwiesen.

## 2.2 Radare mit stufenförmiger Frequenzmodulation

Das Modulationssignal für die stufenförmige Frequenzmodulation kann wie folgt dargestellt werden:

$$S_T = \exp(j\Delta_\omega n_f t), \quad (2.2)$$

wobei  $\Delta_\omega$  der Frequenzschritt,  $t$  die Zeit und  $n_f = 1..N_f$  die ganzzahlige Frequenzvariable sind. Der Frequenzhub des modulierten Sendesignals beträgt entsprechend  $(N_f - 1)\Delta_\omega$ . Das hochfrequente Sendesignal am Ausgang des Modulators ergibt sich zu

$$S_t \propto \cos((\omega_0 + \Delta_\omega n_f)t). \quad (2.3)$$

Das Signal am Eingang des Demodulators

$$S_r \propto \sqrt{\sigma} \cos((\omega_0 + \Delta_\omega n_f)(t - \tau)) \quad (2.4)$$

beinhaltet die Information über den Radarquerschnitt  $\sigma$  sowie die Zielentfernung  $R_0 = c_0\tau/2$ , wobei  $c_0$  die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum (ggf. Wellengeschwindigkeit im Übertragungsmedium) und  $\tau$  die Zeitverzögerung zwischen dem gesendeten und dem empfangenen Signal sind.

Um die Information über die Zielentfernung zu gewinnen, wird zuerst das ins Basisband umgesetzte Empfangssignal

$$S_R \propto \sqrt{\sigma} \exp(j\Delta_\omega n_f(t - \tau) - j\tau\omega_0) \quad (2.5)$$

zum Modulationssignal (2.2) ins Verhältnis gesetzt. Daraus ergibt sich die sogenannte Zielantwort

$$S_{tar} = \frac{S_R}{S_T} \propto \sqrt{\sigma} \exp(-j\tau\Delta_\omega n_f - j\tau\omega_0). \quad (2.6)$$

Die Zielantwort ist somit eine komplexe Schwingung mit der Kreisfrequenz  $\omega_{tar} = \tau\Delta_\omega$ , die beispielsweise mit Hilfe der inversen diskreten Fourier-Transformation [10] bestimmt werden kann. Aus der Kreisfrequenz lässt sich wiederum die gesuchte Zielentfernung als  $R_0 = (c_0 \omega_{tar})/(2 \Delta_\omega)$  bestimmen. Der von der Trägerfrequenz abhängige Phasenbetrag  $j\tau\omega_0$  in (2.6) spielt für die Entfernungsbestimmung keine Rolle und wird erst für das in Unterkapitel 2.4 folgende Array-Modell wichtig.

Des Weiteren stellt die Fourier-Transformation der Zielantwort (2.6)

$$I(m_f) = \frac{1}{N_f} \sum_{n_f=1}^{N_f} S_{tar}(n_f) \exp(j2\pi(n_f - 1)m_f/N_f), \quad (2.7)$$

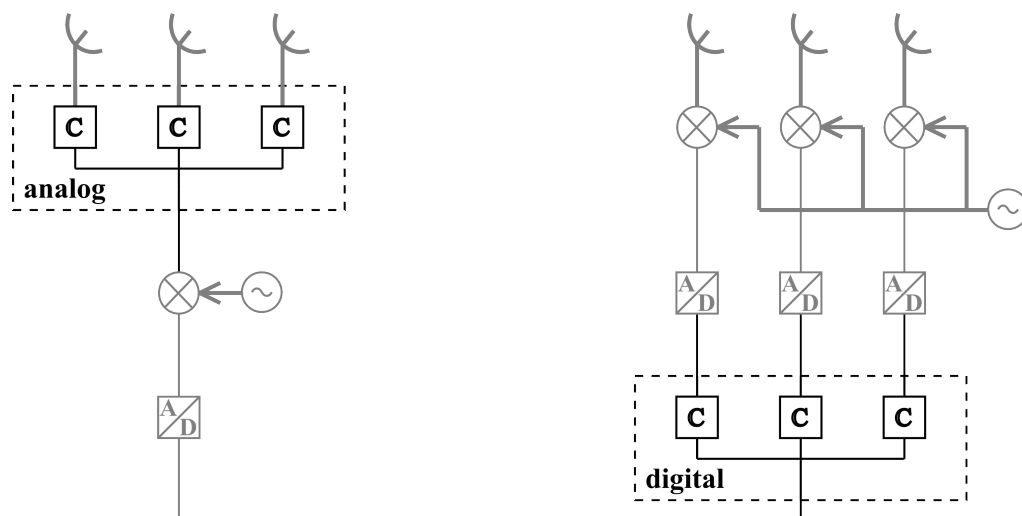
eine Schätzung des komplexen, diskreten Entfernungsspektrums dar, wobei  $m_f = 1..N_f$  die ganzzahlige Variable des Entfernungsbereichs darstellt. Der Eindeutigkeitsbereich des Spektrums beträgt  $R_{max} = (c_0 2\pi)/(2 \Delta_\omega)$ . Das Spektrum ist geteilt in  $N_f - 1$  gleichgroße Entfernungsabschnitte (*range bins*). Die Entfernungsauflösung des Radars ist gleich der Länge des Entfernungsabschnittes und beträgt:  $\Delta_R = (c_0 2\pi)/(2N_f \Delta_\omega)$ .

Weil die Amplitude des Empfangssignals mit dem Quadrat der Entfernung (s. (2.1)) sinkt, muss die Amplitude des Entfernungsspektrums im Radarbild mit dem Faktor  $R^2$  korrigiert werden, damit die Intensität von Radarzielen mit gleichem Radarquerschnitt aber unterschiedlicher Entfernung konstant dargestellt wird. Die Normierung des Spektrums kann ihrerseits zu einer nichtlinearen Verstärkung des Hintergrundrauschens führen, dessen Einfluss auf das Bild durch eine sinnvolle Beschränkung des Entfernungsbereichs vermindert werden kann.

Das Modell (2.6) der Zielantwort in Radaren mit stufenförmiger Frequenzmodulation ist ähnlich dem Modell eines linear frequenzmodulierten Dauerstrichradars [11]. Bei diesem verläuft die Zielantwort gemäß  $\exp(-j\tau\alpha t)$ , wobei  $\alpha$  die *Chirp-Rate* darstellt. Die Kreisfrequenz  $\tau\alpha$  der Zielantwort und somit die Zielentfernung lassen sich ebenso mit Hilfe der Spektralschätzung nach (2.12) bestimmen. Allgemein kann die Spektralschätzung (2.12) als ein räumliches Filter betrachtet werden, das die komplexe Zielantwort nach Entfernungsabschnitten auflöst. Um die Radarziele, die sich im gleichen Entfernungsabschnitt befinden und in unterschiedlichen Winkeln zum Array stehen, unterscheiden zu können, werden Array-Systeme mit Spektralschätzung im Winkelbereich eingesetzt.

## 2.3 Radarsysteme mit phasengesteuerten und Mehrkanal-Arrays

Die in dieser Arbeit betrachteten Radarsysteme mit Antennen-Arrays gehören zur Klasse kohärenter Radare. Die Arrays dieser Radar-Klasse können in zwei Hauptgruppen aufgeteilt werden: die Gruppe der phasengesteuerten Arrays und die der Mehrkanal-Arrays. Der schematische Aufbau der beiden Array-Varianten ist in Bild 2.2 dargestellt. Der grundlegende Unterschied zwischen den bei-



**Abbildung 2.2:** Prinzip der analogen (links) und der digitalen (rechts) Signalüberlagerung in phasengesteuerten bzw. Mehrkanal-Arrays.

den Array-Systemen liegt in der Art der Überlagerung der Signale der Array-Elemente, die analog bzw. digital erfolgt. Die für die Strahlschwenkung erforderliche komplexe Gewichtung (in Bild 2.2 mit C gekennzeichnet) der Array-Signale erfolgt im phasengesteuerten Array-System im Trägerfrequenzband und im Mehrkanal-Array-System im Basisband.

Das optimale Ausnutzen der Vorteile des einen oder des anderen Array-Systems kann je nach Radar-anwendung sowie Systemanforderungen erfolgen. So ist zum Beispiel zurzeit noch der Kostenaufwand für ein Millimeterwellenradarsystem mit einem phasengesteuerten Array niedriger als für ein herkömmliches Mehrkanal-System mit diskret aufgebauter Kanalelektronik. Andererseits gewähren die Mehrkanal-Arrays für beispielsweise die digitale Strahlformung in modernen Radar-anwendungen mit Zielverfolgung (*tracking*) den dafür erforderlichen Freiheitsgrad [12]. Interessant sind auch Radar-anwendungen mit gemischter Architektur, die die Vorteile der beiden Array-Systeme ausnutzen [13].

Die Implementierung von den in dieser Arbeit behandelten bildgebenden Radarverfahren ist mit den beiden Array-Systemen möglich. Während in phasengesteuerten Arrays erst das komplexe Winkelspektrum aufgenommen und dann die Entfernung der Ziele bestimmt wird, ist die Reihenfolge der Spektralberechnung im Mehrkanal-Array ohne Bedeutung – oft wird das gesuchte Winkel-Entfernung-Spektrum mit Hilfe der zweidimensionalen (bzw. dreidimensionalen in Radaren mit planaren Arrays) Fourier-Transformation gewonnen. Für die Array-Modellierung werden in dieser Arbeit Mehrkanal-Arrays wegen der etwas einheitlicheren Beschreibung bevorzugt.

### 2.4 SIMO-Arrays

Das in dieser Arbeit dargestellte SIMO-Array-Modell gilt für kohärente Radarsysteme. Des Weiteren wird angenommen, dass einzelne Ziele sich im Fernfeld des Arrays befinden und somit als Punktziele betrachtet werden können. Die Array-Antwort wird als schmalbandig betrachtet und der Abstand zwischen den uniform verteilten Array-Elementen wird auf  $\lambda/2$  gesetzt.

Ein verallgemeinertes Mehrzielszenario mit einem linearen SIMO-Array ist in Bild 2.3 dargestellt. Das Sendeelement (nicht im Bild dargestellt) befindet sich im Koordinatenursprung, die Empfangselemente sind auf der  $x$ -Achse uniform verteilt. Die Array-Antwort  $i^{(t)}(x)$  an der Stelle  $x$  eines Array-Elements auf das  $t$ -te Einzelziel mit den Parametern  $\sigma_t$  für den Radarquerschnitt und  $\varphi_t$  für den Richtungswinkel bezüglich der Array-Achse entspricht

$$i^{(t)}(x) \propto \sqrt{\sigma_t} \exp(-j\tau_t \omega_0), \quad (2.8)$$

wobei  $\tau_t = -x \cos(\varphi_t)/c_0$  den winkelabhängigen Teil der Signalverzögerung (vgl. (2.6)) zwischen dem gesendeten und dem empfangenen Signal darstellt. Darauf basierend ergibt sich die Antwort des Arrays mit  $\lambda/2$ -Abstand zwischen den Elementen zu:

$$i^{(t)}[n] \propto \sqrt{\sigma_t} \exp(j\pi \cos(\varphi_t)n), \quad (2.9)$$

wobei  $n$  durch die Substitution  $x = n\lambda/2$  gewonnen wird.

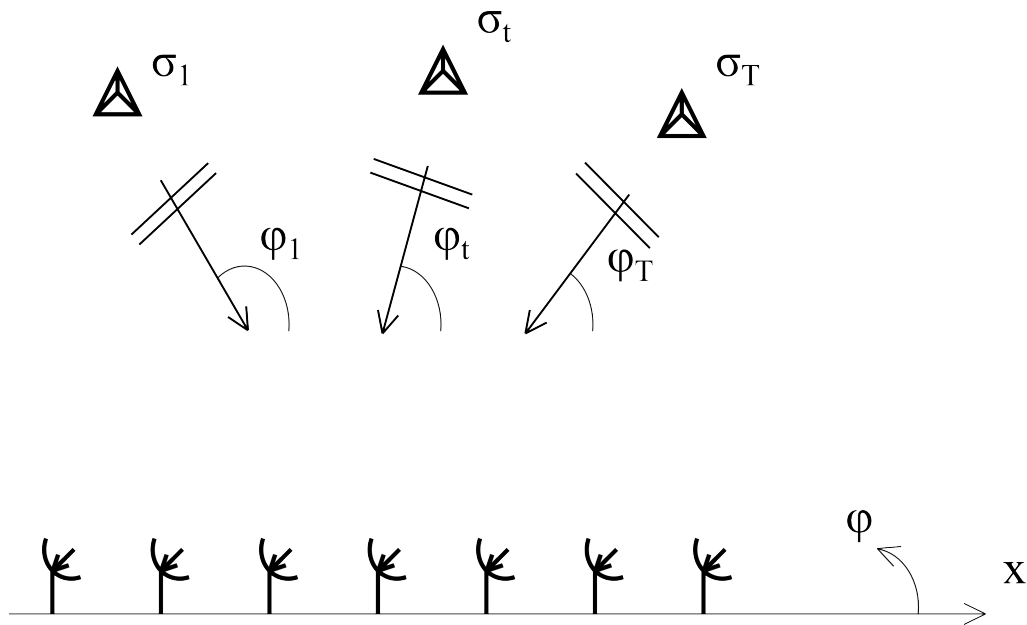


Abbildung 2.3: Mehrzielszenario mit linearem SIMO-Array.

Das verallgemeinerte Modell der Antwort des SIMO-Arrays kann nun wie folgt dargestellt werden:

$$i[n] = \sum_{t=1}^T A_t \exp(j(\omega_t n + \phi_t)), \quad (2.10)$$

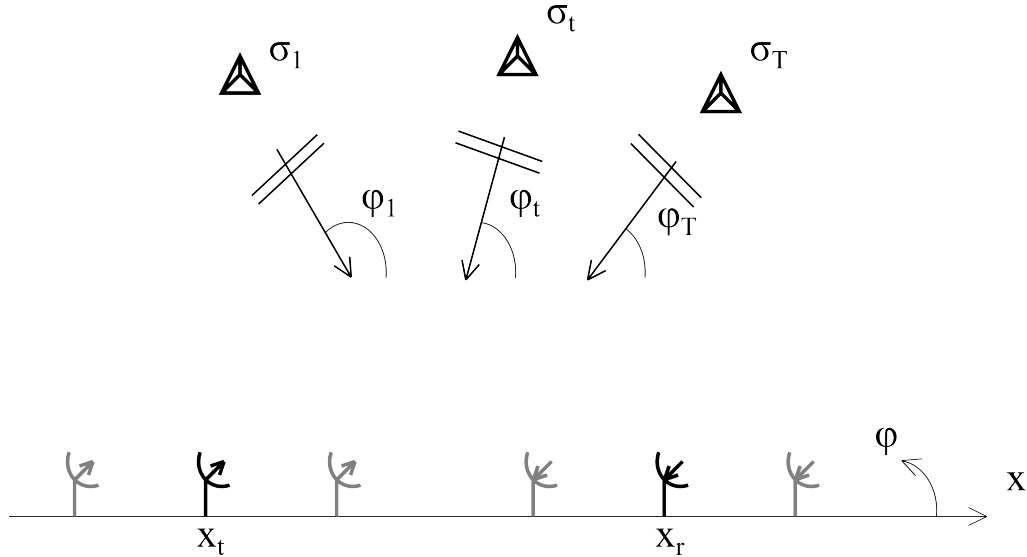
wobei das Summenzeichen die Überlagerung von insgesamt  $T$  Zielantworten darstellt. Die Array-Antwort ist somit eine Komposition von mehreren räumlichen Wellen: Jede Welle wird durch die Amplitude  $A_t \propto \sqrt{\sigma_t}$ , die dem Radarquerschnitt des Ziels entspricht, sowie die Ortsfrequenz  $\omega_t = \pi \cos(\varphi_t)$ , die ihrerseits von der Winkelposition des Ziels abhängt, beschrieben. Der Phasenfaktor  $\phi_t$  dient der Vervollständigung des Array-Modells und ist ebenfalls ein Zielparameter. Der winkelunabhängige Phasenfaktor kann weitere Zielinformation wie beispielsweise die Doppler-Frequenz oder den Polarisationswinkel beinhalten. Weil eine weitgehende Filterung der Ziele nicht der Gegenstand dieser Arbeit ist, wird dieser Faktor über die gesamte Array-Länge als konstant angenommen.

Insgesamt ist das aufgestellte Array-Modell (2.10) den gängigen Array-Modellen aus [1, 13, 14] ähnlich. Des Weiteren lässt sich das Modell auf ausgedünnte Arrays leicht übertragen: Die Array-Antwort auf den unbesetzten Stellen des Arrays wird mit Nullen aufgefüllt.

## 2.5 MIMO-Arrays

Das im vorherigen Abschnitt dargestellte Modell (2.10) des linearen SIMO-Arrays wird nun auf den Fall der MIMO-Arrays erweitert. Dabei wird angenommen, dass die Elemente des Sende-Arrays im

sogenannten Zeit-Multiplex also zeitlich nacheinander betrieben werden. Das für Verständnis des Modells hilfreiche Mehrzielszenario ist in Bild 2.4 dargestellt.



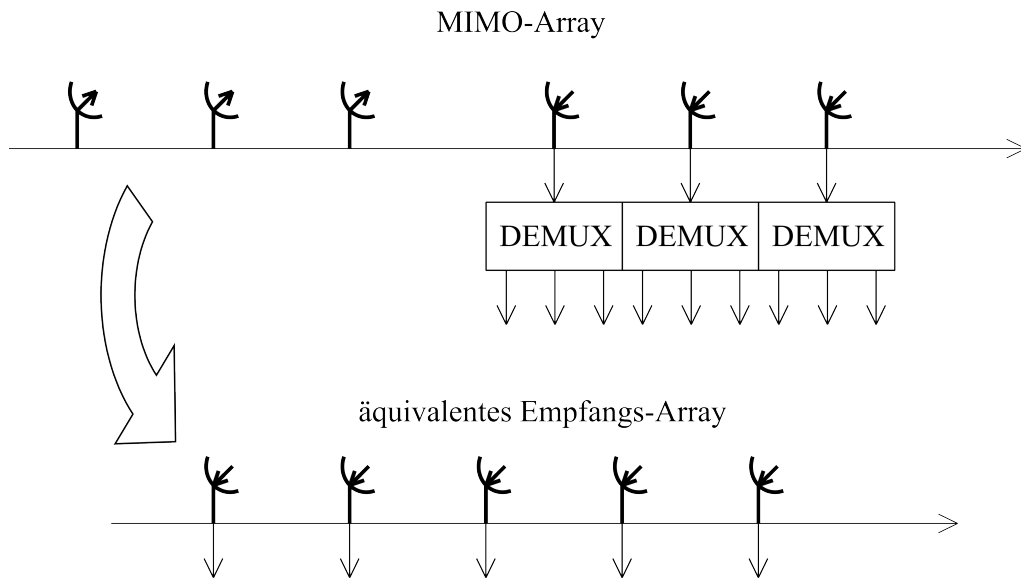
**Abbildung 2.4:** Mehrzielszenario mit linearem MIMO-Array.

Die Signalverzögerung  $\tau_{tr} = -(x_r + x_t) \cos(\varphi_t)/c_o$  zwischen dem von der Position  $n_t$  aus gesendeten und dem an der Stelle  $n_r$  empfangenen Signal geht in die Antwort des MIMO-Arrays mit

$$i[n_t + n_r] = \sum_{t=1}^T A_t \exp(j(\omega_t(n_t + n_r) + \phi_t)) \quad (2.11)$$

ein. Wie bereits erwähnt, gilt das Array-Modell (2.11) für MIMO-Systeme mit orthogonalen Sendesignalen, die im Allgemeinen in Zeit- und Frequenz-Multiplex basierte aufgeteilt werden können. Bei den Multiplexverfahren kann die Zuordnung von Empfangssignalen seitens des Empfangs-Arrays in einem Demultiplexer oder in einem Optimalfilter (*matched filter*) erfolgen [15]. Die Empfangssignale an den Ausgängen des Filters werden den Elementen an den Stellen  $\tilde{n} = n_t + n_r$  eines virtuellen Arrays zugeordnet, wie es in Bild 2.5 dargestellt ist. Das Array wird auch als äquivalentes Empfangs-Array oder Faltungs-Array bezeichnet [1, 15].

Die Array-Antwort des äquivalenten Empfangs-Arrays ist durch Gleichung (2.11) gegeben. Die Generierung der Elementpositionen des Arrays kann durch die mathematische Faltung der Konfigurationen der Sende- und Empfangsuntergruppen erfolgen. Dafür werden die Positionen der MIMO-Elemente in vektorieller Schreibweise dargestellt. Dabei werden Vektoreinträge mit Einsen für die von den Elementen besetzten Positionen eines beispielsweise ausgedünnten Arrays beschrieben und die Vektoreinträge mit Nullen beschreiben die unbesetzten Elementpositionen im Array.



**Abbildung 2.5:** Vereinfachte Darstellung des äquivalenten Empfangs-Arrays.

Eine weitere Methode, die Konfiguration eines äquivalenten Arrays zu berechnen, basiert auf einer Potenzreihendarstellung der Array-Elemente. Die beiden Berechnungsverfahren werden in Kapitel 4 ausführlicher betrachtet.

## 2.6 Spektralschätzung der Array-Antwort

Die Spektralschätzung  $\hat{S}[m]$  der Array-Antwort eines SIMO- (s. (2.10)) oder eines MIMO-Arrays (s. (2.11)) wird mit Hilfe der diskreten Fourier-Transformation  $\mathcal{F}$  gewonnen:

$$\hat{S}[m] = \mathcal{F} \{i[n]\} = \sum_{n=1}^N i[n] \exp(-j2\pi(n-1)m/N), \quad (2.12)$$

wobei  $m$  die ganzzahlige Variable der Ortsfrequenz der Winkel­domäne und  $N$  die Anzahl der Elementpositionen im Array sind [10, 16, 17]. Die Anzahl der Elementpositionen ist nicht zu verwechseln mit der Anzahl der Elemente eines ausgedünnten Arrays, denn die Antwort an den unbesetzten Stellen des Arrays ist mit Nullen aufgefüllt und ist deshalb genau so lang wie die des uniformen Arrays.

Weil das Winkelspektrum (2.12) komplex ist, aber lediglich die Intensität bzw. die reflektierte Leistung der Ziele von Interesse ist, wird in den bildgebenden Radarverfahren eine Schätzung des Leistungsdichtespektrums  $\hat{P}_m$  durchgeführt:

$$\hat{P}[m] = \frac{1}{N} |\hat{S}[m]|^2 = \frac{1}{N} |\mathcal{F} \{i[n]\}|^2. \quad (2.13)$$

Der Fehler zwischen dem wahren und dem geschätzten Spektrum hängt von der Anzahl der Array-Elemente ab: Je größer die Elementanzahl, also je länger das Array, desto kleiner ist der Fehler. Darüber hinaus konvergiert der Fehler gegen null, wenn die Elementanzahl unendlich groß ist [6].

Im Radarszenario mit einem einzigen Ziel, das sich in der Hauptstrahlrichtung eines Arrays befindet, entspricht die Form des geschätzten Spektrums  $\hat{P}_m$  dem Richtfaktor des Arrays. Die wichtigsten Eigenschaften der Array-Direktivität stellen die Halbwertsbreite der Hauptkeule und die höchste Nebenkeule bzw. die Nebenkeulendämpfung dar. Die höchste Nebenkeule definiert den Dynamikbereich des Arrays, dessen Größe in Radaranwendungen mit Mehrzielsituationen eine wichtige Rolle spielt. Die Halbwertsbreite der Hauptkeule ist umgekehrt proportional zu der Array-Länge und definiert das Auflösungsvermögen des Arrays im Winkelbereich. Die Array-Auflösung wird in dieser Arbeit als der Winkel bzw. der Abstand – in der klassischen Bildverarbeitung wird die Bildauflösung meistens als Anzahl an Pixeln pro Länge definiert – zwischen zwei Zielen verstanden, bei dem die Ziele noch als getrennt unterschieden werden können. Speziell für Antennen-Arrays bedeutet ein längeres Array eine feinere Array-Auflösung.

### Fensterung der Array-Antwort

Die Höhe der höchsten Nebenkeule eines uniformen Arrays ist von der Elementanzahl nahezu unabhängig [6]. Eine Erhöhung der Nebenkeulendämpfung kann durch Gewichtung der Array-Antwort mit einer geeigneten Fensterfunktion erreicht werden. Am weitesten verbreitet sind die in Tabelle 2.1 aufgelisteten Fensterfunktionen. Diese sind in der Tabelle nach ihren auf  $2\pi/N$  normierten Halbwertsbreiten gereiht. Es ist zu erkennen, dass mit der fallenden Auflösung die Nebenkeulendämpfung sinkt.

Bezeichnung	Halbwertsbreite, $2\pi/N$	Nebenkeulendämpfung, dB
Rechteckförmig	0.89	13
Tukey ( $\alpha = 0.25$ )	1.01	14
Riesz	1.16	21
Hanning ( $\alpha = 1$ )	1.20	23
Dreieckförmig	1.28	27
Hamming	1.30	43
Gauß ( $\alpha = 0.25$ )	1.33	42
Dolph-Chebyshev ( $\alpha = 2.5$ )	1.33	50

**Tabelle 2.1:** Am weitesten verbreitete Fensterfunktionen sortiert nach ihren Halbwertsbreiten. Durch Einstellung des Fensterparameters  $\alpha$  kann man die Halbwertsbreite etwas beeinflussen [16].

## 2.7 Modell des Ko-Arrays

Die inverse Fourier-Transformierte  $\mathcal{F}^{-1} \{ \hat{P}[m] \}$  des Leistungsdichtespektrums (2.13) wird als geschätzte Autokorrelationsfolge bezeichnet, die ihrerseits mit Hilfe der Fourier-Algebra als Autokorrelation der Array-Antwort (2.10) dargestellt werden kann [6]:

$$\hat{R}[n] = \frac{1}{N} i^*[-n] * i[n] = \frac{1}{N} \sum_{l=-\infty}^{\infty} i^*[l] i[l+n], \quad (2.14)$$

wobei das hochgestellte  $*$  das Konjugieren, das mittelgestellte  $*$  den Faltungsoperator, und  $l$  die Substitutionsvariable darstellen. Die räumliche Verteilung der Autokorrelationsfolge wird als Korrelations-Array (kurz: Ko-Array) bezeichnet [18].

Im Radarszenario mit einem einzigen Ziel, das sich in der Hauptstrahlrichtung eines uniformen Arrays aus  $N$  Elementen befindet, wird die normierte Antwort des Ko-Arrays durch die Dreiecksfunktion (Bartlett-Fenster genannt) beschrieben:

$$w[n] = \begin{cases} \frac{N-|n|}{N}, & |n| < N \\ 0, & |n| \geq N \end{cases} \quad (2.15)$$

Eine Gewichtung des Ko-Arrays statt der Antwort des physikalischen Arrays ist möglich und kann beispielsweise mit den herkömmlichen Fensterfunktionen (s. Tab. 2.1) erfolgen. Dadurch können die Array-Direktivität bzw. die Nebenkeulendämpfung sowie die Halbwertsbreite der Hauptkeule variiert werden. Durch die Fensterung der Ko-Array-Antwort erhofft man sich also eine Reduzierung des Fehlers zwischen dem wahren und dem geschätzten Spektrum [6].

### 2.7.1 Kreuzprodukte

Weil die Autokorrelationsfunktion (2.14) eine nichtlineare Funktion ist, entstehen bei Mehrzielsituationen in der Antwort eines Ko-Arrays sogenannte Kreuzprodukte. Im Unterschied zu den Eigenprodukten der Ziele, sind die Kreuzprodukte eine störende Erscheinung, die eine korrekte Abschätzung der Leistung und Richtung der Zielsignale verhindert.

Die Entstehung von Kreuzprodukten am Beispiel eines uniformen SIMO-Arrays mit  $N$  Elementen kann man bereits im Radarszenario mit zwei Zielen beobachten. Dafür wird zuerst die Ant-

wort (2.10) des SIMO-Arrays an den Stellen der einzelnen Elementen separat dargestellt:

$$\begin{aligned}
 i[1] &= \underline{A}_1 \exp(j\omega_1) + \underline{A}_2 \exp(j\omega_2), \\
 i[2] &= \underline{A}_1 \exp(j2\omega_1) + \underline{A}_2 \exp(j2\omega_2), \\
 &\dots \\
 i[N-1] &= \underline{A}_1 \exp(j(N-1)\omega_1) + \underline{A}_2 \exp(j(N-1)\omega_2), \\
 i[N] &= \underline{A}_1 \exp(jN\omega_1) + \underline{A}_2 \exp(jN\omega_2),
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

wobei  $\omega_1$  und  $\omega_2$  die winkelabhängigen Ortsfrequenzen des ersten bzw. des zweiten Ziels, sowie  $\underline{A}_1 = A_1 \exp(j\phi_1)$ ,  $\underline{A}_2 = A_2 \exp(j\phi_2)$  die als Phasoren dargestellten Phasenkonstanten der beiden Ziele sind.

Nach (2.14) ergibt sich die Ko-Array-Antwort zu:

$$\begin{aligned}
 \hat{R}[-(N-1)] &= \frac{1}{N} (|\underline{A}_1|^2 \exp(-j(N-1)\omega_1) + |\underline{A}_2|^2 \exp(-j(N-1)\omega_2) + \\
 &\quad \underline{A}_1^* \underline{A}_2 \exp(-j(N\omega_1 - \omega_2)) + \underline{A}_1 \underline{A}_2^* \exp(-j(N\omega_2 - \omega_1))), \\
 \hat{R}[-(N-2)] &= \frac{1}{N} (2|\underline{A}_1|^2 \exp(-j(N-2)\omega_1) + 2|\underline{A}_2|^2 \exp(-j(N-2)\omega_2) + \\
 &\quad \underline{A}_1^* \underline{A}_2 (\exp(-j(N\omega_1 - 2\omega_2)) + \exp(-j((N-1)\omega_1 - \omega_2))) + \\
 &\quad \underline{A}_1 \underline{A}_2^* (\exp(-j(N\omega_2 - 2\omega_1)) + \exp(-j((N-1)\omega_2 - \omega_1)))), \\
 &\dots \\
 \hat{R}[n] &= \frac{1}{N} ((N-|n|)|\underline{A}_1|^2 \exp(jn\omega_1) + (N-|n|)|\underline{A}_2|^2 \exp(jn\omega_2) + \\
 &\quad \underline{A}_1 \underline{A}_2^* \sum_{l=n+1}^N \exp(j(l\omega_1 - (l-n)\omega_2)) + \underline{A}_1^* \underline{A}_2 \sum_{l=n+1}^N \exp(j(l\omega_2 - (l-n)\omega_1))) \\
 &\dots \\
 \hat{R}[N-2] &= \frac{1}{N} (2|\underline{A}_1|^2 \exp(j(N-2)\omega_1) + 2|\underline{A}_2|^2 \exp(j(N-2)\omega_2) + \\
 &\quad \underline{A}_1 \underline{A}_2^* (\exp(j(N\omega_1 - 2\omega_2)) + \exp(j((N-1)\omega_1 - \omega_2))) + \\
 &\quad \underline{A}_1^* \underline{A}_2 (\exp(j(N\omega_2 - 2\omega_1)) + \exp(j((N-1)\omega_2 - \omega_1)))), \\
 \hat{R}[N-1] &= \frac{1}{N} (|\underline{A}_1|^2 \exp(j(N-1)\omega_1) + |\underline{A}_2|^2 \exp(j(N-1)\omega_2) + \\
 &\quad \underline{A}_1 \underline{A}_2^* \exp(j(N\omega_1 - \omega_2)) + \underline{A}_1^* \underline{A}_2 \exp(j(N\omega_2 - \omega_1))).
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Die Gewichtung der Eigenprodukte  $|\underline{A}_1|^2$  und  $|\underline{A}_2|^2$  der beiden Zielsignale ist im Ko-Array dreieckförmig verteilt (vgl. (2.15)). Die Phasenverschiebungen  $\exp(j\omega_1)$  und  $\exp(j\omega_2)$  zwischen den Eigenprodukten an benachbarten Ausgängen des Ko-Arrays ergeben sich aus der Ortsfrequenz des ersten

bzw. des zweiten Ziels. Die restlichen Summanden in der Ko-Array-Antwort stellen die Kreuzprodukte dar.

Das Verhalten der Kreuzprodukte ist sowohl von den Amplituden als auch von den Ortsfrequenzen (also von den Winkelpositionen) der beiden Ziele abhängig. Es ist also stochastischer Natur. Wenn die Array-Antwort für jedes einzelne Ziel ein komplexer Gaußscher Prozess ist, sind die Kreuzprodukte im Ko-Array mittelwertfrei. Das Verhältnis der Eigenprodukte zu den Kreuzprodukten in der Ko-Array-Antwort ist daher an der Stelle  $n = 0$  am größten:

$$\widehat{R}[0] = |\underline{A}_1|^2 + |\underline{A}_2|^2 + \frac{1}{N} \underline{A}_1 \underline{A}_2^* \sum_{l=1}^N \exp(j(l\omega_1 - l\omega_2)) + \frac{1}{N} \underline{A}_1^* \underline{A}_2 \sum_{l=1}^N \exp(j(l\omega_2 - l\omega_1)). \quad (2.18)$$

Das Verhältnis wird kleiner zu den beiden Ko-Array-Enden hin. Darüber hinaus wird das Verhältnis der Eigenprodukte zu den Kreuzprodukten größer, wenn die Elementanzahl des uniformen Arrays steigt. Im Grenzfall eines unendlich langen uniformen Arrays stellt die Array-Direktivität eine Impulsfunktion dar. Im Leistungsdichtespektrum der Array-Antwort entspricht demzufolge die Leistungsverteilung jedes Einzelziels einer Singularität. In diesem Fall verschwinden die Kreuzprodukte.

Eine numerische Erfassung des Kreuzproduktanteils in der Ko-Array-Antwort von ausgedünnten Arrays in Radarszenarien mit mehr als zwei Zielen wird in Abschnitt 3.3 vorgestellt.

# 3 Lineare SIMO-Arrays mit minimaler Redundanz

In diesem Kapitel wird zuerst die Bedingung für Konfigurationen von minimal-redundanten SIMO-Arrays aufgestellt und als Nächstes die Problematik der Methoden zum Auffinden von solchen Konfigurationen erläutert. Weiterhin wird in diesem Kapitel auf ein Syntheseverfahren für minimal-redundante SIMO-Arrays eingegangen, das im folgenden Kapitel 4 für die Generierung von minimal-redundanten MIMO-Konfigurationen erweitert wird. Weiter wird das Verfahren der Ko-Array-Gewichtung zur Nebenkeulenreduzierung in Radaren mit minimal-redundanten Antennen-Arrays diskutiert.

## 3.1 Ausgedünnte Arrays

Die minimal-redundanten Antennen-Arrays gehören zur Klasse der ausgedünnten Arrays (s. Bild 1.1). Die Ausdünnungsrate  $TR$  (*thinning rate*) eines ausgedünnten Arrays wird in dieser Arbeit wie folgt definiert:

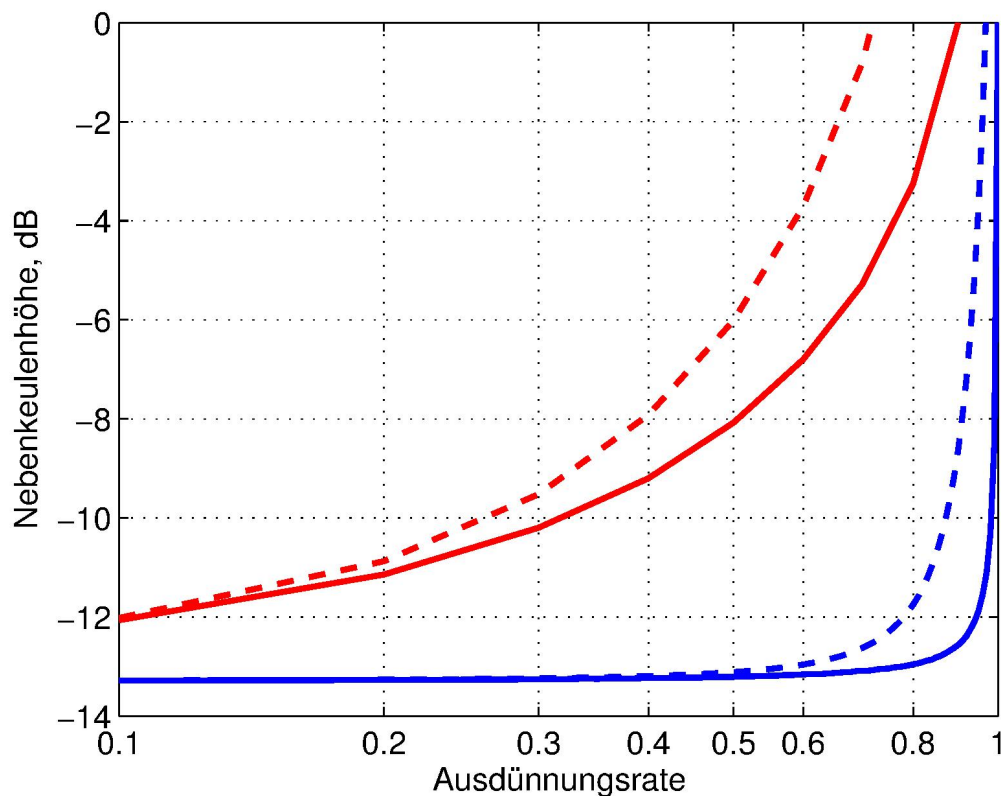
$$TR = \frac{M - N}{M}, \quad (3.1)$$

wobei  $M$  die Elementanzahl eines uniformen Arrays gleicher Länge wie das ausgedünnte Array und  $N$  die Elementanzahl des ausgedünnten Arrays darstellen. Die Ausdünnungsrate von ausgedünnten Arrays ist stets kleiner eins und kann in Prozent angegeben werden.

Die Ausdünnung (also das Auslassen von  $M - N$  Elementen) des uniformen Arrays verursacht eine entsprechende Reduzierung des Array-Gewinns sowie eine Minderung der Nebenkeulendämpfung. Die Nebenkeulendämpfung (auch Nebenkeulenniveau genannt) wird in dieser Arbeit als Verhältnis der Höhen der höchsten Nebenkeule und der Hauptkeule des Arrays angegeben. Die Erhöhung der Nebenkeulen aufgrund der Array-Ausdünnung lässt sich statistisch durch die mittlere Nebenkeulendämpfung beziffern, die als Mittelwert der Nebenkeulendämpfungen des ausgedünnten Arrays mit  $N$  vorhandenen und  $M - N$  fehlenden Elementen berechnet wird [4]. Für relativ kleine Ausdünnungsraten und/oder relativ lange Arrays kann die mittlere Nebenkeulendämpfung durch

$$SLL_{th} = SLL_{un} + \frac{M - N}{(N)^2} \quad (3.2)$$

abgeschätzt werden, wobei  $SLL_{un}$  die Nebenkeulendämpfung des uniformen Arrays mit  $M$  Elementen darstellt [4]. Die Abschätzung der mittleren Nebenkeulendämpfung wurde durch eine Simulation mit mehreren tausenden Durchläufen überprüft. Bei jedem Durchlauf der Simulation wurden ausgedünnte Arrays generiert, deren Elemente über die Array-Länge gleichmäßig verteilt sind. Wie in Bild 3.1 zu erkennen ist, stimmt die theoretische Minderung der Nebenkeulendämpfung mit dem



**Abbildung 3.1:** Abschätzung (- -) und simulierter Wert (-) der mittleren Nebenkeulendämpfung von ausgedünnten Arrays. Die Arrays basieren auf uniformen Arrays mit  $M = 10$  (rot) und  $M = 1000$  (blau) Elementen.

Simulationenwert für Ausdünnungsraten von bis zu 50% gut überein. Für höhere Raten kann der Schätzwert (3.2) als die untere Schranke für die Nebenkeulendämpfung von ausgedünnten Arrays mit gleichverteilten Elementen betrachtet werden.

Aufgrund der erhöhten Nebenkeulen in ausgedünnten Arrays benötigt man Signalverarbeitungsmethoden, um diesem für Radare störenden Effekt entgegenzuwirken. Eine Gewichtung der Array-Antwort mit herkömmlichen Fensterfunktionen (s. 2.6) zum Zweck der Nebenkeulenreduzierung ist fraglich, da die Fensterfunktionen für uniforme Arrays ausgelegt sind und ausgedünnte Arrays diese Bedingung eben nicht erfüllen. Zumindest im Fall der rechteckförmig gewichteten Array-Antwort ist eine Minderung der Nebenkeulendämpfung gemäß (3.2) zu erwarten, wenn das Array ausgedünnt

ist. Eine Optimierung der Gewichtung eines ausgedünnten Arrays kann auch in Frage kommen. Die Gewichtungsoptimierung ist aber für jede einzelne Array-Konfiguration auszuführen, wobei die Erfolgchancen der Optimierung mit zunehmender Ausdünnungsrate geringer werden [19–21].

