

266 | Februar 1971

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

P. Blume

**Berechnung der gekoppelten Biege-
und Torsionsschwingungen des
Propellerblattes unter
Berücksichtigung des
Steigungsverlaufes über dem Radius**

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr. 266

Berechnung der gekoppelten Biege- und Torsionsschwingungen
des Propellerblattes unter Berücksichtigung des Steigungs-
verlaufes über dem Radius

von

P. Blume

Hamburg, Februar 1971

Berechnung der gekoppelten Biege- und Torsionsschwingungen
des Propellerblattes unter Berücksichtigung des Steigungs-
verlaufes über dem Radius

1. Einführung

2. Profilgeometrie

3. Rechenmethode

- 3.1. Wahl des Ersatzsystems
- 3.2. Modifiziertes Gumbel-Osupor-Verfahren für
gegeneinander verdrehte Querschnitte
- 3.3. Berechnung der Eigenschwingungszahlen und
Eigenformen
- 3.4. Berechnung der erzwungenen Schwingungen
 - 3.4.1. Erregerlasten
 - 3.4.2. Rechenverfahren

4. Ergebnisse

- 4.1. Eigenschwingungszahlen und Eigenformen
- 4.2. Erzwungene Schwingungen

5. Zusammenfassung

1. Einführung

In dieser Arbeit soll als Erweiterung des Berichts Nr.256 ein Weg zur Berechnung der gekoppelten Biege- und Torsionsschwingungen eines Propellerblattes gezeigt werden. Diese Arbeit stützt sich daher vorwiegend auf den schon genannten Bericht von Boese [1] und das Verfahren von Gumbel-Gsupor [2] .

Boese hat reine Biegeschwingungen unter Berücksichtigung des Steigungsverlaufes berechnet. Als Voraussetzungen gehen deshalb ein, daß die Profilschwerpunkte mit den Schubmittelpunkten des Profils zusammenfallen, daß diese Punkte auf einer Geraden liegen und auch die resultierenden äußeren Kräfte durch diese Punkte gehen.

Diese Voraussetzungen sollen nun fortfallen, wenn auch die Bedingung Schubmittelpunkt gleich Schwerpunkt später wieder eingeführt wird. Wie gezeigt wird, ist dieser Fehler vernachlässigbar gering. Der wesentliche Anteil des Torsionsmomentes entsteht infolge der Rücklage.

2. Profilgeometrie

Lage der Schnitte

In der Regel werden die Profile eines Propellerblattes durch Zylinderschnitte festgelegt. Boese hat diese auch zur Berechnung der Massen, Steifigkeiten und Widerstandsmomente herangezogen. Dadurch entsteht ein Fehler gegenüber den ebenen Querschnitten, die wohl richtiger zu wählen wären. Meyne weist in [3] auf die Lage der Bruchflächen, d.h. auch der kleinsten Widerstandsmomente, hin. Trotzdem soll auch hier mit den gestreckten Zylinderschnitten gerechnet werden, weil für den gerechneten Propeller eben diese Schnitte mit Aufmaßen vorliegen. Dieser Fehler betrifft nur die Eingabegrößen, ändert aber nichts an der eigentlichen Schwingungsrechnung.

Hauptträgheitsachsen und Schubmittelpunkt

Am Beispiel eines Profils soll die Lage der Hauptträgheitsachsen und des Schubmittelpunktes überprüft werden, weil bei asymmetrischen Profilen Schwerpunkt und Schubmittelpunkt sowie Sehnen- und Hauptträgheitsachsenrichtung nicht identisch sind. Als Beispiel wird folgendes Profil gewählt: NACA 08.66, Wölbungsverhältnis $f/c = 0,0679$ und Dickenverhältnis $t/c = 0,15$.

Für dieses Profil wurden die erforderlichen Werte durch Zerlegung in Rechtecke berechnet (siehe Anhang).

Der Winkel zwischen der Sehnen- und der Hauptträgheitsachsenrichtung ergibt sich zu 1,42 Grad, das Trägheitsmoment ist praktisch gleich dem um die Schwerpunktsachse in Sehnenrichtung.

Nach [4] ist die Lage des Schubmittelpunktes bezogen auf die Trägheitsachsen durch den Schwerpunkt gegeben durch

$$a_x = \frac{J(xy^2)}{J_x} \frac{J_x + J_y}{J_y - J_x}$$
$$a_y = - \frac{J(x^2y)}{J_y} \frac{J_x + J_y}{J_y - J_x}$$

Für das obige Profil ergeben sich die Werte $a_x \approx 0,014c$ und $a_y \approx 0,005c$, d.h. sie sind vernachlässigbar klein.

Da für ähnliche Propellerprofile ähnliche Werte erwartet werden, wird also in dieser Arbeit die Sehnenrichtung als Hauptträgheitsrichtung angenommen, und die Lage des Schubmittelpunktes sei identisch mit der des Schwerpunktes.

3. Rechenmethode

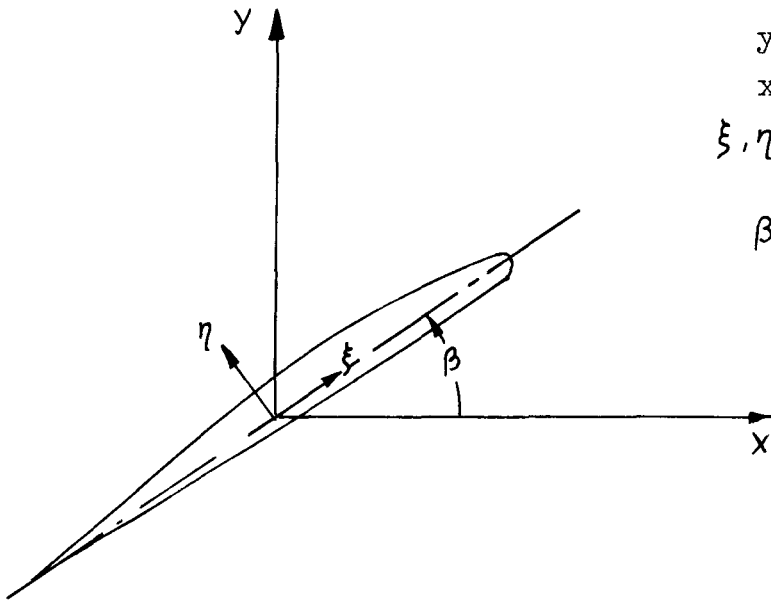
3.1. Wahl des Ersatzsystems

Das Propellerblatt wird als an der Nabe einseitig eingespannter Träger betrachtet. Dabei ist die Massenbelegung und die Steifigkeitsverteilung über der Länge veränderlich. Die Hauptträgheitsachsen sind entsprechend der jeweiligen Steigung kontinuierlich gegeneinander verdreht.

Zur Berechnung der benötigten Größen werden die Aufmaße der Zylinderschnitte herangezogen, die Rücklage jedes Schnittes wird eingegeben durch den Bogen zwischen eintretender Kante und einem Bezugsradius.

Koordinaten

Zylinderschnitt:



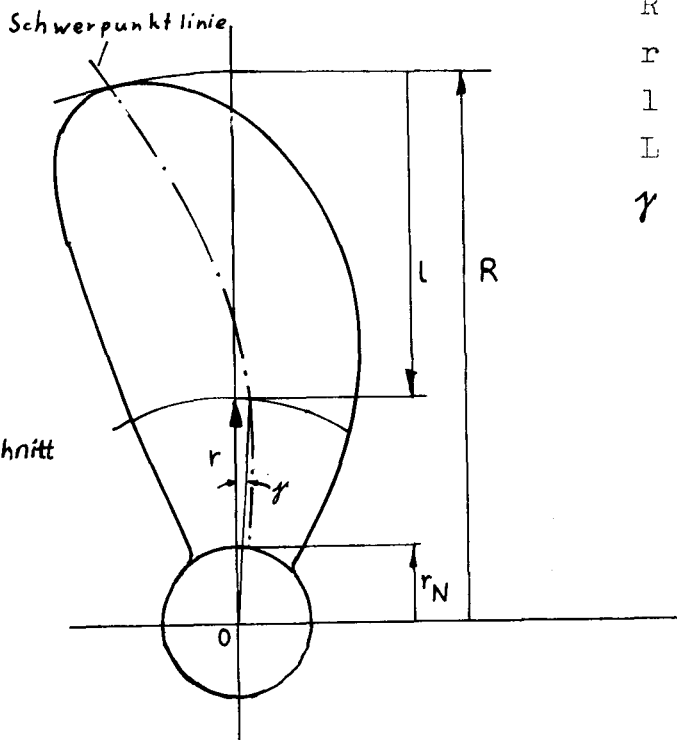
y = achsiale Koordinate

x = tangentielle Koord.

