

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr. 210

Wechselwirkung zwischen Schiffsnachstrom,
Schraubenpropeller und Schiffsruder

von

Klaus Brunnstein

Hamburg 1968

Inhalts-Übersicht

Für den Schraubenpropeller mit dünnen Flügeln beliebig-vorgegebener Form wird eine instationäre Tragflächen-theorie entwickelt. In einem von Lerbs angegebenen Nach-stromfeld werden für einen einfachen Propeller Dichtever-teilung und Zirkulation, Kräfte, Schub und induzierter Wirkungsgrad berechnet. Die hydrodynamische Steigung k_0 hängt vom Schubbelastungsgrad ab und ist kleiner als vor-ausgeschätzt; ein Iterationsverfahren erfordert viel Rechenzeit.

Im Geschwindigkeitsfeld dieses Propellers wird ein Schiffs-ruder untersucht. Je nach Propellerbelastung ergibt sich mit der vorausgeschätzten hydrodynamischen Steigung bei Geradeausfahrt ein zusätzlicher Vortrieb, der bei den be-handelten Beispielen 4 - 6% des Schubes beträgt; die erhal-tenen Werte werden bei Iteration nach k_0 verkleinert. Bei ausgeschlagenem Ruder tritt ein kleiner Vortrieb bzw. ein Widerstand auf.

Das dünne Ruder vermindert den Propellerschub bei Geradeausfahrt nur um 0.5 - 1%, während es diesen bei größeren Anstellwinkeln erheblich verkleinert. Eine 25%-ige Dicke-Belegung des Ruders wirkt wie der Schiffsnachstrom und vergrößert den Propellerschub um 1 - 2%.

Insgesamt ergibt die Anwesenheit eines mäßig-dicken Ruders bei Geradeausfahrt (ohne k_0 -Iteration) eine Schubverbesserung von 5 - 7% gegenüber dem Propeller im Schiffsnachstrom ohne Ruder.

Wenn am Ruder in der Schräganströmung von Propeller und Schiff her ein Totwasser auftritt, kann unter speziellen Voraussetzungen der am Ruder erzielte Vortriebsgewinn um ca. 25% gemindert werden; der auftretende Verlust beträgt etwa 1 - 1.5% des Propellerschubes.

<u>Inhaltsverzeichnis</u>	Seite
I. Einleitung.....	1
II. Instationäre Tragflächentheorie für einen Schraubenpropeller mit dünnen Flügeln beliebig- vorgegebener Form.....	3
III. Tragflächentheorie für ein dünnes Ruder beliebig-vorgegebener Form.....	25
IV. Induktionsbeiträge eines mäßig-dicken Ruders....	33
V. Einfluß eines Totwassers auf das dünne Ruder....	36
VI. Einzelheiten der numerischen Rechnungen.....	42
VII. Der Propeller im Lerbs-Nachstrom.....	47
VIII. Das Ruder im Geschwindigkeitsfeld von Schiff und Propeller.....	49
IX. Rückinduktion des Ruders am Propeller.....	54
X. Wirkung eines Totwassers am Ruder.....	59
XI. Zusammenfassung der Ergebnisse.....	66
Anhang 1.A - 1.J: Auswertung von Integralen.....	68
Anhang 2: Liste der benutzten Literatur.....	81

I. Einleitung

Die Strömung, wie sie hinter einem beliebig-vorgegebenen Schiff durch den dort arbeitenden Propeller und das Ruder erzeugt wird, ist auch dann noch sehr kompliziert, wenn man - wie in der vorliegenden Arbeit - Zähigkeitseffekte vernachlässigt und sich also auf eine potentialtheoretische Behandlung beschränkt. Als zusätzliche Vereinfachung sollen außer Schiff, Propeller und Ruder keine weiteren freien oder festen Oberflächen vorhanden sein.

Die exakte Durchführung einer solchen Potentialtheorie ist infolge der mathematisch-komplizierten Ränder, insbesondere der Form des Schiffshecks, aussichtslos. Es soll daher ein Iterationsverfahren herangezogen werden, bei dem das Schiff bzw. dessen Nachstromfeld ohne Propeller und Ruder bekannt sei (nomineller Nachstrom).

Durch Schleppversuche ist es möglich, den nominellen Nachstrom zu bestimmen. Obwohl sich dieser von dem Nachstrom bei Anwesenheit eines Propellers (effektiver Nachstrom) unterscheidet, wollen wir den nominellen Nachstrom als an Propeller und Ruder wirksam annehmen.

In erster Näherung wird der Propeller als nur in dem Strömungsfeld des Schiffes arbeitend angenommen. Daraus kann man die vom Propeller induzierten Geschwindigkeiten überall berechnen. Insbesondere kann jetzt die Wirkung von Schiff und Propeller auf das Ruder untersucht werden. Im nächsten Schritt wird dann die Propeller-Zirkulation im Nachstrom unter zusätzlicher Berücksichtigung des vom Ruder induzierten Geschwindigkeitsfeldes erneut berechnet. Dieses Verfahren wird bis zur Konvergenz der wechselseitigen Beiträge von Propeller und Ruder fortgesetzt.

Diese iterative Methode ist in ihren Grundzügen von Isay (2) entwickelt und vereinfacht ohne Berücksichtigung des

Schiffsnachstromes ausgewertet worden. In der vorliegenden Arbeit soll das Verfahren so ausgebaut werden, daß Propeller und Ruder jeweils durch eine Tragflächentheorie beschrieben werden.

In Kapitel II wird zunächst die instationäre, bzgl. Anströmung linearisierte Tragflächentheorie eines dünnen Schraubpropellers beliebig-vorgegebener Flügelform entwickelt. Grundlage dazu ist die instationäre, linearisierte Tragflächentheorie von Zwick [3], der auch numerische Ergebnisse für Propeller-Zirkulation und -Kräfte angegeben hat.

Instationäre Tragflächentheorien haben schon R. Yamazaki [4a] und T. Hanaoka [4b] angegeben; da diese Theorien vergleichsweise kompliziert sind (siehe die Darstellung von Isay, [1, S. 59 ff]), konnten sie bisher nicht numerisch ausgewertet werden. In einer angekündigten Arbeit wollen auch Breslin, Tsakonas [14] eine instationäre Tragflächentheorie mit einer von ihnen entwickelten Integraloperator-Methode behandeln.

Das Kapitel III behandelt die nichtlinearisierte Tragflächentheorie des dünnen, beliebig-geformten Ruders. Diese stationäre Theorie ist ähnlich wie beim Propeller aufgebaut, erweist sich jedoch als erheblich einfacher.

Um auch den Einfluß der Ruderdicke auf die Strömung am Propeller zu untersuchen, wird im Kapitel IV durch Anbringen einer Quell-Senken-Verteilung die zusätzliche Induktion eines mäßig-dicken Ruders behandelt. Schließlich wird im Kapitel V ein Modell angegeben, mit dem die Wirkung eines im Propellerstrahl am Ruder ablösenden Totwassers untersucht werden kann.

Im Kapitel VI wird kurz auf die Programmier- und Rechen-Technik eingegangen. Die numerischen Ergebnisse der beschriebenen Theorie werden dann in den folgenden Kapiteln VII-X erörtert.

II. Instationäre Tragflächentheorie für einen Schraubenpropeller mit dünnen Flügeln beliebig-vorgegebener Form

Wir betrachten einen mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Schraubenpropeller mit N gleichen, beliebig-geformten Flügeln. Zweckmäßig führen wir ein propellerfestes kartesisches (x, y, z) bzw. Zylinder-Koordinatensystem (x, φ, r) ein mit

$$y = r \cdot \cos \varphi \quad z = r \cdot \sin \varphi$$

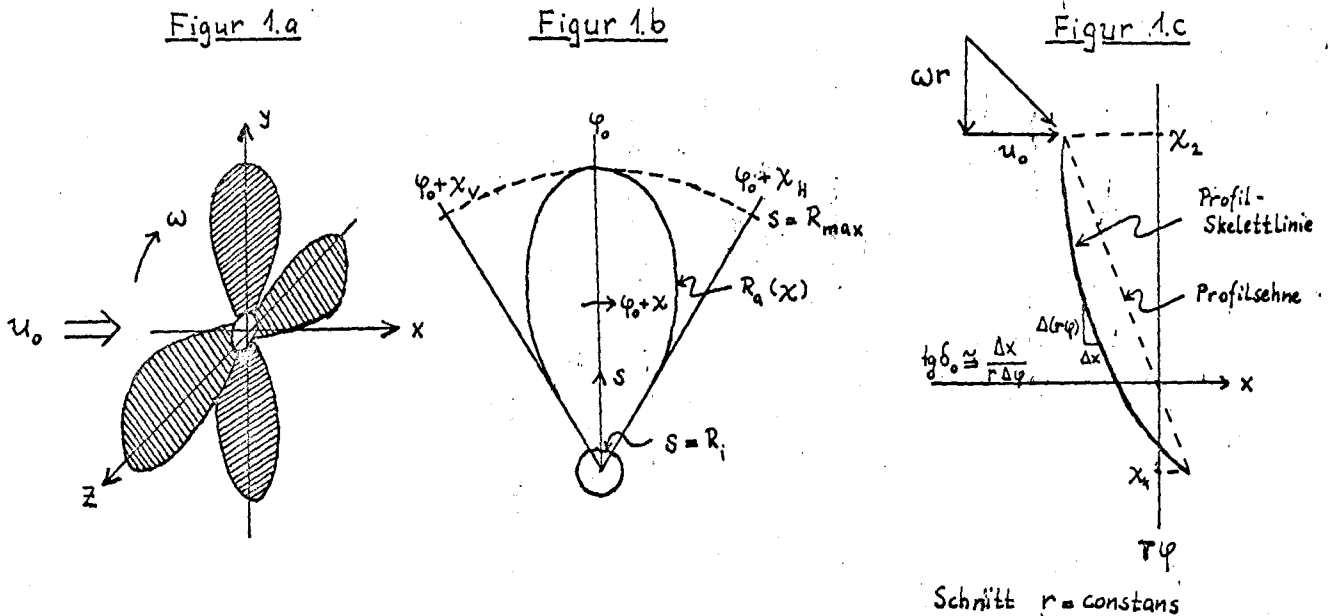
Dabei falle die x -Achse zusammen mit der Propeller-Drehachse und weise in Richtung der stationären Anströmgeschwindigkeit u_0 (weit vor dem Propeller). Die Ebene $x = \sigma$ ($r\varphi$ -Ebene) sei definiert durch die Punkte größter radialer Flügelstreckung $r = R_{\max}, \varphi = \varphi_0$.

In diesem Koordinatensystem (vergl. Figur 1.a-c) wird jedes Propellerblatt dargestellt durch Koordinaten (s, χ) mittels Projektion auf die Ebene $x = \sigma$:

$$\begin{aligned} \chi_v \leq \chi \leq \chi_H & \quad \chi_v < \sigma \\ R_i(\chi) \leq s \leq R_a(\chi) & \quad \text{mit: } R_a(\sigma) = R_{\max}. \end{aligned}$$

Schließlich seien die Flügelblätter als reguläre Schraubenflächen mit dem Steigungsparameter k_1 angenommen:

(1) $\quad \quad \quad \operatorname{tg} \delta_0 = \frac{k_1}{r}.$



II.1 Darstellung der beitragenden Geschwindigkeiten

In der Tragflächentheorie werden die Propellerblätter für jede Flügelstellung φ_0 ersetzt durch eine kontinuierliche Wirbeldichte $\gamma_p^*(s, \chi, \varphi_0)$, welche nach dem Biot-Savart'schen Gesetz an jedem Aufpunkt (x, φ, r) ein Geschwindigkeitsfeld w_p erzeugt:

$$(2) \quad w_p(x, \varphi, r) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\chi_v}^{\chi_n} d\chi \int_{R_1(\chi)}^{R_2(\chi)} ds \gamma_p^*(s, \chi, \varphi_0 + \frac{2\pi n}{N}) \frac{K_p(s, \chi)}{R^3}$$

mit:

$$(2a) \quad K_p(s, \chi) = \Gamma_x \cdot r \cdot \sin(\varphi - \varphi_0 - \frac{2\pi n}{N} - \chi) - (x - k_p \chi) \cdot \left[\Gamma_\varphi \cos(\varphi - \varphi_0 - \frac{2\pi n}{N} - \chi) + \Gamma_r \sin(\varphi - \varphi_0 - \frac{2\pi n}{N} - \chi) \right]$$

$$(2b) \quad R = \sqrt{(x - k_p \chi)^2 + r^2 + s^2 - 2 \cdot r \cdot s \cdot \cos(\varphi - \varphi_0 - \frac{2\pi n}{N} - \chi)}$$

Hierbei sei $\gamma_p^*(s, \chi, \varphi) = \gamma_p(s, \chi, \varphi_0) \cdot \sqrt{k_p^2 + s^2}$ die Wirbeldichte, multipliziert mit dem Bogenelement der tragenden Fläche.

Nach dem Thomson'schen Erhaltungssatz muß bei der Rotation der tragenden Wirbelflächen um die x -Achse an jedem Punkt die Gesamt-Wirbelstärke erhalten bleiben; deshalb werden am Ort der Propellerflügel freie Quer- ($\sim \frac{\partial \gamma_p^*(s, \chi, \varphi_0)}{\partial s}$) und Längs-Wirbel ($\sim \frac{\partial \gamma_p^*(s, \chi, \varphi_0)}{\partial \varphi_0}$) erzeugt, die relativ zum ruhenden Propeller auf Schraubenflächen abschwimmen. Dabei hängt die Steigung k_0 dieser Wirbelflächen i.a. nicht nur von der Zuströmung am Ort (s, χ) des Propellerflügels bei der Stellung φ_0 ab, sondern k_0 wird durch das Nachstromfeld des Schiffes auch hinter dem Propeller noch stark verändert (5, siehe Fußnote)

$$k_0 = k_0(s, \chi, \varphi_0; \psi)$$

Zur Angabe von k_0 muß also das gesamte Strömungsfeld, das ja erst zu berechnen ist, bekannt sein. Deshalb könnte diese Steigung allenfalls iterativ berechnet werden. Um diese Schwierigkeit zu vermeiden, gehen wir zu einer kontinuierlichen Verteilung der freien Wirbel über. Dieses Verfahren hat überdies den Vorteil, daß für die Induktion an einem beliebig ausgeschlagenen Ruder nicht mehr die komplizierte Geometrie

einer die Ruderebene schräg durchsetzenden Schraubenfläche behandelt werden muß.

Mathematisch läßt sich der Übergang von der Schraubenflächen- zur kontinuierlichen Verteilung der freien Wirbel folgendermaßen darstellen [1, S.19]:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \int_0^{\infty} d\psi F(x - k_n \psi, e^{i(\varphi_0 + \frac{2\pi n}{N} + \psi)}) \approx \frac{N}{2\pi k_0} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\infty} d\xi F(x - \xi, e^{i\vartheta})$$

Damit lautet die Darstellung für die freien Quer- und Längs- Wirbel:

$$(3) \quad \omega_Q(x, \varphi, r) = \frac{N}{8\pi^2 k_0} \int_{\chi_v}^{\chi_H} d\chi \int_{R_1(\chi)}^{R_2(\chi)} s ds \int_0^{2\pi} d\vartheta \frac{\partial \gamma_P^*(s, \chi, \vartheta)}{\partial s} \int_0^{\infty} d\xi \frac{F_Q(s, \chi, \vartheta, \xi)}{R_1^3}$$

$$(4) \quad \omega_L(x, \varphi, r) = \frac{N}{8\pi^2 k_0} \int_{\chi_v}^{\chi_H} d\chi \int_{R_1(\chi)}^{R_2(\chi)} ds \int_0^{2\pi} d\vartheta \frac{\partial \gamma_P^*(s, \chi, \vartheta)}{\partial \vartheta} \int_0^{\infty} d\xi \frac{F_L(s, \chi, \vartheta, \xi)}{R_1^3}$$

$$(3a) \quad \text{mit: } F_Q(s, \chi, \vartheta, \xi) = \mu_x \cdot [r \cos(\varphi - \chi - \vartheta) - s] + \mu_\varphi \cdot [k_0 \cos(\varphi - \chi - \vartheta) - k_0 \frac{r}{s} + (x - \xi - k_1 \chi) \cdot \sin(\varphi - \chi - \vartheta)] + \mu_r \cdot [k_0 \sin(\varphi - \chi - \vartheta) - (x - \xi - k_1 \chi) \cdot \cos(\varphi - \chi - \vartheta)]$$

$$(4a) \quad F_L(s, \chi, \vartheta, \xi) = \mu_x \cdot r \sin(\varphi - \chi - \vartheta) - \mu_\varphi \cdot (x - \xi - k_1 \chi) \cdot \cos(\varphi - \chi - \vartheta) - \mu_r \cdot (x - \xi - k_1 \chi) \cdot \sin(\varphi - \chi - \vartheta)$$

$$(3/4 b) \quad R_1 = \sqrt{(x - \xi - k_1 \chi)^2 + r^2 + s^2 - 2 \cdot r \cdot s \cdot \cos(\varphi - \chi - \vartheta)}$$

Die hierbei auftretenden ξ -Integrale sind elementar auswertbar (vergl. Anhang 1.A). Damit erhält man für ω_Q, ω_L die folgende Darstellung:

$$(5) \quad \omega_Q(x, \varphi, r) = \frac{N}{8\pi^2 k_0} \int_{\chi_v}^{\chi_H} d\chi \int_{R_1(\chi)}^{R_2(\chi)} s ds \int_0^{2\pi} d\vartheta \frac{\partial \gamma_P^*(s, \chi, \vartheta)}{\partial s} \cdot \frac{K_Q(s, \chi, \vartheta)}{r^2 + s^2 - 2rs \cos(\varphi - \chi - \vartheta)} [\dots]$$

$$(6) \quad \omega_L(x, \varphi, r) = \frac{N}{8\pi^2 k_0} \int_{\chi_v}^{\chi_H} d\chi \int_{R_1(\chi)}^{R_2(\chi)} ds \int_0^{2\pi} d\vartheta \frac{\partial \gamma_P^*(s, \chi, \vartheta)}{\partial \vartheta} \cdot \frac{K_L(s, \chi, \vartheta)}{r^2 + s^2 - 2rs \cos(\varphi - \chi - \vartheta)} [\dots]$$

$$\text{mit: } [\dots] = \left[1 + \frac{x - k_1 \chi}{\sqrt{(x - k_1 \chi)^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos(\varphi - \chi - \vartheta)}} \right]$$

$$(5a) \quad K_Q(s, \chi, \vartheta) = \mu_x \left[r \cos(\varphi - \chi - \vartheta) - s \right] \\ + \mu_\varphi \left[k_0 \cos(\varphi - \chi - \vartheta) - k_0 \frac{r}{s} + (x - k_1 \chi - \sqrt{(x - k_1 \chi)^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos(\varphi - \chi - \vartheta)}) \cdot \sin(\varphi - \chi - \vartheta) \right] \\ + \mu_r \left[k_0 \sin(\varphi - \chi - \vartheta) - (x - k_1 \chi - \sqrt{(x - k_1 \chi)^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos(\varphi - \chi - \vartheta)}) \cdot \cos(\varphi - \chi - \vartheta) \right]$$

$$(6a) \quad K_L(s, \chi, \vartheta) = \mu_x \cdot r \sin(\varphi - \chi - \vartheta) \\ - \left[\mu_\varphi \cdot \cos(\varphi - \chi - \vartheta) + \mu_r \cdot \sin(\varphi - \chi - \vartheta) \right] \cdot \left[x - k_1 \chi - \sqrt{(x - k_1 \chi)^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos(\varphi - \chi - \vartheta)} \right]$$

Es erweist sich für die weitere Behandlung als zweckmäßig, auf den tragenden Flächen zu trigonometrischen Variablen überzugehen:

$$(7) \quad \chi = \frac{\chi_H + \chi_V}{2} - \frac{\chi_H - \chi_V}{2} \cdot \cos \tau \quad \chi_V \leq \chi \leq \chi_H \leftrightarrow \sigma \leq \tau \leq \pi \\ s = \frac{R_a(\chi) + R_i(\chi)}{2} - \frac{R_a(\chi) - R_i(\chi)}{2} \cdot \cos t \quad R_i(\chi) \leq s \leq R_a(\chi) \leftrightarrow \sigma \leq t \leq \pi$$

Setzt man (7) in die Integrale für ω_y aus (2), ω_Q aus (5) und ω_L aus (10) ein, so ergibt sich mit den entsprechend besetzten Abkürzungen die Darstellung:

$$(8) \quad \omega_y(x, \varphi, r) = \frac{1}{4\pi} \frac{\chi_H - \chi_V}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \int_0^\pi d\tau \sin \tau \frac{R_a(\tau) - R_i(\tau)}{2} \int_0^\pi dt \sin t \gamma_p^*(t, \tau, \varphi_0 + \frac{2\pi n}{N}) \cdot \frac{K_y(t, \tau)}{R^3}$$

$$(9) \quad \omega_Q(x, \varphi, r) = \frac{N}{8\pi^2 k_0} \frac{\chi_H - \chi_V}{2} \int_0^\pi d\tau \sin \tau \int_0^\pi dt \cdot s(t) \int_0^{2\pi} d\vartheta \frac{\partial \gamma_p^*(t, \tau, \vartheta)}{\partial t} \frac{K_Q(t, \tau, \vartheta)}{r^2 + s^2 - 2rs \cos(\varphi - \chi - \vartheta)} \left[\dots \right]$$

$$(10) \quad \omega_L(x, \varphi, r) = \frac{N}{8\pi^2 k_0} \frac{\chi_H - \chi_V}{2} \int_0^\pi d\tau \sin \tau \frac{R_a(\tau) - R_i(\tau)}{2} \int_0^\pi dt \sin t \int_0^{2\pi} d\vartheta \frac{\partial \gamma_p^*(t, \tau, \vartheta)}{\partial \vartheta} \frac{K_L(t, \tau, \vartheta)}{r^2 + s^2 - 2rs \cos(\varphi - \chi - \vartheta)} \left[\dots \right]$$

II.2 Ableitung der Integralgleichung für die Zirkulationsdichte aus der Randbedingung

Das Strömungsfeld, wie es in einem Aufpunkt (x, χ^*, r) auf den Propellerblättern mit

$$x = k_1 \cdot \chi^*; \quad \chi_v \leq \chi^* \leq \chi_H; \quad R_1(\chi^*) \leq r \leq R_a(\chi^*)$$

für eine Flügelstellung φ_0 wirksam ist, setzt sich aus folgenden Beiträgen, dargestellt in Zylinderkoordinaten, zusammen:

- | | | |
|--|--------------------------------|--|
| 1. der Fahrtgeschwindigkeit des Schiffes | : (u_0, σ, σ) | } $\omega_0 = (u_0, \omega r, \sigma)$ |
| 2. der Rotationsgeschwindigkeit des Propellers | : $(\sigma, \omega r, \sigma)$ | |
| 3. dem Nachstromfeld des Schiffsrumpfes | : $(u_N, V_N, W_N) = \omega_N$ | |
| 4. der - zunächst vernachlässigten - Induktion des Ruders | : $(u_R, V_R, W_R) = \omega_R$ | |
| 5. der Induktion der freien und gebundenen Propellerwirbel | : $(u_P, V_P, W_P) = \omega_P$ | |
- mit: $\omega_P = \omega_N + \omega_R + \omega_L$

Die Propellerblätter seien als dünn angenommen. Die Strömungs-Randbedingung, daß am Propellerblatt keine Normalgeschwindigkeit auftritt, wird für jede Flügelstellung näherungsweise auf der Profilsehne erfüllt:

$$(11) \quad \frac{1}{2} \int_0^{\varphi} d\sigma = \frac{k_1}{r} = \frac{u_0 + u_N + u_R + u_T + u_Q + u_L}{\omega r + V_N + V_R + V_T + V_Q + V_L}$$

Betrachtet man den Schiffsnachstrom ω_N und die Ruderinduktion ω_R als gegeben, so gewinnt man mit den Integraldarstellungen (8-10) für $\omega_T, \omega_Q, \omega_L$ aus (11) die folgende Integralgleichung für $\gamma_P^*(s, \chi, \vartheta)$:

$$(11') \quad k_1 [\omega r + V_N + V_R] - r \cdot [u_0 + u_N + u_R] = r \cdot [u_T + u_Q + u_L] - k_1 [V_T + V_Q + V_L] \\ = \frac{1}{4\pi} \cdot [I_T + I_Q + I_L]$$

Dabei ergeben sich I_T, I_Q, I_L aus (8-10) mit den entsprechenden Abkürzungen wie folgt:

$$(12) \quad I_{\gamma} = \frac{\chi_H - \chi_V}{2} \sum_{n=\sigma}^{N-1} \int_0^{\pi} d\tau \sin\tau \frac{R_a(\tau) - R_i(\tau)}{2} \int_0^{\pi} dt \sin t \gamma_P^*(t, \tau, \varphi_0 + \frac{2\pi n}{N}) \cdot H_{\gamma}(t, \tau)$$

$$(13) \quad I_Q = \frac{N}{2\pi k_0} \frac{\chi_H - \chi_V}{2} \int_0^{\pi} d\tau \sin\tau \int_0^{\pi} dt s(t) \int_0^{2\pi} d\vartheta \frac{\partial \gamma_P^*(t, \tau, \vartheta)}{\partial t} \cdot H_Q(t, \tau, \vartheta)$$

$$(14) \quad I_L = \frac{N}{2\pi k_0} \frac{\chi_H - \chi_V}{2} \int_0^{\pi} d\tau \sin\tau \cdot \frac{R_a(\tau) - R_i(\tau)}{2} \int_0^{\pi} dt \sin t \int_0^{2\pi} d\vartheta \frac{\partial \gamma_P^*(t, \tau, \vartheta)}{\partial \vartheta} \cdot H_L(t, \tau, \vartheta)$$

mit:

$$(12a) \quad H_{\gamma}(t, \tau) = \frac{r^2 \sin(\chi^* - \chi - \frac{2\pi n}{N}) + k_1^2 (\chi^* - \chi) \cdot \cos(\chi^* - \chi - \frac{2\pi n}{N})}{\sqrt{k_1^2 (\chi^* - \chi)^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos(\chi^* - \chi - \frac{2\pi n}{N})}}$$

$$(13a) \quad H_Q(t, \tau, \vartheta) = \frac{n[r \cos \Phi - s] - k_1 [k_0 \cos \Phi - k_0 \frac{n}{s} + (k_1 (\chi^* - \chi) - \sqrt{k_1^2 (\chi^* - \chi)^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos \Phi}) \cdot \sin \Phi]}{r^2 + s^2 - 2rs \cos \Phi} \left[\dots \right]$$

$$(14a) \quad H_L(t, \tau, \vartheta) = \frac{r^2 \sin \Phi + k_1 [k_1 (\chi^* - \chi) - \sqrt{k_1^2 (\chi^* - \chi)^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos \Phi}] \cdot \cos \Phi}{r^2 + s^2 - 2rs \cos \Phi} \left[\dots \right]$$

wobei:

$$\left[\dots \right] = \left[1 + \frac{k_1 (\chi^* - \chi)}{\sqrt{k_1^2 (\chi^* - \chi)^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos \Phi}} \right]$$

$$\Phi = \varphi - \chi - \vartheta.$$

In der Formulierung (12a; 13a; 14a) erkennt man die Singularitäten der Integralkerne:

$H_{\gamma}(t, \tau)$ ist singular, wenn zugleich:

$$\chi \rightarrow \chi^*; \quad s \rightarrow r; \quad \chi^* - \chi - \frac{2\pi n}{N} \rightarrow 0, \text{ d.h. } n = \sigma.$$

$H_Q(t, \tau, \vartheta)$ und $H_L(t, \tau, \vartheta)$ sind singular, wenn zugleich:

$$s \rightarrow r; \quad \Phi = \varphi - \chi - \vartheta \rightarrow 0.$$

Wir werden jedoch in II.4 zeigen, daß die auftretenden Singularitäten bei der festgelegten Integrations-Reihenfolge und einem geeigneten Lösungsansatz integrierbar sind. Die Anteile (12-14) können dann durch Abspaltung der Singularitäten als Mehrfach-Integrale mit überall-stetigen Integranden dargestellt werden.

II.3 Lösungsansatz und Reduktion der Integralgleichung auf algebraische Gleichungssysteme

Die Randbedingung (11) stellt eine singuläre Integralgleichung für die Zirkulationsdichte $\gamma_p^*(s, \chi, \vartheta)$ dar. Dabei hängen die Grenzen der zweiten (s -) Integration noch von der äußeren (χ -) Integration ab, wie man am besten an der Darstellung (2,5,6) für die Geschwindigkeitsbeiträge erkennt.

Für diesen Typ von Integralgleichung existiert zurzeit noch keine mathematische Lösungstheorie. Daher soll die gegebene Gleichung durch geeignete Ansätze, in ein System von algebraischen Gleichungen überführt werden. Das hierzu angewandte Verfahren stellt eine formale Erweiterung der von Isay [1, Anhang S. 242 ff.] beschriebenen Lösungstheorie eindimensionaler singulärer Integralgleichungen dar. Im zweidimensionalen stationären Fall haben bereits Isay, Armonat [5], im eindimensionalen instationären Fall hat Zwick [3] dieses Verfahren benutzt.

Die Matrixelemente des sich ergebenden algebraischen Gleichungssystemes enthalten dabei Mehrfach-Integrale über Funktionen, deren Singularitäten sich bei der gewählten Integrations-Reihenfolge und den benutzten Ansätzen als behebbar erweisen (II.4). Daher kann eine Lösung numerisch angegeben werden.

Für die reelle Lösungsfunktion $\gamma_p^*(s, \chi, \vartheta)$ muß man zunächst Periodizität mit 2π bezüglich der Winkelvariablen ϑ verlangen; daher liegt der Fourieransatz nahe:

$$(15) \quad \gamma_p^*(s, \chi, \vartheta) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \gamma_{\mu}^*(s, \chi) \cdot e^{i\mu\vartheta} \cong \sum_{\mu=-M}^{+M} \gamma_{\mu}^*(s, \chi) \cdot e^{i\mu\vartheta}$$

Hierbei sei M so gewählt, daß der "Reihenrest" für alle s, χ einen vernachlässigbaren Beitrag liefert:

$$\left| \sum_{\mu=-\infty}^{-M-1} \gamma_{\mu}^*(s, \chi) e^{i\mu\vartheta} + \sum_{\mu=+M+1}^{+\infty} \gamma_{\mu}^*(s, \chi) e^{i\mu\vartheta} \right| \ll \left| \sum_{\mu=-M}^{+M} \gamma_{\mu}^*(s, \chi) \cdot e^{i\mu\vartheta} \right|$$

Da die Funktion $\gamma_p^*(s, \chi, \vartheta)$ reell sein muß, gilt für die komplexen Beiträge $\gamma_\mu^*(s, \chi)$ die Konjugiertheits-Bedingung:

$$(15a) \quad \overline{\gamma_\mu^*(s, \chi)} = \gamma_{-\mu}^*(s, \chi) \quad \text{für alle } \mu.$$

Auch die Beiträge von Schiffs-Nachstrom und Ruderinduktion am Propeller sind reell und mit 2π periodisch und lassen sich daher durch eine ebensolche Fourierreihe darstellen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sollen auch dort die Reihen bei M abgebrochen werden:

$$(16) \quad u_N(x, r, \varphi) = u_0 \sum_{\mu=-M}^{+M} \mathcal{N}_\mu^{(N, x)}(x, r) \cdot e^{i\mu\varphi}$$

$$V_N(x, r, \varphi) = u_0 \sum_{\mu=-M}^{+M} \mathcal{N}_\mu^{(N, \varphi)}(x, r) \cdot e^{i\mu\varphi}$$

$$(17) \quad u_R(x, r, \varphi) = u_0 \sum_{\mu=-M}^{+M} \mathcal{R}_\mu^{(R, x)}(x, r) \cdot e^{i\mu\varphi}$$

$$V_R(x, r, \varphi) = u_0 \sum_{\mu=-M}^{+M} \mathcal{R}_\mu^{(R, \varphi)}(x, r) \cdot e^{i\mu\varphi}$$

Wie bei (15a) gilt wegen der Realität von u_N, V_N bzw. u_R, V_R die entsprechende Konjugiertheits-Bedingung für $\mathcal{N}_\mu^{(N, x)}, \mathcal{N}_\mu^{(N, \varphi)}$ bzw. $\mathcal{R}_\mu^{(R, x)}, \mathcal{R}_\mu^{(R, \varphi)}$.

Durch Einsetzen von (15-17) erhält man aus der Gleichung (11):

$$(18) \quad \frac{1}{4\pi} \sum_{\mu=-M}^{+M} [I_{\gamma, \mu} + I_{a, \mu} + I_{L, \mu}] = [k_1 \omega - u_0] \cdot r + u_0 \sum_{\mu=-M}^{+M} \left\{ \dots \right\} \cdot e^{i\mu(\varphi_0 + \chi^*)}$$

mit:

$$\left\{ \dots \right\} = k_1 \cdot \mathcal{N}_\mu^{(N, \varphi)}(x, r) + k_1 \cdot \mathcal{R}_\mu^{(R, \varphi)}(x, r) - r \cdot \mathcal{N}_\mu^{(N, x)}(x, r) - r \cdot \mathcal{R}_\mu^{(R, x)}(x, r)$$

$$(18a) \quad I_{\gamma, \mu} = \frac{\chi_H - \chi_V}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \int_0^\pi d\tau \sin\tau \frac{R_a(\tau) - R_i(\tau)}{2} \int_0^\pi dt \sin t \gamma_\mu^*(t, \tau) \cdot H_\gamma(t, \tau) \cdot e^{i\mu(\varphi_0 + \frac{2\pi n}{N})}$$

$$(18b) \quad I_{a, \mu} = \frac{N}{2\pi k_0} \frac{\chi_H - \chi_V}{2} \int_0^\pi d\tau \sin\tau \int_0^\pi dt s(t) \int_0^{2\pi} d\vartheta \frac{\partial \gamma_\mu^*(t, \tau)}{\partial t} e^{i\mu\vartheta} \cdot H_a(t, \tau, \vartheta)$$

$$(18c) \quad I_{L, \mu} = \frac{N}{2\pi k_0} \frac{\chi_H - \chi_V}{2} \int_0^\pi d\tau \sin\tau \frac{R_a(\tau) - R_i(\tau)}{2} \int_0^\pi dt \sin t \int_0^{2\pi} d\vartheta \gamma_\mu^*(t, \tau) \cdot i\mu e^{i\mu\vartheta} \cdot H_L(t, \tau, \vartheta)$$

Hierin sind die Funktionen H_γ, H_a, H_L wie in (12a, 13a, 14a) einzusetzen.

Die Gleichung (18) ist für alle Flügelstellungen φ_0 für jeden Aufpunkt $(x, r, \varphi) = (k_1 \chi^*, r, \varphi_0 + \chi^*)$ auf dem Propellerblatt zu erfüllen. Zunächst führen wir in (18) bei H_a, H_L die Transformation

$$\vartheta' = -\Phi = -(\varphi - \chi - \vartheta)$$

ein. Durch Koeffizientenvergleich in $e^{i\mu\varphi_0}$ gewinnt man dann das System von Integralgleichungen:

$$(19) \quad \mu = 0, 1, \dots, M: \quad \frac{1}{4\pi} \cdot [I_{\vartheta, \mu} + I_{a, \mu} + I_{L, \mu}] = f_{\mu}(r, \chi^*) \cdot e^{i\mu\chi^*}$$

$$(19a) \quad \text{mit:} \quad f_{\mu}(r, \chi^*) = \delta_{\mu 0} \cdot r \cdot [k_2 \omega - u_0] + u_0 \cdot [k_2 \mathcal{V}_{\mu}^{(N, \varphi)}(r, k_2 \chi^*) + k_1 \mathcal{V}_{\mu}^{(R, \varphi)}(r, k_2 \chi^*) - r \mathcal{V}_{\mu}^{(N, \chi)}(r, k_2 \chi^*) - r \mathcal{V}_{\mu}^{(R, \chi)}(r, k_2 \chi^*)]$$

$$(19b) \quad I_{\vartheta, \mu} = \frac{\chi_H - \chi_V}{2} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i\mu \frac{2\pi n}{N}} \int_0^{\pi} d\tau \sin \tau \frac{R_a(\tau) - R_i(\tau)}{2} \int_0^{\pi} dt \sin t \gamma_{\mu}^*(t, \tau) \cdot H_{\vartheta}(t, \tau)$$

$$(19c) \quad I_{a, \mu} = \frac{N}{2\pi k_0} \frac{\chi_H - \chi_V}{2} \int_0^{\pi} d\tau \sin \tau e^{i\mu(\chi^* - \chi(\tau))} \int_0^{\pi} dt s(t) \frac{\partial \gamma_{\mu}^*(t, \tau)}{\partial t} \int_0^{2\pi} d\vartheta' e^{i\mu\vartheta'} \cdot H_a(t, \tau, \vartheta')$$

$$(19d) \quad I_{L, \mu} = \frac{i\mu N}{2\pi k_0} \frac{\chi_H - \chi_V}{2} \int_0^{\pi} d\tau \sin \tau e^{i\mu(\chi^* - \chi(\tau))} \frac{R_a(\tau) - R_i(\tau)}{2} \int_0^{\pi} dt \sin t \gamma_{\mu}^*(t, \tau) \int_0^{2\pi} d\vartheta' e^{i\mu\vartheta'} \cdot H_L(t, \tau, \vartheta')$$

Hierbei ist entsprechend der eingeführten Transformation bei H_a, H_L in (13a, 14a) die Variable $\Phi = -\vartheta'$ zu ersetzen.

Wegen der vorausgesetzten Konjugiertheits-Eigenschaften (15a) werden die Integralgleichungen nur für $\mu \geq 0$ ausgewertet. Während für $\mu = 0$ nur eine reelle Lösung auftritt, hat man für $\mu \geq 1$ ein komplexes Gleichungssystem, das für Realteil und Imaginärteil von $\gamma_{\mu}^*(t, \tau)$ zu lösen ist.

Für die Funktionen $\gamma_{\mu}^*(t, \tau)$ machen wir in Anlehnung an die von Isay [1, Anhang S. 242 ff] angegebene Auflösungstheorie den folgenden Ansatz:

$$(20) \quad \gamma_{\mu}^*(t, \tau) = 2\omega R_{\max}^2 \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K A_{lk}^{(\mu)} Q_l(\tau) P_k(t)$$

$$\text{mit:} \quad \sin \tau \cdot Q_l(\tau) = \cos(l\tau) - (-1)^l$$

$$P_k(t) = s(t) \cdot \sin(k \cdot t)$$

Diese Funktionen $\gamma_{\mu}^*(t, \tau)$ erfüllen die Bedingungen:

$$\text{alle } \tau \neq \sigma: \gamma_{\mu}^*(\sigma, \tau) = \gamma_{\mu}^*(\tau, \sigma) = 0$$

$$\text{alle } t: \gamma_{\mu}^*(t, \pi) = 0$$

Mit dem Lösungsansatz (20) gewinnt man aus (19) bei festem μ ein algebraisches Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten $A_{ek}^{(\mu)}$:

$$\mu = \sigma, 1 \dots M:$$

$$(21) \quad \frac{\omega R_{\max}^2}{2\pi} \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K \left[\gamma_{\gamma, ek}^{(\mu)} + \gamma_{\alpha, ek}^{(\mu)} + \gamma_{z, ek}^{(\mu)} \right] \cdot A_{ek}^{(\mu)} = f_{\mu}(r, \chi^*) \cdot e^{i\mu \chi^*}$$

mit:

$$(21a) \quad \gamma_{\gamma, ek}^{(\mu)} = \frac{\chi_u - \chi_v}{2} \sum_{n=\sigma}^{N-1} e^{i\mu \frac{2\pi n}{N}} \int_{\sigma}^{\pi} dt \sin t \cdot Q_e(\tau) \frac{R_a(\tau) - R_i(\tau)}{2} \int_{\sigma}^{\pi} dt \sin t \cdot P_k(t) \cdot H_{\gamma}(t, \tau)$$

$$(21b) \quad \gamma_{\alpha, ek}^{(\mu)} = \frac{N}{2\pi k_0} \frac{\chi_u - \chi_v}{2} \int_{\sigma}^{\pi} dt \sin t \cdot Q_e(\tau) \cdot e^{i\mu(\chi^* - \chi(\tau))} \int_{\sigma}^{\pi} dt \cdot s(t) \frac{dP_k(t)}{dt} \int_{\sigma}^{2\pi} d\vartheta e^{i\mu\vartheta} \cdot H_{\alpha}(t, \tau, \vartheta)$$

$$(21c) \quad \gamma_{z, ek}^{(\mu)} = \frac{i\mu N}{2\pi k_0} \frac{\chi_u - \chi_v}{2} \int_{\sigma}^{\pi} dt \sin t \cdot Q_e(\tau) \cdot e^{i\mu(\chi^* - \chi(\tau))} \frac{R_a(\tau) - R_i(\tau)}{2} \int_{\sigma}^{\pi} dt \sin t \cdot P_k(t) \int_{\sigma}^{2\pi} d\vartheta e^{i\mu\vartheta} \cdot H_z(t, \tau, \vartheta)$$

Damit das Gleichungssystem (21) eindeutig zu jedem μ für die $L \cdot K$ Koeffizienten $A_{ek}^{(\mu)}$ auflösbar ist, müssen sowohl die Matrixelemente als auch die rechte Seite an ebensovielen Aufpunkten berechnet werden. Es hat sich jedoch bei der Durchführung der numerischen Rechnungen als zweckmäßig erwiesen, Matrixelemente und rechte Seite an wesentlich mehr Punkten, als Koeffizienten benutzt, zu berechnen und die Auflösung des Gleichungssystems nach dem Prinzip des kleinsten Fehlerquadrates durchzuführen. Dazu schreiben wir (21) in der Kurzform:

$$\sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K \gamma_{ek}^{(\mu)}(\chi^*, r) \cdot A_{ek}^{(\mu)} = R^{(\mu)}(\chi^*, r)$$

Wenn wir als Fehlerquadrat einführen:

$$Q_{(\mu)}^2 = \sum_{(x^*, r)} \left\{ \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K \gamma_{ek}^{(\mu)}(x^*, r) \cdot A_{ek}^{(\mu)} - R^{(\mu)}(x^*, r) \right\}^2$$

so erhalten wir nach dem Prinzip des kleinsten Fehlerquadrates die Variations-Differentialgleichungen für die Koeffizienten $A_{e'k'}^{(\mu)}$: $l'=1..L; k'=1..K$:

$$\frac{\delta Q_{(\mu)}^2}{\delta A_{e'k'}^{(\mu)}} = 2 \sum_{(x^*, r)} \left\{ \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K \gamma_{ek}^{(\mu)}(x^*, r) \cdot A_{ek}^{(\mu)} - R^{(\mu)}(x^*, r) \right\} \cdot \gamma_{e'k'}^{(\mu)}(x^*, r) = 0$$

Daraus ergibt sich nach Umordnung der endlichen Summen das Gleichungssystem: $l'=1..L; k'=1..K$:

$$(22) \quad \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K \left\{ \sum_{(x^*, r)} \gamma_{ek}^{(\mu)}(x^*, r) \cdot \gamma_{e'k'}^{(\mu)}(x^*, r) \right\} \cdot A_{ek}^{(\mu)} = \sum_{(x^*, r)} R^{(\mu)}(x^*, r) \cdot \gamma_{e'k'}^{(\mu)}(x^*, r)$$

Zur Wahl der Aufpunkte (x^*, r) sowie zur Anzahl der mitgenommenen Glieder (L, K) verweisen wir auf Kap. VI (Einzelheiten der numerischen Rechnungen).

II.4 Diskussion der Matrixelemente

Wie bereits bei der Aufstellung der Integralgleichung erwähnt, enthalten die als Matrixelemente auftretenden Mehrfach-Integrale (21a-c) noch singuläre Funktionen. Im folgenden wird jedoch gezeigt, daß bei der festgelegten Integrations-Reihenfolge und dem benutzten Zirkulationsdichte-Ansatz

$$\gamma_{\mu}^*(s, \chi) = 2\omega R_{\max}^2 \sum_{\ell=1}^L \sum_{k=1}^K A_{\ell k}^{(\mu)} Q_{\ell}(\chi) P_k(s, \chi)$$

die auftretenden Singularitäten sämtlich integrabel sind; durch geeignete Abspaltung können daher die beitragenden Matrixelemente durch Mehrfach-Integrale mit überall-stetigen Integranden dargestellt werden.

Für die weitere Diskussion erweist es sich als übersichtlicher, statt der trigonometrisch-transformierten Darstellung (21a-c) eine Formulierung in (s, χ) -Variablen entsprechend der Transformation (7) zu benutzen.

A) Beitrag der gebundenen Wirbel $\gamma_{\ell k}^{(\mu)}$:

$$(23) \quad \gamma_{\ell k}^{(\mu)} = \sum_{n=\sigma}^{N-1} e^{i\mu \frac{2\pi n}{N}} \int_{\chi_v}^{\chi_H} d\chi Q_{\ell}(\chi) \int_{R_1(\chi)}^{R_2(\chi)} ds P_k(s, \chi) \cdot H_{\gamma}^{(n)}(s, \chi)$$

$$(23a) \quad \text{mit:} \quad H_{\gamma}^{(n)}(s, \chi) = \frac{r^2 \sin(\chi^* - \chi - \frac{2\pi n}{N}) + k_1^2 (\chi^* - \chi) \cos(\chi^* - \chi - \frac{2\pi n}{N})}{\sqrt{k_1^2 (\chi^* - \chi)^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos(\chi^* - \chi - \frac{2\pi n}{N})}^3}$$

Die Funktion $H_{\gamma}^{(n)}(s, \chi)$, die wegen der Stetigkeit von $Q_{\ell}(\chi)$, $P_k(s, \chi)$ allein das singuläre Verhalten des Integranden bestimmt, ist bei $n \neq \sigma$ (Nebenflügel) stetig für alle s, χ . Bei $n = \sigma$ ist der s -Integrand singulär für $\chi = \chi^*, s = r$. Um das Verhalten von $H_{\gamma}^{(\sigma)}(s, \chi)$ in der Umgebung von $\chi = \chi^*$ zu beschreiben, benutzen wir für $\sin(\chi^* - \chi)$, $\cos(\chi^* - \chi)$ jeweils das erste Glied ihrer Reihenentwicklung und erhalten:

$$H_{\gamma}^{(\sigma)}(s, \chi) \cong \tilde{H}_{\gamma}^{(\sigma)}(s, \chi) = \frac{(k_1^2 + r^2) \cdot (\chi^* - \chi)}{\sqrt{(k_1^2 + r^2) \cdot (\chi^* - \chi)^2 + (s - r)^2}^3}$$

Das S -Integral dieser singulären Grenzfunktion kann mit einer elementaren Integralformel ausgewertet werden:

$$(23b) \quad \begin{aligned} \tilde{h}_y^{(0)}(\chi) &= \int_{R_1(\chi)}^{R_a(\chi)} ds \tilde{H}_y^{(0)}(s, \chi) \\ &= \frac{1}{\chi^* - \chi} \left\{ \frac{R_a(\chi) - r}{\sqrt{(k_1^2 + r^2)(\chi^* - \chi)^2 + (R_a(\chi) - r)^2}} + \frac{r - R_1(\chi)}{\sqrt{(k_1^2 + r^2)(\chi^* - \chi)^2 + (r - R_1(\chi))^2}} \right\} \end{aligned}$$

Mit diesen Eigenschaften kann man nunmehr die Singularität bei $n=0, \chi=\chi^*, s=r$ wie folgt abspalten:

$$(24) \quad \int_{\chi_v}^{\chi_H} d\chi Q_2(\chi) \int_{R_1(\chi)}^{R_a(\chi)} ds P_k(s, \chi) \cdot H_y^{(0)}(s, \chi) = \int_{\chi_v}^{\chi_H} d\chi Q_2(\chi) \int_{R_1(\chi)}^{R_a(\chi)} ds \Delta_y^{(0)}(s, \chi) + \int_{\chi_v}^{\chi_H} d\chi Q_2(\chi) \cdot P_k(r, \chi) \cdot \tilde{h}_y^{(0)}(\chi)$$

$$(24a) \quad \text{mit:} \quad \Delta_y^{(0)}(s, \chi) = P_k(s, \chi) \cdot H_y^{(0)}(s, \chi) - P_k(r, \chi) \cdot \tilde{H}_y^{(0)}(s, \chi)$$

Dabei ist der Anteil $P_k(s, \chi)$ der Zirkulationsdichte - wie diese selbst - nur auf dem Propellerblatt definiert. Isay, Armonat [5] haben dazu gezeigt, daß dieser Anteil außerhalb des Flügels imaginär wird. Es erscheint daher sinnvoll, den Definitionsbereich dieser reellen Funktion dadurch zu erweitern, daß man sie außerhalb des Flügels verschwinden läßt:

$$P_k(s, \chi) = 0 \quad \text{für:} \quad s < R_1(\chi) \quad \text{bzw.} \quad s > R_a(\chi).$$

Mit den angegebenen Eigenschaften folgt, daß $\Delta_y^{(0)}(s, \chi)$ für alle s, χ definiert und stetig ist.

Wie Isay, Armonat bei der Diskussion des entsprechenden Gliedes bereits ausgeführt haben [5], läßt sich der 2. Integralbeitrag in (24) nach trigonometrischer Transformation leicht dadurch auswerten, daß man den Integranden in eine Fourier-Kosinusreihe entwickelt. Das $\tau(\chi)$ -Integral ist dann als Glauert-Integral elementar auswertbar:

$$(25) \quad \int_0^\pi d\tau \frac{\cos(m\tau)}{\cos\tau - \cos\tau^*} = \pi \cdot \frac{\sin(m\tau^*)}{\sin\tau^*}$$

B) Beitrag der freien Querwirbel $y_{a,ek}^{(\mu)}$:

$$(26) \quad y_{a,ek}^{(\mu)} = \frac{N}{2\pi k_0} \int_{x_v}^{x_n} dx Q_e(x) e^{i\mu(x^*-x)} \int_{R_1(x)}^{R_2(x)} s ds \frac{\partial P_k(s,x)}{\partial s} \int_0^{2\pi} d\vartheta e^{i\mu\vartheta} \cdot H_a(s,x,\vartheta)$$

$$(26a) \quad \text{mit:} \quad s \cdot H_a(s,x,\vartheta) = \frac{[k_0 k_1 - s^2] \cdot r - [k_0 k_1 - r^2] \cdot s \cdot \cos \vartheta}{r^2 + s^2 - 2rs \cos \vartheta} \cdot \left\{ 1 + \frac{k_1 (x^* - x)}{\sqrt{k_1^2 (x^* - x)^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos \vartheta}} \right\} - \frac{k_1 s \cdot \sin \vartheta}{\sqrt{k_1^2 (x^* - x)^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos \vartheta}}$$

Wir betrachten zunächst:

$$h_a = \int_{R_1(x)}^{R_2(x)} ds \frac{\partial P_k(s,x)}{\partial s} \int_0^{2\pi} d\vartheta e^{i\mu\vartheta} \frac{[k_0 k_1 - s^2] \cdot r - [k_0 k_1 - r^2] \cdot s \cdot \cos \vartheta}{r^2 + s^2 - 2rs \cos \vartheta}$$

Im Anhang 1.B wird das ϑ -Integral nach der Residuenmethode ausgewertet. Das erhaltene s -Integral ist bei $s=r$ nicht stetig, da kein Pol auf dem Rande des Einheitskreises liegen darf. Man kann aber durch partielle s -Integration das Integral so umformen, daß sein Integrand überall stetig ist (vergl. Anhang 1.C). Wir erhalten dann:

$$(27) \quad h_a = \int_{R_1(x)}^{R_2(x)} ds \frac{\partial P_k(s,x)}{\partial s} \left\{ \begin{array}{l} \mu=0, s < r: \frac{2\pi k_0 k_1}{r} \\ \mu=0, s > r: -2\pi r \\ \mu > 0, s < r: \pi r \cdot \left[1 + \frac{k_0 k_1}{r^2}\right] \cdot \left(\frac{s}{r}\right)^\mu \\ \mu > 0, s > r: -\pi r \cdot \left[1 + \frac{k_0 k_1}{r^2}\right] \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^\mu \end{array} \right\}$$

$$(27a) \quad = \pi r \cdot \left[1 + \frac{k_0 k_1}{r^2}\right] \cdot \left[2P_k(r,x) - \mu \int_{R_1(x)}^{R_2(x)} \frac{ds}{s} P_k(s,x) \cdot \left\{ \begin{array}{l} s < r: \left(\frac{s}{r}\right)^\mu \\ s > r: \left(\frac{r}{s}\right)^\mu \end{array} \right\} \right]$$

Wir untersuchen nun den ersten Anteil von (26a):

$$(28) \quad h_{a1}(x) = \int_{R_1(x)}^{R_2(x)} ds \frac{\partial P_k(s,x)}{\partial s} \int_0^{2\pi} d\vartheta e^{i\mu\vartheta} \frac{[k_0 k_1 - s^2] \cdot r - [k_0 k_1 - r^2] \cdot s \cdot \cos \vartheta}{r^2 + s^2 - 2rs \cos \vartheta} \cdot \left\{ 1 + \frac{k_1 (x^* - x)}{\sqrt{k_1^2 (x^* - x)^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos \vartheta}} \right\}$$

$$= \int_{R_1(x)}^{R_2(x)} ds \frac{\partial P_k(s,x)}{\partial s} 2 \int_0^\pi d\vartheta \cos(\mu\vartheta) \cdot f_{a1}(s,x,\vartheta)$$

1. Fall: $\chi^* < \chi \rightarrow \chi^* - \chi = -|\chi^* - \chi|$

$$(28a) \quad f_{Q_1}(s, \chi, \vartheta) = \frac{[k_0 k_1 - s^2] \cdot r - [k_0 k_1 - r^2] \cdot s \cos \vartheta}{r^2 + s^2 - 2rs \cos \vartheta} \cdot \left\{ 1 - \frac{k_1 \cdot |\chi^* - \chi|}{\sqrt{k_1^2 (\chi^* - \chi)^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos \vartheta}} \right\}$$

Diese Funktion ist stetig für alle s, ϑ ; speziell folgt nach Anwendung der De-L'Hospital-schen Regel auf den vorderen Faktor:

$$\lim_{\vartheta \rightarrow \sigma} f_{Q_1}(r, \chi, \vartheta) = \lim_{\vartheta \rightarrow \sigma} \frac{r \cdot [k_0 k_1 - r^2] \cdot \cos \vartheta}{2r^2 \cdot \cos \vartheta} \cdot \left\{ 1 - \frac{k_1 \cdot |\chi^* - \chi|}{k_1 \cdot |\chi^* - \chi|} \right\} = 0$$

2. Fall: $\chi^* = \chi$:

$$h_{Q_1}(\chi^*) = h_Q + \lim_{\chi \rightarrow \chi^*} \left\{ 2k_1 \cdot (\chi^* - \chi) \cdot I_Q(\chi^*) \right\}$$

mit:

$$I_Q(\chi^*) = \int_{R_1(\chi^*)}^{R_2(\chi^*)} ds \frac{\partial P_k(s, \chi^*)}{\partial s} \left[\int_0^\Delta d\vartheta \tilde{f}_{Q_1}(s, \vartheta) + \int_\Delta^\pi d\vartheta \tilde{f}_{Q_2}(s, \vartheta) \right] = I_{Q_1}(\chi^*) + I_{Q_2}(\chi^*)$$

$$\tilde{f}_{Q_1}(s, \vartheta) = \cos(\mu \vartheta) \cdot \frac{[k_0 k_1 - s^2] \cdot r - [k_0 k_1 - r^2] \cdot s \cos \vartheta}{\sqrt{r^2 + s^2 - 2rs \cos \vartheta}^3}$$

$$0 < \Delta \ll \pi$$

Da der Integrand in $I_{Q_2}(\chi^*)$ überall stetig-integrierbar ist, ist $I_{Q_2}(\chi^*)$ also endlich. Für $I_{Q_1}(\chi^*)$ folgt mit den Anfangsgliedern der \cos -Reihe nach elementarer Integration:

$$\int_0^\Delta d\vartheta \tilde{f}_{Q_1}(s, \vartheta) \cong \int_0^\Delta d\vartheta \frac{(k_0 k_1 + rs) \cdot (r-s)}{\sqrt{(r-s)^2 + rs \vartheta^2}^3}$$

$$= \frac{1}{r-s} \cdot \left(\frac{\Delta \cdot (k_0 k_1 + rs)}{\sqrt{(r-s)^2 + rs \Delta^2}} - \frac{k_0 k_1 + r^2}{r} \right) + \frac{1}{r-s} \cdot \frac{k_0 k_1 + r^2}{r}$$

Hierin nimmt nach De-L'Hospital der Anteil $\frac{1}{r-s} (\dots)$ stetig den endlichen Grenzwert an:

$$\lim_{s \rightarrow r} \frac{1}{r-s} \cdot \left(\frac{\Delta \cdot (k_0 k_1 + rs)}{\sqrt{(r-s)^2 + rs \Delta^2}} - \frac{k_0 k_1 + r^2}{r} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{k_0 k_1}{r^2} \right)$$

Der verbleibende Beitrag $\int_{R_1(\chi^*)}^{R_2(\chi^*)} ds \frac{\partial P_k(s, \chi^*)}{\partial s} \frac{1}{r-s} \frac{k_0 k_1 + r^2}{r}$

ist nach trigonometrischer Transformation (7) mit der Glauert-Formel (25) integrierbar. Da also $I_Q(\chi^*)$ nichtsingulär ist, folgt:

$$(28b) \quad h_{Q_1}(\chi^*) = h_Q$$

3. Fall: $\chi^* > \chi \rightarrow \chi^* - \chi = |\chi^* - \chi|$

$$(28c) \quad f_{Q_1}(s, \chi, \vartheta) = 2 \cdot \frac{[k_0 k_1 - s^2] \cdot r - [k_0 k_1 - r^2] \cdot s \cos \vartheta}{r^2 + s^2 - 2rs \cos \vartheta} - \frac{[k_0 k_1 - s^2] \cdot r - [k_0 k_1 - r^2] \cdot s \cos \vartheta}{r^2 + s^2 - 2rs \cos \vartheta} \cdot \left\{ 1 - \frac{k_1 \cdot |\chi^* - \chi|}{\sqrt{k_1^2 (\chi^* - \chi)^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos \vartheta}} \right\}$$

Hierin ist der erste Anteil mit (27a) ϑ -integrabel und für alle s stetig darstellbar. Der zweite Anteil ist wie in (28a) stetig für alle s, ϑ ; wie dort verschwindet dieser Beitrag bei $s \rightarrow r; \vartheta \rightarrow 0$.