Eine weitere Möglichkeit, die Nebenkeulendämpfung eines ausgedünnten Arrays zu erhöhen, besteht in der Fensterung der Ko-Array-Antwort (2.14) statt des physikalischen Arrays. Dafür muss die Elementverteilung des Ko-Arrays uniform sein, so wie bei ausgedünnten Arrays mit minimaler Redundanz.

Mit dem Begriff Array-Redundanz ist die Anzahl der Array-Freiheitsgrade verbunden. Die maximal mögliche Anzahl der Freiheitsgrade  $DOF$  (*degrees of freedom*) eines SIMO-Arrays mit  $N$  Elementen ist gleich der Anzahl der vorhandenen Elementpaare und beträgt [3]:

$$DOF_{simo} = \frac{N(N-1)}{2}. \quad (3.3)$$

Die tatsächliche Anzahl der Freiheitsgrade eines SIMO-Arrays ergibt sich aus der Anzahl der Elementpaare mit unterschiedlichen Längen. Als Paarlänge ist hier der Abstand zwischen den beiden Elementen des Pairs gemeint. Dieser Abstand (*correlation lag*) definiert im Ko-Array (2.14) die Position der Korrelationsantwort des Elementpaares [3]. Man spricht von Array-Redundanz, wenn zwei oder mehr Elementpaare des Arrays die gleiche Paarlänge aufweisen. Demnach sind beispielsweise alle uniformen Arrays mit  $N > 2$  redundant, da diese insgesamt  $N - 1$  Paare der normierten Paarlänge 1 enthalten. Nicht-redundante Arrays sind dagegen Arrays, wo die Längen aller möglichen Elementpaare einmalig (unterschiedlich) vorkommen und die Menge der normierten Elementabstände uniform  $(1, 2, 3, \dots, N(N-1)/2)$  ist. Solche Arrays werden im nächsten Abschnitt vorgestellt. Darüber hinaus existieren ausgedünnte Arrays, die minimal-redundant sind.

## 3.2 Nicht-redundante und minimal-redundante Arrays

Nicht-redundante und minimal-redundante Empfangs-Arrays wurden erstmals von Moffet in den 1960-er untersucht [3]. Die Arrays wurden zuerst in der Radioastronomie und dann in Radaren eingesetzt. Die drei nicht-redundanten Array-Konfigurationen aus [3] mit 2, 3 und 4 Elementen sind in Tab. 3.1 dargestellt. Bei der Darstellung der Array-Konfigurationen sind die Array-Elemente als Punkte gekennzeichnet. Die auf die Gittergröße (hier  $\lambda/2$ ) normierten Abstände zwischen benachbarten Array-Elementen sind als ganze Zahlen dargestellt. Die Sendeelemente der SIMO-Arrays sind zur Vereinfachung nicht dargestellt. Zusätzlich sind in der Tabelle die entsprechenden Array- sowie die Ko-Array-Gewichtungen zu sehen.

**Tabelle 3.1:** Konfigurationen von nicht-redundanten SIMO-Arrays. Legende s. Text.

N	Array-Konfiguration	Array-Gewichtung	Ko-Array-Gewichtung
1	·	[1]	[1]
2	· 1 ·	[1 1]	[1 2 1]
3	· 1 · 2 ·	[1 1 0 1]	[1 1 1 3 1 1 1]
4	· 1 · 3 · 2 ·	[1 1 0 0 1 0 1]	[1 1 1 1 1 1 4 1 1 1 1 1 1]

Die Gewichtungen können mit der Autokorrelationsfunktion nach (2.14) berechnet werden, wobei statt der Array-Antwort die Folge (Vektor)  $I_{arr}[n]$  aus Einsen und Nullen eingesetzt wird, die die vorhandenen bzw. fehlenden Elemente des physikalischen Arrays repräsentieren (vgl. Tab. 3.1). Die Ko-Array-Gewichtung  $I_{co}[n]$  ist mit der Elementverteilung  $I_{arr}[n]$  des SIMO-Arrays dann wie folgt verknüpft (vgl. (2.14)):

$$I_{co}[n] = I_{arr}[-n] * I_{arr}[n]. \quad (3.4)$$

Dabei wird das Konjugieren der gespiegelten Folge im Unterschied zu (2.14) ausgelassen, weil die Folge per Definition rein reell ist. Ebenfalls ist der Normierungsfaktor  $1/N$  ausgelassen worden. Des Weiteren werden hier Array-Konfigurationen sowie Array-Gewichtungen mit großgeschriebenem  $I$  dargestellt, um diese von der Array-Antwort  $i[n]$  zu unterscheiden.

Das Ergebnis der Autokorrelation stellt die ursprüngliche Gewichtung des Ko-Arrays dar. Aus der Ko-Array-Gewichtung lassen sich die relativen Positionen der Ko-Array-Elemente finden: Vektoreinträge gleich null bedeuten das Fehlen eines Ko-Array-Elementes, Vektoreinträge gleich oder größer eins bedeuten das Vorhandensein des Elementes.

Dass die in Tab. 3.1 dargestellten Arrays nicht-redundant sind, lässt sich durch Betrachtung der Anzahl der realisierten Freiheitsgrade beweisen. Denn für die Arrays mit 2, 3 und 4 Elementen stimmt die Anzahl der Paare mit einmaligen Elementabständen mit (3.3) überein. Die Ko-Array-Gewichtungen der nicht-redundanten Arrays weisen keine Lücken auf – sind also uniform – und sind überall gleich eins abgesehen von der Array-Mitte. Aus (3.3) folgt für die normierte Länge des Ko-Arrays eines nicht-redundanten Arrays:

$$L_{co} = N(N - 1). \quad (3.5)$$

Wie in Tab. 3.1 zu sehen, stimmen die Ko-Array-Längen mit (3.5) überein. Für alle kürzeren Ko-Arrays als in (3.5) gilt, dass ihre zugehörigen SIMO-Arrays redundant sind.

Die Suche nach nicht-redundanten Array-Konfigurationen ist durch die Tatsache erschwert, dass es keine geschlossene Lösung für das inverse Problem existiert, das wie folgt definiert werden kann: Finde eine Array-Konfiguration mit  $N$  Elementen, deren Ko-Array die Länge  $N(N - 1)$  (s. (3.5)) aufweist. Das Ko-Array kann dabei als der Vektor aus Einsen definiert werden, wobei das mittlere Element mit  $N$  gewichtet ist. Für das Auffinden der Array-Konfiguration(en) muss eine Inverse zur Faltungsoperation in (3.4) gefunden werden. Dies ist allerdings auf analytischem Weg nicht möglich, wie die Fourier-Transformierte von (3.4) zeigt:

$$F_{co}[m] = F_{arr}^*[m] \cdot F_{arr}[m], \quad (3.6)$$

wobei  $F_{co}[m]$  und  $F_{arr}[m]$  die Fourier-Transformierten des Ko-Arrays bzw. des SIMO-Arrays sind. Da im rechten Teil der Gleichung der quadrierte Betrag von  $F_{arr}$  (also  $\Re^2\{F_{arr}\} + \Im^2\{F_{arr}\}$ ) steht, kann mit gängigen mathematischen Methoden keine analytische Lösung für das Problem gefunden werden.

Ausgenommen von den drei nicht-redundanten SIMO-Arrays (s. Tab. 3.1) weisen in der Literatur zu findende SIMO-Arrays mit mehr als vier Elementen eine Redundanz auf, weshalb diese Arrays redundante oder minimal-redundante Arrays genannt werden. Die Ko-Arrays der minimal-redundanten Arrays sind zwar uniform, weisen aber Längen kleiner als in (3.5) auf. Streng genommen darf eine Array-Konfiguration mit gegebener Elementanzahl nur dann minimal-redundant genannt werden, wenn es nachweislich keine weniger redundante Array-Konfiguration mit gleicher Elementanzahl gibt. Ein solcher Nachweis ist aber schwer zu erbringen, wenn es für minimal-redundante ebenso wie für die nicht-redundanten Array-Konfigurationen keine geschlossene Lösung gibt. Dennoch können minimal-redundante Array-Konfigurationen mit relativ kleiner Anzahl an Elementen durch systematische Suche gefunden werden, wobei alle mögliche Elementpositionen eines Arrays durchgespielt und dabei die Konfiguration(en) mit kleinster Redundanz ausgewählt werden. Auf diese Weise wurden minimal-redundante SIMO-Arrays mit bis zu 11 Elementen gefunden [3,7]. Für „größere“ Arrays aber ist die systematische Suche wegen der exponentiell steigenden Anzahl  $2^M$  der Konfigurationen mit relativer Länge  $M - 1$  schlicht uneffektiv.

Da es keine geschlossene Lösung für Array-Konfigurationen mit minimaler Redundanz gibt, werden diese in der Praxis mit Methoden der Kombinatorik und der Optimierung generiert.

## 3.2.1 Syntheseverfahren für minimal-redundante SIMO-Arrays

### Synthesemethode I

Eine auf der Kombinatorik basierende Methode zur Synthese von minimal-redundanten SIMO-Arrays wurde in [22] dargestellt. Mit Hilfe des Verfahrens ist es möglich, ein neues, längeres Ar-

ray aus zwei existierenden nicht- oder minimal-redundanten Konfigurationen zu bilden. Es können ebenfalls die sogenannten Differenzmengen (*difference sets*) als Basiskonfigurationen zur Bildung des Arrays verwendet werden [7, 23–26].

Zur Veranschaulichung des Verfahrens werden hier zwei nicht-redundante Basis-Arrays:  $MRA_1$  und  $MRA_2$  mit der Konfiguration  $(\cdot 1 \cdot)$  und  $(\cdot 1 \cdot 2 \cdot)$  genommen. Als Nächstes wird der normierte Abstand zwischen den Elementen eines Basis-Arrays (beispielsweise von  $MRA_1$ ) als  $2M_2 - 1$  gesetzt, wobei  $M_2 - 1$  die normierte Länge des zweiten Basis-Arrays ist. Das resultierende „gestreckte“ Array  $MRA_{1str}$  mit der Konfiguration  $(\cdot 7 \cdot)$  wird anschließend mit dem zweiten Basis-Array zum neuen Array mittels mathematischer Faltungsoperation transformiert:  $MRA_{1str} * MRA_2 \equiv (\cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot)$ .

Das resultierende Array (hier Basis-Array zweiten Grades genannt) kann wiederum als Basis für ein längeres Array dienen, sodass ein ausgedünntes Array beliebiger Länge synthetisiert werden kann. Ein Nachteil dieses Verfahrens besteht darin, dass die resultierenden Arrays, die mit den Basis-Arrays höheren Grades generiert sind, zwar hohe Ausdünnungsraten aufweisen, dennoch nicht minimal-redundant sind, obwohl ihre Ko-Arrays uniform sind [27].

## Synthesemethode II

Eine weitere Methode zur Synthese von minimal-redundanten Arrays basiert auf Aufteilen einer Basiskonfiguration in zwei Hälften mit jeweils ungefähr gleicher Elementanzahl. Anschließend fügt man ein periodisch ausgedünntes Array zwischen die beiden Hälften des Basis-Arrays ein. Die Anzahl der Array-Elemente im periodisch ausgedünnten Array wird auf etwa die Hälfte der Elemente der aufgeteilten Basiskonfiguration und der Abstand zwischen den Elementen auf etwa  $M_{basis}\lambda/2$  gesetzt, wobei  $M_{basis} - 1$  die normierte Länge des Basis-Arrays ist. Der genaue Abstand zwischen den Elementen sowie deren genaue Anzahl in der periodisch ausgedünnten Untergruppe wird in Hinblick auf die Länge sowie die Konfiguration des Basis-Arrays empirisch ausgewählt [27].

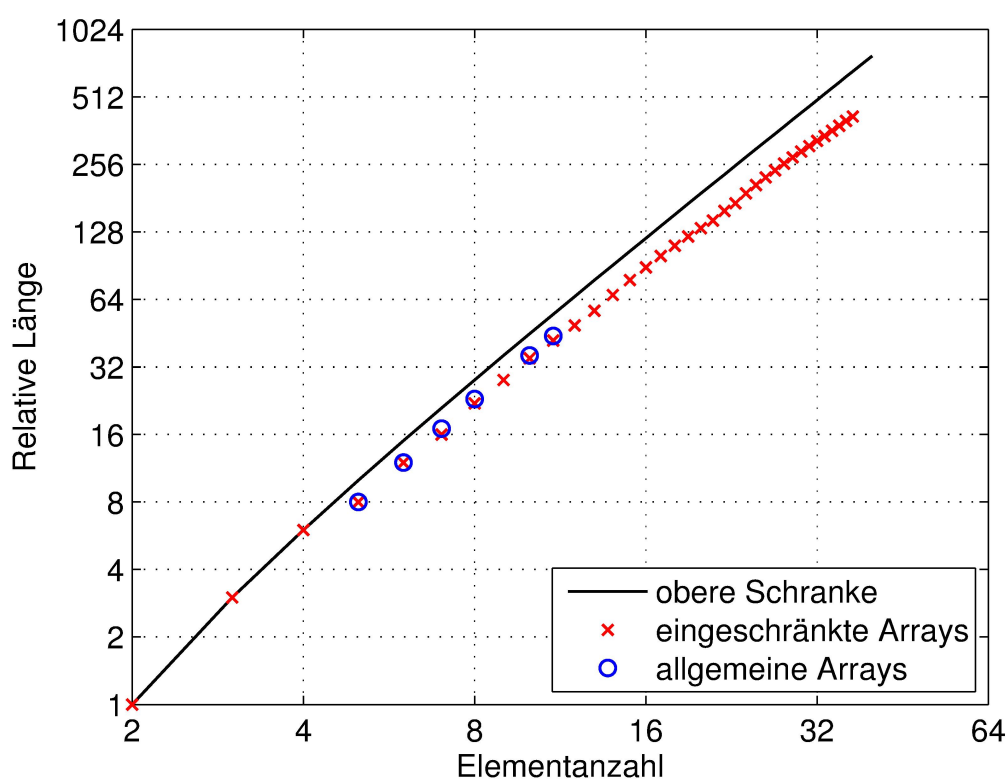
Als Beispiel wird das Basis-Array  $(\cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot)$  betrachtet. Es wird in zwei Array-Hälften  $(\cdot 1 \cdot 1 \cdot)$  und  $(\cdot 4 \cdot 3 \cdot)$  aufgeteilt. Als das periodisch ausgedünnte Array wird die Konfiguration  $(\cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot)$  gewählt. Das resultierende Array ergibt sich zu  $(\cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot)$ .

Weil die Wahrscheinlichkeit, dass die mit den beiden kombinatorischen Methoden synthetisierten Array-Konfigurationen in der Tat minimal-redundant sind, eher gering ist, werden diese Arrays in der Literatur statt minimal-redundante Arrays Arrays mit kleiner Redundanz genannt [27].

### Ausdünnungsraten von minimal-redundanten SIMO-Arrays

Weil das Ko-Array eines nicht-redundanten Arrays uniform ist sowie seine Länge verglichen mit den redundanten Arrays mit gleicher Elementanzahl maximal ist, kann die Array-Redundanz anhand der Ko-Array-Länge beurteilt werden: Je länger das uniforme Ko-Array ist, desto weniger redundant ist das SIMO-Array. Diese Betrachtungsweise ist besonders hilfreich bei der Optimierung von minimal-redundanten MIMO-Konfigurationen, wie im nächsten Kapitel gezeigt wird.

Die relativen Längen der aus [3,27] bekannten minimal-redundanten SIMO-Konfigurationen mit bis zu 37 Elementen sind in Bild 3.2 dargestellt. Dabei wurden Arrays aus zwei Klassen, nämlich aus



**Abbildung 3.2:** Relative Längen von eingeschränkten und allgemeinen SIMO-Arrays sowie die obere Schranke für die Array-Längen.

der Klasse der *eingeschränkt* minimal-redundanten und der *allgemein* minimal-redundanten Arrays (nach [3] für *restricted* bzw. *general minimum-redundancy arrays*) dargestellt. Der Unterschied zwischen den beiden Klassen besteht darin, dass, während das Ko-Array eines eingeschränkten Arrays uniform sein muss, im Ko-Array eines allgemeinen Arrays Lücken erlaubt sind. Dabei gilt die Bedingung, dass der uniforme Teil des Ko-Arrays maximale Länge bzw. die SIMO-Konfiguration kleinste Redundanz aufweist. Auf den Unterschied bei der Signalverarbeitung bei den beiden Array-Typen wird in Abschnitt 7.1 eingegangen.

Wie man in Bild 3.2 erkennen kann, sind die relativen Längen von allgemein minimal-redundanten Arrays größer als die der eingeschränkten Arrays. Es konnten nur allgemeine Arrays mit bis zu 11 Elementen in der Literatur gefunden werden [3]. Es existieren außerdem keine allgemeinen Konfigurationen mit 2, 3 und 4 Elementen, denn die nicht-redundanten SIMO-Arrays weisen nach der Definition uniforme Ko-Arrays auf. Des Weiteren gibt es kein allgemein minimal-redundantes SIMO-Array mit neun Elementen.

Ebenfalls in Bild 3.2 ist die obere Schranke für die Längen der minimal-redundanten SIMO-Arrays dargestellt. Die obere Schranke entspricht der maximalen Anzahl der Array-Freiheitsgrade (3.3) und ergibt sich aus der Ko-Array-Länge (3.5), die für die nicht-redundanten Arrays gilt. Da das Ko-Array eines SIMO-Arrays aufgrund der Faltungstransformation doppelt so lang wie das SIMO-Array ist, beträgt die obere Schranke dementsprechend  $N(N - 1)/2$ . Daraus lässt sich die obere Schranke für die Ausdünnungsraten von minimal-redundanten SIMO-Arrays wie folgt berechnen:

$$TR_{max} = 1 - \frac{2N}{N(N - 1) + 2}. \quad (3.7)$$

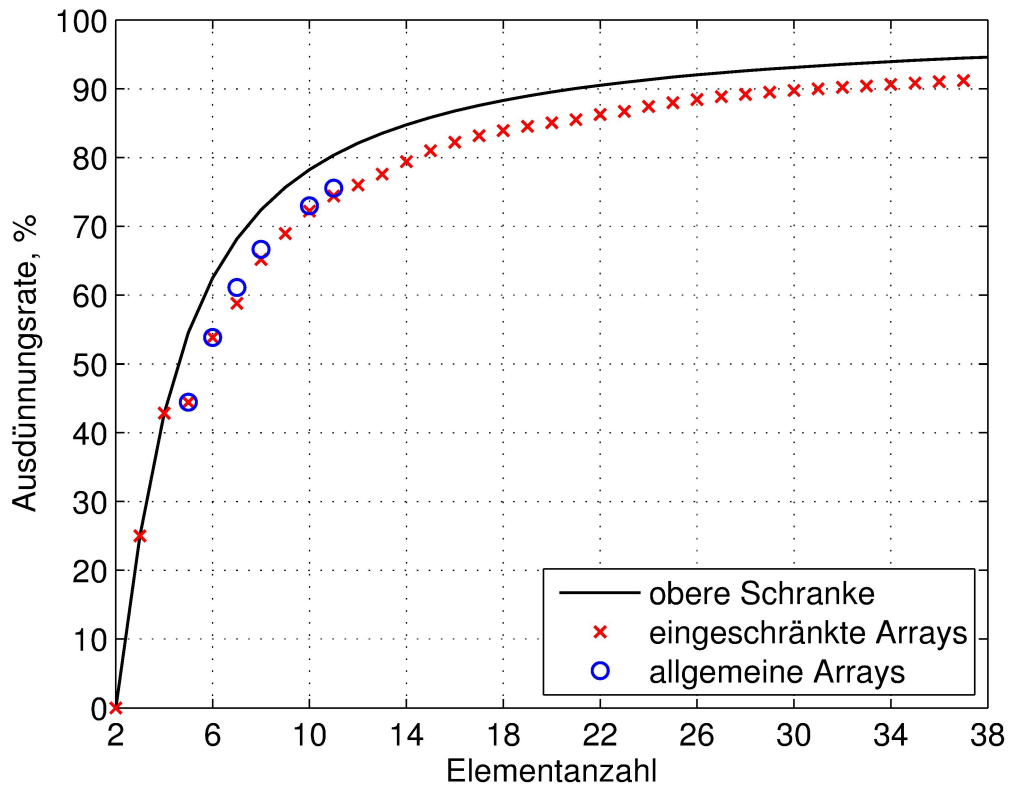
Der Grenzwert der oberen Schranke konvergiert gegen eins, wenn die Anzahl der Array-Elemente unendlich groß wird. Aber bereits mit moderater Elementanzahl – beispielsweise ab 30 Elementen – existieren SIMO-Arrays mit Ausdünnungsraten größer 90%, wie es in Bild 3.3 zu erkennen ist.

## 3.3 Verfahren zur Nebenkeulenreduzierung in Radaren mit minimal-redundanten Arrays

Minimal-redundante SIMO-Arrays weisen aufgrund der hohen Ausdünnungsraten (s. Bild 3.3) relativ hohe Nebenkeulen im Array-Diagramm auf. Die mittlere Nebenkeulendämpfung der minimal-redundanten SIMO-Arrays liegt etwa bei vergleichsweise niedrigen 10 dB [28]. In Bild 3.4 ist das Antennendiagramm des nicht-redundanten Arrays mit vier Elementen beispielhaft gezeigt. Die höchste Nebenkeule des Arrays bezüglich des Hauptkeulenmaximums liegt bei etwa -5,3 dB.

Weil das Ko-Array eines eingeschränkten Arrays uniform ist, kann die Ko-Array-Antwort mit einer herkömmlichen Gewichtungsfunktion geformt werden, um eine Reduzierung der Nebenkeulen zu erreichen [29].

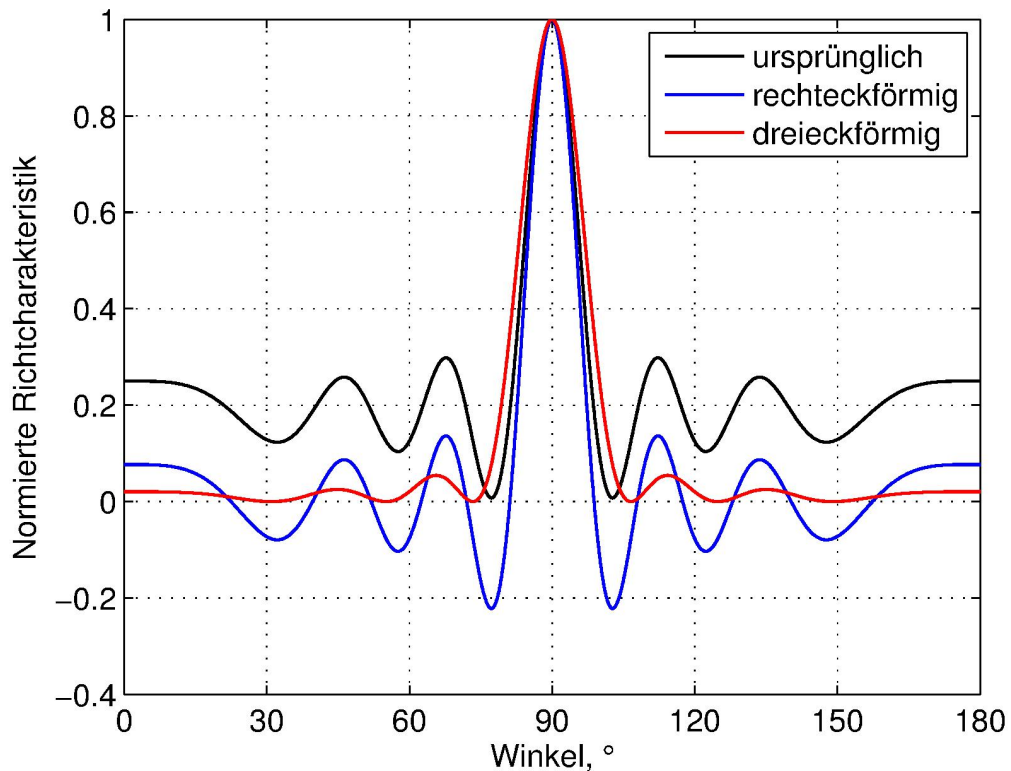
Beim Gewichten des Ko-Arrays muss auf die ursprüngliche Ko-Array-Gewichtung geachtet werden, denn diese ist für jedes minimal-redundante Array spezifisch (vgl. Tab. 3.1). Des Weiteren ist das ursprüngliche Ko-Array zu normieren, sodass das resultierende Ko-Array rechteckförmig gewichtet



**Abbildung 3.3:** Ausdünnungsraten von eingeschränkten und allgemein minimal-redundanten SIMO-Arrays sowie die obere Schranke für die Ausdünnungsraten.

ist. Beispielsweise ergibt sich für das Ko-Array des nicht-redundanten Arrays mit vier Elementen der Normierungsvektor zu  $[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ \frac{1}{4} \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$ . Das Antennendiagramm des rechteckförmig gewichteten Ko-Arrays ist in Bild 3.4 dargestellt.

Die Multiplikation der Ko-Array-Antwort mit einer Fensterfunktion entspricht der Faltung des Ko-Array-Spektrums mit der Fourier-Transformierten der Fensterfunktion. Die Fourier-Transformierte der rechteckförmigen Ko-Array-Gewichtung ist eine si-Funktion [10], die sowohl positive als auch negative Nebenkeulen aufweist. Des Weiteren ist die Fourier-Transformierte der spiegelsymmetrischen Ko-Array-Gewichtung aufgrund der Symmetrieeigenschaften der Fourier-Transformation eine reelle Funktion. Daraus folgt als erstes, dass das Spektrum nach der Gewichtung reell bleibt. Da die Fourier-Transformierte der rechteckförmigen Ko-Array-Gewichtung negative Nebenkeulen aufweist, können Teile des resultierenden Spektrums negativ ausfallen. Die negativen Spektrumsbereiche sind nachträglich zu unterdrücken bzw. bei Spektrumsdarstellung zu ignorieren. Das erfolgt nach der Vorstellung, dass negative Spektrumsbereiche auf negative Signalleistung deuten würde, was physikalisch nicht möglich ist.



**Abbildung 3.4:** Richtcharakteristik des ursprünglichen, sowie des rechteckförmig und dreieckförmig gewichteten Ko-Arrays des Arrays mit vier Elementen.

Eine weitere typische Gewichtung für das Verfahren zur Nebenkeulenreduzierung von minimal-redundanten Arrays stellt das dreieckförmige Bartlett-Fenster (s. (2.15)) dar. Die gewichtete Ko-Array-Antwort auf ein einziges Ziel entspricht in diesem Fall der Antwort eines uniformen Arrays, das die gleiche Länge wie das ausgedünnte Array aufweist.

Die aus der dreieckförmigen Gewichtung resultierende Richtcharakteristik des nicht-redundanten Arrays mit vier Elementen ist ebenfalls in Bild 3.4 dargestellt. Erwartungsgemäß beträgt die Nebenkeulendämpfung etwa 12,7 dB – und ist gleich der Nebenkeulendämpfung eines uniformen SIMO-Arrays mit sieben Elementen. Die Halbwertsbreite der Hauptkeule des dreieckförmig gewichteten Ko-Arrays ist etwas breiter verglichen mit dem rechteckförmig gewichteten und dem ursprünglichen Ko-Array. Die dadurch auftretende Minderung der Winkelauflösung des Arrays kann mit Hilfe der Tab. 2.1 abgeschätzt werden. Die Auflösung ist im Fall der dreieckförmigen Gewichtung bis zu 43% geringer.

Im Verfahren des Ko-Array-Gewichtens können weitere Fensterfunktionen (s. Tab. 2.1) als die rechteck- und dreieckförmige angewandt werden. Diese Arbeit wird sich zunächst auf die beiden erwähn-

ten Fensterfunktionen beschränken.

Um wieviel die dargestellte Signalverarbeitung des Ko-Arrays das Spektrum verbessert, lässt sich im Fall eines Mehrzielszenarios mit nennenswerter Anzahl an Zielen analytisch nur schwer berechnen. Das liegt an der steigenden Anzahl der Kreuzproduktsummanden in der Ko-Array-Antwort, die größer wird, je mehr Ziele in der Array-Antwort vorkommen (vgl. (2.17)). Da das Spektrum als Fourier-Transformierte der Ko-Array-Antwort dargestellt werden kann, sind im Spektrum die Transformierten der Ko-Array-Kreuzprodukte ebenfalls vorhanden, was wiederum zu Verfälschungen und demzufolge zur Qualitätsminderung des Spektrums führt. Zudem sind die Kreuzprodukte im Ko-Array bzw. im Spektrum von stochastischer Natur, wie es bereits in Abschnitt 2.7.1 gezeigt wurde. Eine rechnerunterstützte statistische Untersuchung der Spektrumsqualität ist daher eher geeignet. In dieser Arbeit wird die Qualität von kreuzproduktbehafteten Spektren mittels der mittleren quadratischen Abweichung vom kreuzproduktfreien Spektrum beziffert. Das kreuzproduktfreie Spektrum wird durch die Fourier-Transformation der Ko-Array-Antwort gewonnen, die ausschließlich aus den Eigenprodukten der Ziele besteht:

$$R_{eigenprod}[n] = w[n] \sum_{t=1}^T |A_t|^2 \exp(j\omega_t n). \quad (3.8)$$

Die Gewichtung  $w[n]$  stellt die ursprüngliche, normierte oder dreieckförmige Ko-Array-Gewichtung dar, je nachdem, welche Gewichtung die kreuzproduktbehaftete Ko-Array-Antwort aufweist.

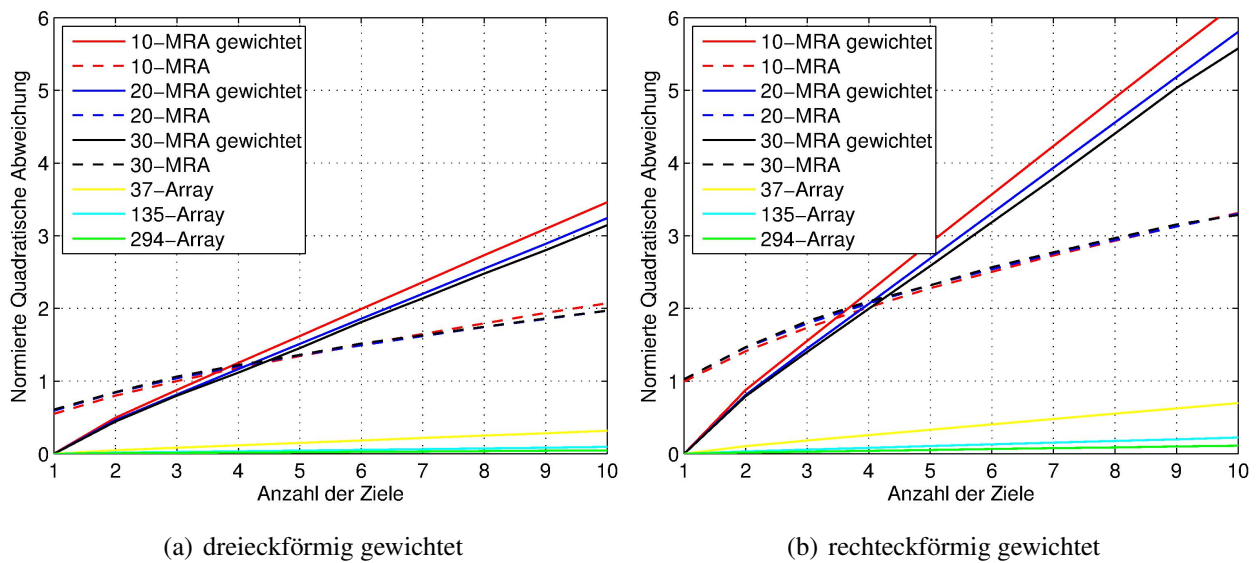
Die Abweichung des kreuzproduktbehafteten Spektrums entspricht aufgrund des Parsevalschen Satzes (s. [10]) dem normierten quadratischen Fehler  $R_{err}$  in der Ko-Array-Antwort:

$$R_{err} = \frac{\sqrt{\sum |R_{eigenprod}[n] - R[n]|^2}}{N \sqrt{\sum |R_{eigenprod}[n]|^2}}, \quad (3.9)$$

wobei der Normierungsfaktor  $N$  die Elementanzahl im physikalischen Array und  $R[n]$  die kreuzproduktbehaftete Ko-Array-Antwort darstellen.

Der normierte quadratische Fehler in der dreieck- sowie rechteckförmig gewichteten Ko-Array-Antwort von minimal-redundanten SIMO-Arrays mit 10, 20 und 30 Elementen (die entsprechenden Array-Konfigurationen findet man in [27]) ist in Bild 3.5 dargestellt. Der Fehler in den Bildern 3.5a) und 3.5b) ist für die dreieckförmig bzw. die rechteckförmig gewichteten Ko-Arrays dargestellt.

Der Fehler fällt wegen der relativ großen Nebenkeulendämpfung des dreieckförmig gewichteten Ko-Arrays etwa doppelt so klein aus wie im Fall mit der rechteckförmigen Gewichtung. Insgesamt wird der Fehler in den gewichteten Ko-Arrays kleiner, wenn die Anzahl der SIMO-Elemente steigt. Der



**Abbildung 3.5:** Normierter quadratischer Fehler in der dreieck- und der rechteckförmig gewichteten Ko-Array-Antwort von minimal-redundanten SIMO-Arrays mit 10, 20 und 30 Elementen.

Fehler in den ungewichteten Ko-Arrays (s. gestrichelt dargestellten Verläufe in Bild 3.5) ist hingegen etwa unabhängig von der Anzahl der SIMO-Elemente. Des Weiteren kann man den Fehler mit Hilfe des Verfahrens des Ko-Array-Gewichtens deutlich verkleinern, wenn die Anzahl der Ziele im Radarszenario relativ klein ist. So ist der Fehler in den gewichteten Ko-Arrays der drei minimal-redundanten Arrays kleiner als in den ungewichteten, wenn die Anzahl der Ziele kleiner fünf ist. Für eine größere Zahl der Ziele ist der Fehler im gewichteten Ko-Array größer als im Fall des ungewichteten Ko-Arrays.

Allgemein ist der Fehler in den Ko-Arrays von minimal-redundanten Arrays deutlich größer als im Fall der uniformen Arrays. Das ist ebenfalls in Bild 3.5 erkennbar, wo der Fehler im Fall der drei uniformen SIMO-Arrays gezeigt ist. Die drei uniformen Arrays mit 37, 135 und 294 Elementen haben die gleichen Längen wie die drei minimal-redundanten Arrays.

### Fazit

Die in diesem Kapitel betrachteten minimal-redundanten SIMO-Arrays sowie die Untersuchung ihrer Eigenschaften bilden eine gute Basis für die minimal-redundanten MIMO-Arrays, denen das nächste Kapitel dieser Arbeit gewidmet ist. Die Analyse der Anzahl der Freiheitsgrade sowie die hohen Ausdünnungsraten zeigen das große Potenzial der minimal-redundanten Arrays. Die dargestellten kombinatorischen Methoden, mit denen Konfigurationen von SIMO-Arrays generiert werden können, sind effizient und einfach in der Anwendung. Die meisten synthetisierten Array-Konfigurationen sind allerdings nicht minimal-redundant.

Die Untersuchung von störenden Kreuzprodukten in der Ko-Array-Antwort von minimal-redundanten SIMO-Arrays zeigt, dass es möglich ist, das Spektrum durch Gewichtung des Ko-Arrays zu verbessern, wenn die Anzahl der Ziele relativ klein ist. Das vorgestellte Verfahren des Ko-Array-Gewichtens funktioniert etwa gleich gut in Arrays mit unterschiedlicher Elementanzahl. Des Weiteren ist zu erwarten, dass das Verfahren genauso gut mit minimal-redundanten MIMO-Arrays funktioniert. Dies wird im experimentellen Teil der Arbeit gezeigt.

# 4 Lineare MIMO-Arrays mit minimaler Redundanz

In diesem Kapitel geht es um minimal-redundante MIMO-Arrays. Zuerst wird ein Syntheseverfahren für bistatische Array-Konfigurationen mit minimaler Redundanz dargestellt. Als Nächstes wird eine Methode zur Optimierung von monostatischen minimal-redundanten MIMO-Arrays beschrieben. Abschließend wird die Unterklasse der monostatischen minimal-redundanten MIMO-Arrays mit vorgegebenem Mindestelementabstand zwischen benachbarten Array-Elementen betrachtet.

## 4.1 Modell des äquivalenten Empfangs-Arrays

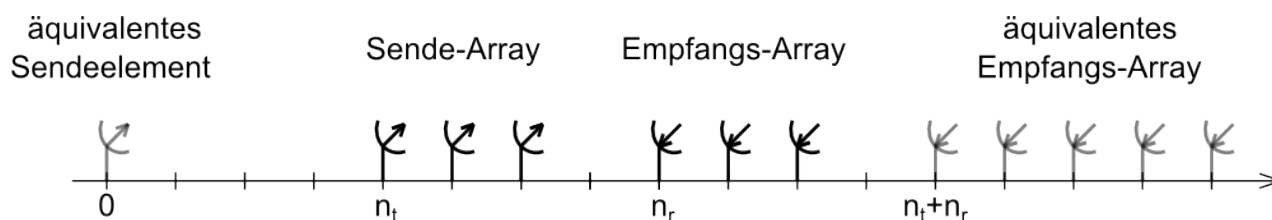
Das Konzept des äquivalenten (oder virtuellen) Empfangs-Arrays wurde bereits in Unterkapitel 2.5 erwähnt. Einer der Vorteile des auf dem Konzept basierenden Array-Modells ist eine einfache Darstellung der Antwort (2.11) des MIMO-Arrays als die Antwort eines virtuellen SIMO-Arrays. Die Addition der relativen Elementpositionen  $n_t + n_r$  des Sende- und Empfangs-Arrays in der MIMO-Antwort (2.11) ergibt die relativen Elementpositionen des äquivalenten Empfangs-Arrays. Da die Positions- bzw. Vektorverschiebung die Grundlage der mathematischen Faltungsoperation ist, lässt sich die Konfiguration  $I_{eq}$  des äquivalenten Arrays durch die Faltung der Elementverteilungen der Sendeuntergruppe  $I_{tr}$  und der Empfangsuntergruppe  $I_{rec}$  wie folgt berechnen [1, 15]:

$$I_{eq} = I_{rec} * I_{tr}. \quad (4.1)$$

Im Folgenden werden die Konfigurationen der beiden Untergruppen als Vektoren dargestellt. Die Vektordarstellung ist die gleiche wie die, die für die Beschreibung von SIMO-Arrays benutzt wurde: Die Vektoreinträge mit Einsen bedeuten besetzte Elementpositionen und die mit Nullen elementfreie Positionen im Array.

Ein Beispiel zur Generierung des äquivalenten Empfangs-Arrays wurde bereits in Unterkapitel 2.5 anhand des Bildes 2.5 dargestellt. Die im Beispiel gezeigten Sende- und Empfangsuntergruppen können als Vektoren  $I_{tr} = I_{rec} = [1 \ 1 \ 1]$  dargestellt werden. Das Ergebnis der Faltung (4.1) ist  $I_{eq} =$

[1 2 3 2 1] und repräsentiert sowohl die relativen Elementpositionen des äquivalenten Empfangs-Arrays als auch seine ursprüngliche Gewichtung. Die absolute Position des äquivalenten Empfangs-Arrays ist durch die Positionen der beiden Untergruppen gegeben. Die Position des ersten Elements des äquivalenten Empfangs-Arrays ergibt sich aus der Summe der Positionen der ersten Elemente des Sende- und des Empfangs-Arrays. Das virtuelle Sendeelement des äquivalenten SIMO-Arrays befindet sich im Koordinatenursprung, wie es beispielhaft in Bild 4.1 dargestellt ist.



**Abbildung 4.1:** Position des äquivalenten Empfangs-Arrays bezüglich des MIMO-Arrays.

## 4.2 Anzahl der Freiheitsgrade von MIMO-Arrays

Wie bereits erwähnt, ist die Klasse der MIMO-Arrays in zwei Unterklassen aufgeteilt: die Klasse der monostatischen und der bistatischen MIMO-Arrays. Bistatische MIMO-Arrays sind dadurch charakterisiert, dass ihre Sende- und Empfangselemente räumlich voneinander getrennt sind. Ein Beispiel eines bistatischen MIMO-Arrays ist in Bild 4.1 dargestellt. Im Unterschied dazu erfüllen die Elemente eines monostatischen MIMO-Arrays sowohl Sende- als auch Empfangsfunktion. Monostatische MIMO-Arrays werden daher auch Transceiver-Arrays genannt [1].