ξ, η = Koordinaten in Richtung der Hauptträgheitsachsen

β = Steigungswinkel

Projektion des Blattes:



r = radiale Koordinate

R = Propellerradius

r = Nabenradius

$l = R - r$

$L = R - r$

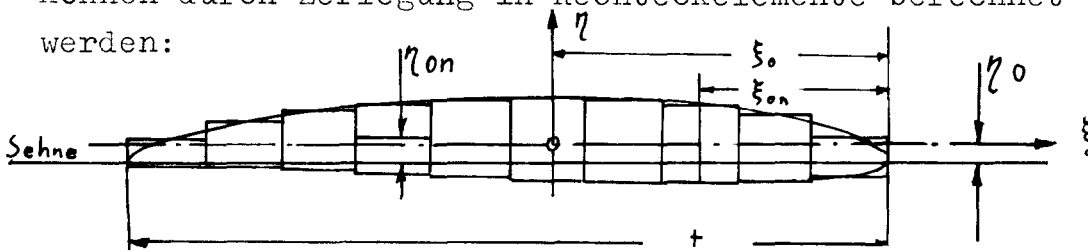
γ = Winkel Schwerpunkt-

O - Bezugsradius

Zylinderschnitt

Steifigkeitsverlauf

Die Flächen, ihre Schwerpunkte und die Trägheitsmomente können durch Zerlegung in Rechteckelemente berechnet werden:



Üblicherweise ist der Profilverlauf gegeben durch obere und untere Aufmaßpunkte η_o und η_u . Dann gilt für die Fläche:

$$F = \sum_{n=1}^z \eta_{pn} \Delta \xi \quad \eta_{pn} = \eta_{on} - \eta_{un}$$

für den Schwerpunktsabstand von der Sehne:

$$\eta_o = \frac{\sum_{n=1}^z \eta_{on} \eta_{pn} \Delta \xi}{F}$$

für den Schwerpunktsabstand von der Nase:

$$\xi_o = \frac{\sum_{n=1}^z \xi_{on} \eta_{pn} \Delta \xi}{F}$$

und für das Trägheitsmoment (bei Drehung in η -Richtung):*

$$J_\eta = \frac{1}{12} \sum_{n=1}^z \eta_{pn}^3 \Delta \xi + \sum_{n=1}^z \eta_{on}^2 \eta_{pn} \Delta \xi - \eta_o^2 F$$

Das kleinste Widerstandsmoment gilt in der Regel für die Blattoberseite (Saugseite), weil der Abstand zur Trägheitsachse für die Saugseite größer ist:

$$W_o = \frac{J_\eta}{s_{max}}$$

Für die Drillsteifigkeit sollen die Werte einer Ellipse gleichen Dickenverhältnisses genommen werden:

$$J_{T_{or}} = \frac{\pi}{16} \frac{m^3}{m^2+1} \eta_{pmax}^4, \quad m = \frac{t}{\eta_{pmax}}$$

und

$$W_T = \frac{\pi}{16} m \eta_{pmax}^3$$

wobei τ_{max} in den Endpunkten der kleinen Achse auftritt, also am gleichen Ort wie σ_{max} aus der Biegebeanspruchung.

Massenverteilung

Die Massenverteilung ergibt sich aus derjenigen des Blattes vergrößert um die mitschwingende Wassermasse. Deshalb ist sie für die ξ - und die η -Richtung verschieden:

$$m_\eta(l) = \rho_{prop} F(l) + \kappa \rho_w \frac{\pi}{4} t(l)^2$$

Die hydrodynamische Masse wird für jeden Querschnitt gleich der für einen elliptischen Zylinder mit der Hauptachse entsprechend der Profiltiefe angenommen, und zur Berücksichtigung der Dreidimensionalität wird der Reduktionsfaktor κ eingeführt. Entsprechend [1] wird κ über die Länge konstant mit $\kappa = 0.66$ angenommen.

* Das Trägheitsmoment in ξ -Richtung wird demgegenüber als unendlich groß angesehen (für das Profil-Beispiel ergab sich ein Verhältnis 1:35).

In ξ -Richtung wird die mitschwingende Wassermasse vernachlässigt:

$$m_{\xi}(l) = \rho_{prop} \cdot F(l)$$

Für die Torsion wird das polare Trägheitsmoment benötigt. Die Drehachse geht durch den Schubmittelpunkt, d.h. näherungsweise auch durch den Profilschwerpunkt.

Für ein Profil gilt:

$$J_0 = \int \alpha^2 dm = \rho \int \alpha^2 dF = \rho \cdot (J_2 + J_{\xi}) \approx \rho \cdot J_{\xi}$$

als Summe

$$J_0 = \rho_{prop} \left[\frac{1}{12} \sum_{n=1}^z \eta_{pn} \Delta \xi^3 + \sum_{n=1}^z \xi_{0n}^2 \eta_{pn} \Delta \xi - \xi_0^2 F \right]$$

Das Ersatzmassenträgheitsmoment ergibt sich wieder aus der Summe der Werte des Körpers und der mitschwingenden Wassermasse. Das hydrodynamische Trägheitsmoment J_h'' wird entsprechend dem einer Ellipse gleichen Achsenverhältnisses angenommen. Für Achsenverhältnisse ≤ 0.2 ist J_h'' praktisch gleich dem für eine Platte [5]:

$$J_h'' = \frac{1}{8} \pi \rho_w \left(\frac{t}{2}\right)^4$$

und

$$J''(e) = J_0 + \alpha \cdot \frac{1}{128} \pi \rho_w t^4$$

wobei hier wieder der gleiche Reduktionsfaktor α für die Berücksichtigung dreidimensionaler Effekte gewählt wird. Das Massenträgheitsmoment für Drehung um die ξ -Achse wird vernachlässigt bzw. zu null gesetzt.

3.2. Modifiziertes Gumbel-Csupor-Verfahren für gegeneinander verdrehte Querschnitte

Das Verfahren [2] besteht darin, daß der Balken in diskrete Einzelmassen aufgeteilt wird, die durch elastische Glieder verbunden sind. Kennt man die Einzelmassen, die Steifigkeiten und die Schwingungsfrequenz, so kann man die Übertragung des dynamischen Zustandes, gekennzeichnet durch

Auslenkung	(w)
Drehung		w'	
Verdrillung		φ	
Biegemoment		M	
Querkraft		Q	
Torsionsmoment		M	

von einem Element zum anderen und damit auch von Stab-

ende zu Stabende angeben. Gibt man sich also die Bedingungen an einem Ende vor, so können die Bedingungen am anderen Stabende durch Integration über die Länge berechnet werden.

Wegen der Verdrehung des Blattes muß der dynamische Zustand in zwei Ebenen, z.B. in x- und y-Richtung, betrachtet werden. Dann lautet der Zustandsvektor:

$$\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w'_x \\ w'_y \\ \varphi \\ M_x \\ M_y \\ Q_x \\ Q_y \\ M_T \end{pmatrix}$$

Im um den über der Länge veränderlichen Winkel β verdrehten $\xi - \eta$ -System werden dann Moment und Querkraft:

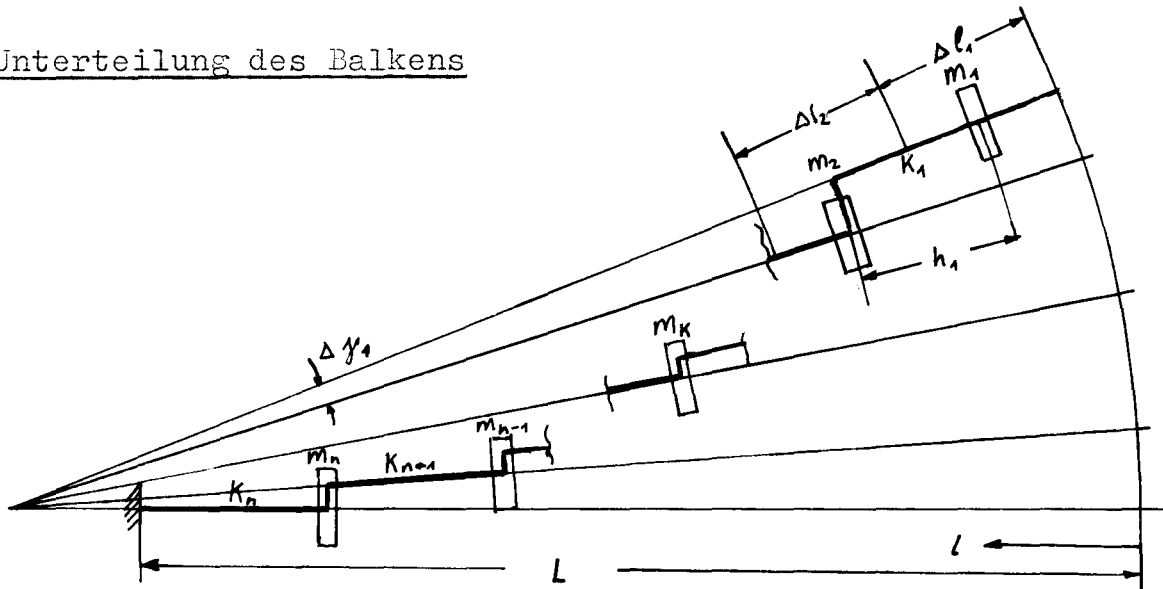
$$\begin{aligned} M_\xi &= M_x \cos \beta + M_y \sin \beta \\ M_\eta &= -M_x \sin \beta + M_y \cos \beta \\ Q_\xi &= Q_x \cos \beta + Q_y \sin \beta \\ Q_\eta &= -Q_x \sin \beta + Q_y \cos \beta \end{aligned}$$

Die Steifigkeit gegen Deformation eines jeden Abschnittes in ξ -Richtung sei unendlich groß gegenüber der in η -Richtung, es tritt also nur eine Deformation in η -Richtung auf. Sie lautet im x-y-System:

$$\begin{aligned} f_x &= -f_\eta \sin \beta & f_\xi &= 0 ! \\ f_y &= f_\eta \cos \beta \\ \alpha_x &= -\alpha_\eta \sin \beta & \alpha_\xi &= 0 ! \\ \alpha_y &= \alpha_\eta \cos \beta \end{aligned}$$

Aber die sich aus der Gesamtheit aller Deformationen der Abschnitte ergebenden Bewegungen eines Elementes haben Komponenten in ξ - und η -Richtung. Bei Bestimmung der Massenkräfte ist darauf zu achten, daß die Massen für beide Richtungen verschieden sind.