Endlich bleibt noch der Beitrag $h_{a2}(\chi)$ zu untersuchen:

$$(29) \quad h_{a2}(\chi) = 2i \int_{R_1(\chi)}^{R_a(\chi)} ds \frac{\partial P_k(s, \chi)}{\partial s} \int_0^\pi d\vartheta \sin(\mu\vartheta) \cdot f_{a2}(s, \chi, \vartheta)$$

$$f_{a2}(s, \chi, \vartheta) = \frac{k_1 s \cdot \sin\vartheta}{\sqrt{k_1^2(\chi^* - \chi)^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos\vartheta}}$$

Für $\chi \neq \chi^*$ ist $f_{a2}(s, \chi, \vartheta)$ überall stetig. Für $\chi = \chi^*$ ist $f_{a2}(r, \chi^*, 0)$ unbestimmt; mit Benutzung der ersten Glieder der trigonometrischen Reihen erkennt man aber:

$$(29a) \quad \lim_{\vartheta \rightarrow 0} [f_{a2}(r, \chi^*, \vartheta) \cdot \sin(\mu\vartheta)] \approx \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{k_1 s}{r\sqrt{2}} \cdot \frac{\mu\vartheta^2}{\sqrt{\vartheta^2}} = 0$$

Mit (27-29) kann somit der Beitrag (26) der freien Querwirbel mit überall-stetigen Integranden dargestellt werden.

C) Beitrag der freien Längswirbel $\gamma_{L,ek}^{(\mu)}$:

$$(30) \quad \gamma_{L,ek}^{(\mu)} = \frac{i\mu N}{2\pi k_0} \int_{\chi_v}^{\chi_H} d\chi Q_e(\chi) e^{i\mu(\chi^* - \chi)} \int_{R_1(\chi)}^{R_a(\chi)} ds P_k(s, \chi) \int_0^{2\pi} d\vartheta e^{i\mu\vartheta} \cdot H_L(s, \chi, \vartheta)$$

$$(30a) \quad \text{mit: } H_L(s, \chi, \vartheta) = \frac{-r^2 \sin\vartheta}{r^2 + s^2 - 2rs \cos\vartheta} \cdot \left\{ 1 + \frac{k_1(\chi^* - \chi)}{\sqrt{k_1^2(\chi^* - \chi)^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos\vartheta}} \right\} - \frac{k_1 \cos\vartheta}{\sqrt{k_1^2(\chi^* - \chi)^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos\vartheta}}$$

Wir betrachten zunächst:

$$(31) \quad f_L(s, \chi^*, \vartheta) = \frac{-r^2 \sin\vartheta}{r^2 + s^2 - 2rs \cos\vartheta}$$

Die ϑ -Integration kann für diesen Beitrag nach der Residuenmethode ausgewertet werden (vergl. Anhang 1.D), und man erhält die in s stetige Darstellung:

$$(31a) \quad h_L(s, \chi^*) = \int_0^{2\pi} d\vartheta \cdot e^{i\mu\vartheta} f_L(s, \chi^*, \vartheta) = -\pi i \cdot \frac{r}{s} \cdot \left\{ \begin{array}{l} s < r: \left(\frac{s}{r}\right)^\mu \\ s > r: \left(\frac{r}{s}\right)^\mu \end{array} \right\}$$

Wir untersuchen nun den ersten Anteil in (30a):

$$(32) \quad h_{L1}(\chi) = \int_{R_1(\chi)}^{R_a(\chi)} ds P_k(s, \chi) \int_0^{2\pi} d\vartheta e^{i\mu\vartheta} \frac{-r^2 \sin\vartheta}{r^2 + s^2 - 2rs \cos\vartheta} \left\{ 1 + \frac{k_1(\chi^* - \chi)}{\sqrt{k_1^2(\chi^* - \chi)^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos\vartheta}} \right\}$$

$$= 2i \int_{R_1(\chi)}^{R_a(\chi)} ds P_k(s, \chi) \int_0^\pi d\vartheta \sin(\mu\vartheta) \cdot f_{L1}(s, \chi, \vartheta)$$

1. Fall: $\chi^* < \chi \rightarrow \chi^* - \chi = -|\chi^* - \chi|$

$$(32 a) \quad \sin(\mu\vartheta) \cdot f_{L_1}(s, \chi, \vartheta) = \frac{-r^2 \sin\vartheta \cdot \sin(\mu\vartheta)}{r^2 + s^2 - 2rs \cos\vartheta} \cdot \left\{ 1 - \frac{k_1 \cdot |\chi^* - \chi|}{\sqrt{k_1^2 (\chi^* - \chi)^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos\vartheta}} \right\}$$

Diese Funktion ist stetig für alle s, ϑ ; speziell folgt nach Anwendung der De-L'Hospital-schen Regel auf den vorderen Faktor für $s \rightarrow r, \vartheta \rightarrow \sigma$.

$$\lim_{\vartheta \rightarrow \sigma} [\sin(\mu\vartheta) \cdot f_{L_1}(r, \chi, \vartheta)] = -\mu \cdot \left\{ 1 - \frac{k_1 \cdot |\chi^* - \chi|}{k_1 \cdot |\chi^* - \chi|} \right\} = \sigma$$

2. Fall: $\chi^* = \chi$:

$$h_{L_1}(\chi^*) = \int_{R_1(\chi^*)}^{R_2(\chi^*)} ds P_k(s, \chi^*) \cdot h_L(s, \chi^*) + \lim_{\chi \rightarrow \chi^*} \left\{ 2k_1 \cdot (\chi^* - \chi) \cdot I_L(\chi^*) \right\}$$

mit:

$$I_L(\chi^*) = \int_{R_1(\chi^*)}^{R_2(\chi^*)} ds \cdot P_k(s, \chi^*) \cdot \left[\int_{\sigma}^{\Delta} d\vartheta \tilde{f}_{L_1}(s, \vartheta) + \int_{\Delta}^{\pi} d\vartheta \tilde{f}_{L_1}(s, \vartheta) \right] = I_{L_1}(\chi^*) + I_{L_2}(\chi^*)$$

$$\tilde{f}_{L_1}(s, \vartheta) = \frac{-r^2 \sin\vartheta \cdot \sin(\mu\vartheta)}{\sqrt{r^2 + s^2 - 2rs \cos\vartheta}^3}$$

$$\sigma < \Delta \ll \pi$$

Der Integrand in $I_{L_2}(\chi^*)$ ist überall stetig-integrabel, also ist $I_{L_2}(\chi^*)$ endlich. Für $I_{L_1}(\chi^*)$ benutzen wir die ersten Glieder der trigonometrischen Reihen und erhalten nach elementarer

Integration:

$$\int_{\sigma}^{\Delta} d\vartheta \tilde{f}_{L_1}(s, \vartheta) \approx \int_{\sigma}^{\Delta} d\vartheta \frac{-r^2 \mu \vartheta^2}{\sqrt{(r-s)^2 + rs \vartheta^2}^{2+3}}$$

$$= \frac{r \cdot \mu \cdot \Delta}{s \sqrt{(r-s)^2 + rs \Delta^2}} - \frac{r \mu}{s \sqrt{rs}} \ln \left| \frac{\sqrt{rs} \cdot \Delta + \sqrt{(r-s)^2 + rs \Delta^2}}{r-s} \right|$$

Für $s \rightarrow r$ enthält der s -Integrand in $I_{L_1}(\chi^*)$ eine logarithmische Singularität; diese ist aber nach trigonometrischer Transformation (7) mit der Integralformel [1, S. 244]:

$$(32 b) \quad \frac{1}{\pi} \int_{\sigma}^{\pi} dt \cdot \cos(\mu t) \cdot \ln | \cos t - \cos t^* | = \begin{cases} \mu = \sigma: & -\ln 2 \\ \mu \geq 1: & -\frac{1}{\mu} \cos(\mu t^*) \end{cases}$$

stetig-integrabel. Daraus folgt:

$$(32 c) \quad h_{L_1}(\chi^*) = \int_{R_1(\chi^*)}^{R_2(\chi^*)} ds P_k(s, \chi^*) \cdot h_L(s, \chi^*)$$

3. Fall: $\chi^* > \chi \rightarrow \chi^* - \chi = |\chi^* - \chi|$

$$(32 d) \quad \sin(\mu\vartheta) \cdot f_{L_1}(s, \chi, \vartheta) = -2 \cdot \frac{r^2 \sin\vartheta \cdot \sin(\mu\vartheta)}{r^2 + s^2 - 2rs \cos\vartheta} + \frac{r^2 \sin\vartheta \cdot \sin(\mu\vartheta)}{r^2 + s^2 - 2rs \cos\vartheta} \cdot \left\{ 1 - \frac{k_1 \cdot |\chi^* - \chi|}{\sqrt{k_1^2 (\chi^* - \chi)^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos\vartheta}} \right\}$$

Der erste Anteil hierin ist mit (31a) ϑ -integrierbar und für alle s stetig darstellbar. Der zweite Anteil ist wie in (32a) stetig für alle s, ϑ und verschwindet speziell bei $s \rightarrow r, \vartheta \rightarrow \sigma$.

Endlich bleibt der Beitrag $h_{L_2}(x)$ zu untersuchen:

$$(33) \quad h_{L_2}(x) = \int_{R_1(x)}^{R_2(x)} ds P_k(s, x) \int_{\sigma}^{2\pi} d\vartheta \cos(\mu\vartheta) \cdot f_{L_2}(s, x, \vartheta)$$

$$f_{L_2}(s, x, \vartheta) = \frac{-k_1 \cos \vartheta}{\sqrt{k_1^2 (\chi^* - x)^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos \vartheta}}$$

Für $x \neq \chi^*$ ist $f_{L_2}(s, x, \vartheta)$ überall stetig. Zur Diskussion des ϑ -Integralen bei $x = \chi^*$ führen wir die Identität ein:

$$(33a) \quad I_{L_2}(s, \chi^*) = \int_{\sigma}^{2\pi} d\vartheta \frac{k_1 [\cos \vartheta \cdot \cos(\mu\vartheta) - 1]}{\sqrt{r^2 + s^2 - 2rs \cos \vartheta}}$$

$$+ \left\{ \int_{\sigma}^{2\pi} d\vartheta \frac{k_1}{\sqrt{r^2 + s^2 - 2rs \cos \vartheta}} + \frac{2k_1}{r} \ln \left| \frac{2 \cdot (s-r)}{R_2(\chi^*) - R_1(\chi^*)} \right| \right\} - \frac{2k_1}{r} \ln \left| \frac{2 \cdot (s-r)}{R_2(\chi^*) - R_1(\chi^*)} \right|$$

$$= I_1(s) + I_2(s) - \frac{2k_1}{r} \ln \left| \frac{2 \cdot (s-r)}{R_2(\chi^*) - R_1(\chi^*)} \right|$$

Der Beitrag $I_1(s)$ ist stetig für $s \neq r$. Für $s = r$ ist der ϑ -Integrand unbestimmt bei $\vartheta = 0, 2\pi$; mit den Anfangsgliedern der \cos -Reihe folgt aber:

$$(33b) \quad \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \left[\frac{k_1 (\cos \vartheta \cdot \cos(\mu\vartheta) - 1)}{\sqrt{2r^2 \cdot (1 - \cos \vartheta)}} \right] \approx \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{k_1 \cdot \left[1 - \frac{\vartheta^2}{2}\right] \cdot \left[1 - \frac{\mu^2 \vartheta^2}{2}\right] - 1}{r \sqrt{\vartheta^2}} = 0$$

Auch der Beitrag $I_2(s)$ ist stetig für $s \neq r$; um seine Stetigkeit auch bei $s = r$ zu beweisen, führen wir (vergl. Anhang 1.E) das darin auftretende Integral auf vollständige elliptische Normalintegrale 1. Gattung zurück:

$$(33c) \quad \mathcal{J} = \int_{\sigma}^{2\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{r^2 + s^2 - 2rs \cos \vartheta}} = \frac{4}{s+r} K\left(\sqrt{\frac{4rs}{(s+r)^2}}\right)$$

Für $s \rightarrow r$ geht das Argument der K -Funktion gegen 1; in der Umgebung von $s = r$ benutzen wir nach Jahnke-Emde [7, S. 73] die Potenzreihe:

$$(33d) \quad K(\tilde{k}) = \tilde{\mathcal{A}} + \frac{1}{4}(\tilde{\mathcal{A}} - 1) \cdot \tilde{k}^{12} + O(\tilde{\mathcal{A}} \cdot \tilde{k}^{14}) \quad \text{mit:} \quad \begin{cases} \tilde{k} = \sqrt{\frac{4rs}{(s+r)^2}}; & \tilde{k}^{12} = 1 - \tilde{k}^2 \\ \tilde{\mathcal{A}} = \ln \frac{4}{\tilde{k}} = \ln \frac{4 \cdot (s+r)}{|s-r|} \end{cases}$$

Daraus folgt der endliche Grenzwert bei $s = r$:

$$(33e) \quad \lim_{s \rightarrow r} I_2(s) = \lim_{s \rightarrow r} \left\{ \int_{\sigma}^{2\pi} d\vartheta \frac{k_1}{\sqrt{r^2 + s^2 - 2rs \cos \vartheta}} + \frac{2k_1}{r} \ln \left| \frac{2 \cdot (s-r)}{R_2(\chi^*) - R_1(\chi^*)} \right| \right\} = \frac{2k_1}{r} \ln \frac{16 \cdot r}{R_2(\chi^*) - R_1(\chi^*)}$$

Da endlich der letzte Beitrag in (33a) mit (7,32b) elementar integrierbar und stetig ist, sind insgesamt die Beiträge der freien Längswirbel mit überall-stetigen Integranden darstellbar.

II.5 Berechnung der Propellerkräfte und des Schubes

Wie von Isay [1, S. 7 ff.] erläutert, können die an einem dünnen Flügelprofil auftretenden Kräfte auch bei instationärer Zuströmung (unter Annahme ebener Strömung) in guter Näherung nach dem Satz von Kutta-Joukowski berechnet werden. Danach steht die auf das betrachtete Profil ($n = \sigma$) ausgeübte momentane Kraft senkrecht auf der dort herrschenden Geschwindigkeit w° und hat die Größe:

$$(34) \quad \left| K^{(P)}(r, \varphi_0) \right| = \rho \int_{x_v}^{x_H} dx \left| w^\circ(x, r, \varphi_0) \right| \cdot \gamma_p(x, r, \varphi_0) \approx \rho \cdot |w^\circ(\sigma, r, \varphi_0)| \cdot \Gamma_p(r, \varphi_0)$$

Mit den nach II.2 am Profil beitragenden Geschwindigkeiten erhalten wir daher die Kräfte in Axial- und Umfangs-Richtung:

$$(34a) \quad K_x^{(P)}(r, \varphi_0) = -\rho \cdot \left[\omega r + V_\sigma(\sigma, r, \varphi_0) + V_\gamma^\circ(\sigma, r, \varphi_0) + V_a(\sigma, r, \varphi_0) + V_L(\sigma, r, \varphi_0) \right] \cdot \Gamma_p(r, \varphi_0)$$

$$(34b) \quad K_\varphi^{(P)}(r, \varphi_0) = \rho \cdot \left[u_\sigma(\sigma, r, \varphi_0) + u_\gamma^\circ(\sigma, r, \varphi_0) + u_a(\sigma, r, \varphi_0) + u_L(\sigma, r, \varphi_0) \right] \cdot \Gamma_p(r, \varphi_0)$$

Der Stern hierin bedeutet, daß bei dem Beitrag der gebundenen Wirbel der Anteil des Flügels $n = \sigma$ selbst auszulassen ist. Zu u_σ, V_σ trägt die Anströmung von Schiff und Ruder her bei:

$$u_\sigma(\sigma, r, \varphi_0) = u_\sigma + u_N(\sigma, r, \varphi_0) + u_R(\sigma, r, \varphi_0)$$

$$V_\sigma(\sigma, r, \varphi_0) = V_N(\sigma, r, \varphi_0) + V_R(\sigma, r, \varphi_0)$$

Weil in (34) statt des eigentlich auftretenden Integrales über die Wirbeldichte $\gamma_p(x, r, \varphi_0)$ näherungsweise die Zirkulation $\Gamma_p(r, \varphi_0)$ eingesetzt wird, ist es konsequent und ausreichend, die induzierten Geschwindigkeiten nach der erweiterten Traglinientheorie von Zwick [3] in der Darstellung von Isay [1, S. 52] zu berechnen; dabei ist die Zirkulation aus der Tragflächen-theorie bekannt. Wir wollen die Grenzen des 1/4-Strahles, in dem der Stabwirbel lokalisiert ist, mit $R_{i\sigma} \leq s \leq R_{o\sigma}$ bezeichnen. Dann erhalten wir aus den Kräften für jede Stellung φ_0 Schub $S(\varphi_0)$ und Moment $M(\varphi_0)$ sowie deren Mittelwerte über einen Umlauf, und weiterhin den induzierten Wirkungsgrad $\eta_i(r)$:

$$(35a) \quad S(\varphi_0) = \sum_{n=\sigma}^{N-1} \int_{R_{i\sigma}}^{R_{o\sigma}} dr K_x^{(P)}(r, \varphi_0 + \frac{2\pi n}{N}); \quad \bar{S} = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma}^{2\pi} d\varphi_0 \cdot S(\varphi_0)$$

$$(35b) \quad M(\varphi_0) = \sum_{n=\sigma}^{N-1} \int_{R_{i\sigma}}^{R_{o\sigma}} r dr K_\varphi^{(P)}(r, \varphi_0 + \frac{2\pi n}{N}); \quad \bar{M} = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma}^{2\pi} d\varphi_0 \cdot M(\varphi_0)$$

$$(35) \quad \eta_i(r) = \left| \frac{\int_{\sigma}^{2\pi} d\varphi_0 u_\sigma(\sigma, r, \varphi_0) \cdot K_x^{(P)}(r, \varphi_0)}{\omega r \cdot \int_{\sigma}^{2\pi} d\varphi_0 K_\varphi^{(P)}(r, \varphi_0)} \right|$$

II.6 Beitrag der vom Propeller am Ruder induzierten Strömung

A) Darstellung der Geschwindigkeitsbeiträge:

Wegen des großen Rechenaufwandes, den die Auswertung der tragflächentheoretisch-dargestellten Propellergeschwindigkeiten (3-fach-Integrale) erfordern würde, wollen wir für die Propellerinduktion am Ruder die Formeln der erweiterten Traglinientheorie mit der aus der Tragflächentheorie erhaltenen Zirkulation benutzen. Diese Formeln sind von Isay [2] angegeben worden, wobei dort die 3/4-Linie des Ruders zur Erfüllung der Randbedingung nach der erweiterten Traglinientheorie bereits eingesetzt ist:

$$x = x_0 + \left(\frac{a_0}{2} + \varepsilon \right) \cdot \cos \delta$$

$$z = \left(\frac{a_0}{2} + \varepsilon \right) \cdot \sin \delta$$

Zu den Ruderbezeichnungen vergleiche Ruder-Tragflächentheorie (Kap. III).

Wir betrachten die Induktionsbeiträge in kartesischen Koordinaten, die dem Ruder angepaßt sind; zur Randbedingung trägt die flächenparallele y-Komponente nicht bei. Wenn man die bei den Quer- und Längswirbel-Beiträgen auftretenden ξ -Integrale nach Anhang 1.A elementar integriert, erhält man die Geschwindigkeiten in der Darstellung:

$$(37a) \quad u_p(x, y, z) = u_{\Gamma P} + u_{Q P} + u_{L P}$$

$$= \frac{N}{8\pi^2} \int_{R_{i0}}^{R_{a0}} ds \int_{\sigma}^{2\pi} d\vartheta \Gamma_p(s, \vartheta) \frac{z \cdot \cos \vartheta - y \cdot \sin \vartheta}{\sqrt{x^2 + (y - s \cos \vartheta)^2 + (z - s \sin \vartheta)^2}^{3/2}}$$

$$+ \frac{N}{8\pi^2 k_0} \int_{R_{i0}}^{R_{a0}} s ds \int_{\sigma}^{2\pi} d\vartheta \frac{\partial \Gamma_p(s, \vartheta)}{\partial s} \cdot \frac{y \cdot \cos \vartheta + z \cdot \sin \vartheta - s}{(y - s \cos \vartheta)^2 + (z - s \sin \vartheta)^2} \cdot \left\{ \dots \right\}$$

$$+ \frac{N}{8\pi^2 k_0} \int_{R_{i0}}^{R_{a0}} ds \int_{\sigma}^{2\pi} d\vartheta \frac{\partial \Gamma_p(s, \vartheta)}{\partial \vartheta} \cdot \frac{z \cos \vartheta - y \sin \vartheta}{(y - s \cos \vartheta)^2 + (z - s \sin \vartheta)^2} \cdot \left\{ \dots \right\}$$

$$(37b) \quad w_p(x, y, z) = w_{\Gamma P} + w_{Q P} + w_{L P}$$

$$= - \frac{N}{8\pi^2} \int_{R_{i0}}^{R_{a0}} ds \int_{\sigma}^{2\pi} d\vartheta \Gamma_p(s, \vartheta) \frac{x \cdot \cos \vartheta}{\sqrt{x^2 + (y - s \cos \vartheta)^2 + (z - s \sin \vartheta)^2}^{3/2}}$$

$$+ \frac{N}{8\pi^2 k_0} \int_{R_{i0}}^{R_{a0}} ds \int_{\sigma}^{2\pi} d\vartheta \frac{\partial \Gamma_p(s, \vartheta)}{\partial s} \cdot \left[\frac{s \cdot \sin \vartheta}{\sqrt{x^2 + (y - s \cos \vartheta)^2 + (z - s \sin \vartheta)^2}^{3/2}} + \frac{k_0 \cdot (s \cdot \cos \vartheta - y)}{(y - s \cos \vartheta)^2 + (z - s \sin \vartheta)^2} \cdot \left\{ \dots \right\} \right]$$

$$+ \frac{N}{8\pi^2 k_0} \int_{R_{i0}}^{R_{a0}} ds \int_{\sigma}^{2\pi} d\vartheta \frac{\partial \Gamma_p(s, \vartheta)}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\cos \vartheta}{\sqrt{x^2 + (y - s \cos \vartheta)^2 + (z - s \sin \vartheta)^2}^{3/2}}$$

mit: $\left\{ \dots \right\} = \left\{ 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y - s \cos \vartheta)^2 + (z - s \sin \vartheta)^2}} \right\}$

Da sich das Ruder in endlichem Abstand $x > 0$ hinter dem Propeller befindet, sind die Beiträge u_{QP}, w_{TP}, w_{LP} sowie der erste Anteil in $w_{QP}^{*)}$ überall stetig und in der angegebenen Form (37a-b) berechenbar. Für die übrigen Beiträge haben wir die Stellen $y = s \cos \vartheta, z = s \sin \vartheta$ gesondert zu betrachten; dieser Fall kann nur eintreten, wenn

(38) $y = r \cdot \cos \varphi; \quad z = r \cdot \sin \varphi \quad \text{mit: } R_{i0} \leq r \leq R_{a0}$

Daher sind diese Beiträge außerhalb des Propellerstrahles ebenfalls in der angegebenen Form (37a-b) stetig und deshalb numerisch auswertbar; innerhalb des Strahles (38) werden wir sie gesondert im folgenden untersuchen.

B) Diskussion der auftretenden Singularitäten:

Wir benutzen den Fourieransatz (15), den wir für die Propeller-Zirkulationsdichte gemacht haben, entsprechend für $\Gamma_p(s, \vartheta)$:

(39) $\Gamma_p(s, \vartheta) = \sum_{\mu=-M}^{+M} \Gamma_{\mu}^{(p)}(s) \cdot e^{i\mu\vartheta} = \Gamma_0^{(p)}(s) + 2 \operatorname{Re} \sum_{\mu=1}^M \Gamma_{\mu}^{(p)}(s) \cdot e^{i\mu\vartheta}$

Mit (38) und einer Verschiebung der ϑ -Integration um φ erhalten wir zunächst für u_{QP} :

$$u_{QP} = \frac{N}{8\pi^2 k_0} \int_{R_{i0}}^{R_{a0}} s ds \frac{d\Gamma_0^{(p)}(s)}{ds} \cdot K_{1,0}(s) + \frac{N}{4\pi^2 k_0} \operatorname{Re} \sum_{\mu=1}^M \int_{R_{i0}}^{R_{a0}} s ds \frac{d\Gamma_{\mu}^{(p)}(s)}{ds} K_{1,\mu}(s)$$

mit: $K_{1,\mu}(s) = \int_0^{2\pi} d\vartheta e^{i\mu\vartheta} \frac{r \cos(\varphi - \vartheta) - s}{r^2 + s^2 - 2rs \cos(\varphi - \vartheta)} \left\{ 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos(\varphi - \vartheta)}} \right\}$
 $= e^{i\mu\varphi} \int_0^{2\pi} d\vartheta e^{i\mu\vartheta} \frac{r \cos \vartheta - s}{r^2 + s^2 - 2rs \cos \vartheta} \left\{ 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos \vartheta}} \right\}$

Im Anhang 1.F wird gezeigt, daß das ϑ -Integral nach der Residuenmethode ausgewertet werden kann; weiter wird dort der erhaltene Ausdruck durch partielle Integration so umgeformt, daß die s -Integranden überall stetig sind. Man erhält:

(40) $u_{QP} = \frac{N}{8\pi^2 k_0} \left\{ 2\tilde{K}_{1,0} + \int_{R_{i0}}^{R_{a0}} s ds \frac{d\Gamma_0^{(p)}(s)}{ds} K_{12,0}(s) \right\} + \frac{N}{4\pi^2 k_0} \operatorname{Re} \sum_{\mu=1}^M \left\{ 2\tilde{K}_{1,\mu} + \int_{R_{i0}}^{R_{a0}} s ds \frac{d\Gamma_{\mu}^{(p)}(s)}{ds} K_{12,\mu}(s) \right\}$
 mit: $\tilde{K}_{1,\mu} = \pi \cdot e^{i\mu\varphi} \left[2\Gamma_{\mu}^{(p)}(r) - \mu \int_{R_{i0}}^{R_{a0}} \frac{ds}{s} \Gamma_{\mu}^{(p)}(s) \cdot \begin{cases} s < r: \left(\frac{s}{r}\right)^{\mu} \\ s > r: \left(\frac{r}{s}\right)^{\mu} \end{cases} \right]$

*) den zu untersuchenden 2. Anteil wollen wir mit \tilde{w}_{QP} bezeichnen.

$$K_{12,\mu}(s) = e^{i\mu\varphi} \int_0^{2\pi} d\vartheta \frac{r \cos \vartheta - s}{r^2 + s^2 - 2rs \cos \vartheta} \cdot \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos \vartheta}} - 1 \right] \cdot e^{i\mu\vartheta}$$

speziell: $K_{12,\mu}(r) = -\frac{e^{i\mu\varphi}}{2r} \int_0^{2\pi} d\vartheta e^{i\mu\vartheta} \cdot \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + 2r^2(1 - \cos \vartheta)}} - 1 \right]$

Weiterhin betrachten wir den Anteil u_{LP} :

$$u_{LP} = \frac{N}{4\pi^2 k_0} \operatorname{Re} \sum_{\mu=1}^M i\mu \int_{R_{i0}}^{R_{a0}} ds \Gamma_{\mu}^{(P)}(s) K_{2\mu}(s)$$

mit: $K_{2\mu}(s) = e^{i\mu\varphi} \int_0^{2\pi} d\vartheta e^{i\mu\vartheta} \frac{-r \sin \vartheta}{r^2 + s^2 - 2rs \cos \vartheta} \cdot \left\{ 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos \vartheta}} \right\}$

Die Auswertung dieses Anteils nach der Residuenmethode wird in Anhang 1.G durchgeführt, und man erhält den in s stetigen Beitrag:

(41)
$$u_{LP} = \frac{N}{4\pi^2 k_0} \operatorname{Re} \sum_{\mu=1}^M i\mu \int_{R_{i0}}^{R_{a0}} ds \Gamma_{\mu}^{(P)}(s) \cdot \left[K_{22\mu}(s) - 2 \frac{\pi i}{s} e^{i\mu\varphi} \cdot \left\{ \begin{array}{l} s < r: \left(\frac{s}{r}\right)^{\mu} \\ s > r: \left(\frac{r}{s}\right)^{\mu} \end{array} \right\} \right]$$

mit: $K_{22\mu}(s) = e^{i\mu\varphi} \int_0^{2\pi} d\vartheta e^{i\mu\vartheta} \cdot \left\{ \begin{array}{l} s = r; \vartheta = 0, 2\pi: 0 \\ \text{sonst: } \frac{-r \sin \vartheta}{r^2 + s^2 - 2rs \cos \vartheta} \cdot \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos \vartheta}} - 1 \right] \end{array} \right\}$

Schließlich haben wir noch den Anteil \tilde{W}_{QP} zu untersuchen:

$$\tilde{W}_{QP} = \frac{N}{8\pi^2 k_0} \int_{R_{i0}}^{R_{a0}} ds \frac{d\Gamma_{10}^{(P)}(s)}{ds} \cdot L_{10}(s) + \frac{N}{4\pi^2 k_0} \operatorname{Re} \sum_{\mu=1}^M \int_{R_{i0}}^{R_{a0}} ds \frac{d\Gamma_{\mu}^{(P)}(s)}{ds} \cdot L_{1\mu}(s)$$

mit: $L_{1\mu}(s) = e^{i\mu\varphi} \int_0^{2\pi} d\vartheta e^{i\mu\vartheta} \cdot \frac{k_0 \cdot (s \cos(\varphi + \vartheta) - r \cos \varphi)}{r^2 + s^2 - 2rs \cos \vartheta} \cdot \left\{ 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos \vartheta}} \right\}$

Die Auswertung dieses Beitrages nach der Residuenmethode und eine Umformung durch partielle Integration werden in Anhang 1.H ausgeführt. Man erhält:

(42)
$$\tilde{W}_{QP} = \frac{N}{8\pi^2 k_0} \left[2\tilde{L}_{10} + \int_{R_{i0}}^{R_{a0}} ds \frac{d\Gamma_{10}^{(P)}(s)}{ds} L_{12,0}(s) \right] + \frac{N}{4\pi^2 k_0} \operatorname{Re} \sum_{\mu=1}^M \left[2\tilde{L}_{1\mu}(s) + \int_{R_{i0}}^{R_{a0}} ds \frac{d\Gamma_{\mu}^{(P)}(s)}{ds} \cdot L_{12\mu}(s) \right]$$

mit: $\tilde{L}_{1\mu}(s) = \frac{\pi k_0}{r} e^{i\mu\varphi} \cdot \left[-2 \cos \varphi \cdot \Gamma_{\mu}^{(P)}(s) + \mu \int_{R_{i0}}^{R_{a0}} \frac{ds}{s} \Gamma_{\mu}^{(P)}(s) \cdot \left\{ \begin{array}{l} s < r: \left(\frac{s}{r}\right)^{\mu} \cdot e^{i\varphi} \\ s > r: \left(\frac{r}{s}\right)^{\mu} \cdot e^{-i\varphi} \end{array} \right\} \right]$

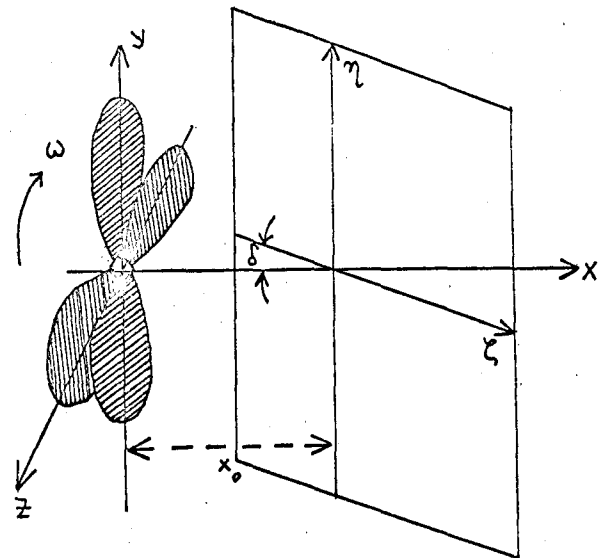
$$L_{12\mu}(s) = e^{i\mu\varphi} \int_0^{2\pi} d\vartheta e^{i\mu\vartheta} \cdot \left\{ \begin{array}{l} s = r; \vartheta = 0, 2\pi: 0 \\ \text{sonst: } \frac{k_0 \cdot (s \cos(\varphi + \vartheta) - r \cos \varphi)}{r^2 + s^2 - 2rs \cos \vartheta} \cdot \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos \vartheta}} - 1 \right] \end{array} \right\}$$

Der Integrand in $\tilde{L}_{1\mu}$ besitzt eine Sprungstelle bei $s=r$; wir wollen dort den Mittelwert aus rechtem und linkem Limes bilden. Damit haben wir gezeigt, daß die Geschwindigkeiten durch geeignete Umformungen überall-stetig dargestellt werden können.

III. Tragflächentheorie für ein dünnes Ruder
beliebig-vorgegebener Form

Wir beschreiben die Strömung an einem als dünn angenommenen Ruder zweckmäßig in dem in Kap. II betrachteten propellerfesten kartesischen Koordinatensystem (x, y, z) , siehe Figur 2. Dabei sei die Ruder-Drehachse parallel zur y -Achse und liege im Abstand x_0 auf der x -Achse hinter dem Propeller. Das Ruder habe zur x -Richtung den Anstellwinkel δ ; wir wollen die bezüglich Anstellung nichtlinearisierte Theorie behandeln.

Figur 2



Auf dem Ruder selbst führen wir (winkelunabhängige) ebene kartesische Koordinaten

(ζ, η) ein; zwischen den beiden Koordinatensystemen besteht der Zusammenhang:

$$(43a) \quad x = x_0 + \zeta \cdot \cos \delta ; \quad y = \eta ; \quad z = \zeta \cdot \sin \delta$$

Die Ruderfläche soll nicht unbedingt eine rechteckige Berandung haben; wir beschreiben sie durch:

$$(43b) \quad -a_0 \leq \zeta \leq a_1 ; \quad -b_0(\zeta) \leq \eta \leq b_1(\zeta)$$

Besonders einfach ist allerdings ein Rechteck-Ruder zu beschreiben: $b_0(\zeta) = b_0$; $b_1(\zeta) = b_1$. Zur Kennzeichnung des Ruders geben wir sein Seitenverhältnis $\lambda = \frac{b_0 + b_1}{a_0 + a_1}$ und seine Exzentrizität ε an, welche den Abstand Drehpunkt-Mittelpunkt beschreibt.

Wie schon beim Propeller denken wir uns die Profilsehne des Ruders mit gebundenen Elementarwirbeln $\gamma_r(\zeta, \eta)$ belegt; diese und die bei der Fortbewegung induzierten freien Wirbel erzeugen ein Geschwindigkeitsfeld, daß Isay [2] für die erweiterte

Traglinientheorie angegeben hat. Wenn wir uns die tragende Fläche erzeugt denken durch Superposition elementarer Stabwirbel

$$(44) \quad \Gamma_R(\eta) = \int_{-a_0}^{a_1} d\zeta \gamma_R(\zeta, \eta)$$

so erhalten wir in Verallgemeinerung von [2] die Geschwindigkeitsdarstellung in der Tragflächentheorie:

$$(45a) \quad u_R(x, y, z) = \frac{1}{4\pi R^3} \int_{-a_0}^{a_1} d\zeta \int_{-b_0(\zeta)}^{b_1(\zeta)} d\eta \gamma_R(\zeta, \eta) \frac{z - \zeta \cdot \sin \delta}{R^3}$$

$$(45b) \quad v_R(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_{-a_0}^{a_1} d\zeta \int_{-b_0(\zeta)}^{b_1(\zeta)} d\eta \frac{\partial \gamma_R(\zeta, \eta)}{\partial \eta} \frac{z - \zeta \cdot \sin \delta}{(y - \eta)^2 + (z - \zeta \cdot \sin \delta)^2} \left[1 + \frac{x - x_0 - \zeta \cdot \cos \delta}{R} \right]$$

$$(45c) \quad w_R(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-a_0}^{a_1} d\zeta \int_{-b_0(\zeta)}^{b_1(\zeta)} d\eta \gamma_R(\zeta, \eta) \frac{x - x_0 - \zeta \cdot \cos \delta}{R^3} - \frac{1}{4\pi} \int_{-a_0}^{a_1} d\zeta \int_{-b_0(\zeta)}^{b_1(\zeta)} d\eta \frac{\partial \gamma_R(\zeta, \eta)}{\partial \eta} \frac{y - \eta}{(y - \eta)^2 + (z - \zeta \cdot \sin \delta)^2} \left[1 + \frac{x - x_0 - \zeta \cdot \cos \delta}{R} \right]$$

$$\text{mit: } R = \sqrt{(x - x_0 - \zeta \cdot \cos \delta)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta \cdot \sin \delta)^2}$$

Das Strömungsfeld, das in einem Aufpunkt

$$(46) \quad \mathcal{P}_R = (x_R, y_R, z_R) = (x_0 + \zeta_R \cdot \cos \delta, \eta_R, \zeta_R \cdot \sin \delta)$$

auf dem Ruder wirksam ist, setzt sich aus den - als bekannt angenommenen - Beiträgen von Schiffs-Nachstrom und Propeller-Induktion sowie dem Ruderanteil selbst zusammen. Dann ist in allen Punkten (46) die Strömungs-Randbedingung zu erfüllen:

$$(47) \quad \tan \delta = \frac{w_N(\mathcal{P}_R) + w_P(\mathcal{P}_R) + w_R(\mathcal{P}_R)}{u_0 + u_N(\mathcal{P}_R) + u_P(\mathcal{P}_R) + u_R(\mathcal{P}_R)}$$

Diese Randbedingung liefert mit (45a-c) die Integralgleichung für die Zirkulationsdichte $\gamma_R(\zeta, \eta)$:

$$(48) \quad \begin{aligned} & [u_0 + u_N(\mathcal{P}_R) + u_P(\mathcal{P}_R)] \cdot \tan \delta - w_N(\mathcal{P}_R) - w_P(\mathcal{P}_R) = w_R(\mathcal{P}_R) - \tan \delta \cdot u_R(\mathcal{P}_R) \\ & = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\cos \delta} \int_{-a_0}^{a_1} d\zeta \int_{-b_0(\zeta)}^{b_1(\zeta)} d\eta \gamma_R(\zeta, \eta) \frac{\zeta_R - \zeta}{R^3} \\ & \quad - \frac{1}{4\pi} \int_{-a_0}^{a_1} d\zeta \int_{-b_0(\zeta)}^{b_1(\zeta)} d\eta \frac{\partial \gamma_R(\zeta, \eta)}{\partial \eta} \frac{y_R - \eta}{(y_R - \eta)^2 + (\zeta_R - \zeta)^2 \cdot \sin^2 \delta} \left[1 + \frac{(\zeta_R - \zeta) \cdot \cos \delta}{R} \right] \end{aligned}$$

$$\text{mit: } R = \sqrt{(y_R - \eta)^2 + (\zeta_R - \zeta)^2}$$

III.1 Lösungsansätze und Reduktion der Integralgleichung auf ein algebraisches Gleichungssystem

Wie auf dem Propeller erweist es sich auch hier als zweckmäßig, auf der tragenden Fläche zu trigonometrischen Variablen überzugehen:

$$(49) \quad \begin{aligned} \zeta &= \frac{a_1 - a_0}{2} - \frac{a_1 + a_0}{2} \cdot \cos \tau & : -a_0 \leq \zeta \leq a_1 & \longleftrightarrow \sigma \leq \tau \leq \pi \\ \eta &= \frac{b_1(\zeta) - b_0(\zeta)}{2} - \frac{b_1(\zeta) + b_0(\zeta)}{2} \cdot \cos t & : -b_0(\zeta) \leq \eta \leq b_1(\zeta) & \longleftrightarrow \sigma \leq t \leq \pi \end{aligned}$$

Entsprechend sollen auch die Ruder-Aufpunkte durch ihre Argumente τ_R, t_R gemäß Transformation (49) dargestellt werden. Damit erhält man die Integralgleichung (48) in der Form:

$$(50) \quad \left[u_0 + u_N(\varphi_R) + u_P(\varphi_R) \right] \cdot 4q\delta - w_N(\varphi_R) - w_P(\varphi_R) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \left[\frac{I_G}{\cos \delta} + I_{F,\delta} \right]$$

$$(50a) \quad \text{mit: } I_G = \frac{a_1 + a_0}{2} \int_{\sigma}^{\pi} d\tau \cdot \sin \tau \cdot \frac{b_1(\tau) + b_0(\tau)}{2} \int_{\sigma}^{\pi} dt \cdot \sin t \cdot \gamma_R(t, \tau) \cdot f_G(\zeta(\tau), \eta(t))$$

$$(50b) \quad I_{F,\delta} = \frac{a_1 + a_0}{2} \int_{\sigma}^{\pi} d\tau \cdot \sin \tau \int_{\sigma}^{\pi} dt \cdot \frac{\partial \gamma_R(t, \tau)}{\partial t} \cdot f_{F,\delta}(\zeta(\tau), \eta(t))$$

$$(50c) \quad f_G(\zeta, \eta) = \frac{\zeta_R - \zeta}{\sqrt{(\zeta_R - \eta)^2 + (\zeta_R - \zeta)^2}}$$

$$(50d) \quad f_{F,\delta}(\zeta, \eta) = \frac{\zeta_R - \eta}{(\zeta_R - \eta)^2 + (\zeta_R - \zeta)^2 \sin^2 \delta} \left\{ 1 + \frac{(\zeta_R - \zeta) \cdot \cos \delta}{\sqrt{(\zeta_R - \eta)^2 + (\zeta_R - \zeta)^2}} \right\}$$

Wir machen nun für die Ruder-Zirkulationsdichte einen Ansatz, ähnlich wie beim Propeller:

$$(51) \quad \gamma_R(t, \tau) = u_0 \cdot b \sum_{\ell=1}^L \sum_{k=1}^K B_{\ell k} \cdot Q_{\ell}(\tau) \cdot P_k(t)$$

$$\text{mit: } \begin{aligned} \sin \tau \cdot Q_{\ell}(\tau) &= \cos(\ell \tau) - (-1)^{\ell} \\ P_k(t) &= \sin(k \cdot t) \end{aligned} \quad \text{und: } b = \frac{b_1 + b_0}{2}$$

Damit geht die Integralgleichung (50) über in ein algebraisches Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten $B_{\ell k}$:

$$(52) \quad \begin{aligned} \left[u_0 + u_N(\varphi_R) + u_P(\varphi_R) \right] \cdot 4q\delta - w_N(\varphi_R) - w_P(\varphi_R) \\ = -\frac{u_0 \cdot b}{4\pi} \sum_{\ell=1}^L \sum_{k=1}^K B_{\ell k} \cdot \left[\frac{I_{\ell k}^{(G)}(\varphi_R)}{\cos \delta} + I_{\ell k}^{(F,\delta)}(\varphi_R) \right] \end{aligned}$$

$$(52a) \quad \text{mit: } I_{\ell k}^{(G)}(\varphi_R) = \frac{a_1 + a_0}{2} \int_{\sigma}^{\pi} d\tau \cdot \sin \tau \cdot Q_{\ell}(\tau) \cdot \frac{b_1(\tau) + b_0(\tau)}{2} \int_{\sigma}^{\pi} dt \cdot \sin t \cdot P_k(t) \cdot f_G(\zeta(\tau), \eta(t))$$

$$(52b) \quad I_{\ell k}^{(F,\delta)}(\varphi_R) = \frac{a_1 + a_0}{2} \int_{\sigma}^{\pi} d\tau \cdot \sin \tau \cdot Q_{\ell}(\tau) \int_{\sigma}^{\pi} dt \cdot \frac{dP_k(t)}{dt} \cdot f_{F,\delta}(\zeta(\tau), \eta(t))$$

III.2 Diskussion der Matrixelemente

Wir müssen nun noch beweisen, daß die Integranden der zum Gleichungssystem (52) beitragenden Matrixelemente (52a-b) überall-stetig sind oder aber durch Abspaltung integrierbarer Singularitäten stetig definiert werden können. Dazu ist es zweckmäßig, die Darstellung in (ζ, η) -Koordinaten zu benutzen:

$$(53) \quad I_{lk}^{(G)}(\zeta_R) = \int_{-a_0}^{a_1} d\zeta Q_l(\zeta) \int_{-b_0(\zeta)}^{b_1(\zeta)} d\eta P_k(\zeta, \eta) \cdot f_G(\zeta, \eta)$$

$$(54) \quad I_{lk}^{(F, \delta)}(\zeta_R) = \int_{-a_0}^{a_1} d\zeta Q_l(\zeta) \int_{-b_0(\zeta)}^{b_1(\zeta)} d\eta \frac{\partial P_k(\zeta, \eta)}{\partial \eta} \cdot f_{F, \delta}(\zeta, \eta)$$

Als Nachteil des eingeschlagenen Weges erweist sich, daß bei $I_{lk}^{(F, \delta)}$ der Fall $\delta=0$ nicht stetig aus der Behandlung von $\delta \neq 0$ hervorgeht. Ein Verfahren, bei dem der Fall $\delta \rightarrow 0$ stetig erzeugt werden kann, erweist sich als sehr umständlich.

A) Anteil der gebundenen Wirbel:

Wir gehen hier ähnlich vor wie beim Anteil der gebundenen Propellerwirbel; dabei soll die Funktion $P_k(\zeta, \eta)$, die wie die Zirkulationsdichte nur auf dem Ruder definiert ist, außerhalb der tragenden Fläche verschwinden:

$$(55) \quad P_k(\zeta, \eta) = 0 \quad \text{für: } \eta \leq -b_0(\zeta) \text{ und } \eta \geq b_1(\zeta)$$

Die Funktion $f_G(\zeta, \eta)$ ist mit (1A.4), siehe Anhang 1.A, elementar η -integrierbar:

$$\int_{-b_0(\zeta)}^{b_1(\zeta)} d\eta \frac{\zeta_R - \zeta}{\sqrt{(y_R - \eta)^2 + (\zeta_R - \zeta)^2}} = \frac{F_G(\zeta)}{\zeta_R - \zeta}$$

$$\text{mit: } F_G(\zeta) = \frac{y_R + b_0(\zeta)}{\sqrt{(y_R + b_0(\zeta))^2 + (\zeta_R - \zeta)^2}} - \frac{y_R - b_1(\zeta)}{\sqrt{(y_R - b_1(\zeta))^2 + (\zeta_R - \zeta)^2}}$$

Damit können wir das Integral (53) umformen:

$$(56) \quad I_{lk}^{(G)} = \int_{-a_0}^{a_1} d\zeta Q_l(\zeta) \int_{-b_0(\zeta)}^{b_1(\zeta)} d\eta [P_k(\zeta, \eta) - P_k(\zeta, y_R)] \cdot f_G(\zeta, \eta) + \int_{-a_0}^{a_1} d\zeta Q_l(\zeta) \cdot P_k(\zeta, y_R) \cdot \frac{F_G(\zeta)}{\zeta_R - \zeta}$$

Die hierin auftretenden Integranden sind überall stetig. Insbesondere verschwindet der erste Integrand bei $\zeta = \zeta_R, \eta = y_R$, wie eine Taylorentwicklung von $P_k(\zeta, \eta) - P_k(\zeta, y_R)$ in der Umgebung dieser Stelle zeigt:

$$\lim_{\eta \rightarrow y_R} \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_R} \{ [P_k(\zeta, \eta) - P_k(\zeta, y_R)] \cdot f_G(\zeta, \eta) \}$$

$$\cong \lim_{\eta \rightarrow y_R} \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_R} \left\{ \frac{\zeta_R - \zeta}{\sqrt{(\zeta_R - \zeta)^2 + (y_R - \eta)^2}} \left[(\eta - y_R) \cdot \frac{\partial P_k(\zeta, y_R)}{\partial \eta} + \dots \right] \right\} = 0$$

Der zweite Integralbeitrag in (56) ist nach trigonometrischer Transformation (49) mit der Glauert-Formel (25) elementar integrierbar, wenn man das stetige Produkt $P_k(\zeta, y_R) \cdot F_G(\zeta)$ in eine Kosinus-Reihe entwickelt.

B) Beitrag der freien Wirbel:

Wir betrachten zunächst den Beitrag für $\delta = 0$ und untersuchen das innere Integral für feste ζ :

$$(57) \quad \mathcal{I}_0(\zeta) = \int_{-b_0(\zeta)}^{b_1(\zeta)} d\eta \frac{\partial P_k(\zeta, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{1}{y_R - \eta} \cdot \left\{ 1 + \frac{\zeta_R - \zeta}{\sqrt{(y_R - \eta)^2 + (\zeta_R - \zeta)^2}} \right\}$$

$$= \int_{-b_0(\zeta)}^{b_1(\zeta)} d\eta \frac{\partial P_k(\zeta, \eta)}{\partial \eta} \cdot f_{F,0}(\zeta, \eta)$$

Für $\zeta > \zeta_R$ ist $f_{F,0}(\zeta, \eta)$ stetig für alle η ; insbesondere folgt mit einer Reihenentwicklung für $|y_R - \eta| \ll |\zeta_R - \zeta|$:

$$(57a) \quad \lim_{\eta \rightarrow y_R} f_{F,0}(\zeta > \zeta_R, \eta) = \lim_{\eta \rightarrow y_R} \frac{1}{y_R - \eta} \left\{ 1 - \frac{|\zeta_R - \zeta|}{\sqrt{(y_R - \eta)^2 + (\zeta_R - \zeta)^2}} \right\}$$

$$\cong \lim_{\eta \rightarrow y_R} \frac{1}{y_R - \eta} \left\{ \frac{1}{2} \frac{(y_R - \eta)^2}{(\zeta_R - \zeta)^2} + O\left(\frac{(y_R - \eta)^4}{(\zeta_R - \zeta)^4}\right) \right\} = 0$$

Für $\zeta = \zeta_R$ gilt:

$$(57b) \quad f_{F,0}(\zeta_R, y) = \frac{1}{y_R - \eta}$$

Hier können wir das η -Integral nach trigonometrischer Transformation (49) als Glauert-Integral (25) auswerten.

Für $\zeta < \zeta_R$ formen wir $f_{F,0}(\zeta, \eta)$ um:

$$(57c) \quad f_{F,0}(\zeta, \eta) = \frac{2}{y_R - \eta} - \frac{1}{y_R - \eta} \cdot \left\{ 1 - \frac{|\zeta_R - \zeta|}{\sqrt{(y_R - \eta)^2 + (\zeta_R - \zeta)^2}} \right\}$$

Hierin ist der zweite Anteil überall stetig und verschwindet insbesondere bei $\eta = y_R$ entsprechend (57a). Der erste Anteil kann auf ein Glauert-Integral zurückgeführt werden, wobei zu beachten ist, daß $y_R(\zeta_r)$ und $\eta(\zeta)$ auf verschiedenen Strahlen mit eventuell verschiedenen Integrationsgrenzen liegen: für nicht-rechteckige Berandung tritt der Fall $\eta = y_R$ u.U. nicht auf.

Weiterhin haben wir den Fall $\delta \neq \sigma$ zu untersuchen:

$$(58a) \quad \begin{aligned} \mathcal{F}_\delta(\zeta) &= \int_{-b_0(\zeta)}^{b_1(\zeta)} d\eta \frac{\partial P_k(\zeta, \eta)}{\partial \eta} \frac{y_R - \eta}{(y_R - \eta)^2 + (\zeta_r - \zeta)^2 \sin^2 \delta} \cdot \left\{ 1 + \frac{(\zeta_r - \zeta) \cos \delta}{\sqrt{(y_R - \eta)^2 + (\zeta_r - \zeta)^2}} \right\} \\ &= \int_{-b_0(\zeta)}^{b_1(\zeta)} d\eta \frac{\partial P_k(\zeta, \eta)}{\partial \eta} \cdot f_{F,\delta}(\zeta, \eta) \end{aligned}$$

Für $\zeta \neq \zeta_r$ ist der η -Integrand überall stetig. Für $\zeta = \zeta_r$ gewinnen wir den einfachen Beitrag:

$$(58b) \quad \mathcal{F}_\delta(\zeta_r) = \int_{-b_0(\zeta_r)}^{b_1(\zeta_r)} d\eta \frac{\partial P_k(\zeta_r, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{1}{y_R - \eta}$$

der als Glauert-Integral elementar ausgewertet werden kann.

Es zeigt sich, daß der Beitrag $\delta = \sigma$ formelmäßig größeren Aufwand erfordert als derjenige für $\delta \neq \sigma$. Dies erklärt sich physikalisch dadurch, daß vor dem Aufpunkt abgelöste freie Wirbel, wenn sie den Aufpunkt treffen ($\delta = \sigma$), in diesem einen Pol-Beitrag zur Integration liefern (Glauert-Integral).

Daher kann bei der gewählten Integrations-Reihenfolge der Fall $\delta = \sigma$ nicht stetig aus $\delta \rightarrow \sigma$ dargestellt werden.

III.3 Berechnung der am Ruder auftretenden Kräfte

Wie beim Propeller wollen wir uns auch beim Ruder auf die Formeln der erweiterten Traglinientheorie beschränken, die von Isay [2] angegeben worden sind.

Die am Ruder angreifenden Kräfte erhalten wir nach dem Satz von Kutta-Joukowski:

$$(59) \quad \begin{aligned} K_x^{(R)}(y) &= -\rho \cdot [w_N(y) + w_P(y) + w_{Rf}(y)] \cdot \Gamma_R(y) \\ K_z^{(R)}(y) &= \rho \cdot [u_0 + u_N(y) + u_P(y)] \cdot \Gamma_R(y) \end{aligned}$$

Hierbei sind die Beiträge von Schiffs-Nachstrom und Propeller-Induktion als bekannt vorausgesetzt. Die Ruder-Zirkulation $\Gamma_R(y)$ ist mit (44) aus der Tragflächentheorie bekannt. Die freien Ruderwirbel $w_{Rf}(y)$ kann man für $\varepsilon \cong \frac{a}{2}$ näherungsweise darstellen:

$$(60) \quad w_{Rf}(y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-B_0}^{B_1} d\eta \frac{d\Gamma_R(\eta)}{d\eta} \frac{1}{y-\eta}$$

Darin sind als Integrationsgrenzen die Grenzen des 1/4-Strahles, in dem der Stabwirbel lokalisiert ist, einzusetzen.

Aus der Bedingung, daß das Drehmoment um den Drehpunkt verschwindet:

$$\sigma = M = -\frac{\rho}{\cos \delta} \int_{x_0 - (a-\varepsilon) \cdot \cos \delta}^{x_0 + (a+\varepsilon) \cdot \cos \delta} d\xi \gamma_R'(\xi, y) \cdot [\xi - x_0] \cdot [u(\xi, y, \text{tg} \delta \cdot (\xi - x_0)) + \text{tg} \delta \cdot w(\xi, y, \text{tg} \delta \cdot (\xi - x_0))]$$

erhalten wir mit dem Ansatz (51) in der Näherung $u(\tau, y) \cong u(y)$, $w \cdot \text{tg} \delta \ll u$ (kleiner Ruderwinkel) für die Exzentrizität:

$$(61) \quad \varepsilon(y(t)) = \frac{a}{2} \frac{\sum_{k=1}^K B_{1k} \cdot \sin(k \cdot t)}{\sum_{l=1}^L (-1)^{l-1} \cdot B_{2l} \cdot \sin(k \cdot t)}$$

Diese Formel unterscheidet sich von [2, (24)] wegen des veränderten $\gamma_R(t, \tau)$ -Ansatzes. Sie gilt speziell für rechteckig-berandete Ruder, für die die τ -Integration elementar ausgewertet werden kann.

III.4 Induktion eines dünnen Ruders am Propeller

In der Randbedingung (11) am Propeller wurden die Axial- und Umfangs-Komponente des vom Ruder induzierten Beitrages bereits berücksichtigt. Wie bei der Wirkung des Propellers am Ruder (II.6) werden auch im folgenden die Formeln der erweiterten Traglinientheorie benutzt, wie sie von Isay [2] angegeben worden sind.

Die Strömung am Propeller wird zweckmäßig in Zylinderkoordinaten beschrieben. Relativ zum Ruder wird der Propeller dargestellt durch Koordinaten (x_p, r_p, φ_p) mit:

$$\begin{aligned} x_p &= k_1 \cdot \chi_p & \text{mit: } \chi_v \leq \chi_p \leq \chi_H \\ y_p &= r_p \cdot \cos \varphi_p & \varphi_p = \varphi_0 + \chi_p \\ z_p &= r_p \cdot \sin \varphi_p \end{aligned}$$

Hierin gibt φ_0 die momentane Stellung des Propellers relativ zur ruderfesten y -Richtung an, während χ_p die Lage auf dem Propellerflügel beschreibt.

Bei der Aufstellung der Randbedingung (11) am Propeller, haben wir angenommen, daß sich die Ruder-Axial- und Umfangs-Komponente durch Koeffizienten einer Fourier-Analyse nach dem Umfangswinkel φ_0 darstellen lassen:

$$(62) \quad \begin{aligned} u_R &= \sum_{\mu=-M}^{+M} u_{R,\mu} \cdot e^{i\mu\varphi_0} = u_{R,\sigma} + 2 \cdot \operatorname{Re} \sum_{\mu=1}^M u_{R,\mu} \cdot e^{i\mu\varphi_0} \\ V_R &= \sum_{\mu=-M}^{+M} V_{R,\mu} \cdot e^{i\mu\varphi_0} = V_{R,\sigma} + 2 \cdot \operatorname{Re} \sum_{\mu=1}^M V_{R,\mu} \cdot e^{i\mu\varphi_0} \end{aligned}$$

Für die Stellung φ_0 ergibt sich die Umfangskomponente aus den kartesischen Anteilen:

$$V_R = -v_R \cdot \sin \varphi_p + w_R \cdot \cos \varphi_p$$

Damit erhalten wir aus [2, (1)] die traglinientheoretische Darstellung der beitragenden Geschwindigkeiten, wobei die Grenzen des 1/4-Strahles $B_0 = b_0(\zeta_{1/4})$; $B_1 = b_1(\zeta_{1/4})$ einzusetzen sind:

$$(63a) \quad u_R = \frac{1}{4\pi} \int_{-B_0}^{B_1} d\eta \Gamma_R(\eta) \frac{r_p \cdot \sin \varphi_p + \left(\frac{a}{2} - \varepsilon\right) \cdot \sin \delta}{R_p^3}$$

$$(63 b) \quad V_R = -\frac{\sin \varphi_p}{4\pi} \int_{-B_0}^{B_1} d\eta \frac{d\Gamma_R(\eta)}{d\eta} \frac{r_p \cdot \sin \varphi_p + \left(\frac{a}{2} - \varepsilon\right) \cdot \sin \delta}{[r_p \cdot \cos \varphi_p - \eta]^2 + [r_p \cdot \sin \varphi_p + \left(\frac{a}{2} - \varepsilon\right) \cdot \sin \delta]^2} \left\{ \dots \right\}$$

$$-\frac{\cos \varphi_p}{4\pi} \int_{-B_0}^{B_1} d\eta \Gamma_R(\eta) \frac{k_1 x_p - x_0 + \left(\frac{a}{2} - \varepsilon\right) \cdot \cos \delta}{R_p^3}$$

$$-\frac{\cos \varphi_p}{4\pi} \int_{-B_0}^{B_1} d\eta \frac{d\Gamma_R(\eta)}{d\eta} \frac{r_p \cdot \cos \varphi_p - \eta}{[r_p \cdot \cos \varphi_p - \eta]^2 + [r_p \cdot \sin \varphi_p + \left(\frac{a}{2} - \varepsilon\right) \cdot \sin \delta]^2} \left\{ \dots \right\}$$

mit:

$$R_p = \sqrt{[k_1 x_p - x_0 - \left(\frac{a}{2} - \varepsilon\right) \cdot \cos \delta]^2 + [r_p \cdot \cos \varphi_p - \eta]^2 + [r_p \cdot \sin \varphi_p + \left(\frac{a}{2} - \varepsilon\right) \cdot \sin \delta]^2}$$

$$\left\{ \dots \right\} = \left\{ 1 + \frac{k_1 x_p - x_0 + \left(\frac{a}{2} - \varepsilon\right) \cdot \cos \delta}{R_p} \right\}$$

Wir wollen die angegebenen Formeln dadurch vereinfachen, daß wir die Steigung k_1 des Propellers nicht berücksichtigen; eigentlich müßte man nämlich die Fourieranalyse für jeden Strahl x_p auf dem Propeller durchführen. Die Vereinfachung $x_p = \sigma$ erscheint sinnvoll, da der Nachstrom am Propeller auch nur in dieser Ebene und dort ohnehin ungenau bekannt ist.