Allein der Unterschied in der Funktionsweise und im Aufbau der beiden Array-Typen macht einen direkten Vergleich der beiden MIMO-Klassen in Hinsicht auf die Array-Ausdünnung bzw. die Array-Redundanz schwierig. Nichtsdestotrotz kann die Anzahl der Freiheitsgrade der beiden Array-Typen miteinander verglichen werden, um abschätzen zu können, welche von den beiden Klassen für MIMO-Radare mit minimaler Redundanz besser geeignet ist.

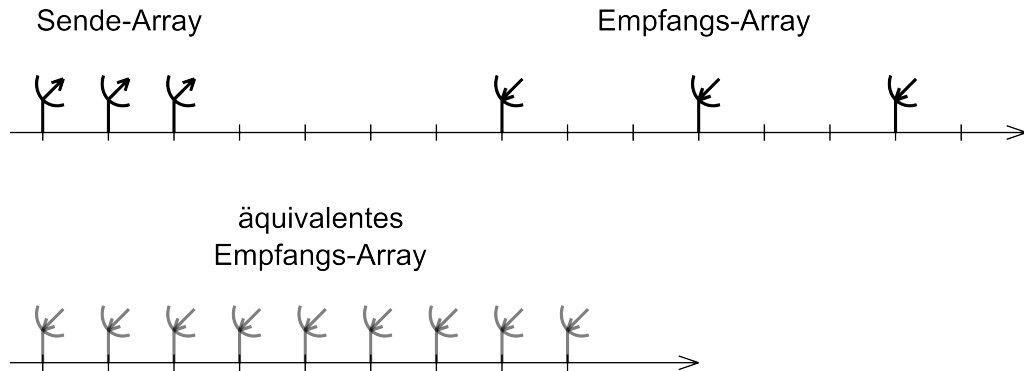
Für ein bistatisches MIMO-Array mit  $N_{tr}$  Sende- und  $N_{rec}$  Empfangselementen beträgt die maximale Anzahl der realisierbaren Freiheitsgrade [1]:

$$DOF_{bi} = N_{tr}N_{rec}. \quad (4.2)$$

Die Anzahl der Freiheitsgrade wird größer, wenn die Elementaufteilung für die beiden Array-Untergruppen in etwa ausgeglichen ist, d.h.  $N_{tr} \approx N_{rec}$  gilt. Die Anzahl der realisierten Freiheitsgrade des MIMO-Arrays ist durch die Elementanzahl des äquivalenten Empfangs-Arrays gegeben. So weist

das bistatische MIMO-Array in Bild 4.1 nach Gleichung (4.2) genau neun realisierbare Freiheitsgrade auf. Davon sind fünf realisiert, denn das äquivalente Empfangs-Array besteht aus fünf Elementen.

Eine Elementaufteilung mit maximaler Anzahl der realisierten Freiheitsgrade weisen unter anderen die periodisch ausgedünnten MIMO-Arrays auf. Der normierte Abstand zwischen den Elementen einer Untergruppe wird in solchen Arrays gleich der Elementanzahl der zweiten Untergruppe gewählt, wie es beispielhaft in Bild 4.2 dargestellt ist. Das äquivalente Empfangs-Array besteht aus



**Abbildung 4.2:** Periodisch ausgedünntes MIMO-Array.

neun Elementen. Das ist die Zahl der realisierten Freiheitsgrade des MIMO-Arrays, die mit (4.2) übereinstimmt. Obwohl alle Freiheitsgrade des periodisch ausgedünnten Arrays realisiert sind, ist das äquivalente Empfangs-Array uniform und weist dementsprechend hohe Redundanz auf. Auch aus diesem Grund werden periodisch ausgedünnte MIMO-Arrays in dieser Arbeit nicht weiter betrachtet.

Ein monostatisches MIMO-Array mit  $N_{mono}$  Array-Elementen weist:

$$DOF_{mono} = \frac{N_{mono}(N_{mono} + 1)}{2} \quad (4.3)$$

realisierbare Freiheitsgrade auf [1]. Die Zahl der Freiheitsgrade ergibt sich aus der Summe von  $N_{mono}(N_{mono} - 1)/2$  Paarkonfigurationen der MIMO-Elemente und der Anzahl  $N_{mono}$  der Array-Elemente.

Wenn beim Entwurf eines MIMO-Radars die maximale Anzahl der Array-Elemente von Bedeutung ist, dann ist ein monostatisches Array im klaren Vorteil gegenüber einem bistatischen Array mit der gleichen Elementanzahl. Wenn die Anzahl der Elemente des monostatischen und des bistatischen Arrays gleichgesetzt wird:  $N_{mono} = N_{tr} + N_{rec}$ , folgt daraus:  $N_{tr} \approx N_{rec} \approx N_{mono}/2$ , d.h.  $DOF_{bi} \approx N_{mono}^2/4$ . Das monostatische Array weist etwa doppelt so viele Freiheitsgrade wie das bistatische Array auf:  $\frac{DOF_{mono}}{DOF_{bi}} \approx 2$ , wenn die Elementanzahl genügend groß ist.

Das Überwiegen der Freiheitsgrade des monostatischen Arrays gegenüber dem bistatischen Array ist plausibel, denn die monostatischen Array-Elemente übernehmen sowohl Sende- als auch Empfangsfunktion. Die Elemente des bistatischen Arrays sind hingegen entweder für die eine oder für die andere Operation zuständig.

Obwohl monostatische MIMO-Arrays mehr Freiheitsgrade als bistatische Arrays aufweisen, ist es noch nicht klar, welche von den beiden Array-Klassen für minimal-redundante MIMO-Radars besser geeignet ist. Um dies festzustellen, sollen die minimal-redundanten Array-Konfigurationen der beiden Array-Klassen mit unterschiedlicher Elementanzahl miteinander verglichen werden.

Wie im Fall der minimal-redundanten SIMO-Arrays gibt es auch für die Erzeugung von minimal-redundanten MIMO-Konfigurationen keine geschlossene Lösung. Es ist aber möglich, die bistatischen und die monostatischen minimal-redundanten MIMO-Arrays zu synthetisieren oder zu optimieren.

### 4.3 Bistatische minimal-redundante MIMO-Arrays

Die in Unterkapitel 3.2.1 dargestellte Methode nach Leech [7] zur Synthese von minimal-redundanten SIMO-Arrays kann in etwas angepasster Form zur Synthese von bistatischen MIMO-Arrays angewandt werden [30, 31]. Dabei wird wie im Leechschen Verfahren das MIMO-Array als Kombination aus zwei Basiskonfigurationen gewonnen. Als Basiskonfigurationen der Sende- und Empfangsuntergruppen des MIMO-Arrays werden die nicht-redundanten (s. Tab. 3.1) sowie minimal-redundante SIMO-Konfigurationen aus [3, 27] eingesetzt.

Beim Durchführen des Verfahrens wird eine der beiden Basiskonfigurationen zur Empfangsuntergruppe und die Elementpositionen der Sendeuntergruppe werden durch eine „Streckung“ der zweiten Basiskonfiguration gewonnen, sodass in der „gestreckten“ Untergruppe der normierte Abstand zwischen benachbarten Elementen um den Faktor  $2L_{basis1} + 1$  vergrößert wird. Dabei ist  $L_{basis1}$  die relative Länge der ersten Basiskonfiguration bzw. der Empfangsuntergruppe.

Beim Auslegen der bistatischen MIMO-Arrays ist die Zuweisung der Untergruppen als Sende- bzw. Empfangs-Array vertauschbar, denn die Untergruppen eines bistatischen MIMO-Arrays sind reziprok. Welche der beiden Basiskonfigurationen während der Verfahrensdurchführung „gestreckt“ wird, ist also für die Länge des äquivalenten Empfangs-Arrays bzw. für die Ko-Array-Länge ohne Bedeutung. Die Länge des „gestreckten“ Arrays beträgt  $L_{basis1}(2L_{basis2} + 1)$ , wenn die erste der beiden Basiskonfiguration „gestreckt“ wird, bzw.  $L_{basis2}(2L_{basis1} + 1)$ , falls die zweite Basiskonfiguration „gestreckt“ wird. Dabei ist  $L_{basis2}$  die relative Länge der zweiten Basiskonfiguration. Des

Weiteren ergibt sich die Länge des äquivalenten Empfangs-Arrays als Summe der Längen der beiden Array-Untergruppen. Daraus folgend ist die Länge des äquivalenten Empfangs-Arrays unabhängig davon, welche der Basiskonfigurationen „gestreckt“ wird, denn es gilt:

$$\begin{aligned}
 L_{eq} &= L_{basis1} + L_{basis2}(2L_{basis1} + 1) \\
 &= L_{basis2} + L_{basis1}(2L_{basis2} + 1) \\
 &= L_{basis1} + 2L_{basis1}L_{basis2} + L_{basis2}.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Die Wahl der Basiskonfigurationen für das Verfahren hängt von der Elementanzahl des zu generierenden MIMO-Arrays ab. Im Fall einer geraden Elementanzahl des MIMO-Arrays sind SIMO-Basiskonfigurationen mit gleicher Elementanzahl zu nehmen. Die beiden Basiskonfigurationen dürfen ebenfalls gleich sein. Für MIMO-Arrays mit ungerader Elementanzahl sind Basiskonfigurationen mit etwa gleicher Elementanzahl zu wählen, um die maximale Anzahl der Freiheitsgrade zu erhalten (s. (4.2)). Zum Beispiel sind für ein bistatisches MIMO-Array mit fünf Elementen die Basis-Arrays mit zwei und drei Elementen zu wählen.

Um das Verfahren zu validieren, wurden Konfigurationen von bistatischen MIMO-Arrays mit bis zu acht Elementen generiert. Als Basiskonfigurationen wurden nicht-redundante SIMO-Arrays (s. Tab. 3.1) eingesetzt. Die resultierenden Konfigurationen sind in Tab. 4.1 dargestellt. In der Tabelle sind die Konfigurationen sowohl der Sende- und Empfangsuntergruppen der MIMO-Arrays als auch der äquivalenten Empfangs-Arrays aufgelistet. Die Ko-Arrays der generierten MIMO-Konfigurationen wurden ebenfalls generiert und erfolgreich auf Uniformität getestet.

Als Nächstes sind die MIMO-Konfigurationen auf Redundanz zu überprüfen. Dabei stellt man fest, dass die Anzahl der realisierten Freiheitsgrade der synthetisierten bistatischen MIMO-Konfigurationen mit (4.2) übereinstimmt. Folglich beträgt die Elementanzahl des äquivalenten Empfangs-Arrays  $N_{eq} = N_{tr}N_{rec}$ . Wenn die uniformen Ko-Arrays nicht-redundant sind, gilt für die Ko-Array-Länge die Gleichung (3.5). Demnach ergibt sich die Länge  $L_{eq}$  des äquivalenten Empfangs-Arrays eines nicht-redundanten bistatischen MIMO-Arrays zu:

$$L_{eq} = \frac{N_{tr}N_{rec}(N_{tr}N_{rec} - 1)}{2}, \tag{4.5}$$

wobei berücksichtigt wurde, dass das Ko-Array doppelt so lang wie das äquivalente Empfangs-Array ist.

Vergleich der Längen der äquivalenten Empfangs-Arrays aus Tab. 4.1 mit der Länge nach Gleichung (4.5) ergibt, dass die Konfigurationen mit einem und zwei Elementen nicht-redundant (weil trivial) sind – die beiden Arrays sind in Tab. 4.1 lediglich der Vollständigkeit halber aufgelistet. Die

**Tabelle 4.1:** Konfigurationen von bistatischen minimal-redundanten MIMO-Arrays. Legende s. Text.

N	Sende-Array	Empfangs-Array	äquivalentes Empfangs-Array	$L_{eq}$
2	·	·	·	0
3	·	· 1 ·	· 1 ·	1
4	· 1 ·	· 3 ·	· 1 · 2 · 1 ·	4
5	· 1 · · 1 · 2 ·	· 3 · 6 · · 7 ·	· 1 · 2 · 1 · 5 · 1 · · 1 · 2 · 4 · 1 · 2 ·	10
6	· 1 · 2 ·	· 7 · 14 ·	· 1 · 2 · 4 · 1 · 2 · 11 · 1 · 2 ·	24
7	· 1 · 2 · · 1 · 3 · 2 ·	· 7 · 21 · 14 · · 13 · 26 ·	· 1 · 2 · 4 · 1 · 2 · 18 · 1 · 2 · 11 · 1 · 2 · · 1 · 3 · 2 · 7 · 1 · 3 · 2 · 20 · 1 · 3 · 2 ·	45
8	· 1 · 3 · 2 ·	· 13 · 39 · 26 ·	· 1 · 3 · 2 · 7 · 1 · 3 · 2 · 33 · 1 · 3 · 2 · 20 · 1 · 3 · 2 ·	84

Längen der äquivalenten Arrays der restlichen MIMO-Konfigurationen sind um etwa 1,5 Mal kürzer als die mit (4.5) berechneten. Daraus folgend ist die Redundanz der mit dem Verfahren synthetisierten MIMO-Konfigurationen mit mehr als zwei Elementen als relativ hoch zu bewerten.

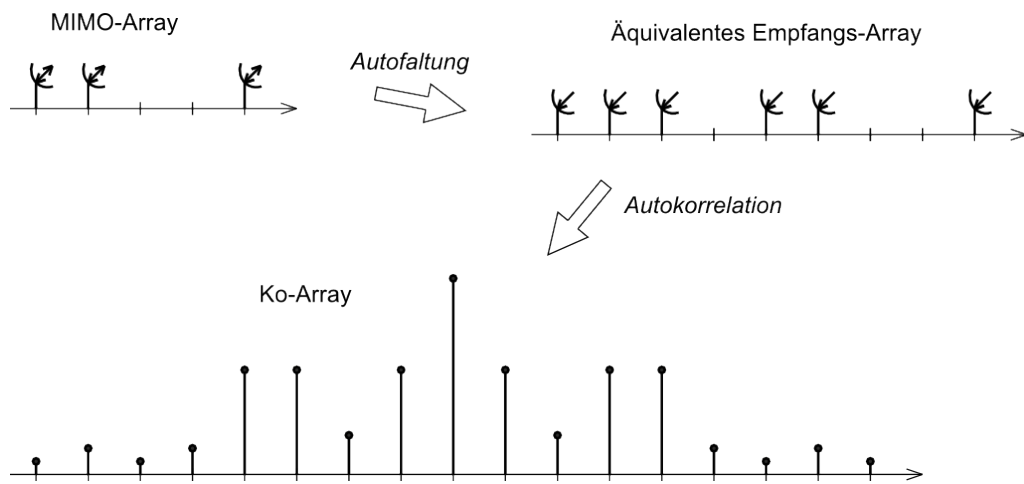
## 4.4 Monostatische minimal-redundante MIMO-Arrays

Im Unterschied zu bistatischen MIMO-Arrays konnte im Rahmen dieser Arbeit kein Syntheseverfahren für lineare, monostatische minimal-redundante MIMO-Arrays gefunden werden. Stattdessen wird der Weg der Array-Optimierung gewählt. In diesem Unterkapitel wird ein Optimierungsverfahren für monostatische MIMO-Arrays vorgestellt. Das Optimierungsziel des Verfahrens ist also die Minimierung der Redundanz von ausgedünnten MIMO-Arrays.

Wie es bereits in Unterkapitel 3.2 erklärt wurde, definiert die Elementanzahl eines SIMO-Arrays die Zahl der realisierbaren Freiheitsgrade. Wenn alle zur Verfügung stehenden Freiheitsgrade in der Array-Konfiguration realisiert sind und das Ko-Array uniform ist, dann ist das SIMO-Array nicht-redundant. Die Ko-Array-Länge des nicht-redundanten SIMO-Arrays ist von der Elementanzahl des Letzteren abhängig und stellt die obere Grenze für die Ko-Array-Länge eines redundanten Arrays mit gleicher Elementanzahl dar. Das Ziel der Optimierung einer Array-Konfiguration mit minimaler Redundanz kann also als Maximierung der Länge des uniformen Ko-Arrays betrachtet werden. Diese Definition des Optimierungsziels gilt ganz allgemein für die Optimierung sowohl von SIMO- als

auch von MIMO-Arrays mit minimaler Redundanz.

Da die meisten rechnergestützten Optimierungsverfahren iterativ sind, ist die Berechnung des Ko-Arrays ein sich wiederholender Prozess, der zum größten Teil die Komplexität des Algorithmus vorgibt. Um das Verfahren effizient zu gestalten, muss also die Berechnung des Ko-Arrays ebenfalls effizient sein. Deshalb wird hier zuerst die Generierung der Ko-Array-Konfigurationen von monostatischen MIMO-Arrays näher betrachtet. Dafür sind die Teilschritte der Ko-Array-Berechnung in Bild 4.3 am Beispiel eines ausgedünnten MIMO-Arrays schematisch dargestellt.



**Abbildung 4.3:** Generierung des äquivalenten Empfangs-Arrays und des Ko-Arrays eines monostatischen MIMO-Arrays.

Zuerst wird die Konfiguration des äquivalenten Empfangs-Arrays aus der MIMO-Konfiguration gewonnen. Dazu setzt man in Gleichung (4.1) die Vektoren der Sende- und Empfangs-Arrays des monostatischen Arrays gleich:  $I_{tr} = I_{rec}$ . Daraus folgt:

$$I_{eq} = I_{MIMO} * I_{MIMO}, \quad (4.6)$$

wobei  $I_{MIMO}$  die Konfiguration des monostatischen MIMO-Arrays ist.

Die Konfiguration des Ko-Arrays wird als Nächstes aus dem äquivalenten Empfangs-Array gewonnen:

$$I_{co} = I_{eq} * I_{eq}, \quad (4.7)$$

wobei der Operator  $*$  die Autokorrelation nach (3.4) darstellt. Durch Einsetzen von (4.6) in (4.7) ergibt sich die Ko-Array-Konfiguration als Funktion der MIMO-Konfiguration zu [8]:

$$I_{co} = (I_{MIMO} * I_{MIMO}) * (I_{MIMO} * I_{MIMO}). \quad (4.8)$$

Die Berechnung des Ko-Arrays kann mit Hilfe der Fourier-Algebra zu

$$I_{co} = \mathcal{F}^{-1} \{ |\mathcal{F} \{ I_{MIMO} \}|^4 \} \quad (4.9)$$

umgeformt werden. Die Berechnung des Ko-Arrays bei der iterativen Durchführung der Optimierung des MIMO-Arrays kann mit Hilfe der schnellen Fourier-Transformation besonders effizient implementiert werden.

### Obere Schranke der Array-Länge

Wie in Abschnitt 3.2.1 bereits erwähnt wurde, stellt die Ko-Array-Länge des nicht-redundanten SIMO-Arrays die obere Grenze für die Ko-Array-Länge eines redundanten SIMO-Arrays. Eine obere Schranke für redundante MIMO-Arrays ist in [8] aufgestellt. Um diese zu finden, wird zuerst die folgende Annahme getroffen: Alle Freiheitsgrade des äquivalenten Empfangs-Arrays seien realisiert und das resultierende Ko-Array uniform. Daraus folgt die obere Schranke für die Ko-Array-Länge zu:

$$L_{co}^{max} = N_{eq}(N_{eq} - 1), \quad (4.10)$$

wobei  $N_{eq}$  die Elementanzahl des äquivalenten Empfangs-Arrays ist (vgl. (3.5)).

Anschließend wird die zweite Annahme getroffen: Alle Freiheitsgrade des MIMO-Arrays seien ebenfalls realisiert. Daraus folgend ist die Elementanzahl des äquivalenten Empfangs-Arrays gleich der Anzahl der Freiheitsgrade des MIMO-Arrays:

$$N_{eq} = \frac{N_{MIMO}(N_{MIMO} + 1)}{2}, \quad (4.11)$$

wobei  $N_{MIMO}$  die Elementanzahl des monostatischen MIMO-Arrays ist.

Die obere Grenze für die Ko-Array-Länge kann nun durch Einsetzen von (4.11) in (4.10) als Funktion der Elementanzahl des MIMO-Arrays ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} L_{co}^{max} &= \frac{N_{MIMO}^4 + 2N_{MIMO}^3 - N_{MIMO}^2 - 2N_{MIMO}}{4} \\ &= \frac{N_{MIMO}(N_{MIMO}^2 - 1)(N_{MIMO} + 2)}{4}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Weil die Länge eines Ko-Arrays doppelt so groß wie die Länge des äquivalenten Arrays bzw. viermal so groß wie die Länge des MIMO-Arrays ist, ergibt sich die obere Schranke für die Länge des MIMO-Arrays zu:

$$L_{MIMO}^{max} = \frac{N_{MIMO}(N_{MIMO}^2 - 1)(N_{MIMO} + 2)}{16}. \quad (4.13)$$

Bei ausreichend großer Elementanzahl strebt die obere Schranke der MIMO-Array-Länge gegen  $N_{MIMO}^4/16$  und zeigt somit das große Potenzial von minimal-redundanten MIMO-Arrays im Hinblick auf die erzielbaren Ausdünnungsraten.

Die Anzahl der möglichen Konfigurationen eines MIMO-Arrays mit  $N_{MIMO}$  Elementen und der relativen Länge  $L_{MIMO}^{max}$  beträgt:

$$N_{config} = \prod_{n=0}^{N_{MIMO}-1} (L_{MIMO}^{max} + 1 - n). \quad (4.14)$$

Während es für ein MIMO-Array mit vier Elementen und einer Länge nicht größer als die entsprechende obere Schranke vergleichbar wenig (etwa  $2,3 \cdot 10^5$ ) Konfigurationsvarianten gibt, so gibt es für ein Array mit fünf Elementen bereits  $3,6 \cdot 10^8$  mögliche Konfigurationen, deren Überprüfung auf Redundanz durch systematische Suche schlicht ineffektiv wäre. Tatsächlich wurden im Rahmen dieser Arbeit monostatische minimal-redundante MIMO-Arrays mit bis zu vier Elementen durch systematische Suche gefunden [8]. Die entsprechenden Array-Konfigurationen werden im Weiteren noch erwähnt.

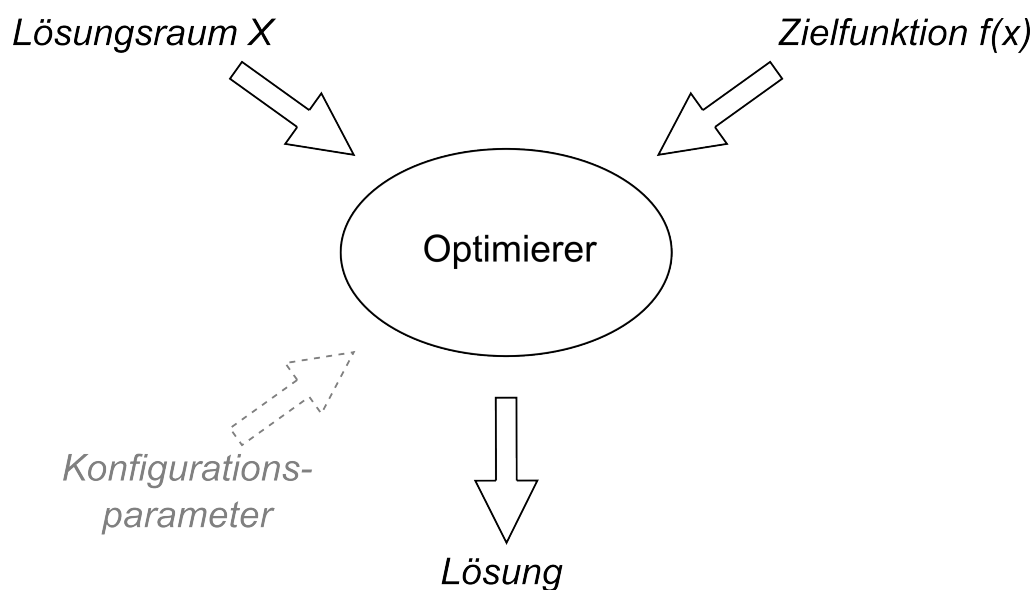
### 4.4.1 Array-Optimierung

Ein Optimierungsverfahren kann mathematisch wie folgt dargestellt werden:  $\max_{x \in X} f(x)$ , wobei  $f : R^t \rightarrow R$  die Zielfunktion und  $X \subseteq R^t$  der  $t$ -dimensionale, reelle Lösungsraum ist. Weil es viele verschiedene Optimierungsverfahren gibt, ist es leichter, diese durch eine verallgemeinerte Schnittstelle, wie in Bild 4.4 gezeigt, mit dem zu lösenden Problem in Verbindung zu bringen.

Durch die Schnittstelle wird unter anderem die Zielfunktion mit dem Optimierer verbunden. Dieser ist in der Lage, eine mögliche Lösung an die Zielfunktion zu übergeben und die Funktionsantwort abzufragen.

Eine wichtige Aufgabe bei der Implementierung des Optimierungsverfahrens ist die Definition eines endlichen Lösungsraums, der ebenfalls durch die Schnittstelle dem Optimierer übermittelt wird. Zwar gibt es Optimierer, die eine Beschränkung des Lösungsraums nicht voraussetzen; es ist trotzdem sinnvoll (falls es überhaupt möglich ist) den Lösungsraum einzuschränken, da die Komplexität des Verfahrens mit steigender Raumgröße in der Regel zunimmt.

Ein weiterer Schnittstellenbereich, dargestellt durch den grauen Pfeil in Bild 4.4, ist für die externen Voreinstellungen des Optimierers vorgesehen. Diese spielen allerdings eine untergeordnete Rolle verglichen mit der Definition der Zielfunktion und des Lösungsraums. Über einen wichtigen Parameter verfügen dennoch fast alle gängigen Optimierer: die Bedingung für den Optimierungsabbruch.



**Abbildung 4.4:** Verallgemeinerte Schnittstelle zwischen dem Optimierungsproblem und dem Optimierer.

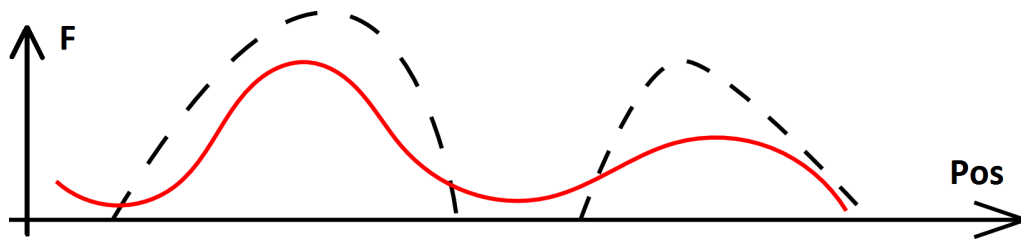
Solch eine Bedingung kann zum Beispiel das Erreichen eines vordefinierten optimalen Wertes der Zielfunktion oder/und das Überschreiten einer vorgegebenen Optimierungslaufzeit bzw. der maximal erlaubten Anzahl von durchgeführten Operationen, Iterationen, Aufrufen der Zielfunktion u.s.w. während des Optimierungsprozesses sein.

## Zielfunktion

Das Problem der Optimierung von minimal-redundanten MIMO-Konfigurationen ist wie folgt definiert: Die Positionen der Array-Elemente werden derart optimiert, dass das Ko-Array uniform ist und maximale Länge aufweist. Die beiden Kriterien müssen mathematisch so ausgedrückt werden, dass diese in der Zielfunktion als eine Variable berechnet werden können. Eine einfache Lösung wäre, die Zielfunktion als Produkt der Ko-Array-Länge  $L_{co}$  mit einem binären „Lückenfaktor“  $Gap$  darzustellen:

$$f = L_{co} \cdot Gap. \quad (4.15)$$

Die Variable  $Gap$  nimmt den Wert 1 oder 0 an, je nachdem ob das Ko-Array uniform ist, oder Lücken aufweist. Diese Definition der Zielfunktion kann aber dazu führen, dass die Zielfunktion für bestimmte Werte der Funktionsvariablen ausgedehnte Nullstellenbereiche aufweist, wie es in Bild 4.5 schematisch dargestellt ist. Im ungünstigsten Fall können die Nullstellenbereiche der Funktion sehr lang ausfallen und der Optimierer kann die Suche abbrechen, wenn keine Änderung der Zielfunktion während der vordefinierten Anzahl an Iterationen erfolgt. Solches Verhalten wurde besonders beim



**Abbildung 4.5:** Schematischer Verlauf der Zielfunktion mit ausgedehnten Nullstellenbereichen (---) sowie einer alternativen Zielfunktion (-).

Optimieren von „großen“ Arrays beobachtet, wenn aufgrund der kleinen Elementanzahl und großen Array-Längen die Wahrscheinlichkeit eines nicht-uniformen Ko-Arrays relativ hoch ist.

Eine alternative Zielfunktion ohne ausgedehnte Nullstellenbereiche kann wie folgt definiert werden:

$$f = L_{unif} \left( \frac{L_{unif}}{L_{co}} \right)^n, \quad (4.16)$$

wobei  $L_{unif}$  die Länge des gefüllten, mittleren Teil des Ko-Arrays und  $n$  ein ganzzahliger Potenzfaktor größer 1 sind. Im Fall eines uniformen Ko-Arrays, ist der Funktionswert gleich der Ko-Array-Länge und unabhängig von der Größe des Potenzfaktors. Falls das Ko-Array Lücken aufweist, ist der Wert der Funktion entsprechend dem Faktor  $\left( \frac{L_{unif}}{L_{co}} \right)^n$  kleiner als die Länge des uniformen Teils des Ko-Arrays. Durch Einstellung des Potenzfaktors  $n$  kann man die Empfindlichkeit der Zielfunktion etwas beeinflussen. Für die Optimierung von minimal-redundanten MIMO-Arrays wurde  $n = 5$  empirisch festgelegt [8].

## Lösungsraum

Die Abgrenzung des Lösungsraums des Optimierers erfolgt mit Hilfe der oberen Schranke für die Array-Länge (s. (4.13)). Die Größe des Lösungsraums hängt ebenfalls von der Wahl der Notation der Elementpositionen im Array ab. Grundsätzlich gibt es zwei Notationsvarianten: Bei der ersten Variante werden die absoluten Positionen der Array-Elemente angegeben. Zum Beispiel werden die Elementpositionen eines uniformen Arrays aus drei Elementen als  $x = [0, 1, 2]$  dargestellt. Bei der zweiten Notationsvariante werden die Elementpositionen relativ zu einander angegeben. Für das Array mit drei Elementen ergibt sich der Positionsvektor zu  $x = [1, 1]$ . Unabhängig von der Wahl der Notation wird das erste Element des Arrays in den Koordinatenursprung platziert, um die Dimension des Lösungsraums um 1 zu reduzieren.

Einerseits ist die Notation mit den absoluten Elementpositionen etwas einfacher zu implementieren, denn in diesem Fall ist die Größe des Lösungsraums in jeder Dimension gleich. Andererseits existie-

ren dann im Lösungsraum  $2(N - 1)!$  unterschiedliche Varianten der gleichen Array-Konfiguration mit  $N$  Elementen. Im Fall der Notationsvariante mit den relativen Positionen gibt es im Lösungsraum zusätzlich nur eine gespiegelte Variante der gleichen Array-Konfiguration. Aus diesem Grund wird hier die Notation mit relativen Elementpositionen verwendet.

Es muss ebenfalls erwähnt werden, dass mit der Notationsvariante der relativen Elementpositionen die Einschränkung des Lösungsraums durch die maximale Array-Länge nicht für die einzelnen Elementpositionen – wie das bei den absoluten Positionen der Fall ist – sondern für die Summe der Interelementabstände (also für die Gesamtlänge des Arrays) angewandt wird. Dabei muss ebenfalls beachtet werden, dass eine solche dynamische Beschränkung des Lösungsraums vom Optimierer unterstützt wird. Diese Option wird aber von den meisten modernen Optimierern unterstützt.

Die Dimension des Lösungsraums kann zusätzlich reduziert werden, wenn man eine Analyse der Positionen der Randelementen von monostatischen minimal-redundanten MIMO-Arrays durchführt. So lässt sich herausfinden, dass der relative Abstand zwischen den beiden ersten (oder letzten) Elementen des MIMO-Arrays  $\lambda/2$  betragen muss, denn anderenfalls wird das Ko-Array nicht mehr uniform ausfallen. Um dies zu beweisen, werden die Elementpositionen des MIMO-Arrays der Länge  $L$  als die Potenzreihe dargestellt:

$$I_{MIMO} = y^0 + y^p + \dots + y^{L-q} + y^L, \quad (4.17)$$

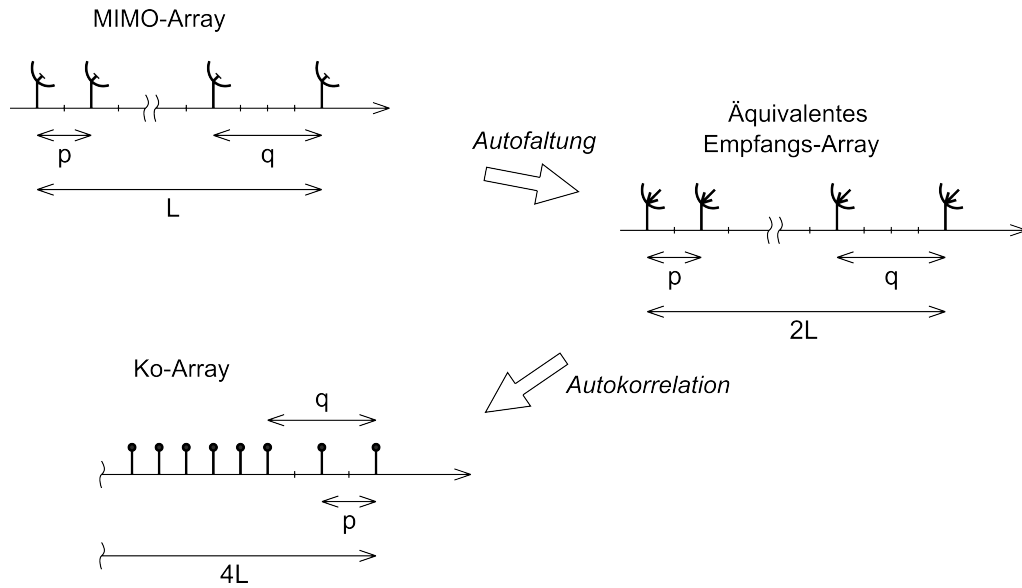
wobei  $y$  die Variable der Potenzreihe,  $p$  und  $q$  die relativen Abstände zwischen den ersten beiden bzw. den letzten beiden Array-Elementen sind. Das MIMO-Array sowie sein äquivalentes Empfangs-Array und das Ko-Array sind schematisch in Bild 4.6 dargestellt.

Mit der Potenzreihendarstellung der Elementpositionen ist es nun einfacher, die Elementverteilungen im äquivalenten Empfangs-Array und im Ko-Array verallgemeinert darzustellen und zu analysieren, denn die für die Generierung der Array-Konfigurationen erforderliche Faltungsoperation wird in der Potenzreihenalgebra durch Multiplikation ersetzt [32].

Entsprechend Gleichung (4.6) ergibt sich die Potenzreihe des äquivalenten Empfangs-Arrays zu

$$\begin{aligned} I_{eq} &= (y^0 + y^p + \dots + y^{L-q} + y^L)(y^0 + y^p + \dots + y^{L-q} + y^L) \\ &= y^0 + 2y^p + \dots + 2y^{2L-q} + y^{2L}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Die Abstände  $q, p$  zwischen den beiden ersten bzw. den beiden letzten Elementen an den Rändern des äquivalenten Empfangs-Arrays sind genau so groß wie die zwischen den Randelementen in dem MIMO-Array (s. Bild. 4.6).



**Abbildung 4.6:** Abstände zwischen den Randelementen eines MIMO-Arrays sowie äquivalentes Empfangs-Array und Ko-Array.

Für die Bildung der Potenzreihe des Ko-Arrays müssen die Vorzeichen der Potenzen von  $I_{eq}$  umgedreht werden. Auf diese Weise lässt sich in der Potenzreihenalgebra die für die Korrelation erforderliche Spiegelung des Konfigurationsvektors darstellen. Eine negative Potenz ist nach der Definition einer Potenzreihe zwar nicht erlaubt, wird aber an dieser Stelle toleriert, weil dadurch die Symmetrie der Ko-Array-Konfiguration besser zu erkennen ist. Eine mathematisch korrekte Darstellung der Reihe würde eine Multiplikation der Reihe mit  $y^{2L}$  erfordern, was einer Verschiebung der Ko-Array-Elemente in positive Richtung des Koordinatensystems entspricht.

Entsprechend Gleichung (4.7) ergibt sich somit die Potenzreihe des Ko-Arrays zu

$$\begin{aligned}
 I_{co} &= (y^{-2L} + 2y^{-(2L-q)} + \dots + 2y^{-p} + y^0)(y^0 + 2y^p + \dots + 2y^{2L-q} + y^{2L}) \\
 &= y^{-2L} + 2y^{-(2L-p)} + \dots + 2y^{-(2L-q)} + \dots + 2y^{2L-q} + \dots + 2y^{2L-p} + y^{2L},
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

wobei, ohne Einschränkung der Allgemeinheit,  $q > p$  angenommen wurde. Dem Ergebnis für die Ko-Array-Reihe nach ist der Abstand zwischen den beiden Randelementen an der linken und rechten Seiten des symmetrischen Ko-Arrays gleich dem kleinsten Abstand  $p$  zwischen den Randelementen des MIMO-Arrays. Die daraus folgende Bedingung für ein uniformes Ko-Array lautet  $p \stackrel{!}{=} 1$ . Die Dimension des Lösungsraums des Optimierers lässt sich um 1 verkleinern, wenn der normierte Abstand zwischen den ersten und den letzten beiden MIMO-Elementen gleich 1 gesetzt wird. Bei der Implementierung des Optimierungsproblems wird der Abstand zwischen den ersten beiden Array-Elementen auf diesen Wert festgelegt.

Setzt man die oben hergeleitete Bedingung  $p = 1$  in Gleichung (4.18) ein, erhält man die nächste Bedingung für ein uniformes Ko-Array. Nun geht es um den Abstand  $r$  zwischen dem zweiten und dem dritten Element des MIMO-Arrays:

$$I_{MIMO} = y^0 + y^1 + y^{r+1} + \dots + y^L. \quad (4.20)$$

Daraus ergibt sich das äquivalente Empfangs-Array zu:

$$\begin{aligned} I_{eq} &= (y^0 + y^1 + y^{r+1} + \dots + y^L)(y^0 + y^1 + y^{r+1} + \dots + y^L) \\ &= y^0 + 2y^1 + y^2 + 2y^{r+1} + 2y^{r+2} + y^{2r+2} + \dots + 2y^L + 2y^{L+1} + 2y^{L+r+1} + y^{2L}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Wenn  $r = 1$  ist, kommt es zur Wiederholung des Reihenglieds  $y^2$  in der Reihe des äquivalenten Empfangs-Arrays, was wiederum eine Erhöhung der Anzahl der nicht-realisierten Freiheitsgrade des MIMO-Arrays und folglich eine Erhöhung der Array-Redundanz bedeutet. Um diese zu vermeiden, muss der Abstand  $r \geq 2$  betragen.

Eine weitere Dimensionsreduzierung des Lösungsraums erfolgt, indem für den Abstand  $q$  zwischen dem letzten und dem vorletzten MIMO-Element  $q \geq 3$  gefordert wird. Zusammen mit der Bedingung  $p \stackrel{!}{=} 1$  ergibt sich die Potenzreihe des äquivalenten Empfangs-Arrays zu:

$$\begin{aligned} I_{eq} &= (y^0 + y^1 + \dots + y^{L-q} + y^L)(y^0 + y^1 + \dots + y^{L-q} + y^L) \\ &= y^0 + 2y^1 + y^2 + \dots + y^{2L-2q} + 2y^{2L-q} + y^{2L}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Des Weiteren ergibt sich die Potenzreihe des Ko-Arrays zu:

$$\begin{aligned} I_{co} &= (y^{-2L} + 2y^{-(2L-q)} + y^{-(2L-2q)} + \dots + y^{-2} + 2y^{-1} + y^0) \\ &\quad (y^0 + 2y^1 + y^2 + \dots + y^{2L-2q} + 2y^{2L-q} + y^{2L}) \\ &= y^{-2L} + 2y^{-2L+1} + y^{-2L+2} + y^{-2L+q} + \dots + y^{2L-q} + y^{2L-2} + 2y^{2L-1} + y^{2L}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Wenn  $q = 1$  oder  $q = 2$  ist, kommt es zu Wiederholungen der Reihenglieder  $y^{-2L+1}$ ,  $y^{-2L+2}$  bzw.  $y^{2L-1}$ ,  $y^{2L-2}$  in der Reihe des Ko-Arrays, was wiederum zu einer Erhöhung der Redundanz führt. Um dies zu vermeiden, ist  $q \geq 3$  zu fordern.