Unterteilung des Balkens



Den radial verlaufenden Teilen des Federzuges sind die Steifigkeiten zugeordnet, die tangential verlaufenden Teile sind vollkommen starr. Dem Rechengang entsprechend beginnt die Numerierung am freien Ende.

Massen, Massenträgheitsmomente und Federelastizitäten:

$$m_{\xi k} = m_{\xi} (l_k) \cdot \Delta l_k$$

$$m_{\eta k} = m_{\eta} (l_k) \cdot \Delta l_k$$

$$J_{TK}'' = J'' (l_k) \cdot \Delta l_k$$

$$K_{BQK} = h_k^3 / 3EJ_{\eta k}$$

(für Absenkung infolge Querkr.)

$$K'_{BQK} = h_k^2 / 2EJ_{\eta k}$$

(für Drehung infolge Querkr.)

$$K_{BMK} = h_k^2 / 2EJ_{\eta k}$$

(für Absenkung infolge Moment)

$$K'_{BMK} = h_k / EJ_{\eta k}$$

(für Drehung infolge Moment)

$$K_{TK} = h_k / GJ_{Tor k}$$

(für Verdrillung inf. Tor.-Mom.)

Die Schubdurchsenkung wird vernachlässigt, weil nur die niedrigen Schwingungsgrade berechnet werden.

Rechengang

In jedem Schritt wird die Absenkung, Drehung und Verdrillung einer diskreten Masse k ausgehend von der vorhergehenden Masse i berechnet. Die Schwingungsfrequenz wird zunächst als bekannt vorausgesetzt bzw. vorgegeben.

- 1.) Der Querkraftzuwachs wird von der vorherigen Masse übernommen:

$$Q_{xk} = Q_{xi} + \Delta Q_{xi}$$

$$Q_{yk} = Q_{yi} + \Delta Q_{yi}$$

$$Q_{\eta k} = -Q_{xk} \sin \beta_k + Q_{yk} \cos \beta_k$$

- 2.) Ebenso beim Moment:

$$M_{cxk} = M_{xi} + \Delta M_{xi}$$

$$M_{cyk} = M_{yi} + \Delta M_{yi}$$

Gesamtes Moment:

$$M_{xk} = M_{cxk} + h_k Q_{xk}$$

$$M_{yk} = M_{cyk} + h_k Q_{yk}$$

- 3.) Das Torsionsmoment:

$$M_{TK} = M_{Ti} \cdot \cos \Delta \gamma_i + \Delta M_{Ti} + Q_{\eta i} (R - l_i) \sin \Delta \gamma_i$$

- 4.) Verdrillung:

$$\Delta \varphi_k = K_{TK} \cdot M_{TK}$$

- 5.) Absenkung infolge Querkraft und der Momente:

$$f_k = K_{BQk} \cdot Q_{\eta k} + K_{BMk} \cdot M_{\eta k} + \Delta \varphi_k (R - l_k) \sin \Delta \gamma_k$$

- 6.) Drehung infolge Querkraft und der Momente:

$$\alpha_k = K'_{BQk} \cdot Q_{\eta k} + K'_{BMk} \cdot M_{\eta k}$$

- 7.) Gesamte Drehung in zwei Richtungen:

$$w'_{xk} = w'_{xi} + \alpha_k \sin \beta_k \quad w'_{\xi k} = w'_{xk} \cos \beta_k + w'_{yk} \sin \beta_k$$

$$w'_{yk} = w'_{yi} - \alpha_k \cos \beta_k \quad w'_{\eta k} = -w'_{xk} \sin \beta_k + w'_{yk} \cos \beta_k$$

- 8.) Gesamte Verdrillung:

$$\varphi_k = \varphi_i + \Delta \varphi_k$$

- 9.) Gesamte Absenkung in zwei Richtungen:

$$w_{xk} = w_{xi} + f_k \sin \beta_k - h_k w'_{xk} - \varphi_i (R - l_k) \Delta \gamma_k \sin \beta_k \quad w_{\xi k} = w_{xk} \cos \beta_k + w_{yk} \sin \beta_k$$

$$w_{yk} = w_{yi} - f_k \cos \beta_k - h_k w'_{yk} - \varphi_i (R - l_k) \Delta \gamma_k \cos \beta_k \quad w_{\eta k} = -w_{xk} \sin \beta_k + w_{yk} \cos \beta_k$$

- 10.) Querkraft aus Querbeschleunigung:

$$\Delta Q_{\xi k} = \omega^2 m_{\xi k} w_{\xi k} \quad \Delta Q_{xk} = \Delta Q_{\xi k} \cos \beta_k - \Delta Q_{\eta k} \sin \beta_k$$

$$\Delta Q_{\eta k} = \omega^2 m_{\eta k} w_{\eta k} \quad \Delta Q_{yk} = \Delta Q_{\xi k} \sin \beta_k + \Delta Q_{\eta k} \cos \beta_k$$

- 11.) Moment aus Drehbeschleunigung und Richtungs-

änderung des Torsionsmomentes:

$$\Delta M_{\xi k} = \omega^2 J_{\xi k} w'_{\xi k} \quad \Delta M_{xk} = \Delta M_{\xi k} \cos \beta_k - \Delta M_{\eta k} \sin \beta_k$$

$$\Delta M_{\eta k} = \omega^2 J_{\eta k} w'_{\eta k} + M_{TK} \sin \Delta \gamma_k \quad \Delta M_{yk} = \Delta M_{\xi k} \sin \beta_k + \Delta M_{\eta k} \cos \beta_k$$

12.) Torsionsmoment aus Verdrillbeschleunigung:

$$\Delta M_{TK} = \omega^2 J_{TK} \varphi_K$$

Im Laufe der Rechnung wird $\cos \Delta \gamma = 1$ und $\sin \Delta \gamma = \Delta \gamma$ gesetzt, weil die Winkel klein sind, die Drehträgheiten I_ξ und I_η werden vernachlässigt.

3.3. Berechnung der Eigenschwingungszahlen und Eigenformen

Die Berechnung erfolgt analog dem in [1] aufgezeigten Weg. Es werden Werte für ω vorgegeben. Nurdann, wenn die dazugehörigen Eigenformen die Randbedingungen am freien und eingespannten Ende erfüllen, ist $\omega = \omega_0$.

Randbedingungen am freien Ende und bei $l = L$:

$$\begin{pmatrix} M_x(0) \\ M_y(0) \\ Q_x(0) \\ Q_y(0) \\ M_T(0) \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} w_x(L) \\ w_y(L) \\ w'_x(L) \\ w'_y(L) \\ \varphi(L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(L) \\ z_2(L) \\ z_3(L) \\ z_4(L) \\ z_5(L) \end{pmatrix} = z(L) = 0$$

$z(0)$ muß so beschaffen sein, daß die Bedingungen am eingespannten Ende $l = L$ erfüllt sind.

Die Deformationen an beliebiger Stelle l lassen sich nun durch Linearkombination mit Hilfe des sogenannten normierten Fundamentalsystems darstellen, wobei der konstante Vektor v den Anfangszustand beschreibt.

$$\begin{aligned} z_1(l) &= \bar{z}_{11}(l) v_1 + \bar{z}_{12}(l) v_2 + \bar{z}_{13}(l) v_3 + \bar{z}_{14}(l) v_4 + \bar{z}_{15}(l) v_5 \\ z_2(l) &= \bar{z}_{21}(l) v_1 + \bar{z}_{22}(l) v_2 + \bar{z}_{23}(l) v_3 + \bar{z}_{24}(l) v_4 + \bar{z}_{25}(l) v_5 \\ z_3(l) &= \bar{z}_{31}(l) v_1 + \bar{z}_{32}(l) v_2 + \bar{z}_{33}(l) v_3 + \bar{z}_{34}(l) v_4 + \bar{z}_{35}(l) v_5 \\ z_4(l) &= \bar{z}_{41}(l) v_1 + \bar{z}_{42}(l) v_2 + \bar{z}_{43}(l) v_3 + \bar{z}_{44}(l) v_4 + \bar{z}_{45}(l) v_5 \\ z_5(l) &= \bar{z}_{51}(l) v_1 + \bar{z}_{52}(l) v_2 + \bar{z}_{53}(l) v_3 + \bar{z}_{54}(l) v_4 + \bar{z}_{55}(l) v_5 \end{aligned}$$

Das normierte Fundamentalsystem erhält man, indem man die Integration über die Stablänge fünfmal durchführt mit den Spalten der Einheitsmatrix E als Anfangsbedingungen. Die Lösungen ergeben, zu einer Matrix zusammengestellt, das normierte Fundamentalsystem.

Die Einheitsmatrix als Anfangsbedingungen:

$$\begin{array}{c}
 \begin{pmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \\ z_3(0) \\ z_4(0) \\ z_5(0) \end{pmatrix} \\
 = \\
 \begin{array}{ccccc}
 \text{I.} & \text{II.} & \text{III.} & \text{IV.} & \text{V. Rechnung} \\
 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \end{array}$$

Für die Stelle $l = L$ wird das Fundamentalsystem zur Übertragungsmatrix U :

$$U = \bar{Z}(L)$$

Mit U läßt sich die Übertragung einer beliebigen Deformation am freien Ende auf das eingespannte Ende angeben. Eine Eigenform kann aber nur vorliegen, wenn $z(L) = 0$ ist.

$$z(L) = Uv = 0$$

d.h. $\det U = 0$

Für schrittweise vorgegebene ω -Werte wird jeweils $\det U$ berechnet. Wechselt $\det U$ das Vorzeichen, so muß mit einem ω -Wert dazwischen, der durch lineare Interpolation gefunden werden kann, eine Näherungslösung für die Eigenfrequenzen existieren.