Weiterhin nehmen wir an $\varepsilon = \frac{a}{2}$. Damit erhalten wir:

$$u_R = \frac{1}{4\pi} \int_{-B_0}^{B_1} d\eta \Gamma_R(\eta) \cdot \frac{r_p \cdot \sin \varphi_0}{R_p^3}$$

$$V_R = \frac{\cos \varphi_0}{4\pi} \int_{-B_0}^{B_1} d\eta \Gamma_R(\eta) \cdot \frac{x_0}{R_p^3} - \frac{1}{4\pi} \int_{-B_0}^{B_1} d\eta \frac{d\Gamma_R(\eta)}{d\eta} \frac{r_p - \eta \cdot \cos \varphi_0}{[r_p \cdot \cos \varphi_0 - \eta]^2 + r_p^2 \sin^2 \varphi_0} \left\{ 1 - \frac{x_0}{R_p} \right\}$$

mit: $R_p = \sqrt{x_0^2 + r_p^2 + \eta^2 - 2r_p \eta \cdot \cos \varphi_0}$

Wegen $x_0 > \sigma$ gilt stets $R_p \neq \sigma$, sodaß bei u_R und dem ersten Anteil von V_R keine Singularität auftritt. Dagegen ist der zweite Integrand in V_R unbestimmt für $\varphi_0 = \sigma, \pi$ an der Stelle $\eta = \pm r_p$; da aber $\left\{ 1 - \frac{x_0}{R_p} \right\}$ schneller gegen σ geht als $\frac{1}{\eta \pm r_p}$ divergiert, ist der Integrand auch an dieser Stelle stetig und verschwindet dort.

Damit sind die vom Ruder am Propeller induzierten Geschwindigkeitsbeiträge mit überall stetigen Integranden darstellbar.

IV. Induktion eines mäßig-dicken Ruders am Propeller

In Kapitel III haben wir das Ruder als dünn angenommen und daher durch seine Sehne ersetzt. Um auch den Einfluß eines nicht allzu dicken Ruders auf die Strömungs-Wechselwirkung zu untersuchen, wollen wir auf seiner Sehne der in III berechneten Zirkulationsdichte $\gamma_R(\zeta, \eta)$ eine flächenhafte Quell-Senken-Belegung $q(\zeta, \eta)$ überlagern, welche eine symmetrische Kontur erzeuge.

Dieses Verfahren ist für Tragflügel bekannt. In der Formulierung von Schlichting-Truckenbrodt [6], die sich auf den endlich-dicken Tragflügel mit Null-Auftrieb bezieht, können wir diese Methode allerdings nicht unverändert benutzen, weil in der von Schiff und Propeller erzeugten Ruderanströmung die ζ -Komponente nicht allgemein überwiegt. Wir wollen im folgenden das genannte Verfahren so modifizieren, daß es sich auf die vorliegende Strömung anwenden läßt.

Zweckmäßig beschreiben wir die Quell-Induktion in dem propellerfesten kartesischen Koordinatensystem (x, y, z) mit den Geschwindigkeitsanteilen (u, v, w) . Zwischen dieser Darstellung und derjenigen in dem ruderfesten kartesischen System (ζ, η, ϑ) mit $(\sigma_\zeta, \sigma_\eta, \sigma_\vartheta)$ besteht die Transformation:

$$(64a) \quad \left. \begin{aligned} x &= \zeta \cdot \cos \delta - \vartheta \cdot \sin \delta + x_0 \\ y &= \eta \\ z &= \zeta \cdot \sin \delta + \vartheta \cdot \cos \delta \end{aligned} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \zeta &= (x - x_0) \cdot \cos \delta + z \cdot \sin \delta \\ \eta &= y \\ \vartheta &= z \cdot \cos \delta - (x - x_0) \cdot \sin \delta \end{aligned} \right.$$

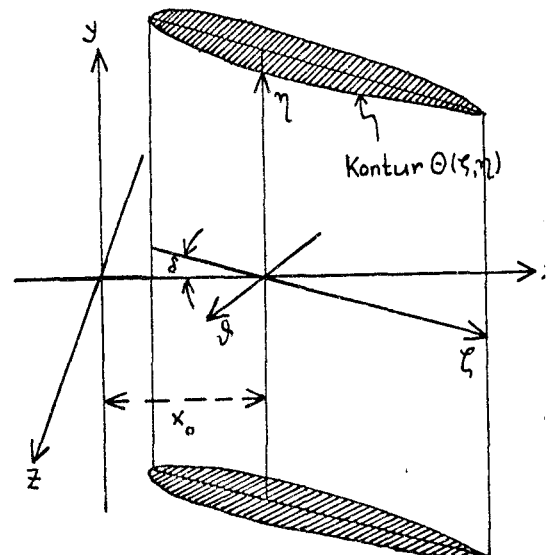
Entsprechend lautet das Transformationsgesetz für die Geschwindigkeitsanteile:

$$(64b) \quad \begin{aligned} u &= \sigma_\zeta \cdot \cos \delta - \sigma_\vartheta \cdot \sin \delta \\ v &= \sigma_\eta \\ w &= \sigma_\zeta \cdot \sin \delta + \sigma_\vartheta \cdot \cos \delta \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \sigma_\zeta &= u \cdot \cos \delta + w \cdot \sin \delta \\ \sigma_\eta &= v \\ \sigma_\vartheta &= w \cdot \cos \delta - u \cdot \sin \delta \end{aligned}$$

Figur 3



Wir wollen mit dem Index „A“ die als bekannt angenommenen Induktion und Beitrag der Wirbelbeichte des Ruderersymbolisieren.

$$u_A = u_o + u_N + u_P + u_g$$

$$v_A = v_N + v_P + v_g$$

$$w_A = w_N + w_P + w_g$$

ebenso in der σ -Darstellung: $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_o + \vec{\sigma}_N + \vec{\sigma}_P + \vec{\sigma}_g$.

Ferner soll der Index „q“ die von der Quell-Belegung induzierten Geschwindigkeitsbeiträge bezeichnen; diese ergeben in dem ruderfesten Koordinatensystem nach [6] in einem Aufpunkt (ζ, η, ϑ) :

$$(65) \quad \begin{aligned} \sigma_{\zeta, q}(\zeta, \eta, \vartheta) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{RF} d\zeta' d\eta' q(\zeta', \eta') \frac{\zeta - \zeta'}{R_q^3} \\ \sigma_{\eta, q}(\zeta, \eta, \vartheta) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{RF} d\zeta' d\eta' q(\zeta', \eta') \frac{\eta - \eta'}{R_q^3} \\ \sigma_{\vartheta, q}(\zeta, \eta, \vartheta) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{RF} d\zeta' d\eta' q(\zeta', \eta') \frac{\vartheta}{R_q^3} \end{aligned}$$

$$\text{mit: } R_q = \sqrt{(\zeta - \zeta')^2 + (\eta - \eta')^2 + \vartheta^2}$$

Darin bedeute RF die Ruderoberfläche. Mit den Transformationen (64) erhalten wir aus (65) die Darstellung in propellerfesten kartesischen Koordinaten:

$$(66) \quad \begin{aligned} u_q(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi} \int_{x_o - (a - \varepsilon) \cdot \cos \delta}^{x_o + (a + \varepsilon) \cdot \cos \delta} d\xi \int_{-b_o}^{b_o} d\eta \frac{q(\xi, \eta)}{\cos \delta} \cdot \frac{x - \xi}{R_q^3} \\ v_q(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi} \int_{x_o - (a - \varepsilon) \cdot \cos \delta}^{x_o + (a + \varepsilon) \cdot \cos \delta} d\xi \int_{-b_o}^{b_o} d\eta \frac{q(\xi, \eta)}{\cos \delta} \cdot \frac{y - \eta}{R_q^3} \\ w_q(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi} \int_{x_o - (a - \varepsilon) \cdot \cos \delta}^{x_o + (a + \varepsilon) \cdot \cos \delta} d\xi \int_{-b_o}^{b_o} d\eta \frac{q(\xi, \eta)}{\cos \delta} \cdot \frac{z - (\xi - x_o) \cdot \tan \delta}{R_q^3} \end{aligned}$$

$$\text{mit: } R_q = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - (\xi - x_o) \cdot \tan \delta)^2}$$

Für die Quell-belegung sind zwei Bedingungen zu erfüllen:

- 1) Schließungsbedingung: die Kontur soll für jedes Profil $\eta = \text{constans}$ geschlossen sein:

$$(67) \quad \int_{\eta = \text{constans}} d\zeta' q(\zeta', \eta) = \sigma \quad \text{für alle } \eta.$$

2) kinematische Bedingung: die Ruderkontur soll Stromlinie sein, d.h. auf der Oberfläche tritt keine Normalkomponente auf; daher muß im ruderfesten Koordinatensystem für alle Punkte auf der Kontur $\Theta(\xi, \eta)$ gelten:

$$(68) \quad \sigma_{\eta, A} + \sigma_{\eta, q} = [\sigma_{\xi, A} + \sigma_{\xi, q}] \cdot \frac{\partial \Theta(\xi, \eta)}{\partial \xi} + [\sigma_{\eta, A} + \sigma_{\eta, q}] \cdot \frac{\partial \Theta(\xi, \eta)}{\partial \eta}$$

Nimmt man die Anströmgeschwindigkeit $\vec{\sigma}_A = (\sigma_{\xi, A}, \sigma_{\eta, A}, \sigma_{\eta, A})$ und die Körperkontur $\Theta(\xi, \eta)$ mit ihren Ableitungen als gegeben an, so erhält man mit (65) und (68) eine Integralgleichung für $q(\xi, \eta)$ mit der Nebenbedingung (67).

Statt die Integralgleichung zu lösen, wollen wir für ein in Ψ -Richtung konstantes Profil ($\frac{\partial \Theta(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \theta$) den aus der Profilttheorie bekannten Zusammenhang zwischen $q(\xi, \eta)$ und der Profildicke $D(\xi, \eta) = 2 \cdot \Theta(\xi, \eta)$ übernehmen:

$$(69) \quad \cos \delta \cdot \frac{\partial D(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{q(\xi, \eta)}{U(\eta)}$$

mit $U(\eta) = \sqrt{u_A^2 + w_A^2} \cong |u_A \cdot \cos \delta + w_A \cdot \sin \delta|$ da: $u_A \cdot \sin \delta \cong w_A \cdot \cos \delta$

In (69) sind die als bekannt angenommenen Geschwindigkeiten (u_A, w_A) für einen Schnitt $\eta = \text{constans}$ ($-b_0 \leq \eta \leq +b_0$) jeweils über den ξ -Bereich ($x_0 - (a - \epsilon) \cdot \cos \delta \leq \xi \leq x_0 + (a + \epsilon) \cdot \cos \delta$) gemittelt einzusetzen. Mit (66) und (69) erhalten wir dann die Geschwindigkeiten, die durch die Ruderdicke am Propeller zusätzlich zur Wirkung des dünnen Ruders induziert werden. Dabei sind die Aufpunkte (x_p, y_p, z_p) auf dem Propeller wie in III.4 einzusetzen, und für die Umfangskomponente am Propeller ergibt sich:

$$(70) \quad V_q = -v_q \cdot \sin \varphi_p + w_q \cdot \cos \varphi_p$$

Als Profil sei ein rechteckiges symmetrisches Joukowski-Profil der maximalen Dicke D_0 vorgegeben. Wenn man mit (49) auf der Rudersehne trigonometrische Variable einführt, erhält man nach Isay [1, S. 74] die Profildarstellung:

$$(71) \quad D(\tau, t) = 2 \Theta(\tau, t) = \frac{4 \cdot D_0}{3 \sqrt{3}} \cdot \left[\sin \tau + \frac{1}{2} \cdot \sin(2\tau) \right]$$

Damit kann man die Dicken-Induktion eines gegebenen Ruders berechnen und mit der Zirkulations-Induktion des dünnen Ruders zum Gesamt-Einfluß der Ruderwirkung am Propeller zusammenfassen.

V. Einfluß eines Totwassers auf das dünne Ruder

Die in Kap. III beschriebene Tragflächentheorie des dünnen Ruders ist nur solange gültig, als sich dieses in einer gesunden Strömung befindet. Wenn sich aber die Grenzschicht ablöst und so ein Totwasser entsteht, muß diese Theorie modifiziert werden.

Da eine Behandlung des Totwassers als zähe Strömung zurzeit aussichtslos ist, soll hier dessen Einfluß durch ein potentialtheoretisches Modell beschrieben werden, ähnlich dem, das von Jungclaus [9] und Isay [10] für ein Profil in homogener Strömung angegeben wurde. Deren Theorie muß im Propellerstrahl verändert werden, da die Bernoulli-Gleichung, in der ein zusätzliches Glied $\frac{\partial \Phi_p}{\partial t}$ auftritt, nicht mehr linearisiert werden darf. Auf der Grundlage einiger hierzu von Isay [11, unveröffentlicht] durchgeführter Überlegungen wird im folgenden eine Theorie angegeben, die im Rahmen dieser Arbeit leicht zu numerischen Ergebnissen führt.

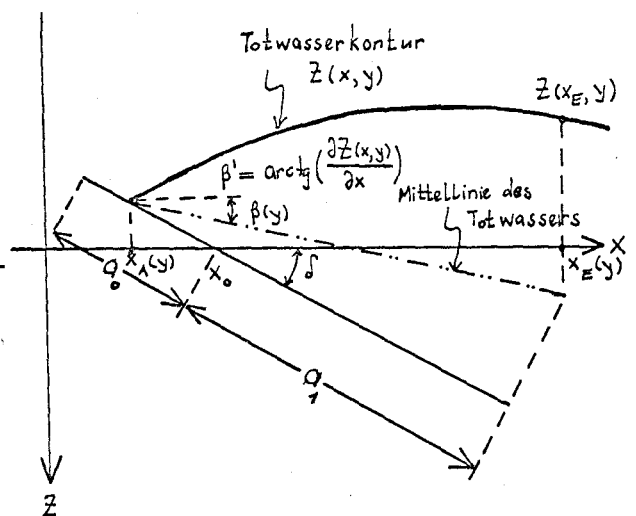
Wir betrachten ein Ruder mit Bezeichnungen wie in Kap. III. Die Totwasserkontur $Z(x,y)$ und der Ablösepunkt $x_A(y)$ seien in Schnitten $y = \text{constans}$ aus Messungen oder Grenzschichtüberlegungen bekannt. Dann wollen wir den Einfluß des Totwassers durch eine auf der Totwasser-Mittellinie angebrachte Quellbelegung mit nicht-verschwindender Gesamtstärke beschreiben. Die Mittellinie hat die Gestalt:

$$(72) \quad Z_M(x,y) = [x - x_A(y)] \cdot \frac{1}{2} \beta(y) - [x_0 - x_A(y)] \cdot \frac{1}{2} \delta$$

Da der Nachlauf keinen Einfluß auf das Ruder ausübt, ergibt sich der Endpunkt der Quellbelegung durch Projektion des Ruder-Endpunktes auf die Mittellinie:

$$(73) \quad x_E(y) = x_A(y) + \frac{\cos \beta(y)}{\cos(\delta - \beta(y))} \left[\frac{x_0 - x_A(y)}{\cos \delta} + Q_1 \right]$$

Figur 4



Die Zuströmung an der Mittellinie sei in jedem Punkt bekannt; speziell soll eine x -unabhängige mittlere Anströmgeschwindigkeit $U(y)$ gegeben sein:

$$(74) \quad U(y) = [u_0 + u_N(y) + u_P(y) + u_f^{(\sigma)}(y)] \cdot \cos \beta(y) + [w_N(y) + w_P(y) + w_f^{(\sigma)}(y)] \cdot \sin \beta(y)$$

Damit besteht nach Figur 4 zwischen Totwasserkontur und Quellbelegung der Zusammenhang:

$$(75) \quad -\frac{q_T(x,y)}{2U(y)} = \tan(\beta' - \beta(y)) = \frac{\frac{\partial Z(x,y)}{\partial x} - \tan \beta(y)}{1 + \frac{\partial Z(x,y)}{\partial x} \cdot \tan \beta(y)} = \frac{\partial Z(x,y)}{\partial x} - \tan \beta(y)$$

Bei $x = x_A(y)$ und $x = x_E(y)$ soll die Totwasserkontur die Richtung der Mittellinie haben; daher gilt nach (75):

$$(76) \quad q_T(x_A, y) = q_T(x_E, y) = 0$$

Wir gehen nun zu trigonometrischen Variablen über:

$$(77) \quad x = \frac{x_A(y) + x_E(y)}{2} - \frac{x_E(y) - x_A(y)}{2} \cdot \cos t^* \quad : \begin{cases} t^* = 0 & \longleftrightarrow x = x_A(y) \\ t^* = \pi & \longleftrightarrow x = x_E(y) \end{cases}$$

Der trigonometrische Ansatz:

$$(78) \quad q_T(y) = 2u_0 \sum_{k=1}^K q_k^{(T)}(y) \cdot \sin(k \cdot t^*)$$

erfüllt bereits die Bedingung (76). Durch Integration ergibt sich die Gesamt-Quellstärke:

$$(79) \quad Q_T(y) = \int_{x_A(y)}^{x_E(y)} d\xi \frac{q_T(\xi, y)}{\cos \beta(y)} = \frac{x_E(y) - x_A(y)}{2 \cdot \cos \beta(y)} \cdot u_0 \cdot \pi \cdot q_1^{(T)}(y)$$

Weiter folgt aus (72):

$$Z(x_A, y) = Z_M(x_A, y) = [x_A(y) - x_0] \cdot \tan \delta$$

Damit und mit (75, 78) erhalten wir nach elementarer Integration die Darstellung der Totwasserkontur:

$$(80) \quad \begin{aligned} Z(x, y) &= Z(x_A, y) + [x - x_A(y)] \cdot \tan \beta(y) - \frac{1}{2 \cdot U(y)} \int_{x_A(y)}^x d\xi q_T(\xi, y) \\ &= C_0(x, y) + \sum_{k=1}^K C_k(x, y) \cdot q_k^{(T)}(y) \end{aligned}$$

$$(80a) \quad \text{mit: } C_0(x, y) = [x_A(y) - x_0] \cdot \tan \delta + \frac{x_E(y) - x_A(y)}{2} [1 - \cos t^*] \cdot \tan \beta(y)$$

$$(80b) \quad C_1(x, y) = -\frac{u_0}{2 \cdot U(y)} \cdot \frac{x_E(y) - x_A(y)}{2} \cdot [t^* - \frac{1}{2} \sin(2 \cdot t^*)]$$

$$(80c) \quad k \geq 2: C_k(x, y) = -\frac{u_0}{2 \cdot U(y)} \cdot \frac{x_E(y) - x_A(y)}{2} \cdot \left[\frac{\sin(k-1)t^*}{k-1} - \frac{\sin(k+1)t^*}{k+1} \right]$$

Speziell für $X = x_E(y)$ folgt aus (80) mit $t^*(x_E) = \pi$ sowie (79):

$$(81) \quad Z(x_E, y) = [x_A(y) - x_o] \cdot \lg \delta + [x_E(y) - x_A(y)] \cdot \lg \beta(y) - \frac{\cos \beta(y)}{2 \cdot U(y)} \cdot Q_T(y)$$

Eine einfache Beziehung zwischen dem Ablöswinkel $\beta(y)$ und dem Koeffizienten $q_1^{(T)}(y)$ gewinnen wir durch folgende Überlegung: damit $\beta(y)$ Richtung der Totwasser-Mittellinie sei, muß nach Figur 4 gelten:

$$(82) \quad \frac{Q_T(y)}{2} \cdot \cos(\delta - \beta(y)) = \left[a_1 + \frac{x_o - x_A(y)}{\cos \delta} \right] \cdot \lg(\delta - \beta(y)) \cdot U(y)$$

Hieraus folgt mit (79, 73):

$$(83) \quad q_1^{(T)}(y) = \frac{4}{\pi} \frac{U(y)}{U_o} \cdot \lg(\delta - \beta(y))$$

Durch Vorgabe des Ablöswinkels ist also bei bekannter Anströmung der Koeffizient $q_1^{(T)}(y)$ bereits gegeben. Da weiterhin der Ablösepunkt $x_A(y)$ vorgegeben ist, kann man mit (83) sofort folgende Größen angeben: $Q_T(y)$ aus (79), $Z(x_E, y)$ aus (81) und $x_E(y)$ aus (73).

Die höheren Koeffizienten $q_k^{(T)}$: $k = 2, 3, \dots, K$ gewinnen wir aus der vorgegebenen Totwasserkontur nach dem Prinzip des kleinsten Fehlerquadrates. Die Kontur sei an $M-1$ trigonometrisch-äquidistanten Punkten $x_\mu: \{t_\mu^* = \mu \frac{\pi}{M} | \mu = 1, \dots, M-1\}$ vorgegeben; dann definieren wir als Fehlerquadrat:

$$(84) \quad R = \sum_{\mu=1}^{M-1} \left\{ Z(x_\mu, y) - C_o(x_\mu, y) - \sum_{k=1}^K C_k(x_\mu, y) \cdot q_k^{(T)}(y) \right\}^2$$

Aus der Minimalisierung des Fehlers folgt über die Variations-Differentialgleichungen $\sigma = \frac{\delta R}{\delta q_k^{(T)}} : \{k=1..K\}$ das Gleichungssystem:

$$(85) \quad K = 1, 2, \dots, K: \sum_{k=1}^K q_k^{(T)}(y) \cdot \left\{ \sum_{\mu=1}^{M-1} C_k(x_\mu, y) \cdot C_k(x_\mu, y) \right\} = \sum_{\mu=1}^{M-1} \left\{ Z(x_\mu, y) - C_o(x_\mu, y) \right\} \cdot C_k(x_\mu, y)$$

Nach Lösung dieses algebraischen Gleichungssystemes ist die einem vorgegebenen Totwasser entsprechende Quellbelegung durch ihre Entwicklungskoeffizienten $q_k^{(T)}(y): \{k=1..K\}$ bekannt.

Das von der Quellbelegung induzierte Geschwindigkeitsfeld hat die Darstellung:

$$(86a) \quad u_T(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_{-b_o}^{b_1} \frac{d\eta}{\cos \beta(\eta)} \int_{x_H(\eta)}^{x_E(\eta)} d\xi \frac{q_T(\xi, \eta) \cdot (x - \xi)}{R_T(\xi, \eta)^3}$$

$$(86b) \quad v_T(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_{-b_o}^{b_1} \frac{d\eta}{\cos \beta(\eta)} \int_{x_A(\eta)}^{x_E(\eta)} d\xi \frac{q_T(\xi, \eta) \cdot (y - \eta)}{R_T(\xi, \eta)^3}$$

$$(86c) \quad w_T(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_{-b_o}^{b_1} \frac{d\eta}{\cos \beta(\eta)} \int_{x_A(\eta)}^{x_E(\eta)} d\xi \frac{q_T(\xi, \eta) \cdot [z - (\xi - x_A(\eta)) \cdot \lg \beta(\eta) + (x_o - x_A(\eta)) \cdot \lg \delta]}{R_T(\xi, \eta)^3}$$

$$\text{mit: } R_T(\xi, \eta) = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + [z - (\xi - x_A(\eta)) \cdot \tan \beta(\eta) + (x_0 - x_A(\eta)) \cdot \tan \delta]^2}$$

In der Randbedingung (47) am Ruder tritt zusätzlich der Beitrag des Totwassers auf:

$$(87a) \quad u_R \cdot \tan \delta - w_R = w_N + w_P - \tan \delta \cdot [u_0 + u_N + u_P] + w_T - u_T \cdot \tan \delta$$

$$\text{für: } \begin{aligned} x_0 - a_0 \cdot \cos \delta &\leq x \leq x_0 + a_1 \cdot \cos \delta \\ -b_0 &\leq y \leq b_1 \\ -a_0 \cdot \sin \delta &\leq z = (x - x_0) \cdot \tan \delta \leq a_1 \cdot \sin \delta \end{aligned}$$

Wir betrachten daher den Beitrag:

$$(88) \quad I(x, y) = w_T(x, y) - u_T(x, y) \cdot \tan \delta = \frac{1}{4\pi} \int_{-b_0}^{b_1} \frac{d\eta}{\cos \beta(\eta)} \int_{x_A(\eta)}^{x_E(\eta)} d\xi q_T(\xi, \eta) \frac{[\xi - x_A(\eta)] \cdot [\tan \delta - \tan \beta(\eta)]}{R_T(\xi, \eta)^3}$$

$$\text{mit: } R_T(\xi, \eta) = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + [(x-x_A(\eta)) \cdot \tan \delta + (x_A(\eta)-\xi) \cdot \tan \beta(\eta)]^2}$$

In einem vorgegebenen Schnitt $y = \text{constans}$ ist der Integrand in (88) für $x \neq x_A(y)$ überall stetig. Dagegen tritt bei $x = x_A(y)$ - wo die Quellbelegung das Ruder im Aufpunkt berührt - eine Singularität im ξ -Integranden auf bei $\xi = x = x_A(y)$; $\eta = y$. Diese Singularität erweist sich jedoch wegen (76): $q_T(x_A, y) = \sigma$ als behebbar, wie wir im folgenden zeigen werden. Dazu benutzen wir (77, 78) und gehen zur trigonometrischen Darstellung über:

$$(89) \quad I(x_A, y) = \frac{u_0}{2\pi} \sum_{k=1}^K \int_{-b_0}^{b_1} \frac{d\eta}{\cos \beta(\eta)} q_k^{(T)}(\eta) \cdot [\tan \delta - \tan \beta(\eta)] \cdot \left[\frac{x_E(\eta) - x_A(\eta)}{2} \right]^2 \cdot f_k(\eta)$$

$$(89a) \quad f_k(\eta) = \int_{\sigma}^{\Delta} dt \cdot \sin t \cdot \sin(k \cdot t) \cdot \frac{1 - \cos t}{R_T(t)^3} + \int_{\Delta}^{\pi} dt \cdot \sin t \cdot \sin(k \cdot t) \cdot \frac{1 - \cos t}{R_T(t)^3} = f_k^{(1)}(\eta) + f_k^{(2)}(\eta)$$

$$\text{mit: } \sigma < \Delta \ll \pi$$

Der t -Integrand in $f_k^{(2)}(\eta)$ ist stetig für alle $\eta, \xi(t)$. Dagegen enthält der Integrand in $f_k^{(1)}(\eta)$ einen Pol bei $\eta = y, \xi = x_A(y)(t = \sigma)$. Mit den Anfangsgliedern der trigonometrischen Reihen

$$\sin(k \cdot t) = k \cdot t + O(t^3); \quad \cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + O(t^6)$$

erhält man für $R_T(t)$:

$$(90) \quad R_T(t) = \sqrt{B_0(\eta) + B_1(\eta) \cdot t^2 + B_2(\eta) \cdot t^4 + O(t^6)}$$

(90a) mit: $B_0(\eta) = \left[\frac{x_A(y) - x_A(\eta)}{\cos \delta} \right]^2 + [y - \eta]^2$

(90b) $B_1(\eta) = -\frac{x_E(\eta) - x_A(\eta)}{2} \cdot [x_A(y) - x_A(\eta)] \cdot [1 + \tan \delta \cdot \tan \beta(\eta)]$

(90c) $B_2(\eta) = \left[\frac{x_E(\eta) - x_A(\eta)}{2} \right]^2 + \frac{x_E(\eta) - x_A(\eta)}{2} \cdot [x_A(y) - x_A(\eta)] \cdot [1 + \tan \delta \cdot \tan \beta(\eta)]$

Damit nimmt $\frac{y^{(4)}}{\delta k^{(4)}(\eta)}$ die Gestalt an:

(91) $\frac{y^{(4)}}{\delta k^{(4)}(\eta)} \approx \frac{k}{2} \int_0^A \frac{dt \cdot [t^4 + O(t^6)]}{\sqrt{B_0(\eta) + B_1(\eta)t^2 + B_2(\eta)t^4 + O(t^6)^3}}$

Wir untersuchen $\frac{y^{(4)}}{\delta k^{(4)}(\eta)}$ in der Umgebung $U_\varepsilon(y) = \{|\eta - y| \leq \varepsilon; \sigma < \varepsilon \ll 1\}$; dort wollen wir die Funktionen $x_A(\eta), x_E(\eta), \beta(\eta)$ durch die ersten Glieder ihrer Taylor-Entwicklung darstellen:

$$\begin{aligned} x_A(\eta) &= x_A(y) + (\eta - y) \cdot x_A'(y) + \frac{1}{2} \cdot (\eta - y)^2 \cdot x_A''(y) + O([\eta - y]^3) \\ x_E(\eta) &= x_E(y) + (\eta - y) \cdot x_E'(y) + \frac{1}{2} \cdot (\eta - y)^2 \cdot x_E''(y) + O([\eta - y]^3) \\ \beta(\eta) &= \beta(y) + O([\eta - y]) \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir für das Verhalten der Koeffizienten $B_0(\eta), B_1(\eta), B_2(\eta)$ für $\eta \approx y$:

$$\begin{aligned} B_0(\eta) &= C_0 \cdot [\eta - y]^2 + O([\eta - y]^3) \quad \text{mit:} \quad C_0 = 1 + \frac{x_A''(y)}{\cos^2 \delta} > \sigma \\ B_1(\eta) &= C_1 \cdot [\eta - y] + O([\eta - y]^2) \quad \text{mit:} \quad C_1 = \frac{x_E(y) - x_A(y)}{2} x_A'(y) [1 + \tan \delta \cdot \tan \beta(y)] \\ B_2(\eta) &= C_2 + O([\eta - y]^2) \quad \text{mit:} \quad C_2 = \left[\frac{x_E(y) + x_A(y)}{4 \cdot \cos \beta(y)} \right]^2 > \sigma \end{aligned}$$

Die Auswertung des Integrales (91) ist sehr kompliziert und führt auf elliptische Normalintegrale; diese Rechnung wird in Anhang 1.J dargestellt. Wie dort gezeigt, hat man die beiden Fälle zu unterscheiden:

(92) $\left(\frac{C_1}{C_2}\right)^2 \geq \frac{2C_0}{C_2} \implies x_A''(y) \geq \frac{\cos^2 \delta}{\cos(2[\delta - \beta(y)])}$

In der Umgebung von $\eta = y$ erhält man in beiden Fällen:

(93) $\frac{y^{(4)}}{\delta k^{(4)}(\eta)} \approx \frac{k}{2} \cdot \frac{D_0(y)}{2 \cdot B_0(y)} \cdot \frac{1}{\sqrt{|y - \eta|}} = \frac{4k \cdot \cos^2 \beta(y)}{[x_E(y) - x_A(y)]^2} \cdot \frac{D_0(y)}{\sqrt{|y - \eta|}}$

Dabei hängt die Konstante $D_0(y)$ in komplizierter Weise von den geometrischen Daten $(x_A'(y), x_A(y), x_E(y), \delta, \beta(y))$ ab. Die η -Singularität in (93) ist integrierbar:

$$\int_{-b_0}^{b_1} \frac{d\eta}{\sqrt{|y - \eta|}} = 2 \cdot [\sqrt{b_1 - y} + \sqrt{b_0 + y}]$$

Damit erhält man statt (89) die Darstellung mit überall stetigen Integranden:

$$(94) \quad I(x_A(y), y) = \frac{u_0}{2\pi} \sum_{k=1}^K \left\{ I_{1k}(x_A(y), y) + I_{2k}(x_A(y), y) \right\}$$

$$(94a) \quad I_{1k}(x_A(y), y) = 2 \cdot D_0(y) \cdot k \cdot q_{1k}^{(T)}(y) \cdot \cos \beta(y) \cdot [1q\delta - 1q\beta(y)] \left[\sqrt{b_1 - y} + \sqrt{b_0 + y} \right] + \int_{-b_0}^{b_1} d\eta \cdot F_k(\eta)$$

$$(94b) \quad I_{2k}(x_A(y), y) = \int_{-b_0}^{b_1} \frac{d\eta}{\cos \beta(\eta)} \cdot q_{2k}^{(T)}(\eta) \cdot [1q\delta - 1q\beta(\eta)] \cdot \left[\frac{x_E(\eta) - x_A(\eta)}{2} \right]^2 \cdot \int_{\Delta}^{\pi} dt \frac{\sin t \cdot \sin(k \cdot t) \cdot [1 - \cos t]}{R_T(t)^3}$$

$$(94c) \quad \text{mit: } F_k(\eta) = \begin{cases} \eta = y : \sigma \\ \text{sonst: } \frac{q_k^{(T)}(\eta)}{\cos \beta(\eta)} \cdot [1q\delta - 1q\beta(\eta)] \cdot \left[\frac{x_E(\eta) - x_A(\eta)}{2} \right]^2 \cdot \int_{\sigma}^{\Delta} dt \frac{\sin t \cdot \sin(k \cdot t) \cdot [1 - \cos t]}{R_T(t)^3} \\ - k \cdot q_{1k}^{(T)}(y) \cdot \cos \beta(y) \cdot \frac{D_0(y)}{\sqrt{|y - \eta|}} \cdot [1q\delta - 1q\beta(y)] \end{cases}$$

Damit sind die Geschwindigkeitsbeiträge eines Totwassers an beliebig-gewählten Punkten auf dem Ruder durch Integrale mit überall stetigen Integranden dargestellt.

Für die Kraftwirkung am Ruder benötigen wir die Geschwindigkeiten im Druckmittelpunkt. Zur Vereinfachung sei die Gesamt-Quellstärke für alle Schnitte $y = \text{constans}$ auf dem Mittelpunkt der Totwasser-Mittellinie angebracht; nach (73,81) hat dieser die Koordinaten:

$$(95a) \quad x_{1/2}^{(T)}(y) = \frac{x_E(y) + x_A(y)}{2} = \frac{\cos(\beta(y))}{2 \cos(\delta - \beta(y))} \left[a_1 + \frac{x_0 - x_A(y)}{\cos \delta} \right] + x_A(y)$$

$$(95b) \quad z_{1/2}^{(T)}(y) = \frac{x_E(y) - x_A(y)}{2} \cdot 1q\beta(y) - \frac{\cos \beta(y)}{4 u(y)} \cdot Q_T(y) + Z(x_y, y)$$

Für den Ruder-Druckmittelpunkt, näherungsweise den 1/4-Punkt, gilt:

$$(95c) \quad x_{1/4}^{(R)} = x_0 - a_0 \cdot \cos \delta + \frac{a_1 + a_0}{4} \cdot \cos \delta = x_0 + \frac{a_1 - 3 \cdot a_0}{4} \cdot \cos \delta$$

$$(95d) \quad z_{1/4}^{(R)} = [x_{1/4}^{(R)} - x_0] \cdot 1q\delta = \frac{a_1 - 3 \cdot a_0}{4} \cdot \sin \delta$$

Damit folgt für den Beitrag der linienförmig-zusammengefaßten Quellverteilung die einfache Darstellung:

$$(96a) \quad u_T(x_{1/4}^{(R)}, z_{1/4}^{(R)}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-b_0}^{b_1} d\eta \cdot Q_T(\eta) \frac{x_{1/2}^{(T)}(\eta) - x_{1/4}^{(R)}}{\sqrt{[x_{1/2}^{(T)}(\eta) - x_{1/4}^{(R)}]^2 + [y - \eta]^2 + [z_{1/2}^{(T)}(\eta) - z_{1/4}^{(R)}]^2}^{3/2}}$$

$$(96b) \quad w_T(x_{1/4}^{(R)}, z_{1/4}^{(R)}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-b_0}^{b_1} d\eta \cdot Q_T(\eta) \frac{z_{1/2}^{(T)}(\eta) - z_{1/4}^{(R)}}{\sqrt{[x_{1/2}^{(T)}(\eta) - x_{1/4}^{(R)}]^2 + [y - \eta]^2 + [z_{1/2}^{(T)}(\eta) - z_{1/4}^{(R)}]^2}^{3/2}}$$

VI. Einzelheiten der numerischen Rechnungen

VI.1 Das Programmsystem

sprache ALGOL ein Programmsystem entwickelt, dessen Wirkungsweise in Diagramm 1 dargestellt ist und hier kurz beschrieben wird.

Sowohl beim Propeller als auch beim Ruder hängen die Beiträge der gebundenen und freien Wirbel (21;52) nicht von den durch Nachstrom, Ruder und Propeller gegenseitig-induzierten Geschwindigkeiten ab. Diese Anteile können daher für beliebige Anströmung bei vorgegebenen Parametern fest berechnet werden.

Zunächst wird der Einfluß eines vorgegebenen Schiffsnachstromes (N) auf den Propeller untersucht (Kap. VII). Das von diesem Propeller erzeugte Geschwindigkeitsfeld (P) und der Nachstrom (N) wirken auf das Ruder (Kap. VIII). Dieses Ruder verändert wiederum die Anströmung am Propeller (R_O), wobei es u.U. einen zusätzlichen Dickeneffekt ausübt (Kap. IX). Schließlich wird noch berücksichtigt, daß eine Strömungsablösung und damit ein Totwasser (T) hinter dem Ruder dieses erheblich beeinflussen und sich damit durch den entsprechenden RuderEinfluß am Propeller (R_T) bemerkbar machen kann (Kap.X).

Die vorgelegten numerischen Ergebnisse wurden auf dem Rechenautomaten TR4 der Universität Hamburg erzielt.

VI.2 Rechenverfahren für den Nachstrom-Propeller

Es wird ein 3-flügeliger Propeller mit kreissektor-förmigen Flügeln und dem Nabenverhältnis $R_i/R_a = 0.04$ behandelt. Im folgenden sollen dessen Außenradius als Längeneinheit ($R_a = 1$) und die Fahrtgeschwindigkeit als Geschwindigkeits-Maßstab ($u_0 = 1$) benutzt werden. Die Propellerdaten sind:

$$N = 3 ; \quad R_i = 0.04 ; \quad R_a = 1.00 ; \quad \chi_H = -\chi_V = 0.4$$

$$\frac{H}{D} = 1 \quad \longrightarrow \quad \frac{k_1}{R_a} = \frac{1}{\pi} \approx 0.32$$

Für den Schiffs-Einfluß wurde der von Lerbs [8] angegebene Nachstrom eines Einschrauben-Schiffes in der Propellerebene benutzt (Diagramm 2). Dieses Nachstromfeld wurde an 5 ausgewählten Radien interpoliert und durch eine Fourieranalyse dargestellt. Die Koeffizienten, die in Tabelle 1 zusammengestellt sind, zeigen eine gute Konvergenz, sodaß die Entwicklung bei $\mu=6$ abgebrochen werden darf.

Tabelle 1: Fourierkoeffizienten des Lerbs-Nachstromes

1a: Axialkomponente $\mathcal{N}_{\mu}^{(N,x)}(r)$:

	$\mu=0$	$\mu=1$	$\mu=2$	$\mu=3$	$\mu=4$	$\mu=5$	$\mu=6$
$r=0.10$	-0.674	0	-0.001	0	0	0	0
$r=0.28$	-0.610	0.009	-0.022	-0.006	-0.005	-0.003	-0.003
$r=0.52$	-0.422	-0.020	-0.074	0.001	-0.031	0.003	-0.011
$r=0.76$	-0.269	-0.049	-0.106	-0.005	-0.047	0.006	-0.021
$r=0.94$	-0.191	-0.059	-0.113	-0.016	-0.059	0.004	-0.027

1b: Umfangskomponente $\mathcal{N}_{\mu}^{(N,\varphi)}(r)$:

	$\mu=0$	$\mu=1$	$\mu=2$	$\mu=3$	$\mu=4$	$\mu=5$	$\mu=6$
$r=0.10$	0	0.034	-0.042	0.009	-0.006	0.006	-0.001
$r=0.28$	0	0.019	-0.049	0.007	-0.007	0.003	0
$r=0.52$	0	-0.002	-0.058	0.001	-0.009	0.001	0
$r=0.76$	0	-0.021	-0.063	-0.007	-0.012	-0.002	-0.001
$r=0.94$	0	-0.037	-0.066	-0.012	-0.013	-0.005	-0.002

Die Randbedingung (21) wurde für alle Ordnungen μ zunächst für verschiedene Ansätze und Aufpunktkombinationen untersucht. Da die vorgelegte Tragflächentheorie aus der erweiterten Traglinientheorie entwickelt wurde, lag es nahe, die $3/4$ -Strahlen verschiedener Flügelunterteilungen als Aufpunkte auszuwählen; insgesamt wurden die Matrixelemente an 10 Strahlen ($3/4; 3/8-7/8; 3/12-7/12-11/12; 3/16-7/16-11/16-15/16$) jeweils bei 5 Radien berechnet:

$$r = \{ 0.10434; 0.28; 0.52; 0.76; 0.93569 \}$$

$$\chi^* = \{ +0.20; -0.10, +0.30; -0.20, +0.06667, +0.33333; -0.25, -0.05, +0.15, +0.35 \}$$

Für das Beispiel: $k_1=0.32; k_0=0.28; \lambda=0.25$ wurden Zirkulationsdichte

$$\sin \tau \cdot \gamma_{\mu}^*(t, \tau) = 2\omega R_a^2 \sum_{\ell=1}^L \sum_{k=1}^5 A_{\ell k}^{(\mu)} [\cos(\ell t) - (-1)^{\ell}] \cdot s(t) \cdot \sin(k t)$$

und Zirkulation

$$\Gamma_{\mu}^{(p)}(t) = 2\omega R_a^2 \sum_{k=1}^5 \tilde{A}_k^{(\mu)} \cdot s(t) \cdot \sin(k \cdot t) \quad \text{mit:} \quad \tilde{A}_k^{(\mu)} = \pi \frac{x_u - x_v}{2} \sum_{\ell=1}^L (-1)^{\ell-1} A_{\ell k}^{(\mu)}$$

untersucht für die folgenden Fälle (Fehler des Gleichungssystems (22) gleich 0.):

- 1) Randbedingung erfüllt am $3/4$ -Strahl, $L = 1.$
- 2) Randbedingung erfüllt am $3/8 - 7/8$ -Strahl, $L = 2.$
- 3) Randbedingung erfüllt am $3/12 - 7/12 - 11/12$ -Strahl, $L = 3.$
- 4) Randbedingung erfüllt am $3/16 - 7/16 - 11/16 - 15/16$ -Strahl, $L = 4.$

Die hierbei erhaltenen Koeffizienten sind für $\mu = \sigma$ in Tabelle 2 angegeben:

Tabelle 2: Tragflächen- und Traglinien-Koeffizienten für verschiedene Ansätze, stationärer Anteil:

Ansatz	k	Tragflächenkoeffizienten $A_{\ell k}^{(\mu=0)}$				Traglinienkoeffizienten $A_k^{(\sigma)}$
		$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 3$	$\ell = 4$	
1) L=1	1	0.0774				0.0973
	2	0.0237				0.0298
	3	0.0114				0.0143
	4	-0.0028				-0.0035
	5	0				0
2) L=2	1	0.0872	0.0101			0.0868
	2	0.0260	0.0030			0.0250
	3	0.0185	0.0079			0.0133
	4	-0.0003	0.0028			-0.0040
	5	0.0025	0.0032			-0.0009
3) L=3	1	0.0872	0.0112	0.0015		0.0874
	2	0.0260	0.0022	-0.0006		0.0292
	3	0.0191	0.0091	-0.0001		0.0125
	4	-0.0002	0.0023	-0.0007		-0.0041
	5	0.0021	0.0028	0.0009		0.0006
4) L=4	1	0.0874	0.0115	0.0013	0.0001	0.0871
	2	0.0262	0.0024	-0.0001	0.0004	0.0293
	3	0.0189	0.0089	0.0008	0.0004	0.0132
	4	-0.0003	0.0026	-0.0006	0.0003	-0.0043
	5	0.0024	0.0031	0.0005	0.0002	-0.0004

Da alle Ansätze mit verschiedenen Aufpunkten berechnet wurden, ist die Konvergenz befriedigend; die Glieder $\ell=4$ liegen in der Größenordnung der Fehler, die bei der Integration der höheren Matrixelemente ($[\cos(4\tau) - 1] \cdot \sin(k \cdot t)$) gemacht wurden. Die Erfüllung der Randbedingung (21) an allen 45 Aufpunkten (Fehler des Gleichungssystems (22) $\neq 0$) ergibt für $L=3$ und $L=4$ im Rahmen des Rechenfehlers dasselbe Ergebnis wie bei 3) und 4).

Auch die Konvergenz der erhaltenen Koeffizienten mit zunehmender Ordnung μ ist - wie beim vorgegebenen Nachstrom - gut, während vergleichsweise eine instationäre Traglinientheorie nur für reduzierte Frequenzen $\omega_{red} \lesssim 1$ konvergiert:

$$(97) \quad r = R_a: \quad \omega_{red} = \mu \frac{\omega r \frac{\chi_B - \chi_V}{2}}{\sqrt{u_0^2 + (\omega r)^2}} = 0.3881 \cdot \mu < 1 \Rightarrow \mu \lesssim 3$$

Daher zeigt auch die instationäre Zirkulationsdichte eine gute Übereinstimmung, wie man für 2 charakteristische Flügelstellungen $\varphi = \sigma, \frac{\pi}{2}$ in den Tabellen 3, 4 erkennt:

Tabelle 3: Zirkulationsdichte für verschiedene Ansätze:

3a: $\varphi = \sigma, r = 0.80$:

Ansatz	$\gamma_p^*(r, \chi, \varphi_0 = 0)$						
	$\chi = -0.35$	$\chi = -0.30$	$\chi = -0.20$	$\chi = -0.10$	$\chi = 0$	$\chi = 0.10$	$\chi = 0.20$
L = 1	0.358	0.244	0.160	0.119	0.092	0.072	0.053
L = 2	0.363	0.248	0.163	0.121	0.094	0.073	0.054
L = 3	0.360	0.248	0.162	0.119	0.090	0.069	0.049
L = 4	0.360	0.250	0.164	0.120	0.091	0.068	0.050

3b: $\varphi = \frac{\pi}{2}, r = 0.80$:

Ansatz	$\gamma_p^*(r, \chi, \varphi_0 = \frac{\pi}{2})$						
	$\chi = -0.35$	$\chi = -0.30$	$\chi = -0.20$	$\chi = -0.10$	$\chi = 0$	$\chi = 0.10$	$\chi = 0.20$
L = 1	0.080	0.054	0.036	0.027	0.021	0.016	0.012
L = 2	0.080	0.051	0.029	0.018	0.011	0.007	0.003
L = 3	0.080	0.048	0.024	0.014	0.009	0.006	0.004
L = 4	0.080	0.048	0.024	0.014	0.008	0.006	0.005

Tabelle 4: Zirkulation $\Gamma_p(r, \varphi)$ für verschiedene Ansätze:

4a: $\varphi = \sigma$:

Ansatz	$r = 0.20$	$r = 0.40$	$r = 0.60$	$r = 0.80$	$r = 0.85$	$r = 0.90$	$r = 0.95$
L = 1	0.029	0.073	0.096	0.116	0.120	0.120	0.104
L = 2	0.027	0.064	0.093	0.118	0.121	0.118	0.101
L = 3	0.027	0.064	0.093	0.115	0.118	0.115	0.100
L = 4	0.027	0.063	0.092	0.116	0.119	0.116	0.099

4b: $\varphi = \frac{\pi}{2}$:

Ansatz	$r = 0.20$	$r = 0.40$	$r = 0.60$	$r = 0.80$	$r = 0.85$	$r = 0.90$	$r = 0.95$
L = 1	0.006	0.031	0.025	0.026	0.027	0.025	0.019
L = 2	0.010	0.034	0.026	0.021	0.021	0.020	0.015
L = 3	0.009	0.034	0.028	0.020	0.020	0.019	0.016
L = 4	0.010	0.035	0.027	0.020	0.020	0.020	0.016

Schließlich zeigen bei ausreichender Gliederzahl (L) auch der Schubbelastungsgrad c_s als auch der induzierte Gesamt-Wirkungsgrad

$$\eta_i^{\text{Gesamt}} = \lambda \cdot [1 - \bar{v}_x] \cdot \frac{c_s}{c_M} = \lambda_{\text{red}} \cdot \frac{c_s}{c_M} \quad \left. \vphantom{\eta_i^{\text{Gesamt}}} \right)^*$$

eine gute Übereinstimmung, wie man aus Tabelle 5 entnimmt:

Tabelle 5: Schub und Gesamt-Wirkungsgrad, verschiedene Ansätze:

Ansatz	c_s	c_s/c_M	η_i^{Gesamt}	η_i^{Kramer}
$L = 1$	2.062	3.900	0.70	0.71
$L = 2$	2.038	4.000	0.72	0.71
$L = 3$	2.037	4.007	0.72	0.71
$L = 4$	2.034	4.011	0.72	0.71

Zum Vergleich wurde in Tabelle 5 der induzierte Wirkungsgrad aus dem Kramer-Diagramm für Schubbelastungsgrad c_s , reduzierten Fortschrittsgrad λ_{red} und mit $N = \infty$ (kontinuierliche Theorie!) eingetragen.

Nach den obigen Angaben reicht es - im Rahmen des Rechenfehlers - aus, die Randbedingung (21) mit dem Ansatz $L=3$ an 3 Strahlen (je mit 5 Radien) auszuwerten.

VI.3 Rechenverfahren für das Ruder

Ein entsprechender Test wie beim Propeller ergibt für ein rechteckig-berandetes Ruder ($\lambda=2; b_0=b_1=R_a$) in homogener Anströmung eine gute Konvergenz der Tragflächenkoeffizienten. Hier reichen bereits $L=2$ und die Erfüllung der Randbedingung am $3/8-7/8$ -Strahl, jeweils mit 8 trigonometrisch-äquidistanten Punkten, aus, um die Zirkulationsdichte mit einem Fehler $\lesssim 2\%$ darzustellen. Wegen der guten Konvergenz der Tragflächenkoeffizienten wird auch die Exzentrizität nach (61) mit $L=2$ befriedigend wiedergegeben.

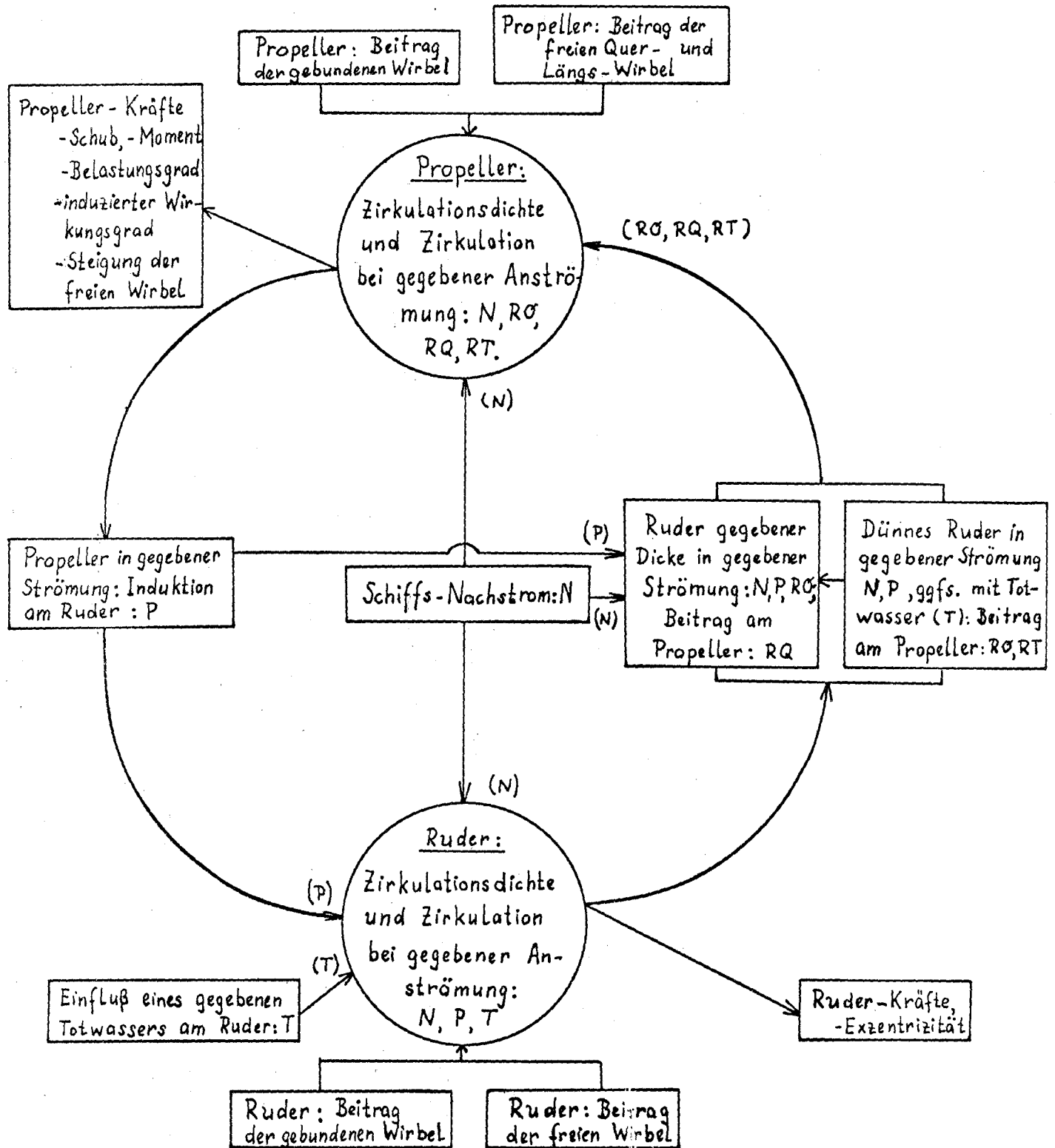
*) : es gilt:

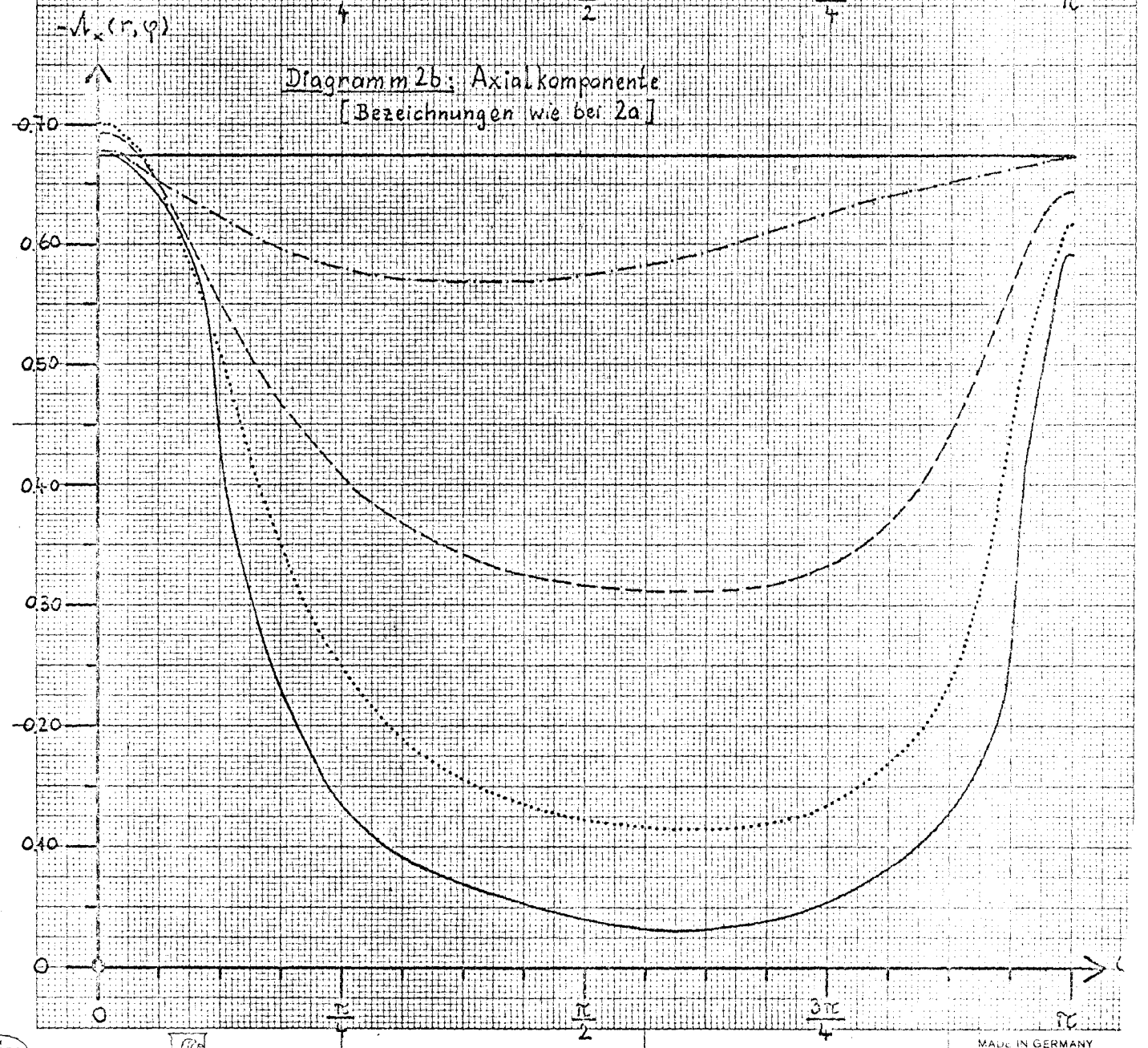
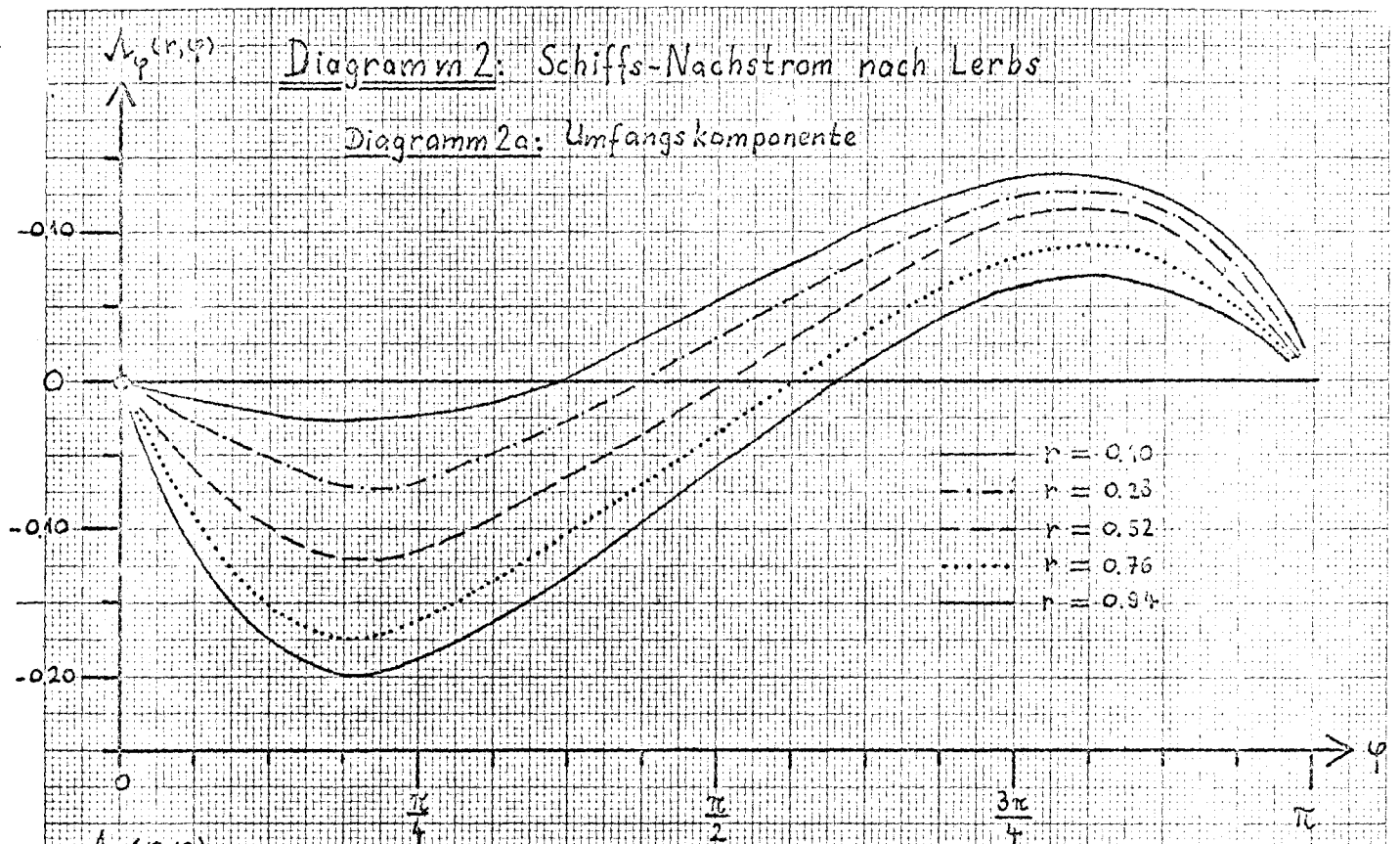
$$c_s = \frac{S}{\frac{8}{2} u_0^2 [1 - \bar{v}_x]^2 \cdot \pi R_a^2}$$

$$c_M = \frac{M}{\frac{8}{2} u_0^2 [1 - \bar{v}_x]^2 \cdot \pi R_a^3}$$

$$\bar{v}_x = \frac{1}{2\pi u_0} \frac{1}{R_a - R_i} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R_i}^{R_a} dr |u_N(\varphi, r, \varphi)|$$

Diagramm 1: Programm-System zur Wechselwirkung zwischen Schiff, Propeller und Ruder.