Genauso wie der normierte Abstand zwischen dem zweiten und dem dritten Array-Element um 1 größer als der Abstand zwischen dem ersten und dem zweiten Array-Element sein muss, muss der Abstand zwischen dem vorletzten und dem vorvorletzten Element des MIMO-Arrays um 1 größer als der Abstand zwischen dem vorletzten und dem letzten Element sein. Diese vierte Bedingung für minimal-redundante MIMO-Arrays mit mehr als drei Elementen wird ebenfalls in dem Optimierungsverfahren implementiert.

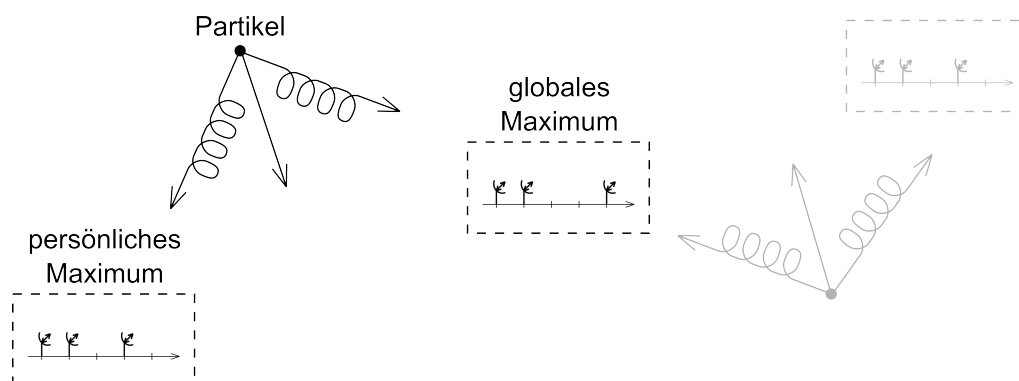
## Partikel-Schwarm-Optimierung

Die Zielfunktion (4.16) sowie die hergeleiteten Randbedingungen zur Optimierung von minimal-redundanten MIMO-Arrays können in einem der zahlreichen Optimierungsalgorithmen, die heutzutage zur Verfügung stehen, implementiert werden. Die Frage, welcher Algorithmus eine effizientere Optimierung der MIMO-Arrays bietet, ist nicht ohne weiteres zu beantworten. Denn schon ein Vergleich einer begrenzten Anzahl der herkömmlichen Algorithmen würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Daher wird sich in dieser Arbeit bei der Wahl des Optimierers auf die Algorithmen konzentriert, die für die Probleme der Antennentechnik bereits gute Ergebnisse geliefert haben. Die bekanntesten Algorithmen, die in diesem Gebiet eine breite Anwendung fanden, sind *evolutionäre* Algorithmen mit dem *Genetischen* Algorithmus als einem der meist verbreiteten. Es wurden ebenfalls für viele Aufgaben der Antennentechnik *naturanaloge* Optimierungsverfahren eingesetzt, unter denen die *Partikel-Schwarm-Optimierung* am meisten repräsentiert ist. Analyse und Vergleich der Effizienz dieser beiden Algorithmen in verschiedenen Problemen der Antennentechnik und der Elektromagnetik zeigen, dass die beiden Algorithmen etwa gleich gut sind, obwohl der Partikel-Schwarm-Algorithmus etwas einfacher zu implementieren und zu verstehen ist [33–35].

Mit der Funktionsweise, der Einstellung der internen Parameter und der Leistungsfähigkeit der Partikel-Schwarm-Optimierung hat sich die einschlägige Literatur intensiv auseinander gesetzt (s. [36–39] und Referenzen darin). Für die Optimierung von minimal-redundanten MIMO-Arrays wurde in dieser Arbeit eine frei zugängliche MATLAB-Implementierung [40] des Algorithmus gewählt.

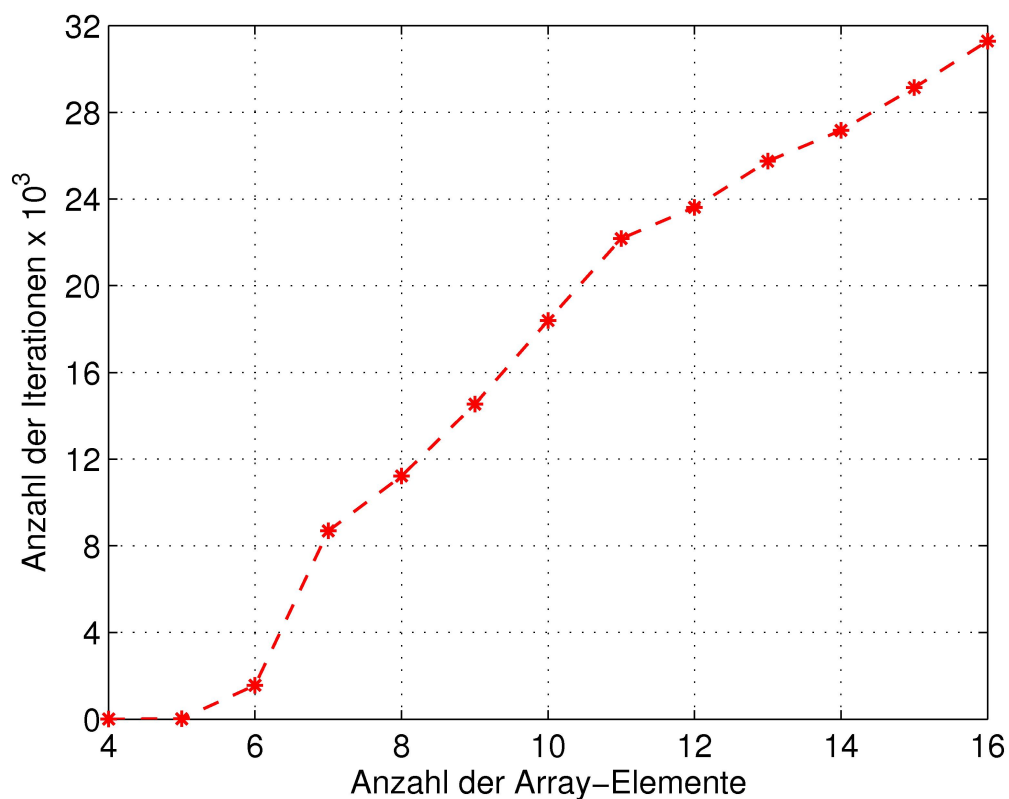
Wie der Name des Verfahrens schon andeutet, simuliert der Algorithmus Verhalten von mehreren Individuen (Partikeln) bei der Suche nach der besten Lösung des Problems. Jedes Individuum stellt eine Array-Konfiguration aus dem Lösungsraum dar. Die Anzahl der Partikel des Optimierers ist unter Berücksichtigung der Problemkomplexität zu wählen; in [41] wird eine Anzahl von Individuen zwischen 20 und 60 empfohlen. Für die Suche nach den minimal-redundanten MIMO-Konfigurationen wurde daher eine Partikelanzahl von 40 gewählt.

Jedes Individuum des Schwarms kennt die Position des als global identifizierten Maximums, das vom Schwarm seit dem Optimierungsbeginn gefunden wurde. Jedes Individuum kennt ebenso die Position des lokalen Maximums, das es selbst gefunden hat. Wie in Bild 4.7 schematisch dargestellt, entsteht die momentane Suchrichtung des Individuums durch Überlagerung von zwei Kraftvektoren, die auf das globale bzw. das persönliche Maximum ausgerichtet sind. Die beiden Anziehungskräfte des Partikels sind mit jeweils einer Konstante gewichtet, die das kognitive bzw. soziale Verhalten des Partikels steuert. Für das MIMO-Array-Problem wurden die beiden Konstanten wie in [41] empfohlen etwa gleich 1,5 gewählt. Die Optimierung wird stets beendet, wenn das globale Maximum sich über hinreichend lange Iterationszahl nicht geändert hat.



**Abbildung 4.7:** Suchrichtung des Individuums aus der Überlagerung von globaler und persönlicher Anziehungskraft.

Die Effizienz des Optimierers wird statistisch erfasst. Dafür werden Konfigurationen von monostatischen MIMO-Arrays mit 4...16 Elementen jeweils 100 Mal auf minimale Redundanz optimiert und die mittlere Zahl der Iterationen berechnet. Wie in Bild 4.8 dargestellt, steigt die Anzahl der Iterationen ab zehn Array-Elemente etwa linear an. Die relativ kleine Anzahl an Iterationen für Arrays

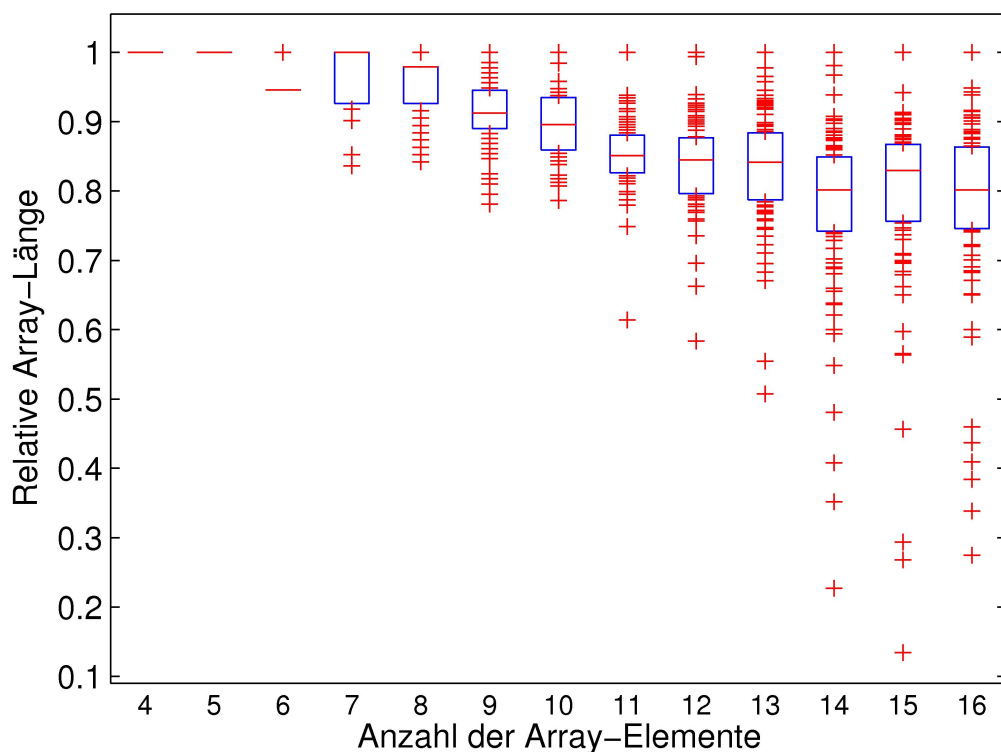


**Abbildung 4.8:** Mittlere Anzahl der Iterationen in 100 Durchläufen der Optimierung.

mit bis zu fünf Elementen zeigt eine in diesen Fällen schnelle Konvergenz des Algorithmus. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Optimum gefunden wird, ist bei den Arrays mit relativ kleiner Elementanzahl groß.

Als nächstes wird die kumulative Verteilung der Längen der generierten MIMO-Arrays berechnet. Um die Verteilungsfunktion für Arrays mit unterschiedlicher Elementanzahl in einem Bild übersichtlich darzustellen, wird ein sogenannter *Boxplot* verwendet. Dieser besteht aus dem eigentlichen Kasten, der durch die 25%- und 75%-Quantile, die den sogenannten Interquartilsabstand definieren, eingegrenzt ist und somit 50% der Werte einschließt. Die Mittellinie des Kastens entspricht dem Median, dessen relative Position innerhalb des Kastens die Schiefe der Verteilung darstellt [42]. Die außerhalb des Kastens liegenden Werte sind durch Pluszeichen „+“ dargestellt. Die Array-Längen sind auf den maximalen Wert der 100 Verläufe normiert, um die Verteilungen für Arrays mit unterschiedlicher Elementanzahl besser vergleichen zu können.

Der Boxplot für 100 Durchläufe der Optimierung der minimal-redundanten MIMO-Arrays ist in Bild 4.9 dargestellt. Die Längen der optimierten MIMO-Arrays mit vier und fünf Elementen weisen keine Streuung über die 100 Verläufe auf, was die guten Konvergenzeigenschaften des Optimie-



**Abbildung 4.9:** Boxplot der Längen der optimierten minimal-redundanten MIMO-Arrays für 100 Durchläufe der Optimierung.

ers für kleine Arrays zeigt. Erst Arrays mit mehr als fünf Elementen zeigen eine Streuung der Array-Längen. Wie man im Boxplot erkennt, werden sowohl der Median als auch die 25%- und 75%-Quantile der Verteilung mit steigender Elementanzahl kleiner. Demzufolge wird die Wahrscheinlichkeit kleiner, dass ein Optimierungsergebnis das gesuchte Optimum ist. Zur Steigerung der Konvergenz würde eine Erhöhung der Zahl der Partikel helfen. Dies würde aber wiederum auch eine Erhöhung der Rechenkomplexität mit sich bringen.

Die optimierten Konfigurationen der monostatischen minimal-redundanten MIMO-Arrays sind in Tab. 4.2 dargestellt. Die Konfigurationen der optimierten MIMO-Arrays mit 2, 3 und 4 Elementen sind die gleichen, wie die mit einer systematischen Suche ermittelten Array-Konfigurationen.

**Tabelle 4.2:** Konfigurationen von monostatischen minimal-redundanten MIMO-Arrays. Legende s. Text.

N	MIMO-Array	$L_{eq}$
2	·1·	2
3	·1·3·	8
4	·1·8·3·	24
5	·1·13·5·3·	44
6	·1·8·1·24·3·	74
7	·1·14·1·36·6·3·	122
8	·1·7·27·39·12·6·3·	190
9	·1·4·37·9·69·3·11·3·	274
10	·1·20·4·44·5·106·3·6·3· ·1·20·7·41·5·106·3·6·3· ·1·22·5·39·4·109·3·6·3·	384
11	·1·25·13·49·45·108·3·6·6·3·	518
12	·1·22·13·46·39·71·119·3·6·6·3·	658
13	·1·21·1·1·28·68·115·113·44·3·6·3·	808
14	·1·43·7·84·4·53·8·296·3·6·6·6·3·	1040
15	·1·19·34·11·82·17·84·106·196·21·3·6·6·3·	1178
16	·1·71·1·140·1·77·1·377·6·23·3·5·4·5·3·	1436

Die optimierten Arrays mit 5...9 und 13..16 Elementen sind mit hoher Wahrscheinlichkeit minimal-redundant. Als Vorarbeiten zu dieser Arbeit wurden in [8] die minimal-redundanten Arrays mit bis zu 12 Elementen mit etwa den gleichen Einstellungen des Optimierers ermittelt. Die dort aufgelisteten Arrays mit 10, 11 und 12 Elementen sind etwas länger als die hier optimierten Arrays.

### Synthese von monostatischen MIMO-Arrays

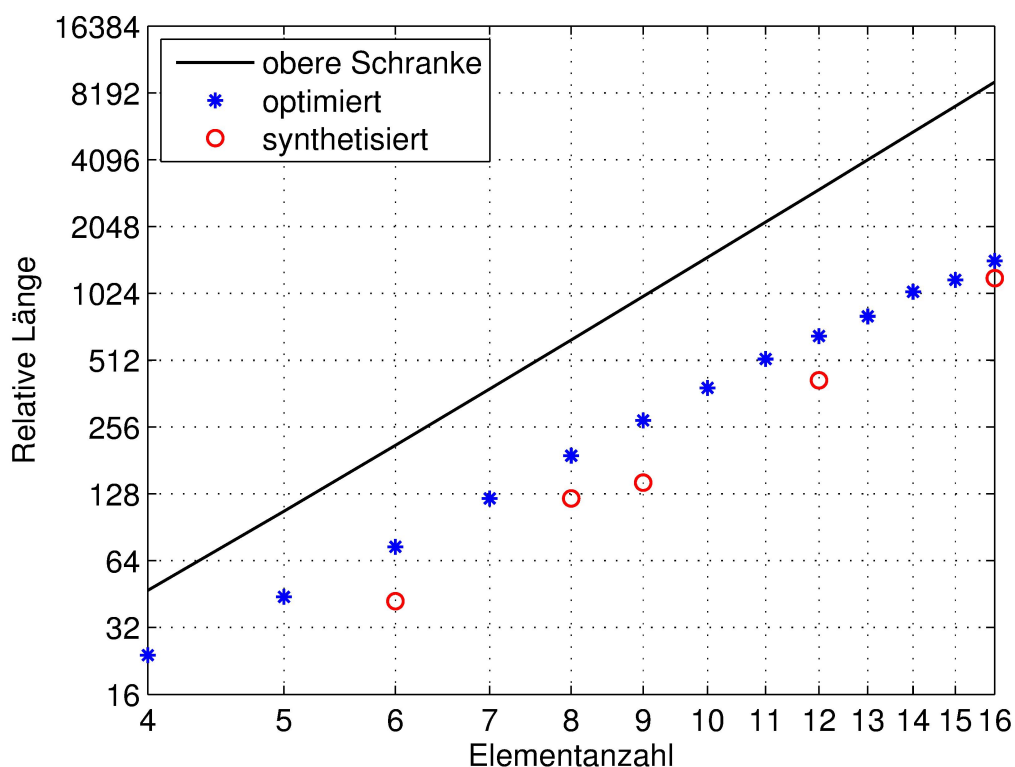
Das in Unterkapitel 4.3 dargestellte kombinatorische Verfahren, aus zwei kürzeren minimal-redundanten SIMO-Arrays ein längeres Array zu kombinieren, kann leicht geändert zur Synthese von monostatischen MIMO-Arrays mit geringer Redundanz verwendet werden. Als Basis-Arrays können dabei die optimierten Arrays aus Tab. 4.2 eingesetzt werden. Weil das Ko-Array viermal so lang wie das MIMO-Array ist, erfolgt die erforderliche „Streckung“ eines der beiden Basis-Arrays mit vierfacher Länge des zweiten Basis-Arrays. Als Faltungsprodukt der beiden Basis-Konfigurationen ergibt sich das neue MIMO-Array. Die Anzahl der Elemente im synthetisierten MIMO-Array ist gleich dem Produkt der Elementanzahlen der beiden Basis-Arrays. Aus diesem Grund ist die Synthesemethode nicht geeignet zur Generierung von MIMO-Arrays, bei denen die Anzahl der Elemente eine Primzahl ist. Ebenso ineffizient erweist sich die Methode, wenn die Elementanzahlen der beiden Basis-Arrays nicht ausgeglichen sind, sich also um mehr als eins unterscheiden.

Als Beispiel für die Synthesemethode sind die synthetisierten MIMO-Arrays mit 6, 8, 9, 12 und 16 Elementen in Tab. 4.3 dargestellt. Die relativen Längen der äquivalenten Empfangs-Arrays der synthetisierten sowie der optimierten MIMO-Konfigurationen sind in Bild 4.10 dargestellt. Die synthetisierten Arrays sind stets kürzer als die optimierten Arrays, obwohl der relative Unterschied der Längen mit der Elementanzahl abnimmt.

Die obere Schranke nach (4.12) für die Längen von minimal-redundanten MIMO-Arrays ist ebenfalls in Bild 4.10 dargestellt. In Bild 4.11 sind die Ausdünnungsraten von optimierten und syn-

**Tabelle 4.3:** Synthetisierte monostatische MIMO-Arrays. Legende s. Text.

N	1. Basis-Array	2. Basis-Array	MIMO-Array	$L_{eq}$
6	.1.	.1.3.	.1.4.1.14.1.	42
8	.1.	.1.8.3.	.1.4.1.39.1.14.1.	122
9	.1.3.	.1.3.	.1.3.13.1.3.47.1.3.	144
12	.1.3.	.1.8.3.	.1.3.13.1.3.132.1.3.47.1.3.	416
16	.1.8.3.	.1.8.3.	.1.8.3.37.1.8.3.380.1.8.3.135.1.8.3.	1200

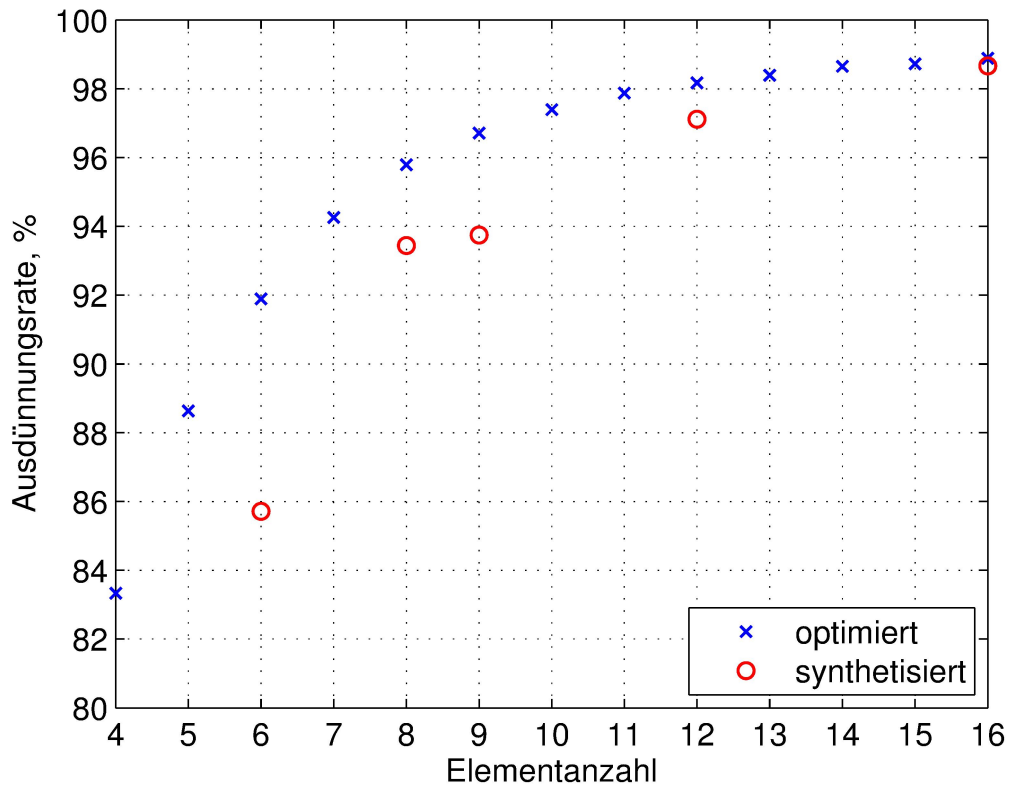


**Abbildung 4.10:** Relative Länge von äquivalenten Empfangs-Arrays von optimierten und synthetisierten MIMO-Arrays sowie die obere Schranke für minimal-redundante MIMO-Arrays.

thetisierten MIMO-Arrays dargestellt. Demnach weisen MIMO-Arrays mit mehr als 10 Elementen Ausdünnungsraten von mehr als 97% auf.

## 4.5 Ausgedünnte MIMO-Arrays mit vorgegebenem Mindestelementabstand

Betrachtet man die in Tab. 4.2 dargestellten Konfigurationen der optimierten minimal-redundanten MIMO-Arrays, fallen relativ große Abstände zwischen benachbarten Array-Elementen auf. Diese sind besonders bei den relativ langen Arrays ausgeprägt. Allgemein steht dem Einzelstrahler und seiner zugehörigen Elektronik in ausgedünnten Arrays mehr Platz zur Verfügung als in uniformen Arrays. Weiterhin ist das externe Signalübersprechen in ausgedünnten Arrays aufgrund der vergrößerten Abstände zwischen den Array-Elementen in der Regel geringer als in uniformen Arrays. Wenn also für Radaranwendungen unter anderem die Größe der Einzelstrahler und/oder das Signalübersprechen zwischen den Array-Elementen eine limitierende Bedingung ist, würden die minimal-redundanten Arrays als ein Vertreter der Klasse der ausgedünnten Arrays eine mögliche Lösung für das Problem darstellen.



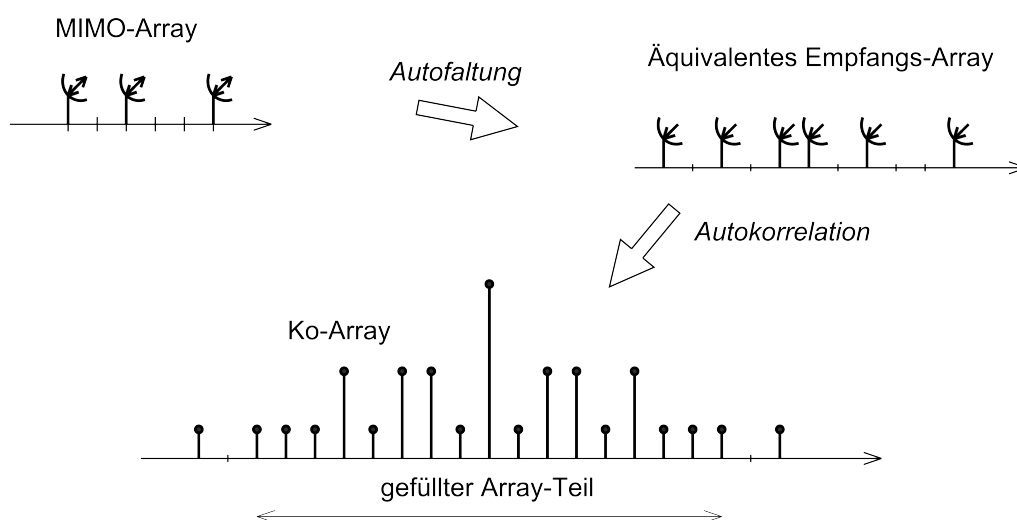
**Abbildung 4.11:** Ausdünnungsraten von optimierten und synthetisierten MIMO-Arrays.

### Allgemein minimal-redundante MIMO-Arrays

Wie es in Abschnitt 4.4.1 gezeigt wurde, muss es in einem minimal-redundanten MIMO-Array einen normierten Mindestabstand von 1 zwischen den benachbarten Randelementen geben, damit das Ko-Array uniform ist. Die Konfigurationen von solchen minimal-redundanten MIMO-Arrays werden hier ebenfalls eingeschränkt genannt – wie die gleichnamige Array-Klasse der minimal-redundanten SIMO-Arrays (s. Abschnitt 3.2.1).

Eine zweite Unterklasse von minimal-redundanten MIMO-Arrays stellen die allgemeinen Arrays dar. In den Ko-Arrays der allgemeinen Arrays sind im Gegensatz zu eingeschränkten Arrays Lücken erlaubt. Die Bedingung an das Ko-Array lautet: Sein uniformer Teil muss maximale Länge für die gegebene Anzahl an MIMO-Elementen aufweisen. Diese Bedingung gilt ebenfalls für die Ko-Arrays der allgemeinen SIMO-Arrays (s. Abschnitt 3.2.1).

Ein Beispiel für ein allgemeines MIMO-Array mit drei Elementen ist in Bild 4.12 dargestellt. Die normierten Abstände zwischen den benachbarten Elementen betragen  $(\cdot 2 \cdot 3 \cdot)$ . Sie sind größer als



**Abbildung 4.12:** Allgemeines minimal-redundantes MIMO-Array mit drei Elementen sowie sein Ko-Array.

1. Das zugehörige Ko-Array ist deshalb nicht uniform. Der uniforme Teil des Ko-Arrays ist gleich lang wie das Ko-Array des eingeschränkten MIMO-Arrays mit drei Elementen (vgl. Bild 4.3). Die Konfigurationen der beiden MIMO-Arrays sind unterschiedlich; die normierte Länge des allgemeinen MIMO-Arrays ist um 1 höher als die des eingeschränkten Arrays.

Die Konfigurationen von allgemein minimal-redundanten MIMO-Arrays können – wie im Fall der eingeschränkten MIMO-Arrays – durch systematische Suche gefunden werden, wenn die Elementanzahl relativ klein ist. Die längeren Arrays wurden in dieser Arbeit mit dem Partikel-Schwarm-Algorithmus optimiert. Die optimierten allgemeinen Arrays mit bis zu 12 Elementen sind in Tab. 4.4 dargestellt. Ein allgemeines Array mit vier Elementen und einem uniformen Ko-Array-Teil größer oder gleich lang wie das Ko-Array des eingeschränkten MIMO-Arrays mit vier Elementen konnte nicht gefunden werden.

Um einen Vergleich von allgemeinen und eingeschränkten Arrays zu ermöglichen, wird für die allgemeinen Arrays ebenfalls die effektive Länge  $L_{eff}$  eingeführt, die halb so groß wie die Länge des uniformen Teils des Ko-Arrays gesetzt wird. Die effektive Länge ist deshalb stets kürzer als die Länge des äquivalenten Empfangs-Arrays. Die effektiven Längen sind ebenfalls in Tab. 4.4 dargestellt. Der Vergleich der Längen von allgemein und eingeschränkt minimal-redundanten MIMO-Arrays ist in Bild 4.13 zu sehen. Die Längen der uniformen Teile der Ko-Arrays der allgemeinen MIMO-Arrays sind demnach etwas größer als die Ko-Array-Längen der eingeschränkt minimal-redundanten MIMO-Arrays.

Eine geeignete Bildsignalverarbeitung mit allgemeinen MIMO-Arrays kann mit dem Verfahren des

**Tabelle 4.4:** Konfigurationen von allgemein minimal-redundanten MIMO-Arrays. Legende s. Text.

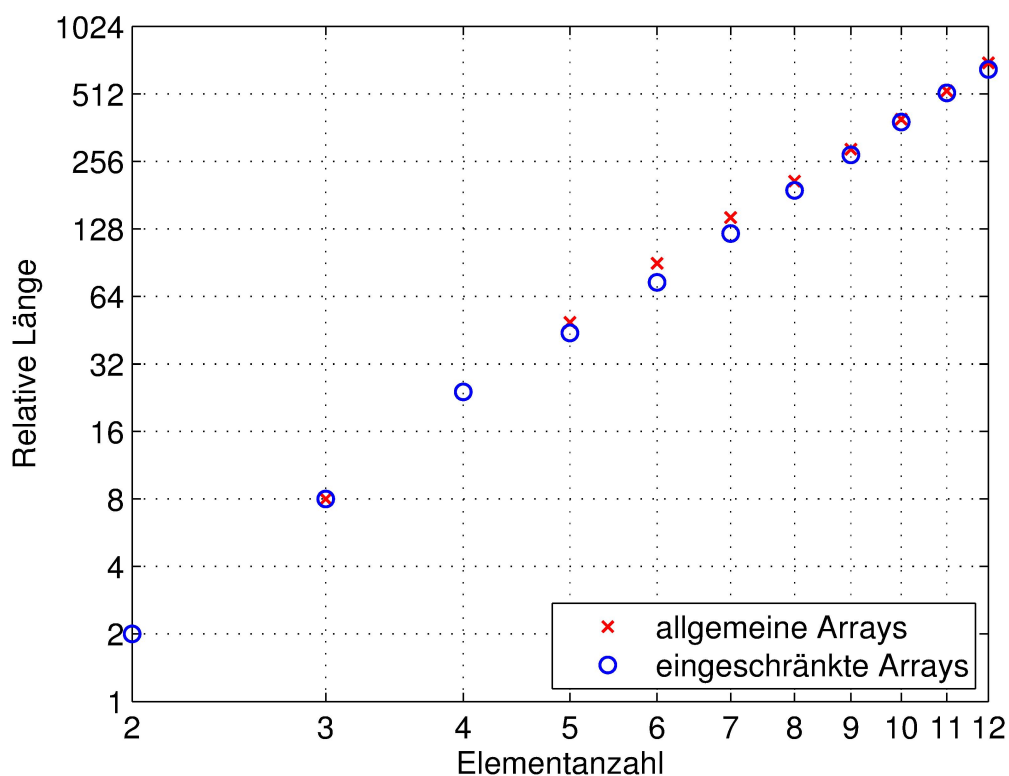
N	MIMO-Array	$L_{eff}$
3	·2·3·	8
4	-	-
5	·3·16·4·5· ·5·17·1·7·	49
6	·1·20·11·18·5· ·1·30·4·9·41·	90
7	·6·11·36·13·8·48·	144
8	·1·9·5·86·3·33·26·	209
9	·5·12·1·21·42·28·130·19·	290
10	·1·78·191·3·9·14·6·42·47·	395
11	·18·128·71·10·2·96·27·14·35·122·	528
12	·3·108·243·53·97·27·18·1·25·15·36·	704

Ko-Array-Gewichtens erfolgen (s. Unterkapitel 3.3). Dabei erscheint das Gewicht des gefüllten Teils des Ko-Arrays sinnvoll. Die Ko-Array-Antwort außerhalb des uniformen Teils des Ko-Arrays – für das Array in Bild 4.12 sind das die beiden Elemente an den Ko-Array-Rändern – wird dabei ausgelassen.

### MIMO-Arrays mit vorgegebenem Mindestelementabstand

Betrachtet man die in Tab. 4.4 dargestellten Konfigurationen von allgemein minimal-redundanten MIMO-Arrays, fallen Arrays mit normierten Mindestabstand zwischen benachbarten Array-Elementen größer als 1 auf. Darunter ist beispielsweise die Array-Konfiguration (·3·16·4·5·) mit fünf Elementen, bei der der minimale normierte Elementabstand 3 beträgt. Es gibt ebenfalls das Array (·6·11·36·13·8·48·) mit sieben Elementen, bei dem der normierte Mindestabstand 6 beträgt. Die beiden allgemeinen Arrays können also eine Lösungsvariante für die Anwendungen darstellen, wo der Mindestabstand zwischen benachbarten Elementen kritisch ist.

Im Allgemeinen aber sind nicht alle der optimierten allgemeinen MIMO-Arrays für solche spezifischen Anwendungen geeignet, denn allgemeine Array-Konfigurationen mit einem normierten Mindestabstand größer als 1 sind eher selten (vgl. Tab. 4.4). Es besteht also gegebenenfalls der Bedarf,



**Abbildung 4.13:** Längen der äquivalenten Empfangs-Arrays von eingeschränkt minimal-redundanten MIMO-Arrays sowie die effektiven Längen von allgemeinen MIMO-Arrays.

minimal-redundante Arrays zu generieren, bei denen die Abstände zwischen benachbarten Array-Elementen nicht kleiner (also eingeschränkt) als ein geforderter Wert sind.

Das in dieser Arbeit verwendete Verfahren, um Arrays mit eingeschränktem Abstand zu generieren, basiert auf der Optimierung mit dem Partikel-Schwarm-Algorithmus. Die Implementierung des Optimierungsproblems ist ähnlich wie im Fall der Optimierung von allgemeinen MIMO-Arrays. Zusätzlich wird der Optimiererschnittstelle der Einschränkungsfaktor  $k \in \mathbb{N}$  zugefügt, der den minimalen, normierten Abstand zwischen benachbarten Array-Elementen definiert. Das Optimierungsziel bleibt wie im Fall der allgemeinen Arrays die Maximierung der Länge des uniformen Teils des Ko-Arrays [43].

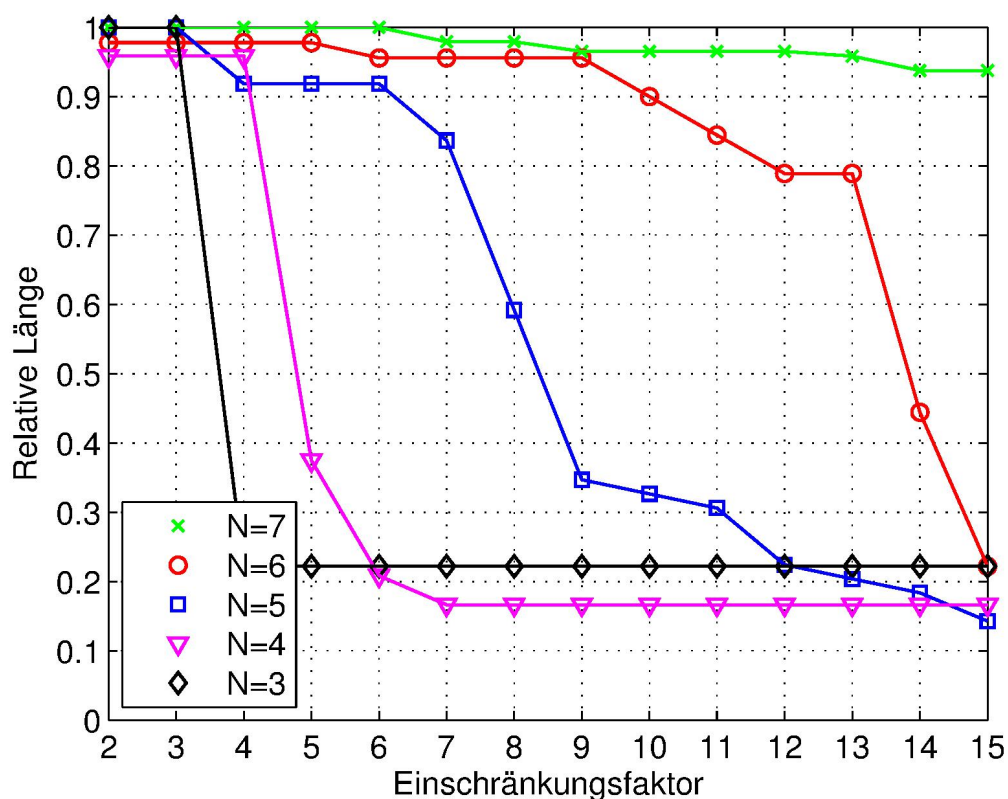
Die Ergebnisse der Optimierung von Arrays mit bis zu sieben Elementen und dem Einschränkungsfaktor  $k = 2 \dots 15$  sind in Tab. 4.5 dargestellt. Array-Konfigurationen mit der gleichen Elementanzahl und bestimmten Einschränkungsfaktoren sind gleich. Zum Beispiel wurde für Arrays mit sechs Elementen und  $k = 2, 3, 4, 5$  stets die gleiche Konfiguration  $(\cdot 5 \cdot 19 \cdot 9 \cdot 18 \cdot 7 \cdot)$  generiert, da die normierten Elementabstände im Array gleich oder größer 5 sind. Außerdem wurden keine 6-Elemente-Arrays

**Tabelle 4.5:** Ergebnisse der Optimierung von MIMO-Arrays mit eingeschränktem Mindestelementabstand. Legende s. Text.

$k$	Anzahl der Array-Elemente				
	N=3	N=4	N=5	N=6	N=7
2	·2·3·	·4·5·6·	·3·16·4·5·	·5·19·9·18·7·	·6·11·36·13·8·48·
3	·3·4·	·4·5·6·	·3·16·4·5·	·5·19·9·18·7·	·6·11·36·13·8·48·
4	·4·5·	·4·5·6·	·6·7·8·10·	·5·19·9·18·7·	·6·11·36·13·8·48·
5	·5·6·	·7·5·8·	·6·7·8·10·	·5·19·9·18·7·	·6·11·36·13·8·48·
6	·6·7·	·6·7·9· ·7·6·9·	·6·7·8·10·	·8·13·15·12·10·	·6·11·36·13·8·48·
7	·7·8·	·7·9·10·	·10·7·8·21·	·8·13·15·12·10·	·46·13·14·20·8·49·
8	·8·9·	·9·8·11·	·9·15·8·11·	·8·13·15·12·10·	·46·13·14·20·8·49·
9	·9·10·	·10·9·12·	·11·16·9·15· ·13·16·9·15·	·9·17·10·15·14·	·39·17·13·12·21·41·
10	·10·11·	·10·11·13·	·10·13·11·19·	·13·14·10·12·43·	·39·17·13·12·21·41·
11	·11·12·	·11·12·14·	·12·11·14·19· ·14·11·13·20·	·16·15·11·14·19·	·39·17·13·12·21·41·
12	·12·13·	·13·14·16·	·15·13·12·21· ·18·13·12·21·	·18·13·14·16·21·	·39·17·13·12·21·41·
13	·13·14·	·13·14·16·	·16·13·15·20· ·16·14·13·21·	·18·13·14·16·21·	·14·15·26·13·18·20· ·15·22·21·14·13·19·
14	·14·15·	·14·15·17·	·17·14·15·21·	·14·19·17·15·24·	·24·19·15·18·23·31·
15	·15·16·	·15·16·18·	·15·18·16·22·	·23·16·15·18·28·	·24·19·15·18·23·31·

mit einem normierten Mindestelementabstand kleiner als 5 generiert, die weniger redundant als die Konfiguration (·5·19·9·18·7·) sind.