Die Eigenformen ergeben sich aus U , berechnet für die Eigenfrequenzen ω_0 . Dann muß gelten

$$U z_0 = 0$$

Die Anfangsbedingungen sind zunächst unbekannt, lassen sich aber aus obiger Gleichung berechnen, wenn man sich eine der Komponenten beliebig vorgibt, z.B:

$$z_1(0) = z_{01} = 1$$

Dann hat man ein lineares Gleichungssystem für die übrigen Komponenten. Die Linearkombination von z_0 mit dem normierten Fundamentalsystem ergibt schließlich die Eigenform:

$$z(l) = \bar{Z}(l) z_0$$

3.4. Berechnung der erzwungenen Schwingungen

3.4.1. Erregerlasten

Hier sollen nur die infolge ungleichmäßigen Nachstroms entstehenden Kraftschwankungen am Propellerblatt als schwingungserregende Kräfte betrachtet werden. Diese Kräfte werden näherungsweise als Einzelkräfte im $\frac{1}{4}$ -Punkt der Profile angreifend gedacht.

$$\rho_x(l,t) = \sum_{\nu=1}^N [\rho_{x\nu}^c(l) \cos(\nu \omega_e t) + \rho_{x\nu}^s(l) \sin(\nu \omega_e t)]$$

$$\rho_y(l,t) = \sum_{\nu=1}^N [\rho_{y\nu}^c(l) \cos(\nu \omega_e t) + \rho_{y\nu}^s(l) \sin(\nu \omega_e t)]$$

Die einzelnen Ordnungen $\nu = 1, 2, 3, \dots$ können nacheinander durchgerechnet werden, weil Linearität des Systems vorausgesetzt wird. Die Lösungen werden später wieder überlagert. Weiter wird die hydrodynamische Dämpfung vernachlässigt, weil Resonanz erst für höhere Ordnungen erwartet wird und dort die erregenden Kräfte sehr klein sind. Es interessieren hier vielmehr die niedrigen Ordnungen.

Ohne Dämpfung liegen die jeweiligen zeitlichen Komponenten ρ_{ν}^c und ρ_{ν}^s mit den entsprechenden Deformationskomponenten w_{ν}^c und w_{ν}^s in Phase, somit können auch die zeitlichen Komponenten nacheinander durchgerechnet werden.

3.4.2. Rechenverfahren

Die Lösung für eine erzwungene Schwingungsform besteht aus der Lösung des homogenen und des inhomogenen Gleichungssystems:

$$z_e(l) = z_{hom}(l) + z^*(l)$$

Die Lösung des homogenen Systems erfolgt in der schon beschriebenen Weise mit der Frequenz der jeweiligen Ordnung $\nu \omega_e$, sie kann als normiertes Fundamentalsystem dargestellt werden:

$$z_{hom}(l) = \bar{z}(l) \nu$$

Hierbei sind zunächst noch die Anfangsbedingungen ν unbekannt.

Bei der Lösung des inhomogenen Systems $z^*(l)$ müssen bei der Integration über die Balkenlänge die äußeren Kräfte und Momente berücksichtigt werden. Als Anfangsbedingung kann ein beliebiger Wert, z.B. $z^*(0) = 0$, eingesetzt werden. Die in obiger Form vorliegenden Erregerlasten werden in Einzelkräfte und -momente aufgeteilt, die auf jedes Massenelement des Balkens wirken. Sie müssen zum jeweiligen

Querkraft- bzw. Momentenzuwachs hinzugefügt werden:

$$\begin{aligned} P_{xk} &= p_x(l_k) \Delta l_k \\ P_{yk} &= p_y(l_k) \Delta l_k \\ M_{TK\alpha} &= (P_{xk} \sin \beta_k - P_{yk} \cos \beta_k) \left(\xi_{0k} - \frac{t_k}{4} \right) \end{aligned}$$

Die Integration liefert $z^*(l)$, die zusammengesetzte Lösung enthält nur noch den Vektor v als Unbekannte.

$$z_e(l) = \bar{Z}(l)v + z^*(l)$$

v muß so gewählt werden, daß die Randbedingungen am eingespannten Ende, also für $l = L$, erfüllt sind.

$$\begin{aligned} z_e(L) &= 0 \\ \bar{Z}(L)v + z^*(L) &= 0 \\ Uv + z^*(L) &= 0 \end{aligned}$$

d.h. $v = -Z^*(L)U^{-1}$

Dabei ist die Bedingung $\det U \neq 0$ immer erfüllt, wenn keiner Eigenfrequenz entspricht. Damit kann die Lösung für die erzwungenen Schwingungen angegeben werden:

$$\begin{aligned} z_{e1}(l) &= \bar{z}_{11}(l)v_1 + \bar{z}_{12}(l)v_2 + \bar{z}_{13}(l)v_3 + \bar{z}_{14}(l)v_4 + \bar{z}_{15}(l)v_5 + z_1^*(l) \\ z_{e2}(l) &= \bar{z}_{21}(l)v_1 + \bar{z}_{22}(l)v_2 + \bar{z}_{23}(l)v_3 + \bar{z}_{24}(l)v_4 + \bar{z}_{25}(l)v_5 + z_2^*(l) \\ z_{e3}(l) &= \bar{z}_{31}(l)v_1 + \bar{z}_{32}(l)v_2 + \bar{z}_{33}(l)v_3 + \bar{z}_{34}(l)v_4 + \bar{z}_{35}(l)v_5 + z_3^*(l) \\ z_{e4}(l) &= \bar{z}_{41}(l)v_1 + \bar{z}_{42}(l)v_2 + \bar{z}_{43}(l)v_3 + \bar{z}_{44}(l)v_4 + \bar{z}_{45}(l)v_5 + z_4^*(l) \\ z_{e5}(l) &= \bar{z}_{51}(l)v_1 + \bar{z}_{52}(l)v_2 + \bar{z}_{53}(l)v_3 + \bar{z}_{54}(l)v_4 + \bar{z}_{55}(l)v_5 + z_5^*(l) \end{aligned}$$

Vollkommen analog wird auch die Lösung für die Schnittkräfte aus der homogenen und der inhomogenen Lösung zusammengesetzt:

$$\begin{aligned} M_{xe}(l) &= \bar{M}_{x1}(l)v_1 + \bar{M}_{x2}(l)v_2 + \bar{M}_{x3}(l)v_3 + \bar{M}_{x4}(l)v_4 + \bar{M}_{x5}(l)v_5 + M_x^*(l) \\ M_{ye}(l) &= \bar{M}_{y1}(l)v_1 + \bar{M}_{y2}(l)v_2 + \bar{M}_{y3}(l)v_3 + \bar{M}_{y4}(l)v_4 + \bar{M}_{y5}(l)v_5 + M_y^*(l) \\ Q_{xe}(l) &= \bar{Q}_{x1}(l)v_1 + \bar{Q}_{x2}(l)v_2 + \bar{Q}_{x3}(l)v_3 + \bar{Q}_{x4}(l)v_4 + \bar{Q}_{x5}(l)v_5 + Q_x^*(l) \\ Q_{ye}(l) &= \bar{Q}_{y1}(l)v_1 + \bar{Q}_{y2}(l)v_2 + \bar{Q}_{y3}(l)v_3 + \bar{Q}_{y4}(l)v_4 + \bar{Q}_{y5}(l)v_5 + Q_y^*(l) \\ M_{Te}(l) &= \bar{M}_{T1}(l)v_1 + \bar{M}_{T2}(l)v_2 + \bar{M}_{T3}(l)v_3 + \bar{M}_{T4}(l)v_4 + \bar{M}_{T5}(l)v_5 + M_T^*(l) \end{aligned}$$

Die Werte $\bar{M}(l)$ und $\bar{Q}(l)$ sind bekannt aus der Integration mit den Spalten der Einheitsmatrix E als Anfangsbedingung, die Werte M^* und Q^* aus der Integration mit den Erregerlasten.

Spannungsberechnung

Für die Biegespannung wird das Moment in η -Richtung benötigt:

$$M_{\eta e}(l) = -M_{xe}(l) \sin \beta(l) + M_{ye}(l) \cos \beta(l)$$

Dann ist an der Saugseite

$$\sigma_B(l) = M_{\eta e}(l) / W_0(l)$$

Sind auf diese Weise alle wichtigen Ordnungen mit ihren beiden zeitlichen Komponenten durchgerechnet, so kann der zeitliche Spannungsverlauf für einen Umlauf für jeden Profilschnitt zusammengesetzt werden:

$$\sigma_B(l,t) = \sum_{v=1}^N \left[\sigma_{Bv}^c(l) \cos(v\omega_e t) + \sigma_{Bv}^s(l) \sin(v\omega_e t) \right]$$

Der zeitliche Verlauf der aus dem Torsionsmoment resultierenden Schubspannungen am Ende der kleinen Hauptachse, also an der gleichen Stelle wie $\sigma_{B \max}$, läßt sich genauso angeben:

$$\tau_T(l) = M_{Te}(l) / W_T(l)$$

$$\tau_T(l,t) = \sum_{v=1}^N \left[\tau_{Tv}^c(l) \cos(v\omega_e t) + \tau_{Tv}^s(l) \sin(v\omega_e t) \right]$$

Die Vergleichsspannung wird dann nach der Gestaltänderungshypothese:

$$\sigma_V(l) = \sqrt{\sigma_B^2(l) + 3 \tau_T^2(l)}$$

Die graphische Auftragung des zeitlichen Verlaufes der Vergleichsspannung liefert dann den Maximalwert.