VII. Der Propeller im Lerbs-Nachstrom

Die Rechnungen wurden für 6 Beispiele durchgeführt, die in Tabelle 6 zusammen mit den im folgenden diskutierten Ergebnissen angegeben sind.

Tabelle 6: Rechenbeispiele und Ergebnisse:

Beispiel	k_A	$k_0^{(0)}$	$\lambda = \frac{u_0}{\omega R_0}$	$\lambda(1-\sqrt{V_x})$	$k_0^{(1)}$	c_s	c_s/c_M	η_i^{Gesamt}	Kramer η_i
1	0.32	0.18	0.15	0.11	0.22	7.98	4.54	0.50	0.43
2	"	"	0.20	0.14	0.23	3.84	4.25	0.61	0.61
3	"	"	0.25	0.18	0.25	2.04	4.01	0.72	0.71
4	0.38	0.32	0.20	0.14	0.26	5.20	3.81	0.54	0.54
5	"	"	0.25	0.18	0.28	2.91	3.60	0.65	0.66
6	"	"	0.30	0.21	0.29	1.73	3.43	0.72	0.73

In den Diagrammen 3 a-f ist die Zirkulationsdichte-Verteilung $\gamma_p^*(r, \lambda, \varphi)$ mit dem Ansatz $L=3$ für Beispiel 1 (stärkste Schubbelastung: $c_s = 7.98$) dargestellt. Für die Fälle 1,3,4,6 wird in den Diagrammen 4-7 (a-c) die Zirkulation sowie die Axial- und Umfangskraft für verschiedene Flügelstellungen angegeben; die lokale Steigung der freien Wirbel zeigen die Diagramme 8 a-d. Schließlich ist die über Umfang gemittelte Steigung der freien Wirbel $k_0^{(1)}$ in Diagramm 9 und der induzierte Wirkungsgrad $\eta_i(r)$ in Diagramm 10 aufgetragen.

Bei den Rechnungen wurden ungewölbte Profile vorausgesetzt: Beispiel 1-3 mit $k_A = 0.32$. Um aber auch die Wölbung zu berücksichtigen, wurde bei den Beispielen 4-6 eine gegenüber der Profilsehne erhöhte Steigung (etwa wie im 3/4-Strahl) angenommen: $k_A = 0.38$. Die mittlere hydrodynamische Steigung wurde geschätzt (nichtlinearisierte Theorie: $k_0 < k_A$). Aus dem erhaltenen Strömungsfeld kann $k_0^{(1)}$ wieder berechnet werden. Die Diagramme 8 a-d zeigen deutlich, wie stark $k_0^{(1)}(r, \varphi)$ von Radius und Umfangswinkel abhängt. Die Schwankungen sind umso kleiner, je kleiner der Fortschrittsgrad λ und je größer damit der Schubbelastungsgrad c_s ist: die induzierten Geschwindigkeiten der freien Quer- und Längswirbel haben also mit zunehmender Belastung einen stabilisierenden Einfluß.

In diesem Zusammenhang tritt die Frage auf, ob ein in einem Aufpunkt (r, χ^*) ablösender freier Wirbel den nachfolgenden Flügel treffen kann; damit dies nicht geschieht, muß gelten [5, Formel 12]:

$$(98) \quad \left(\frac{k_1}{k_0} - 1 \right) \cdot |\chi^* - \chi| < \frac{2\pi}{N} \Rightarrow k_0 > \frac{k_1}{1 + \frac{2\pi}{N \cdot |\chi^* - \chi|}}$$

Für den vorliegenden Propeller gilt:

$$\text{Beispiele 1-3: } k_1 = 0.32 \longrightarrow k_0 > 0.068$$

$$\text{Beispiele 4-6: } k_1 = 0.38 \longrightarrow k_0 > 0.106$$

Diese Bedingungen sind in den Diagrammen 8 überall erfüllt.

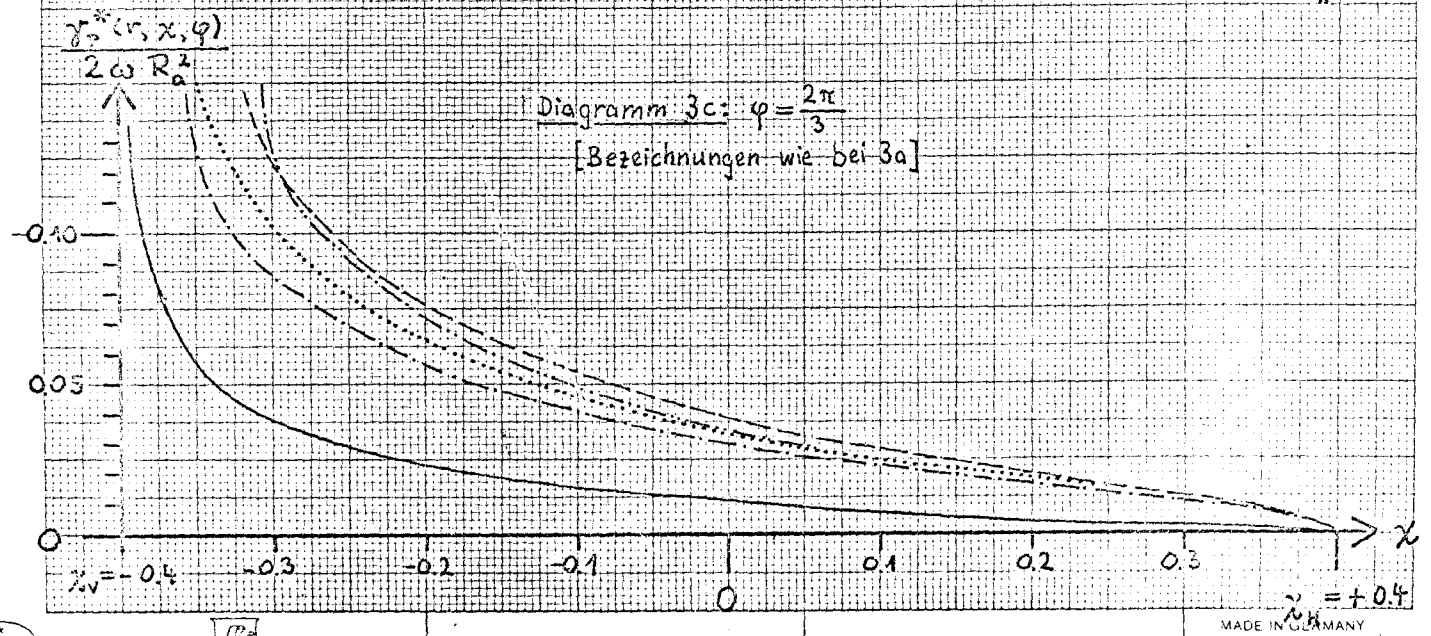
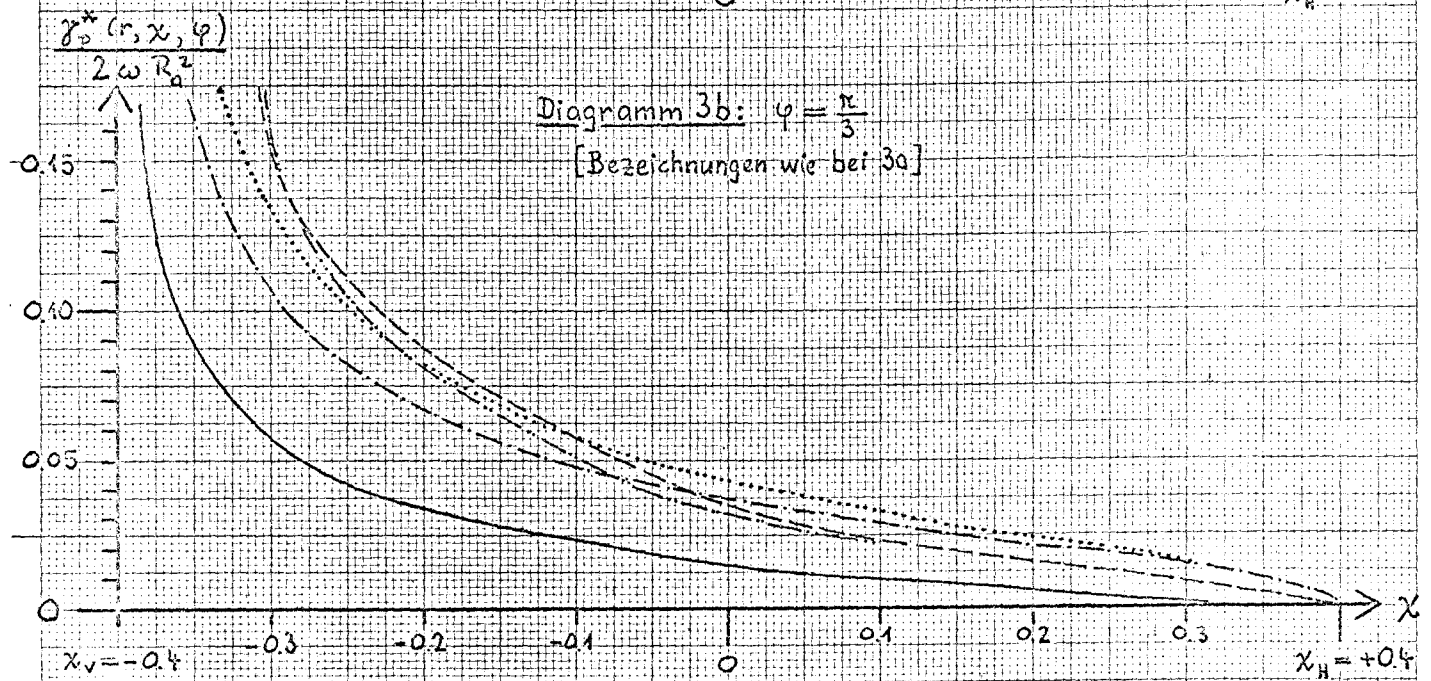
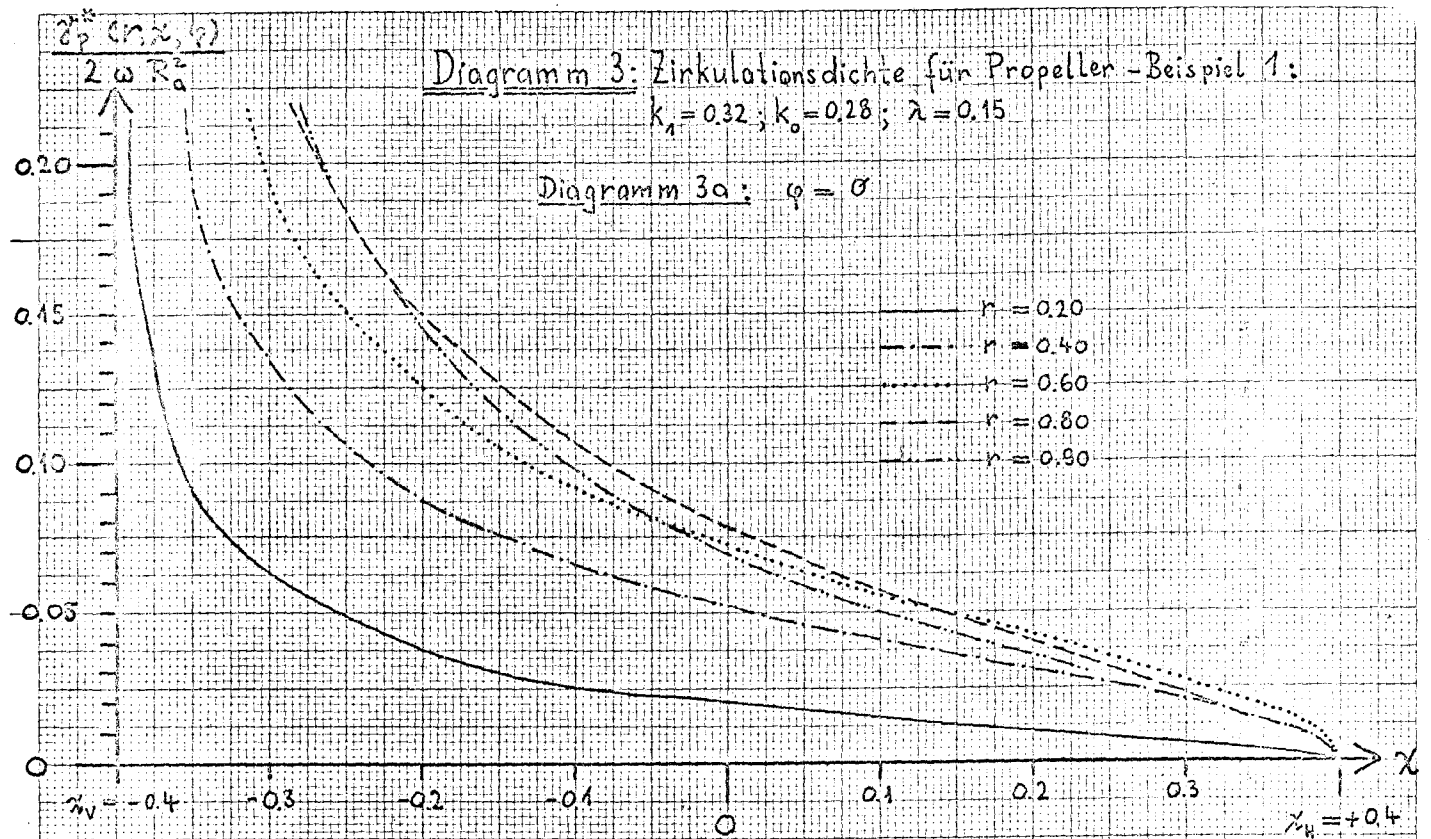
Nach Mittelung über den Umfangswinkel ist $\overline{k_0^{(A)}(\tau)}$ in Diagramm 9 aufgetragen. Die mittlere hydrodynamische Steigung (im Hauptbereich $0.50 \leq \tau \leq 0.95$ mit der stationären Zirkulation als Gewicht gemittelt) erweist sich in einem großen Bereich des Fortschrittsgrades als relativ stabil (s. Tabelle 6): während von $\lambda = 0.15$ auf $\lambda = 0.25$ der Schubbelastungsgrad um 75% abfällt, steigt $\overline{k_0^{(A)}(\tau)}$ nur um 12% an.

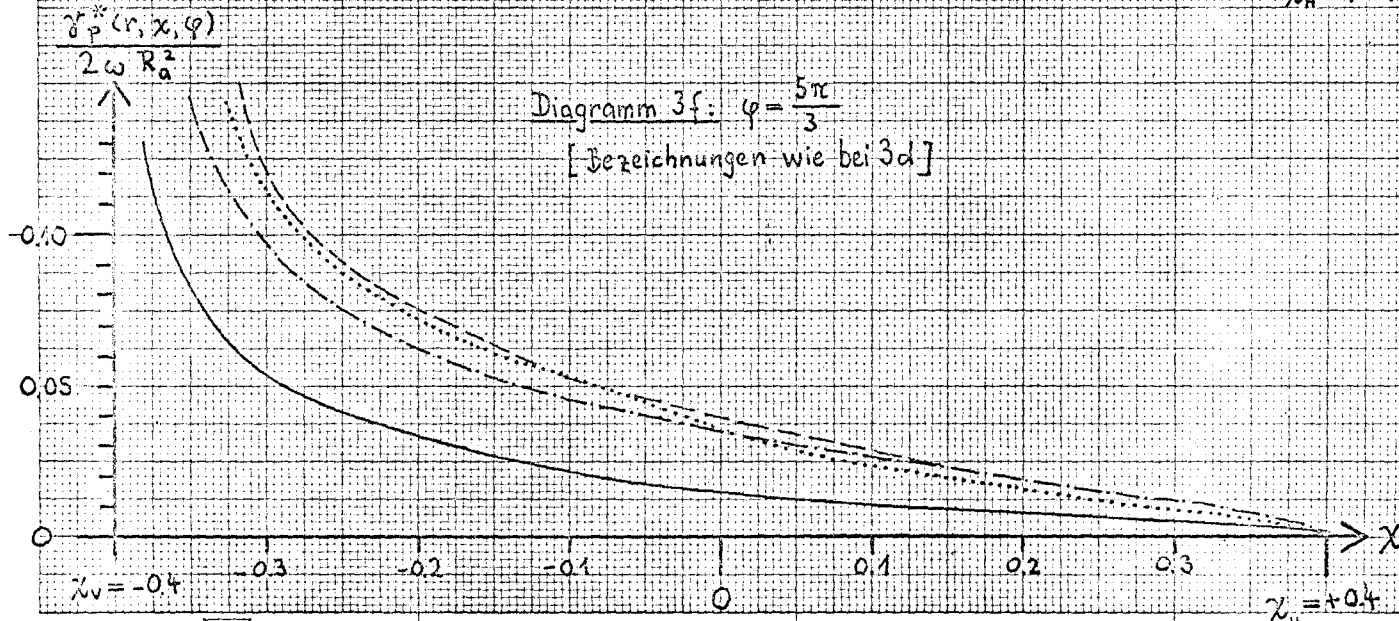
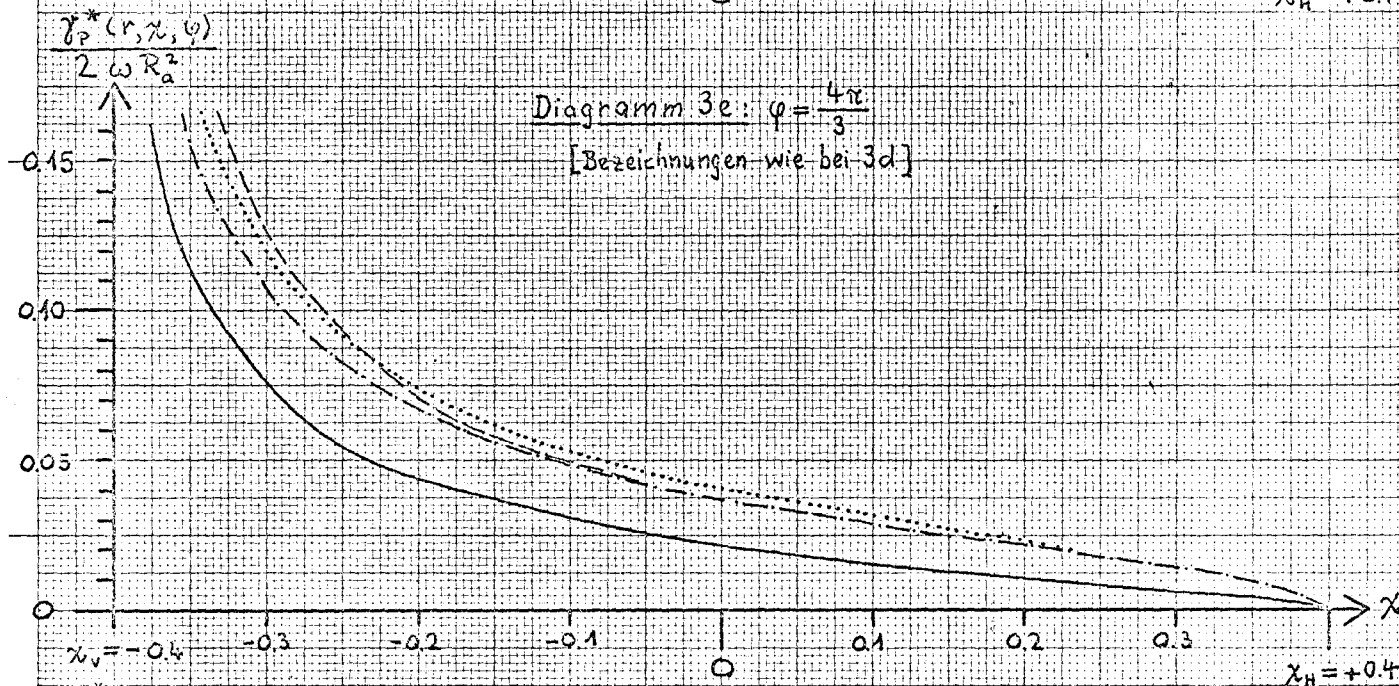
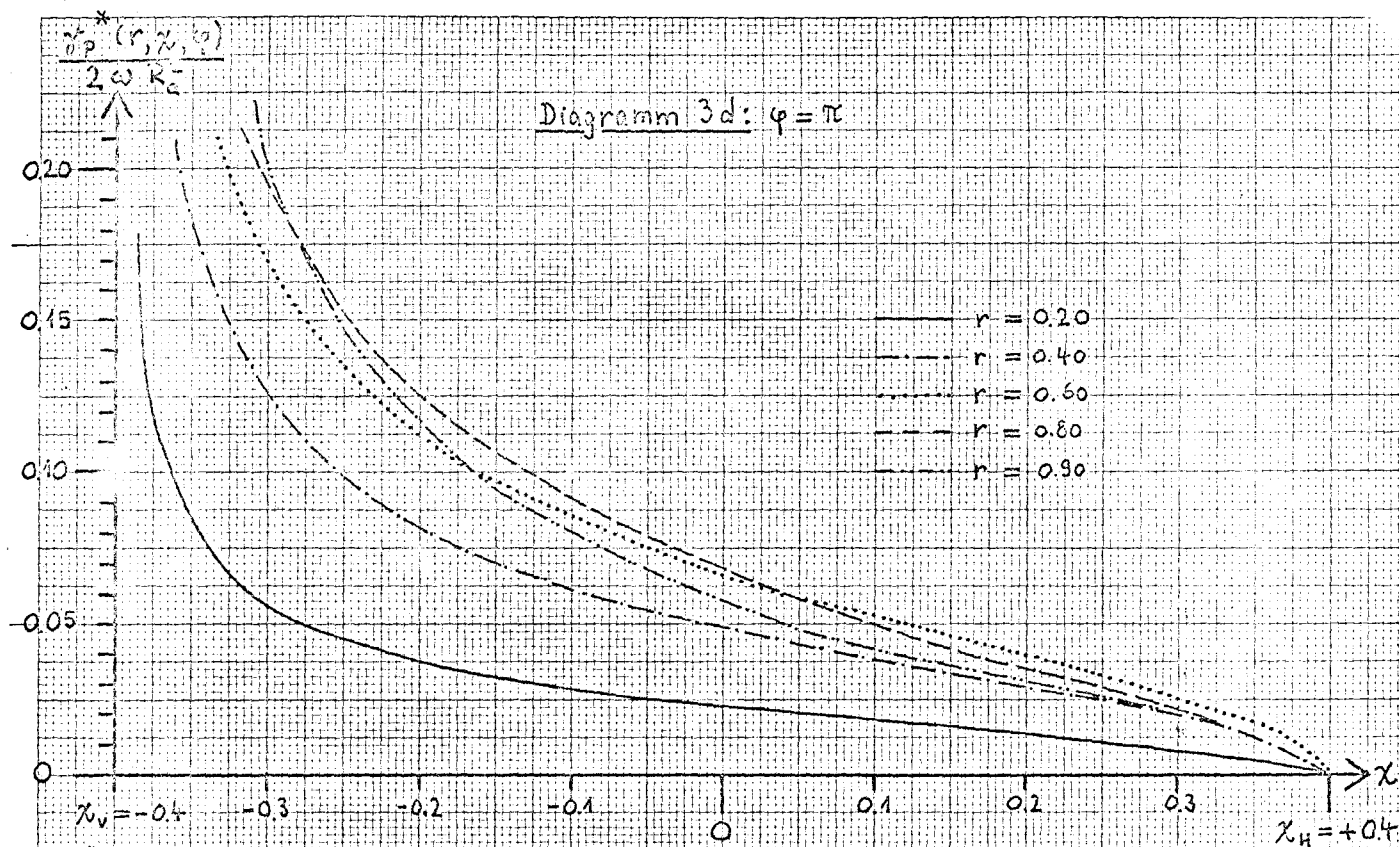
Der induzierte Wirkungsgrad ist nach (36) in Diagramm 10 dargestellt. Den Gesamt-Wirkungsgrad berechnen wir aus (36) näherungsweise durch τ -Integration:

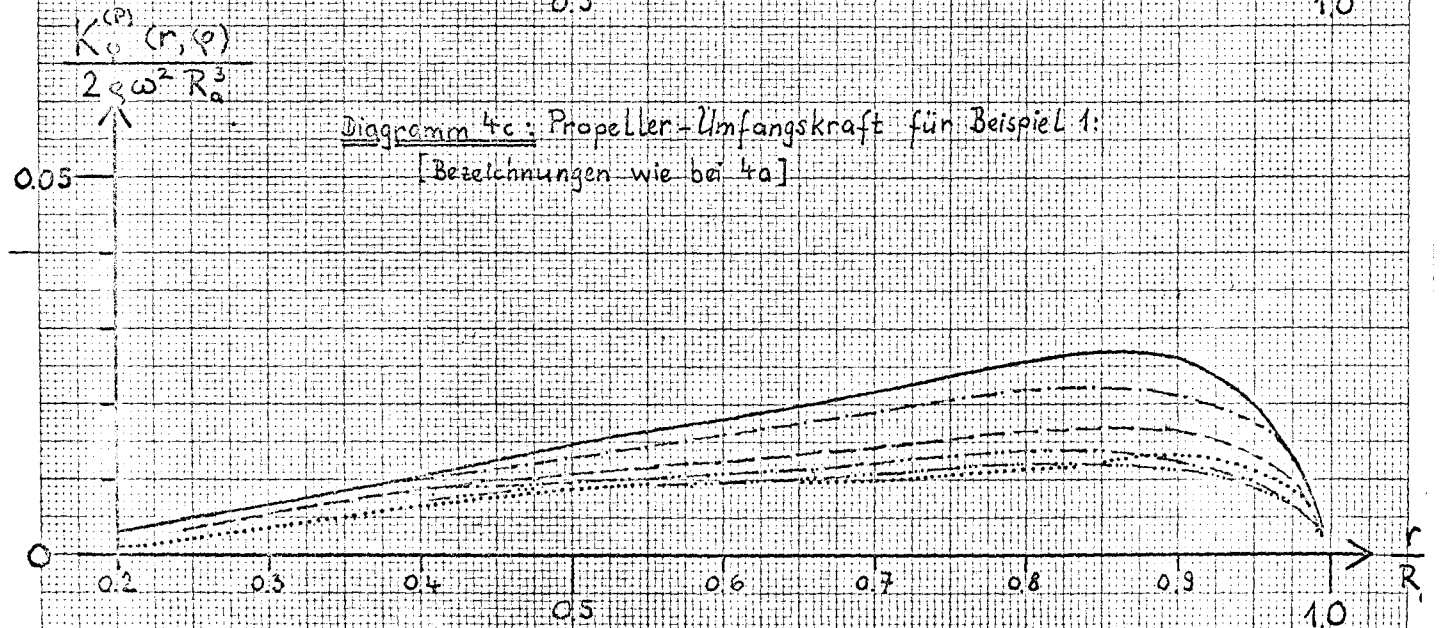
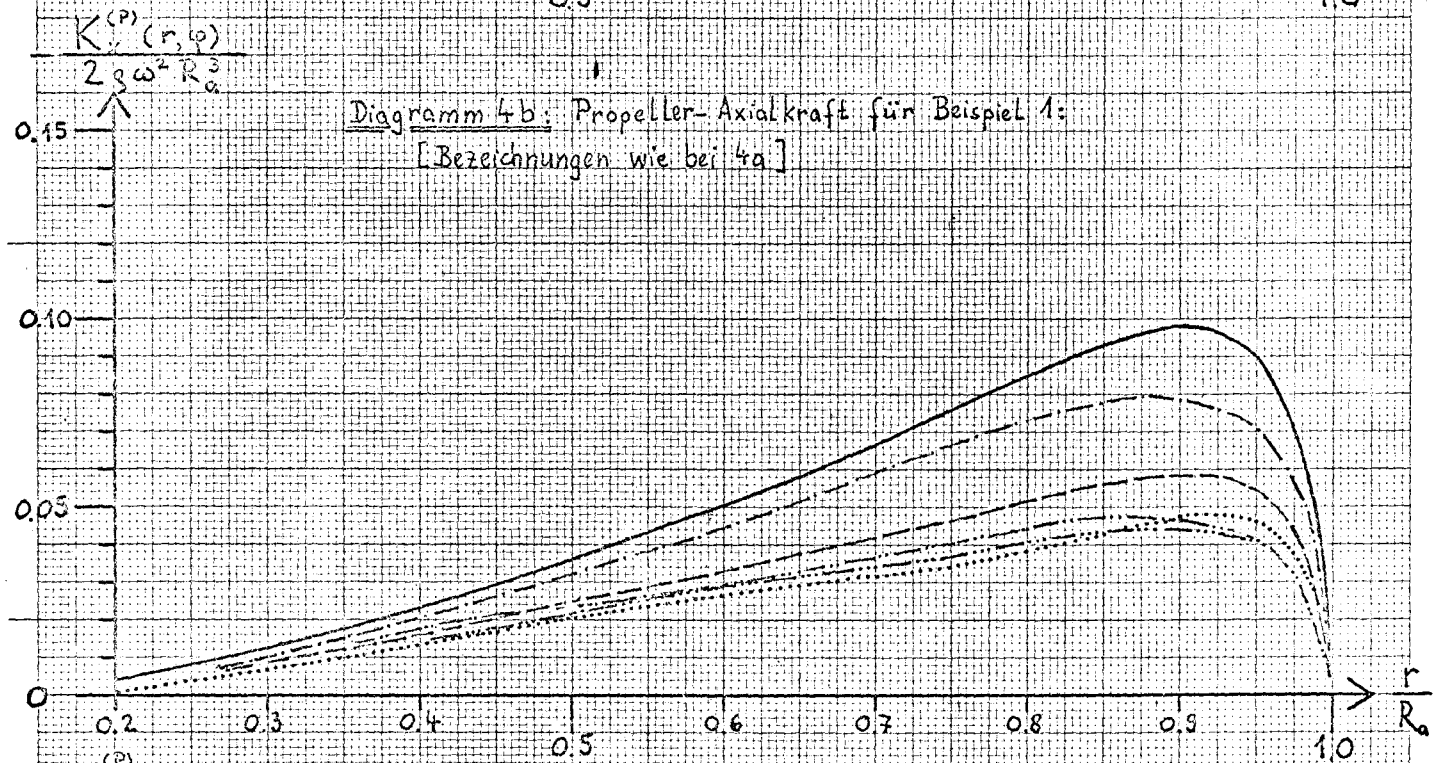
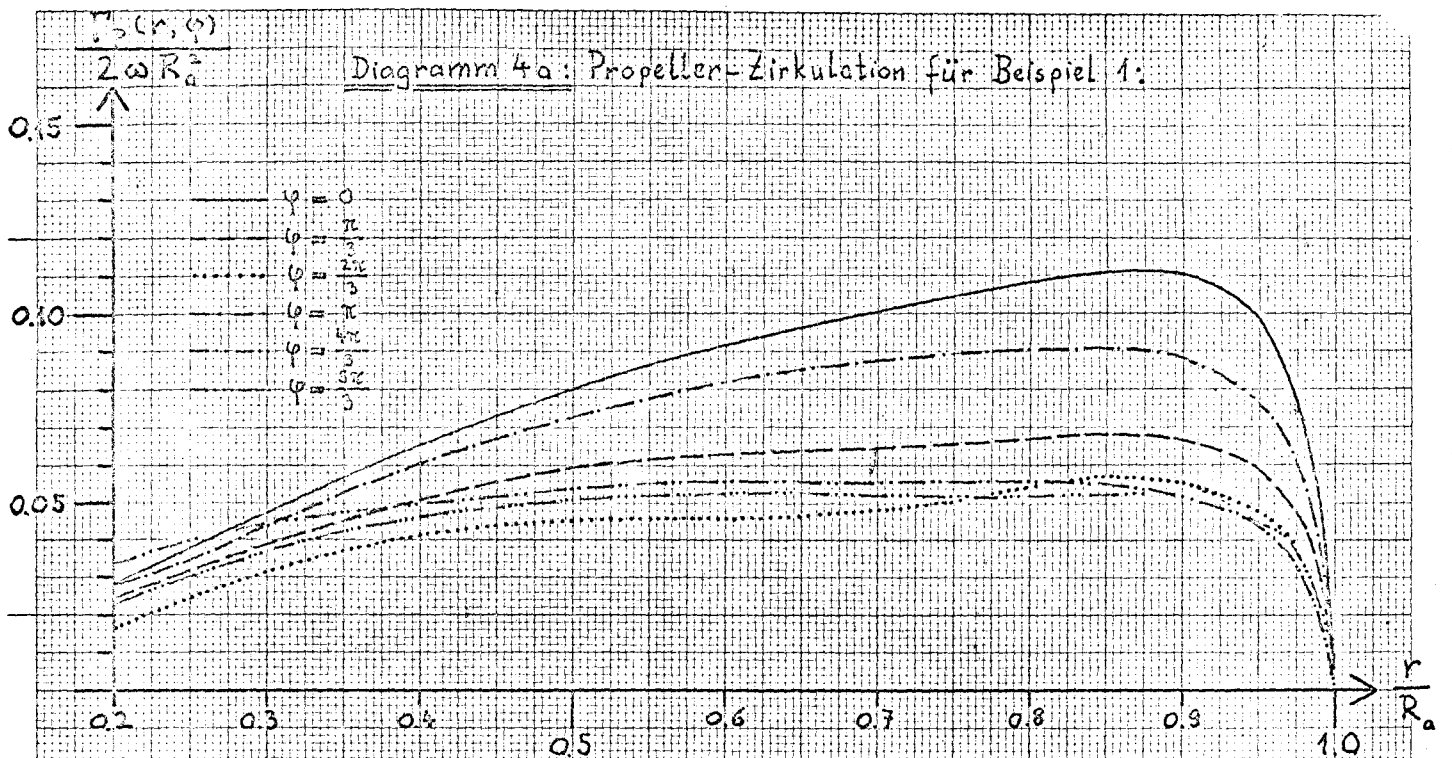
$$(99) \quad \eta_{Gi}^{\text{Gesamt}} = \frac{\int_{R_{i0}}^{R_{a0}} dr \int_0^{2\pi} d\varphi u_0(r, \varphi) \cdot \left| \int_{R_{i0}}^{R_{a0}} dr \int_0^{2\pi} d\varphi K_x^{(P)}(r, \varphi) \right|}{\omega \cdot 2\pi \cdot \int_{R_{i0}}^{R_{a0}} dr \cdot r \int_0^{2\pi} d\varphi K_\varphi^{(P)}(r, \varphi)} = \frac{u_0}{\omega R_a} \cdot (1 - \bar{V}_x) \cdot \frac{c_s}{c_m}$$

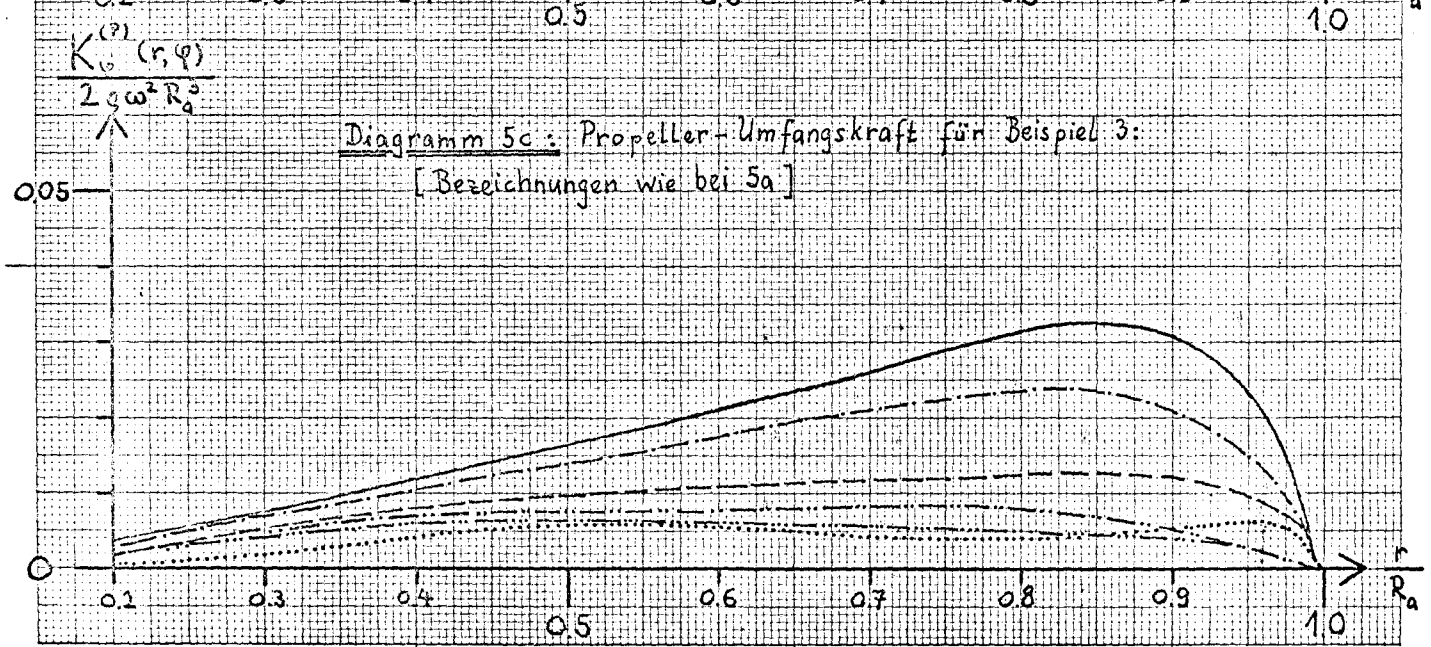
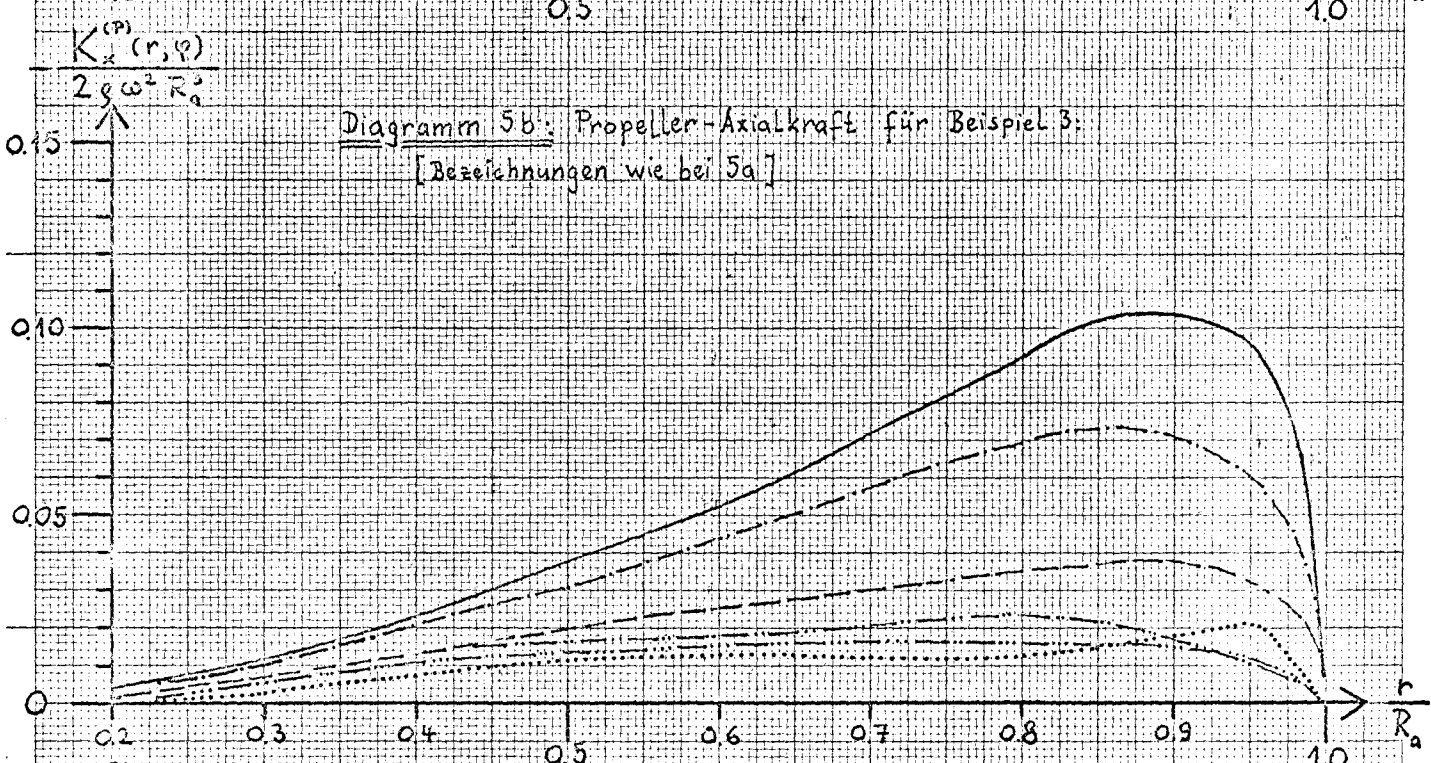
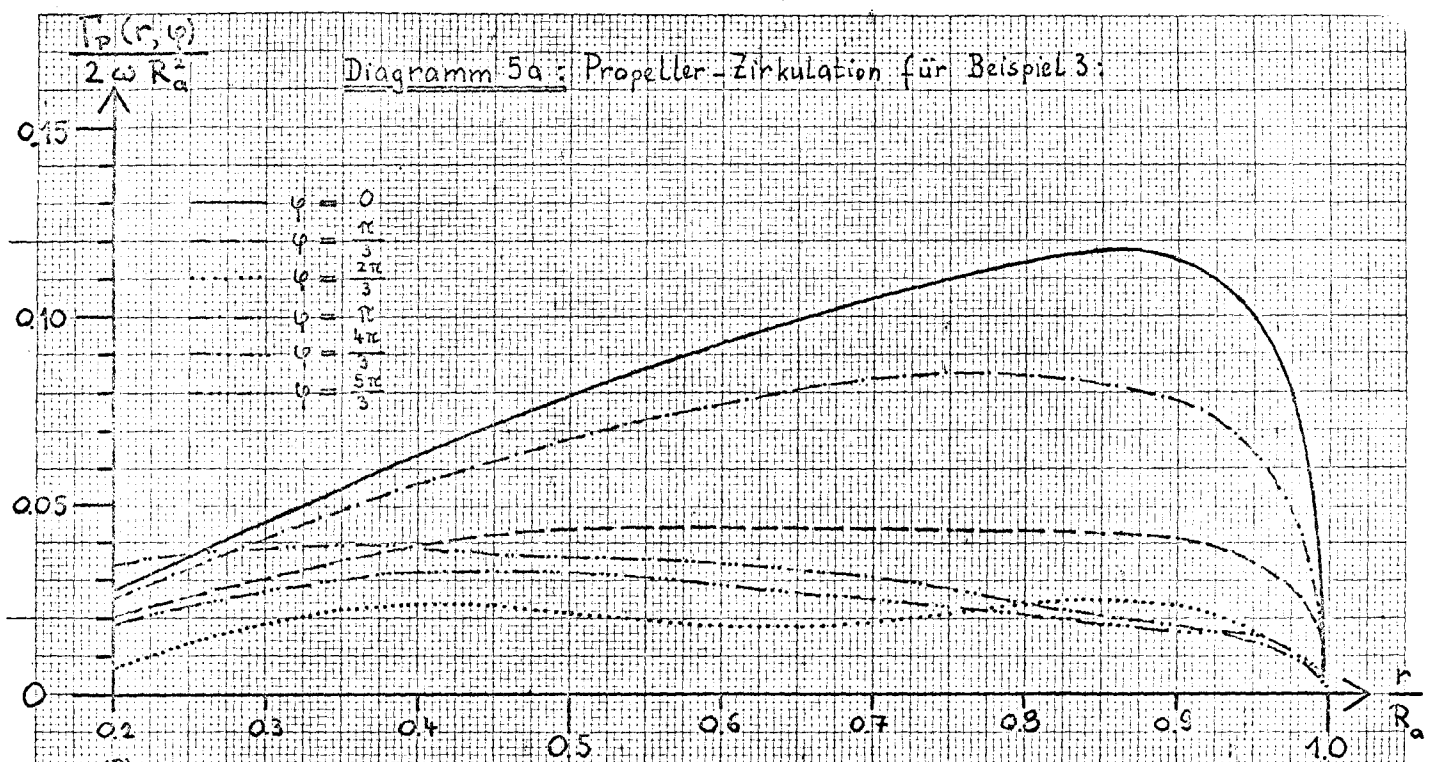
Dieser Gesamt-Wirkungsgrad $\eta_{Gi}^{\text{Gesamt}}$ stimmt im Rahmen des Rechen- und Ablesefehlers mit dem aus dem Kramer-Diagramm für $(c_s, \lambda_{red}, N=\infty)$ erhaltenen Wert überein. Allerdings macht sich hierbei der Fehler Δu_N des mittleren Nachstromes \bar{u}_N wegen $c_s \sim \frac{1}{u_0^2 \cdot (1 - \frac{\bar{u}_N}{u_0})^2}$ doppelt bemerkbar: $\Delta c_s \sim 2 \Delta u_N$.

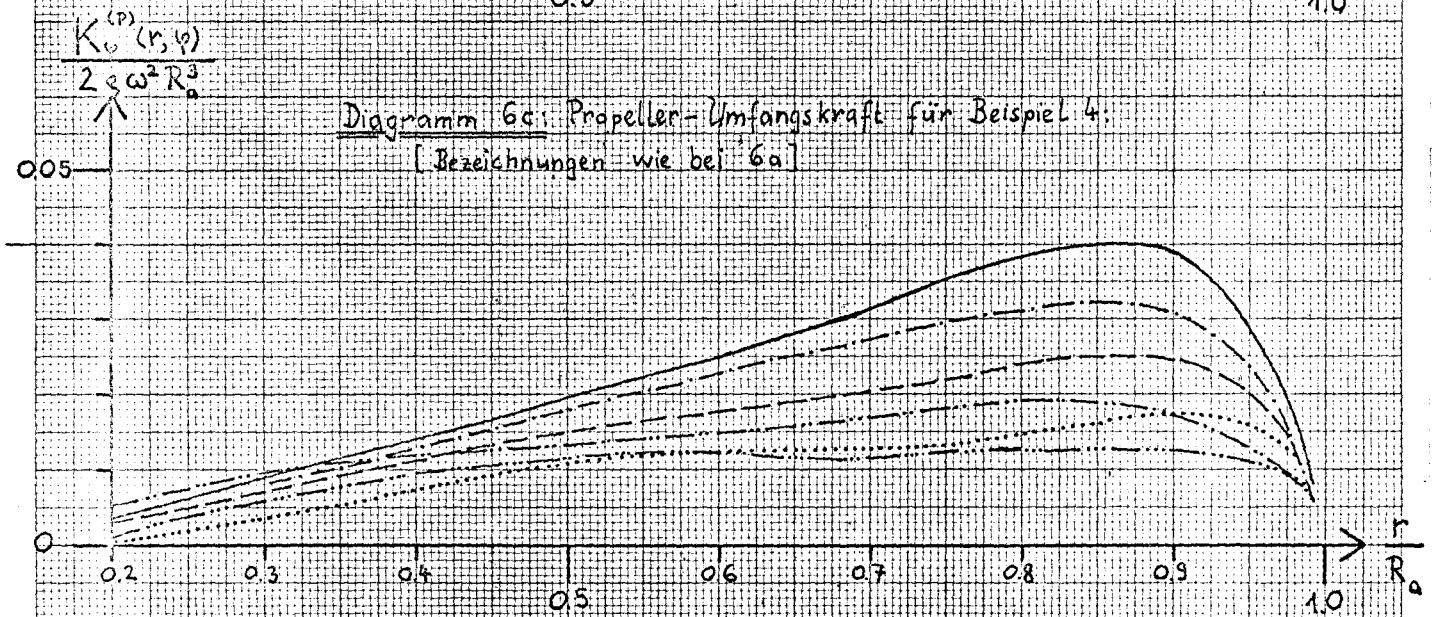
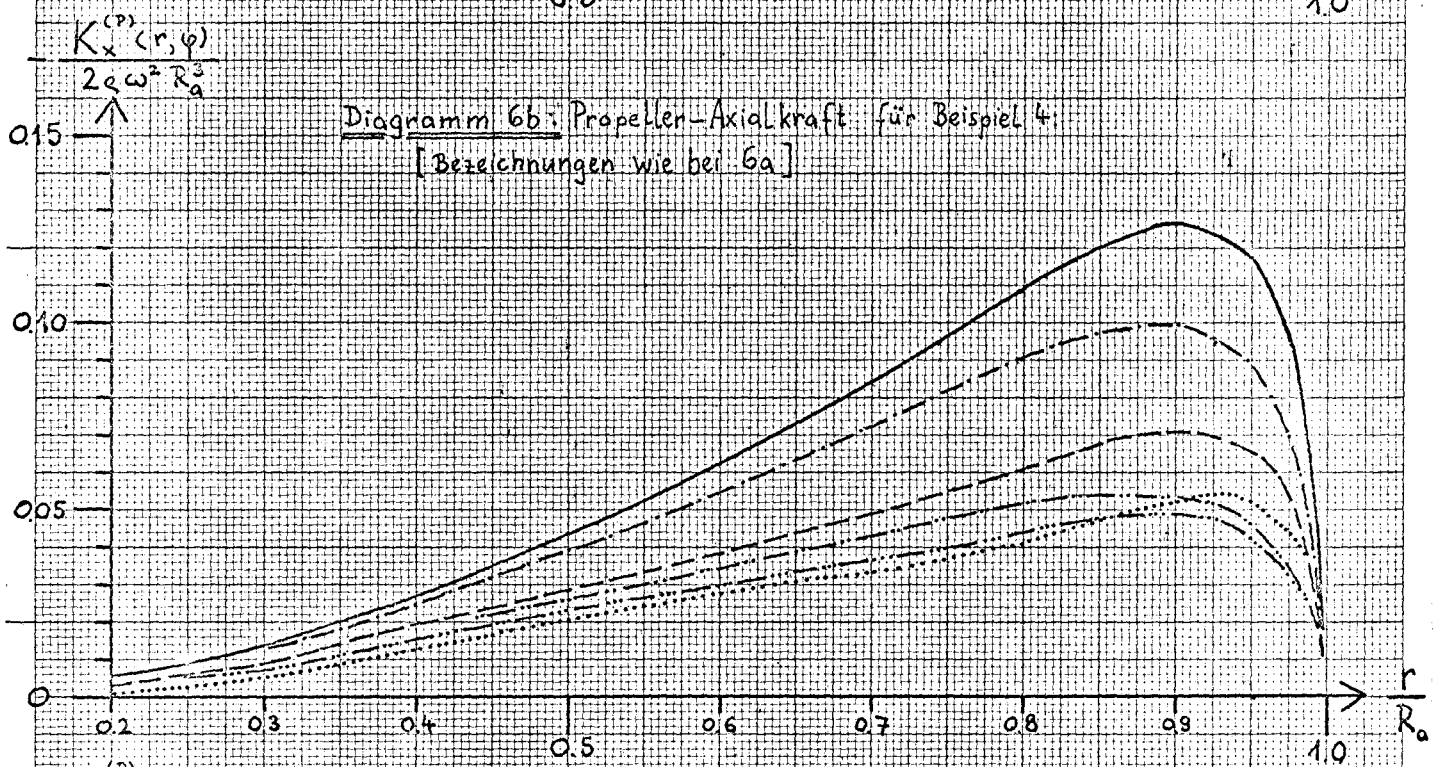
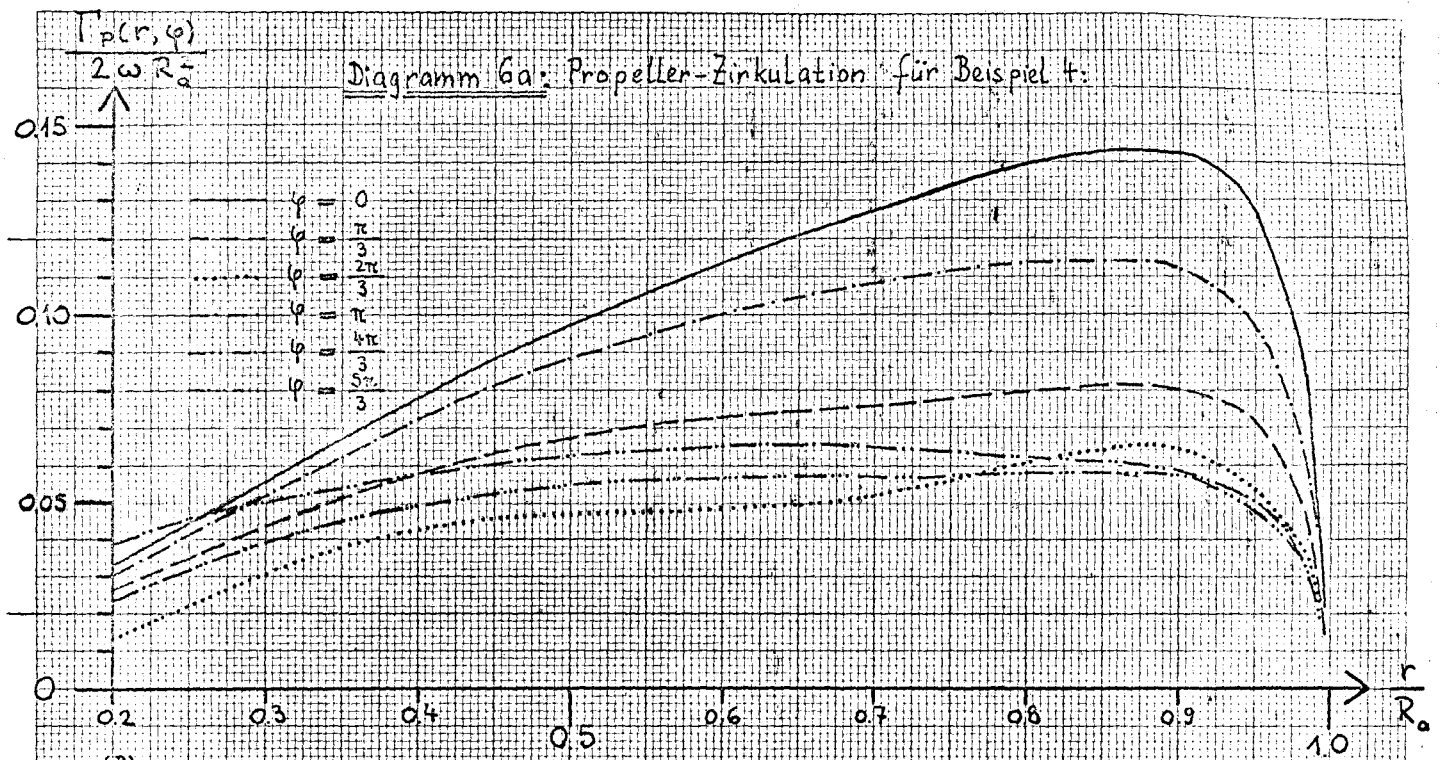
Der stabilisierende Einfluß der freien Wirbel, der sich schon bei der Diskussion von $k_0^{(A)}(r, \varphi)$ zeigte, wird auch bei den Propellerkräften deutlich: bei hoher Schubbelastung ($1: c_s = 7.98$) schwankt z.B. $K_x^{(P)}(r=0.90, \varphi)$ in φ -Richtung um ca. 50%; dagegen ist die Schwankung bei mäßiger Belastung ($3: c_s = 2.04$) fast viermal so groß (vergl. Diagramm 4-7).