Die Längen der effektiven Empfangs-Arrays der optimierten MIMO-Arrays aus Tab. 4.5 sind in Bild 4.14 dargestellt. Um die qualitative Änderung der Länge des gefüllten Teils des Ko-Arrays mit steigendem Einschränkungsfaktor hervorzuheben, sind die Längen auf die effektiven Längen von allgemeinen Arrays (s. Tab. 4.4) normiert. In Bild 4.14 ist zu erkennen, dass es für Array-Konfigurationen mit gleicher Elementanzahl einen kritischen Wert des Einschränkungsfaktors gibt,



**Abbildung 4.14:** Längen von effektiven Empfangs-Arrays von MIMO-Arrays mit eingeschränktem Mindestelementabstand.

ab dem die optimierten Arrays einen relativ kurzen uniformen Ko-Array-Teil aufweisen. Diese Grenze liegt beispielsweise für Arrays mit vier Elementen bei etwa  $k=5$ : Array-Konfigurationen mit  $k>5$  weisen einen mindestens 80% kürzeren uniformen Teil des Ko-Arrays verglichen mit allgemeinen MIMO-Arrays mit vier Elementen auf.

## Fazit

In diesem Kapitel wird eine obere Schranke für die maximale Länge von monostatischen minimal-redundanten MIMO-Arrays hergeleitet. Die Schranke verläuft etwa um einen Faktor 2...4 höher als die Längen von optimierten MIMO-Arrays mit bis zu 16 Elementen. Das Verhältnis steigt logarithmisch mit der Elementanzahl (s. Bild 4.10). Diese Schranke wird zur Definition des Lösungsraums beim Optimieren von monostatischen minimal-redundanten MIMO-Arrays verwendet. Die vorgestellte, auf dem Partikel-Schwarm-Algorithmus basierende Optimierungsmethode zur Generierung von minimal-redundanten MIMO-Arrays mit mittlerer Anzahl an Elementen wird als geeignet bewertet, was auch ein gutes Konvergenzverhalten des Optimierers bestätigt (s. Bild 4.9). Die Dimension des Lösungsraums und folglich der Rechenaufwand können reduziert werden, indem für die

Elementpositionen an den Array-Rändern dank einer Potenzreihenanalyse Bedingungen formuliert werden.

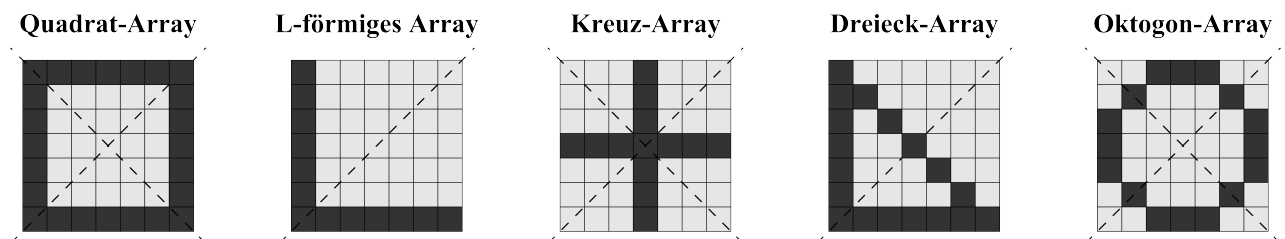
Weiter werden in diesem Kapitel Konfigurationen von bistatischen MIMO-Arrays mit bis zu 16 Elementen mit hohen Ausdünnungsraten von bis zu 98% synthetisiert (s. Bild 4.11). Trotz der hohen Ausdünnungsrate sind die bistatischen Arrays den monostatischen unterlegen. Das zeigt der Vergleich der relativen Längen von monostatischen (s. Tab. 4.2) und bistatischen (s. Tab. 4.1) Array-Konfigurationen mit gleicher Elementanzahl.

Des Weiteren werden allgemein minimal-redundante MIMO-Arrays untersucht. Diese sind etwas länger als eingeschränkte MIMO-Arrays – so wie es bei minimal-redundanten SIMO-Arrays der Fall ist (vgl. Abschnitt 3.2.1). Für Radaranwendungen mit kritischem Mindestabstand zwischen benachbarten Array-Elementen werden schließlich MIMO-Arrays mit vorgegebenem (eingeschränktem) Mindestelementabstand vorgestellt. Ein Experiment mit einem solchen MIMO-Array mit vier Elementen wird in Kapitel 7 beschrieben.

## 5 Quadratische MIMO-Arrays mit minimaler Redundanz

Auf das Thema der planaren MIMO-Arrays wird in dieser Arbeit eingegangen, um zu zeigen, dass die bisher vorgestellten Verfahren für lineare, minimal-redundante Arrays prinzipiell auch im Fall von zweidimensionalen Arrays funktionieren. Um dies zu zeigen, genügen einfache Arrays. Aus diesen Gründen werden in dieser Arbeit planare Arrays mit der einfachsten Geometrie betrachtet, bei denen die Array-Elemente sich in den Knoten eines orthogonalen, uniformen Gitters befinden. Die Zellengröße des Gitters beträgt – wie bei den linearen Arrays – eine halbe Wellenlänge.

Des Weiteren werden quadratische MIMO-Arrays diskutiert. Das sind Arrays, deren Elemente sich innerhalb eines Quadrates befinden. Quadratische Arrays werden hier bevorzugt, weil die meisten von ihnen diagonalsymmetrisch sind, wie in Bild 5.1 an grundlegenden Varianten von quadratischen Arrays zu sehen ist [44]. Aufgrund der Symmetrie sind Analyse und Generierung von solchen Ar-



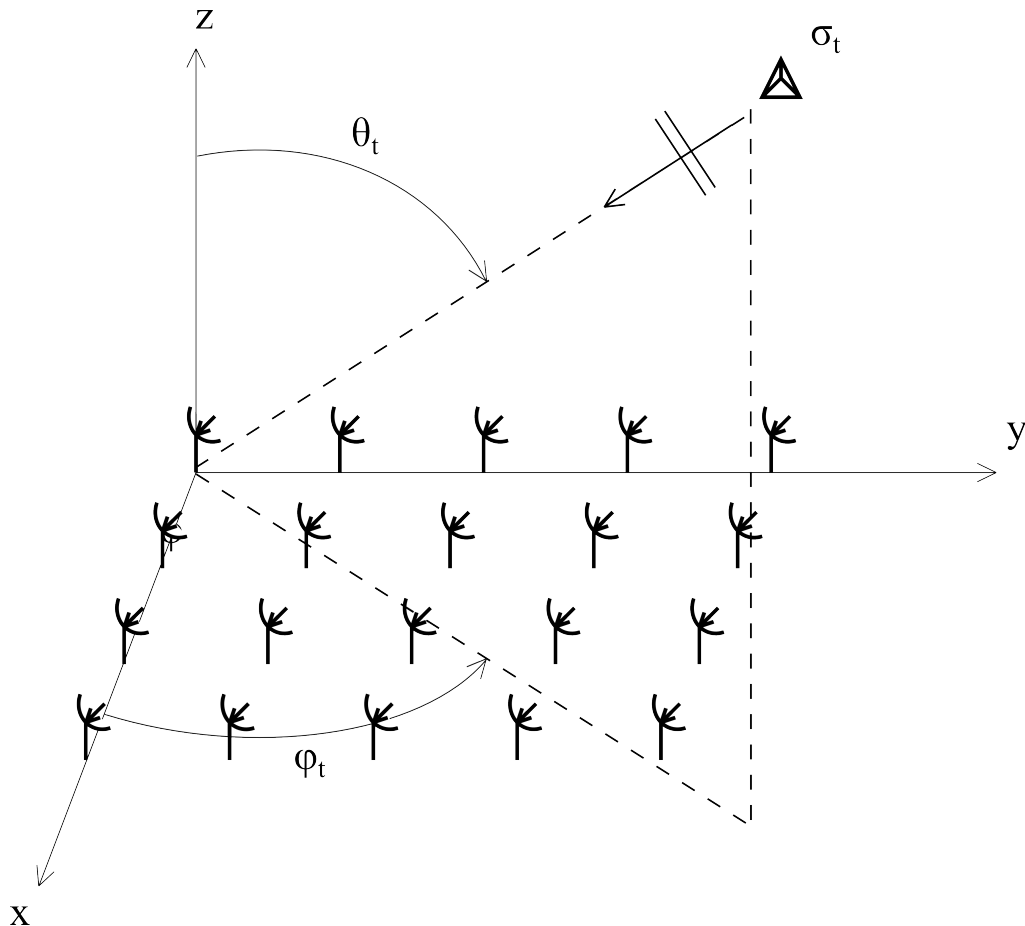
**Abbildung 5.1:** Typische Varianten von quadratischen, diagonalsymmetrischen Arrays. Die schwarzen Quadrate stellen die Array-Elemente und die gestrichelten Linien die Symmetrielinien dar.

rays einfacher und weniger aufwendig als bei rechteckigen.

Die Problematik der Generierung von quadratischen minimal-redundanten MIMO-Arrays ist im Prinzip die gleiche wie bei den linearen SIMO- und MIMO-Arrays: Es gibt keine geschlossene analytische Lösung für die Array-Konfigurationen. Daher werden Optimierungs- bzw. Synthesemethoden benötigt. Das Problem der relativ hohen Nebenkeulen bei planaren minimal-redundanten MIMO-Arrays kann wie im Fall der linearen SIMO- und MIMO-Arrays mit der Methode des Ko-Array-Gewichtens gelöst werden. Dafür wird ein geeignetes Ko-Array-Modell benötigt.

## Ko-Array-Modell für planare MIMO-Arrays

Die Geometrie eines planaren Arrays ist in Bild 5.2 dargestellt. Die Modellierung erfolgt hier durch



**Abbildung 5.2:** Geometrie eines planaren Arrays.

die Dimensionserweiterung des Modells (2.10) für lineare Arrays. Die komplexe Array-Antwort kann hier als  $i[n, q]$  dargestellt werden, wobei  $n$  und  $q$  die Substitutionsvariablen (vgl. Unterkapitel 2.4) für die  $x$ - bzw.  $y$ -Positionen der Array-Elemente in Bild 5.2 sind.

Mit Hilfe der zweidimensionalen Fourier-Transformation  $\mathcal{F}_{2D}$  kann das Winkelspektrum der Array-Antwort wie folgt berechnet werden:

$$\hat{P}[m, p] = \frac{1}{NQ} |\mathcal{F}_{2D} \{i[n, q]\}|^2, \quad (5.1)$$

wobei  $m, p$  die ganzzahligen Variablen der zweidimensionalen Ortsfrequenz und  $N, Q$  die Anzahl der Elementpositionen in beiden Dimensionen sind (vgl. (2.13)).

Die zweidimensionale Ko-Array-Antwort kann analog zu (2.14) wie folgt berechnet werden:

$$\widehat{R}[n, q] = \frac{1}{NQ} i^*[-n, -q] * i[n, q]. \quad (5.2)$$

Eine für die Gewichtung des Ko-Arrays benötigte zweidimensionale Fensterfunktion kann aus zwei linearen Fensterfunktionen  $w_1[n]$  und  $w_2[q]$  wie folgt gewonnen werden:

$$w_{2D}[n, q] = w_1[n]w_2[q]^T, \quad (5.3)$$

wobei das hochgestellte  $T$  die Transponierte darstellt. Für  $w_1$  und  $w_2$  können herkömmliche Fensterfunktionen (s. Tab. 2.1) verwendet werden. Im Fall des quadratischen Arrays ist es sinnvoll zwei gleiche lineare Fensterfunktionen zur Bildung des zweidimensionalen Gewichtungsfensters zu verwenden. Die Auflösung des Arrays in den beiden Dimensionen ist gleich groß in diesem Fall.

Wie im Fall der linearen MIMO-Arrays (s. (5.4)) erfolgt die Berechnung der Ko-Array-Konfiguration aus der Konfiguration  $I_{MIMO}$  des planaren monostatischen MIMO-Arrays:

$$I_{co} = \mathcal{F}_{2D}^{-1} \{ |\mathcal{F}_{2D} \{ I_{MIMO} \}|^4 \}, \quad (5.4)$$

wobei  $\mathcal{F}_{2D}^{-1}$  die zweidimensionale inverse Fourier-Transformation ist.

## 5.1 Syntheseverfahren für quadratische minimal-redundante MIMO-Arrays

Für die Generierung der Konfigurationen von quadratischen, monostatischen, minimal-redundanten MIMO-Arrays wird in dieser Arbeit zuerst das auf dem Partikel-Schwarm-Algorithmus (s. Abschnitt 4.4.1) basierende Optimierungsverfahren herangezogen [45, 46]. Zur Abschätzung des maximalen Lösungsraums wird angenommen, dass die Anzahl der Freiheitsgrade eines quadratischen MIMO-Arrays dem Quadrat der Anzahl der Freiheitsgrade eines linearen MIMO-Arrays entspricht, wenn die Länge des linearen Arrays gleich der Kantenlänge des quadratischen Arrays ist. Dann kann die obere Schranke nach (4.13) für die Länge eines linearen Arrays als die obere Schranke  $L_{MIMO}^{max}$  für die Kantenlänge eines quadratischen Arrays betrachtet werden. Daraus ergibt sich die obere Schranke für die Kantenlängen von minimal-redundanten MIMO-Arrays zu:

$$L_{MIMO}^{max} = \frac{N_{MIMO}^2}{4}, \quad (5.5)$$

wobei  $N_{MIMO}$  die Anzahl der MIMO-Elemente ist. Zur Vereinfachung des Ausdrucks wurden die Terme kleinerer als 4. Ordnung in (4.13) vernachlässigt.

Die Optimierung von quadratischen MIMO-Arrays besteht im Maximieren der Fläche des uniformen quadratischen Ko-Arrays. Die Zielfunktion wird definiert als:

$$f = \frac{\text{Gesamtfläche des Ko-Arrays}}{\text{Anzahl der Nullstellen im Ko-Array} + 1}. \quad (5.6)$$

Demzufolge wird die Zielfunktion umso kleiner, je mehr Nullstellen (Lücken) das Ko-Array aufweist. Die Optimierung verläuft dadurch etwas robuster [45].

Die Ergebnisse der Optimierung von quadratischen minimal-redundanten MIMO-Arrays mit 4 bis 14 Elementen sind in Tab. 5.1 dargestellt. Die Konfigurationen sind in vektorieller Schreibweise dargestellt, wobei die Vektoreinträge die Positionen der Array-Elemente in der zweidimensionalen Matrix darstellen. Es konnten keine minimal-redundanten Konfigurationen mit fünf und sieben Array-Elementen gefunden werden. Zudem existieren keine quadratischen MIMO-Arrays mit weniger als vier Elementen, wie weiter unten erläutert wird.

Für alle gefundenen Array-Konfiguration mit einer Elementanzahl  $N_{MIMO}$  von acht oder größer zeigt sich, dass diese um fünf größer als die normierte Seitenlänge  $L_{MIMO}$  des quadratischen Arrays ist:

$$N_{MIMO} = L_{MIMO} + 5. \quad (5.7)$$

Demzufolge ist die Elementanzahl eines uniformen, quadratischen Arrays etwa das Quadrat der eines minimal-redundanten MIMO-Arrays gleicher Kantenlänge.

Die Ausdünnungsrate  $AR_{quad}$  eines quadratischen minimal-redundanten MIMO-Arrays wird in dieser Arbeit als das Verhältnis der Anzahl an fehlenden Elementen zu der Anzahl  $N_{uni}$  der Elementen eines quadratischen, uniformen Arrays gleicher Kantenlänge definiert (vgl. (3.1)):

$$AR_{quad} = \frac{N_{uni} - N_{MIMO}}{N_{uni}}. \quad (5.8)$$

Die Elementanzahl  $N_{uni}$  eines uniformen Arrays ist mit seiner normierten Kantenlänge  $L_{MIMO}$  wie folgt verknüpft:  $N_{uni} = (L_{MIMO} + 1)^2$ . Mit (5.7) ergibt sich der folgende Zusammenhang:  $N_{uni} = (N_{MIMO} - 4)^2$ . Demnach ergibt sich die Ausdünnungsrate von quadratischen minimal-redundanten MIMO-Arrays mit acht oder mehr Elementen zu:

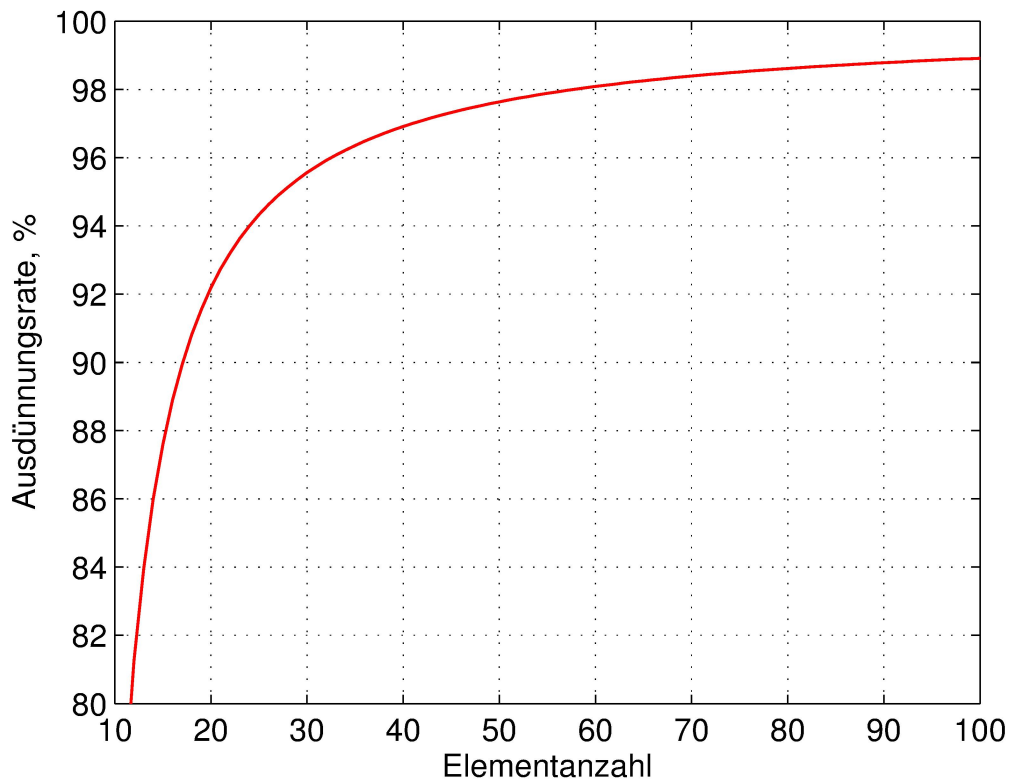
$$AR_{quad} = 1 - \frac{N_{MIMO}}{(N_{MIMO} - 4)^2}. \quad (5.9)$$

Die Ausdünnungsraten von Arrays mit 10 bis 100 Elementen sind in Bild 5.3 dargestellt. Für große  $N_{MIMO}$  gilt:  $AR_{quad} \approx 1 - \frac{1}{N_{MIMO}}$ .

## 5 Quadratische MIMO-Arrays mit minimaler Redundanz

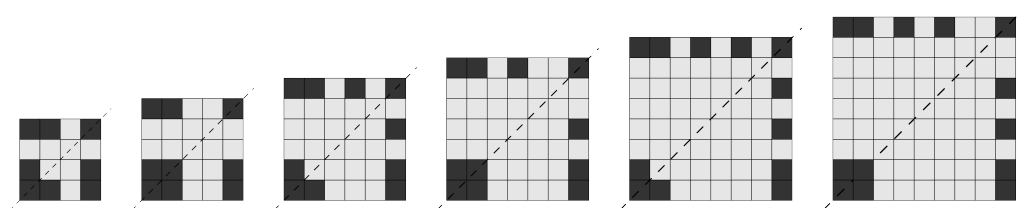
$N_{MIMO}$	Array-Konfiguration	$L_{MIMO}$
4	[(1, 1) (1, 2) (2, 1) (2, 2)]	1
6	[(1, 1) (1, 2) (1, 3) (2, 1) (3, 1) (3, 3)]	2
8	[(1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (2, 1) (2, 4) (4, 1) (4, 4)] [(1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (2, 4) (3, 4) (4, 1) (4, 4)] [(1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (3, 1) (3, 4) (4, 1) (4, 4)] [(1, 1) (1, 2) (1, 4) (2, 1) (2, 4) (4, 1) (4, 2) (4, 4)]	3
9	[(1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5) (4, 1) (4, 5) (5, 1) (5, 5)] [(1, 1) (1, 2) (1, 4) (1, 5) (2, 2) (4, 1) (4, 5) (5, 1) (5, 5)] [(1, 1) (1, 2) (1, 4) (1, 5) (2, 3) (4, 1) (4, 5) (5, 1) (5, 5)] [(1, 1) (1, 2) (1, 4) (1, 5) (2, 4) (4, 1) (4, 5) (5, 1) (5, 5)] [(1, 1) (1, 2) (1, 4) (1, 5) (2, 5) (4, 2) (4, 5) (5, 1) (5, 5)] [(1, 1) (1, 2) (1, 4) (1, 5) (3, 2) (4, 1) (4, 5) (5, 1) (5, 5)] [(1, 1) (1, 2) (1, 4) (1, 5) (3, 3) (4, 1) (4, 5) (5, 1) (5, 5)] [(1, 1) (1, 2) (1, 4) (1, 5) (3, 4) (4, 1) (4, 5) (5, 1) (5, 5)] [(1, 1) (1, 2) (1, 4) (1, 5) (4, 1) (4, 3) (4, 5) (5, 1) (5, 5)] [(1, 1) (1, 2) (1, 4) (1, 5) (4, 1) (4, 5) (5, 1) (5, 3) (5, 5)] [(1, 1) (1, 4) (1, 5) (2, 1) (2, 5) (4, 2) (5, 1) (5, 4) (5, 5)] [(1, 1) (1, 2) (1, 5) (4, 1) (4, 2) (4, 5) (5, 1) (5, 2) (5, 5)]	4
10	[(1, 1) (1, 2) (1, 4) (1, 6) (3, 6) (5, 1) (5, 6) (6, 1) (6, 2) (6, 6)]	5
11	[(1, 1) (1, 6) (1, 7) (2, 1) (2, 7) (4, 1) (6, 2) (7, 1) (7, 4) (7, 6) (7, 7)] [(1, 1) (1, 2) (1, 4) (1, 7) (4, 7) (6, 1) (6, 2) (6, 7) (7, 1) (7, 2) (7, 7)] [(1, 1) (1, 2) (1, 4) (1, 6) (1, 7) (4, 1) (5, 6) (6, 1) (6, 7) (7, 1) (7, 7)] [(1, 1) (1, 2) (1, 4) (1, 6) (1, 7) (2, 3) (4, 1) (6, 1) (6, 7) (7, 1) (7, 7)] [(1, 1) (1, 2) (1, 4) (1, 6) (1, 7) (2, 5) (4, 7) (6, 1) (6, 7) (7, 1) (7, 7)] [(1, 1) (1, 2) (1, 4) (1, 6) (1, 7) (4, 7) (5, 2) (6, 1) (6, 7) (7, 1) (7, 7)] [(1, 1) (1, 2) (1, 6) (1, 7) (3, 1) (3, 7) (6, 1) (6, 7) (7, 1) (7, 5) (7, 7)]	6
12	[(1, 1) (1, 2) (1, 4) (1, 6) (1, 8) (3, 8) (5, 8) (7, 1) (7, 8) (8, 1) (8, 2) (8, 8)]	7
13	[(1, 1) (1, 2) (1, 4) (1, 6) (1, 9) (2, 8) (4, 9) (6, 9) (8, 1) (8, 9) (9, 1) (9, 2) (9, 9)] [(1, 1) (1, 2) (1, 4) (1, 6) (1, 9) (4, 9) (6, 9) (8, 1) (8, 2) (8, 9) (9, 1) (9, 2) (9, 9)]	8
14	[(1, 1) (1, 2) (1, 4) (1, 6) (1, 8) (1, 10) (3, 10) ... ...(5, 10) (7, 10) (9, 1) (9, 10) (10, 1) (10, 2) (10, 10)]	9

**Tabelle 5.1:** Quadratische minimal-redundante MIMO-Arrays mit 4 bis 14 Elementen [45]. Legende s. Text.



**Abbildung 5.3:** Ausdünnungsraten von quadratischen minimal-redundanten MIMO-Arrays mit 10...100 Elementen.

Wie in Tab. 5.9 zu erkennen, existieren mehrere Array-Konfigurationen mit gleicher Elementanzahl und gleicher Seitenlänge. Nicht jede Konfiguration ist auch diagonalsymmetrisch. In den meisten der optimierten Konfigurationen ergibt sich jedoch ein bestimmtes Muster der Elementverteilung. Dieses Muster ist in Bild 5.4 am Beispiel der Arrays mit 8...13 Elementen dargestellt. In den gezeigten



**Abbildung 5.4:** Typisches Muster von quadratischen minimal-redundanten MIMO-Arrays. Die schwarzen Quadrate stellen die Array-Elemente und die gestrichelten Linien die Symmetrielinien dar.

Array-Varianten sind die vier Eckelemente stets vorhanden. Um diese Beobachtung auf quadratische Arrays beliebiger Kantenlänge  $L$  zu erweitern, werden die Eckelemente als Koeffizienten  $a_{00}$ ,  $a_{0L}$ ,

$a_{L0}$  und  $a_{LL}$  der Potenzreihe des MIMO-Arrays dargestellt:

$$I_{MIMO} = a_{00}x^0y^0 + \dots + a_{0L}x^0y^L + \dots + a_{L0}x^L y^0 + \dots + a_{LL}x^L y^L, \quad (5.10)$$

wobei  $x$  und  $y$  die beiden Dimensionsvariablen sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können die Koeffizienten, die die Array-Elemente darstellen, gleich eins angenommen werden. Das linke untere ECKELEMENt des Arrays befindet sich im Koordinatenursprung.

Das äquivalente Empfangs-Array ergibt sich aus der Potenzreihe (5.10) entsprechend (4.18) zu:

$$I_{eq} = a_{00}^2 x^0 y^0 + \dots + a_{0L}^2 x^0 y^{2L} + \dots + a_{L0}^2 x^{2L} y^0 + \dots + a_{LL}^2 x^{2L} y^{2L}. \quad (5.11)$$

Die ECKELEMENtE des MIMO-Arrays bilden demnach die ECKELEMENtE des äquivalenten Empfangs-Arrays. Das Ko-Array-Polynom ergibt sich entsprechend (4.19) zu:

$$I_{co} = a_{00}^2 a_{LL}^2 x^{-2L} y^{-2L} + \dots + a_{0L}^2 a_{L0}^2 x^{2L} y^{-2L} + \dots + a_{0L}^2 a_{L0}^2 x^{-2L} y^{2L} + \dots + a_{00}^2 a_{LL}^2 x^{2L} y^{2L}. \quad (5.12)$$

Bei Betrachtung der Koeffizienten des Polynoms fällt auf, dass die ECKELEMENtE des Ko-Arrays nur dann vorhanden sind, wenn alle vier ECKELEMENtE des MIMO-Arrays vorhanden sind, wenn also die Koeffizienten der ECKELEMENtE ungleich Null sind.

Das Muster der in Bild 5.4 dargestellten Arrays unterscheidet sich etwas für Arrays mit gerader und mit ungerader Elementanzahl. In den Arrays mit einer geraden Elementanzahl größer sechs sind die folgenden Positionen besetzt:

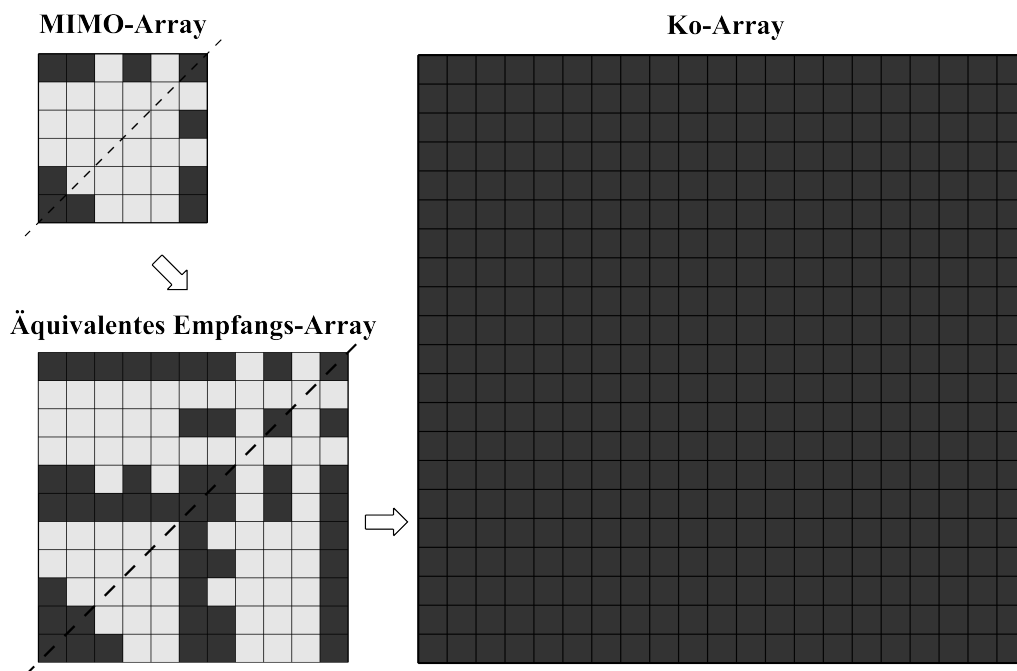
$$[\{1, 1\} \{2, 1\} \{L, 1\} \{L, 2l\}], \text{ wobei } l = 1 \dots L/2. \quad (5.13)$$

Die Array-Konfigurationen mit einer ungeraden Elementanzahl größer sieben können wie folgt beschrieben werden:

$$[\{1, 1\} \{2, 1\} \{2, 2\} \{L, 1\} \{L, 2l\} \{L, L\}], \text{ wobei } l = 1 \dots (L - 3)/2. \quad (5.14)$$

Die beiden oberen Definitionen der Arrays mit gerader bzw. ungerader Elementanzahl beschreiben jeweils nur die eine Hälfte des Arrays, die andere Array-Hälfte ergibt sich aus der Diagonalsymmetrie, die in Bild 5.4 gestrichelt dargestellt ist.

Die Konfigurationen nach (5.13) und (5.14) wurden für MIMO-Arrays mit bis zu 200 Elementen – ein Beweis der Gültigkeit für Arrays mit beliebiger Anzahl an Array-Elementen kann beispielsweise durch vollständige Induktion erfolgen – auf Uniformität des Ko-Arrays überprüft. Die Überprüfung der Uniformität erfolgt mit Hilfe eines automatisierten Verfahrens, das zuerst das äquivalente Empfangs-Array und dann das Ko-Array aus der MIMO-Konfiguration generiert. Die Generierung



**Abbildung 5.5:** Quadratisches minimal-redundantes MIMO-Array mit 10 Elementen sowie sein uniformes Ko-Array. Die schwarzen Quadrate stellen die Array-Elemente dar.

der Arrays ist am Beispiel eines Arrays mit 10 Elementen in Bild 5.5 gezeigt.

Die quadratischen minimal-redundanten MIMO-Arrays mit gerader Elementanzahl (s. Bild 5.4) werden im Weiteren *Rahmen-Arrays* genannt, weil ihre Array-Elemente sich ausschließlich an den Kanten eines Quadrats befinden. Dagegen können die Arrays mit ungerader Elementanzahl aufgrund des Array-Elements an der Position  $\{2, 2\}$  (s. Bild 5.4) nicht als Rahmen-Arrays bezeichnet werden.

## 5.2 Allgemeine quadratische MIMO-Arrays

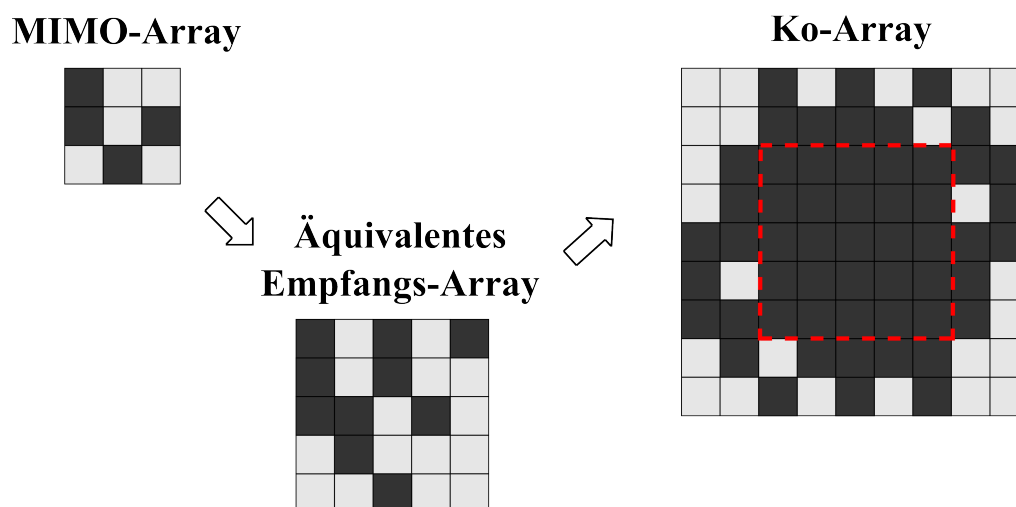
Die bisher betrachteten quadratischen MIMO-Arrays gehören zu der eingeschränkten Array-Klasse. Wie bei linearen MIMO-Arrays weist die Klasse der allgemeinen, quadratischen, minimal-redundanten MIMO-Arrays Ko-Arrays auf, deren uniformer Teil eine größere Fläche als die der eingeschränkten Arrays einnimmt. Ausgewählte Konfigurationen von allgemeinen quadratischen Arrays mit 4 bis 10 Elementen wurden in [45] ebenfalls mit dem Partikel-Schwarm-Algorithmus optimiert und sind in Tab. 5.2 dargestellt. Im Unterschied zu den eingeschränkten Arrays konnte in den allgemeinen Konfigurationen kein eindeutiges Muster erkannt werden, sodass eine Synthesemethode für die Array-Klasse nicht ausarbeitet werden konnte.

Die Generierung des äquivalenten Empfangs-Arrays sowie des Ko-Arrays ist am Beispiel eines all-

$N_{MIMO}$	MIMO-Array	$L_{eff}$
4	[(1, 1) (1, 2) (2, 3) (3, 1)]	2
5	[(1, 1) (1, 2) (2, 1) (3, 4) (4, 1)]	3
6	[(1, 1) (1, 2) (2, 5) (3, 4) (4, 1) (5, 3)]	5
7	[(1, 1) (1, 3) (2, 6) (4, 1) (4, 2) (4, 6) (6, 5)]	6
8	[(1, 1) (1, 5) (2, 1) (3, 6) (3, 7) (4, 1) (5, 4) (7, 3)]	8
9	[(1, 1) (1, 2) (2, 1) (2, 9) (3, 3) (4, 7) (6, 1) (7, 2) (9, 2)]	9
10	[(1, 3) (2, 2) (2, 6) (2, 7) (3, 1) (6, 1) (6, 10) (8, 10) (9, 3) (10, 1)]	11

**Tabelle 5.2:** Ausgewählte Konfigurationen von allgemeinen MIMO-Arrays mit 4 bis 10 Elementen [45]. Legende s. Text.

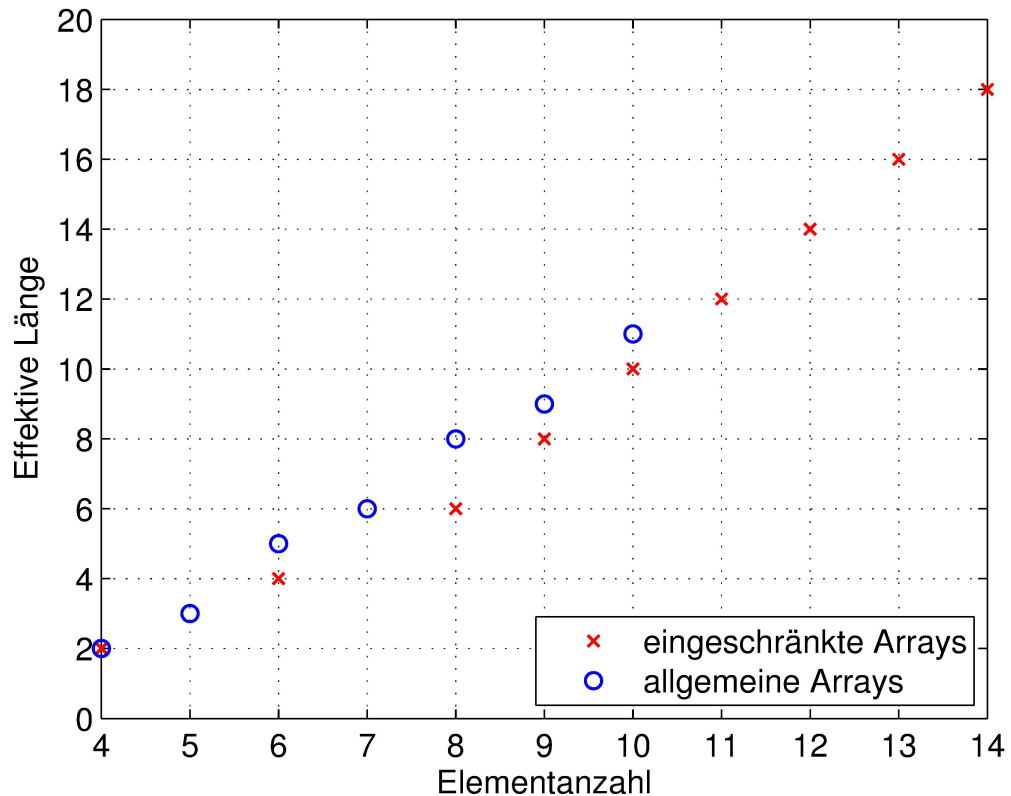
gemeinen MIMO-Arrays mit vier Elementen in Bild 5.6 gezeigt. Alle drei Arrays im Bild sind



**Abbildung 5.6:** Allgemeines minimal-redundantes MIMO-Array mit vier Elementen sowie sein Ko-Array mit uniformem, quadratischem Kern (rot markiert).

quadratisch; das Ko-Array ist rotationssymmetrisch. Die Bedingung des Vorhandenseins der Eckelemente gilt für allgemeine Arrays im Gegensatz zu eingeschränkten nicht. Weiterhin ist das Ko-Array eines allgemeinen Arrays ausgedünnt, weist aber einen uniformen, quadratischen Kern auf. Die Kantenlänge des Kerns ist doppelt so groß wie die Kantenlänge  $L_{eff}$  eines fiktiven uniformen Empfangs-Arrays, das ein Ko-Array so groß wie den Kern aufweist. Der Vergleich der effektiven Kantenlängen  $L_{eff}$  der äquivalenten Empfangs-Arrays der allgemein und der eingeschränkt minimal-redundanten MIMO-Arrays mit fünf oder mehr Elementen zeigt, wie erwartet, dass die uniformen Ko-Array-

Kerne der allgemeinen MIMO-Arrays größer als die Ko-Arrays der eingeschränkten MIMO-Arrays sind (s. Bild 5.7).



**Abbildung 5.7:** Effektive Kantenlänge von allgemeinen sowie eingeschränkten MIMO-Arrays.

### Fazit

In diesem Kapitel ist eine Synthesemethode für quadratische, monostatische, minimal-redundante MIMO-Arrays dargestellt. Die Elemente der Arrays befinden sich in der Regel an den Array-Kanten. Diese Rahmen-Arrays können in den Radaranwendungen eingesetzt werden, wo die Array-Elektronik in der Array-Mitte, wie in Bild 5.8 dargestellt, platziert werden soll, um beispielsweise flache und platzsparende Radargeräte zu ermöglichen [46].



**Abbildung 5.8:** Ein Beispiel für einen platzsparenden Radaraufbau mit einem Rahmen-Array.

# 6 Fehler in minimal-redundanten Arrays

In diesem Kapitel werden Fehler in Radaren mit linearen, minimal-redundanten SIMO- und MIMO-Arrays untersucht. Dazu zählen Abweichungen im Bildspektrum infolge des additiven Gaußschen Rauschens in der Array-Antwort sowie die Apertur- und Fokussierungsfehler der Arrays.

## 6.1 Bildfehler infolge des additiven Rauschens in minimal-redundanten Arrays

Die Rauschmechanismen, die bei Radaranwendungen eine zentrale Rolle spielen, sind das interne thermische Rauschen der Radarelektronik sowie das externe Hintergrundrauschen der Radarszene, das auch *Clutter* genannt wird. Die Rauschleistung der Radarempfänger kann durch die Rauschzahl beziffert werden. Die Rauschzahl von modernen Radarempfängern beträgt etwa 4 bis 20 dB je nach Frequenzband und Bauteiltyp [9].