4. Ergebnisse

Für das beschriebene Verfahren wurde ein Programm erstellt. Als Eingabedaten werden neben Frequenz- und Materialangaben benötigt:

1. Die Propellergeometrie wird eingegeben durch die Aufmaßpunkte mehrerer Profilschnitte, z.B. 8 - 10.
2. Die erregenden Kräfte in kp/cm an den gleichen Stützstellen müssen bekannt sein.

Alle benötigten Zwischenwerte werden interpoliert, indem durch jeweils drei Stützstellen eine quadratische

Parabel gelegt wird.

Mit diesem Programm und dem am Institut gleichfalls vorhandenen für reine Biegeschwingungen nach [1] wurde derselbe Propeller durchgerechnet. Die erregenden Kräfte wurden in der HSVA berechnet.

Propellerdaten:

Radius	R	=	2,350 m
Nabenradius	r_N	=	0,440 m
Flächenverhältnis	Fa/F	=	0,61
Flügelzahl	Z	=	5
mittlere Steigung	Hm	=	4,080 m
Betriebsdrehzahl	n	=	135 1/min

In Diagr.1 sind Steigungsverlauf, Rücklage, Trägheitsmomente, Massen und die Drehträgheit aufgetragen.

4.1 Eigenschwingungszahlen und Eigenformen

In der folgenden Tabelle sind die Eigenschwingungszahlen der ersten drei Schwingungsgrade für Rechnung mit und ohne Torsion zusammengestellt:

Schwingungsform	Eigenschwingungszahlen in Hz	
	mit	ohne Torsion
I Grad	18,68	18,56
II Grad	66,66	65,90
III Grad	148,72	147,76

Durch Berücksichtigung der Torsion werden die Eigenschwingungszahlen etwas größer.

Diagr.2 und 3 zeigen die entsprechenden Eigenformen. Aufgetragen sind die Komponenten w_x und w_y sowie der Betrag der Resultierenden $W_R = \sqrt{W_x^2 + W_y^2}$, bei dem 1. Grad auch für Rechnung ohne Torsion, sowie noch der Torsionswinkel φ .

4.2 Erzwungene Schwingungen

Diagr.4 und 5 zeigen den Verlauf der hydrodynamischen Erregerlasten für die ersten drei Ordnungen, gerechnet wurde bis zur fünften. Doch die Größe der Kräfte klingt mit zunehmender Ordnungszahl rasch ab.

Diagr.6 und 7 zeigen als Beispiel die Ergebnisse für die 1.Ordnung: In Diagr.6 ist die Biegelinie mit cos- und sin-Komponente sowie der Torsionswinkel aufgetragen.Daneben wird für zwei Querschnitte die Schwingungs- und Kraftrichtung der cos-Komponente gezeigt.Diagr.7 enthält das resultierende Biege- und Torsionsmoment und zugehörige Spannungen.Bei Berücksichtigung der Torsion werden die Deformationen vor allem für die äußeren Blatteile größer,ebenso wachsen auch dort die Spannungen an.Das Maximum der entscheidenden Biegespannung liegt nicht an der Nabe,wie man eigentlich vermutet. In Diagr.8 schließlich sind die resultierenden Durchbiegungen am freien Ende und die Biegespannungen am eingespannten Ende bis zur 5.Ordnung über der Erregerfrequenz aufgetragen.Man erkennt den Abfall zu höheren Ordnungen hin. Darunter wird der Spannungsverlauf für einen Umlauf an der Einspannstelle gezeigt,der sich bei phasenrichtiger Überlagerung der ersten fünf Ordnungen ergibt.

5. Zusammenfassung

Ausgehend von dem bestehenden Programm von Boese wurde ein Rechenprogramm unter Einbeziehung der Torsion geschaffen,das Eigenschwingungen wie auch erzwungene Schwingungen des verwundenen Propellerblattes mit Rücklage errechnet.Die sich ergebenden Abweichungen gegenüber der Rechnung ohne Torsion sind für den Beispiel-Propeller,dessen Rücklage allerdings nicht groß ist, nicht erheblich: die Eigenschwingungszahlen erhöhen sich leicht,die Verformungen und Spannungen zeigen nur für die größeren Radien wesentliche Abweichungen.

Literatur

- [1] Boese, P.: Berechnung der Biegeschwingungen des Propellerblattes unter Berücksichtigung des Steigungsverlaufes über dem Radius. Institut für Schiffbau der Universität Hamburg, Bericht Nr.256

- [2] Csupor, D.: Methoden zur Berechnung der freien Schwingungen des Schiffskörpers. STG Bd.50, 1956

- [3] Keil, H. und Weitendorf, E.A.: Flügelschwingungsmessungen mit Hilfe von Dehnungsmeßstreifen am Propeller des M.S. 'Neuenfels'. Diskussionsbeitrag Meyne, Schiff und Hafen, April 1970

- [4] Vlasov, V.Z.: Thin Walled Elastic Beams. Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem 1961

- [5] Wendel, K.: Hydrodynamische Massen und Massenträgheitsmomente. STG Bd.44, 1950

Anhang

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
x/c	y_0/c	y_u/c	$(②-③) \cdot \frac{\Delta x}{c}$	$④ \cdot \frac{y_{sn}}{c}$	$④ \cdot \frac{x_{sn}}{c}$	$(④)^3 \cdot 10^6 \left(\frac{\Delta x}{c}\right)^{-2}$
0	0	0	0	0	0	0
0.05	0.0498	-0.0130	0.00314	0.000058	-0.001413	12.4
0.1	0.0742	-0.0134	0.00658	0.000199	-0.002625	50.4
0.2	0.1075	-0.0125	0.01200	0.000570	-0.003600	172.5
0.3	0.1282	-0.0110	0.01392	0.000816	-0.0062784	270.0
0.4	0.1397	-0.0091	0.01488	0.000972	-0.009488	329.0
0.5	0.1425	-0.0067	0.01492	0.001010	-0.011910	332.0
0.6	0.1363	-0.0033	0.01396	0.000928	0.001396	272.0
0.7	0.1210	-0.0002	0.01212	0.000732	0.002424	178.0
0.8	0.0945	+0.0011	0.00934	0.000456	0.002802	81.4
0.9	0.0526	-0.0038	0.00567	0.000138	0.002104	17.8
1.0	0	0	0	0	0.008726	0
			<u>0.10650</u>	<u>0.005829</u>	<u>-0.003184</u>	<u>1714.5</u>

⑧	⑨	⑩	⑪	⑫	⑬
$④ \left(\frac{y_{sn}-y_{so}}{c}\right)^2 \cdot 10^6$	$④ \left(\frac{\Delta x}{c}\right)^2 \cdot 10^6$	$④ \left(\frac{x_{sn}-x_{so}}{c}\right) \cdot 10^6$	$④ \left(\frac{x_{sn}-x_{so}}{c}\right) \left(\frac{y_{sn}-y_{so}}{c}\right) \cdot 10^6$	$\frac{1}{12} \cdot ③ + ⑩ \cdot x_{sn}$	$\frac{1}{12} \cdot ③ + ⑧ \cdot x_{sn}$
0	0	0	0	0	0
2.41	7.9	566	+55.0	-15.68	-1.46
1.62	37.1	862	+38.8	-13.58	-2.11
0.02	120.0	908	-4.6	+1.29	-3.96
2.17	139.2	425	-30.4	+5.46	-4.31
5.48	148.8	73	-21.4	+1.64	-2.62
7.10	149.2	9	+8.1	+0.47	+0.83
5.80	139.6	219	+35.7	+4.70	+3.56
2.47	121.2	615	+39.0	+8.94	+3.90
0.03	93.4	989	+5.1	+1.63	+2.22
2.66	56.4	1020	-43.0	-22.25	+1.76
<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>
27.76	1002.8	5686	+72.3	-27.32	-2.19

Fläche: $F = 0.1065 \text{ c}^2$

Schwerpunkt (bez. auf Sehne u. $x=0,5c$):

$$y_{so} = 0.00547 \text{ c} \quad x_{so} = -0.0298 \text{ c}$$

Trägheitsmomente:

$$J_x = 0.0001706 \text{ c}^4$$

$$J_y = 0.005770 \text{ c}^4$$

$$J_{xy} = 0.0000723 \text{ c}^4$$

$$J(x^2y) = -0.00002732 \text{ c}^5$$

$$J(xy^2) = -0.00000219 \text{ c}^5$$

Schubmittelpunkt (bez. auf Schwerpunktsachsen)

$$a_x = -\frac{2.19}{1706} \cdot c \cdot \frac{5940.6}{5599.4} = -0.0136 \text{ c}$$

$$a_y = \frac{27.76}{5770} \cdot c \cdot \frac{5940.6}{5599.4} = 0.0051 \text{ c}$$