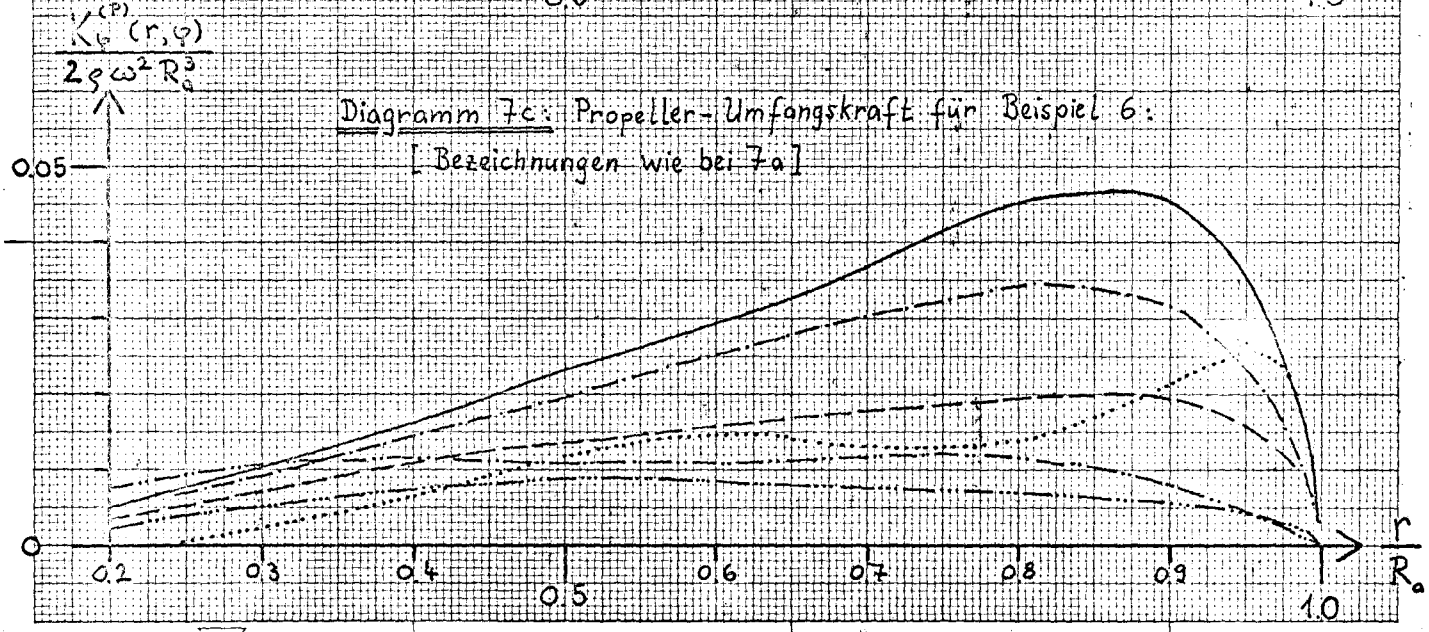
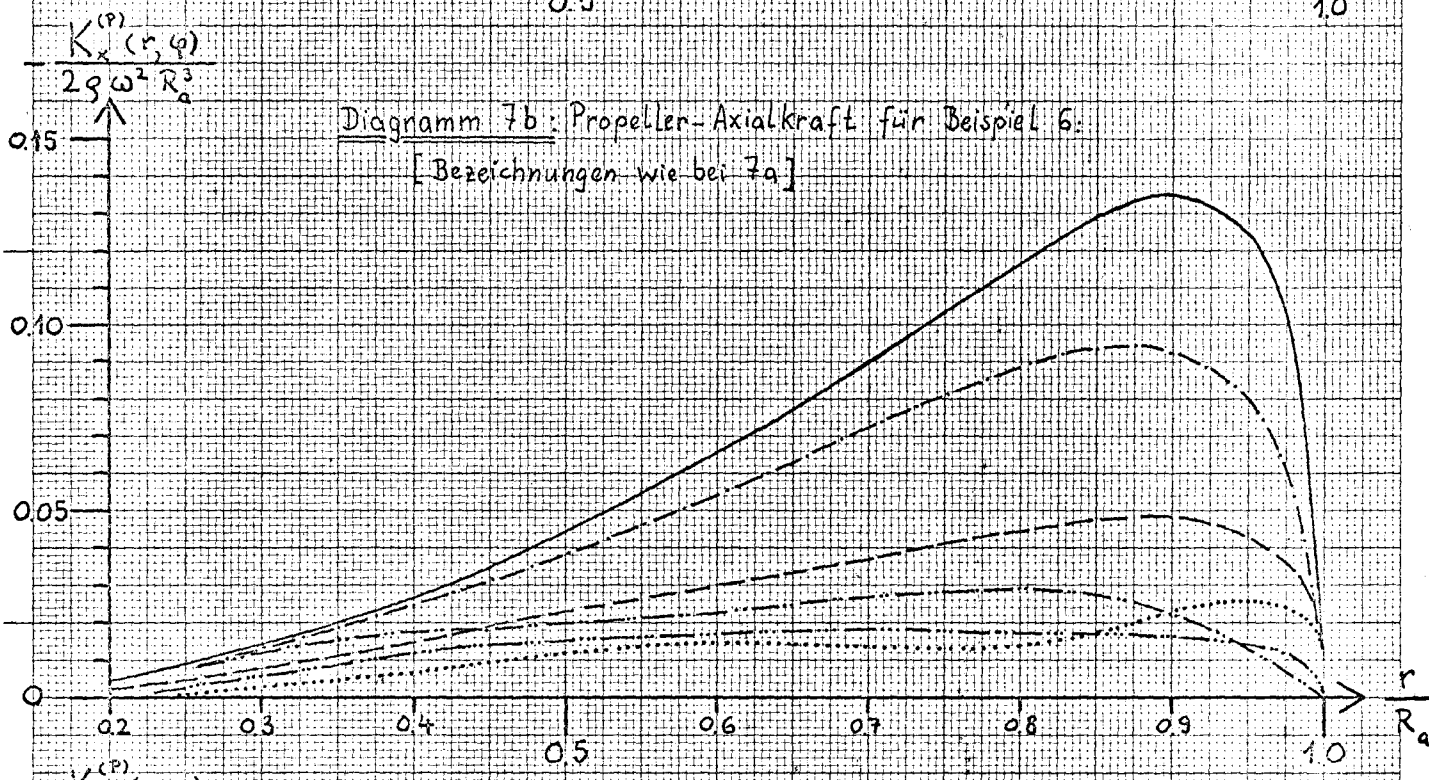
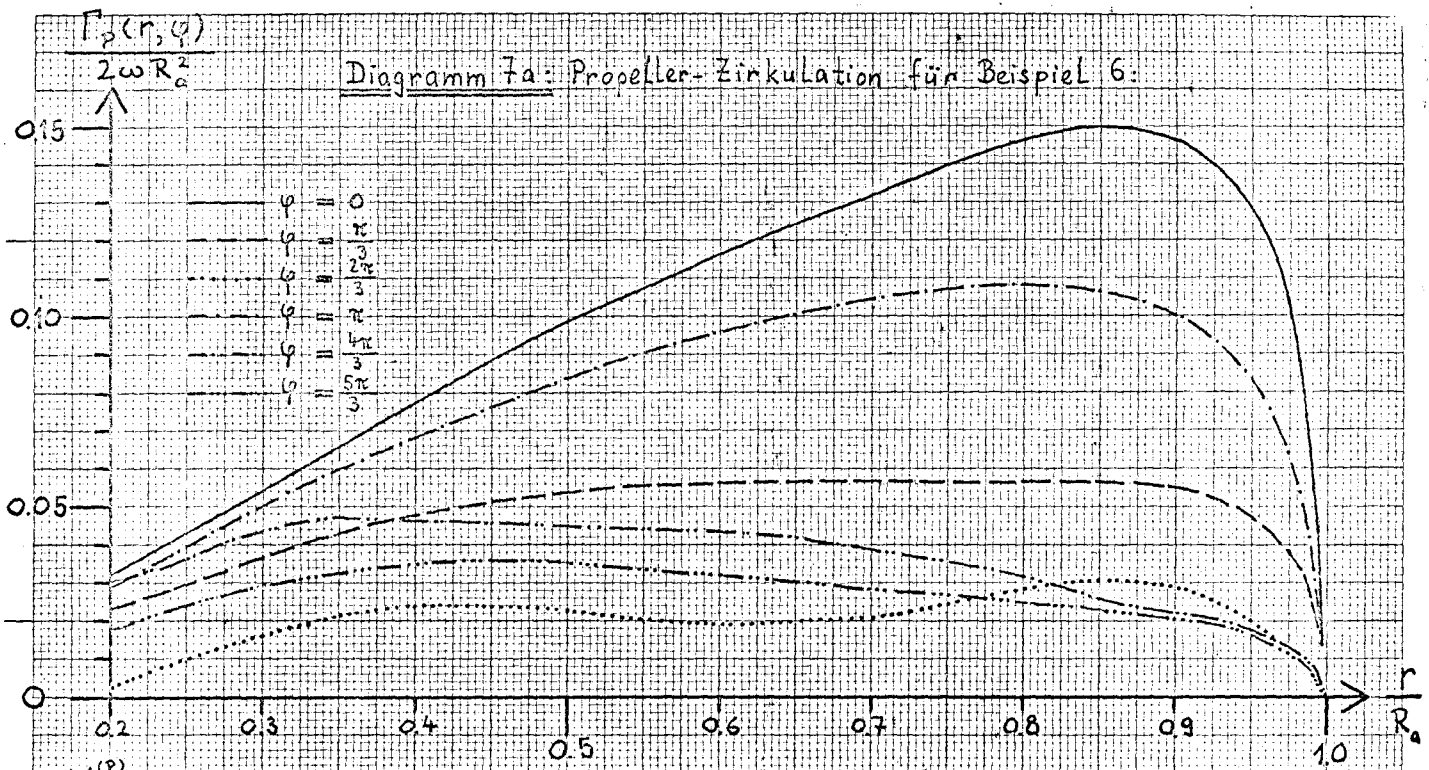






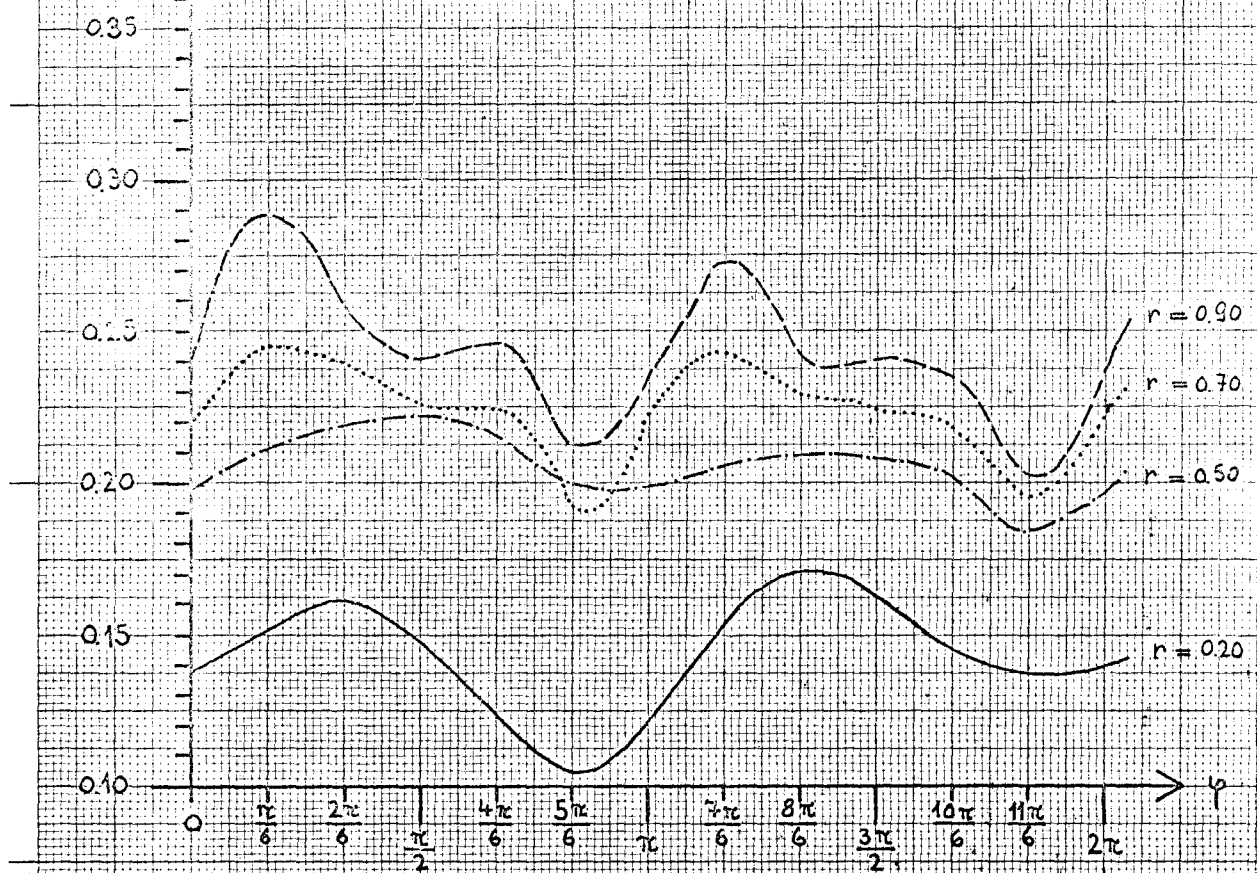






$k_0^{(1)}(r, \varphi)$

Diagramm 8a: Steigung der freien Wirbel, Beispiel 1:



$k_0^{(1)}(r, \varphi)$

Diagramm 8b: Steigung der freien Wirbel, Beispiel 3:

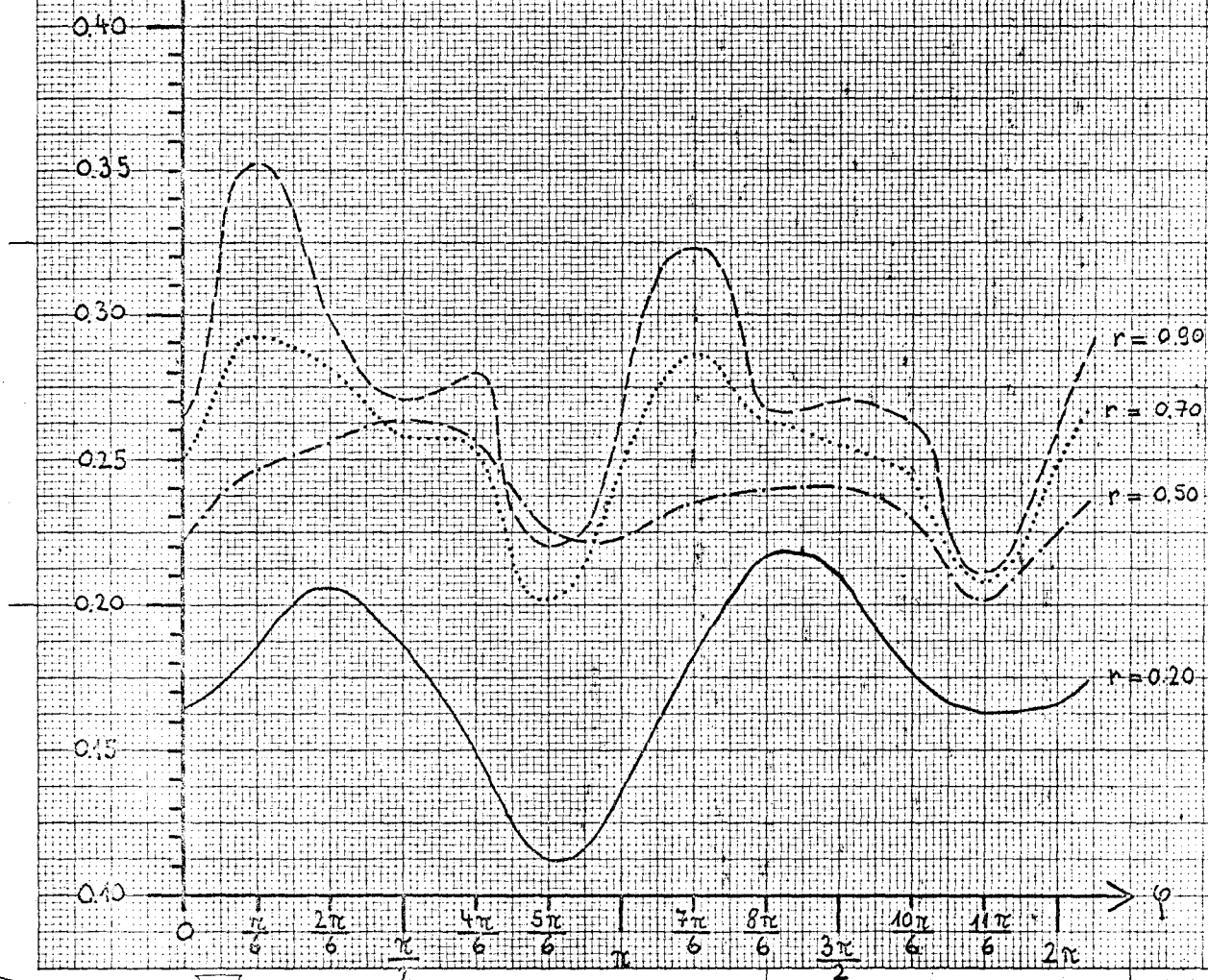


Diagramm 8c: Steigung der freien Wirbel, Beispiel 4.

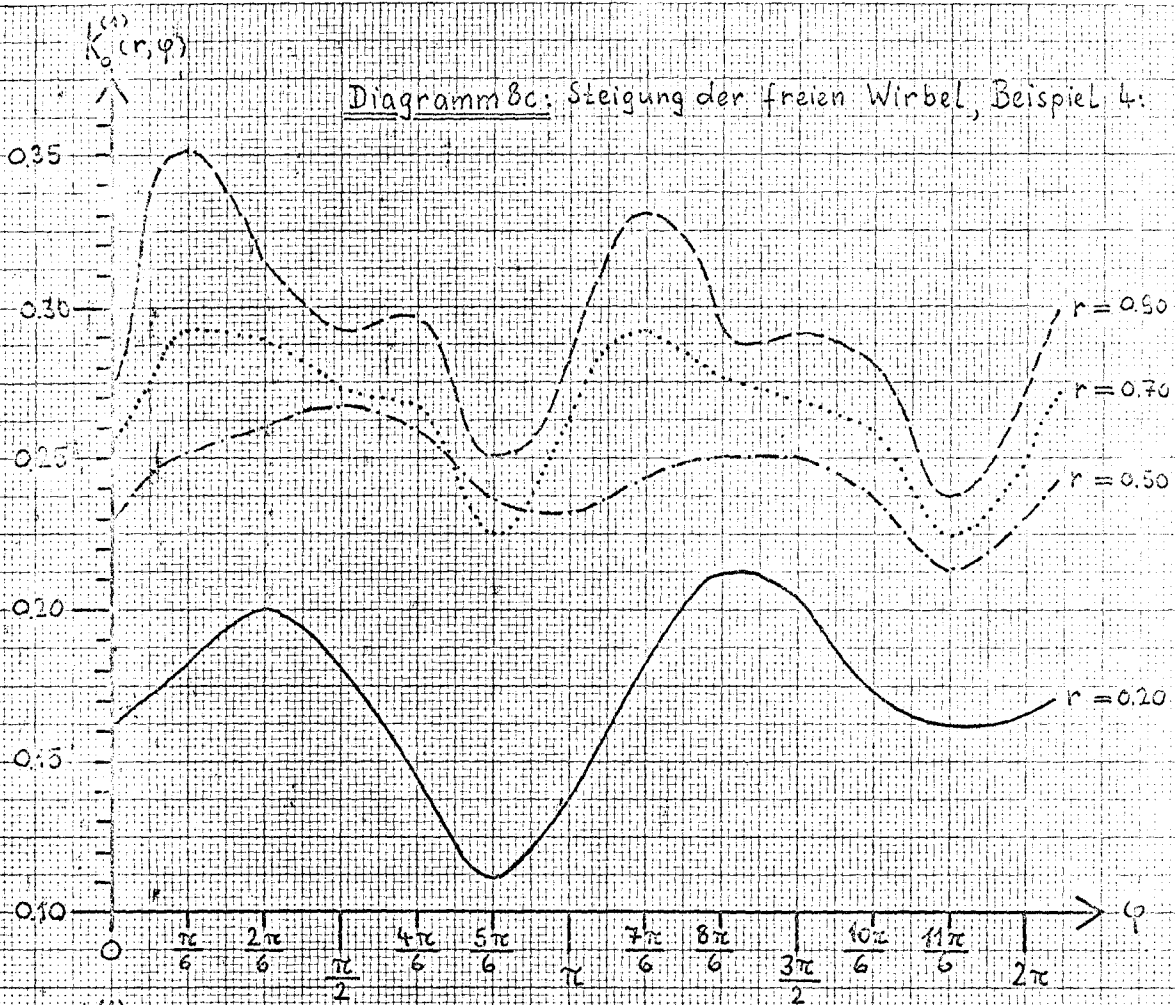


Diagramm 8d: Steigung der freien Wirbel, Beispiel 6.

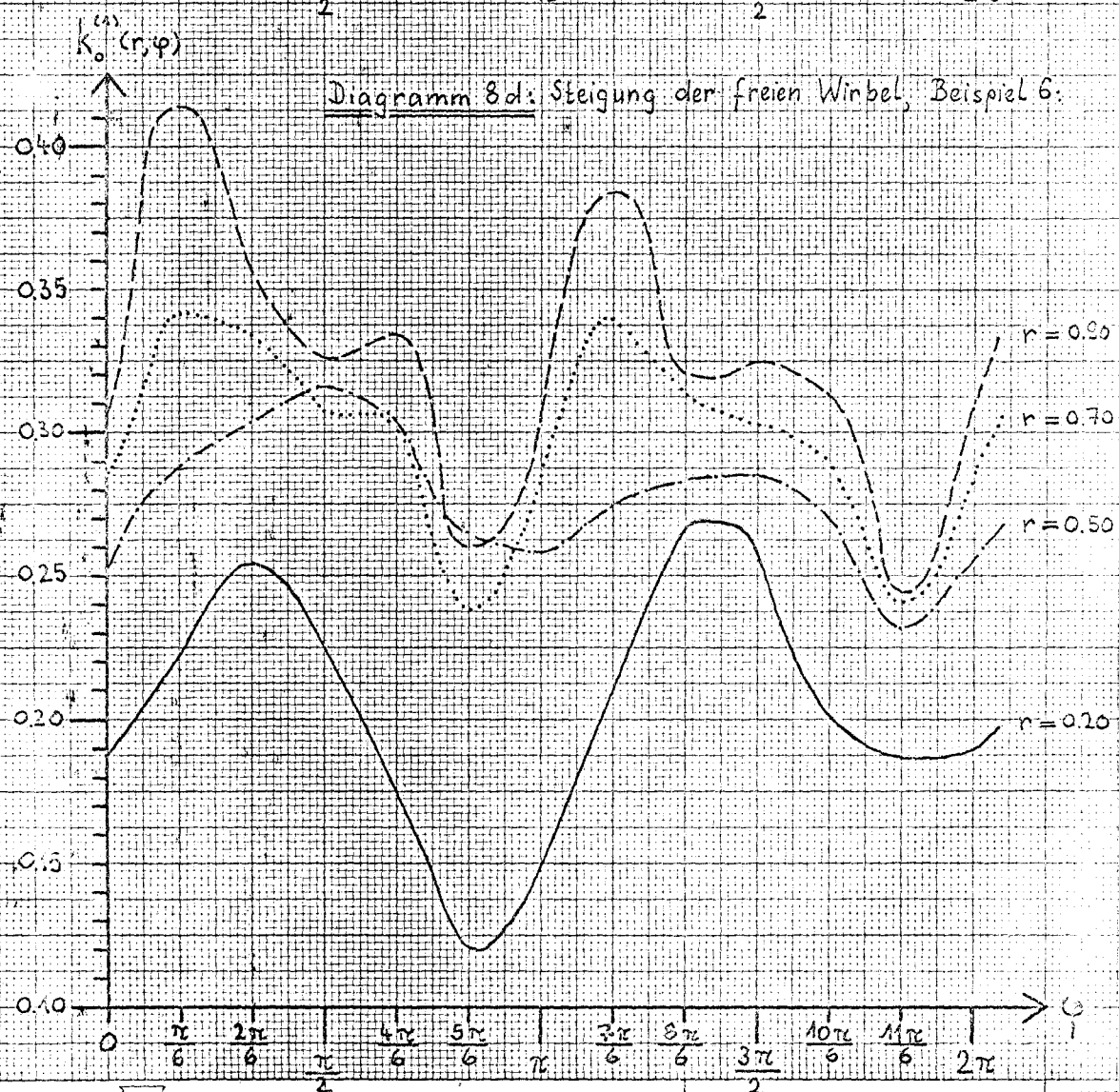


Diagramm 9: über Umfang gemittelte Steigung der freien Wirbel für die Propeller-Beispiele 1-6:

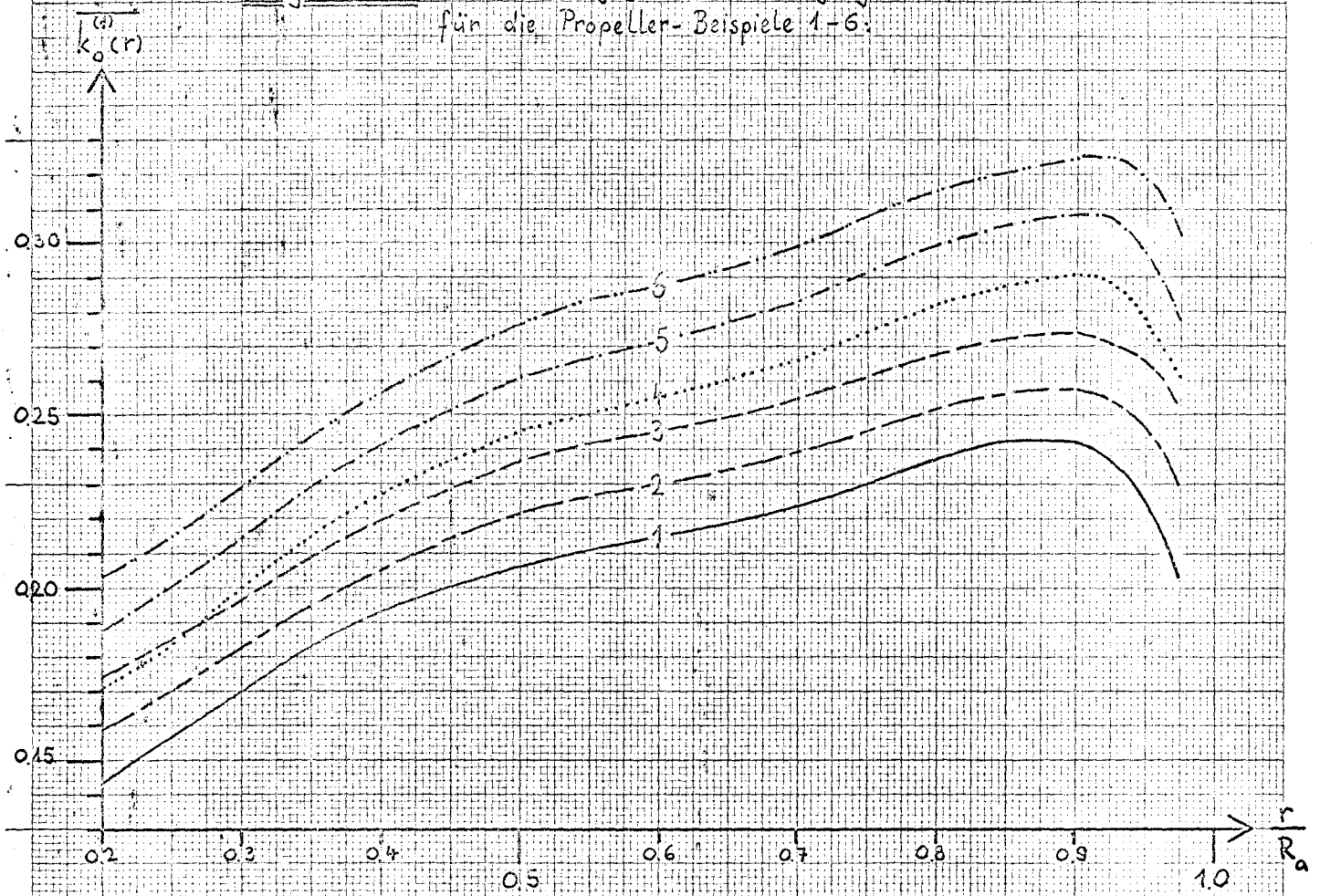
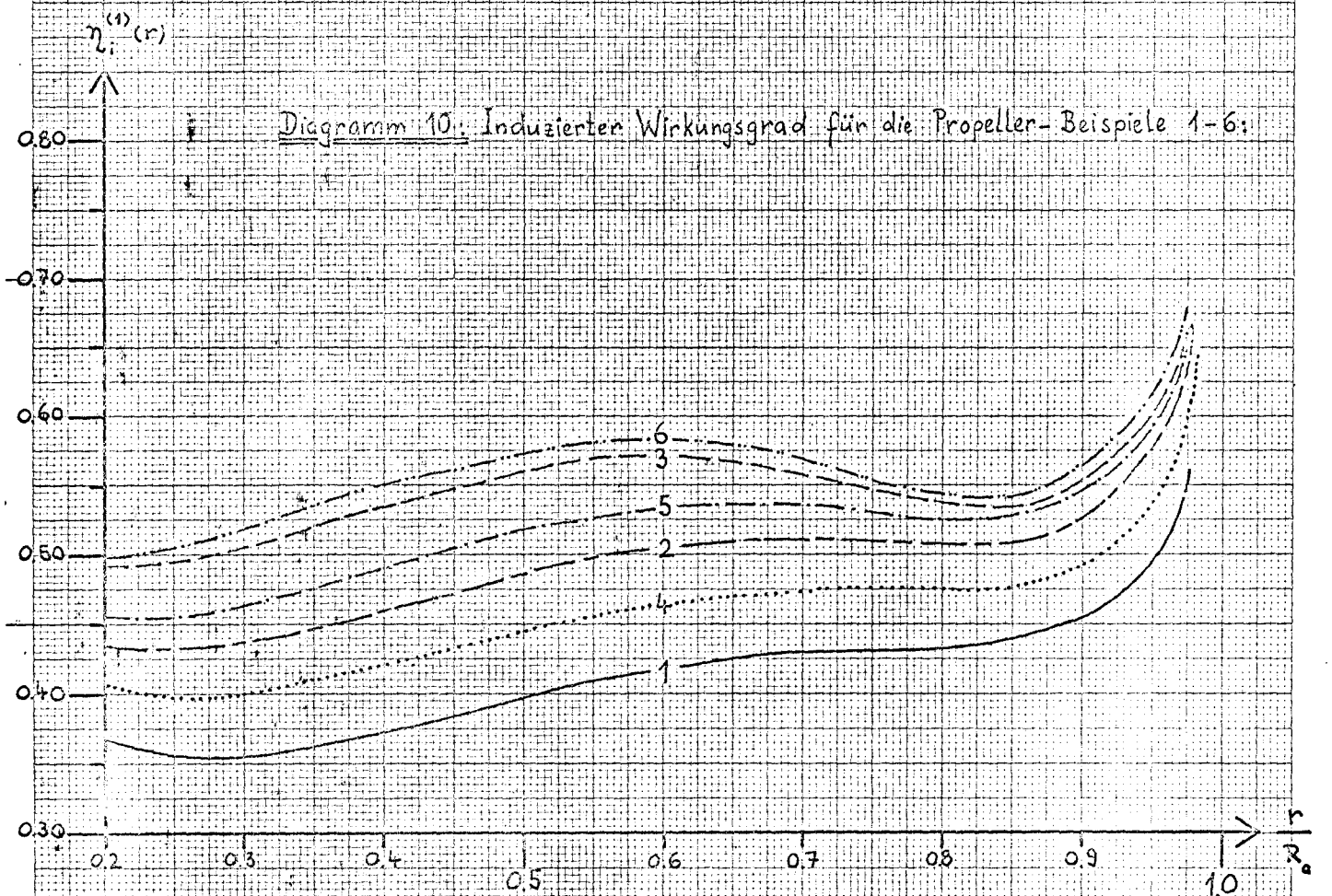


Diagramm 10: Induzierten Wirkungsgrad für die Propeller-Beispiele 1-6:



VIII. Das Ruder im Geschwindigkeitsfeld von Schiff und Propeller

Aus der in Kap. VII für die Beispiele 1-6 erhaltenen Propellerzirkulation können die vom Nachstrompropeller am Ruder induzierten Geschwindigkeiten berechnet werden^{*)}. Im folgenden werden drei Fälle jeweils rechteckig-geformter Ruder behandelt (Tabelle 7), von denen die beiden ersten bis zum Rand des (nicht-kontrahierenden) Propellerstrahles reichen, während das Ruder im dritten Fall den Strahlrand oben um 10% seiner Spannweite überragt. Für die Rechnungen wurde die Drehachse im 1/4-Strahl angenommen: $\frac{\xi}{a} = 0.50$.

Tabelle 7: Behandelte Ruderbeispiele:

Beispiel	Parameter
A	$\lambda = 2 ; b_0 = b_1 = 1$
B	$\lambda = 1.5 ; b_0 = b_1 = 1$
C	$\lambda = 2 ; b_0 = 1 ; b_1 = 1.2$

Die Induktion eines Propellers $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$ am Ruder (A, B, C) wollen wir mit A_i bzw. B_i bzw. C_i bezeichnen. Zur Darstellung der Nachstromwirkung am Ruder wurde angenommen, daß das in Kap. VII benutzte Lerbs-Nachstromfeld in x-Richtung exponentiell mit vom Radius abhängigen Dämpfungskonstanten $\beta(r)$ abfällt:

$$(100) \quad w_N(x) = w_N(x=\sigma) \cdot e^{-\beta(r) \cdot x}$$

Zur Bestimmung der $\beta(r)$ wurden Nachstrom-Messungen in zwei Ebenen hinter einem Schiff benutzt [12], die etwa folgende Werte ergaben:

Tabelle 8: Dämpfung des Nachstromes:

r	0.08	0.18	0.28	0.52	0.76	0.86	0.96
$\beta(r)$	0.43	0.48	0.55	0.66	0.76	0.79	0.83

Die Rechnungen wurden für drei Winkel $\delta = \{0; -0.1; -0.2\}$ sowie jeweils für zwei praktisch-interessierende Abstände $x_0 = \{0.65; 1.00\}$ durchgeführt.

*) Hierbei wurde in erster Näherung der vorausgeschätzte Wert der hydrodynamischen Steigung eingesetzt.

Die Ruder-Zirkulationsdichte $\gamma_R(\zeta, \eta)$ ist für die Fälle A1, A3 (starke bzw. mäßige Propellerbelastung) bei den Anstellwinkeln $\delta = \{0, -0.2\}$ in Diagramm 11-12 (a, b) über der Flügeltiefe (im Teilbereich $-\frac{a}{2} \leq \zeta \leq +a$) dargestellt. Zirkulation sowie Axial- und Steuerkraft für die Beispiele A1, A3, A4 und B1, C1 folgen in den Diagrammen 13-17 (a-c). Die Abhängigkeit der Gesamtkräfte sowie der mittleren Exzentrizität vom Propeller-Schubbelastungsgrad ist für A1-A6 in Diagramm 18 (a-c) aufgetragen.

Die für den Fall A1 erhaltenen Traglinienkoeffizienten $\tilde{B}_k^{(R)}(\delta)$ sind in Tabelle 9 zusammengestellt:

Tabelle 9: Traglinienkoeffizienten für A1 ($x_0 = 0.65$):

k	$\tilde{B}_k^{(R)}(\delta=0)$	$\tilde{B}_k^{(R)}(\delta=-0.10)$	$\tilde{B}_k^{(R)}(\delta=-0.20)$
1	-0.045	0.403	0.941
2	0.583	0.755	0.906
3	-0.023	0.046	0.178
4	-0.148	-0.123	-0.112
5	0.005	0.018	0.052
6	0.058	0.062	0.085
7	0.002	0.010	0.020
8	-0.029	-0.045	-0.065

Mit zunehmendem Anstellwinkel wird die Konvergenz der Traglinienkoeffizienten schlechter, aber sie reicht aus, um die Zirkulation darzustellen. Anders als bei Isay (2) ist die für $\delta = 0$ erhaltene Zirkulation nicht mehr spiegelsymmetrisch zu $y=0$; die allerdings geringe Unsymmetrie ist eine Folge der Nachstromwirkung am Propeller.

Die Axialkraft (Diagramme 13b-17b) liefert für $\delta = 0$ über den ganzen Flügel einen Vortrieb; dieser hängt stark von der verfügbaren Drallenergie ab, da die Gesamt-Umfangsgeschwindigkeit sowohl über die Zirkulation ($K_x \sim \Gamma_x$) als auch direkt ($K_x \sim \omega$) zur Kraft K_x beiträgt (siehe Formel 34a).

Für $\delta \neq 0$ macht sich der abmindernde Beitrag der freien Ruder-

wirbel zunehmend bemerkbar. Diese sind nach der Näherungsformel berechnet:

$$(101) \quad w_{R_f}(t^*) = w_{R_f}(y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-b_0}^{b_1} \frac{d\eta}{y-\eta} \frac{d\Gamma_2(\eta)}{d\eta} = -\frac{u_0}{4} \sum_{k=1}^K k \cdot \tilde{B}_k^{(R)} \frac{\sin(k \cdot t^*)}{\sin t^*}$$

Wegen des bei $\delta \neq 0$ sehr starken Anstiegs der Zirkulation bei $y \approx -b_0$ wird dieser Bereich besonders wirksam:

$$\lim_{y \rightarrow -b_0} w_{R_f}(y) = -\frac{u_0}{4} \sum_{k=1}^K k^2 \cdot \tilde{B}_k^{(R)}$$

Hier tragen wegen der schlechteren Konvergenz der Koeffizienten $\tilde{B}_k^{(R)}$ die höheren k -Anteile ganz erheblich bei. Daher wird der Verlauf der Vortriebskraft über Spannweite mit zunehmendem Anstellwinkel unsicher. Dagegen gilt für die Gesamt-Axialkraft:

$$(102) \quad K_{x,R}^* = \int_{-b_0}^{b_1} dy K_x^{(R)}(y) = \int_{-b_0}^{b_1} dy [w_p(y) + w_N(y) + w_{R_f}(y)] \cdot \Gamma_R(y) \\ = \int_{-b_0}^{b_1} dy [w_p(y) + w_N(y)] \cdot \Gamma_R(y) + \frac{b_1 + b_0}{2} \sum_{k=1}^K k \tilde{B}_k^{(R)2}$$

Wegen der ausreichenden Konvergenz von $k \cdot \tilde{B}_k^{(R)2}$ ist auch für $\delta \neq 0$ die angegebene Gesamt-Vortriebskraft $K_{x,R}^*$ recht sicher. Das Diagramm 18a zeigt diese für die Beispiele A1-A6; dabei ist für $c_s \rightarrow 0$ der Wert eingetragen, den man für ein Ruder im Nachstrom ohne Propellerbeitrag erhält.

Für $\delta = 0$ ergibt sich am Ruder im Propellerstrahl stets ein Vortrieb; dieser wird mit wachsendem Wirkungsgrad, d.h. mit abnehmender Drallenergie kleiner. Dagegen tritt für $\delta \neq 0$ ein Vortrieb nur dann auf, wenn ein bestimmter Schubbelastungsgrad und damit eine bestimmte Drallenergie erreicht ist; sonst erhält man für $\delta \neq 0$ einen Widerstand. Dabei ist der erzielte Vortrieb für A1-A3 ($c_s/c_M = 4.54 - 4.01$, s. Tabelle 6) niedriger als für A4-A6 ($c_s/c_M = 3.81 - 3.43$), bei denen die Drallenergie bei vergleichbarer Schubbelastung größer ist als bei ersteren.

Die Steuerkraft $K_z^{(R)}(y)$ für die Beispiele A1-A6 zeigen die Diagramme 13c-17c. Die über y integrierte Gesamt-Steuerkraft K_z^*

(s. Diagramm 18b) ist proportional zur Axialgeschwindigkeit und steigt mit zunehmender Propellerbelastung, d.h. abnehmendem Fortschrittsgrad, stark, aber langsamer als der Schub an. Da bei $K_{z,R}^*$ der Drall nur über die Zirkulation beiträgt, macht sich die unterschiedliche Drallenergie nicht so stark bemerkbar wie bei $K_{x,R}^*$.

Aus dem Diagramm 18b ergibt sich ein Winkel $\delta_0 \cong -0,01 \approx -0,6^\circ$, bei dem keine Steuerkraft auftritt und also eine zu $y=0$ spiegelbildliche Zirkulation erhalten wird. Die von Isay [2] angegebene Symmetrie für Winkelspiegelung gilt bezüglich dieses Winkels:

$$(103) \quad \Gamma_R(y) \Big|_{\delta_0 + \delta'} = - \Gamma_R(-y) \Big|_{\delta_0 - \delta'}$$

$$K_z^{(R)}(y) \Big|_{\delta_0 + \delta'} = - K_z^{(R)}(-y) \Big|_{\delta_0 - \delta'} \quad \text{und:} \quad K_x^{(R)} \Big|_{\delta_0 + \delta'} = K_x^{(R)}(-y) \Big|_{\delta_0 - \delta'}$$

Schließlich ist in Diagramm (18c) noch die Ruder-Exzentrizität ε/a dargestellt. Da $\varepsilon(y)$ besonders für $\delta \neq 0$ stark mit y variiert, wurden die Mittelwerte mit der jeweiligen Zirkulation als Gewichten gemittelt. Für $\delta \neq 0$ ist auch die für ein Ruder im Nachstromfeld ohne Propeller erhaltene Exzentrizität für $c_s \rightarrow 0$ eingetragen. Während Isay [2] $\varepsilon/a \cong 0,63$ angibt, erhalten wir im Nachstrom $\varepsilon/a(\delta=0) \cong 0,69$. Für größere Winkel wird die Exzentrizität merklich kleiner.

In der nachfolgenden Tabelle 10 sind alle Ergebnisse zusammengestellt, wobei die Gesamtkräfte aus den Propellerschub bezogen sind.

Tabelle 10: Ruder-Kräfte und -Exzentrizität:

Beispiel	$\delta = 0$			$\delta = -0,1$			$\delta = -0,2$		
	$\frac{K_{xR}^*}{S}$	$\frac{K_{zR}^*}{S}$	$\frac{\varepsilon}{a}$	$\frac{K_{xR}^*}{S}$	$\frac{K_{zR}^*}{S}$	$\frac{\varepsilon}{a}$	$\frac{K_{xR}^*}{S}$	$\frac{K_{zR}^*}{S}$	$\frac{\varepsilon}{a}$
A1, $x_0 = 0,65$	-0,049	-0,010	0,69	-0,036	0,120	0,64	+0,009	0,280	0,54
A2, "	-0,048	-0,016	0,69	-0,029	0,181	0,62	+0,035	0,417	0,48
A3, "	-0,044	-0,023	0,68	-0,018	0,216	0,59	+0,071	0,593	0,43
A4, "	-0,056	-0,014	0,69	-0,039	0,135	0,63	+0,013	0,314	0,52
A5, "	-0,053	-0,021	0,68	-0,022	0,190	0,59	+0,038	0,438	0,47
A6, "	-0,052	-0,030	0,68	-0,018	0,271	0,58	+0,078	0,616	0,42
A1, $x_0 = 1,00$	-0,049	-0,014	0,69	-0,035	0,137	0,64	+0,012	0,319	0,54
A3, "	-0,046	-0,027	0,68	-0,018	0,298	0,60	+0,077	0,620	0,46
B1, $x_0 = 0,65$	-0,049	-0,011	0,73	-0,031	0,139	0,61	+0,035	0,322	0,52
B3, "	-0,044	-0,023	0,71	-0,009	0,304	0,58	+0,106	0,674	0,46
C1, $x_0 = 0,65$	-0,050	-0,015	0,69	-0,036	0,125	0,58	+0,032	0,312	0,52
C3, "	-0,045	-0,027	0,69	-0,020	0,280	0,54	+0,098	0,650	0,46

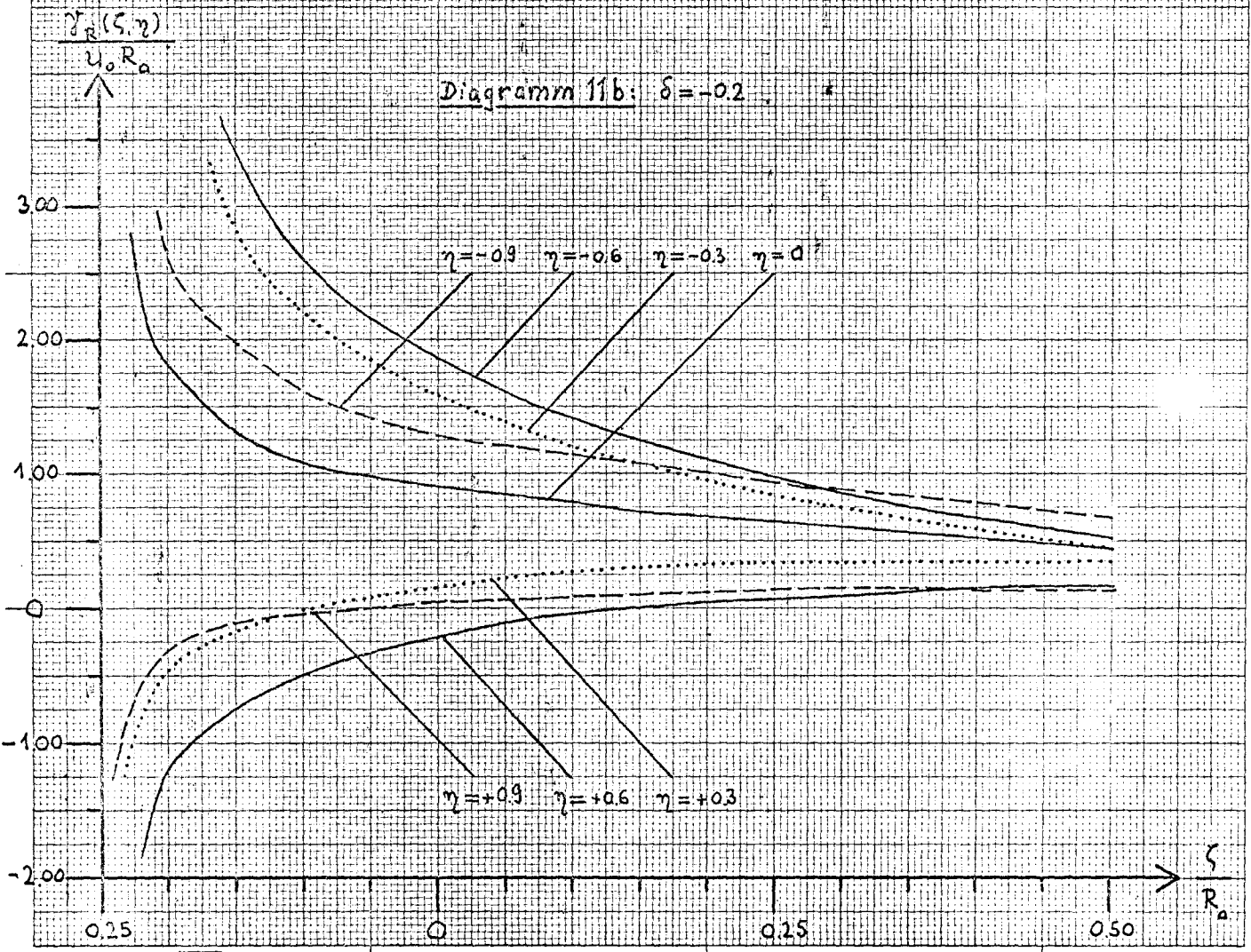
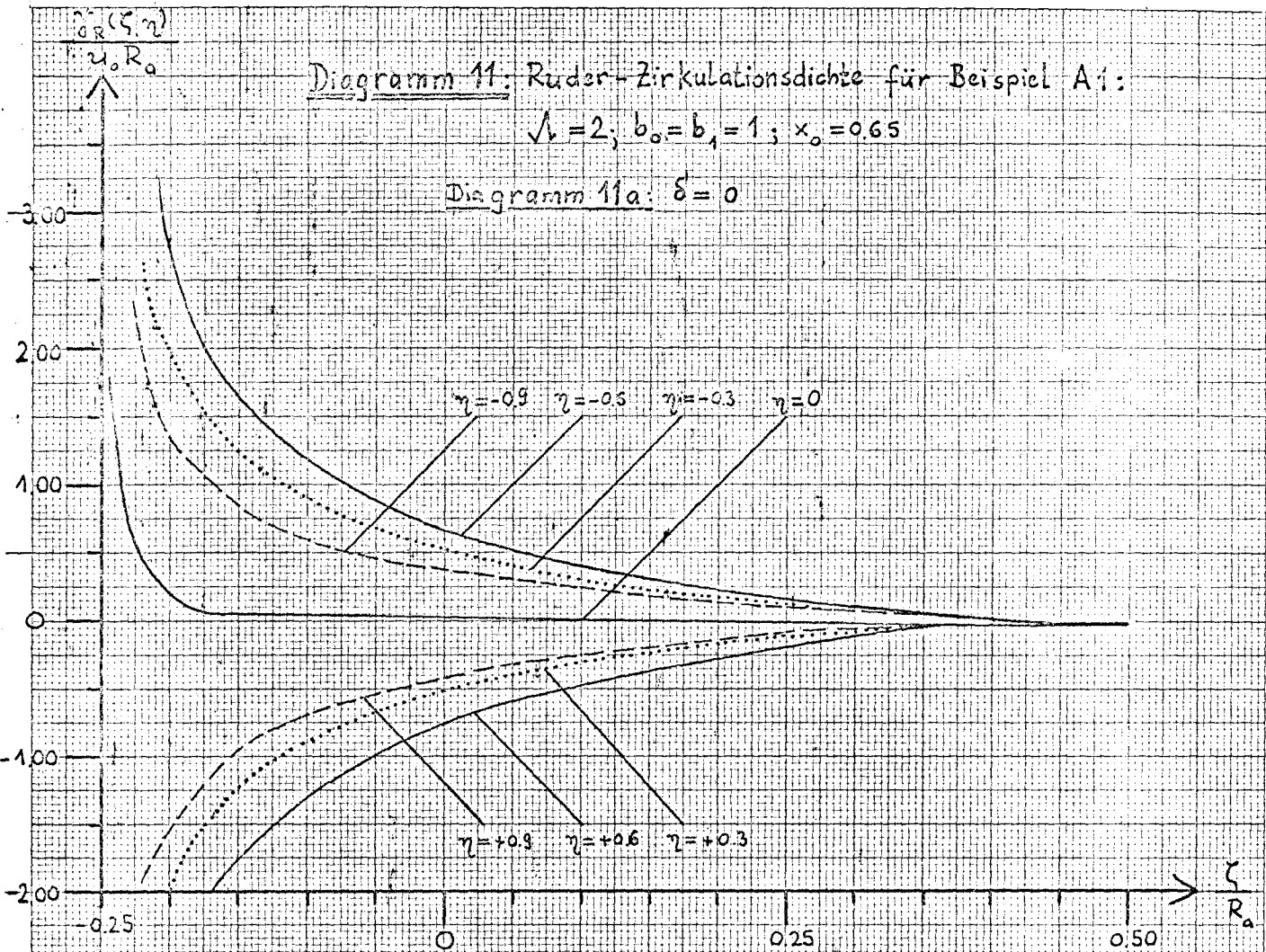
Wir untersuchen nun die beiden Abstände $x_0 = \{0.65, 1.00\}$. Der Propellerdrall ist im Rahmen der Rechengenauigkeit für beide Abstände gleich. Die Axialkomponente wird mit zunehmender Strahlgeschwindigkeit und Abnahme des abmindernden Nachstrom-einflusses größer; jedoch macht sich diese Änderung bei der Zirkulation nur wenig bemerkbar ($< 1\%$). Damit ist auch die Vortriebskraft (Drall \cdot Zirkulation) praktisch konstant, wäh- rend die Zunahme der Axialgeschwindigkeit eine deutlich ver- größerte Steuerkraft bewirkt. Bei der mittleren Exzentrizität tritt eine Änderung nur für $\delta = -0.2$ auf, wo im größeren Abstand die Abweichung A_3 von A_1 verkleinert wird, also die Schwer- punktlage sich stabilisiert ($\epsilon_a = 0.50$ vorgegeben).

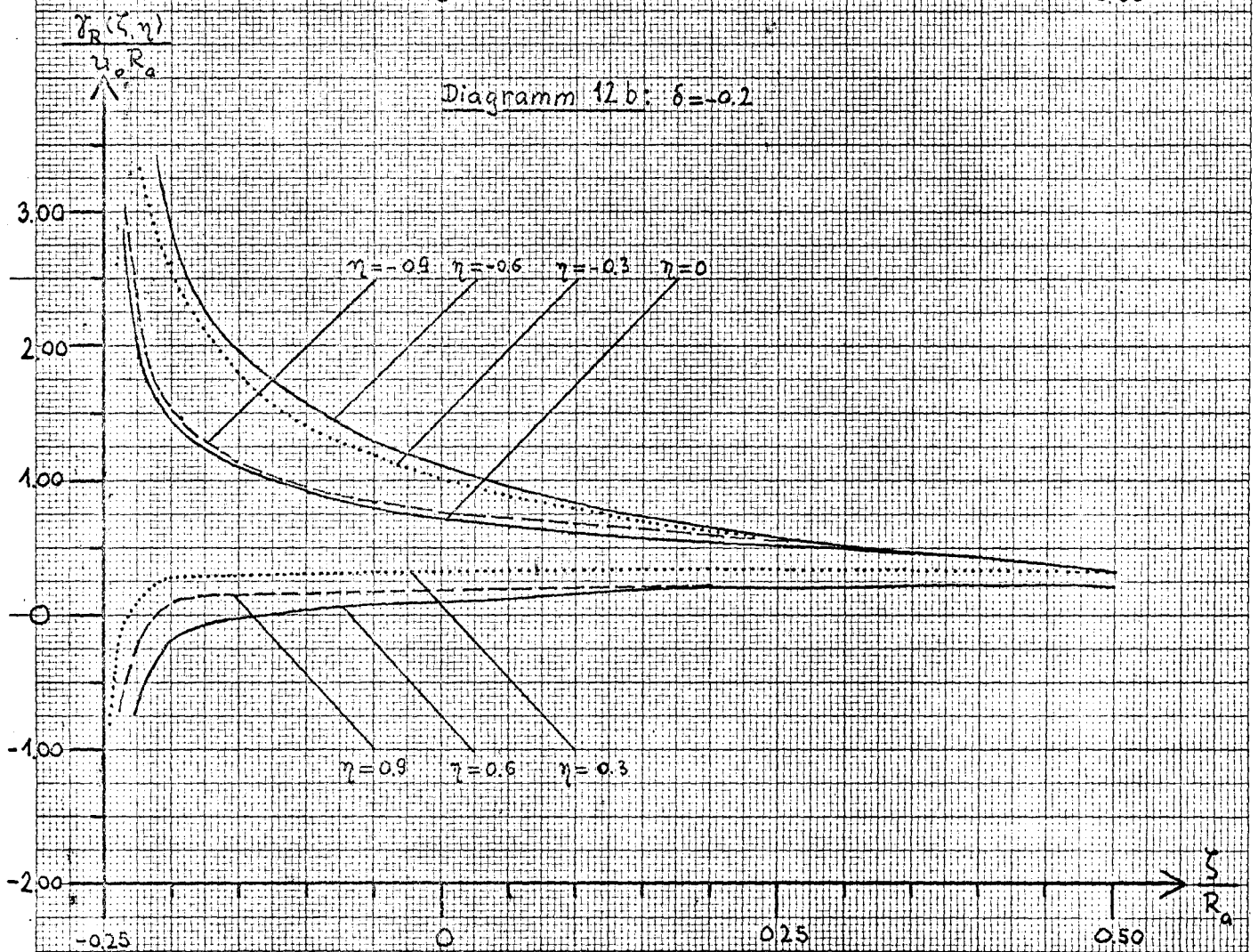
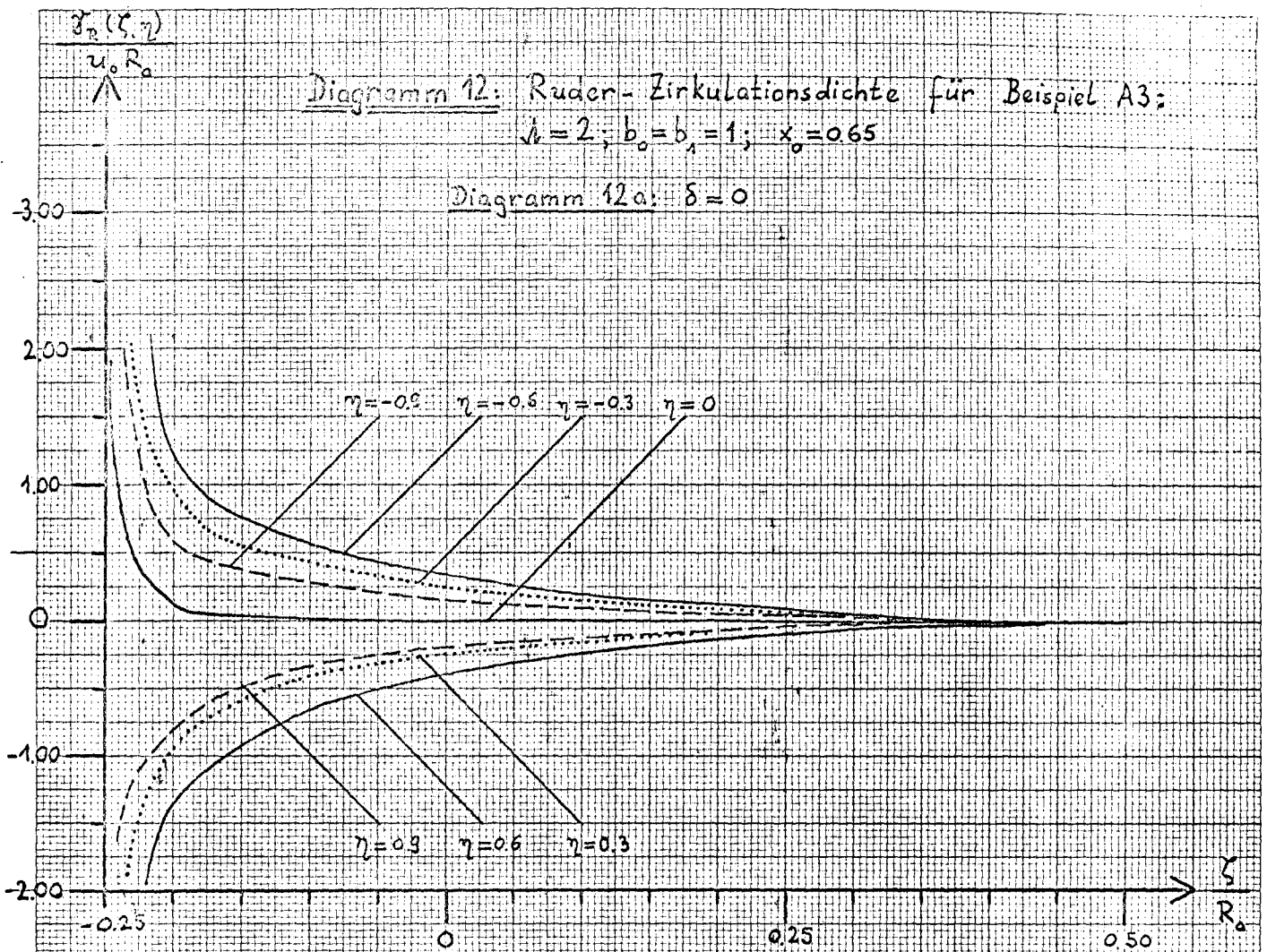
Bei dem Ruder mit kleinerem Seitenverhältnis ($B: \lambda = 1.5$) ergibt sich gegenüber Beispiel A_1, A_3 ($\lambda = 2$) eine erhöhte Ruderzirkulation, da die im Drall liegende Fläche größer ist; entsprechend steigt - bei gleicher Axialgeschwindigkeit im $1/4$ -Strahl - die Steuerkraft an. Wegen des größeren Einflusses der freien Wirbel nimmt andererseits die Vortriebskraft für $\delta \neq 0$ ab. Für $\delta = 0$ wird die mittlere Exzentrizität erhöht. Die Verhältnisse entsprechen sinngemäß den von Isay [2] angege- benen Fällen $\lambda = 2$ und 3 .