Das Modellieren des Hintergrundrauschens ist in der Regel eine komplexe Aufgabe, weil die externen Rauschquellen meist polarisations- und frequenzabhängig sind und vom Einfallswinkel des Radarsignals abhängen [9]. Ein typisches Beispiel dafür aus der Fahrzeugradartechnik ist Clutter durch Reflexionen von der Asphaltoberfläche, deren Radarquerschnitt je nach Reflexionswinkel und wetterbedingtem Asphaltzustand bis zu 40 dB variieren kann [47]. Zur Vereinfachung des Modells kann das externe Rauschen als thermisches Rauschen mit effektiver Rauschtemperatur der Antenne dargestellt werden. Die effektiven Rauschtemperaturen zur Simulationen von Hintergrundrauschen in typischen Radaranwendungen können in [9, 48] nachgeschlagen werden.

Das Modellieren des thermischen und des externen Rauschens erfolgt in dieser Arbeit durch die Addition eines mittelwertfreien Gaußschen Prozesses  $v[n]$  mit der Varianz  $\sigma_v^2$  zu der Array-Antwort (2.3):

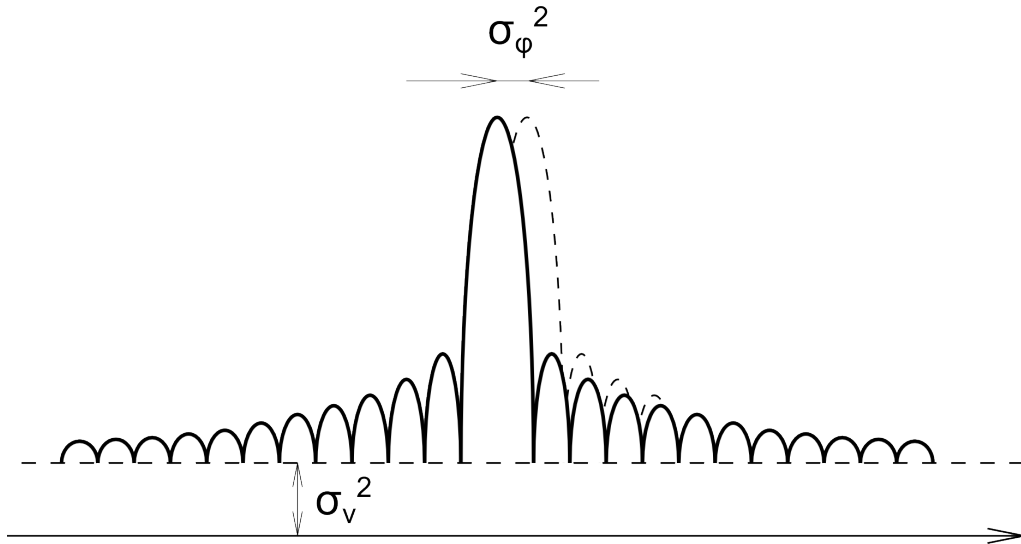
$$i_v[n] = \sum_{t=1}^T A_t \exp(j(\omega_t n + \phi_t)) + v[n]. \quad (6.1)$$

Das Verhältnis der Signalleistung zur Rauschleistung, in der Literatur als Signal-zu-Rausch-Verhält-

nis  $SNR$  (*Signal-to-Noise-Ratio*) bezeichnet, folgt aus

$$\eta = A_t^2 / \sigma_v^2. \quad (6.2)$$

Der Einfluss des Rauschens auf das Spektrum der Array-Antwort kann im Allgemeinen durch zwei in Bild 6.1 dargestellte Mechanismen beschrieben werden. Zum einen wird das mittlere Nebenkeu-



**Abbildung 6.1:** Einfluss von additivem Rauschen auf das Array-Spektrum.

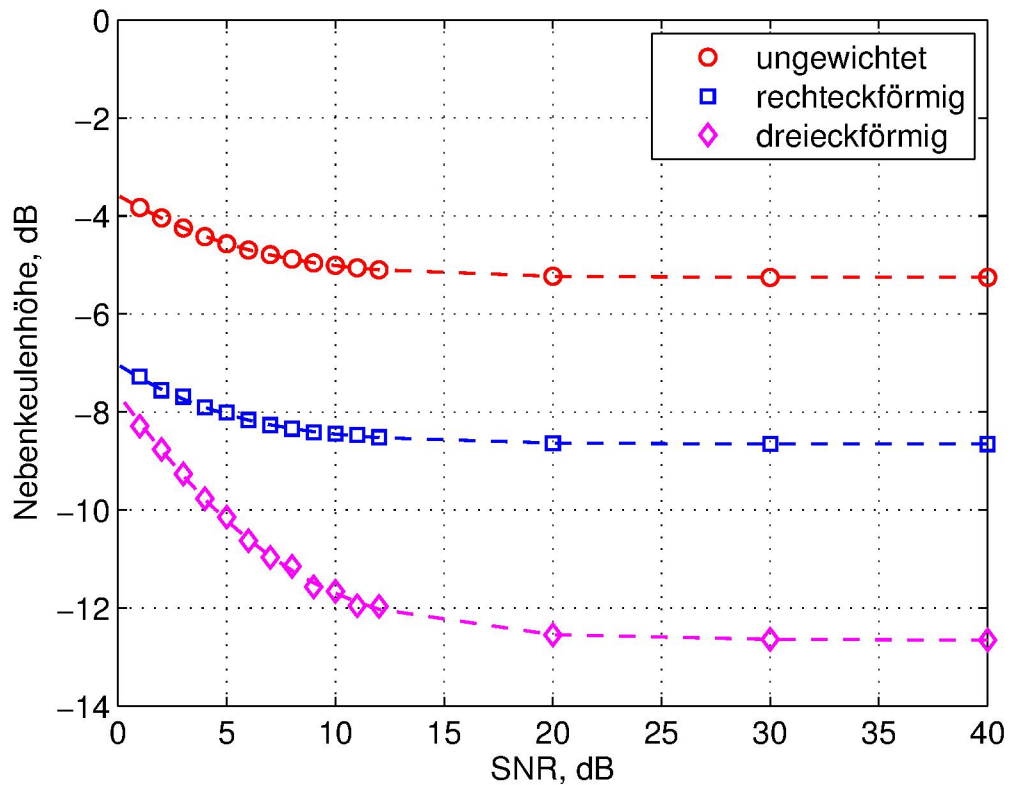
lenniveau des Array-Diagramms höher und somit der Kontrast im Radarbild schwächer. Der Mittelwert der Anhebung des Nebenkeulenniveaus entspricht der Rauschleistung  $\sigma_v^2$  [6].

Wie stark sich das additive Rauschen auf das Radarbild auswirkt, wenn in der Anwendung mit minimal-redundanten Arrays das Verfahren des Ko-Array-Gewichtens eingesetzt wird, lässt sich durch die folgende Abschätzung des Nebenkeulenniveaus gewinnen:

$$SL_{\sigma_v^2} = \frac{ML + \beta\sigma_v^2}{SL + \beta\sigma_v^2}, \quad (6.3)$$

wobei  $ML$  die Hauptkeulenhöhe,  $SL$  die maximale Nebenkeulenhöhe des fehlerfreien Array-Diagramms und  $\beta$  ein Normierungsfaktor sind. Der Normierungsfaktor hängt von der Fensterfunktion des gewichteten Ko-Arrays ab. Für das ursprüngliche (ungewichtete) Ko-Array gilt  $\beta = 1$ , weil die Rauschleistung  $\sigma_v^2$  das Hintergrundniveau um ebendiesen Betrag erhöht (s. Bild 6.1). Im Fall der rechteckförmigen Ko-Array-Gewichtung beträgt  $\beta = \frac{N}{2M-1}$ ; für die dreieckförmige Gewichtung gilt:  $\beta = \frac{N}{M}$ , wobei  $N$  die Elementanzahl des ausgedünnten Arrays und  $M$  die Elementanzahl eines uniformen Arrays gleicher Länge wie die des ausgedünnten sind.

Die Änderung des mittleren Nebenkeulenniveaus als Funktion des Signal-zu-Rausch-Verhältnisses ist für die drei Ko-Array-Gewichtungen des nicht-redundanten SIMO-Arrays mit vier Elementen in Bild 6.2 beispielhaft gezeigt. Die mittlere Nebenkeulenhöhe wurde in einer Simulation mit mehr-



**Abbildung 6.2:** Simulation sowie theoretische Höhe (- -) des mittleren Nebenkeulenniveaus (bzgl. des Hauptkeulenmaximums) des nicht-redundanten Arrays mit vier Elementen und unterschiedlich gewichtetem Ko-Array.

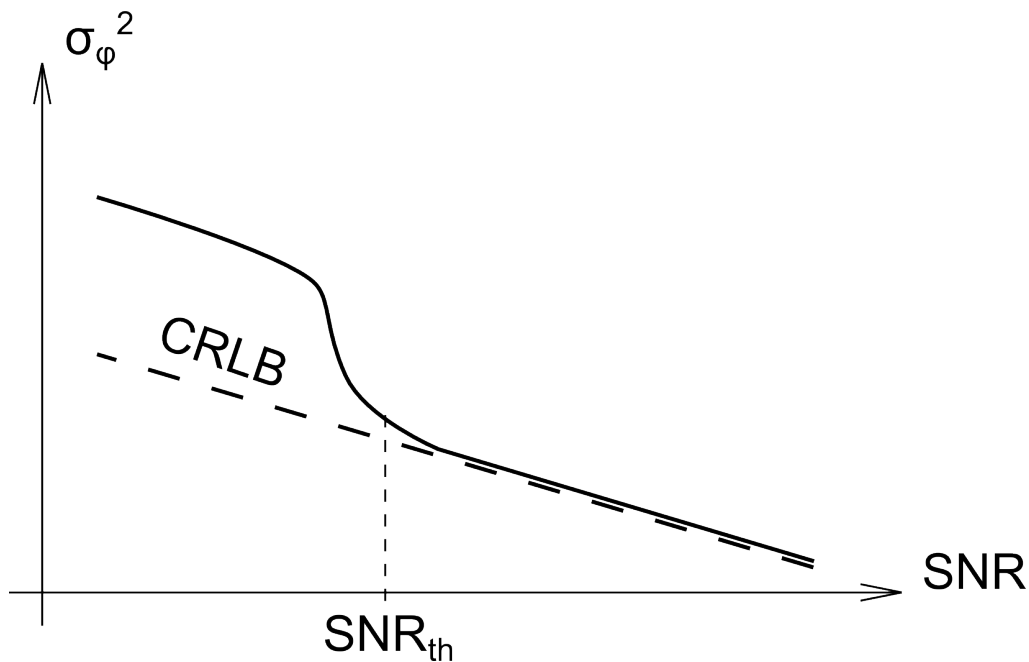
eren tausenden Durchläufen ermittelt. Das additive Rauschen wurde durch einen mittelwertfreien Gaußschen Prozess simuliert. Das Rauschen wurde dabei der normierten Array-Antwort auf ein einziges Ziel überlagert (s. (6.1)). Das Nebenkeulenniveau des ungewichteten Ko-Arrays liegt bei etwa -5 dB. Für  $\text{SNR} < 0$  dB steigt das Nebenkeulenniveau über -4 dB. In Bild 6.2 erkennt man ebenfalls, dass das dreieckförmig gewichtete Ko-Array trotz der relativ schnellen Zunahme des Niveaus mit fallendem SNR ein etwas besseres Verhalten verglichen mit der rechteckförmigen oder ursprünglichen Ko-Array-Gewichtung aufweist.

Des Weiteren führt das additive Rauschen zu einer Positionsverschiebung der Hauptkeule im Array-Diagramm und somit zu einer Positionsstreuung der Ziele auf dem Radarbild. Diese Streuung ist mittelwertfrei und weist zum Signal-zu-Rausch-Verhältnis eine umgekehrt proportionale Varianz auf, wenn das SNR relativ groß ist. Die Größe der Varianz kann mit der unteren Schranke nach Cramer-

Rao *CRLB* (*Cramer-Rao lower bound*) abgeschätzt werden. Für ein uniformes SIMO-Array mit  $N$  Elementen beträgt die CRLB [49]:

$$\sigma_{\phi}^2 \geq \frac{6}{(2\pi)^2 \eta N(N^2 - 1)}. \quad (6.4)$$

In der Praxis ist der Fehler zwischen der tatsächlichen Varianz der Streuung und der CRLB für hinreichend großes SNR vernachlässigbar klein. Ab einem bestimmten Grenzwert  $SNR_{th}$  des SNR ändert sich die Statistik der Positionsstreuung so, wie es in Bild 6.3 schematisch dargestellt ist. Für SNR kleiner als  $SNR_{th}$  verläuft die Varianz der Hauptkeulenstreuung nicht mehr umgekehrt



**Abbildung 6.3:** Typischer Verlauf der Varianz der Hauptkeulenstreuung sowie die untere Cramer-Rao-Schranke [50].

proportional zu SNR. Die CRLB ist weiterhin für jeden Wert des SNR gültig. Die Differenz von 1 dB zwischen der tatsächlichen Streuung und der CRLB definiert in der Praxis den SNR-Grenzwert [50].

### 6.1.1 Cramer-Rao-Schranke für minimal-redundante SIMO-Arrays

Die untere Cramer-Rao-Schranke für die Positionsstreuung der Hauptkeule eines ausgedünnten SIMO-Arrays und folglich von minimal-redundanten SIMO-Arrays wird wie folgt berechnet:

$$\sigma_{\phi}^2 \geq \frac{1}{(2\pi)^2 \eta 2S}, \quad (6.5)$$

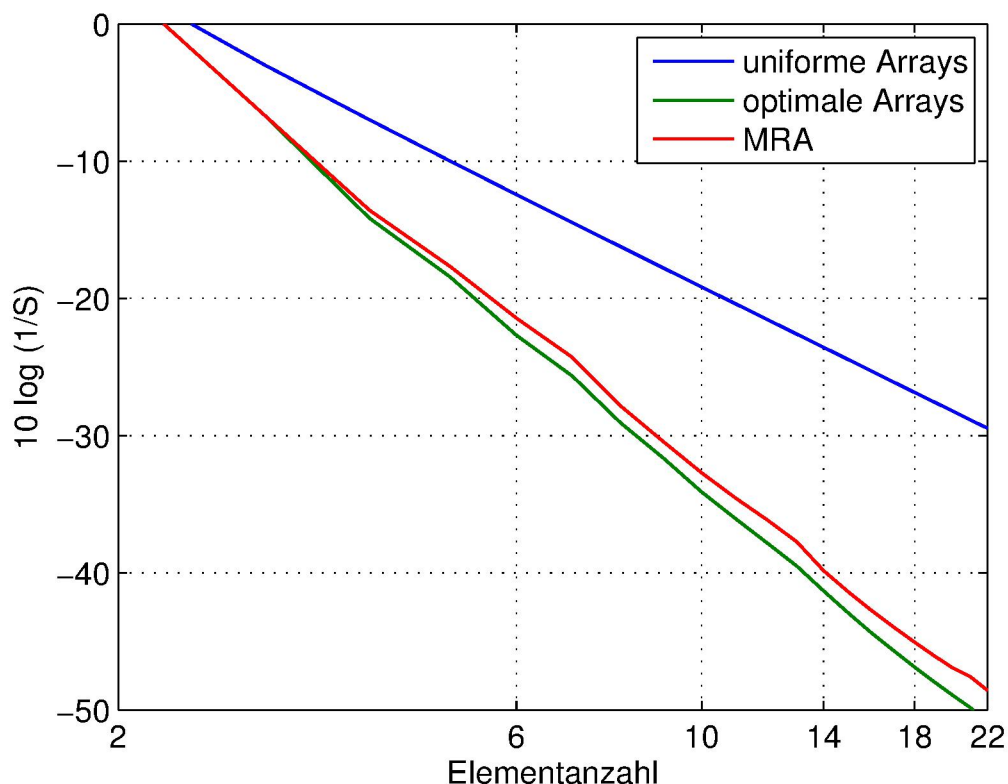
wobei  $S = \sum_{i=1}^N (x_i - C)^2$  die sogenannte *Verteilung (spread)* und  $C = \sum_{i=1}^N x_i / N$  der Schwerpunkt der relativen Positionen  $x_i$  von  $N$  Array-Elementen sind [50].

Die CRLB hängt von der Elementanzahl, der Array-Länge sowie der Array-Konfiguration ab. Die Abhängigkeit ist jedoch nichtlinear, wie man anhand von (6.5) erkennen kann. Die Verteilung ist am größten und die CRLB am kleinsten, wenn der Schwerpunkt in der Mitte des Arrays liegt und die Array-Elemente am weitesten von der Array-Mitte entfernt sind. Man kann sich eine „optimale“ Array-Konfiguration der Länge  $L$  ausdenken, deren  $N$  Elemente etwa gleichmäßig an den beiden Array-Rändern aufgeteilt sind. Das optimale Array weist die kleinste Hauptkeulenstreuung verglichen beispielsweise mit einem minimal-redundanten Array gleicher Länge und Elementanzahl auf. Zum Beispiel weist ein optimales Array gleicher Länge wie das nicht-redundante SIMO-Array mit vier Elementen (s. Tab. 3.1) die Konfiguration  $(\cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot)$  auf. Das optimale Array ist keineswegs minimal-redundant, weist aber die maximale Verteilung und entsprechend die kleinste Hauptkeulenstreuung für die normierte Array-Länge von sechs auf.

Die Hauptkeulenstreuung von minimal-redundanten SIMO-Arrays ist etwas größer als die von optimalen Arrays, wie der Vergleich der CRLB der beiden Array-Typen mit bis zu 22 Elementen in Bild 6.4 zeigt. Das SNR wurde für den Vergleich zu  $\eta = \frac{1}{(2\pi)^2 2}$  gesetzt, um den Ausdruck für (6.5) zu vereinfachen.

Der Unterschied der Hauptkeulenstreuung von minimal-redundanten und optimalen SIMO-Arrays wird größer mit höherer Elementanzahl und beträgt etwa 2 dB bei 20 Elementen, wohingegen die Hauptkeulenstreuung der uniformen Arrays – für uniforme Arrays stimmt (6.5) mit (6.4) überein – mit der gleichen Elementanzahl um etwa 19 dB größer als bei minimal-redundanten SIMO-Arrays ist. Insgesamt sinkt die Cramer-Rao-Schranke mit steigender Elementanzahl um etwa 30 dB und 50 dB pro Dekade im Fall der uniformen bzw. der minimal-redundanten SIMO-Arrays.

Die theoretische Schranke sowie Simulationsergebnisse der Hauptkeulenstreuung von minimal-redundanten SIMO-Arrays mit exemplarisch 2, 4, 8 und 16 Elementen sind in Bild 6.5 dargestellt. Der SNR-Grenzwert liegt unterhalb von 11 dB für alle dargestellten Arrays. Das Simulationsmodell sowie die Simulationsparameter wurden aus der Simulation des mittleren Nebenkeulenniveaus übernommen. Die Hauptkeulenstreuung wurde dabei als Varianz von Positionen der Hauptkeulenmaxima gewonnen.



**Abbildung 6.4:** CRLB von minimal-redundanten (MRA), uniformen und optimalen SIMO-Arrays.

### 6.1.2 Cramer-Rao-Schranke für minimal-redundante MIMO-Arrays

Die Hauptkeulenstreuung in linearen MIMO-Arrays lässt sich anhand eines CRLB-Modells bewerten, das seinerseits vom CRLB-Modell (6.5) der SIMO-Arrays abgeleitet ist. Die Herleitung der CRLB für MIMO-Arrays basiert auf einem SNR-Modell des äquivalenten Empfangs-Arrays, das in Bild 6.6 skizziert ist. Im Bild ist ein monostatisches MIMO-Array aus zwei Elementen sowie sein äquivalentes Empfangs-Array dargestellt. Das Signal-zu-Rausch-Verhältnis am Ausgang des ersten und des letzten (dritten von links) Elementes des äquivalenten Empfangs-Arrays ist mit  $\eta$  angegeben. Denn die Zielantwort am Ausgang des ersten bzw. des letzten Elementes des äquivalenten Empfangs-Arrays bezieht sich auf das Sendesignal des ersten bzw. des zweiten MIMO-Elementes. Das SNR des mittleren Elementes des äquivalenten Empfangs-Arrays in Bild 6.6 beträgt dagegen  $2\eta$ , weil die Ziel-Antwort am Elementausgang nach dem Überlagerungsprinzip – das erste MIMO-Element sendet, das zweite empfängt und vice versa – doppelt so groß ist wie an den beiden benachbarten Array-Ausgängen. Die Regel der additiven Signalüberlagerung ist gültig für kohärente MIMO-Radare mit sowohl Zeit- als auch Frequenz-Multiplex. Die mittlere Rauschspannung am Ausgang des mittleren Elementes des äquivalenten Empfangs-Arrays beträgt lediglich die Quadratwurzel aus der Rauschspannung an den Ausgängen der benachbarten Randelemente, denn das Rauschen im Modell ist unkorreliert.

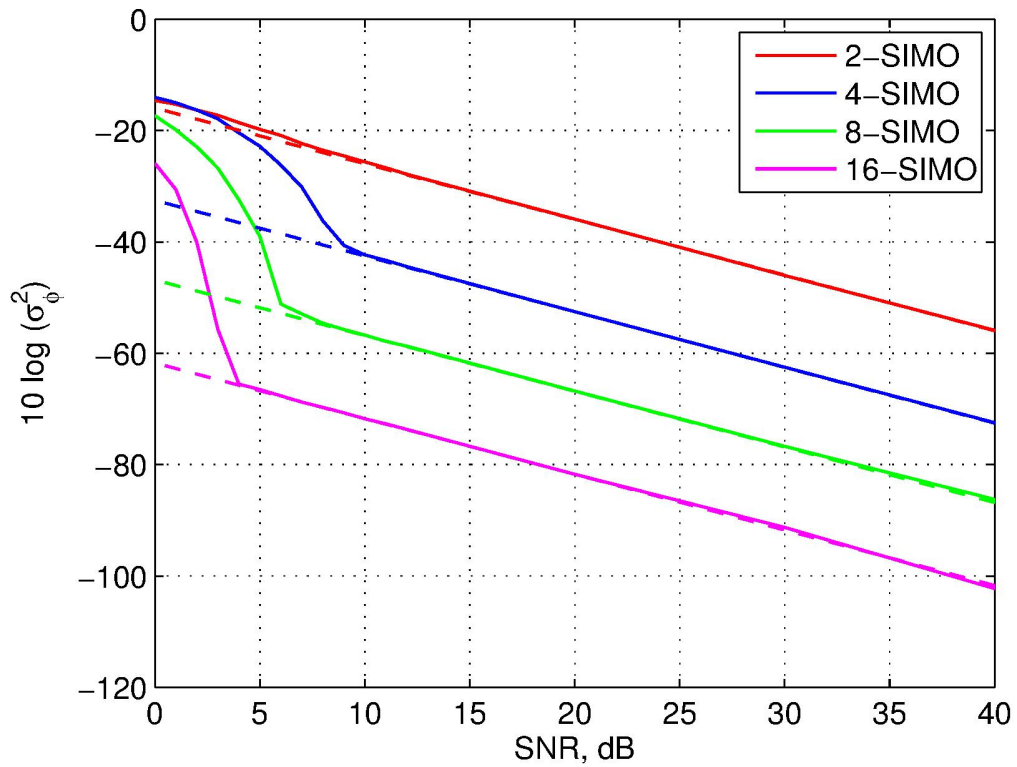


Abbildung 6.5: Simulation der Hauptkeulenstreuung (–) sowie CRLB (– –) von minimal-redundanten SIMO-Arrays mit 2, 4, 8 und 16 Elementen.

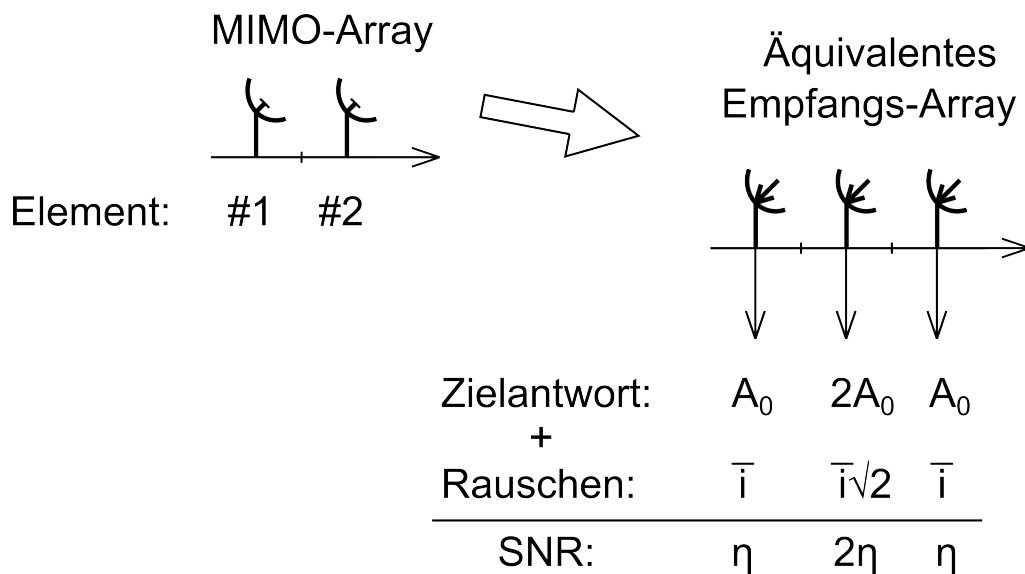


Abbildung 6.6: SNR-Modell des äquivalenten Empfangs-Arrays.

Demzufolge hängen der Schwerpunkt  $C_{eq}$  und die Verteilung  $S_{eq}$  des äquivalenten SIMO-Arrays

sowohl von seiner ursprünglichen Gewichtung  $W_{eq}$  als auch von seiner Elementverteilung ab:

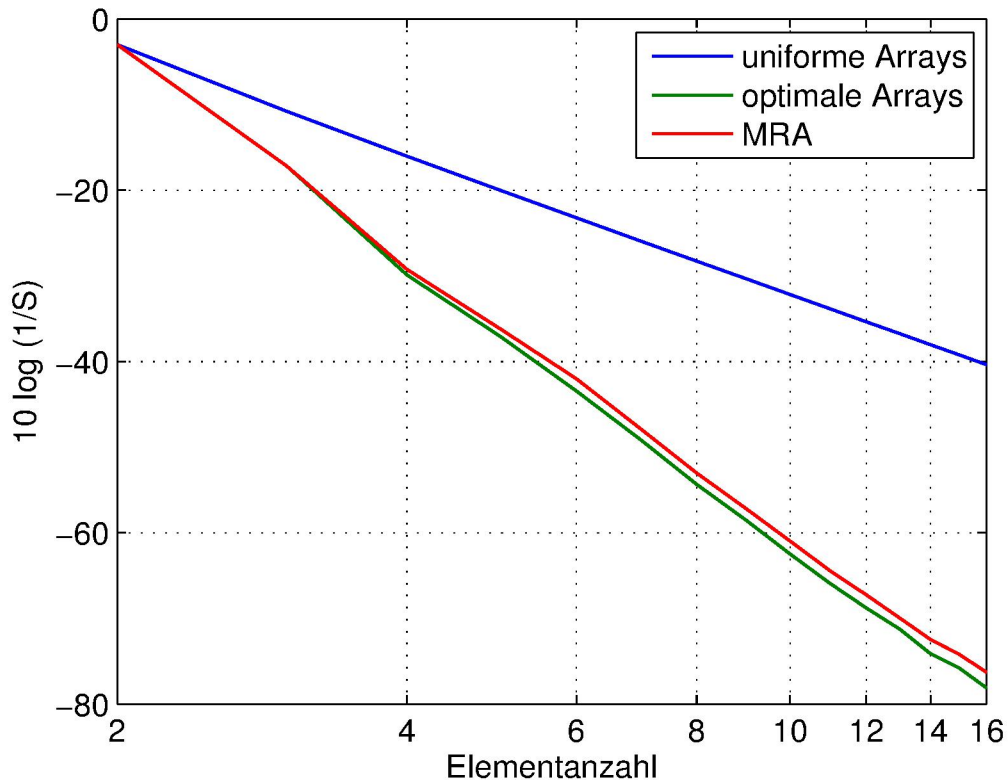
$$S_{eq} = \sum_{i=1}^N w_i (x_i - C_{eq})^2,$$

$$\text{wobei } C_{eq} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i w_i}{\sum_{j=1}^N w_j}.$$
(6.6)

Hier stellen  $w_i$  und  $w_j$  die einzelnen Einträge der ursprünglichen Gewichtung  $W_{eq}$  des Empfangs-Arrays dar. Weiterhin ergibt sich die untere Cramer-Rao-Schranke für MIMO-Arrays zu:

$$\sigma_\phi^2 \geq \frac{1}{(2\pi)^2 \eta 2 S_{eq}}.$$
(6.7)

Die CRLB der linearen minimal-redundanten MIMO-Arrays mit bis zu 16 Elementen aus Tab. 4.2 wurde berechnet und in Bild 6.7 mit der CRLB der uniformen MIMO-Arrays mit der gleichen Elementanzahl verglichen. Das SNR wurde wieder zu  $\eta = \frac{1}{(2\pi)^2 2}$  gewählt. In Bild 6.7 ist ebenfalls die

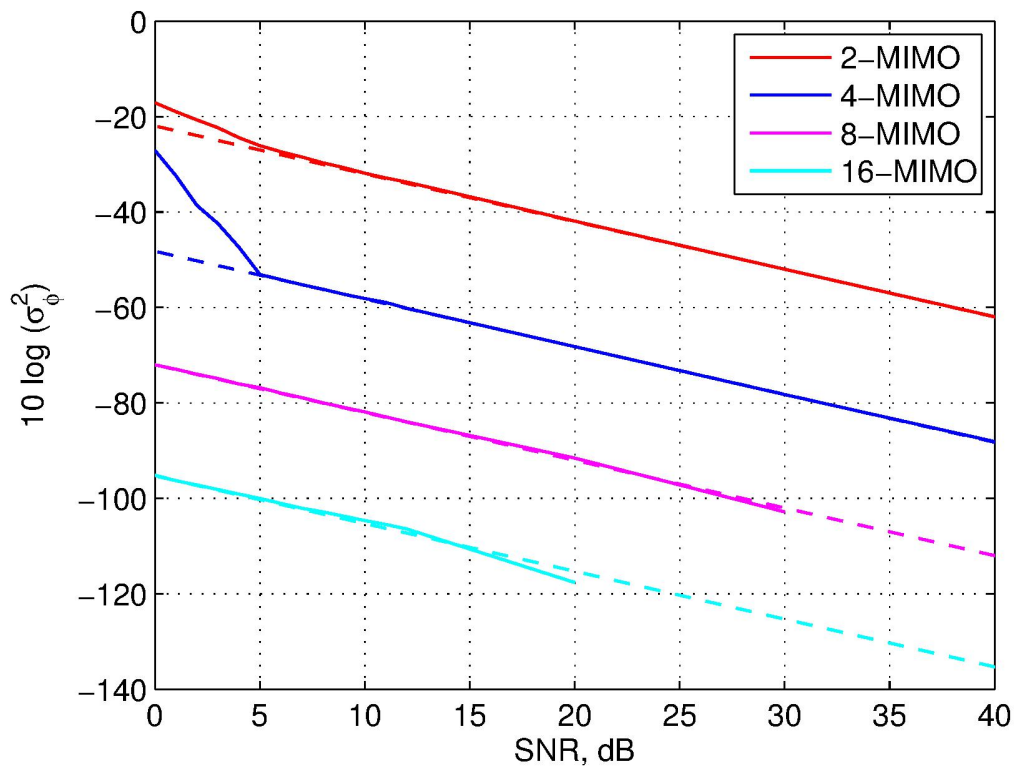


**Abbildung 6.7:** CRLB von minimal-redundanten, uniformen und optimalen MIMO-Arrays.

CRLB der optimalen MIMO-Arrays dargestellt, die die niedrigste CRLB für die Array-Längen und Anzahl der Elemente aufweisen (vgl. Abschnitt 6.1.1).

Insgesamt beträgt die Abnahmerate der CRLB mit steigender Elementanzahl etwa 40 dB und 80 dB pro Dekade im Fall der uniformen bzw. der minimal-redundanten MIMO-Arrays. Die Abnahme der CRLB pro Dekade ist im Fall der minimal-redundanten MIMO-Arrays etwa 60 dB größer als im Fall der SIMO-Arrays (vgl. Abschnitt 6.1.1). Die CRLB der minimal-redundanten Arrays ist etwas größer als die CRLB von optimalen MIMO-Arrays – so wie es auch bei den optimalen SIMO-Arrays der Fall ist.

Die untere Schranke sowie Simulationsergebnisse für die Hauptkeulenstreuung der minimal-redundanten MIMO-Arrays mit exemplarisch 2, 4, 8 und 16 Elementen sind in Bild 6.8 dargestellt. Der



**Abbildung 6.8:** Simulation der Hauptkeulenstreuung sowie CRLB von minimal-redundanten MIMO-Arrays mit 2, 4, 8 und 16 Elementen.

SNR-Grenzwert liegt unterhalb von 6 dB für alle dargestellten Arrays. Der Grenzwert ist etwa 5 dB kleiner als der SNR-Grenzwert der SIMO-Arrays. Die Abweichung der Simulationsergebnisse von der CRLB unterhalb etwa  $-100 \dots -120$  dB ist mit bei der Simulation auftretenden Rundungsfehlern der doppelgenauen Rechnerarithmetik zu erklären. Das Simulationsmodell sowie die Simulationsparameter sind die gleichen wie bei der Simulation der unteren Schranke von minimal-redundanten SIMO-Arrays.

## 6.2 Amplituden- und Phasenfehler

Die typischen Quellen der Amplituden- und Phasenfehler in der Array-Antwort sind Fehler der Array-Elemente, Fehler der Front-End-Elektronik und Quantisierungsfehler. Die Größen der oben genannten Fehlertypen hängen vom Radarsystem ab und sollen für die Erstellung des Fehlermodells mit Hilfe der Fehlerbilanzanalyse (s. Beispiele in [48]) zusammengefasst werden.

Das Modell der fehlerbehafteten Antwort eines SIMO-Arrays kann wie folgt beschrieben werden:

$$i_{err}[n] = i[n](1 + \delta_a[n]) \exp(j\delta_p[n]), \quad (6.8)$$

wobei  $\delta_a$  und  $\delta_p$  der Amplituden- bzw. Phasenfehler sowie  $i[n]$  die fehlerfreie Array-Antwort sind [51].

Der Effektivwert der Fehler wird im Weiteren durch das sogenannte *Signal-zu-Fehler-Verhältnis*  $SER$  (*Signal-to-Error Ratio*) angegeben. Am Ausgang eines Array-Elements beträgt das Signal-zu-Fehler-Verhältnis [52]:

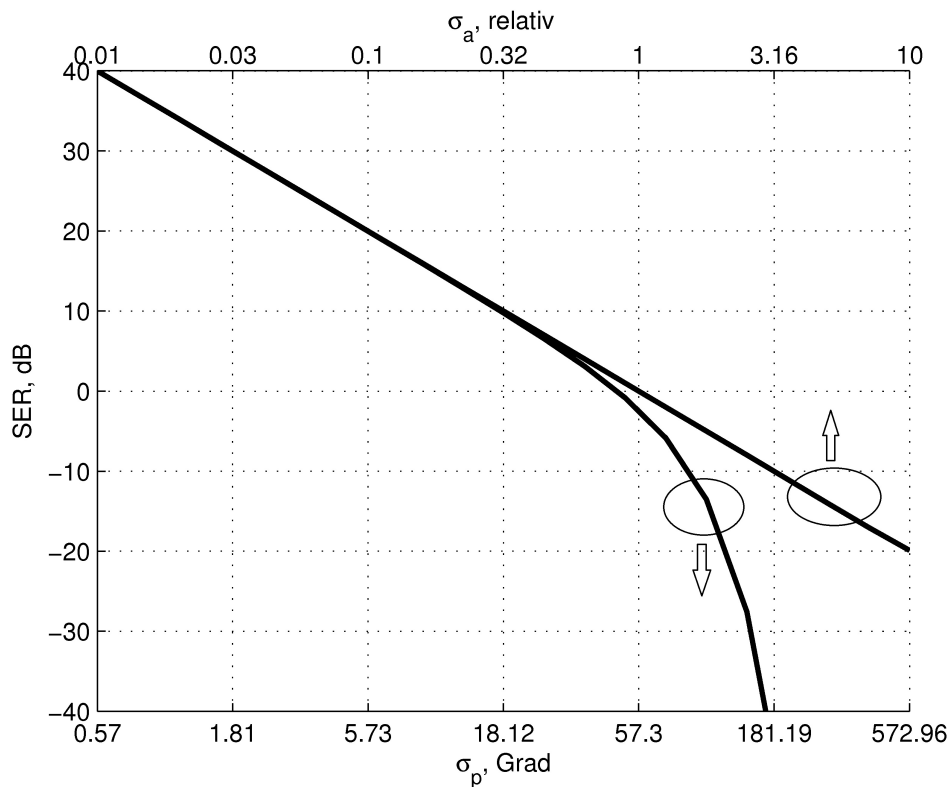
$$SER = \frac{E\{|i|^2\}}{E\{|i_{err} - i|^2\}} \approx \frac{1}{E\{\delta_a^2\} + E\{\delta_p^2\}}, \quad (6.9)$$

wobei mit  $E\{\}$  der Erwartungswert bezeichnet wird. Die Näherung in (6.9) ergibt sich aus  $E\{e^{j\delta_p}\} = E\{\cos(\delta_p)\} \approx E\{1 - \delta_p^2/2\}$ . Sie ist gültig für  $SER > 10$  dB und somit geeignet für die Modellierung von Amplituden- und Phasenfehlern mit Effektivwerten von bis zu 32% bzw.  $18^\circ$ , wie es in Bild 6.9 zu erkennen ist. Des Weiteren wird in dieser Arbeit angenommen, dass die Amplituden- und Phasenfehler mittelwertfreie, normalverteilte Zufallsvariablen mit den Varianzen  $\sigma_a^2$  bzw.  $\sigma_p^2$  sind, was in den meisten herkömmlichen Radaranwendungen der Fall ist [4].

Die Auswirkung der Amplituden- und Phasenfehler auf das Array-Diagramm ist durch eine Reduzierung des Array-Gewinns sowie einen Anstieg des mittleren Nebenkeulenniveaus gekennzeichnet. Die Änderung des Gewinns eines Arrays lässt sich durch Berechnung dessen Erwartungswerts beziffern. Der Erwartungswert des Array-Gewinns  $G$  bezogen auf den Gewinn  $G_0$  des fehlerfreien SIMO-Arrays beträgt [4]:

$$E\left\{\frac{G}{G_0}\right\} = 1 - \sigma_p^2 + \frac{\sigma_p^2 + \sigma_a^2}{N} \approx \exp(-\sigma_p^2), \quad (6.10)$$

wobei  $N$  die Anzahl der Array-Elemente ist. Die Gleichung (6.10) ist sowohl für uniforme als auch für ausgedünnte Antennen-Arrays gültig. Die Streuung des Array-Gewinns ist in erster Linie durch den Phasenfehler gegeben, insbesondere wenn die Anzahl der Array-Elemente groß ist. Der Amplitudenfehler wird dabei vernachlässigt.



**Abbildung 6.9:** Gültigkeitsbereich der Näherung für das Signal-zu-Fehler-Verhältnis nach (6.9).

Des Weiteren werden die Nebenkeulen des Arrays höher, wenn die Array-Antwort fehlerbehaftet ist. Um sowohl die Erhöhung der Nebenkeulen als auch die Reduzierung des Array-Gewinns zusammen erfassen zu können, wird in dieser Arbeit der sogenannte Bildkontrast als Kennzahl des fehlerbehafteten Array-Diagramms herangezogen. Er wird wie folgt berechnet:

$$BK = \frac{P_{ML} - P_{SL}}{P_{ML} + P_{SL}}, \quad (6.11)$$

wobei  $P_{ML}$  und  $P_{SL}$  die mittlere Signalleistung in der Hauptkeule bzw. in den Nebenkeulen ist. Die Abgrenzung der Hauptkeule von den Nebenkeulen erfolgt durch Auffinden von den ersten beiden Minima links und rechts vom Hauptkeulenmaximum. Nach der Definition (6.11) ist der Kontrast am größten, wenn die Nebenkeulen im Array-Diagramm am kleinsten sind. Des Weiteren wird der Kontrast größer, wenn die Hauptkeule breiter wird – beispielsweise wenn das Ko-Array dreieckförmig gewichtet wird –, was wiederum die Auflösung des Arrays verringert.