Winkel zw. Hauptträgheitsachse u. Sehne:

$$\tan 2\alpha_0 = 2 J_{xy} / (J_y - J_x) = 0.0258$$

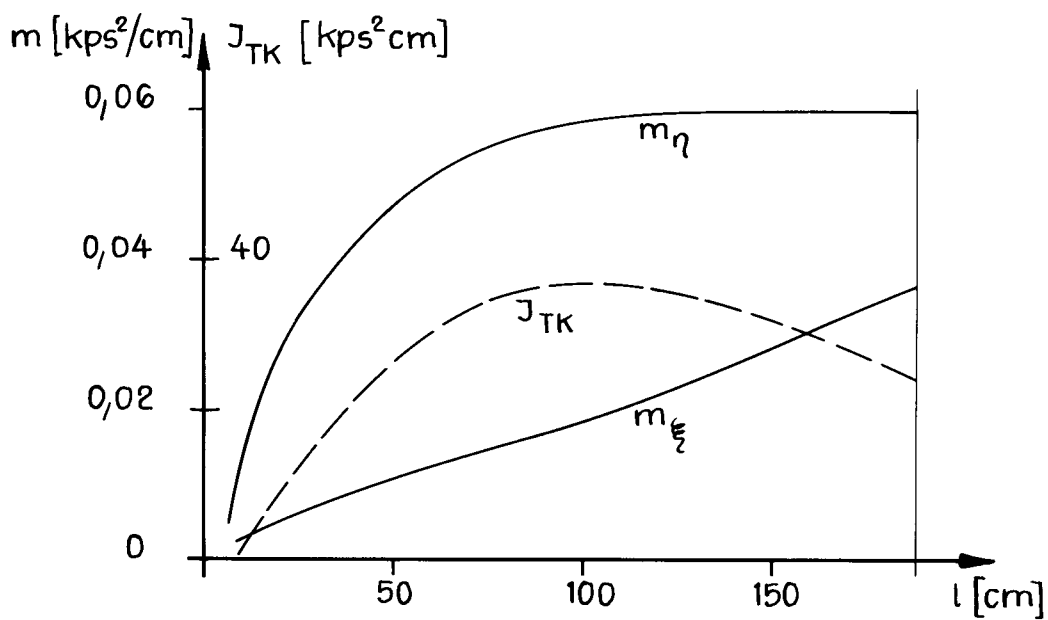
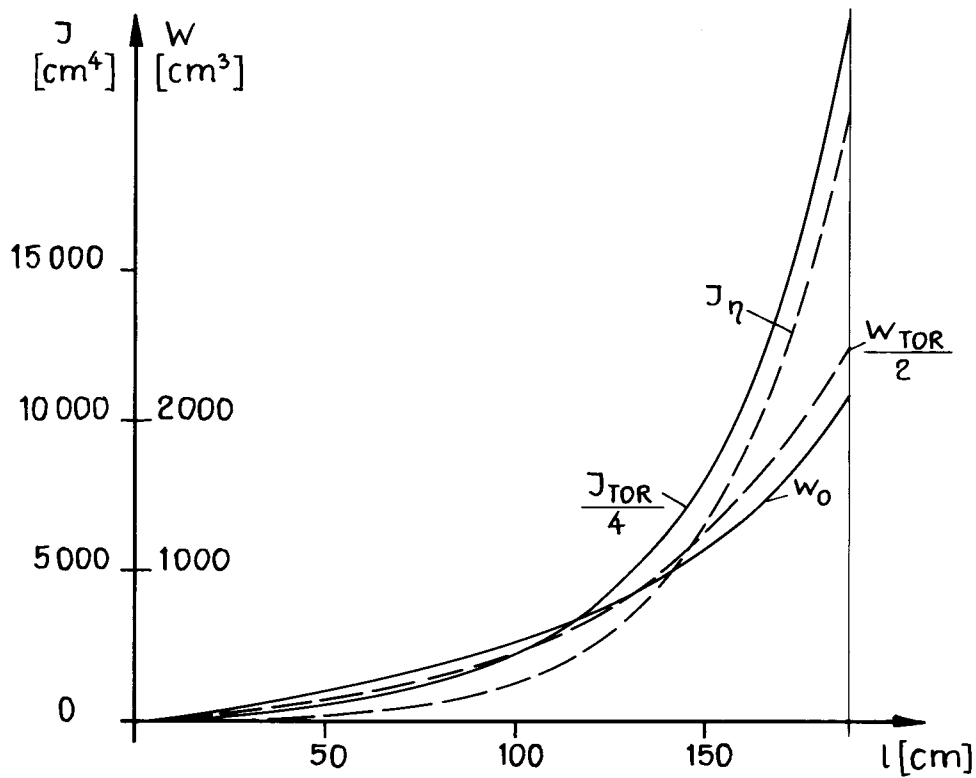
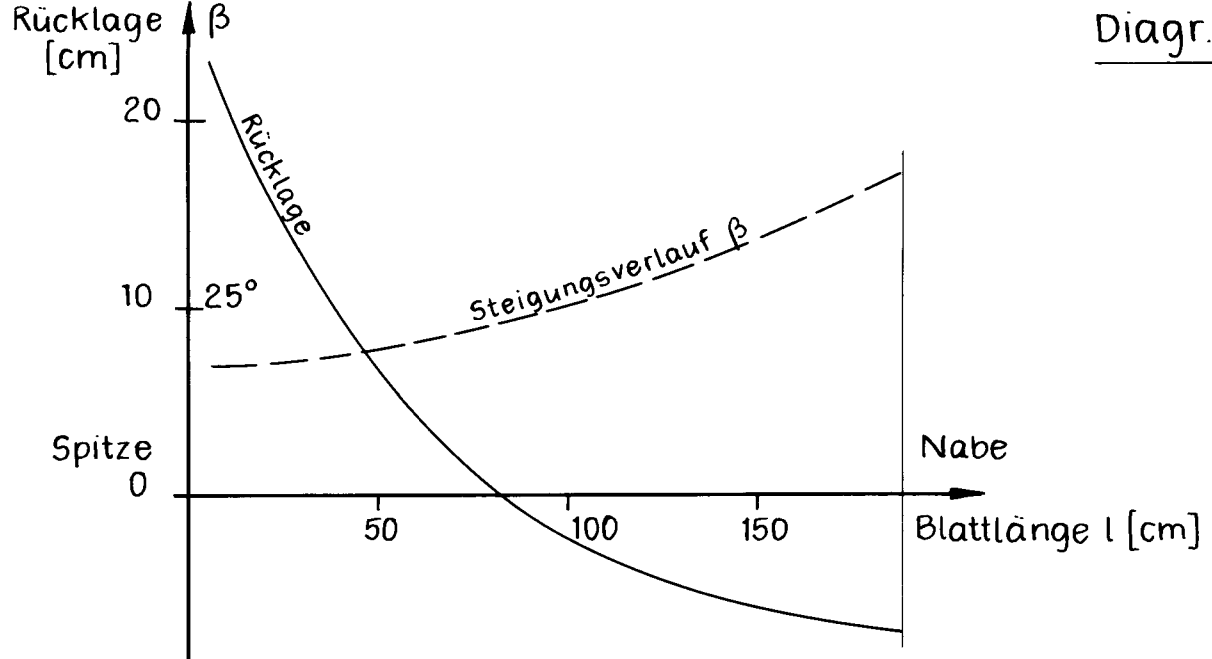
$$\alpha_0 \approx 1.48^\circ$$

Hauptträgheitsmoment um die gedrehte Achse

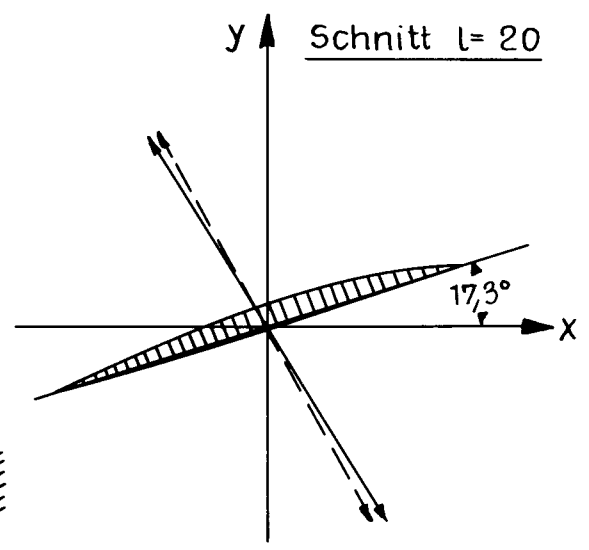
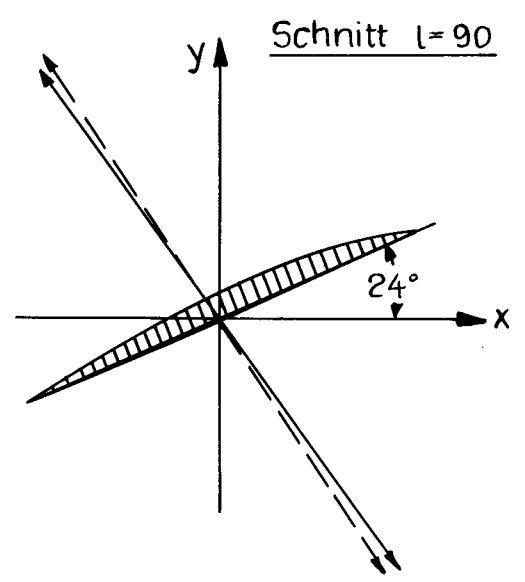
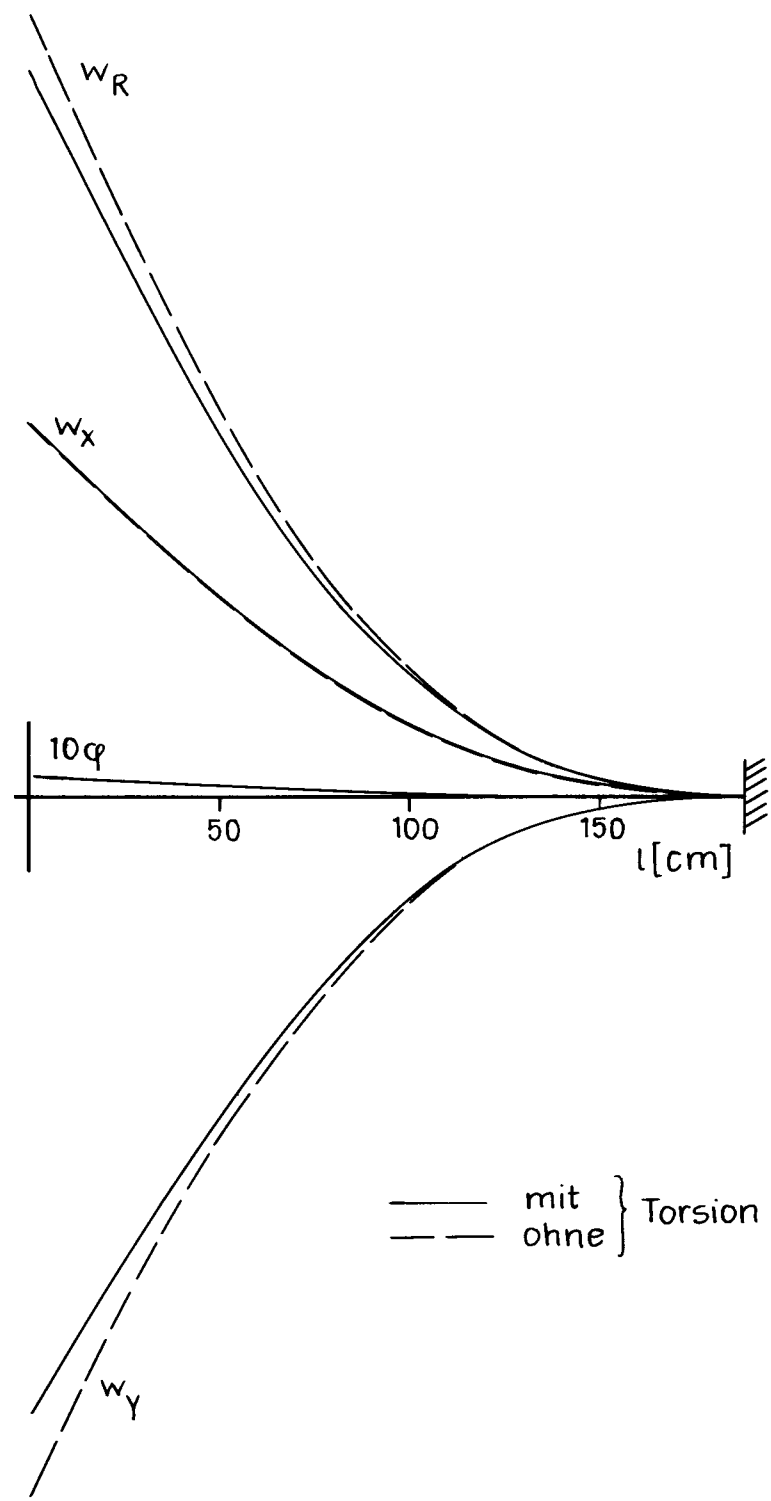
$$J_{x\alpha} = \left(\frac{5940}{2} - \sqrt{\left(\frac{5600}{2}\right)^2 + 72.3^2}\right) \cdot c^4 \cdot 10^{-6}$$