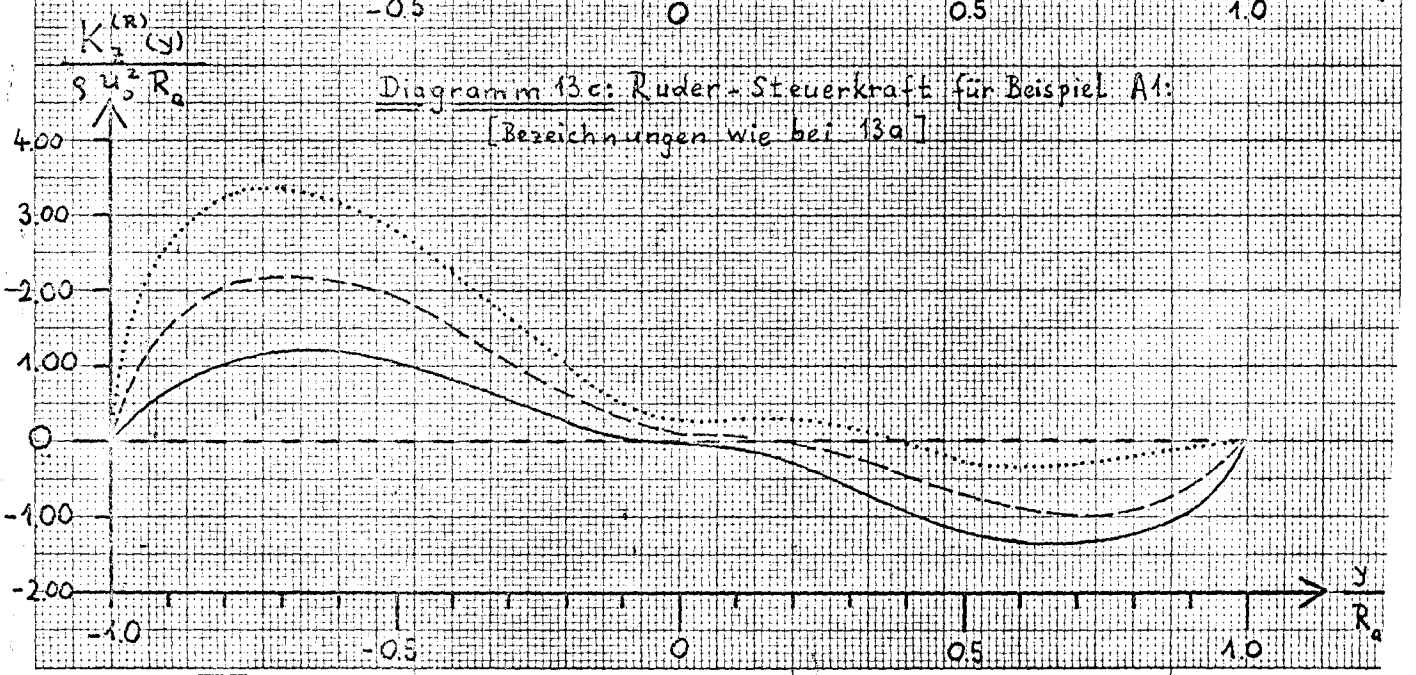
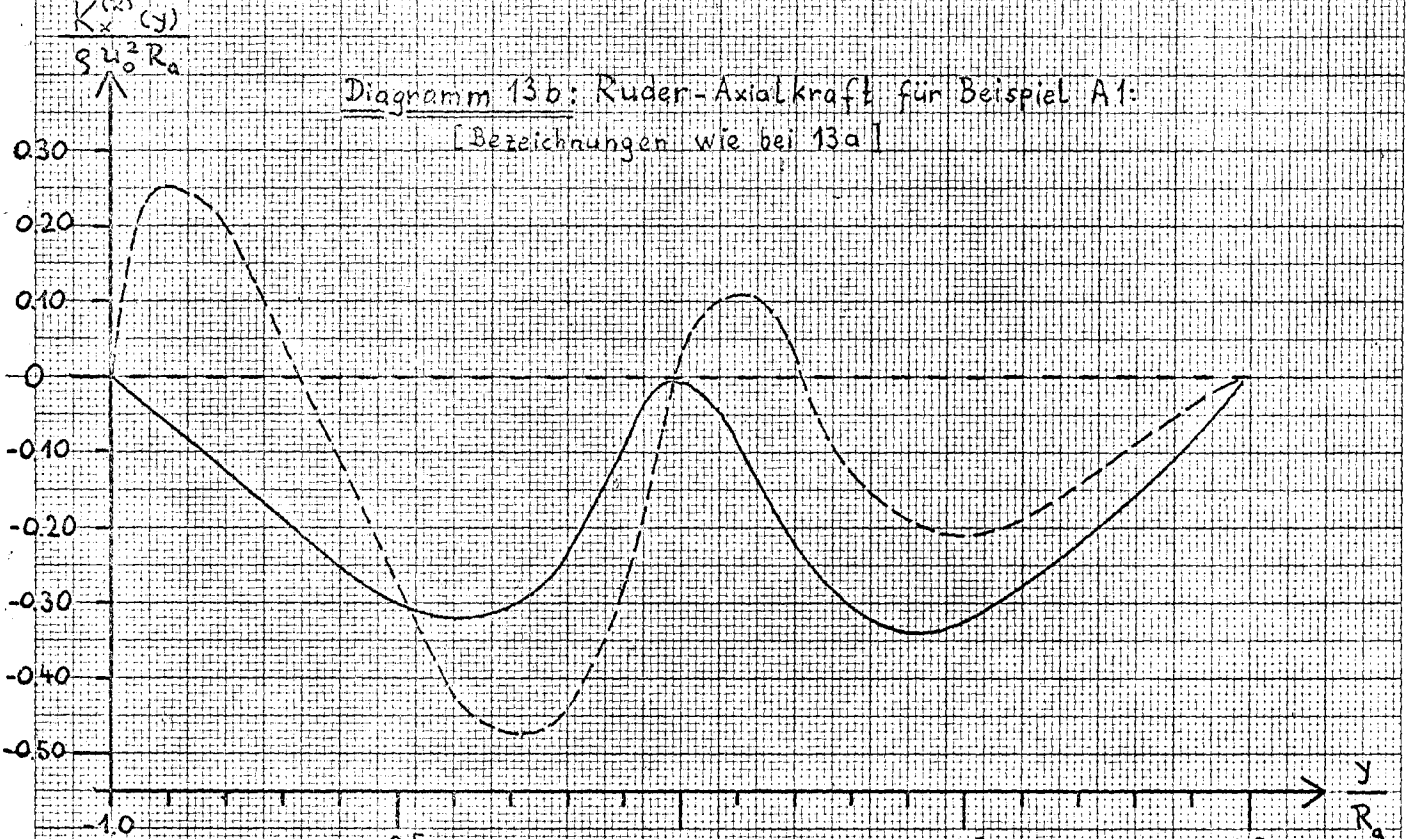
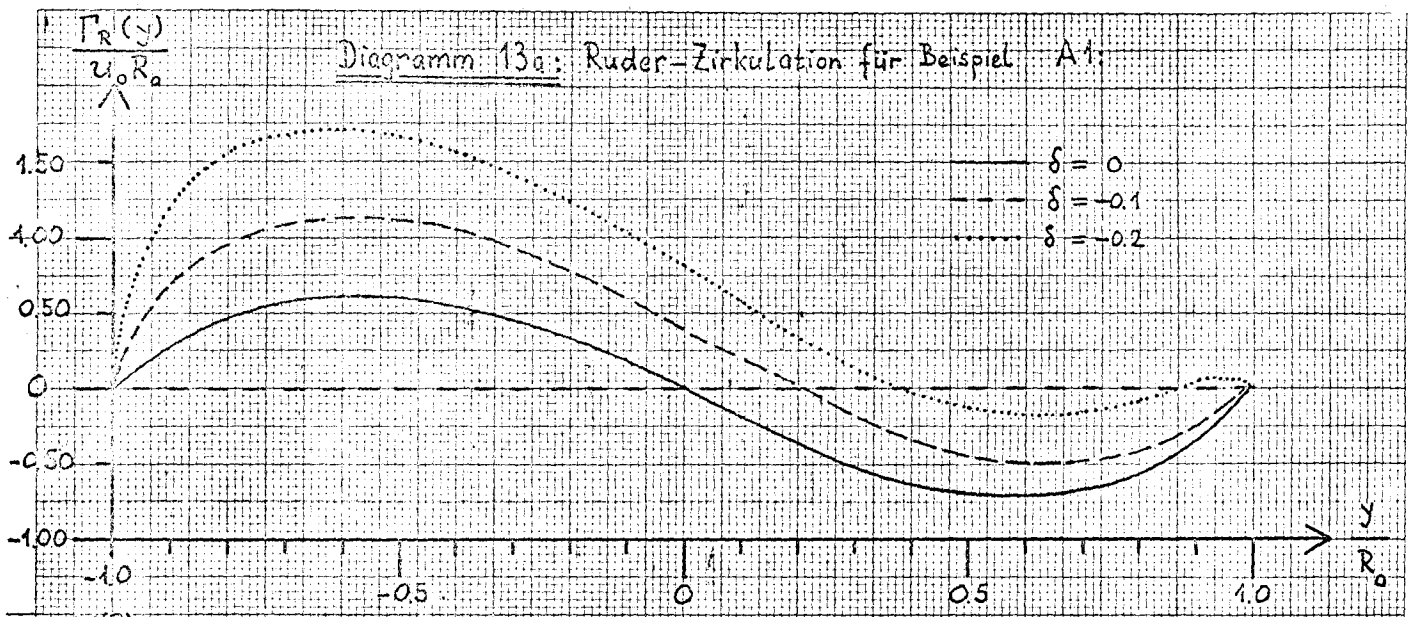
Im Fall C_1, C_3 wird ein Ruder behandelt, das um 10% seiner Spannweite über den Propellerstrahl nach oben herausragt. Gegenüber dem Fall A_1, A_3 wird - bei gleichem Seitenverhältnis $\lambda = 2$ - die Zirkulation entsprechend der größeren Fläche im Drall erhöht. Da außerhalb des Propellerstrahles keine nennens- werten Umfangskomponenten beitragen, wird die Steuerkraft entsprechend der Zirkulation erhöht. Wegen der stärkeren Wir- kung der freien Ruderwirbel ist der Vortrieb bei $\delta = 0$ nur wenig größer als bei A_1, A_3 , während für $\delta \neq 0$ ein kleinerer Vortrieb bzw. größerer Widerstand auftritt.

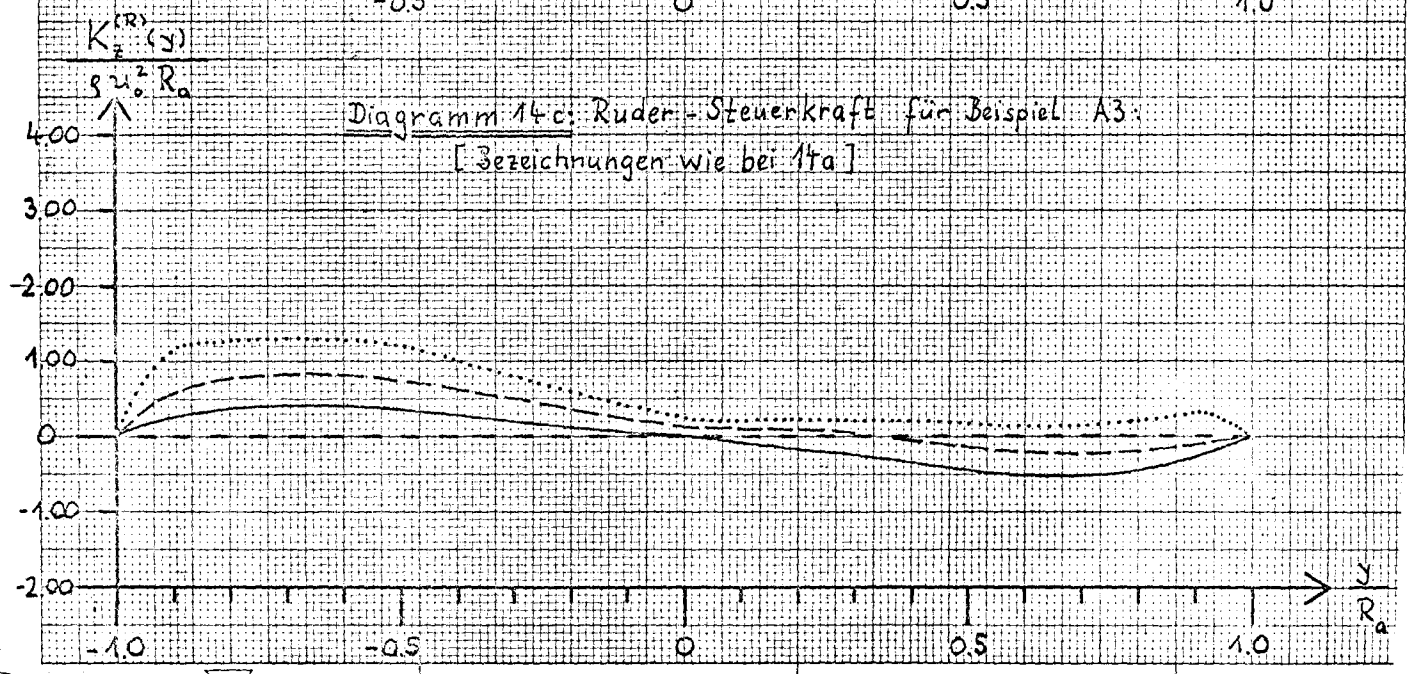
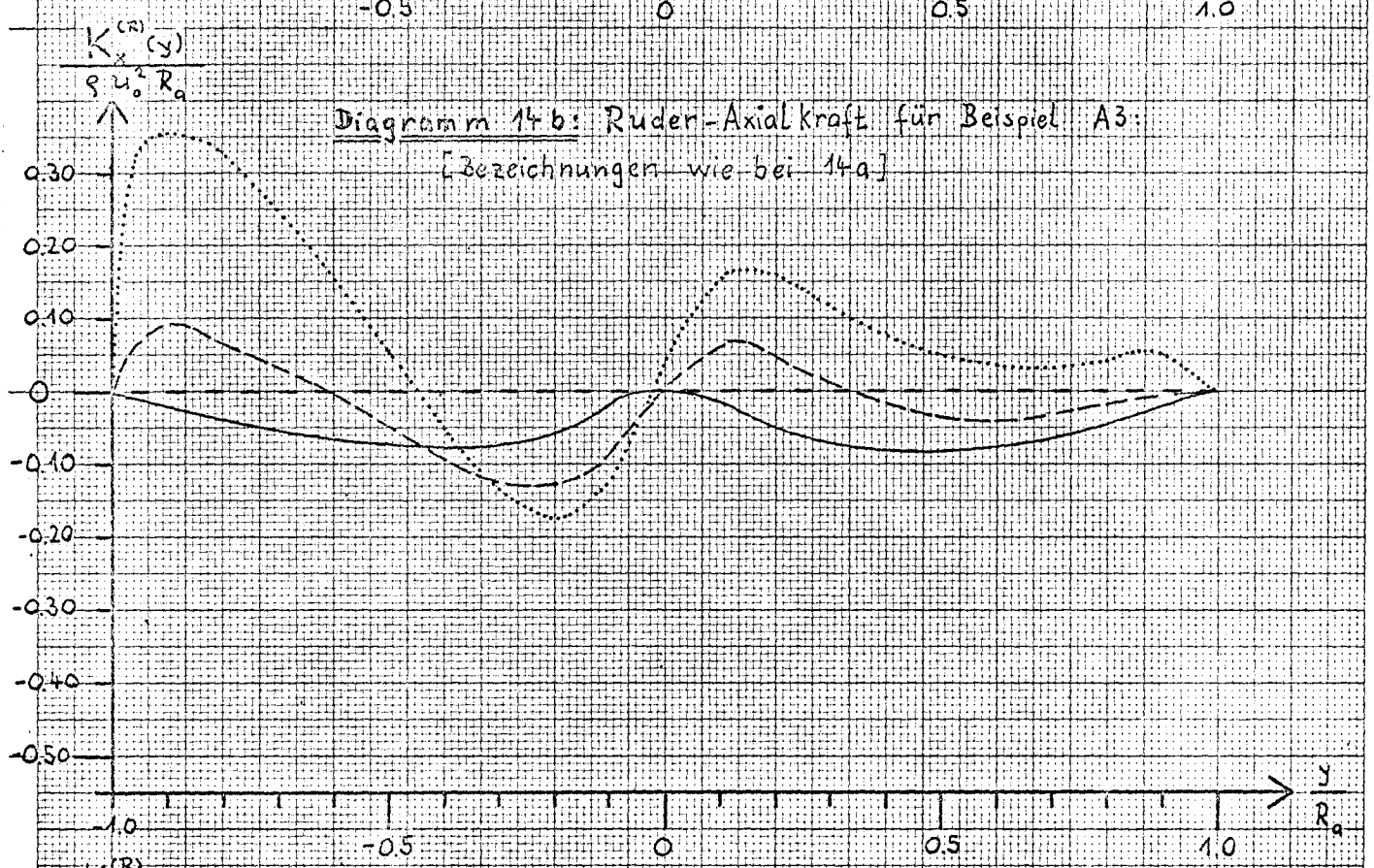
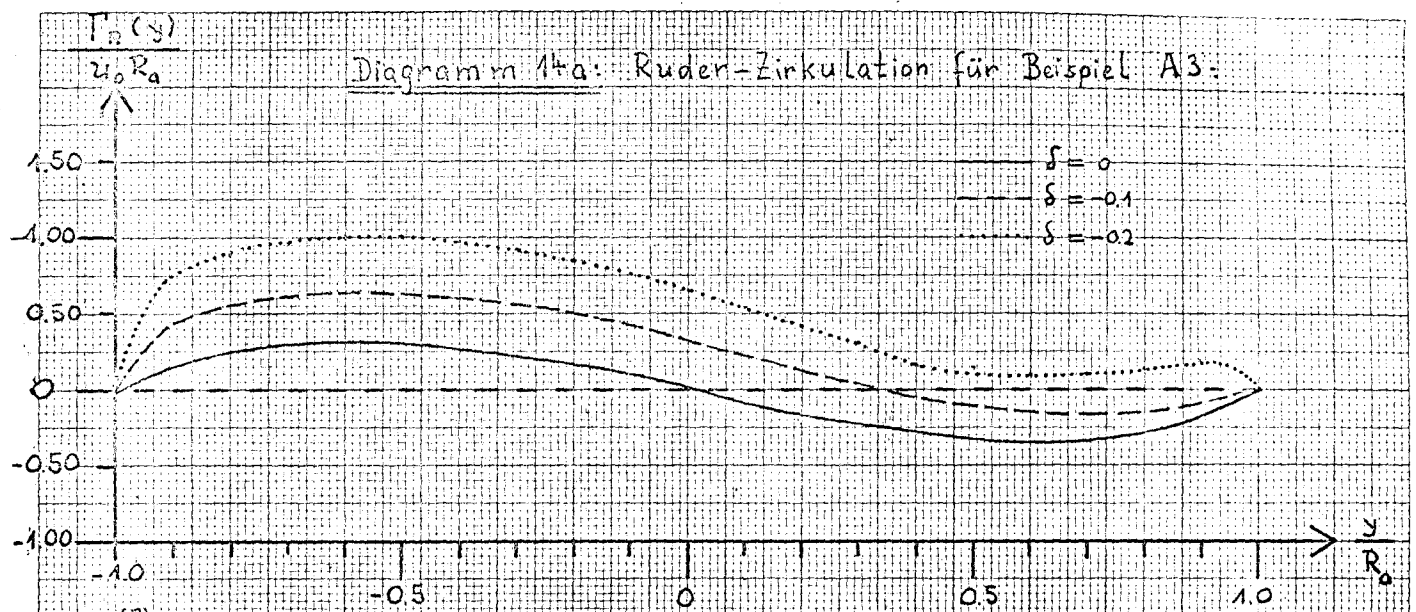
Wie oben erwähnt, wurde bei den vorgelegten Rechnungen die zu groß vorausgeschätzte hydrodynamische Steigung mit der jeweils erhaltenen Zirkulation (Beispiele 1 - 6) in die Formeln (s. Kap. II.6) eingesetzt. Eine iterative Berechnung der Propellerzirkulation bei vorgegebenem Fortschrittsgrad mit dem jeweils erhaltenen k_0 erfordert sehr viel Rechenzeit. Es ist daher eine sinnvolle Näherung, statt des vorausgeschätzten k_0 , die in erster Näherung erhaltene mittlere hydrodynamische Steigung $\bar{k}_0^{(1)}$ einzusetzen. Eine solche Kontrollrechnung ergibt für den Fall (1A), $\delta = \sigma$ einen um ca 15% verkleinerten Vortriebswert: $K_x^*/S = -0.043$ (statt -0.049); für den Fall (3A), $\delta = \sigma$ mit mäßig-belastetem Propeller, bei dem k_0 besser reproduziert wurde, ergibt sich ein um ca 10% kleinerer Wert als mit dem vorausgeschätzten k_0 : $K_x^*/S = -0.039$ (statt -0.044).

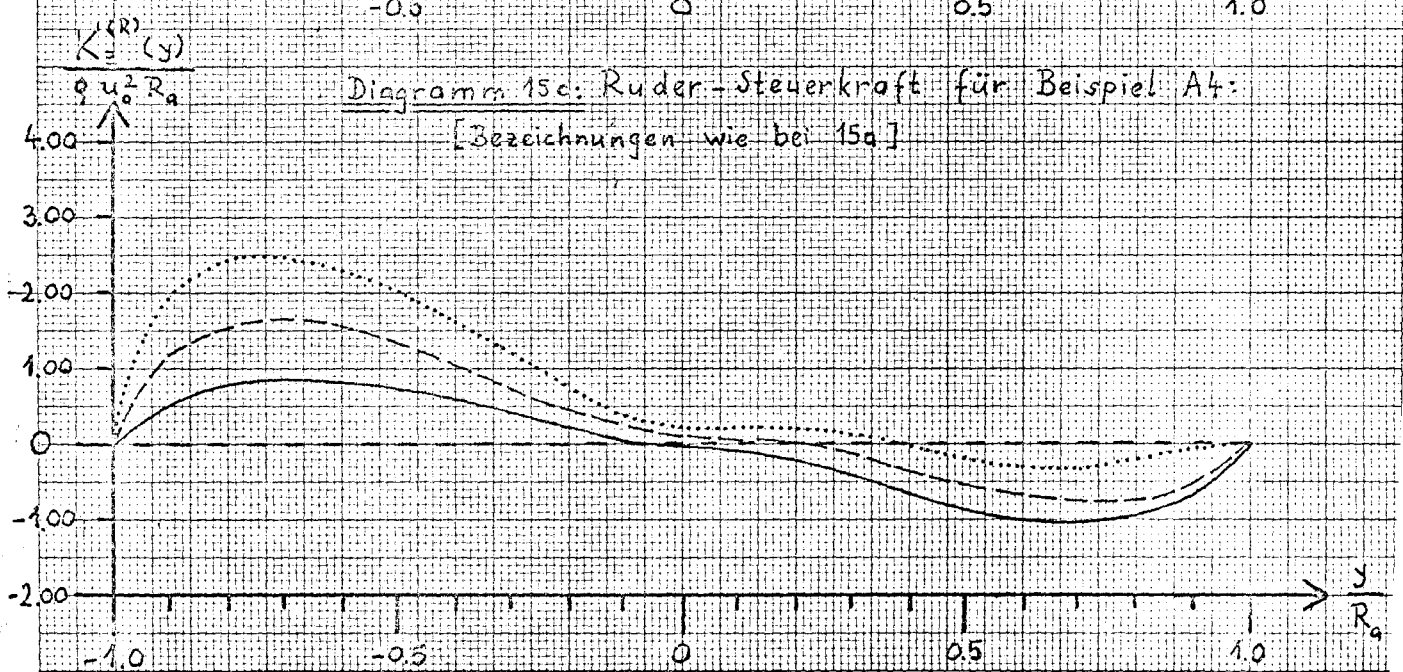
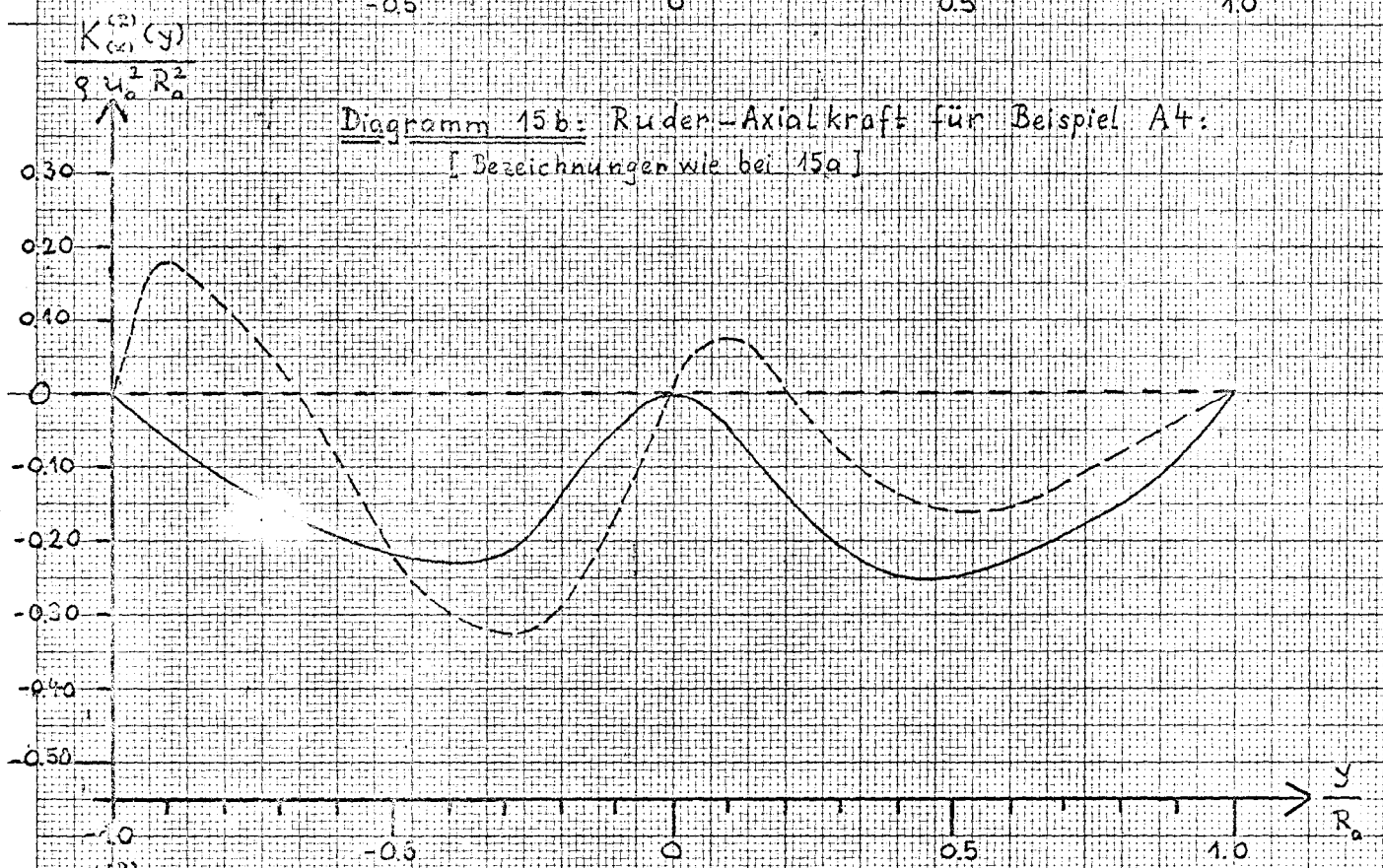
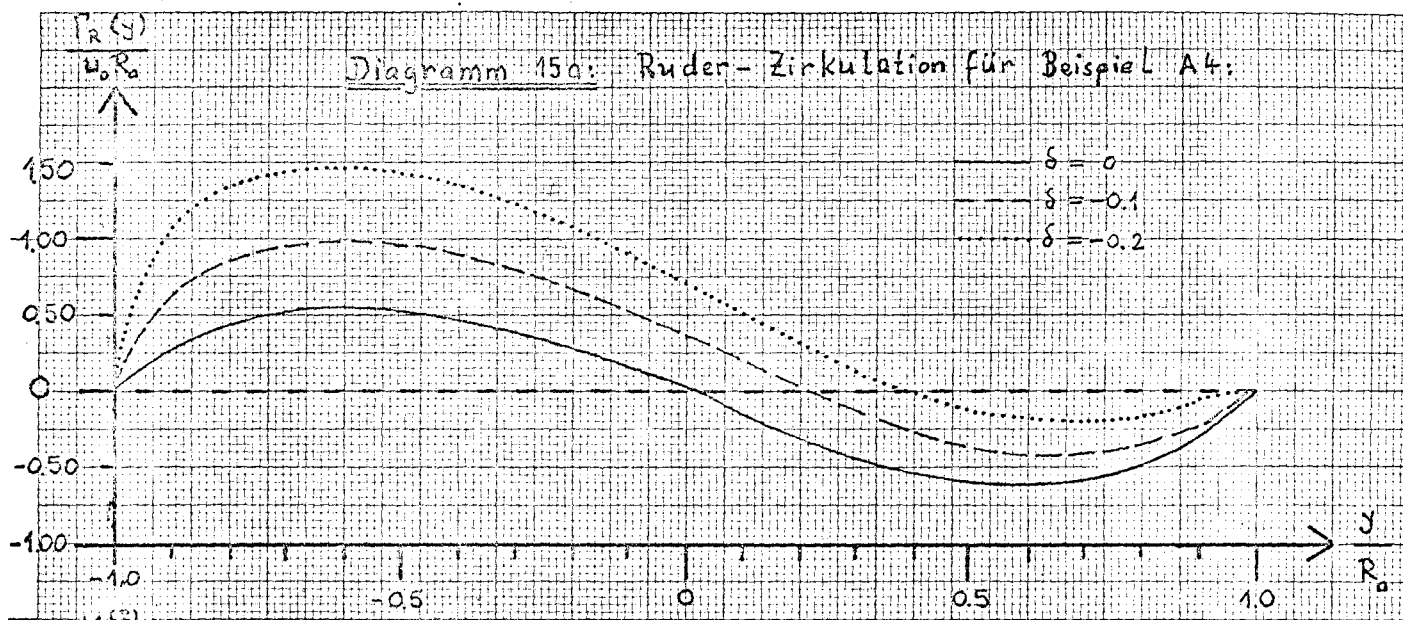
Der erhaltene Vortrieb am Ruder ist also in dieser Näherung zu groß ~~erhalten~~. Eine Iterationsrechnung erscheint aber nur dann sinnvoll, wenn man auch statt des hier benutzten idealisierten Nachstromes nach Lerbs mit seiner angenommenen x -Abhängigkeit einen realen Schiffsnachstrom einsetzt.

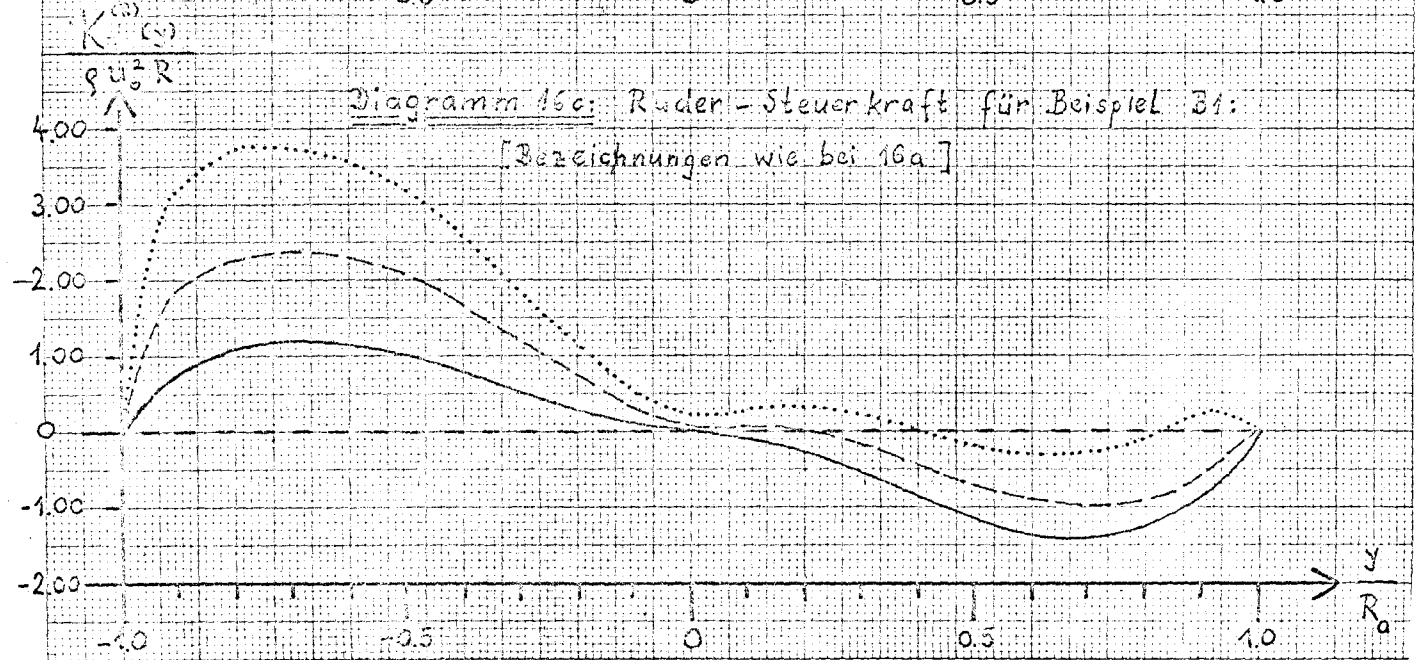
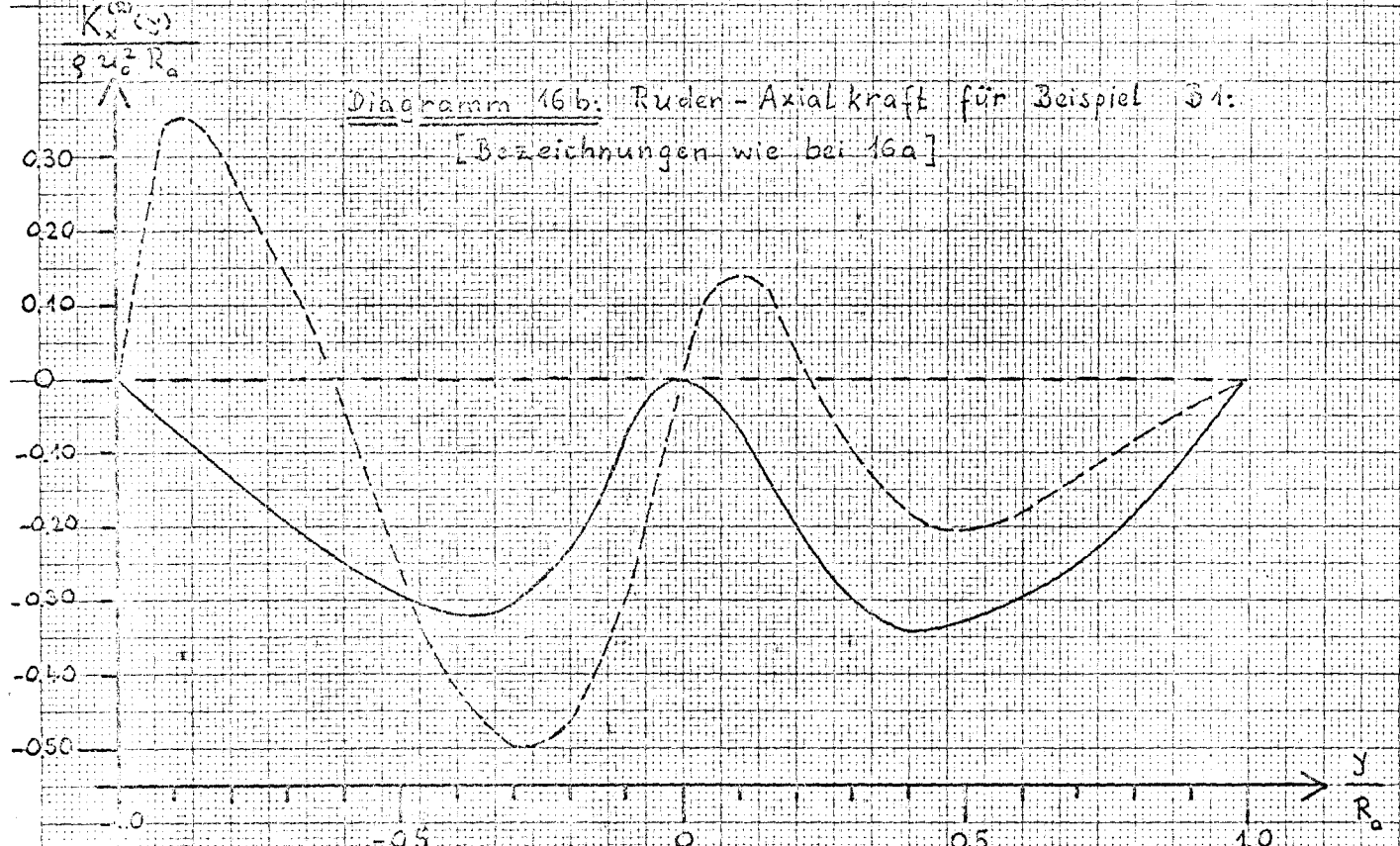
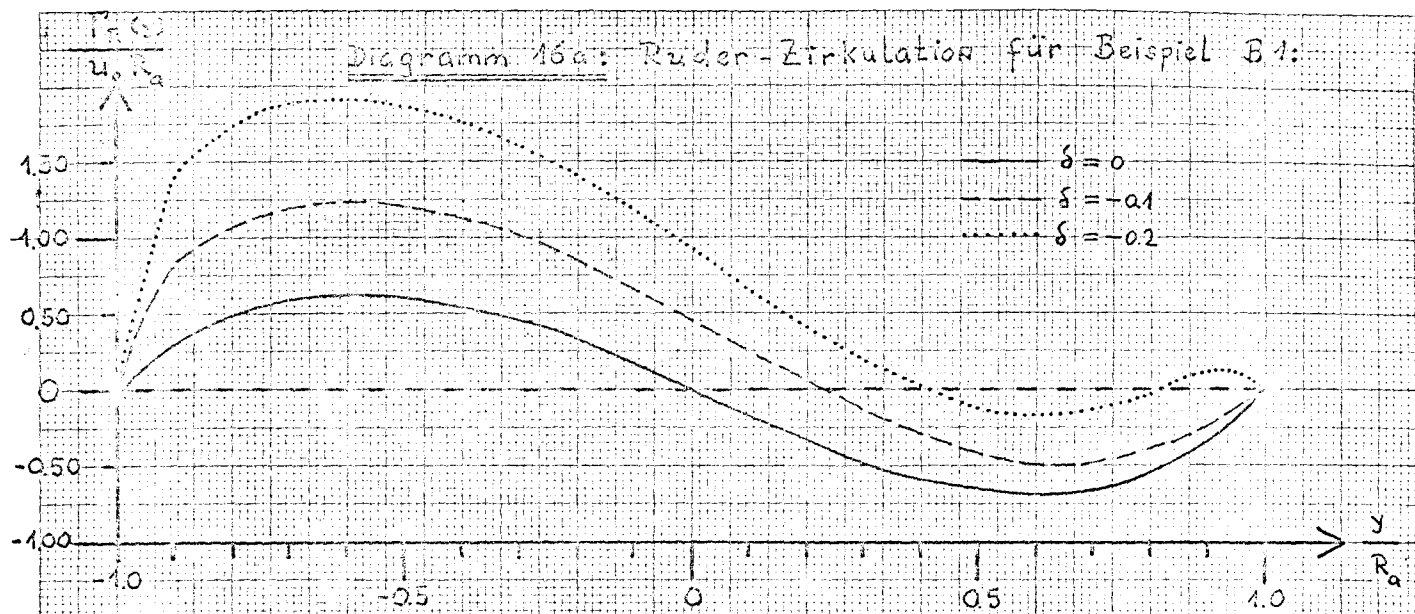


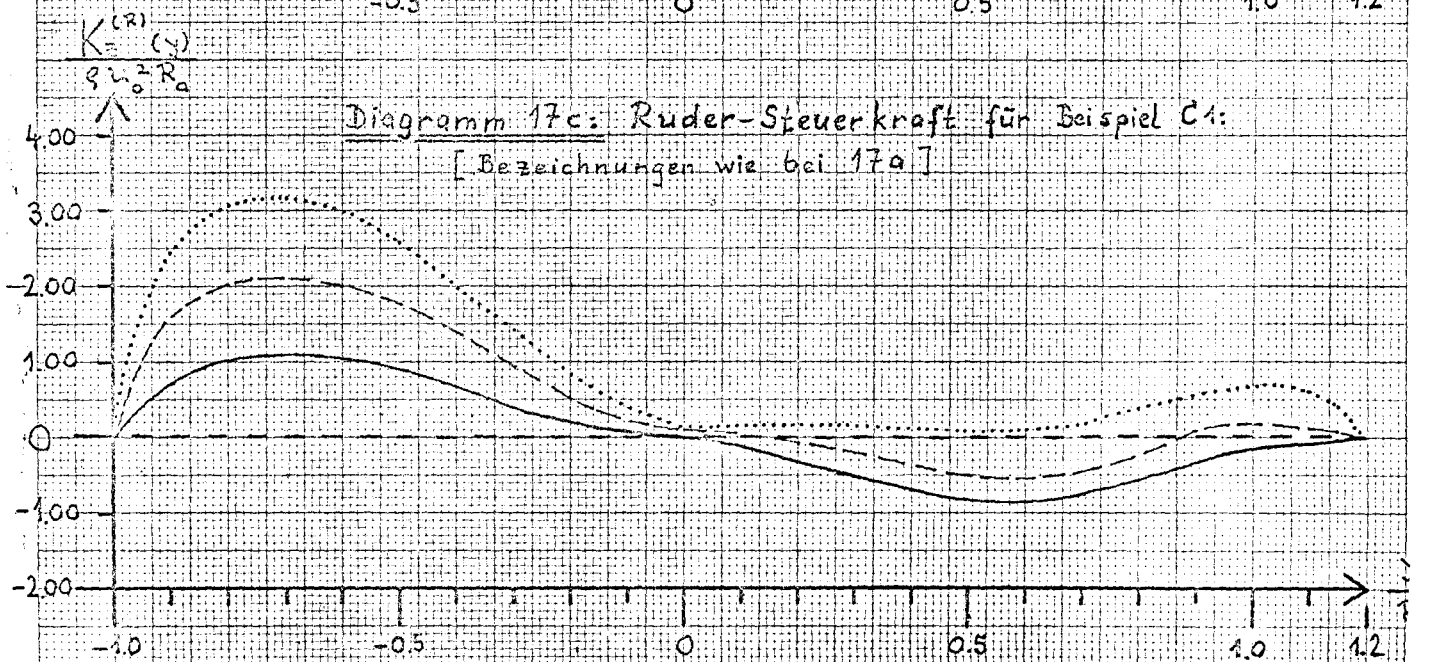
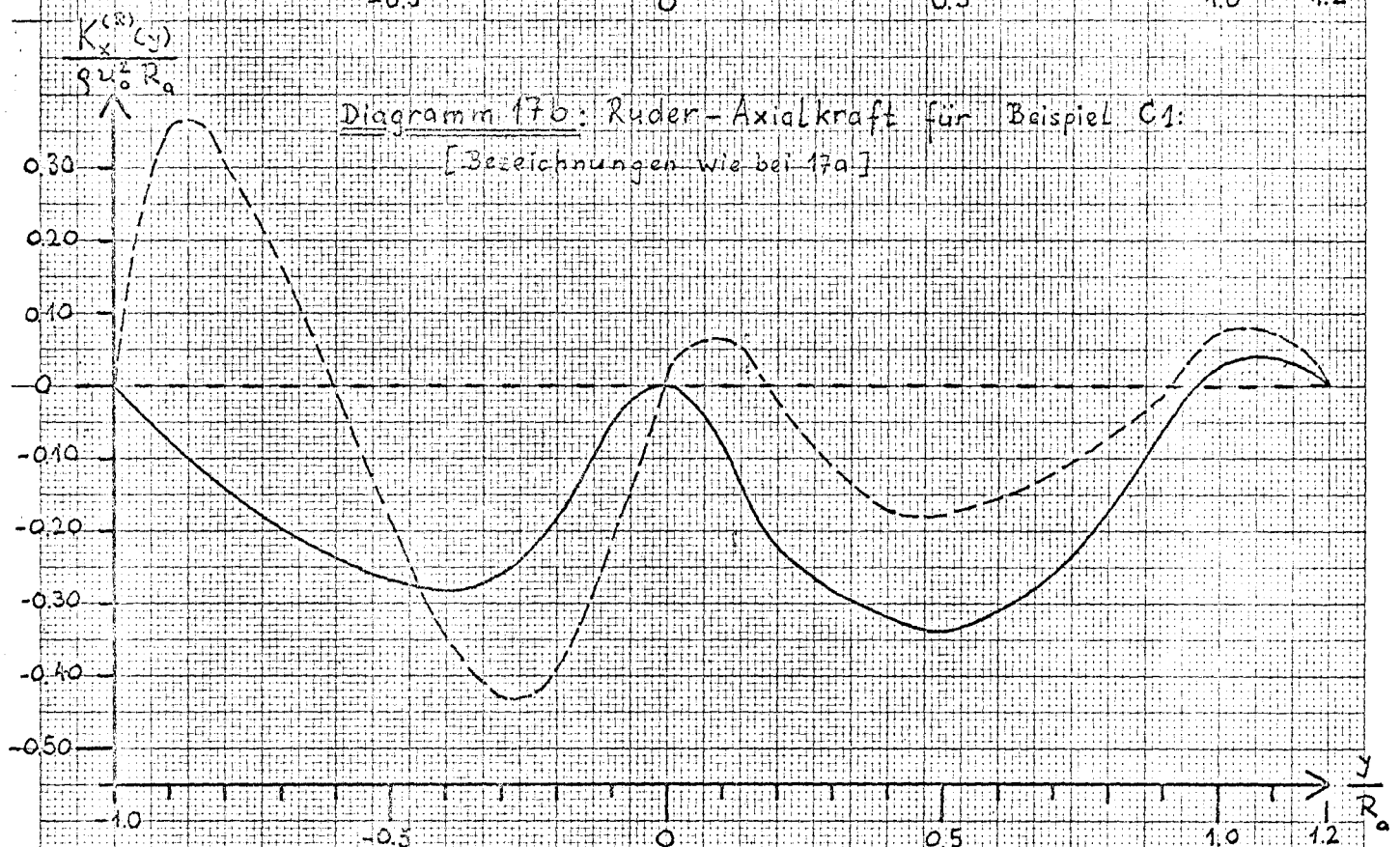
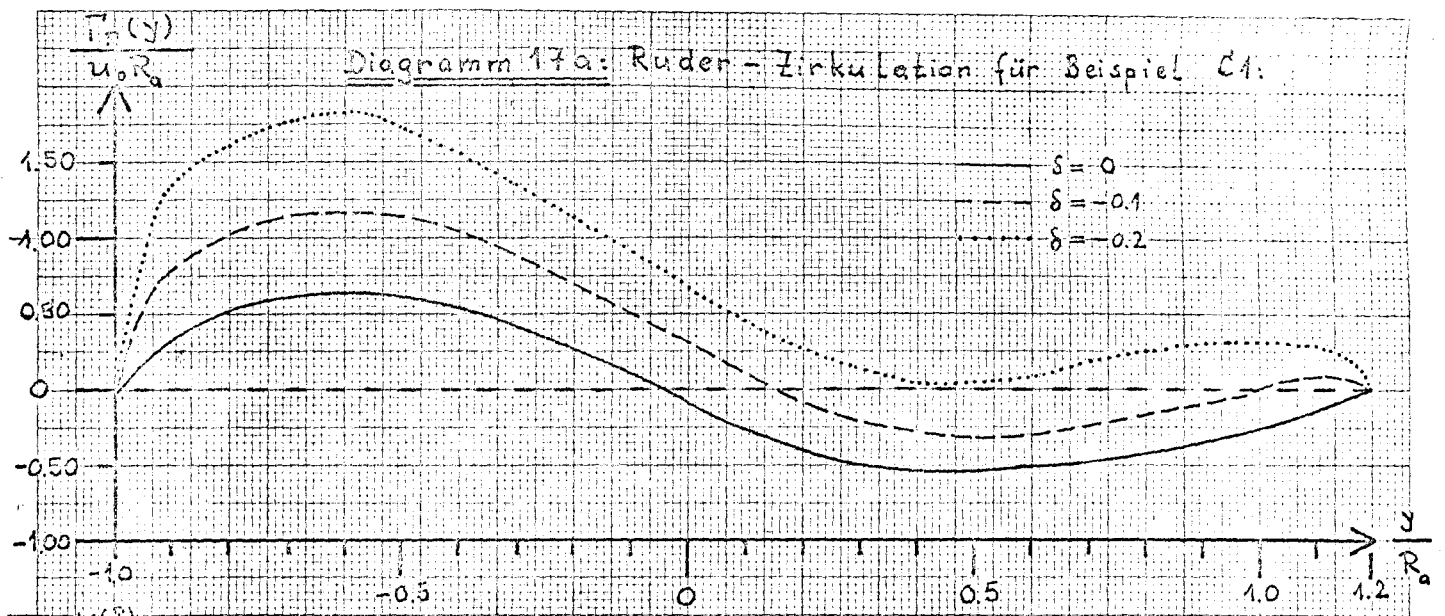








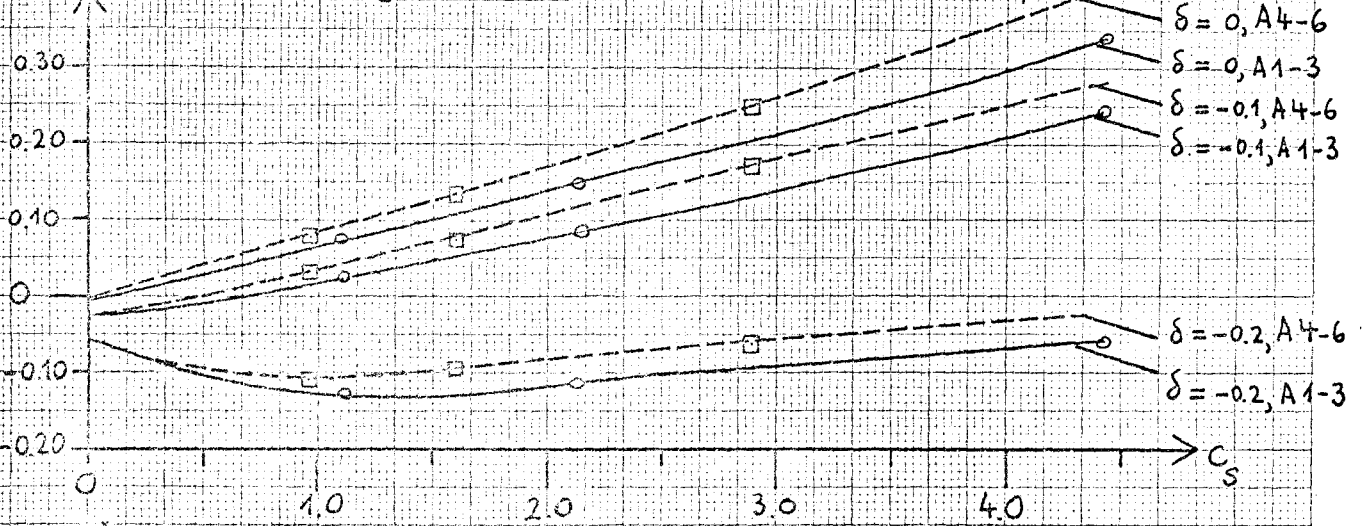




$$K_{\times R}^*$$

$$\frac{\delta u_0^2 R_a^2}{\rho}$$

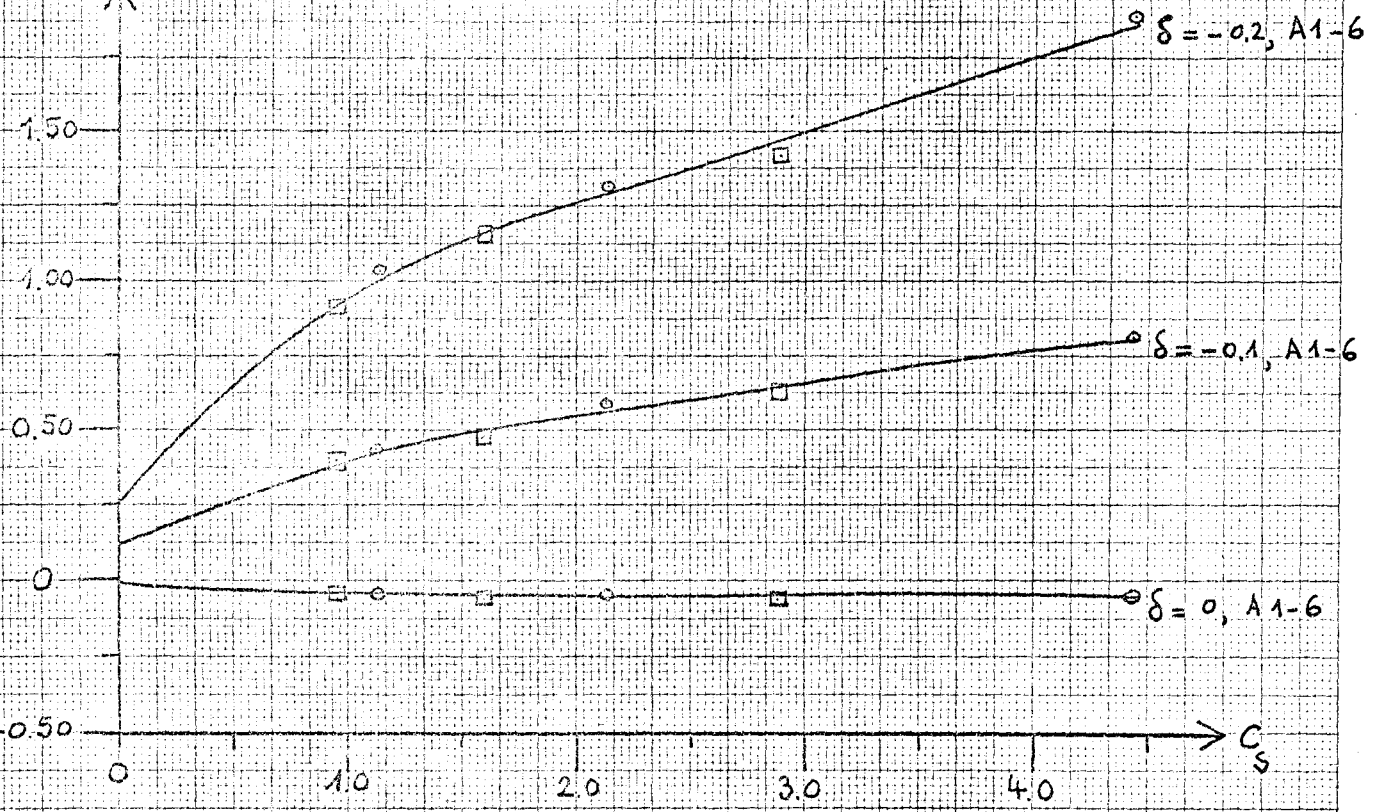
Diagramm 18a: Ruder-Vortrieb und Propeller-Schub



$$K_{\times R}^*$$

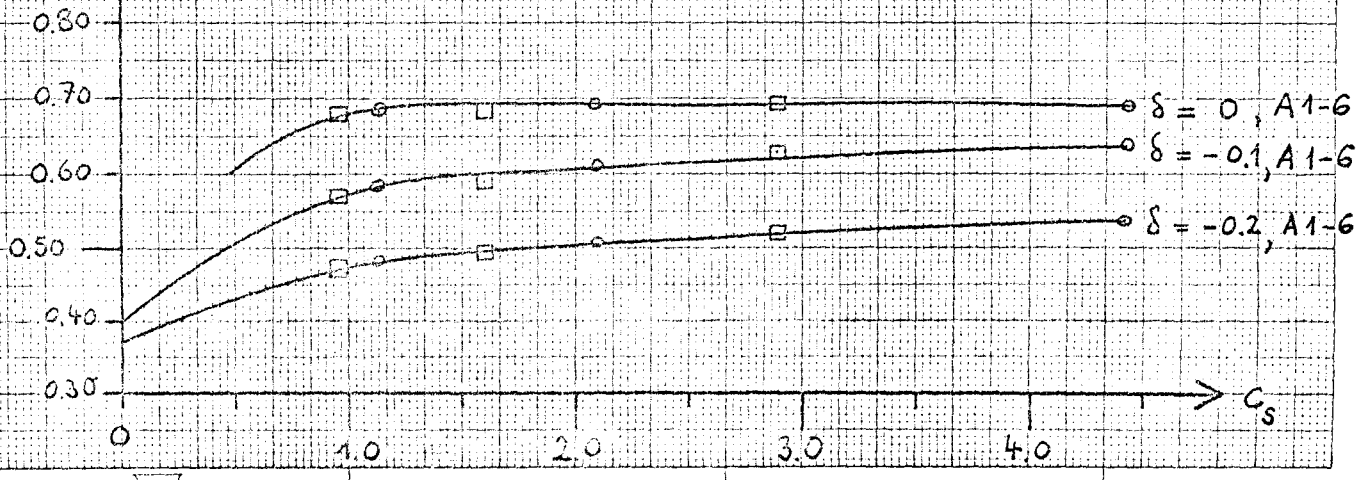
$$\frac{\delta u_0^2 R_a^2}{\rho}$$

Diagramm 18b: Ruder-Steuerkraft und Propeller-Schub



$$\frac{\epsilon}{a}$$

Diagramm 18c: Ruder-Exzentrizität und Propeller-Schub

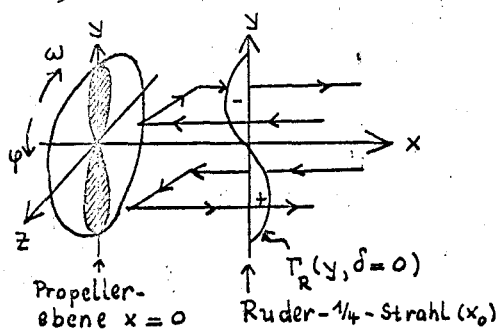


IX. Rückinduktion des Ruders am Propeller

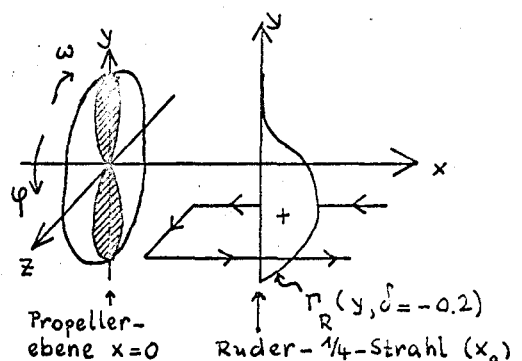
Wir wollen nun noch die Rückwirkung eines Ruders (A,B,C, s. Kap VIII) auf den im Abstand $x_0 = \{0.65, 1.00\}$ vor ihm liegenden Propeller $i \{i=1,2...6\}$ untersuchen und dabei die entsprechenden Beispiele mit iA bzw. iB bzw. iC bezeichnen. Dabei soll im folgenden erörtert werden, inwieweit Propeller-Zirkulationsfeld eines dünnen bzw. 25% dicken Ruders (oberer Index 2 bzw. 3) verändert werden.