Eine Kennzahl für die Beschreibung des Einflusses von Amplituden- und Phasenfehlern auf das Array-Diagramm ist das mittlere Nebenkeulenniveau, das als statistischer Mittelwert der Nebenkeulendämpfung beziffert werden kann. Allgemein wird die Höhe  $r$  einer Nebenkeule als Funktion des Phasenfehlers – die Amplitudenfehler wurden dabei zur Vereinfachung wieder vernachlässigt – mit

Hilfe der Rice-Wahrscheinlichkeitsverteilung beschrieben:

$$W_c(r) = \frac{2r}{\sigma_p^2} \exp\left(-\frac{(r_0^2 + r^2)}{\sigma_p^2}\right) I_0\left(\frac{2r_0r}{\sigma_p^2}\right), \quad (6.12)$$

wobei  $r_0$  die Nebenkeulenhöhe des fehlerfreien Arrays und  $I_0$  die modifizierte Bessel-Funktion nullter Ordnung sind [51, 53]. Folglich beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass die Nebenkeule den Wert  $r_k$  – das sogenannte Konfidenzintervall – nicht übersteigt:

$$P(r < r_k) = \int_0^{r_k} W_c(r) dr. \quad (6.13)$$

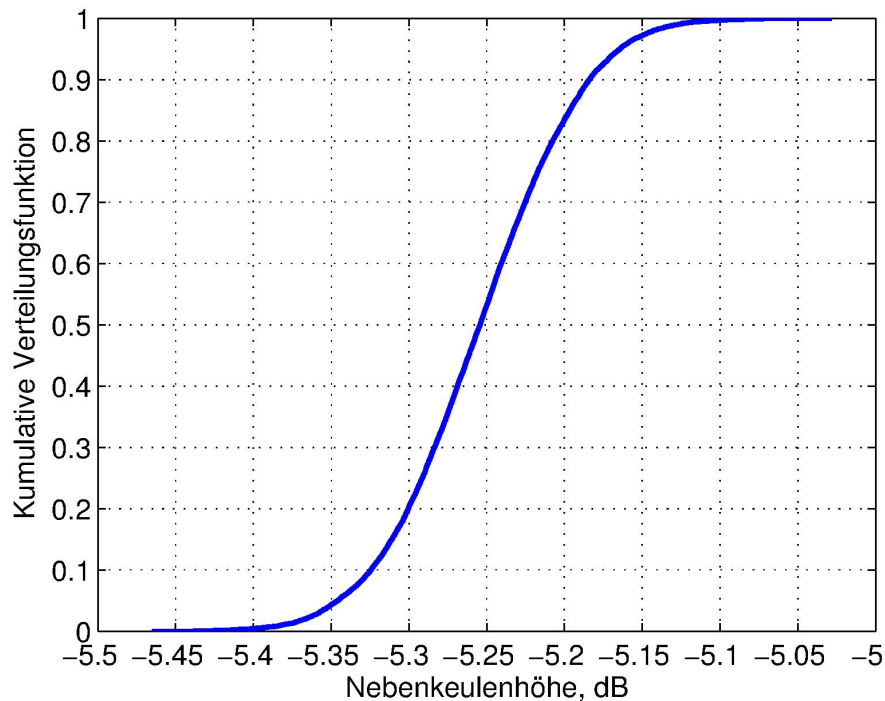
Während die Wahrscheinlichkeitsberechnung der Nebenkeulenhöhe in einer Winkelrichtung in geschlossener Form mit (6.12) möglich ist, so ist eine Beschreibung der maximalen Nebenkeule des Arrays nur mit stochastischen Methoden möglich. Eine Möglichkeit dazu bietet das Konzept der höchsten Nebenkeule *PSL* (*peak sidelobe level*) nach Steinberg [4]. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Nebenkeule einen bestimmten Wert nicht übersteigt, wird dabei mit Hilfe von Zufallsexperimenten ermittelt. Für die Angabe der Wahrscheinlichkeit wird das Konfidenzintervall (6.13) herangezogen. In der Praxis wird meistens die 95%-Wahrscheinlichkeit als Konfidenzintervall ausgewählt. Andere Wahrscheinlichkeitswerte größer 95% sind auch üblich für die Angabe des Intervalls.

### Phasenfehler in minimal-redundanten SIMO-Arrays

Die Simulation des Phasenfehlers in minimal-redundanten SIMO-Arrays erfolgte mittels eines Zufallsexperiments mit etwa 4000 Durchläufen. Der Phasenfehler der Array-Antwort auf ein einziges Ziel war als normalverteilte Zufallsvariable implementiert. Bei jedem Durchlauf wurde die Nebenkeulendämpfung im Array-Diagramm ermittelt. Daraus wurden das mittlere Nebenkeulenniveau sowie die höchste Nebenkeule für das 95%-Konfidenzintervall ermittelt.

Als Beispiel ist die simulierte Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Konfidenzintervall von 0,1 bis 99,9% in Bild. 6.10 für das nicht-redundante SIMO-Array mit vier Elementen aus Tab. 3.1 gezeigt. Der Phasenfehler betrug  $\sigma_p = 0,01$  (SER=40 dB). Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Nebenkeule den Wert von -5,15 dB nicht übersteigt, beträgt etwa 95%. Im Mittel (50%-Wahrscheinlichkeit) entspricht das Nebenkeulenniveau der Nebenkeulendämpfung des fehlerfreien Arrays.

In [29] wurde am Beispiel eines minimal-redundanten SIMO-Arrays mit 10 Elementen gezeigt, dass für hinreichend kleine Phasenfehler die Ko-Array-Gewichtungen mit kleinem Nebenkeulenniveau (zum Beispiel die dreieckförmige Gewichtung) eine relativ kleine Erhöhung der maximalen Nebenkeule aufweisen. Dies gilt auch für minimal-redundante SIMO-Arrays mit höherer Anzahl von



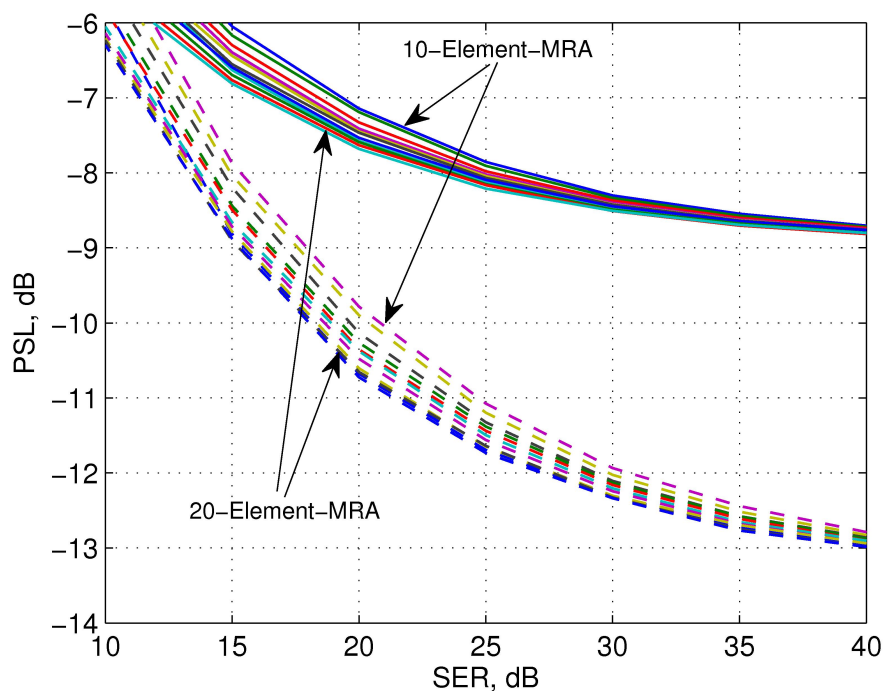
**Abbildung 6.10:** Kumulative Wahrscheinlichkeit der maximalen Nebenkeulenhöhe eines nicht-redundanten SIMO-Arrays mit vier Elementen.

Array-Elementen, wie es in Bild 6.11 für SIMO-Konfigurationen mit 10...20 Elementen (Array-Konfigurationen s. [3, 27]) dargestellt ist. Dafür wurde die maximale Nebenkeulenhöhe für Phasenfehler bis etwa  $20^\circ$  ( $\text{SER} > 10 \text{ dB}$ ) im Zufallsexperiment ermittelt. Als Konfidenzintervall wurde die 95%-Wahrscheinlichkeit ausgewählt.

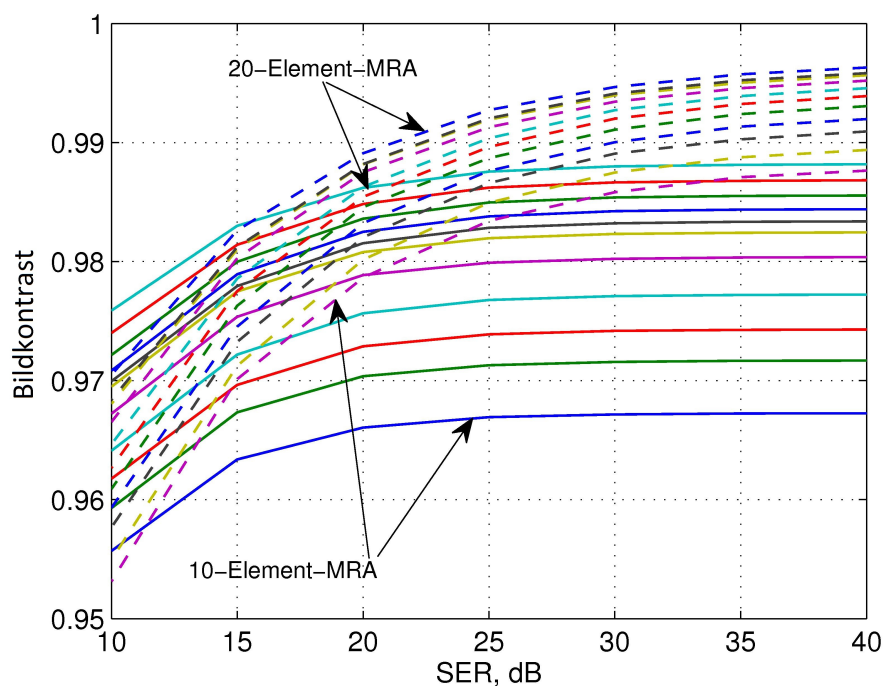
Aus der maximalen Streuung der beiden Kurvenschaaren von ca. 1 dB (s. Bild 6.11) lässt sich schließen, dass auch längere minimal-redundante Arrays ein ähnliches Verhalten aufweisen. Des Weiteren ist in Bild 6.11 zu erkennen, dass die Abhängigkeit der maximalen Nebenkeule vom SER bei Arrays mit größerer Elementanzahl etwas abnimmt.

Als Nächstes wurden die Einflüsse des Phasenfehlers auf den Bildkontrast, den die minimal-redundanten SIMO-Arrays mit rechteck- und dreieckförmig gewichteten Ko-Arrays aufweisen, untersucht. Der Kontrast ist wie in Bild 6.12 zu erkennen größer 95% für Phasenfehler kleiner  $20^\circ$  ( $\text{SER} > 10 \text{ dB}$ ). Der Unterschied der Kontrastwerte aufgrund der unterschiedlichen Ko-Array-Gewichtungen ist mit etwa 2..3% relativ klein. Es ist ebenfalls ersichtlich, dass der Kontrast mit steigender Elementanzahl etwas resistenter gegenüber dem Phasenfehler wird.

Verglichen mit dem Phasenfehler hat der Amplitudenfehler einen geringeren Einfluss auf die Streu-

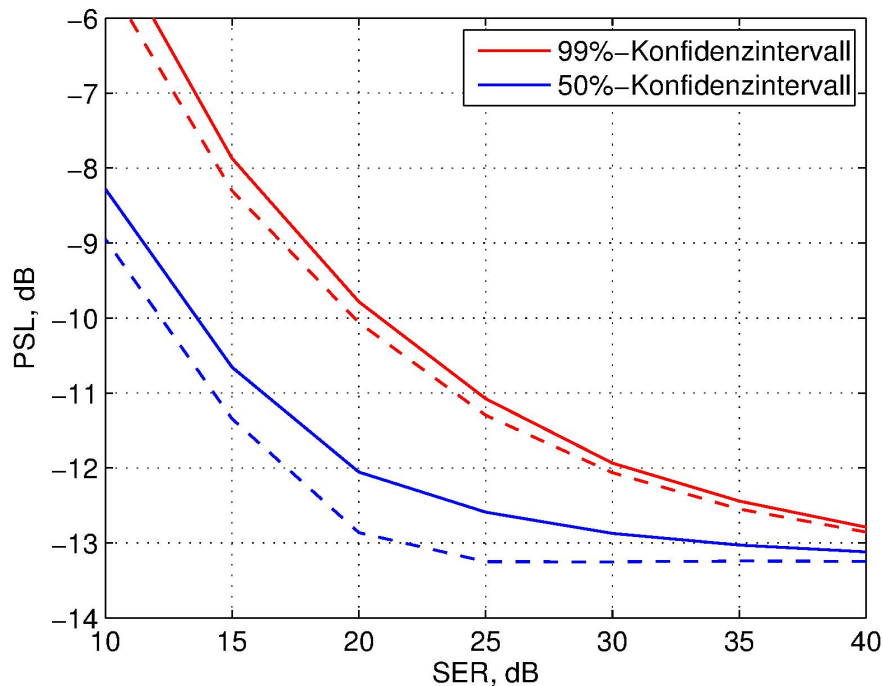


**Abbildung 6.11:** Maximale Nebenkeulenhöhe von minimal-redundanten Arrays mit 10...20 Elementen mit rechteck- (–) und dreieckförmiger (- -) Ko-Array-Gewichtung.



**Abbildung 6.12:** Bildkontrast von minimal-redundanten SIMO-Arrays mit 10...20 Elementen mit rechteckförmig (–) und dreieckförmig (- -) gewichteten Ko-Arrays.

ung des Array-Diagramms. Weiterhin weisen moderne Radarsysteme in der Regel Phasenfehler mit einem Effektivwert kleiner als  $4^\circ$  und relative Amplitudenfehler mit einem Effektivwert kleiner als 5% auf [48]. Die Signal-zu-Fehler-Verhältnisse der beiden Fehlergrößen unterscheiden sich um etwa 6 dB (s. Bild 6.9) – der Phasenfehler spielt auch hier die größere Rolle. Aber auch Phasenfehler mit gleichem SER wie die Amplitudenfehler haben einen etwas größeren Einfluss auf die Streuung des Array-Diagramms, wie es in Bild 6.13 am Beispiel eines minimal-redundanten SIMO-Arrays mit 10 Elementen dargestellt ist. In Bild 6.13 ist die maximale Nebenkeulenhöhe für ein Konfidenz-



**Abbildung 6.13:** Maximale Nebenkeulenhöhe eines minimal-redundanten Arrays mit 10 Elementen in Abhängigkeit von Phasen- (–) und Amplitudenfehlern (- -).

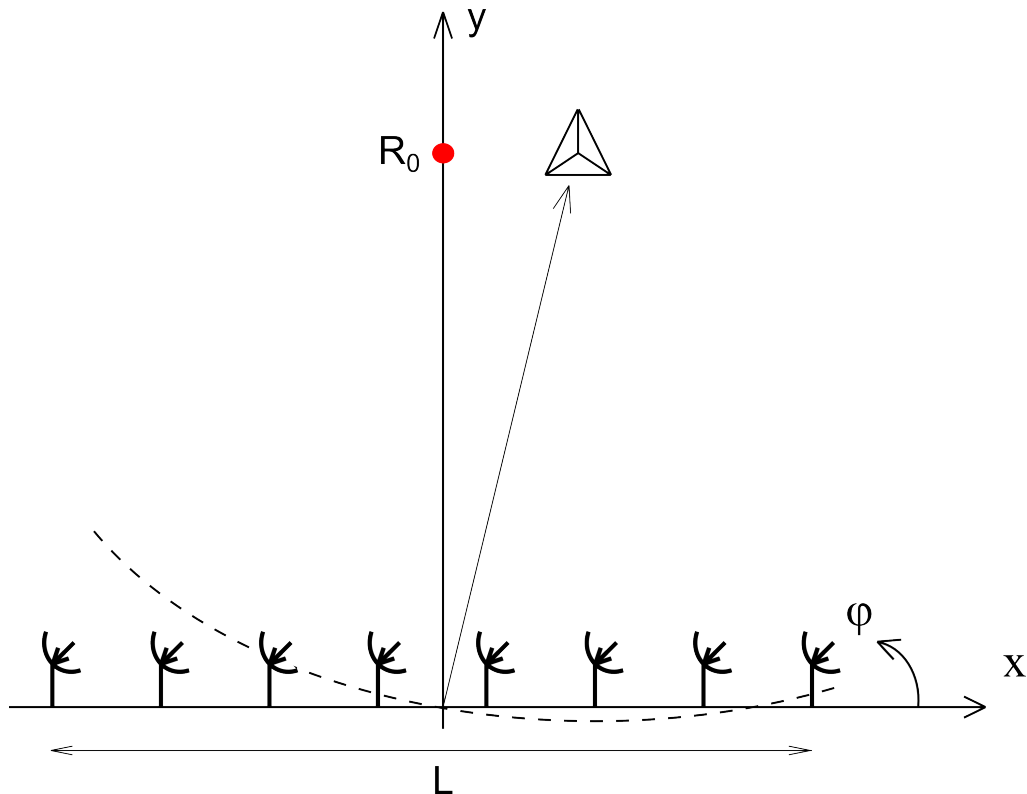
intervall von 50% bzw. 99% zu sehen. Mit steigendem Konfidenzintervall sowie fallenden Fehlern werden die Unterschiede zwischen den Fällen mit Amplituden- und mit Phasenfehlern etwas kleiner.

## 6.3 Fokussierungsfehler

Beim Aufstellen des Modells (s. (2.10)) der Array-Antwort wurde angenommen, dass die Wellenfront der vom Ziel reflektierten Welle linear ist, was näherungsweise gültig ist, wenn der Abstand  $R_0$  zwischen dem Ziel und dem Array viel größer als die Array-Länge  $L$  ist bzw. wenn gilt [2]:

$$R_0 > \frac{2L^2}{\lambda}. \quad (6.14)$$

In vielen Radaranwendungen kann aber die Wellenfront entlang der Array-Apertur nicht als linear angenähert werden, wie es in Bild 6.14 beispielhaft dargestellt ist. Dies ist besonders dann der Fall,



**Abbildung 6.14:** Fokussierungsfehler aufgrund der sphärischen Wellenfront auf der Array-Apertur.

wenn sich die Ziele im Nahfeld des Arrays befinden. Der tatsächliche Phasenverlauf der Array-Antwort kann wie folgt beschrieben werden [54]:

$$\Phi(x) = -k\sqrt{R_0^2 + x^2 - 2xR_0 \cos(\varphi_0)} \approx -k\left(R_0 - x \cos(\varphi_0) + \frac{x^2}{2R_0} \sin^2(\varphi_0)\right). \quad (6.15)$$

In (6.15) wurden alle Terme der Taylor-Reihe der Ordnung größer 2 vernachlässigt. Deswegen wird der Fehler auch als quadratischer Phasenfehler bezeichnet [48].

Der nichtlineare Phasenverlauf macht sich durch Verbreiterung der Hauptkeule und Erhöhung der Nebenkeulen bemerkbar. Des Weiteren verursacht die Nichtlinearität der Wellenfront Abweichungen im Radarbild, die als störend empfunden werden können. Diese Störeffekte können (zumindest lokal im Bild) reduziert werden, indem die Array-Antwort in Bezug auf den Fokussierungspunkt ( $R_0$  in Bild 6.9) entsprechend bearbeitet wird. Die einfachste Signalverarbeitungsmaßnahme zur Fokussierung besteht in der Multiplikation der Array-Antwort mit der konjugierten Array-Antwort auf ein fiktives Ziel, das sich im Fokussierungspunkt befindet. Der Phasenverlauf der Array-Antwort

nach der Fokussierung ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}\Phi_f(x) &= -k(\sqrt{R_0^2 + x^2 - 2xR_0 \cos(\varphi_0)} - \sqrt{R_0^2 + x^2}) \\ &\approx -k\left(-x \cos(\varphi_0) - \frac{x^2}{2R_0} \cos^2(\varphi_0)\right),\end{aligned}\tag{6.16}$$

wobei hier wieder die genäherte Taylor-Reihenentwicklung angewandt wurde. Die Fehlerabweichung in (6.16) bezüglich einer linear verlaufenden Phasenfront ist kleiner als in der unfokussierten Array-Antwort – zumindest für die Ziele, die sich innerhalb eines etwa  $45^\circ$  breiten Sektors um die Array-Hauptrichtung befinden.

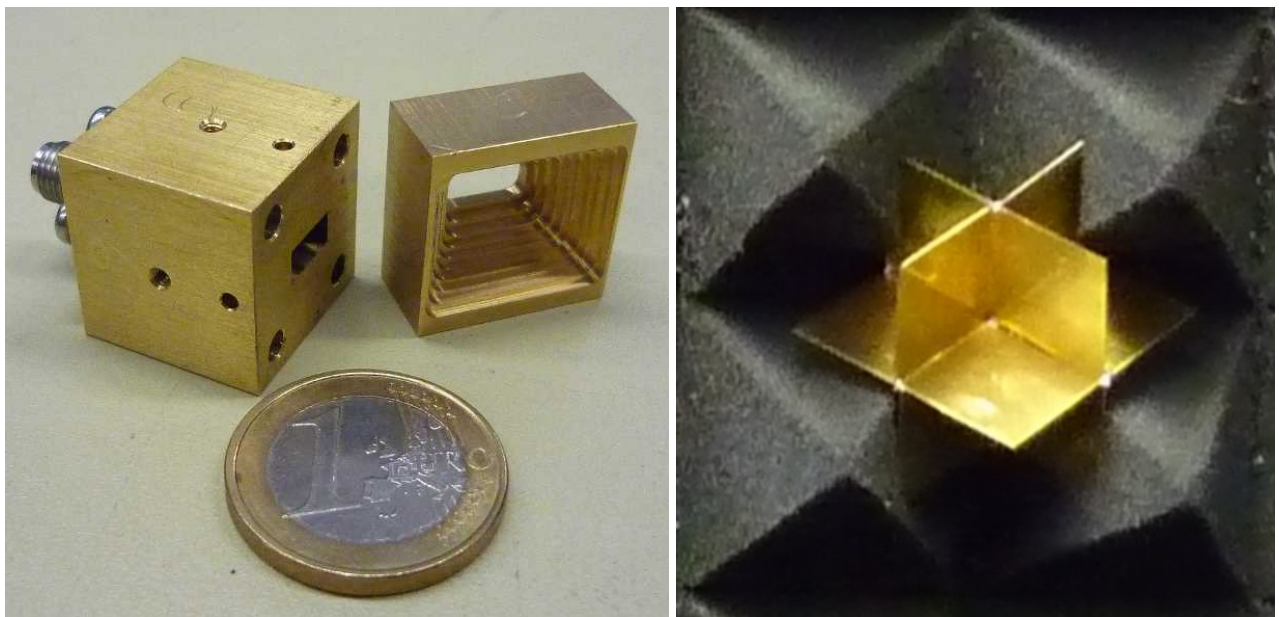
### Fazit

Wie in den Abschnitten 6.1.1 und 6.1.2 gezeigt wird, hängt die Hauptkeulenstreuung infolge des additiven Rauschens nicht von der Gewichtung des Ko-Arrays, wohl aber von der Verteilung der Elemente des SIMO-Arrays bzw. des äquivalenten Empfangs-Arrays des MIMO-Arrays ab. Es ist ebenfalls zu sehen, dass die Hauptkeulenstreuung von minimal-redundanten Arrays etwas größer als die der optimalen Arrays aber viel kleiner als die Streuung der uniformen Arrays ist. Des Weiteren werden die Auswirkungen von Amplituden- und Phasenfehlern der SIMO-Arrays auf das Nebenkeulenniveau durch stochastische Methoden berechnet. Phasenfehler spielen dabei eine größere Rolle als Amplitudenfehler. Des Weiteren zeigen die Änderungen im Bildkontrast als auch das Verhalten der maximalen Nebenkeule eine relativ kleine Streuung für verschiedene Konfigurationen von minimal-redundanten SIMO-Arrays. Es wird deshalb angenommen, dass die Phasen- und Amplitudenfehler in minimal-redundanten MIMO-Arrays eine ähnliche Auswirkung auf das Array-Diagramm zeigen.

## 7 Experimentelle Untersuchungen

Eine experimentelle Verifizierung des bildgebenden Radarverfahrens erfolgt in dieser Arbeit mit einem linearen sowie einem quadratischen minimal-redundanten MIMO-Array. Als Frequenzbereich für die Messung wurde das Ka-Band (26,5...40 GHz) mit den Wellenlängen von 7,5...11,3 mm gewählt. Der Frequenzbereich von 29,25...30,75 GHz mit der Mittenfrequenz von 30 GHz (mittlere Wellenlänge  $\lambda_0=10$  mm) wurde für die Experimentdurchführung ausgewählt. Die Bandbreite von 1,5 GHz ist ausreichend für eine Entfernungsauflösung der Ziele von etwa 10 cm (s. Abschnitt 2.2).

Als Einzelstrahler der Arrays wurde der in Bild 7.1a dargestellte Ka-Band-Strahler verwendet. Der



(a) Einzelstrahler

(b) Winkelreflektor

**Abbildung 7.1:** Ka-Band-Hornantenne zusammen mit Hohlleiterübergang als Einzelstrahler der Arrays sowie dreiflächiger Winkelreflektor als Radarziel.

Strahler hat eine Apertur von  $20 \times 20 \text{ mm}^2$  und ist 30 mm lang. Der Strahler ist linear polarisiert und weist einen Antennengewinn von etwa 13,5 dB bei 30 GHz auf. Die Halbwertsbreite der Hauptkeule beträgt etwa  $35^\circ$  in der horizontalen und der vertikalen Schnittebenen der Antennencharakteristik. Die Einspeisung des Strahlers erfolgt über einen SMA-Steckverbinder (*Sub-Miniature-A*); die

---

Eingangsreflexion des Strahlers beträgt etwa -20 dB. Die gemessene Überkopplung zwischen zwei benachbarten Einzelstrahlern beträgt maximal -50 dB. Aus diesem Grund kann der Restfehler in der Array-Antwort hinsichtlich der Elementverkopplung als vernachlässigbar klein angenommen werden.

Ein an die Einzelstrahler des Arrays angeschlossener N-Tor-Netzwerkanalysator vervollständigt das Radarsystem, das in der Lage ist, die Antwort des MIMO-Arrays auf ein statisches Radarszenario aufzunehmen. Die Kalibrierfunktion des Analysators wird dabei genutzt, um die Verfälschung der Array-Antwort durch die Zuleitungen des Arrays zu minimieren. Als Kalibriermethode wurde die TRL-Methode (*Thru-Reflect-Line*) ausgewählt; die Kalibrierebene ist dabei die Verbindungsfläche zwischen dem Horn und dem Hohlleiterübergang des Einzelstrahlers (s. Bild 7.1a).

Als Radarziele im Experiment wurden aus 0,5 mm dünnem Messingblech gebaute, dreiflächige Winkelreflektoren mit einer Kantenlänge von 20 mm eingesetzt (s. Bild 7.1b). Der Radarquerschnitt des Reflektors beträgt nach [55] etwa 0,06 m<sup>2</sup> bei 30 GHz. Nach (2.1) beträgt die Empfangsleistung am Ausgang des Einzelstrahlers im Verhältnis zur Sendeleistung:

$$\frac{P_r}{P_s} = -58,2 \text{ dB} - 40 \log(R), \quad (7.1)$$

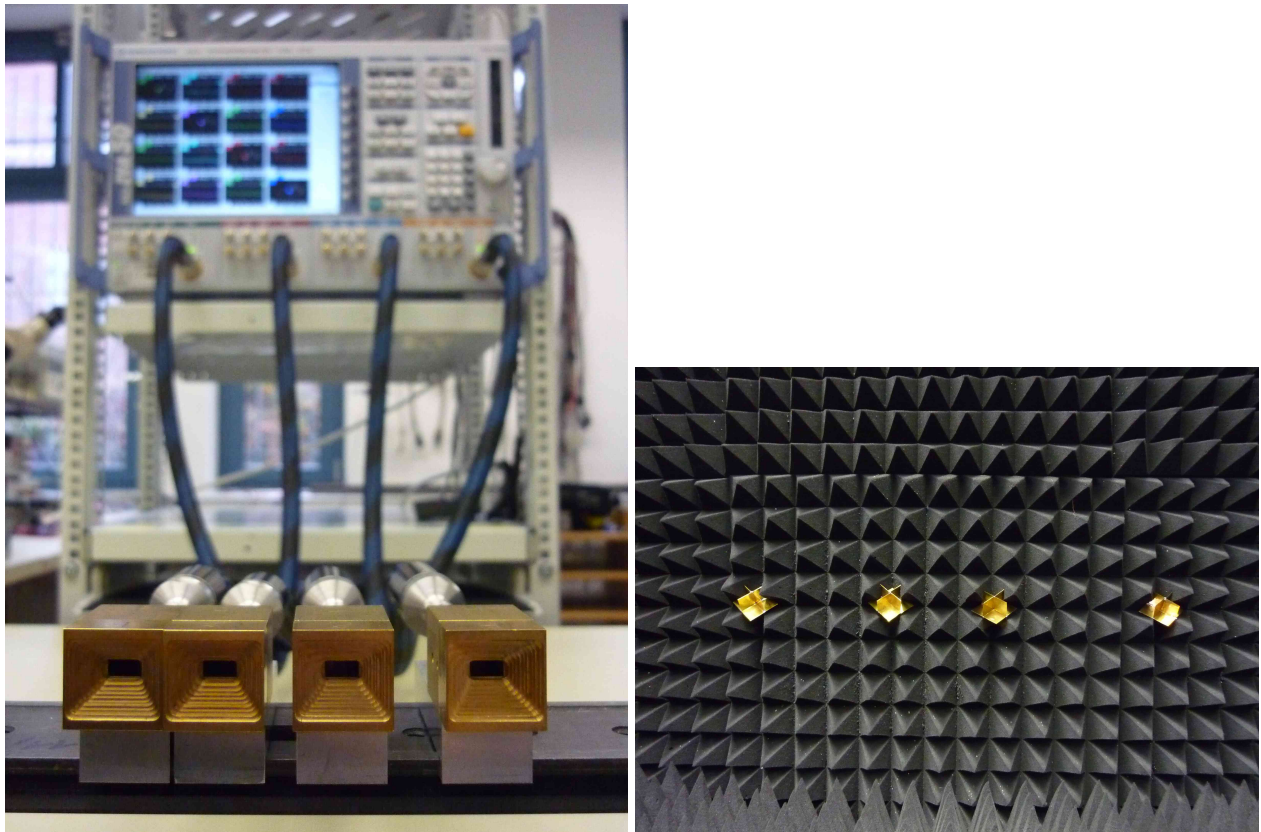
wobei  $R$  die Entfernung zum Reflektor in Metern darstellt. Bereits für Zielentfernungen größer als einen Meter fällt der Reflexionsfaktor des Einzelstrahlers viel größer als die Zielantwort aus. Aus diesem Grund wird die Array-Antwort zuerst der sogenannten Freiraumkalibrierung unterzogen. Dabei werden die Array-Antworten mit und ohne Ziel von einander abgezogen [56].

Im Folgenden sind die einzelnen Schritte der gesamten Signalverarbeitung der gemessenen Array-Antwort zusammengefasst:

1. TRL-Kalibrierung,
2. Freiraumkalibrierung,
3. Fokussierung der Array-Antwort (s. Unterkapitel 6.3).
4. Entfernungsauflösung der Ziele (s. Unterkapitel 2.2),
5. Berechnung der Ko-Array-Antwort und Anwendung des in Unterkapitel 3.3 dargestellten Gewichtsverfahrens auf die Ko-Array-Antwort,
6. Berechnung des Spektrums und Ausgabe der Radaraufnahme.

## 7.1 Lineares minimal-redundantes MIMO-Array

Der Messaufbau mit dem linearen minimal-redundanten MIMO-Array mit vier Elementen ist in Bild 7.2a dargestellt. Die Einzelstrahler des Arrays sind auf einer Schiene entsprechend der Konfigurati-



(a) Array-Aufbau

(b) Radarszenario

**Abbildung 7.2:** Aufbau des linearen minimal-redundanten MIMO-Arrays mit Konfiguration  $(\cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot)$  sowie Radarszenario mit vier Winkelreflektoren.

on  $(\cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot)$  angeordnet. Das Array gehört zu der Array-Klasse mit eingeschränktem Elementabstand (s. Tab. 4.5). Die Abstände zwischen den Mittelpunkten der benachbarten Array-Elemente betragen entsprechend 20, 25 und 30 mm (von links nach rechts in Bild 7.2a). Die Länge  $l$  des Arrays beträgt 75 mm gemessen von der Mitte des ersten bis zur Mitte des letzten Elements. Daraus ergibt sich eine Winkelauflösung von etwa  $\Delta\theta \approx \lambda/(2l) \approx 3,82^\circ$ . Die vier Array-Elemente sind über Koaxialkabel an die vier Tore des Netzwerkanalysators ZVA50 von Rohde&Schwarz angeschlossen.

Die für die Messung aufgebauten Radarszenarien bestehen aus 1 bis 4 parallel zur Array-Achse aufgestellten Reflektoren, wie es in Bild 7.2b dargestellt ist. Der Abstand  $R_0$  zwischen der Array-Achse und den Reflektoren beträgt etwa 2 m. Die Auflösung in die Querrichtung des Arrays beträgt bei der

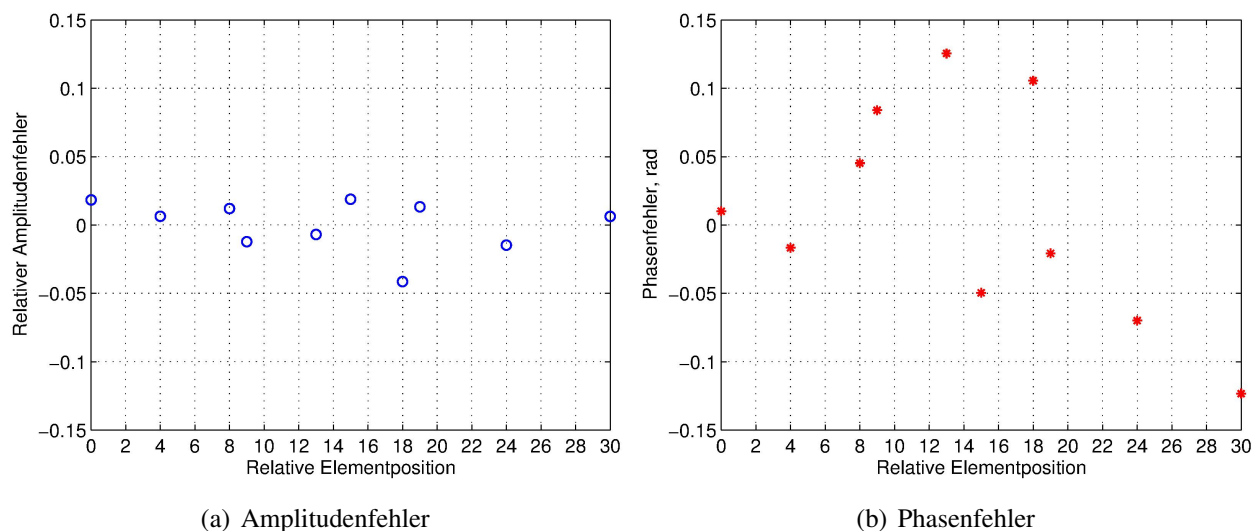
Entfernung etwa  $R_0 \tan(\Delta\theta) \approx 13,3$  cm. Die Abstände zwischen den benachbarten Reflektoren wurden zu 16, 12 und 20 cm (von links nach rechts in Bild 7.2b) gewählt.

Insgesamt wurden vier Radarszenarien untersucht:

1. mit Reflektor 2
2. mit Reflektoren 1, 2
3. mit Reflektoren 1, 2, 4
4. mit Reflektoren 1, 2, 3, 4

Die Nummerierung der Reflektoren erfolgt von links nach rechts wie in Bild 7.2b dargestellt.

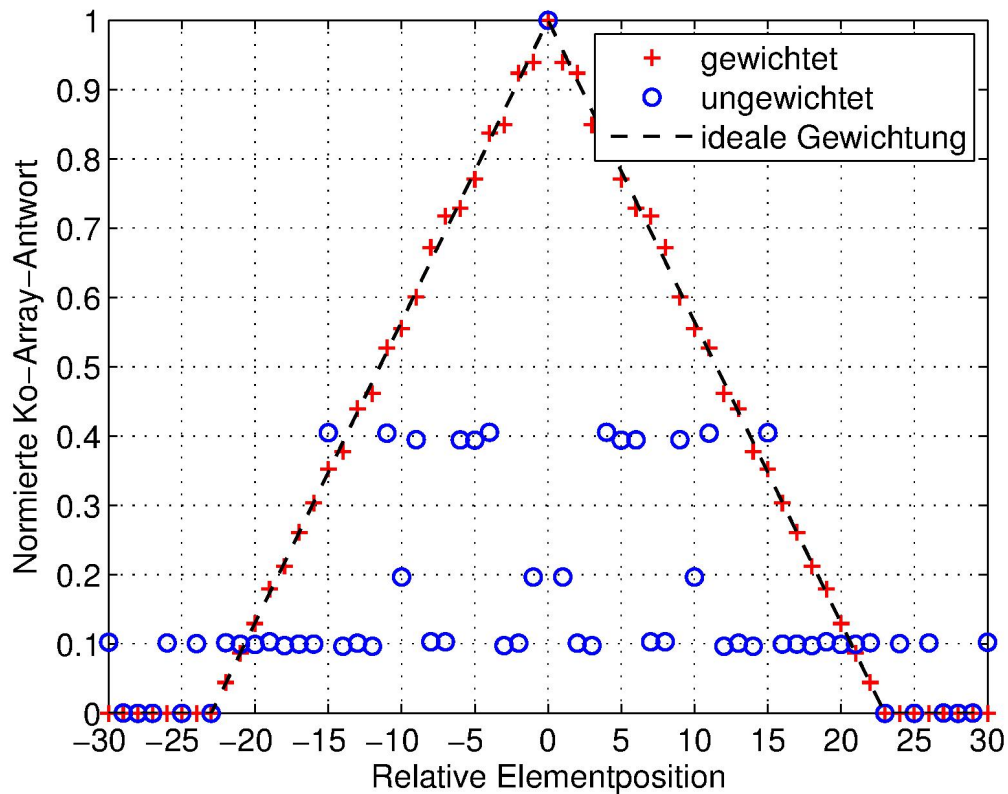
Die Qualität des gemessenen Spektrums und somit der Signalverarbeitung des Ko-Arrays hängt maßgeblich von den Fehlern in der Antwort des MIMO-Arrays ab (s. Unterkapitel 6.2). Der relative Amplitudenfehler sowie der Phasenfehler der gemessenen Array-Antwort sind in Bild 7.3a bzw. in Bild 7.3b dargestellt. Die Standardabweichung von etwa 0,0807 rad ( $4,6^\circ$ , SER  $\approx 21$  dB) des Pha-



**Abbildung 7.3:** Relativer Amplitudenfehler sowie Phasenfehler der gemessenen Array-Antwort.

senfehlers ist viel größer als die Standardabweichung von etwa 0,0189 (SER  $\approx 33$  dB) des relativen Amplitudenfehlers.

Weil das MIMO-Array zu der Array-Klasse mit eingeschränktem Elementabstand gehört, wurde die dreieckförmige Gewichtung, wie in Bild 7.4 zu sehen ist, auf den uniformen Teil des Ko-Arrays angewandt. Es ist zwar möglich die volle Ko-Array-Länge zur Bildung des Bildspektrums heranzu-

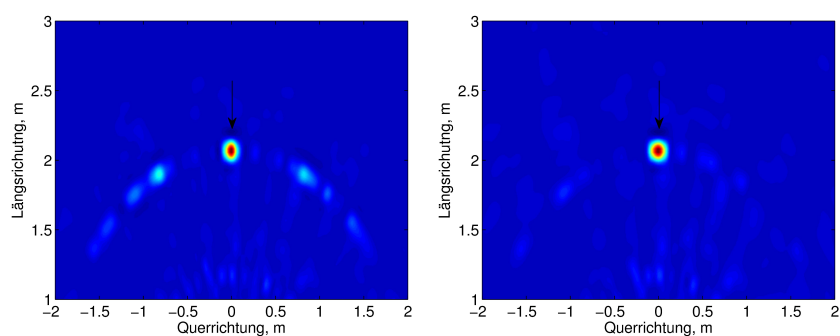


**Abbildung 7.4:** Ursprüngliche sowie gewichtete Ko-Array-Antwort auf das Szenario mit einem Ziel.

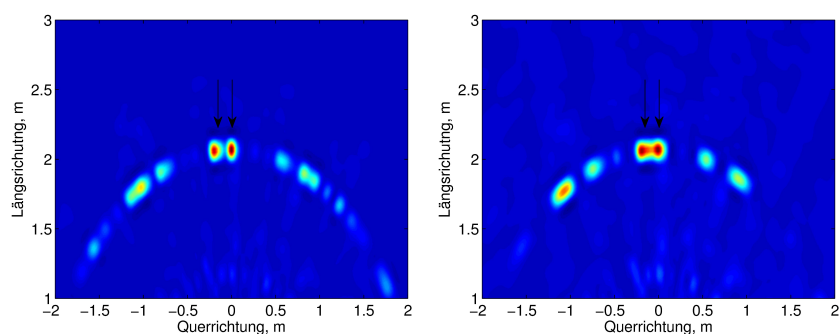
ziehen, wie es in [43] gezeigt wurde, die Ko-Array-Antwort wird dann aber „lückenbehaftet“ und das Radarbild weist demzufolge etwas höhere Nebenkeulen auf. Die Auflösung des vollen Ko-Arrays ist allerdings um etwa 17,4 % höher als die des uniformen Ko-Array-Teils.