$$J_{x\alpha} = (2970 - \sqrt{(784 + 0.52 \cdot 10^4)}) \cdot c^4 \cdot 10^{-6}$$

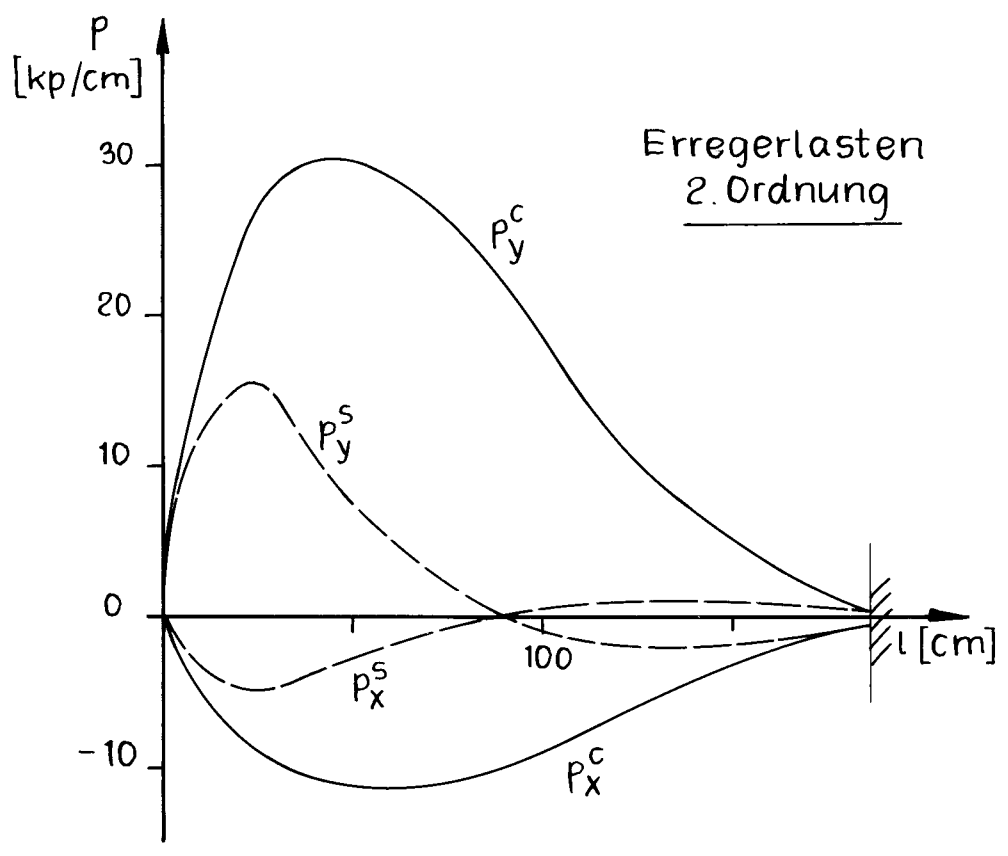
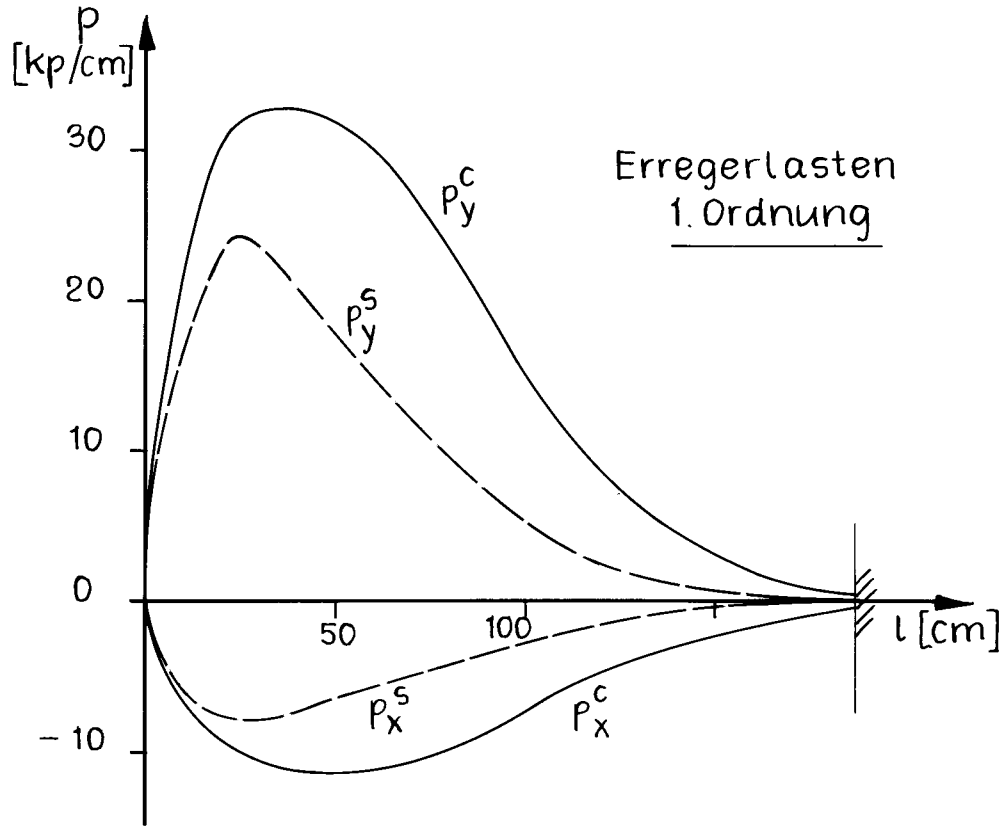
$$J_{x\alpha} \approx J_x$$