Die Ergebnisse der Rechnungen sind für den Einfluß eines Ruders A ($\Lambda=2; b_0=b_1=1; x_0=0.65$) auf den stark bzw. schwach belasteten Propeller (1,A) bzw. (3,A) dargestellt. Die Diagramme 19-20 (a,b) zeigen die Induktionsgeschwindigkeiten des dünnen Ruders am Propeller; die Änderung der Zirkulation ($\frac{\Gamma_P^{(2)}}{\Gamma_P^{(1)}}$) sowie der Kräfte ($\frac{K_x^{(P,2)}}{K_x^{(P,1)}}$; $\frac{K_\psi^{(P,2)}}{K_\psi^{(P,1)}}$) sind in den Diagrammen 21-24 (a-c) für die Ruder-Anstellwinkel $\delta = (0; -0.2)$ aufgetragen. Für ein 25% dickes Ruder ($D = \frac{D_0}{2 \cdot 9} = 0.25$) ist die zusätzliche Dicke-Induktion in den Diagrammen 25-26 (a,b) dargestellt; schließlich geben die Diagramme 27-30 (a-c) die Änderung der Propeller-Zirkulation ($\frac{\Gamma_P^{(3)}}{\Gamma_P^{(2)}}$) sowie der Kräfte ($\frac{K_x^{(P,3)}}{K_x^{(P,2)}}$; $\frac{K_\psi^{(P,3)}}{K_\psi^{(P,2)}}$) gegenüber dem Fall mit dünnem Ruder wieder.

Man kann sich den Verlauf der vom dünnen Ruder am Propeller induzierten Geschwindigkeiten aus der Ruder-Zirkulation mit Figur 5 a-b verdeutlichen:



Figur 5a: $\delta = 0$



Figur 5b: $\delta = -0.2$

Bei $\delta = 0$ liefert die Ruder-Zirkulation ein zu $y=0$ fast spiegelbildliches Geschwindigkeitsfeld. Dabei ergibt die am Propeller

induzierte Axialkomponente im φ -Mittel keinen Beitrag, während die mittlere Umfangskomponente negativ und klein ist. Für $\delta = -0.20$ trägt die Zirkulation praktisch nur im Bereich $-1 \leq y \leq +0.2$ bei; die mittlere Umfangskomponente ist negativ und größer als bei $\delta = 0$, da hauptsächlich der Bereich $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$ wirksam wird.

Durch das - besonders bei hoher Belastung - stark schwankende Geschwindigkeitsfeld werden Propeller-Zirkulation und -Kräfte deutlich verändert. Dabei ist die Ruderwirkung bei solchen Flügelstellungen besonders groß, wo ohne das Ruder Zirkulation und Kräfte klein sind: $\varphi = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$.

Die vom Ruder induzierten Geschwindigkeiten steigen natürlich mit der Propellerbelastung an (s. Diagramme 19-20). Dennoch wirkt das Ruder bei mäßig-belastetem Propeller (3,A) stärker als im hochbelasteten Fall (1,A), weil der Einfluß der Geschwindigkeiten der freien Propellerwirbel im Fall (3,A) noch wesentlicher ist (s. Diagramme 21-24).

Die örtliche Änderung der Zirkulation sowie der Kräfte kann aus dem induzierten Geschwindigkeitsfeld abgelesen werden. Z.B. für $\delta = 0$ wird bei $\varphi = 0, \pi$ der induzierte Anstellwinkel und damit die Zirkulation durch die negative Umfangskomponente verkleinert. Für $\delta = -0.20$ wird bei $\varphi = \pi$ (Hauptbeitrag des Ruders) die Zirkulation durch die negative Umfangskomponente abgemindert, während sie bei $\varphi = 0$ wegen $V_R(\varphi=0) > 0$ vergrößert wird. Bei anderen Flügelstellungen ist die Veränderung der Zirkulation wegen der nichtverschwindenden Axialkomponente schwerer zu überblicken.

Bei den Flügelkräften tritt der Einfluß des Ruders bei der Umfangskomponente stärker zutage als bei der Axialkomponente (s. Diagramme 21-24, (b,c)). Es ist nämlich:

$$(104) \quad \begin{aligned} \frac{K_x^{(P,2)}}{K_x^{(P,1)}} &= \frac{\omega r + V_N + V_P^{(2)} + V_R}{\omega r + V_N + V_P^{(1)}} \cdot \frac{\Gamma_P^{(2)}}{\Gamma_P^{(1)}} \\ \frac{K_\varphi^{(P,2)}}{K_\varphi^{(P,1)}} &= \frac{u_0 + u_N + u_P^{(2)} + u_R}{u_0 + u_N + u_P^{(1)}} \cdot \frac{\Gamma_P^{(2)}}{\Gamma_P^{(1)}} \end{aligned}$$

Während bei der Kraft-Axialkomponente wegen des Überwiegens der Umfangsgeschwindigkeit ωr näherungsweise gilt:

$$\frac{K_x^{(P,2)}}{K_x^{(P,1)}} \sim \frac{\Gamma_p^{(2)}}{\Gamma_p^{(1)}}$$

ist bei der Kraft-Umfangskomponente der Einfluß des Ruders größer als bei der Flügelzirkulation selbst, da der Bruch

$$\frac{u_0 + u_N + u_p^{(2)} + u_R}{u_0 + u_N + u_p^{(1)}}$$

beachtliche Schwankungen aufweist. Letzteres gilt insbesondere bei ausgeschlagenem Ruder.

In der folgenden Tabelle 11 ist der durch die Rückinduktion des dünnen Ruders (ohne Berücksichtigung der am Ruder selbst angreifenden Kräfte) veränderte Schubbelastungsgrad angegeben.

Tabelle 11: Rückinduktion des dünnen Ruders:

Beispiel	x_0	Propeller ohne Ruder: $c_s^{(1)}$	Propeller mit Ruder ($\delta = 0$) $c_s^{(2)} \frac{c_s^{(2)}}{c_s^{(1)}} - 1$	Propeller mit Ruder ($\delta = -0.20$) $c_s^{(2)} \frac{c_s^{(2)}}{c_s^{(1)}} - 1$
(1A)	0.65	7.98	7.94 - 0.5%	7.90 - 1.0%
(2A)		3.84	3.82 - 0.6%	3.80 - 1.3%
(3A)		2.04	2.02 - 0.9%	2.00 - 1.9%
(4A)		5.20	5.13 - 0.4%	5.16 - 0.8%
(5A)		2.91	2.89 - 0.7%	2.85 - 2.1%
(6A)		1.73	1.71 - 1.1%	1.68 - 3.1%
(1A)	1.00	7.98	7.95 - 0.3%	7.94 - 0.5%
(3A)		2.04	2.03 - 0.4%	2.02 - 0.8%
(1B)	0.65	7.98	7.94 - 0.5%	7.89 - 1.1%
(3B)		2.04	2.02 - 0.9%	1.99 - 2.6%
(1C)	0.65	7.98	7.94 - 0.5%	7.90 - 1.0%
(3C)		2.04	2.02 - 0.8%	2.00 - 1.7%

Der ~~Propeller~~-Wirkungsgrad $\eta_{ges.}^{(2)}$ und die Steigung der freien Wirbel $k_0^{(2)}$ weichen nur im Rahmen der Rundung von dem Fall "Propeller ohne Ruder" ab, daher sind diese Werte hier nicht eingetragen. Der Propellerschub wird mit zunehmendem Ruder-Anstellwinkel verkleinert, vergl. auch die Ergebnisse von Isay [2]. Diese Abminderung ist jeweils bei hohem Schubbelastungsgrad wegen der stabilisierenden Wirkung der freien Propellerwirbel geringer als bei niedrigem c_s . Mit zunehmendem Abstand nimmt der Einfluß des Ruders am Propeller ebenso

*)): Der Wirkungsgrad des Gesamtsystems setzt sich daher zusammen aus dem vom dünnen Ruder praktisch unbeeinflusstem Propeller-Wirkungsgrad und dem Wirkungsgradgewinn am Ruder, welcher dem erzielten Vortrieb entspricht.

ab, wie er - bei gleichem Abstand - ansteigt, wenn die im Strahl liegende Ruderfläche vergrößert wird (B: $\lambda=1.5$ bzw. C: $\lambda=2$; $b_o=1$; $b_i=1.2$).

Weiterhin werden die Ergebnisse für ein 25% dickes Ruder (A) untersucht. Während die Umfangskomponente V_q , welche die Quellbelegung am Propeller induziert, im $r\varphi$ -Mittel nicht beiträgt, liefert die mittlere Axialkomponente einen negativer Anteil, der damit den Nachstrombeitrag verstärkt ($\overline{u_N} = -0.28 \cdot u_o$) und der in Tabelle 12 angegeben ist.

Tabelle 12: Dicken-Induktion am Propeller:

Beispiel	x_o	$\overline{u_a}$	$\frac{\overline{u_a}}{u_N}$
(1A)	0.65	$-0.016 \cdot u_o$	0.055
(3A)		$-0.010 \cdot u_o$	0.037
(4A)		$-0.014 \cdot u_o$	0.047
(6A)		$-0.009 \cdot u_o$	0.032

Durch das zusätzliche Geschwindigkeitsfeld der Ruder-Dickenbelegung wird die Propellerzirkulation erneut verändert. Jedoch beträgt die Abweichung von der Zirkulation mit dünnen Ruder selbst bei mäßiger Belastung nur $\lesssim 8\%$ und ist damit gering. Da aber der negative u_a -Beitrag im φ -Mittel die Propellerzirkulation vergrößert, hat das dicke Ruder insgesamt eine schubsteigernde Wirkung am Propeller. Im einzelnen kann - wie bei der Diskussion der Wirkung eines dünnen Ruders - die Änderung von Zirkulation und Flügelkräften aus dem induzierten Geschwindigkeitsfeld (Diagramme 25-26) abgeleitet werden.

Die Veränderung der Schubbelastung ist in Tabelle 13 angegeben. Dabei ist wie in Tabelle 11 die Vortriebswirkung des Ruders selbst nicht berücksichtigt.

Tabelle 13: Wirkung der Ruderdicke am Propeller:

Beispiel	x_o	Propeller ohne Ruder	Propeller mit Ruder: $\delta=0$	Propeller mit Ruder: $\delta=-0.20$
(1A)	0.65	$c_s^{(1)} = 7.98$	$c_s^{(2)} = 8.06, \frac{c_s^{(2)}}{c_s^{(1)}} - 1 = +0.8\%$	$c_s^{(2)} = 8.00, \frac{c_s^{(2)}}{c_s^{(1)}} - 1 = +0.3\%$
(3A)		2.04	2.08 +1.8%	2.04 +0.1%
(4A)		5.20	5.24 +0.8%	5.22 +0.4%
(6A)		1.73	1.77 +2.1%	1.74 +0.2%
(1A)	1.00	7.98	8.01 +0.4%	8.00 +0.2%
(3A)		2.04	2.06 +1.0%	2.04 +0.1%

Durch eine 25%-Dickenbelegung ergibt sich somit am Propeller ein zusätzlicher Schubgewinn, der sich bei mäßiger Belastung stärker bemerkbar macht und ca. 1-2% beträgt. Dieser Gewinn tritt auch noch bei größeren Ruder-Anstellwinkeln auf; er wird mit zunehmendem Abstand schnell geringer.

Insgesamt erhalten ^(wir) zusammen mit dem Vortriebsgewinn $-K_x^{(R)}$, den das Ruder im Propellerstrahl erzielt (Kap. VIII), zusätzlich zum Propellerschub ohne Ruder ($S^{(1)}=1$) eine Kraft, die in Tabelle 14 angegeben ist; positives Vorzeichen bedeutet Vergrößerung des Vortriebes, negatives Vorzeichen entsprechend Abminderung durch die Ruderwirkung.

Tabelle 14: Zusätzlicher Vortrieb am System Propeller-Ruder

Beispiel	x_0	$\delta = 0$					$\delta = -0.20$				
		$-\frac{K_x^{(R)}}{S^{(1)}}$	dünnes Ruder: $\frac{S^{(2)}}{S^{(1)}}$	$\frac{S^{(2)} - K_x^{(R)}}{S^{(1)}}$	25% dickes Ruder: $\frac{S^{(3)}}{S^{(1)}}$	$\frac{S^{(3)} - K_x^{(R)}}{S^{(1)}}$	$-\frac{K_x^{(R)}}{S^{(1)}}$	dünnes Ruder: $\frac{S^{(2)}}{S^{(1)}}$	$\frac{S^{(2)} - K_x^{(R)}}{S^{(1)}}$	25% dickes Ruder: $\frac{S^{(3)}}{S^{(1)}}$	$\frac{S^{(3)} - K_x^{(R)}}{S^{(1)}}$
(1A)	0.65	+4.9%	-0.5%	+4.4%	+0.8%	+5.7%	-0.9%	-1.0%	-1.9%	+0.3%	-0.6%
(3A)		+4.4%	-0.9%	+3.5%	+1.8%	+6.2%	-7.1%	-1.9%	-9.0%	+0.1%	-7.0%
(4A)		+5.6%	-0.4%	+5.2%	+0.8%	+6.4%	-1.3%	-0.8%	-2.1%	+0.4%	-0.9%
(6A)		+5.2%	-1.1%	+4.1%	+2.1%	+7.3%	-7.3%	-3.1%	-10.4%	+0.2%	-7.1%
(1A)	1.00	+4.9%	-0.3%	+4.6%	+0.4%	+5.3%	-1.2%	-0.5%	-1.7%	+0.2%	-1.0%
(3A)		+4.6%	-0.4%	+4.2%	+1.0%	+5.6%	-7.7%	-0.8%	-8.5%	+0.1%	-7.6%

Der Hauptanteil der - bei Geradeausfahrt $\delta=0$ erzielten - zusätzlichen Vortriebskraft tritt durch die Strahlumlenkung am Ruder auf; dieser Gewinn ist bei festem Fortschrittsgrad umso größer, je stärker der Propeller belastet ist. Genauere Aussagen erfordern hier eine $k_0^{(4)}$ -Iteration, da besonders bei hoher Belastung wegen des zu groß vorausgeschätzten $k_0^{(0)}$ auch $K_x^{(R)}$ zu groß ausfällt. Ein kleinerer Anteil der Zusatzkraft tritt entweder beim mäßig-dicken Ruder ($S^{(3)}$) als zusätzlicher Vortrieb oder beim dünnen Ruder ($S^{(2)}$) als geringfügige Abminderung in Erscheinung. Da die Dicke-Wirkung sich bei schwach-belastetem Propeller stärker bemerkbar macht, hängt die gesamte Zusatzkraft nur geringfügig von der Schubbelastung ab: Die Berücksichtigung des 25% dicken Ruders ($\delta=0$) im Schiffsnachstrom ergibt - auch bei größerem Abstand - etwa 5-7% Vortriebsgewinn gegenüber dem Fall "ohne Ruder", während ein dünnes Ruder etwa 3.5-5% zusätzlich zum Vortrieb beiträgt.

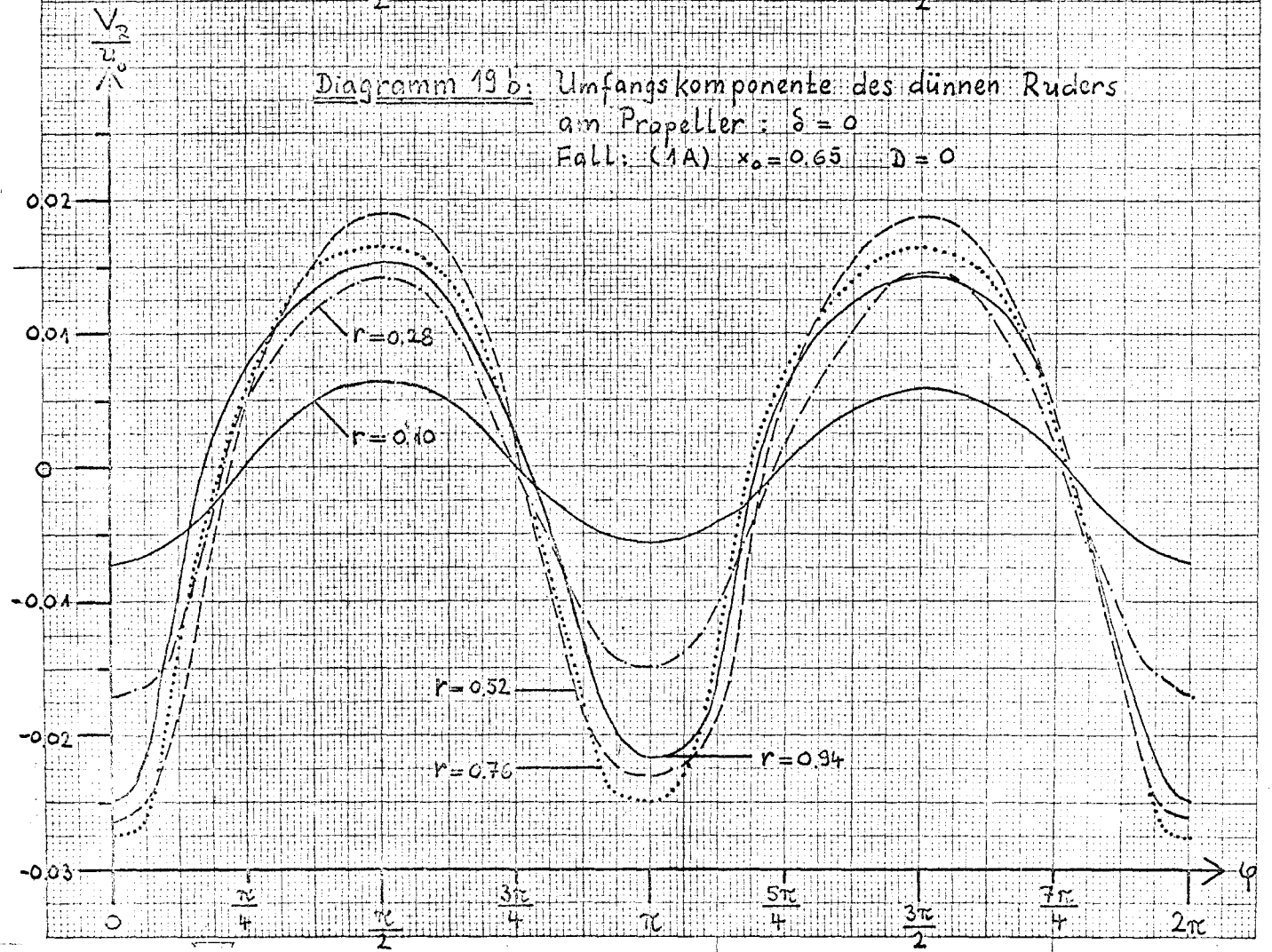
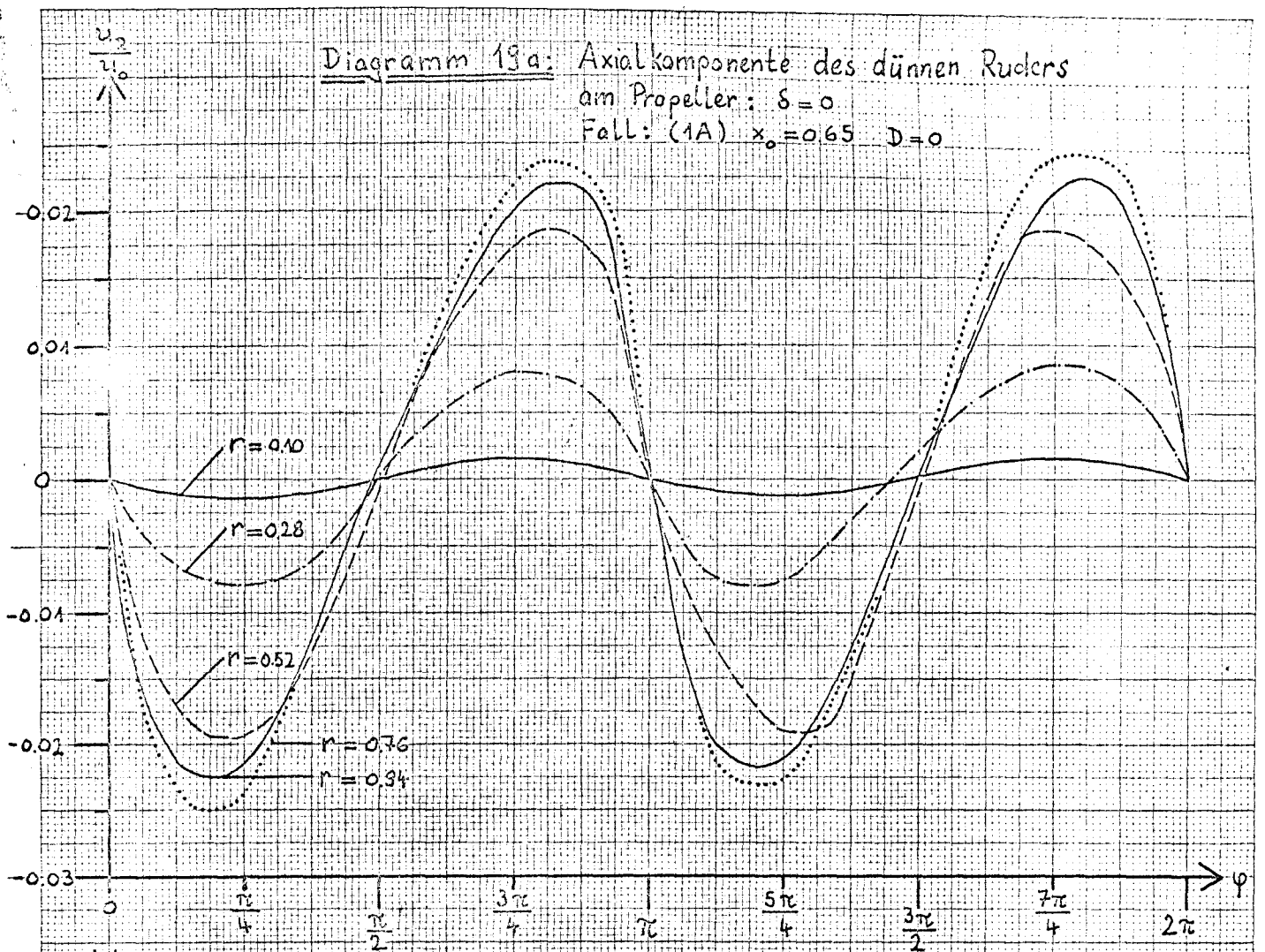


Diagramm 20a: Axialkomponente des dünnen Ruders
 am Propeller: $\delta = -0.20$
 Fall: (1A) $x_0 = 0.65$ $D = 0$

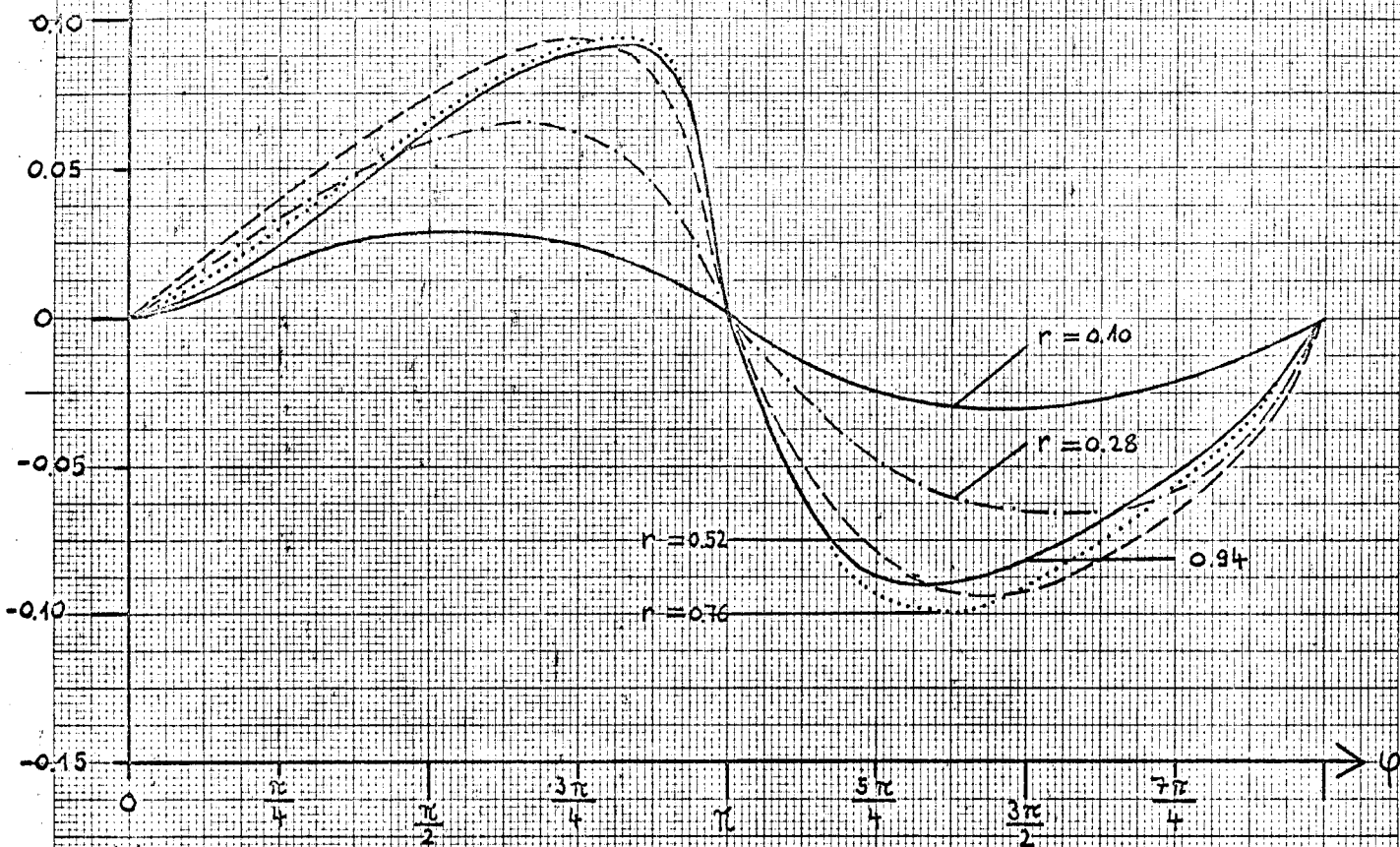
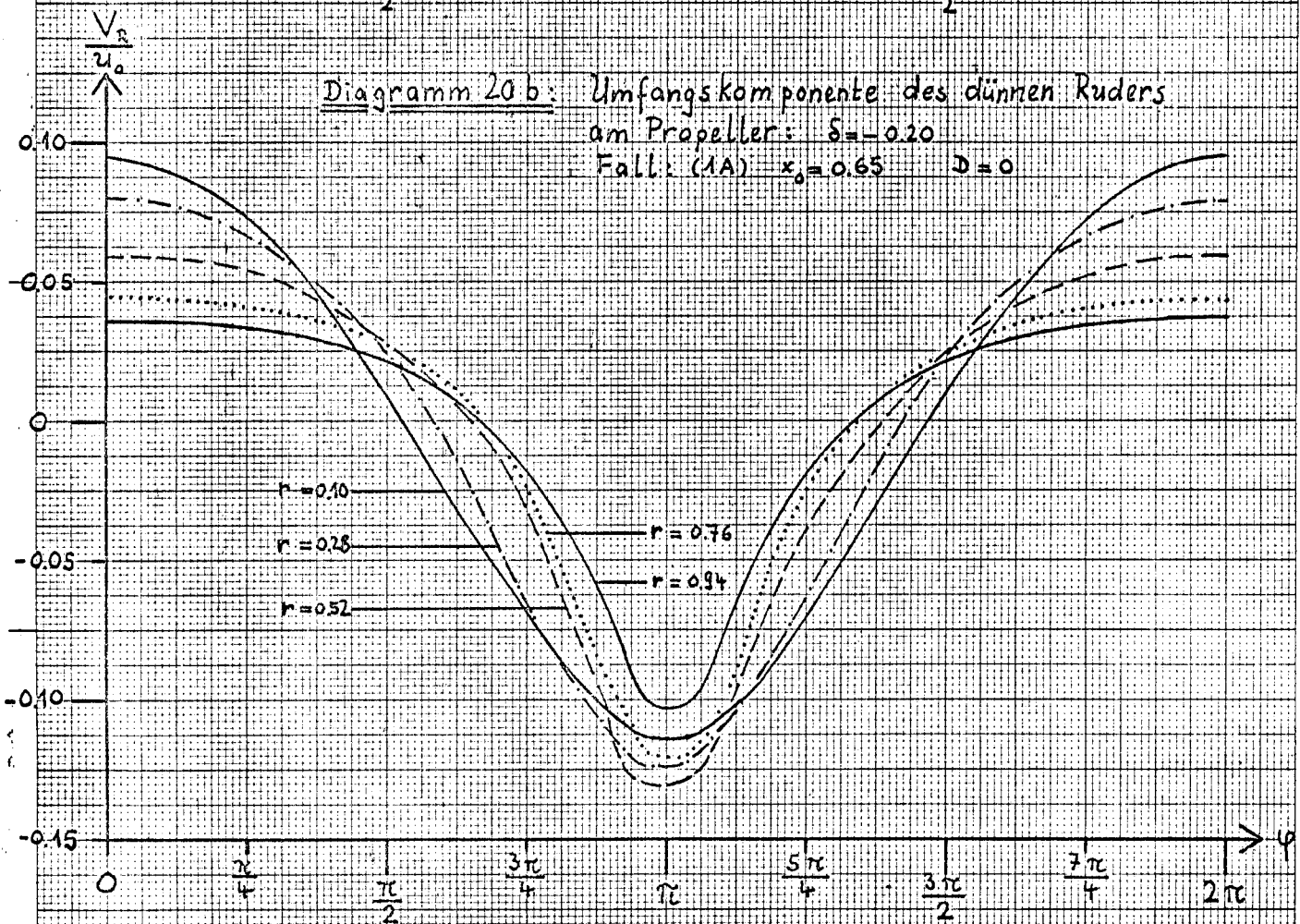
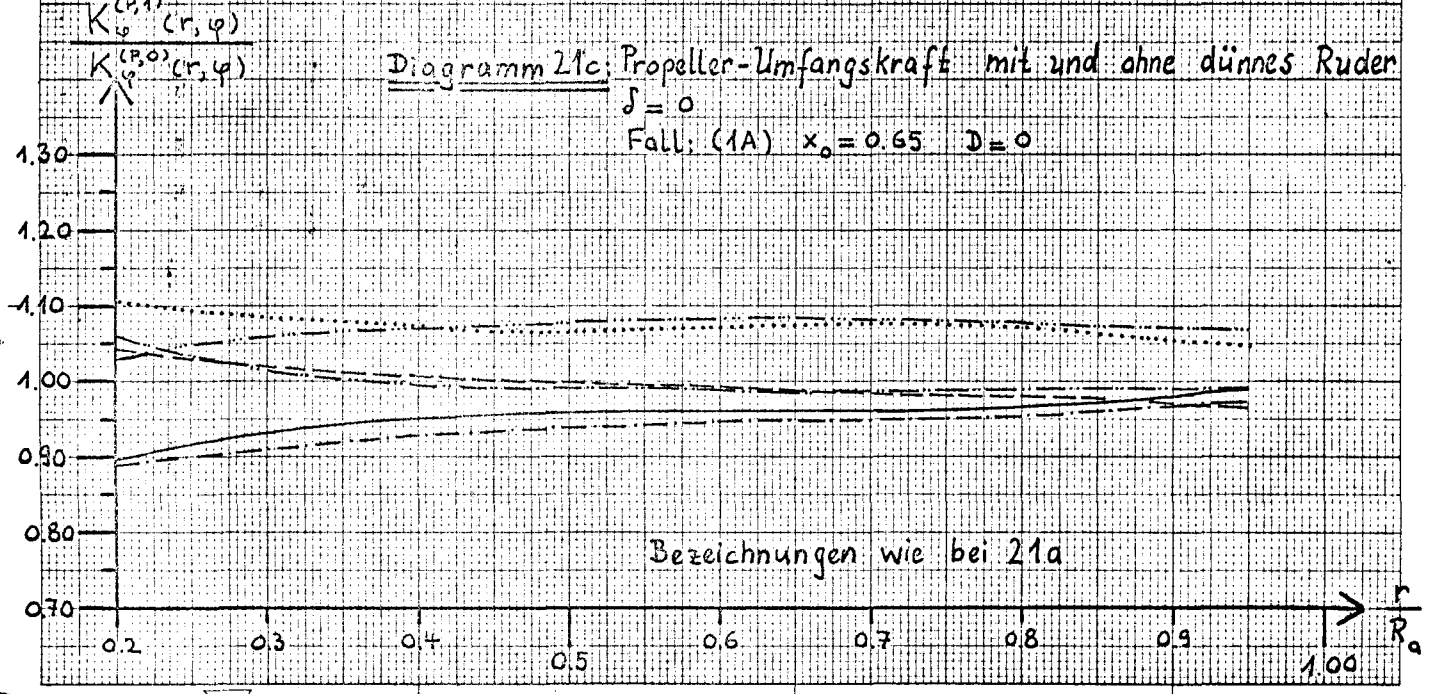
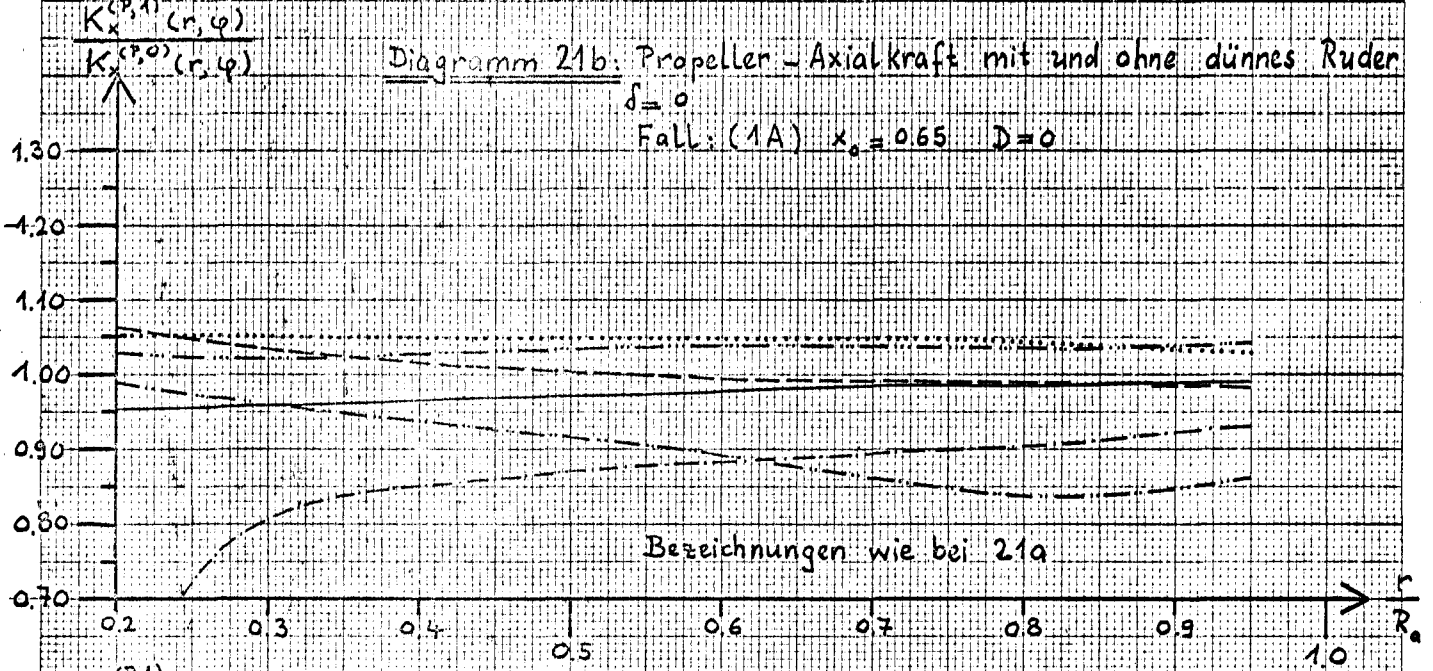
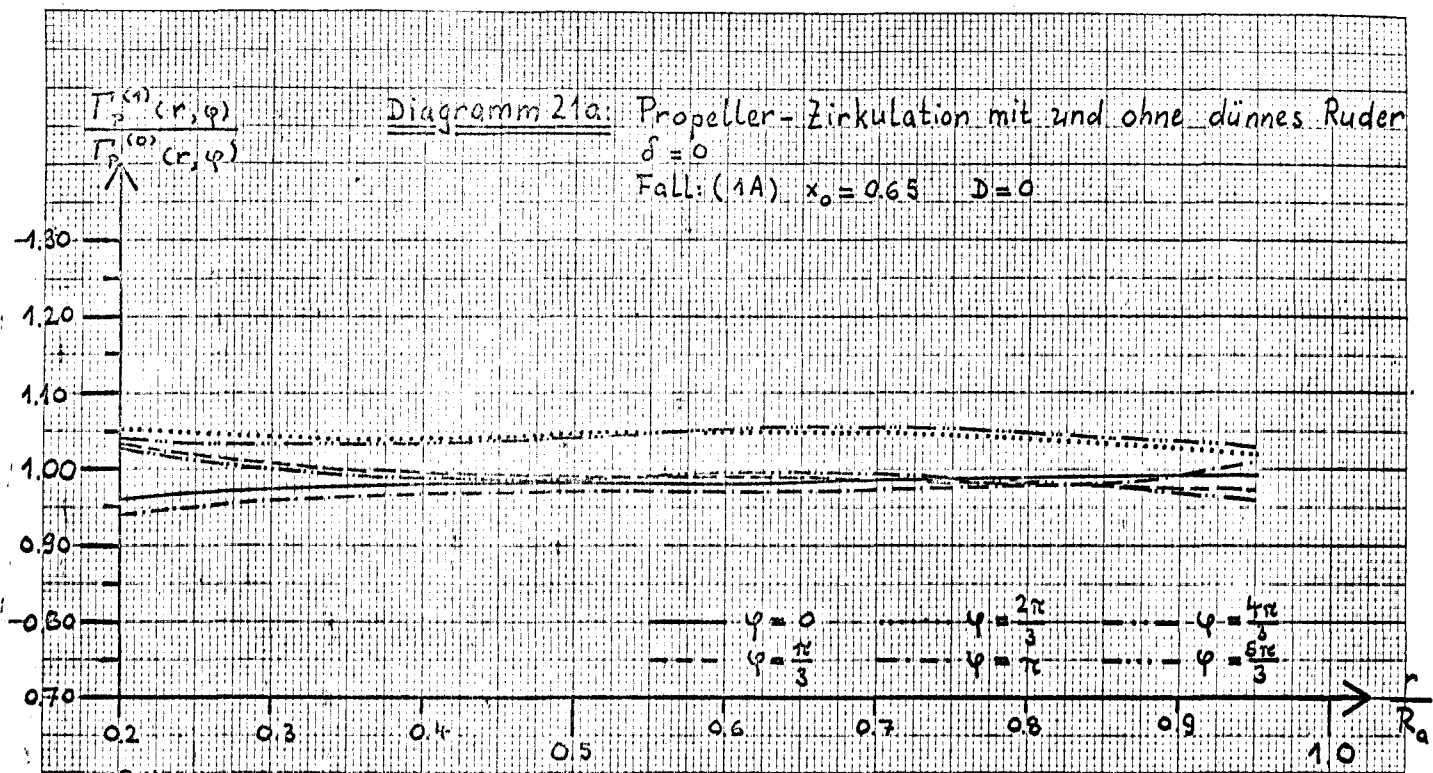
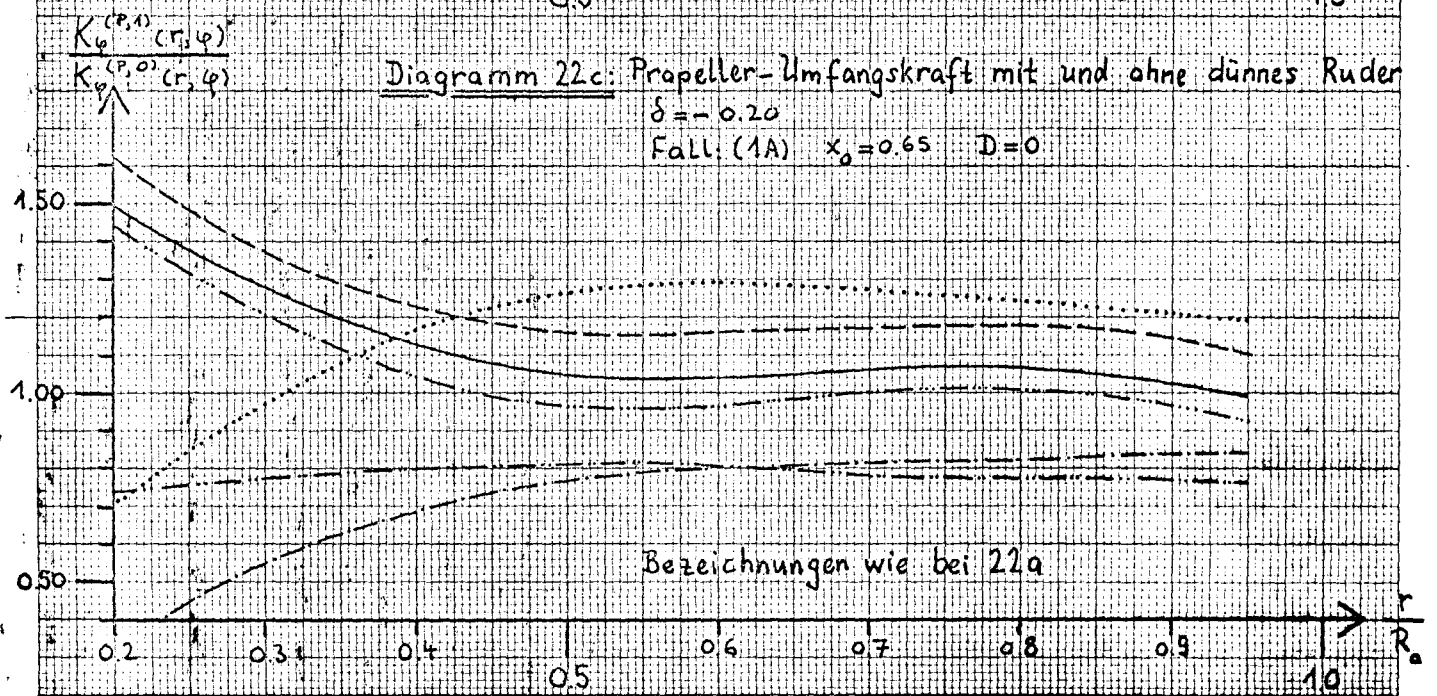
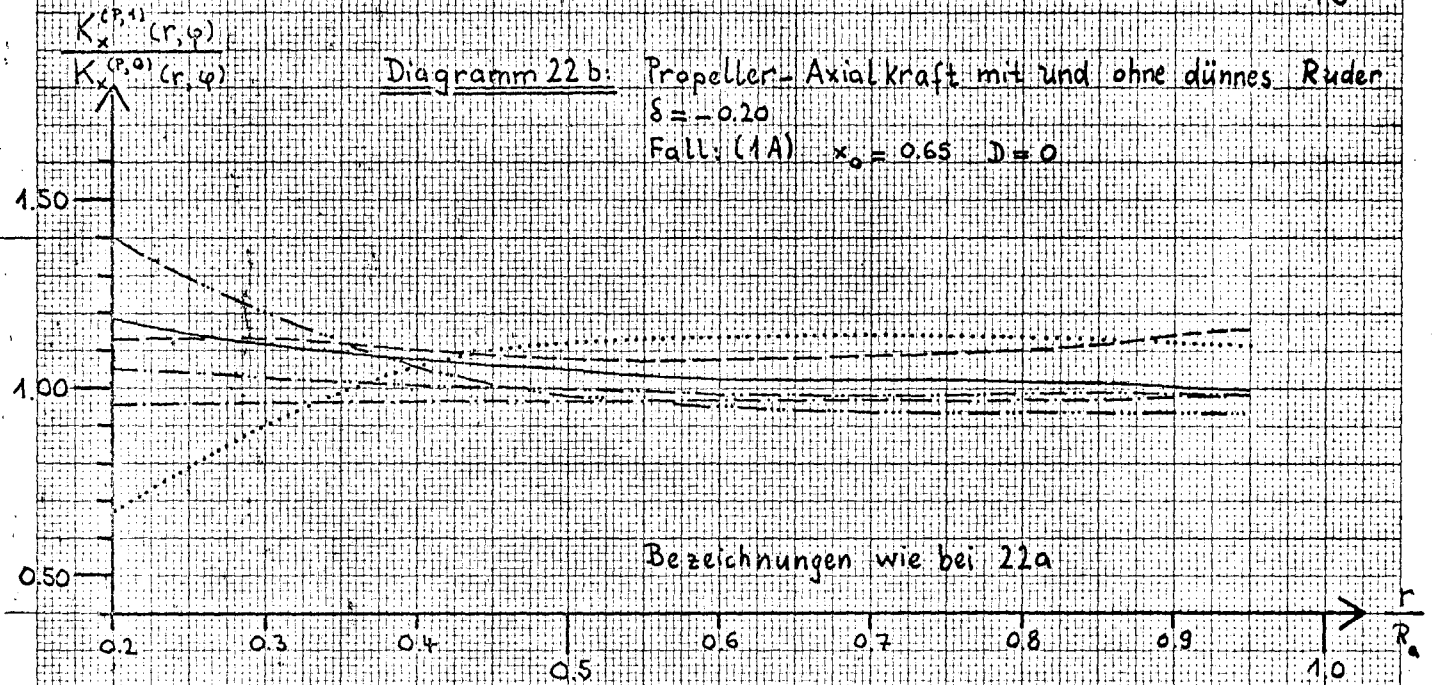
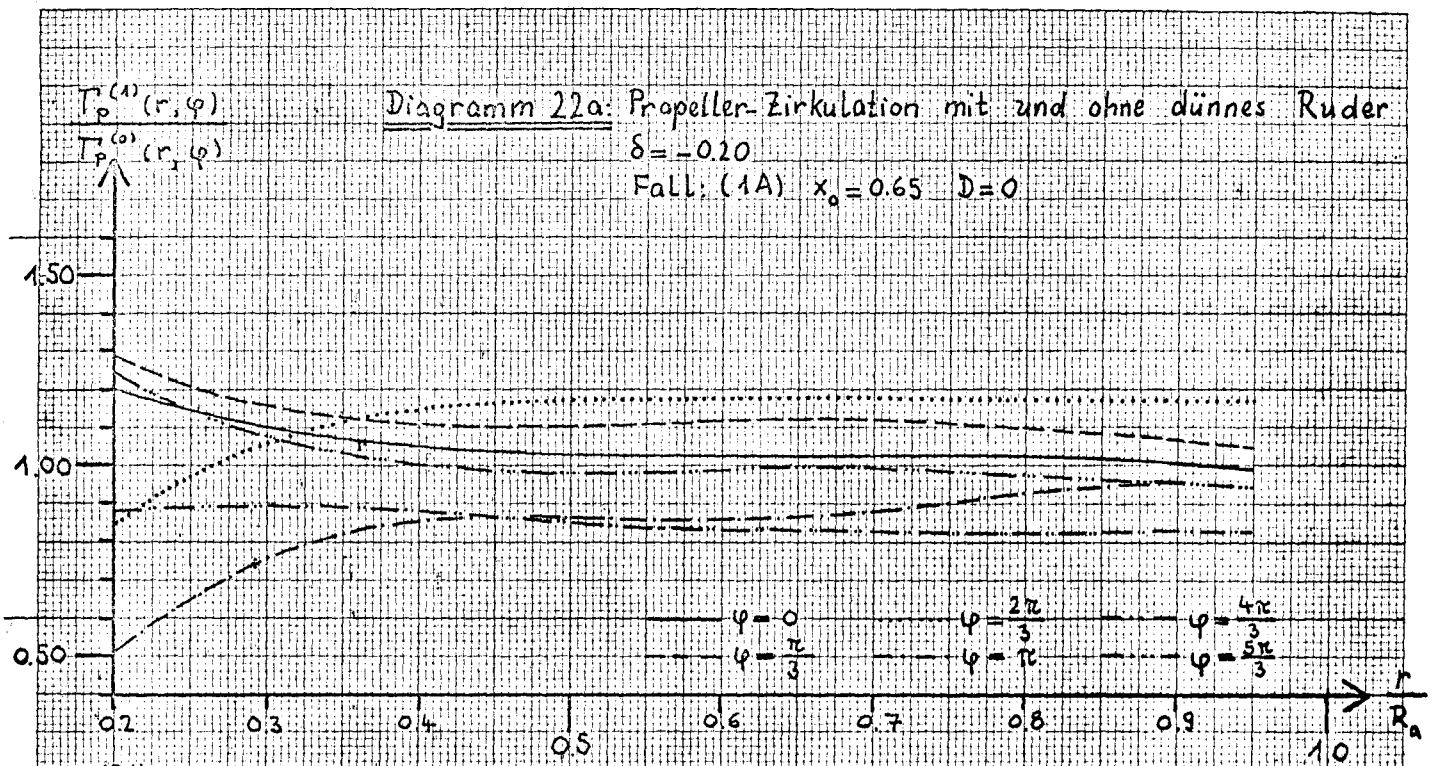
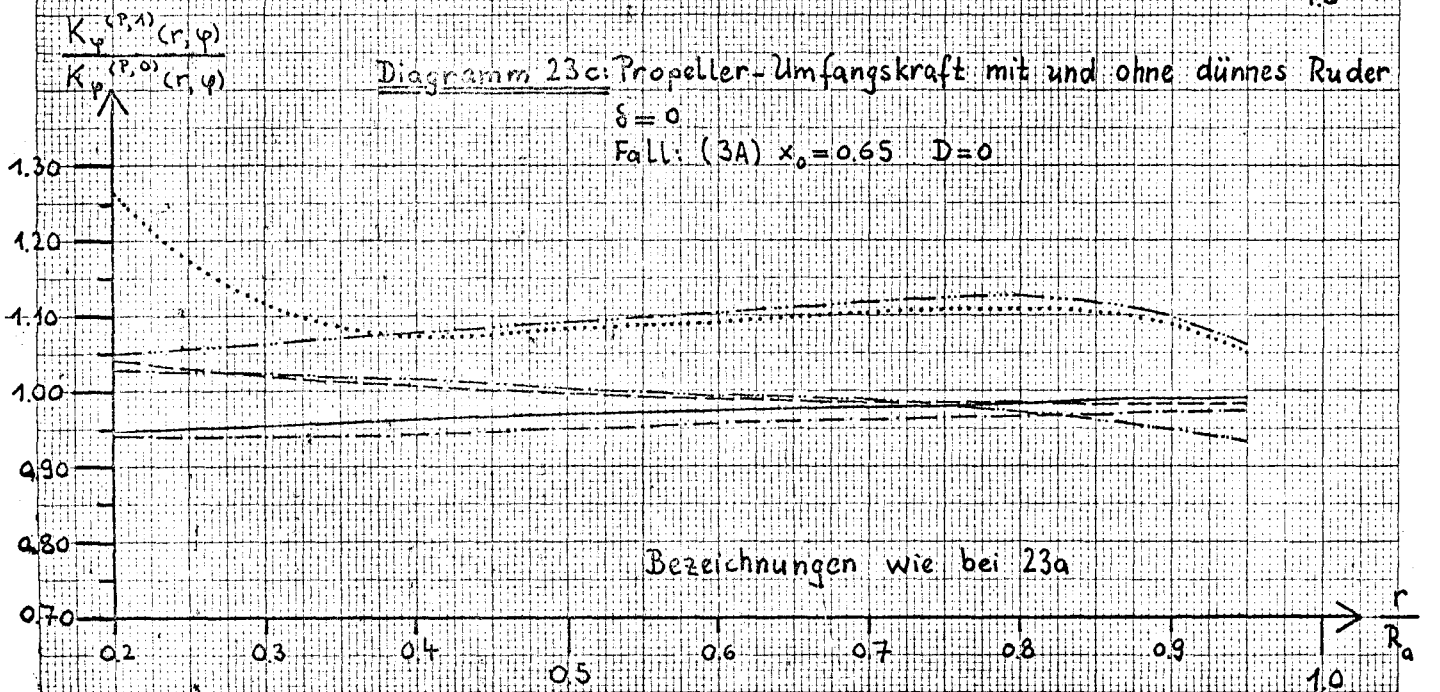
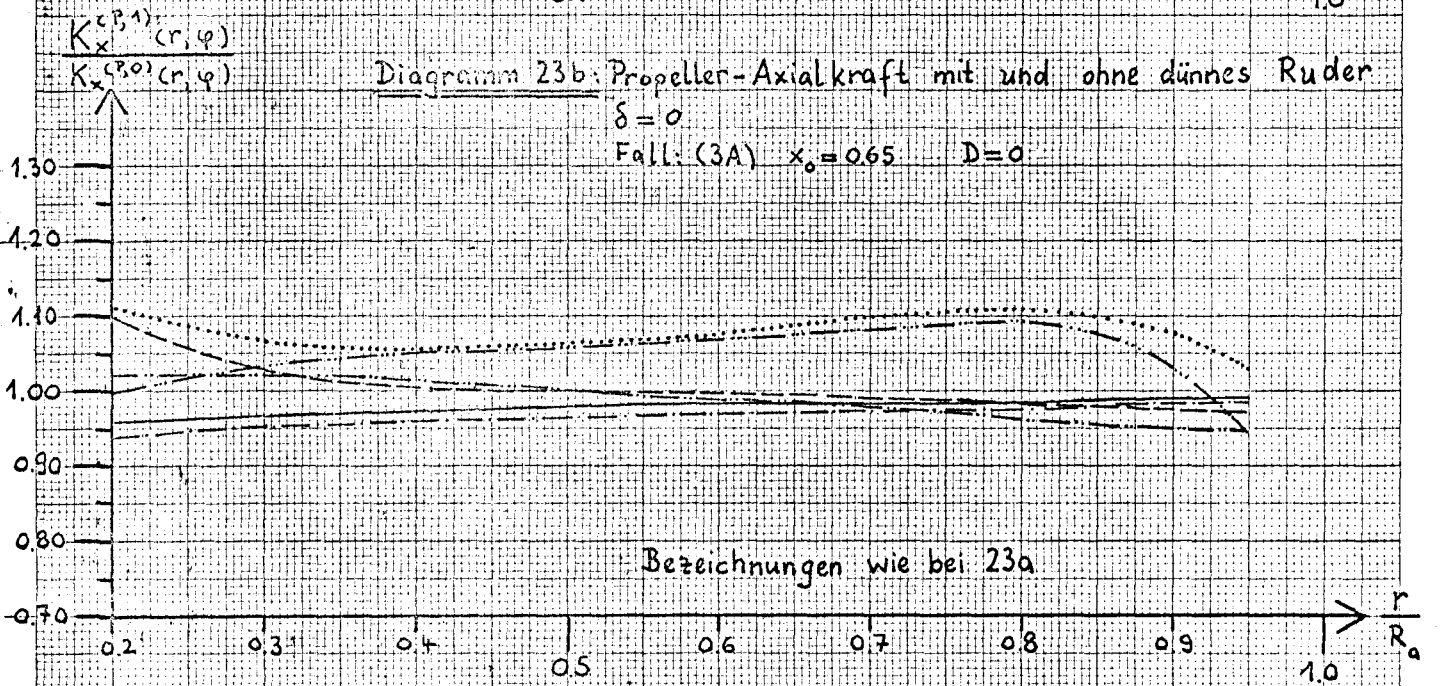
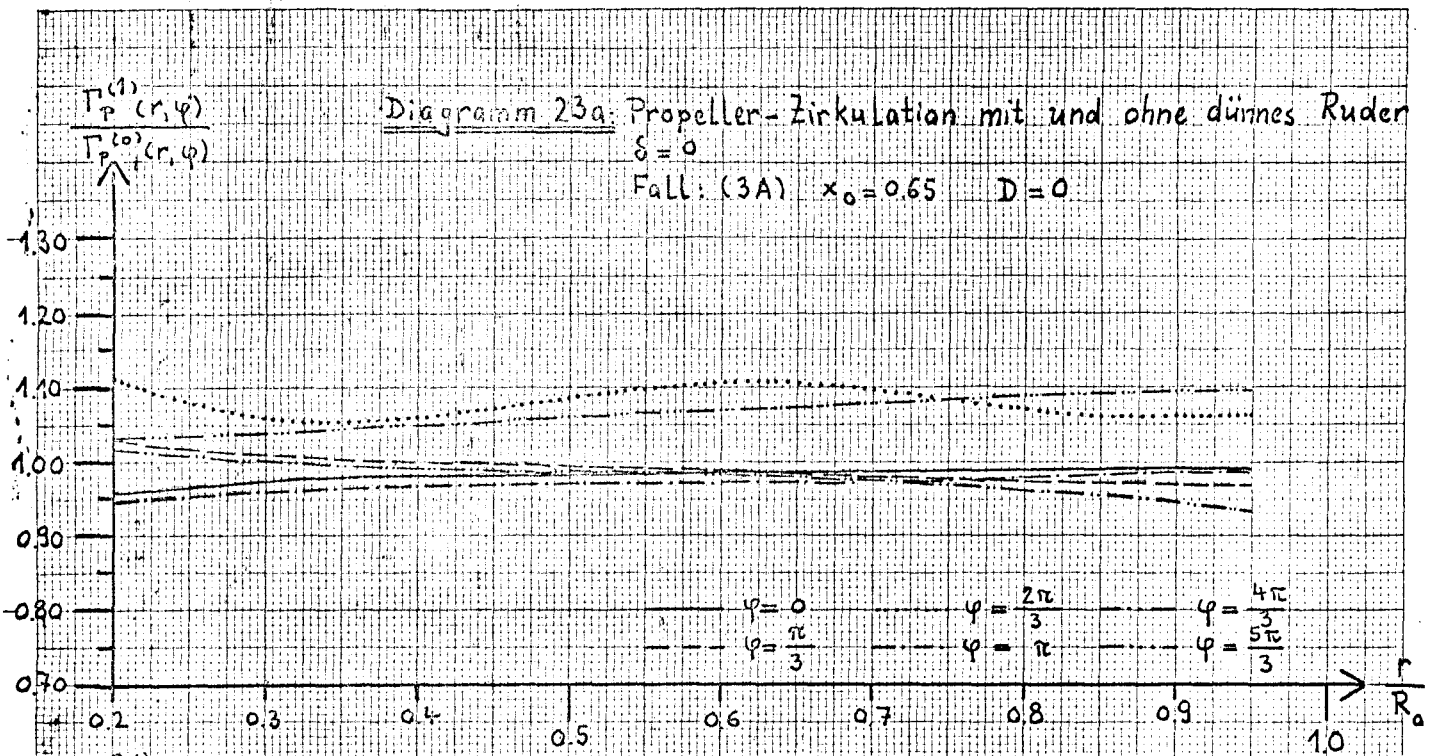