Aufgrund der Amplituden- und Phasenfehler der Array-Antwort ist die gemessene Ko-Array-Antwort, wie in Bild 7.4 zu sehen ist, ebenfalls fehlerbehaftet, was wiederum eine Abweichung der gewichteten Ko-Array-Antwort von der idealen Dreieckform verursacht.

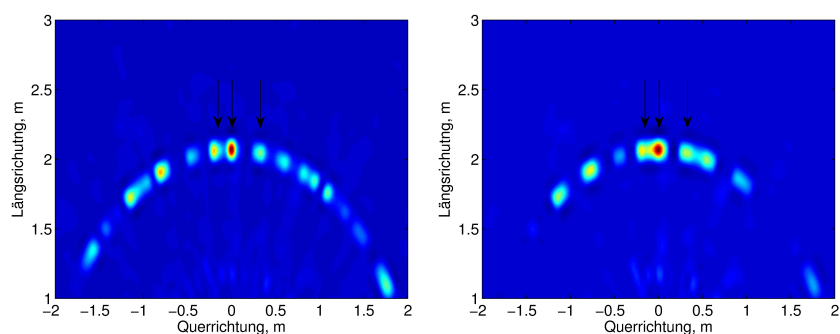
Die gemessenen Radaraufnahmen aus den vier Szenarien sind in Bild 7.5 dargestellt. Die Spektren sind normiert dargestellt, um einen qualitativen Vergleich zu ermöglichen. Wie auf den Radarbildern zu sehen, reduziert das Verfahren des Ko-Array-Gewichtens die Nebenkeulen des Arrays umso stärker, je kleiner die Anzahl der Ziele ist. Das Specklemuster in den Radarbildern ist auf die Amplituden- und die Phasenfehler der Array-Antwort zurückzuführen. Das Ziel 2 im vierten Zielszenario ist auf der Radaraufnahme kaum zu erkennen, da die Auflösung (etwa 15,6 cm) des gefüllten Ko-Array-Teils geringer als die Auflösung (etwa 13,3 cm) des ganzen Ko-Arrays ist.



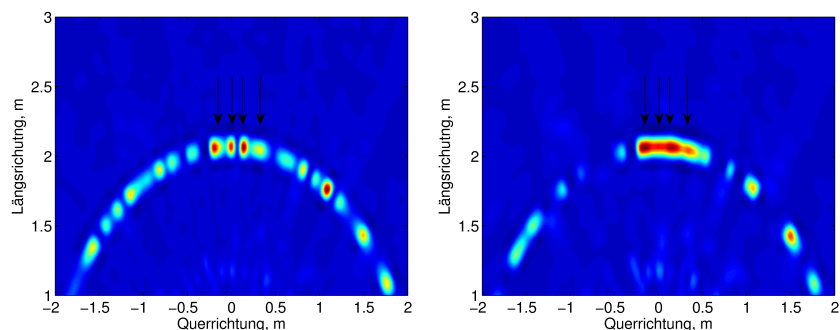
(a) ein Ziel, ungewichtetes Ko-Array (b) ein Ziel, gewichtetes Ko-Array



(c) zwei Ziele, ungewichtetes Ko-Array (d) zwei Ziele, gewichtetes Ko-Array



(e) drei Ziele, ungewichtetes Ko-Array (f) drei Ziele, gewichtetes Ko-Array

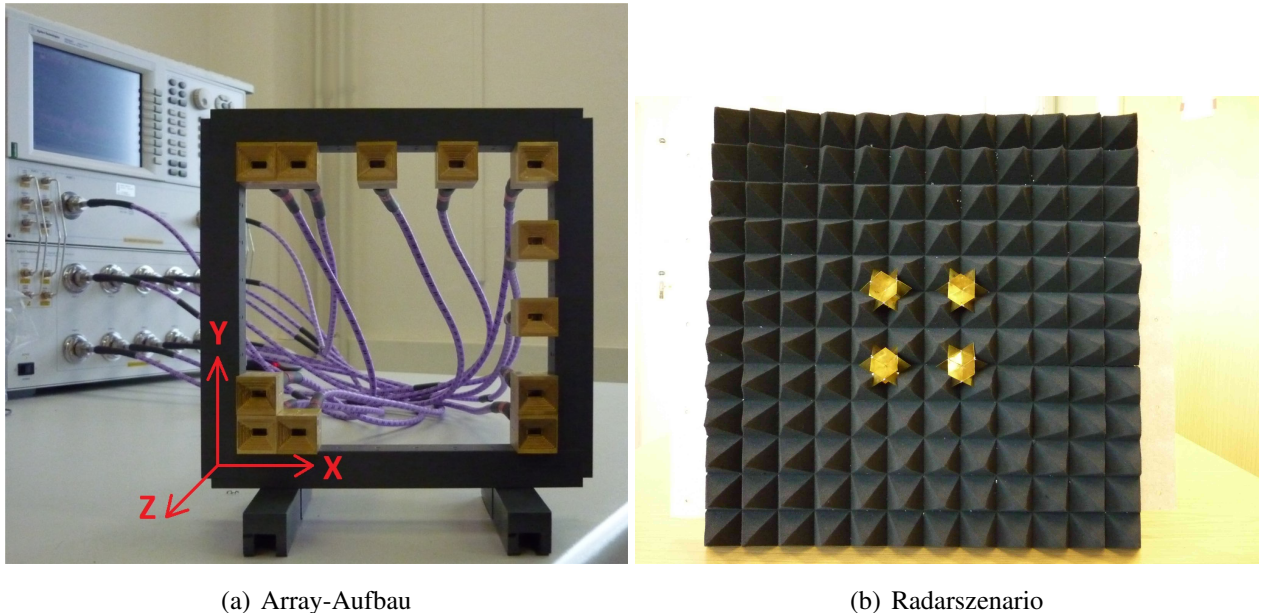


(g) vier Ziele, ungewichtetes Ko-Array (h) vier Ziele, gewichtetes Ko-Array

**Abbildung 7.5:** Radaraufnahmen mit 1, 2, 3 und 4 Zielen (von oben nach unten). Die Bildintensität in Regenbogenfarben ist auf den Wertebereich von Minimum (blau) bis Maximum (rot) linear normiert.

## 7.2 Quadratisches minimal-redundantes MIMO-Array

Der Messaufbau des quadratischen minimal-redundanten MIMO-Arrays ist in Bild 7.6a dargestellt. Die Array-Elemente (12 Ka-Band-Einzelstrahler) wurden an einem Kunststoffrahmen in der Konfi-



(a) Array-Aufbau

(b) Radarszenario

**Abbildung 7.6:** Aufbau des quadratischen minimal-redundanten MIMO-Arrays sowie Radarszenario mit 1 bis 4 Winkelreflektoren.

guration nach (5.13) platziert und über Koaxialkabel an die 12 Tore des Netzwerkanalysators *PNA E8364C* von *Agilent* angeschlossen. Wie im Experiment mit dem linearen Array wurden die Messungen im Frequenzbereich von 29,25 GHz bis 30,75 GHz durchgeführt.

Die Ausrichtung des Arrays in einem Kartesischen Koordinatensystem ist in Bild 7.6a definiert. Der kleinste Mittenabstand von zwei benachbarten Array-Elementen beträgt 20 mm (entspricht  $4\lambda_0/2$ ). Dieser Abstand ist ebenfalls die Gittergröße des Arrays. Daraus folgt eine Mehrdeutigkeit im Radarbild im Azimutbereich und im Elevationsbereich größer als  $15^\circ$  gemessen von der Z-Achse (s. Bild 7.6a) des Arrays. Dieser Winkelbereich ist etwa so groß wie die Halbwertsbreite der Hauptkeule des Einzelstrahlers. Deshalb wurde der Messraum außerhalb dieses Winkelbereichs mit Absorbern abgeschirmt. Die Kantenlänge  $l$  des Rahmen-Arrays beträgt 140 mm gemessen von der Mitte des linken unteren bis zur Mitte des rechten unteren Elements. Daraus ergibt sich eine theoretische Winkelauflösung von etwa  $\Delta\theta \approx \lambda/(2l) \approx 2^\circ$ .

Die für die Messung aufgebauten Radarszenarien bestehen aus 1 bis 4 in der XY-Ebene (definiert in Bild 7.6a) aufgestellten Reflektoren, die in Bild 7.6b dargestellt sind. Die Entfernung zwischen

der Reflektorebene und der Array-Ebene beträgt etwa  $R_0 = 2,2$  m. Die Auflösung des Arrays in der XY-Ebene bei der Entfernung beträgt etwa  $R_0 \tan(\Delta\theta) \approx 7,9$  cm. Der Abstand zwischen den benachbarten Reflektoren beträgt 8 cm sowohl in X- als auch in Y-Richtung.

Die Signalverarbeitung der Array-Antwort verläuft nach dem gleichen Algorithmus wie im Experiment mit dem linearen Array: nach der TRL- und der Freiraumkalibrierung wird die Array-Antwort fokussiert und anschließend erfolgt die Generierung der Ko-Array-Antwort. Als Gewichtungsfenster für das quadratische Ko-Array wird die zweidimensionale Funktion aus zwei dreieckförmigen linearen Fenstern mit Hilfe von (5.3) gebildet. Insgesamt werden vier Radarszenarien mit 1, 2, 3 und 4 Reflektoren untersucht. Die Radaraufnahmen sind in Bild 7.7 dargestellt.

Wie in den Bildern zu erkennen, ist die Reduzierung der Nebenkeulen durch die Ko-Array-Gewichtung besonders dann groß, wenn die Anzahl der Ziele relativ klein ist. Für die beiden sich rechts befindenden Ziele in den Bildern 7.7e-h wurde die theoretische Auflösung nicht erreicht.

Die einfachen Signalverarbeitungsmethoden wie das in dieser Arbeit vorgestellte Ko-Array-Gewichten werden in modernen Radarsystemen selten alleine benutzt, denn die damit erzeugten Bilder sind nicht gut lesbar. In solchen Radarsystemen werden daher Nachbearbeitungen (*postprocessing*) von Bildern vorgenommen. Um zu zeigen, dass solche Nachbearbeitungsverfahren auch mit quadratischen minimal-redundanten MIMO-Arrays funktionieren, werden die Radaraufnahmen mit dem sogenannten *Dekonvolutions-Verfahren* beispielhaft nachgebessert. Dies Verfahren wurde für diese Arbeit als eines der meistverbreiteten Bildverarbeitungsverfahren ausgewählt, weil es relativ einfach zu verstehen und anzuwenden ist und weil es verglichen mit zahlreichen anderen Bildverarbeitungsverfahren eine in der Regel bessere Bildqualität liefert [57].

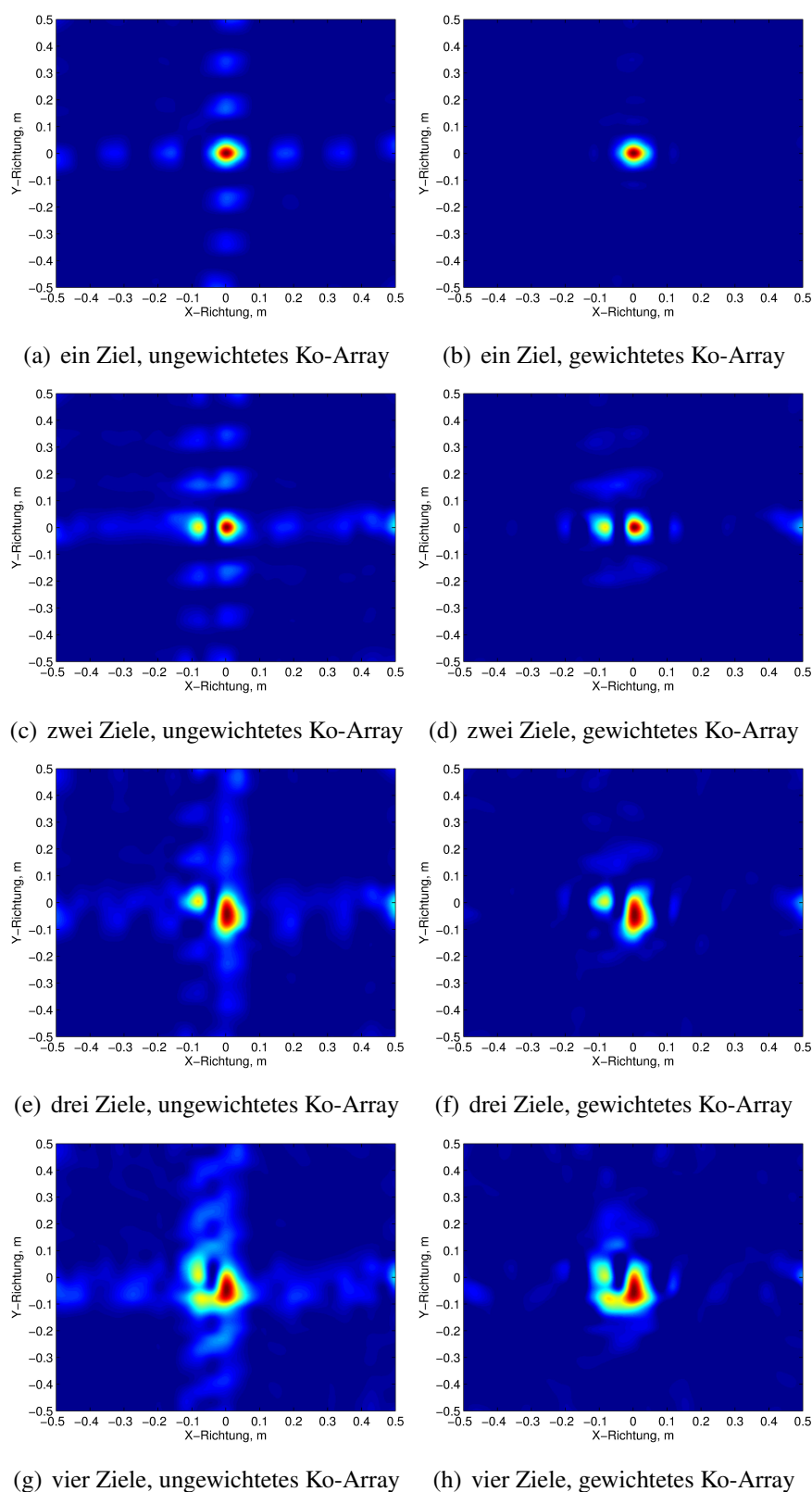
## Dekonvolutions-Verfahren

Das Dekonvolutions-Verfahren (zu deutsch „Entfaltungverfahren“) kommt ursprünglich aus der klassischen Bildverarbeitung und wird in der Optik eingesetzt, um das Originalbild  $J$  aus dem durch die Systemlinse verzerrten Bild  $I$  zu extrahieren [58]. Denn die Systemantwort, auch Punktspreizfunktion  $PSF$  der Linse genannt, verbindet das Originalbild mit dem verzerrten Bild gemäß des folgenden Faltungsmodells:

$$I = J * PSF. \quad (7.2)$$

Eine Entzerrung (Entfaltung) des Originalbildes kann mit Hilfe des rekursiven Algorithmus nach Lucy-Richardson [59] erfolgen:

$$J_{k+1} = J_k \left( PSF \star \frac{I}{PSF * J_k} \right), \quad (7.3)$$



**Abbildung 7.7:** Radaraufnahmen aus den vier Szenarien mit 1, 2, 3 und 4 Zielen (von oben nach unten). Die Bildintensität in Regenbogenfarben ist auf den Wertebereich von Minimum (blau) bis Maximum (rot) linear normiert.

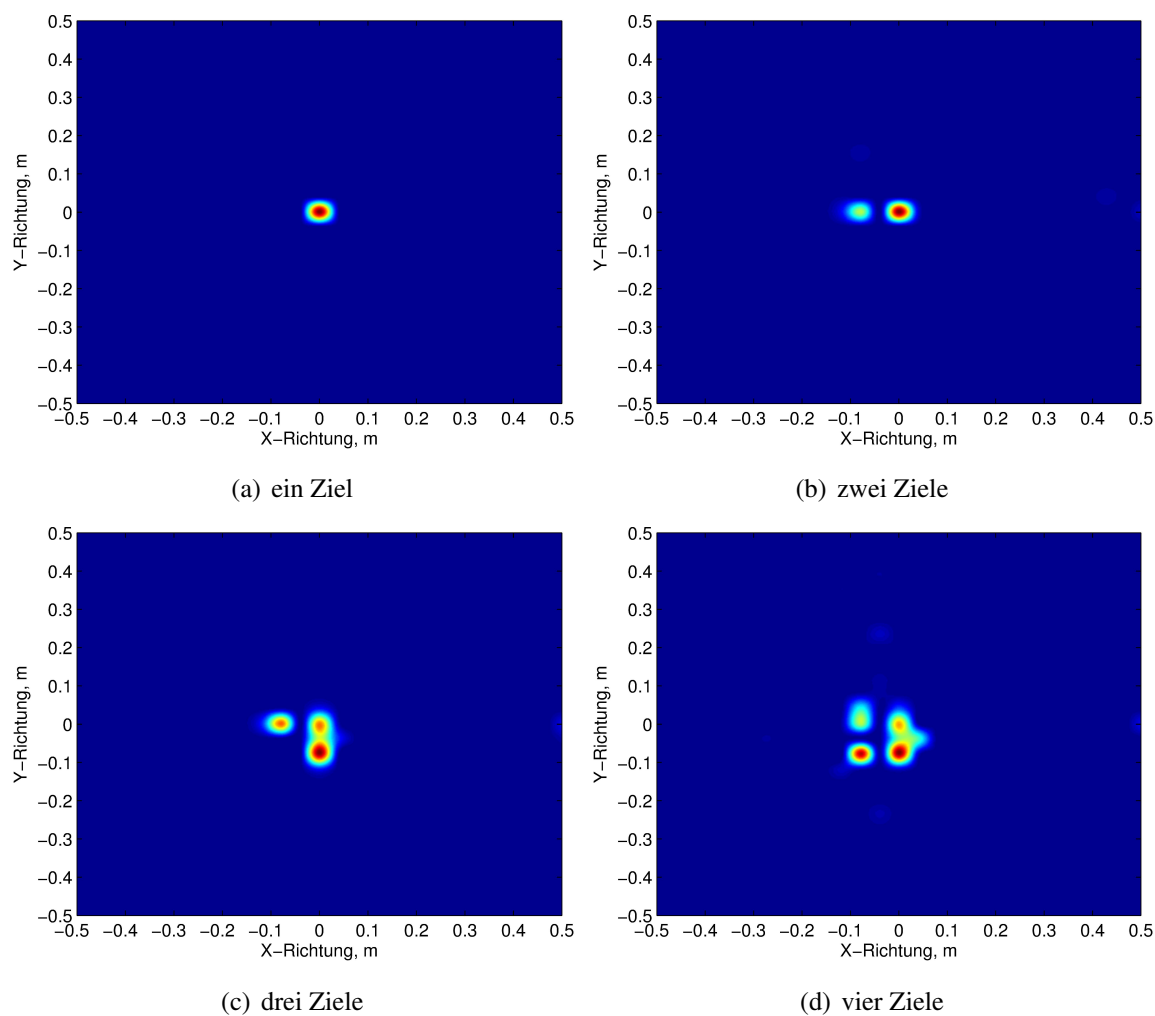
wobei  $J_0 = I$  im ersten Iterationsschritt eingesetzt wird.

Passt man das Faltungsmodell (7.2) an das Modell der Spektralschätzung (s. Unterkapitel 2.6) mit Antennen-Arrays an, ergibt sich:

$$I = J * PSF_{array} + \text{Kreuzprodukte}, \quad (7.4)$$

wobei  $PSF_{array}$  die Array-Direktivität darstellt. Weil die einzelnen Signale der Radarziele am Array-Ausgang im Unterschied zu optischen Quellen korreliert sind, entstehen im Radarbild störende Kreuzprodukte (s. Unterkapitel 3.3). Falls der Kreuzproduktanteil im Radarbild relativ klein ist – wenn beispielsweise die Anzahl der Ziele viel kleiner als die Anzahl der Array-Elemente ist – nähert sich das Modell (7.4) dem optischen Modell (7.2) an und das durch das Array-Diagramm verzerrte Originalbild kann mit dem Dekonvolutions-Verfahren nach (7.3) mit relativ kleinem Fehler extrahiert werden.

Das Dekonvolutions-Verfahren wurde auf die Radaraufnahmen in Bild 7.7 (linke Spalte) des quadratischen minimal-redundanten MIMO-Arrays angewandt. Dafür wurde das Array-Diagramm berechnet und als Punktspreizfunktion  $PSF_{array}$  dem Algorithmus übergeben. Die Zahl der Iterationsschritte wurde empirisch auf 100 gesetzt. Die resultierenden Radarbilder sind in Bild 7.8 dargestellt. In allen vier Radarszenarien können die Einzelziele auseinander gehalten werden, die Nebenkeulen sind klein.



**Abbildung 7.8:** Radarbilder nach Anwendung des Dekonvolutions-Verfahrens. Die Bildintensität in Regenbogenfarben ist auf den Wertebereich von Minimum (blau) bis Maximum (rot) linear normiert.

# 8 Zusammenfassung

Diese Arbeit befasst sich mit bildgebenden Radaren mit MIMO-Arrays. Das Interesse an MIMO-Radaren ist in letzter Zeit schnell gewachsen, zumal Technologie, Methoden der Bildsignalverarbeitung sowie effiziente Radararchitekturen sich schnell entwickeln.

Der Vorteil von MIMO-Arrays gegenüber der SIMO-Array-Klasse liegt in der höheren Anzahl an Freiheitsgraden und im reduzierten Bedarf an Array-Elementen und dem damit verbundenen geringeren Elektronikaufwand. Trotzdem ist die Elementanzahl in uniformen MIMO-Arrays groß, wenn eine feine Zielauflösung im Winkelbereich gefordert ist. Eine Möglichkeit, die Elementanzahl des Arrays niedrig zu halten und trotzdem die geforderte Auflösung zu erfüllen, bieten minimal-redundante MIMO-Arrays. Minimal-redundante SIMO-Arrays sind bereits seit den 1950-er bekannt – die entsprechende MIMO-Klasse ist dagegen erst in den letzten Jahren ein Forschungsthema. Eine der interessanten Fragen stellt die nach Methoden zur Generierung von „großen“ minimal-redundanten Arrays dar, denn dafür existiert keine geschlossene Lösung. So werden in dieser Arbeit Synthesemethoden zur Array-Generierung entwickelt sowie die Optimierung der Arrays beschrieben.

Da minimal-redundante Arrays in erster Linie stark ausgedünnte Arrays sind, sind die Nebenkeulen im Antennendiagramm relativ hoch. Das klassische Verfahren der Array-Gewichtung ist aufgrund der nicht uniformen Elementverteilung ineffektiv. Als Lösung wird in dieser Arbeit ein Verfahren zur Ko-Array-Gewichtung von minimal-redundanten Arrays vorgestellt.

Minimal-redundante Arrays sind weniger robust gegenüber Amplituden- und Phasenfehler als uniforme Arrays. In dieser Arbeit werden der Mechanismus und die Auswirkung des Fehlers auf das Array-Diagramm beschrieben. Des Weiteren wird auf die Problematik des additiven externen und internen Rauschens in Radaren mit minimal-redundanten Arrays eingegangen.

Kapitel 2 der Arbeit befasst sich mit den Grundlagen der Antennen-Arrays. Die für die spätere Array-Analyse benötigten Modelle der SIMO- und MIMO-Arrays werden vorgestellt. Weiterhin wird das Modell des Ko-Arrays erläutert. Die ursprüngliche Ko-Array-Gewichtung sowie die Elementverteilung werden dabei mit der Autokorrelationsfunktion aus der Konfiguration des physika-

lischen Arrays gewonnen. Die Ko-Array-Antwort enthält neben der Information über die Leistung der reflektierten Zielsignale ebenfalls störende Kreuzprodukte, die das Radarbild verfälschen. Die Kreuzprodukte sind mittelwertfrei, ihre Varianz wird kleiner, wenn die Anzahl der Array-Elemente größer und/oder die Anzahl der Ziele kleiner wird.

In Kapitel 3 wird der Stand der Technik der minimal-redundanten SIMO-Arrays zusammengefasst. Die Ausdünnungsraten der Arrays sind hoch: Arrays mit mehr als 30 Elementen weisen Array-Ausdünnungen von über 90% auf. Als Nächstes wird im Kapitel das Verfahren des Ko-Array-Gewichtens beschrieben. Weil die Ko-Arrays von minimal-redundanten Arrays uniform sind, können dabei herkömmliche Gewichtungsfunktionen verwendet werden. In dieser Arbeit sind die rechteckförmige sowie die dreieckförmige Gewichtung des Ko-Arrays untersucht worden. Die Ko-Array-Fensterung kann die störenden Kreuzprodukte reduzieren. Der Restfehler im Ko-Array nach der Gewichtung wurde mit der mittleren quadratischen Abweichung erfasst. Die dreieckförmige Gewichtung zeigt sich in Mehrzielsituationen etwas robuster als die rechteckförmige.

In Kapitel 4 geht es um lineare minimal-redundante MIMO-Arrays. Das Konzept des äquivalenten Empfangs-Arrays spielt eine wichtige Rolle bei der Modellierung der Array-Antwort. Die Anzahl der Freiheitsgrade ist unterschiedlich für bistatische und monostatische MIMO-Arrays. Monostatische Arrays weisen bei gleicher Elementanzahl etwa doppelt so viele Freiheitsgrade auf wie bistatische. Es wird ein Syntheseverfahren zur Generierung von bistatischen MIMO-Konfigurationen beschrieben. Die synthetisierten Arrays mit sechs oder mehr Elementen weisen Ausdünnungsraten größer als 85% auf.

In Kapitel 4 wird ebenfalls ein Optimierungsverfahren zur Generierung von monostatischen minimal-redundanten MIMO-Arrays vorgestellt. Der Lösungsraum des eingesetzten Partikel-Schwarm-Optimierers ist durch die obere Schranke für die Längen der MIMO-Arrays begrenzt. Die Dimension der Optimierungsvariable ist kleiner als die Elementanzahl des zu optimierenden MIMO-Arrays, weil die Elemente an den Rändern des Arrays den durch die Uniformität der Ko-Arrays bedingten Positionen zugewiesen sind. Die Analyse der Positionen der Randelemente erfolgt mit Hilfe der Potenzreihen algebra.

Die Optimierung von minimal-redundanten MIMO-Arrays mit vorgegebenem Mindestelementabstand wird ebenfalls in Kapitel 4 vorgestellt. Die optimierten Arrays sind geeignet für Radaranwendungen, wo der minimale Abstand zwischen benachbarten Array-Elementen kritisch ist. Die optimierten Array-Konfigurationen sind effektiv, wenn das Verhältnis der Anzahl der Array-Elemente zu dem normierten Mindestabstand größer 1 ist. Experimentelle Bildaufnahmen mit einem Array aus dieser Array-Klasse werden in Kapitel 7 präsentiert.

---

In Kapitel 5 wird eine Synthesemethode zur Generierung von quadratischen minimal-redundanten MIMO-Arrays vorgestellt. Ein quadratisches MIMO-Array mit 12 Elementen wurde zwecks Validierung der Methode im Rahmen eines Experiments aufgebaut. Die mit dem Array aufgenommenen Radarbilder werden in Kapitel 7 vorgestellt. Beispielhaft wird gezeigt, wie bei quadratischen MIMO-Arrays durch nachgelagerte Dekonvolution die Qualität des Radarbilds verbessert werden kann, wenn der Anteil der störenden Kreuzprodukte nicht zu groß ist.

Kapitel 6 befasst sich mit der Streuung der Hauptkeulenrichtung von minimal-redundanten SIMO- und MIMO-Arrays infolge des additiven Rauschens. Die Streuung wird nach unten mit der Cramer-Rao-Schranke abgeschätzt. Die Abweichung der Hauptkeulenposition wird kritisch, wenn das Signal-zu-Rausch-Verhältnis kleiner als 5..10 dB wird. Es wird weiterhin der Einfluss von Amplituden- und Phasenfehlern in minimal-redundanten Arrays untersucht. Der Phasenfehler spielt bei dem Array-Entwurf eine stärkere Rolle als der Amplitudenfehler. Das Verhalten von fehlerbehafteten minimal-redundanten Arrays ist näherungsweise unabhängig von der Anzahl der Elemente. Dreieckförmig gewichtete Ko-Arrays zeigen dabei ein etwas robusteres Verhalten als rechteckig gewichtete.

Zusammenfassend ist festzustellen, dass die in dieser Arbeit dargestellten Methoden der Synthese sowie der Optimierung von minimal-redundanten MIMO-Arrays als Ausgangspunkt für weitere Verfahren zur Array-Generierung herangezogen werden können. Auch könnten sie für die Untersuchung von weiteren Klassen von ausgedünnten Arrays, wie beispielsweise von rechteckigen MIMO-Arrays, angepasst werden.

# Literaturverzeichnis

- [1] D. Bliss and K. Forsythe, "Multiple-input multiple-output (MIMO) radar and imaging: degrees of freedom and resolution," in *Conference Record of the 37th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, vol. 1, pp. 54–59, 2003.
- [2] C. A. Balanis, *Antenna theory: analysis and design*. John Wiley & Sons, 2012.
- [3] A. Moffet, "Minimum-redundancy linear arrays," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 16, no. 2, pp. 172–175, 1968.
- [4] B. Steinberg, *Microwave imaging with large antenna arrays: Radio camera principles and techniques*. Wiley, 1983.
- [5] L. C. Stange, C. Metz, E. Lissel, and A. F. Jacob, "Multiplicatively processed antenna arrays for DBF radar applications," in *IEE Proceedings on Microwaves, Antennas and Propagation*, vol. 149, pp. 106–112, IET, 2002.
- [6] M. H. Hayes, *Statistical digital signal processing and modeling*. Wiley, 1996.
- [7] J. Leech, "On the Representation of 1, 2, ..., n by Differences," in *London Math. Soc.*, pp. 1–10, 1956.
- [8] K. Rezer, W. Gropengießer, and A. F. Jacob, "Particle Swarm Optimization of Minimum-Redundancy MIMO Arrays," in *German Microwave Conference (GeMiC)*, pp. 1–4, 2011.
- [9] M. I. Skolnik, *Radar handbook*. McGraw-Hill, 1970.
- [10] J. R. Ohm and H. D. Lüke, *Signalübertragung*. Springer, 2002.
- [11] A. G. Stove, "Linear FMCW radar techniques," in *IEE Proceedings F on Radar and Signal Processing*, vol. 139, pp. 343–350, 1992.
- [12] T. Ohira, "Adaptive array antenna beamforming architectures as viewed by a microwave circuit designer," in *Asia-Pacific Microwave Conference*, pp. 828–833, 2000.
- [13] W. L. Melvin, "A STAP overview," in *Aerospace and Electronic Systems Magazine*, vol. 19, pp. 19–35, 2004.

- [14] D. E. Dudgeon and D. H. Johnson, *Array Signal Processing: Concepts and Techniques*. Prentice Hall, 1993.
- [15] J. Li and P. Stoica, *MIMO radar signal processing*. Wiley, 2009.
- [16] F. Harris, “On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform,” in *Proceedings of the IEEE*, vol. 66, pp. 51–83, 1978.
- [17] J. W. Cooley and J. W. Tukey, “An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series,” in *Mathematics of Computation*, vol. 19, pp. 297–301, 1965.
- [18] R. T. Hoctor and S. A. Kassam, “The unifying role of the coarray in aperture synthesis for coherent and incoherent imaging,” in *Proceedings of the IEEE*, vol. 78, pp. 735–752, 1990.
- [19] S. Holm, B. Elgetun, and G. Dahl, “Properties of the beampattern of weight- and layout-optimized sparse arrays,” *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, vol. 44, no. 5, pp. 983–991, 1997.
- [20] A. Trucco, “Thinning and weighting of large planar arrays by simulated annealing,” *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, vol. 46, no. 2, pp. 347–355, 1999.
- [21] A. Trucco and V. Murino, “Stochastic optimization of linear sparse arrays,” in *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, vol. 24, pp. 291–299, 1999.
- [22] M. Ishiguro, “Minimum redundancy linear arrays for a large number of antennas,” in *Radio Science*, vol. 15, pp. 1163–1170, 1980.
- [23] S. DeGraaf and D. Johnson, “Optimal linear arrays for narrow-band beamforming,” in *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP '84*, vol. 9, pp. 214–217, 1984.
- [24] L. Kopilovich, “Square array antennas based on hadamard difference sets,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 56, no. 1, pp. 263–266, 2008.
- [25] G. Oliveri, M. Donelli, and A. Massa, “Linear array thinning exploiting almost difference sets,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 57, no. 12, pp. 3800–3812, 2009.
- [26] G. Oliveri, F. Caramanica, C. Fontanari, and A. Massa, “Rectangular Thinned Arrays Based on McFarland Difference Sets,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 59, no. 5, pp. 1546–1552, 2011.

- [27] A. Camps, A. Cardama, and D. Infantes, "Synthesis of large low-redundancy linear arrays," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 49, no. 12, pp. 1881–1883, 2001.
- [28] J. Hopperstad and S. Holm, "The Coarray of Sparse Arrays with Minimum Sidelobe Level," in *Third IEEE Nordic Signal Processing Symposium*, pp. 137–140, 1998.
- [29] K. Rezer and A. F. Jacob, "Co-array Weighting in Minimum-Redundancy Arrays for Radar Image Enhancement," in *European Radar Conference (EuRAD)*, pp. 117–120, 2010.
- [30] J. Dong, Q. Li, and W. Guo, "A Combinatorial Method for Antenna Array Design in Minimum Redundancy MIMO Radars," *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 8, pp. 1150–1153, 2009.
- [31] G. Liao, M. Jin, and J. Li, "A two-step approach to construct minimum redundancy MIMO radars," in *International Radar Conference – Surveillance for a Safer World*, pp. 1–4, 2009.
- [32] H. J. Nussbaumer, *Fast Fourier transform and convolution algorithms*. Springer, 1982.
- [33] D. Boeringer and D. Werner, "Particle swarm optimization versus genetic algorithms for phased array synthesis," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 52, no. 3, pp. 771–779, 2004.
- [34] R. C. Eberhart and Y. Shi, "Comparison between genetic algorithms and particle swarm optimization," in *Evolutionary Programming VII*, pp. 611–616, Springer, 1998.
- [35] P. J. Angeline, "Evolutionary optimization versus particle swarm optimization: Philosophy and performance differences," in *Evolutionary Programming VII*, pp. 601–610, Springer, 1998.
- [36] K. James and E. Russell, "Particle swarm optimization," in *International Conference on Neural Networks*, pp. 1942–1948, 1995.
- [37] R. C. Eberhart and J. Kennedy, "A new optimizer using particle swarm theory," in *Micro machine and human science*, vol. 1, pp. 39–43, 1995.
- [38] Y. Shi and R. Eberhart, "Empirical study of particle swarm optimization," in *Proceedings of the 1999 Congress on Evolutionary Computation*, vol. 3, pp. 1945–1950, 1999.
- [39] J. F. Kennedy, R. Eberhart, and Y. Shi, *Swarm intelligence*. Morgan Kaufmann, 2001.
- [40] B. Birge, "PSOt – a particle swarm optimization toolbox for use with Matlab," in *Proceedings of the IEEE on Swarm Intelligence Symposium*, pp. 182–186, 2003.
- [41] R. Perez and K. Behdinan, "Particle swarm approach for structural design optimization," in *Computers And Structures*, vol. 85, pp. 1579–1588, 2007.

- 
- [42] M. S. Arumugam and M. Rao, "On the performance of the particle swarm optimization algorithm with various inertia weight variants for computing optimal control of a class of hybrid systems," *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2006.
- [43] K. Rezer and A. F. Jacob, "Thinned MIMO Arrays with Constrained Element Spacing for Imaging Radar," in *European Radar Conference (EuRAD)*, pp. 87–90, 2012.
- [44] Y. Hua, T. Sarkar, and D. Weiner, "L-shaped array for estimating 2-D directions of wave arrival," in *Proceedings of the 32nd Midwest Symposium on Circuits and Systems*, vol. 39, pp. 390–393, 1989.
- [45] C. Klickow, "Planare minimal redundante Antennenarrays." Bachelorarbeit, Technische Universität Hamburg-Harburg, 2011.
- [46] K. Rezer, C. Klickow, and A. F. Jacob, "Thinned MIMO Frame-Arrays for Radar Imaging," in *Microwave Symposium Digest (MTT)*, pp. 1–3, 2012.
- [47] V. Viikari, T. Varpula, and M. Kantanen, "Automotive radar technology for detecting road conditions. Backscattering properties of dry, wet, and icy asphalt," in *European Radar Conference (EuRAD)*, pp. 276–279, 2008.
- [48] W. G. Carrara, *Spotlight synthetic aperture radar: Signal processing algorithms*. Artech House, 1995.
- [49] S. M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing, Volume I: Estimation Theory*. Prentice Hall, 1993.
- [50] E. J. Vertatschitsch and S. Haykin, "Impact of linear array geometry on direction-of-arrival estimation for a single source," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 39, no. 5, pp. 576–584, 1991.
- [51] J. Ruze, "The effect of aperture errors on the antenna radiation pattern," in *Nuovo Cimento*, vol. 9, pp. 364–380, 1952.
- [52] S. Roucos and A. Wilgus, "High quality time-scale modification for speech," in *Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE International Conference on ICASSP*, vol. 10, pp. 493–496, 1985.
- [53] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, vol. 55. US Gov. Print. Office, 1964.
- [54] B. Steinberg and H. Subbaram, *Microwave imaging techniques*. Wiley, 1991.

- [55] E. F. Knott, J. Shaeffer, and M. Tuley, *Radar cross section*. SciTech Publishing, 2004.
- [56] F. C. Smith, B. Chambers, and J. C. Bennett, "Calibration techniques for free space reflection coefficient measurements," *IEE Proceedings A on Science, Measurement and Technology*, vol. 139, no. 5, pp. 247–253, 1992.
- [57] D. Kundur and D. Hatzinakos, "Blind image deconvolution," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 13, no. 3, pp. 43–64, 1996.
- [58] D. S. Biggs and M. Andrews, "Acceleration of iterative image restoration algorithms," in *Applied optics*, vol. 36, pp. 1766–1775, 1997.
- [59] W. H. Richardson, "Bayesian-based iterative method of image restoration," in *JOSA*, vol. 62, pp. 55–59, 1972.

# Lebenslauf

<b>Name</b>	Rezer
<b>Vorname</b>	Kamil
<b>Geburtsdatum</b>	27.05.1980
<b>Geburtsort</b>	Petropawlowsk, Kasachstan
<b>09.1986 – 05.1994</b>	Hauptschule, Petropawlowsk
<b>09.1994 – 06.1995</b>	Polytechnisches Lyzeum, Petropawlowsk
<b>09.1995 – 06.1999</b>	Ausbildung zum Rundfunktechniker, Polytechnisches College, Petropawlowsk
<b>09.1999 – 07.2001</b>	Studium der Radiotechnik, Staatliche Universität Severnij Kasachstan, Petropawlowsk
<b>07.2001 – 05.2002</b>	Deutschsprachkurs, Independencia Sprachschule, Hamburg
<b>10.2002 – 09.2007</b>	Studium der Elektrotechnik, Technische Universität Hamburg-Harburg Abschluss: Diplom-Ingenieur Elektrotechnik
<b>10.2007 – 01.2012</b>	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Hochfrequenztechnik, Technische Universität Hamburg-Harburg
<b>seit 07.2012</b>	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fraunhofer-Institut für Mikroelektronische Schaltungen und Systeme, Duisburg