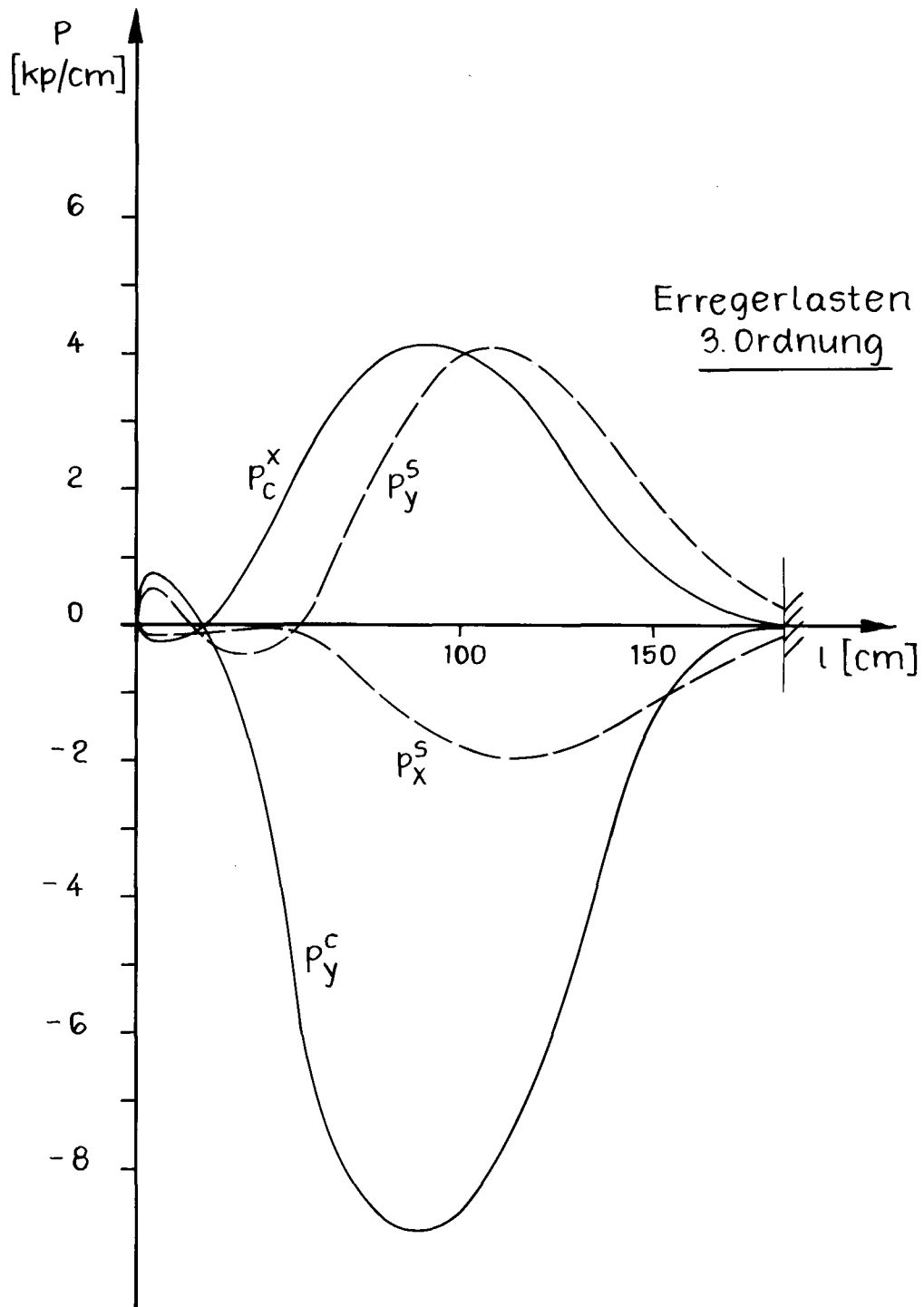


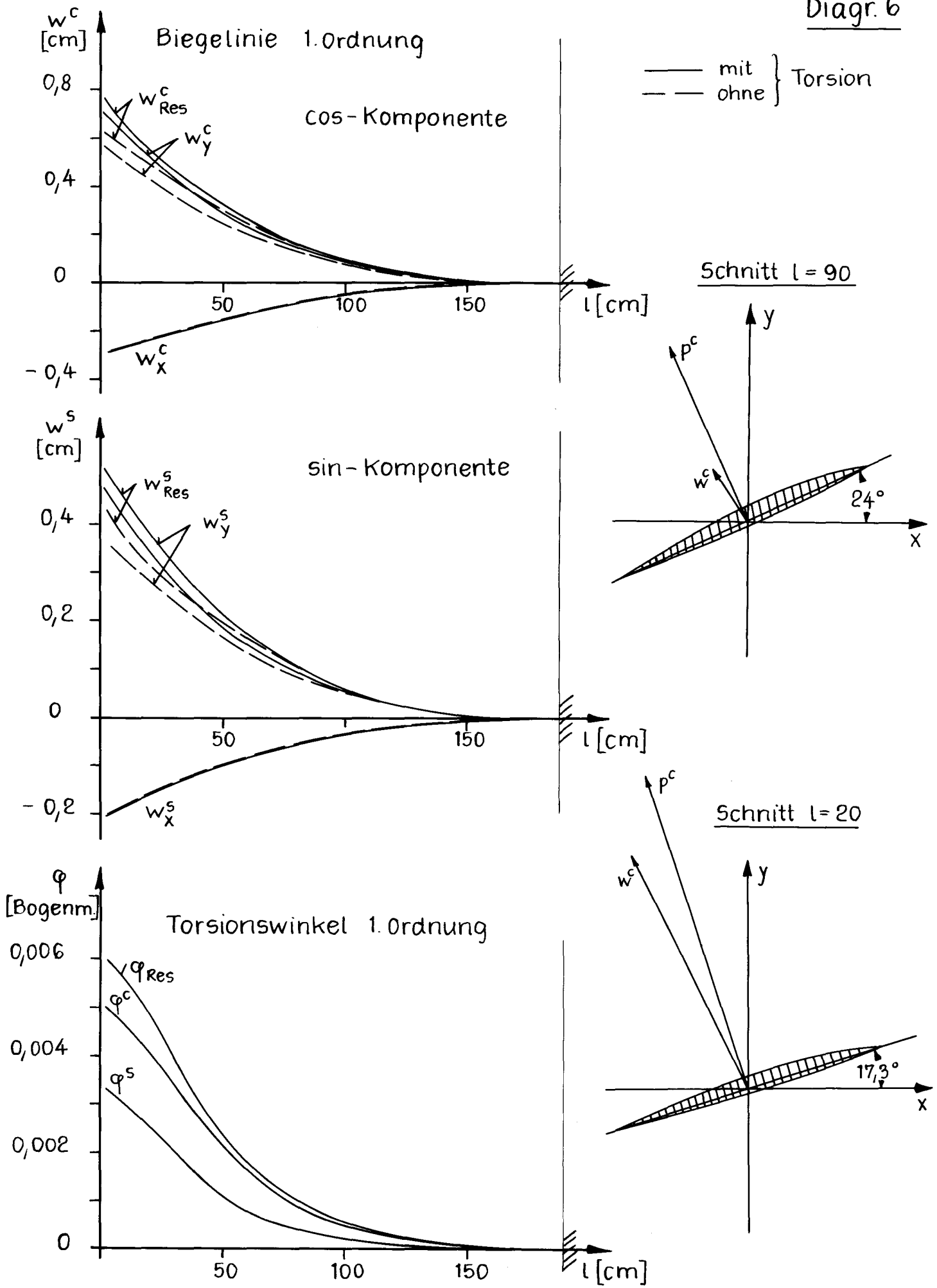
Schwingungsform I. Grades



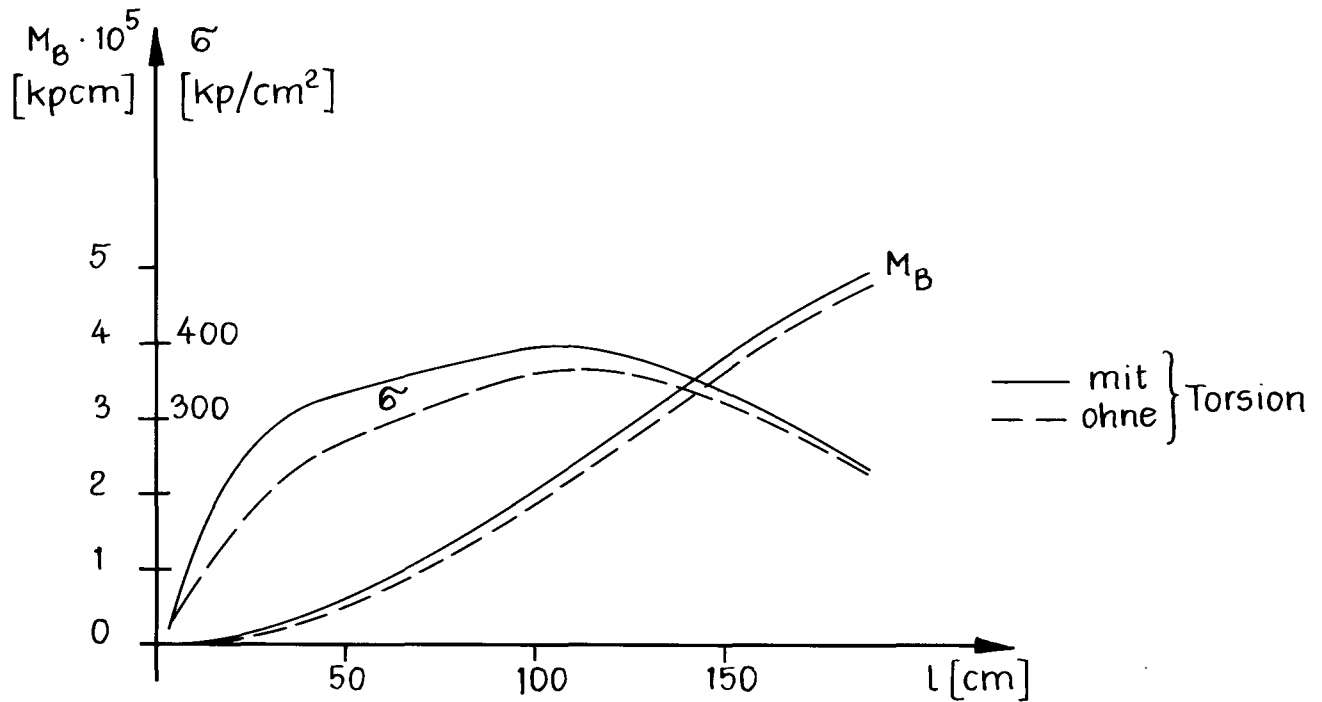
Schwingungsrichtung







Res. Biegemoment und Spannung 1. Ordnung



Res. Torsionsmoment und Spannung 1. Ordnung