Diagramm 20b: Umfangskomponente des dünnen Ruders
 am Propeller: $\delta = -0.20$
 Fall: (1A) $x_0 = 0.65$ $D = 0$









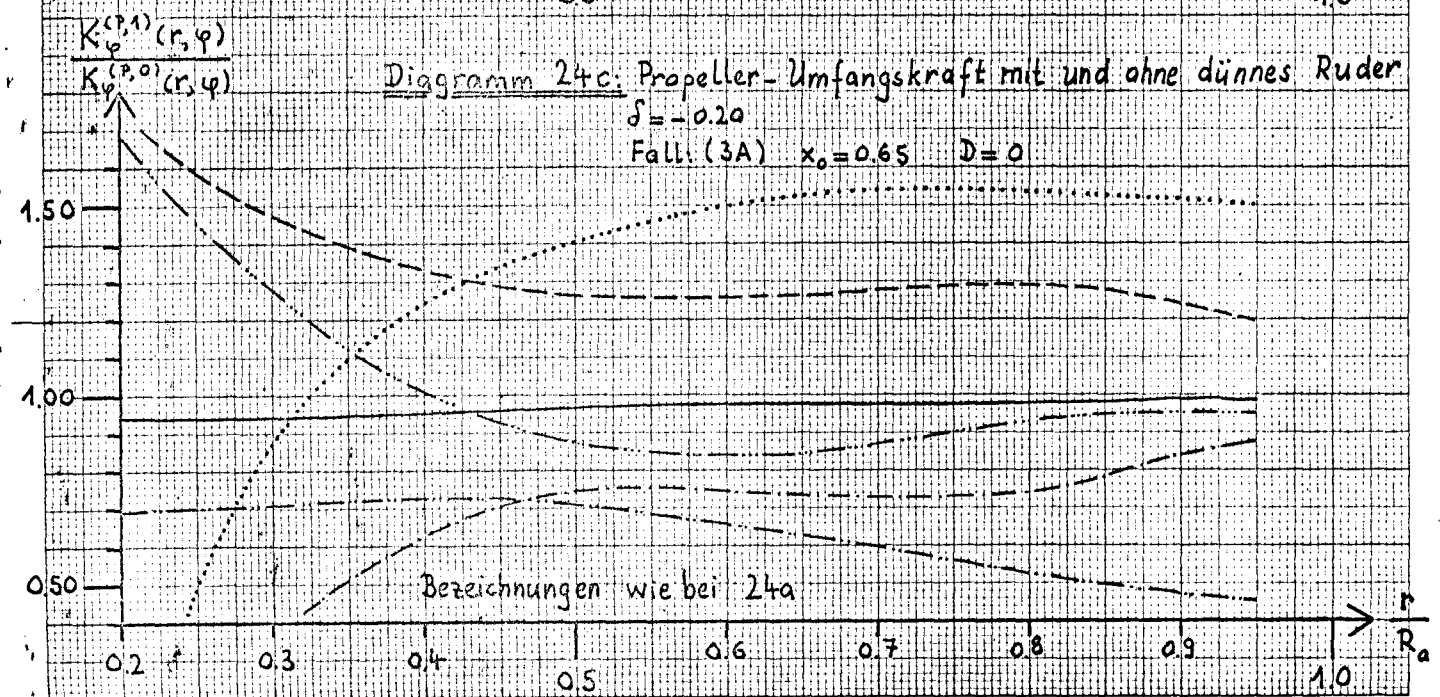
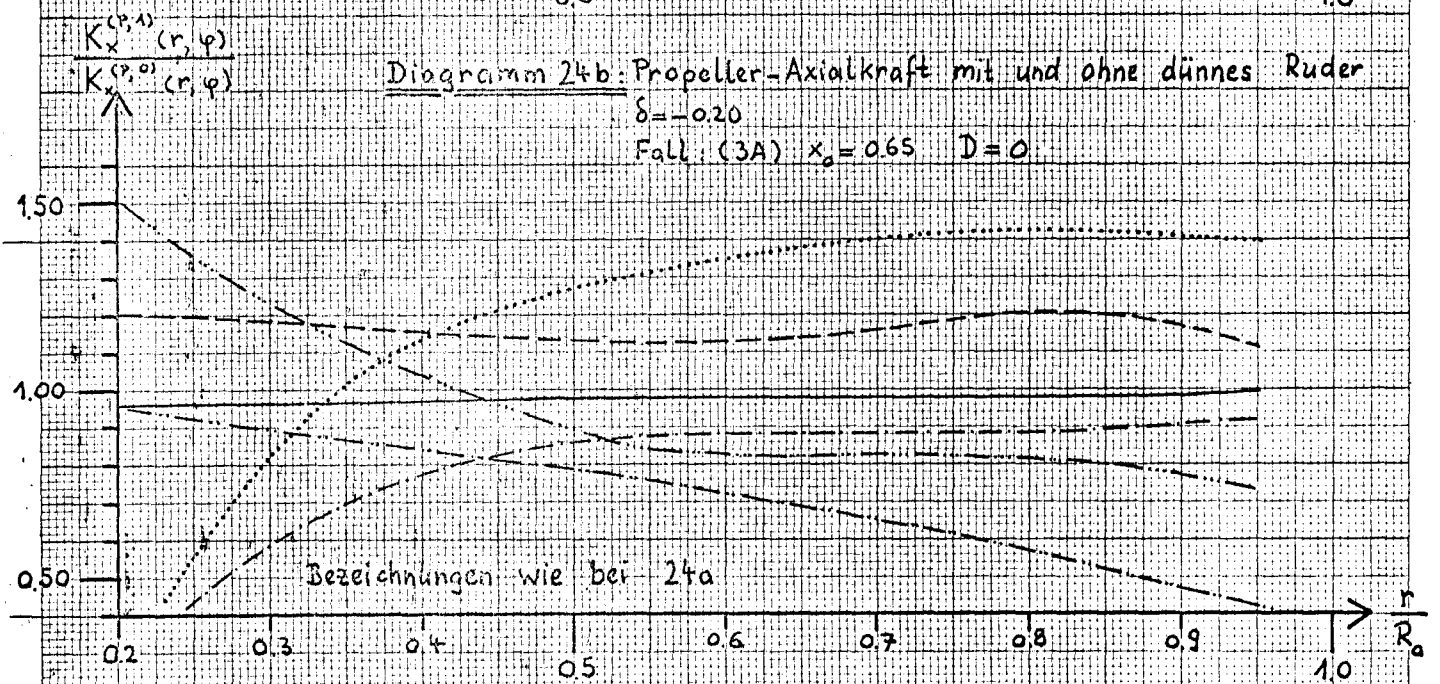
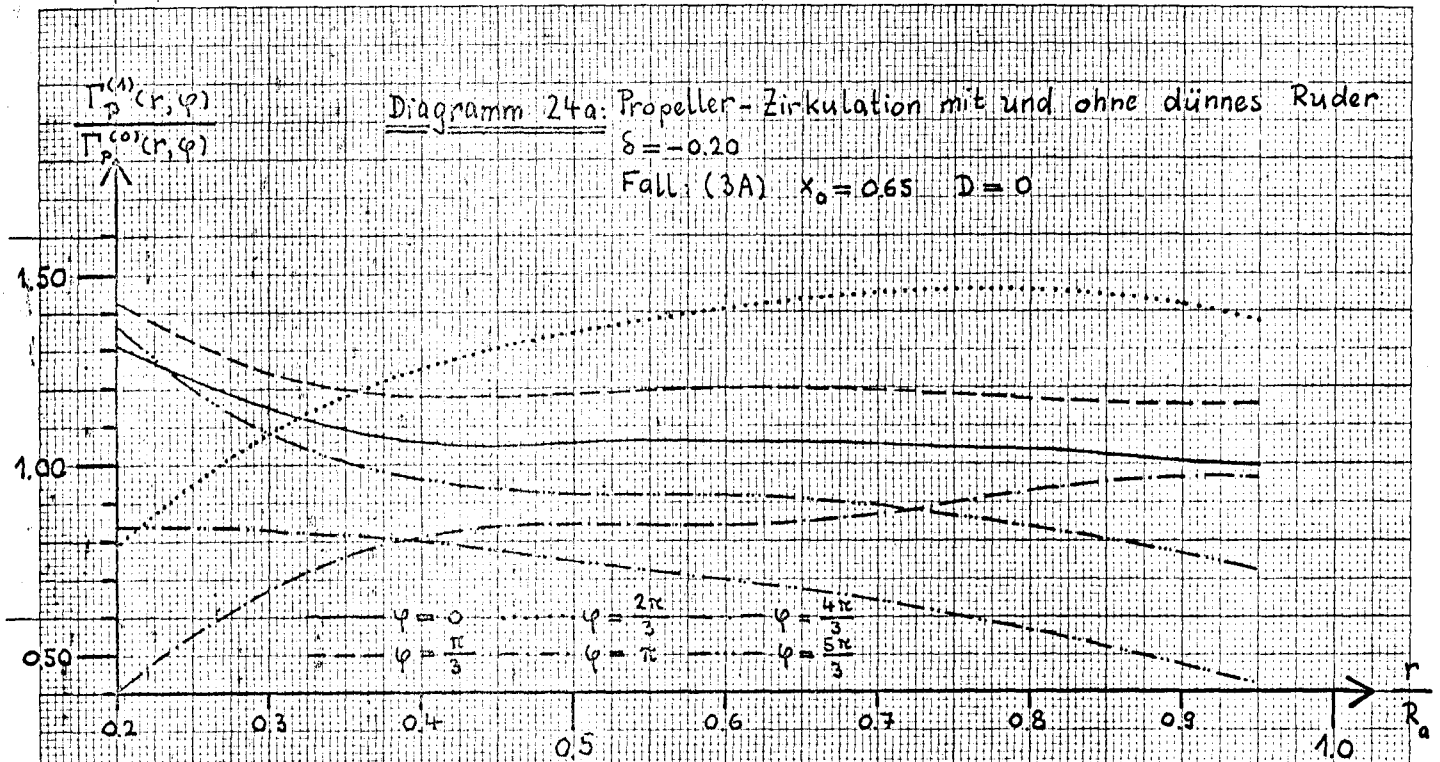


Diagramm 25a: Axialkomponente der Ruder-Dicken-Induktion
 am Propeller: $\delta=0$
 Fall: (1A) $x_0=0.65$ $D=0.25$

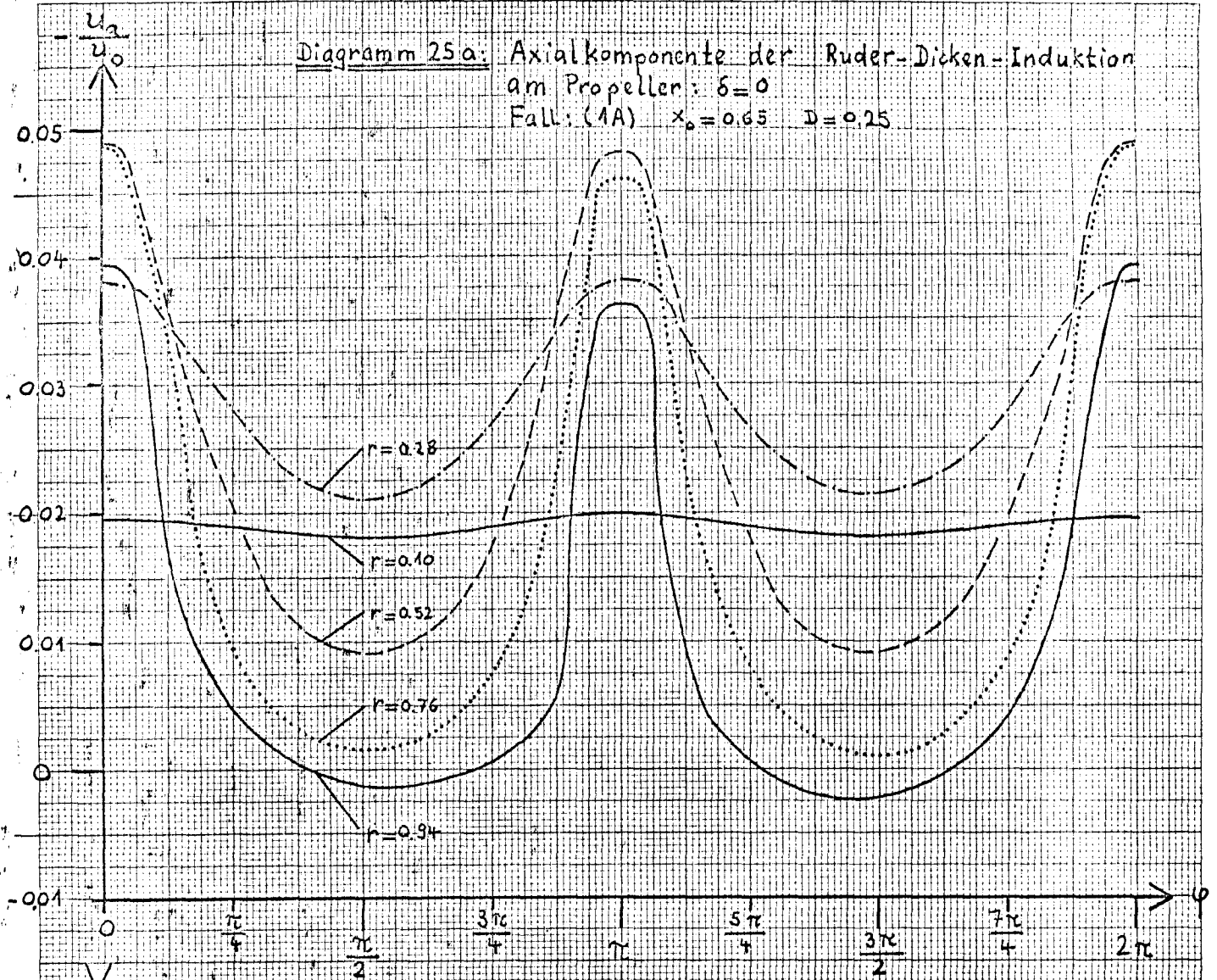


Diagramm 25b: Umfangskomponente der Ruder-Dicken-Induktion
 am Propeller: $\delta=0$
 Fall: (1A) $x_0=0.65$ $D=0.25$

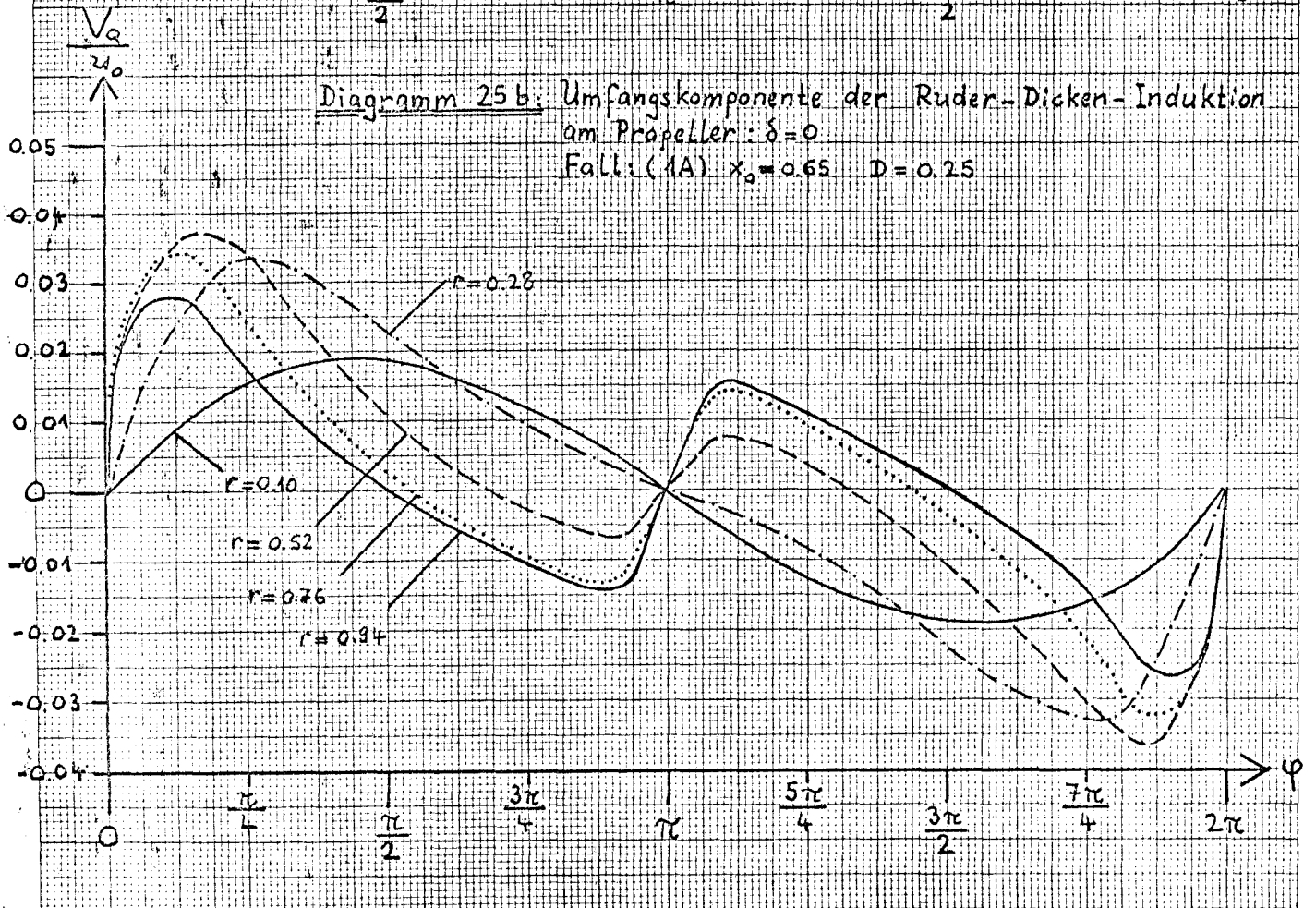


Diagramm 26a: Axialkomponente der Ruder-Dicken-Induktion
am Propeller: $\delta = -0.20$
Fall: (1A) $x_0 = 0.65$ $D = 0.25$

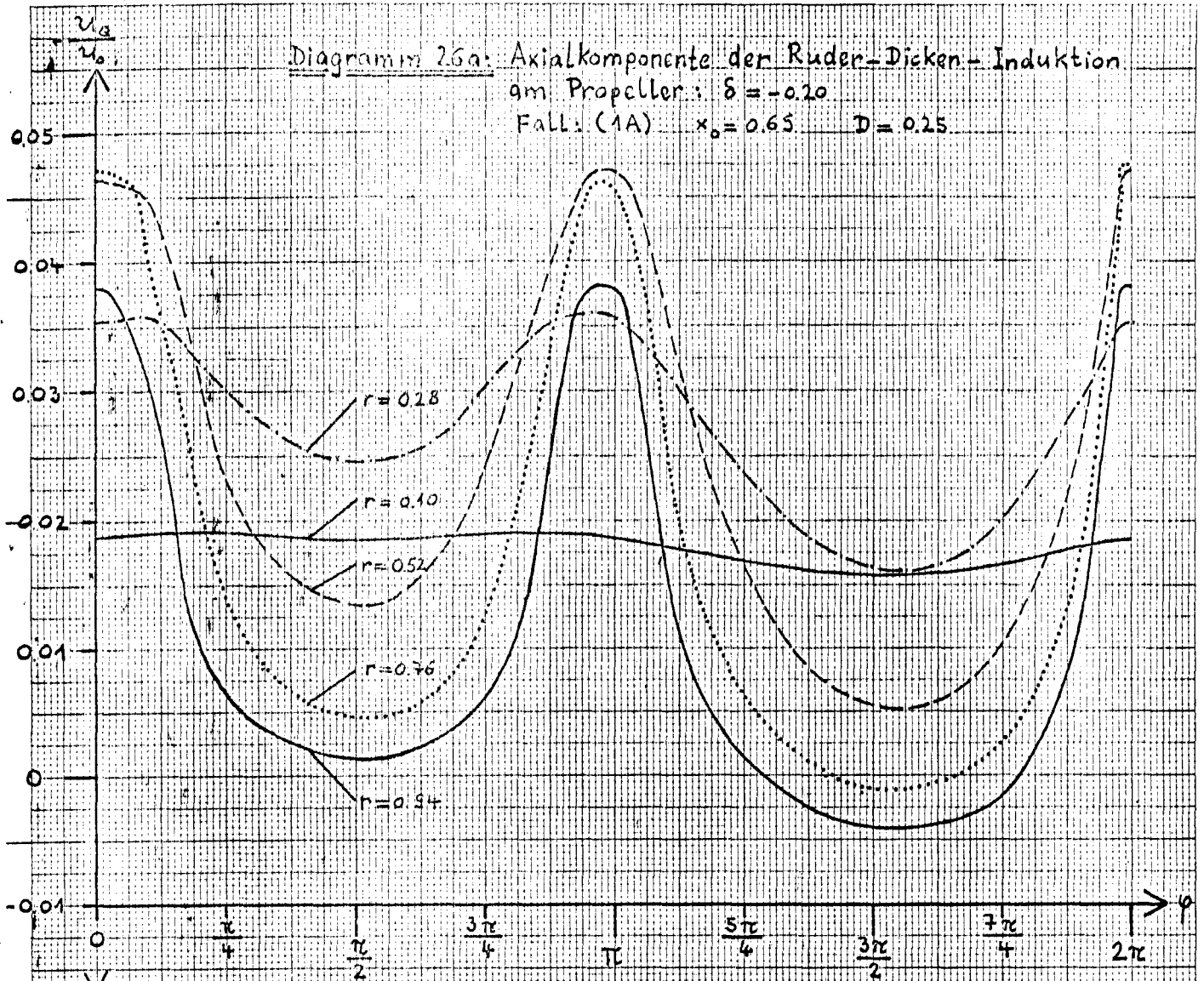
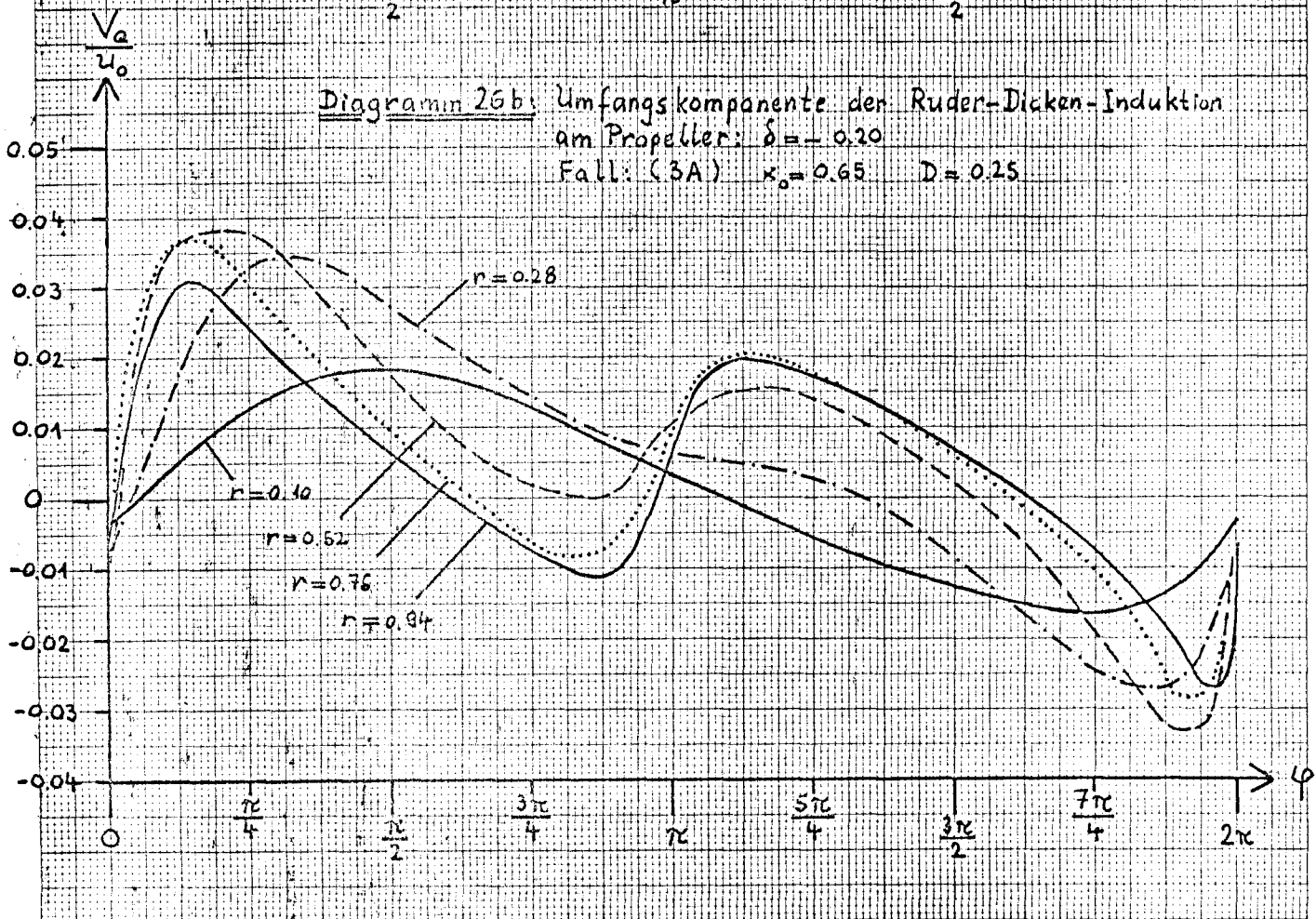
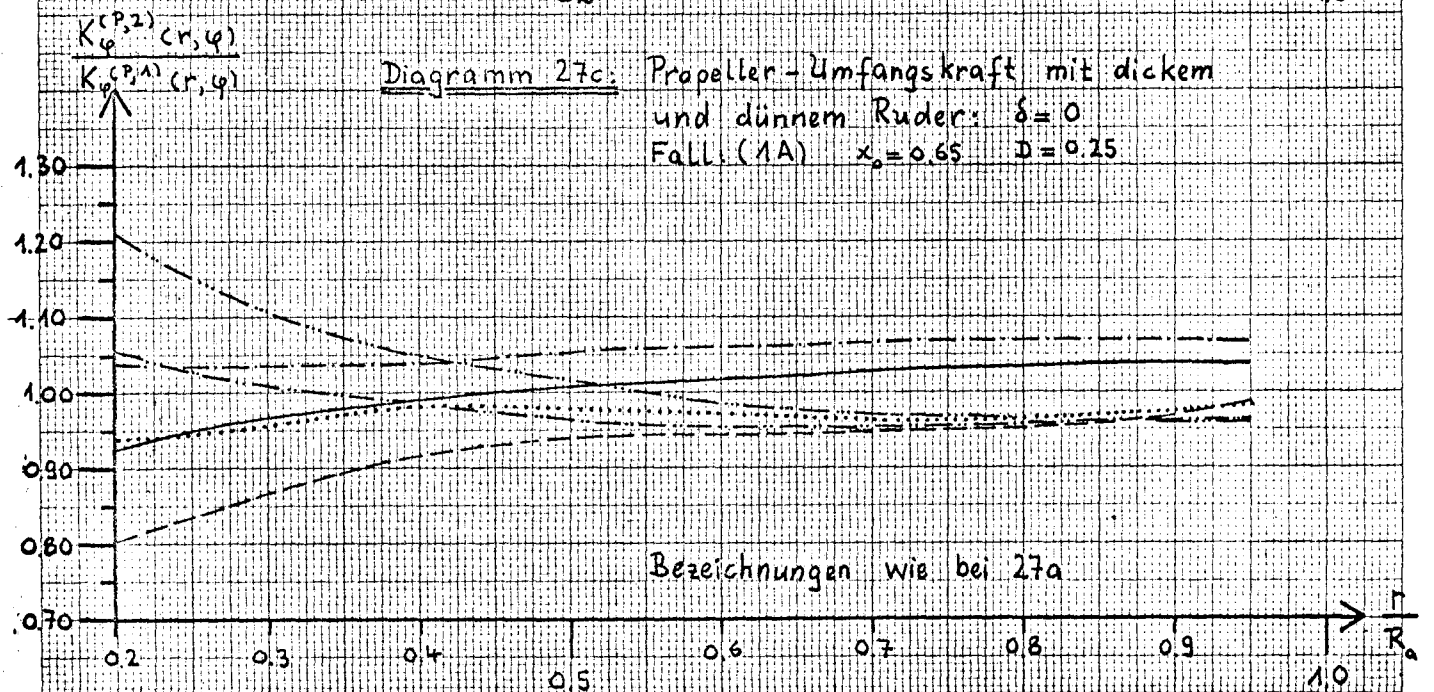
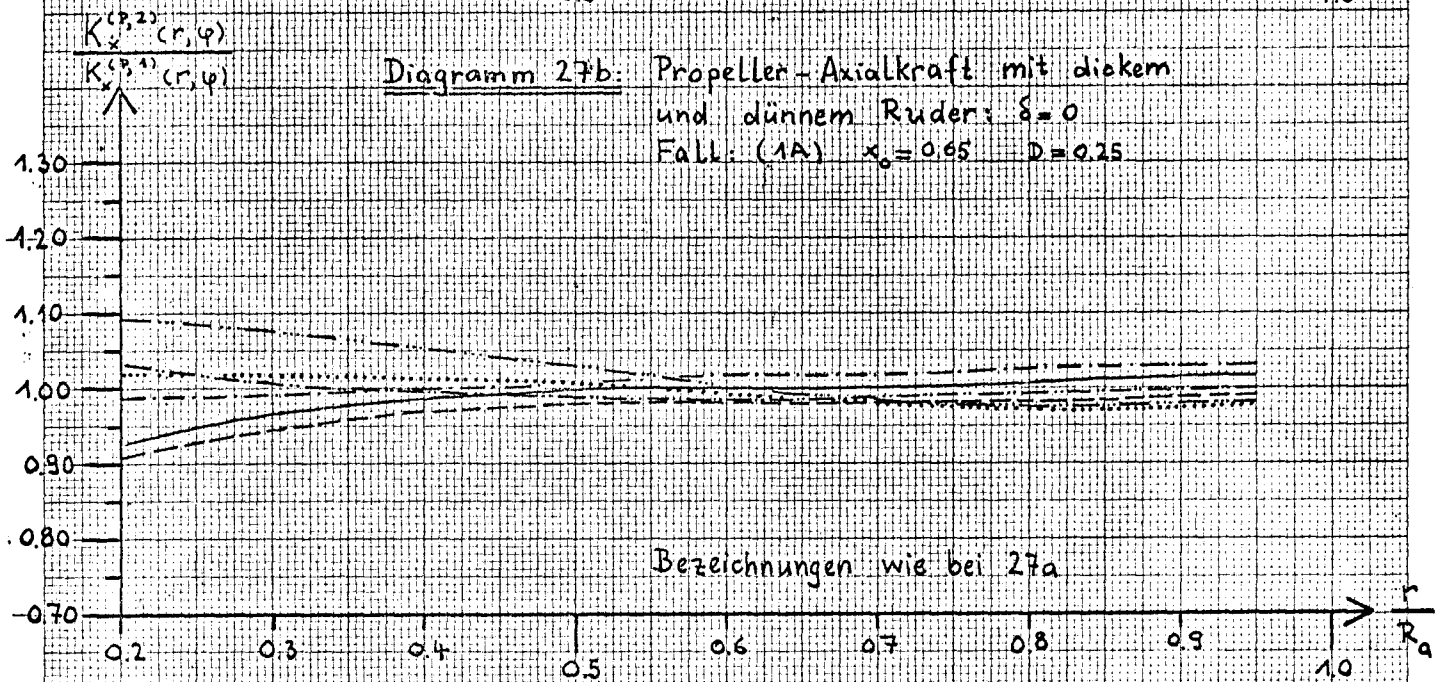
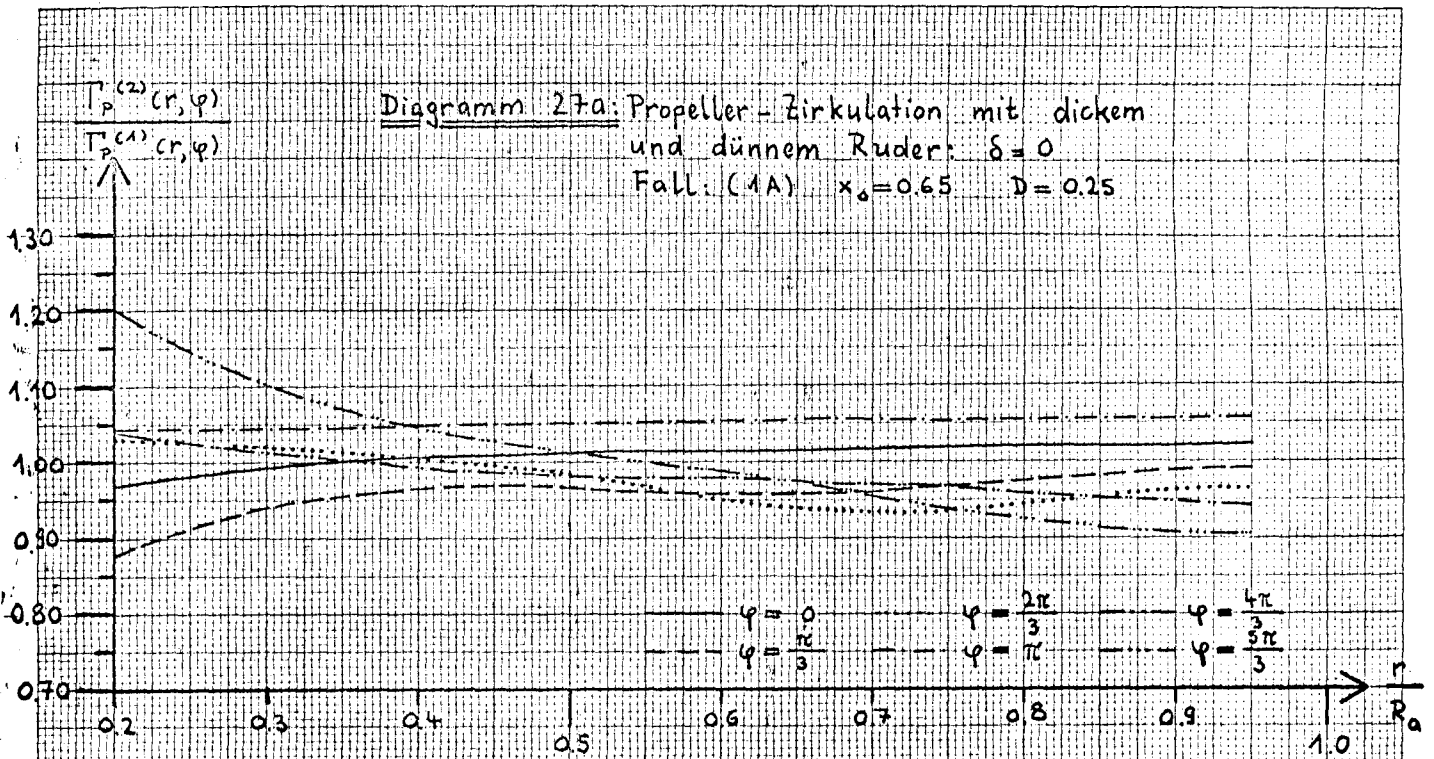
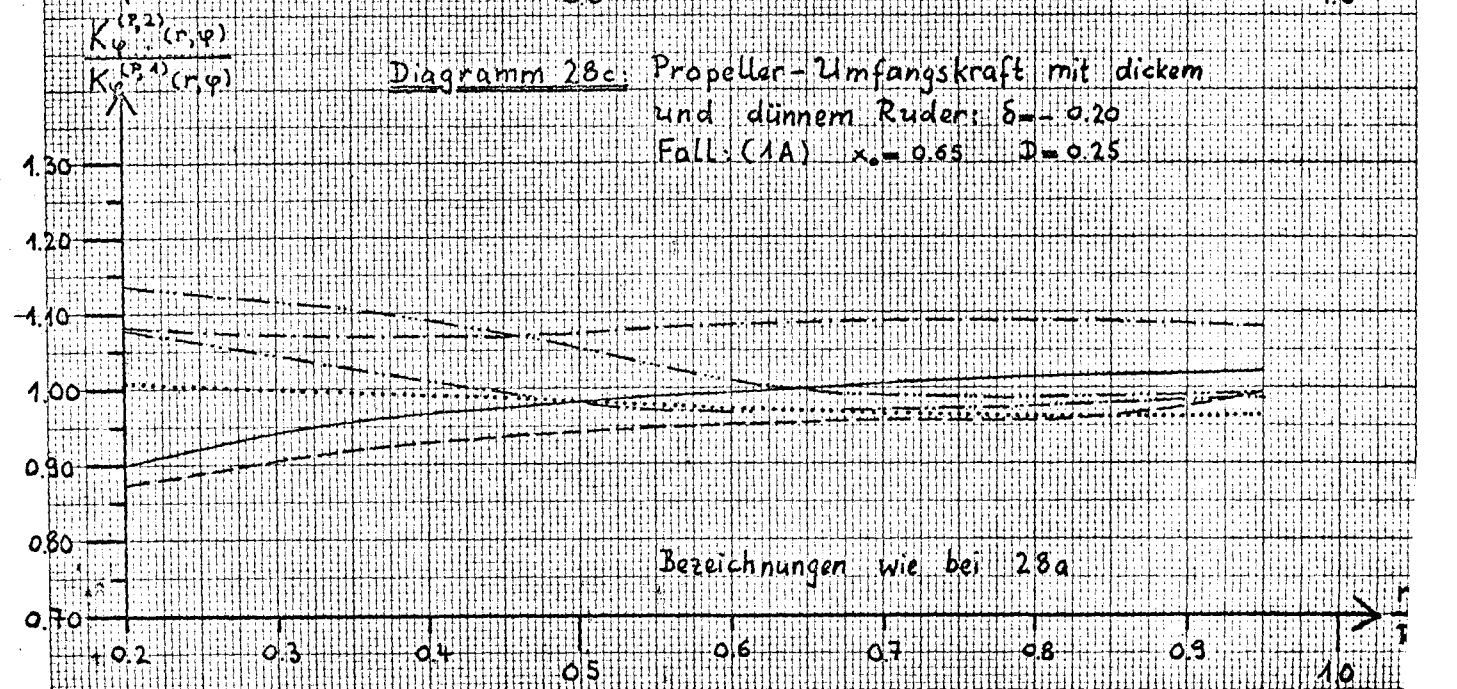
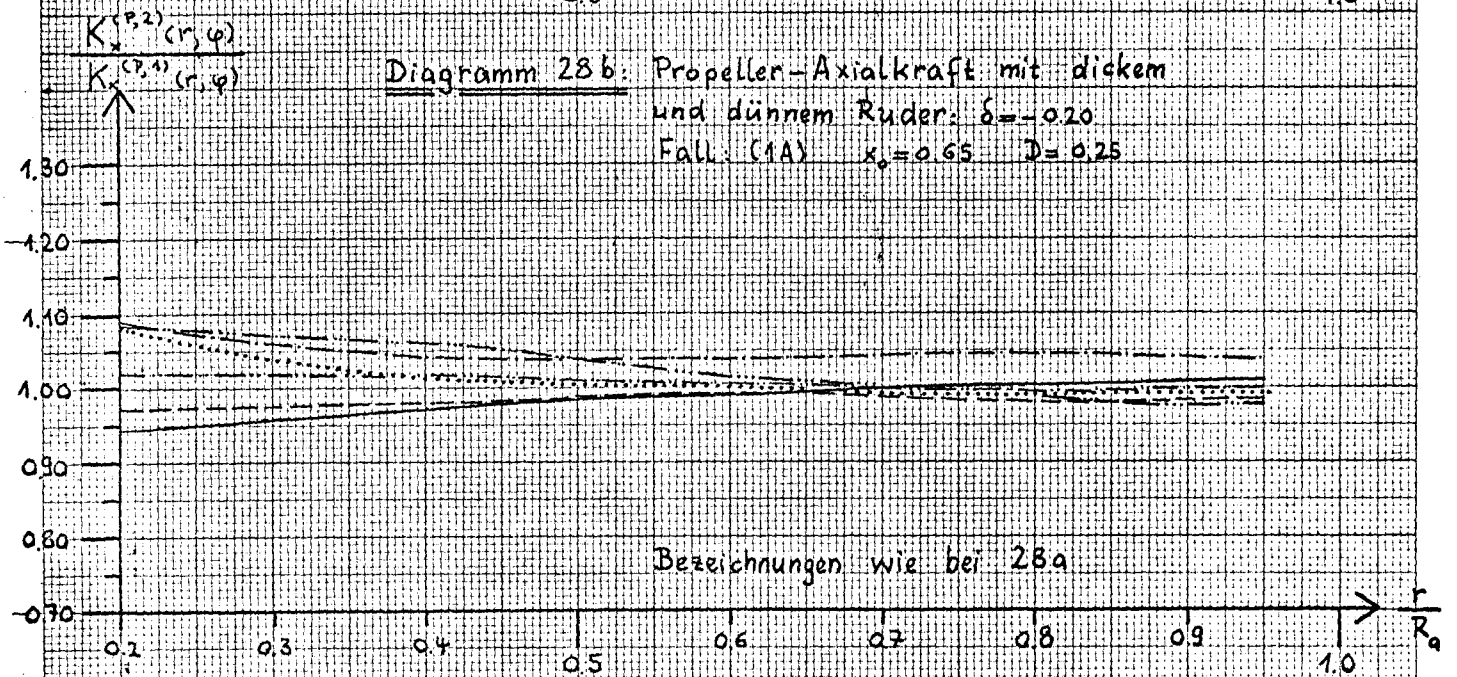
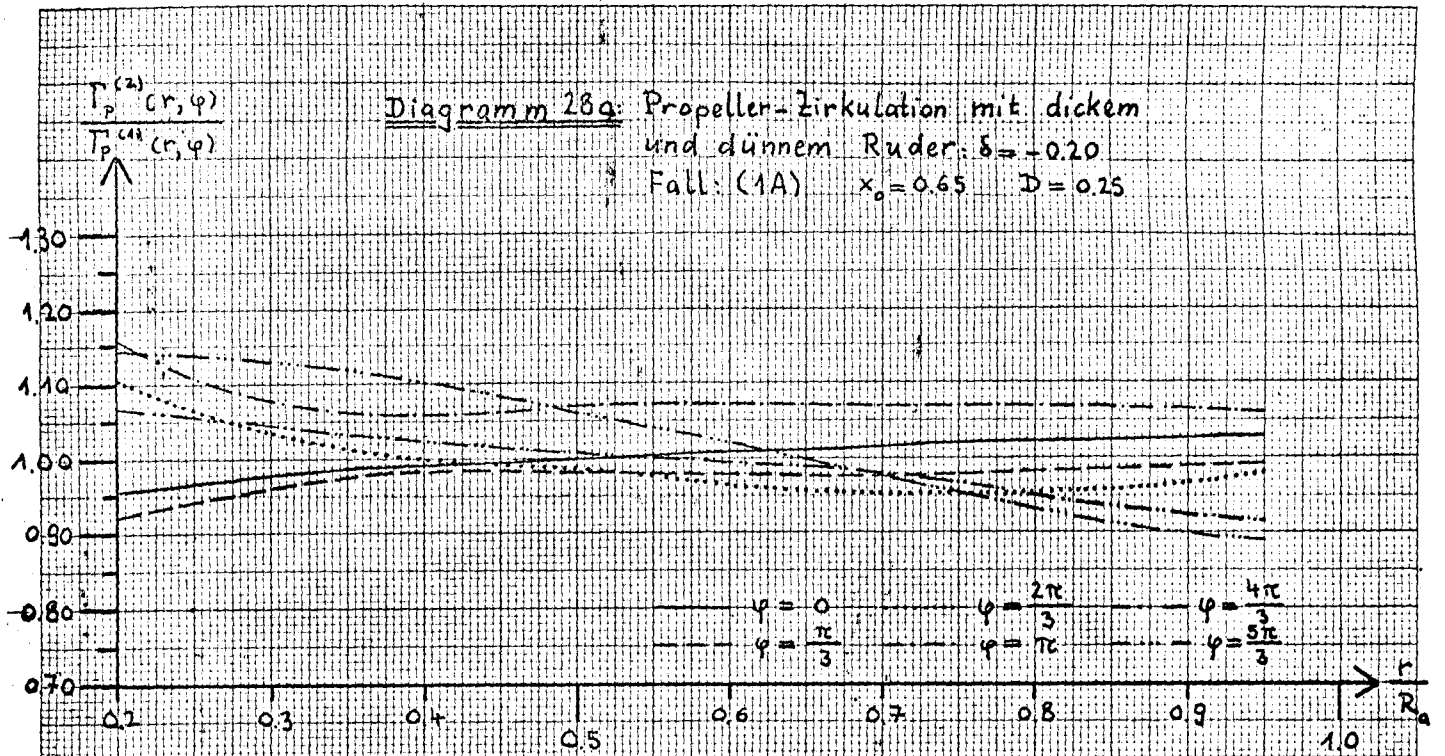
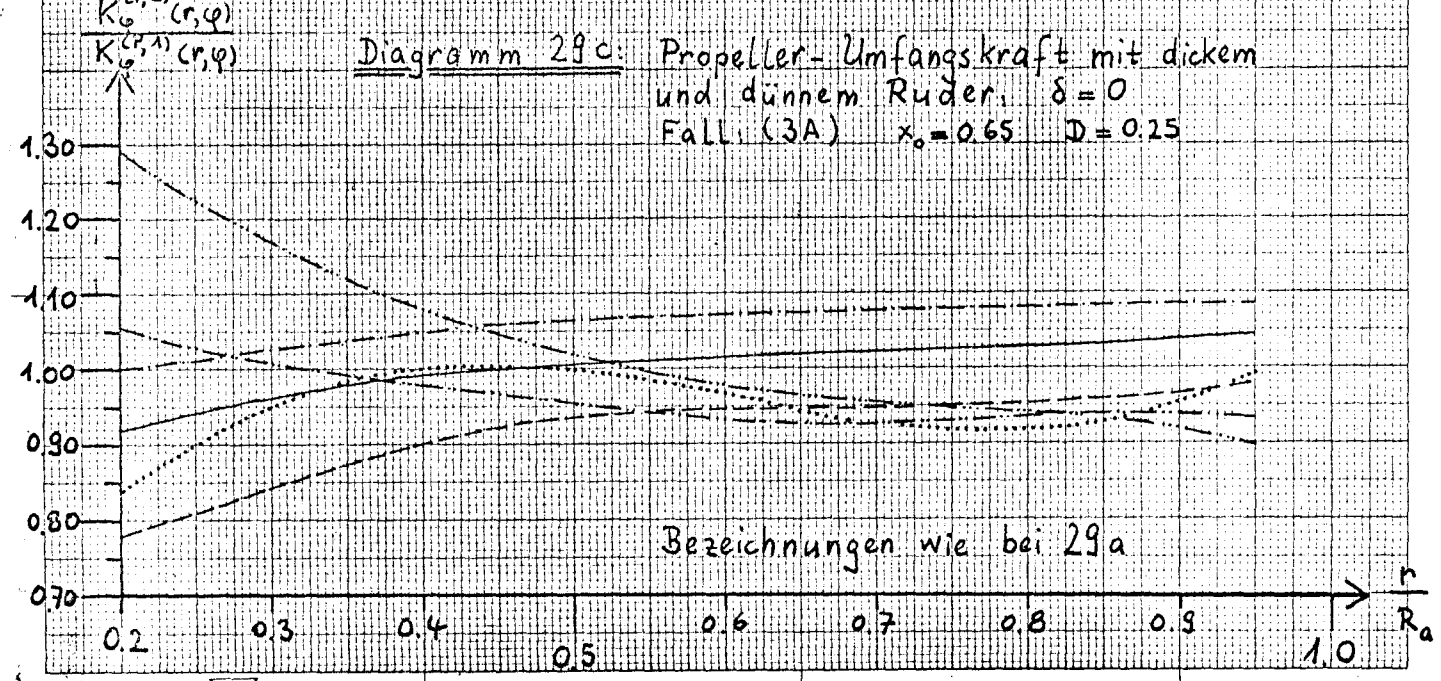
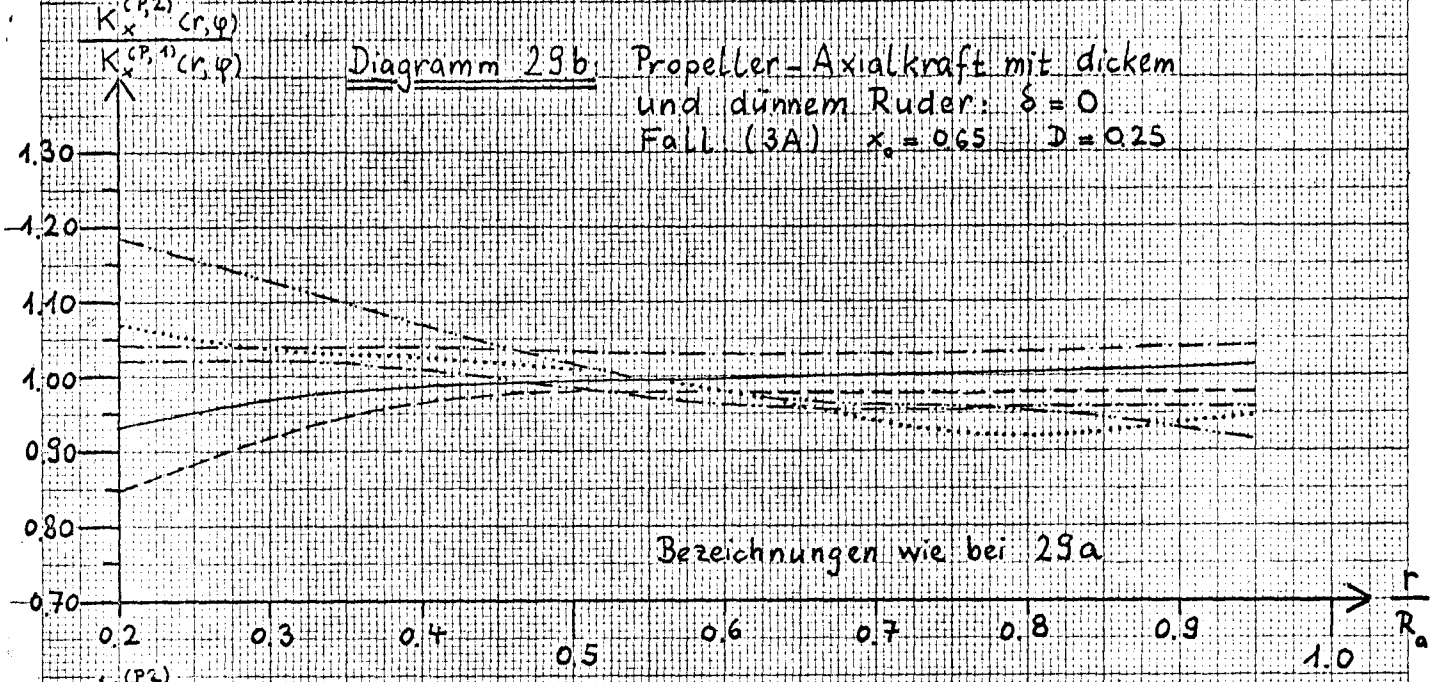
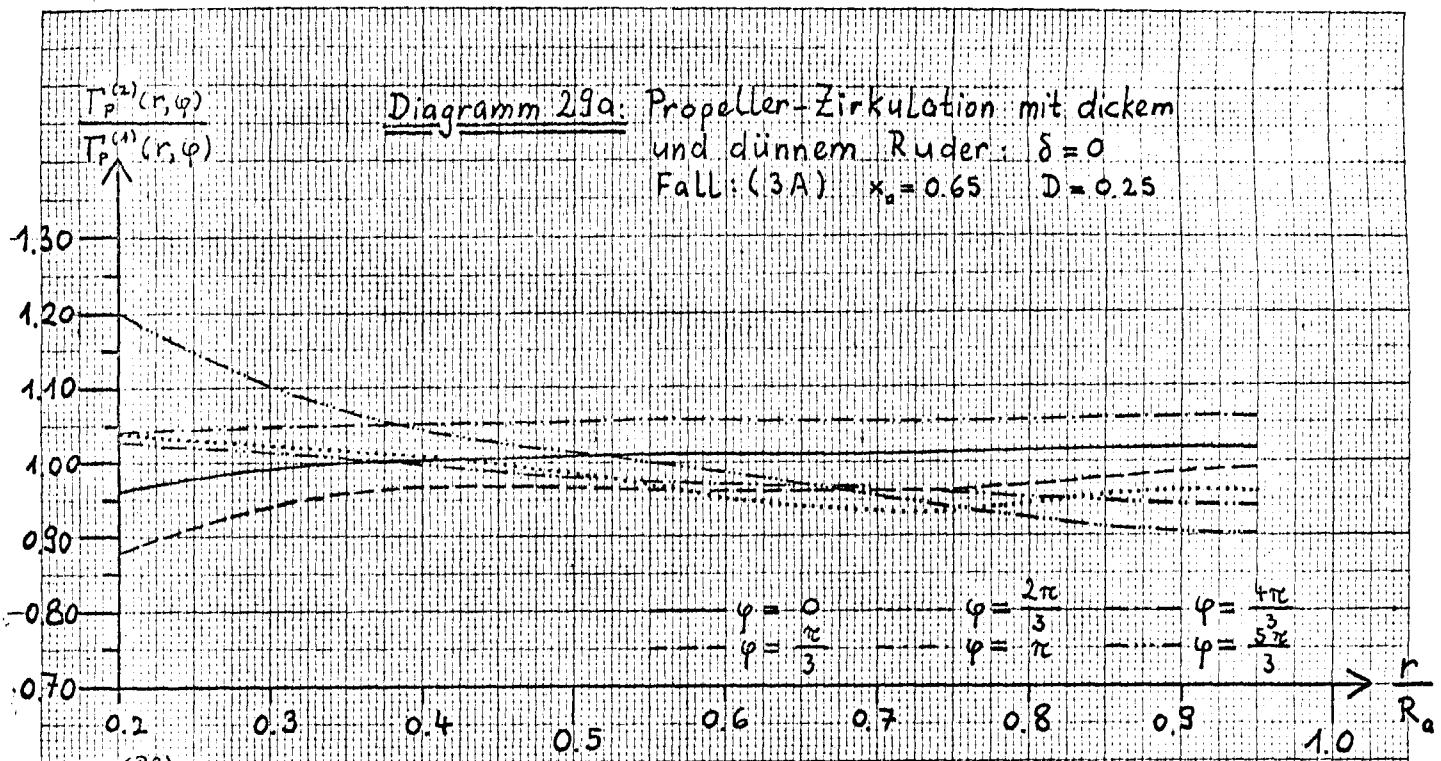


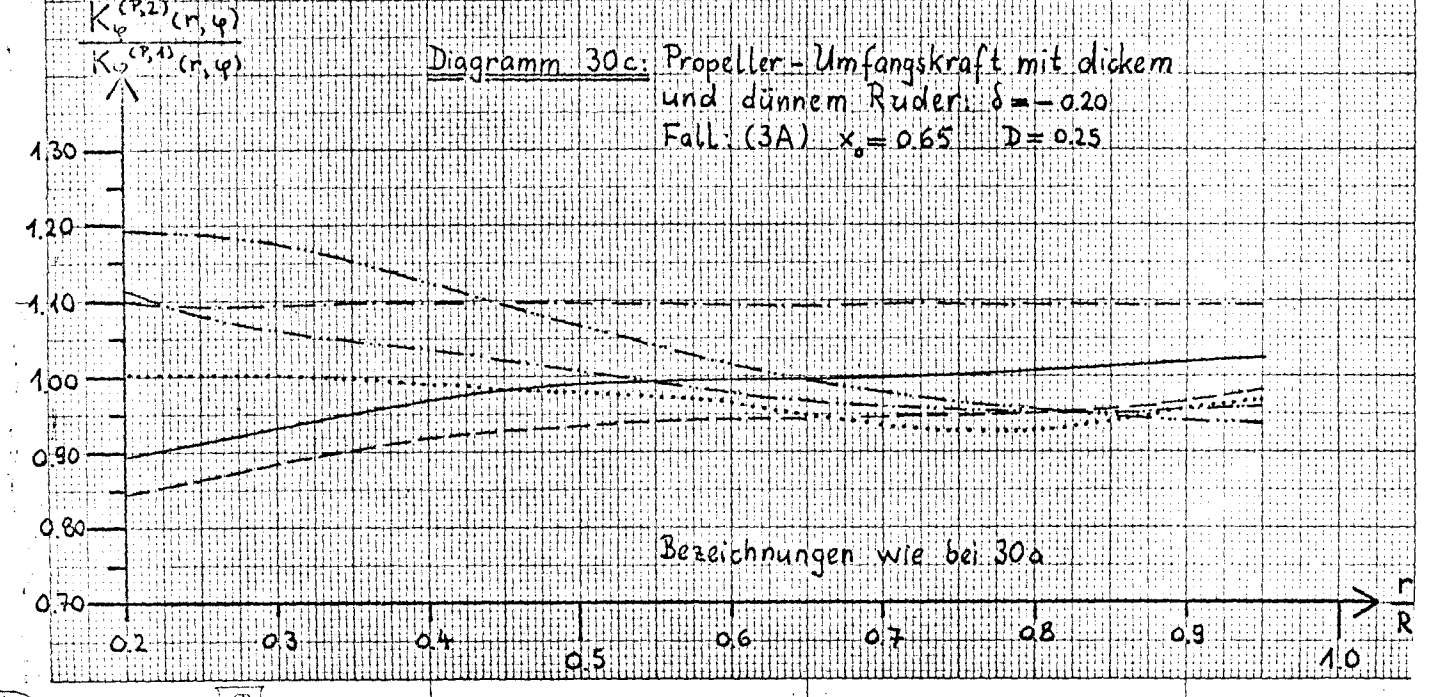
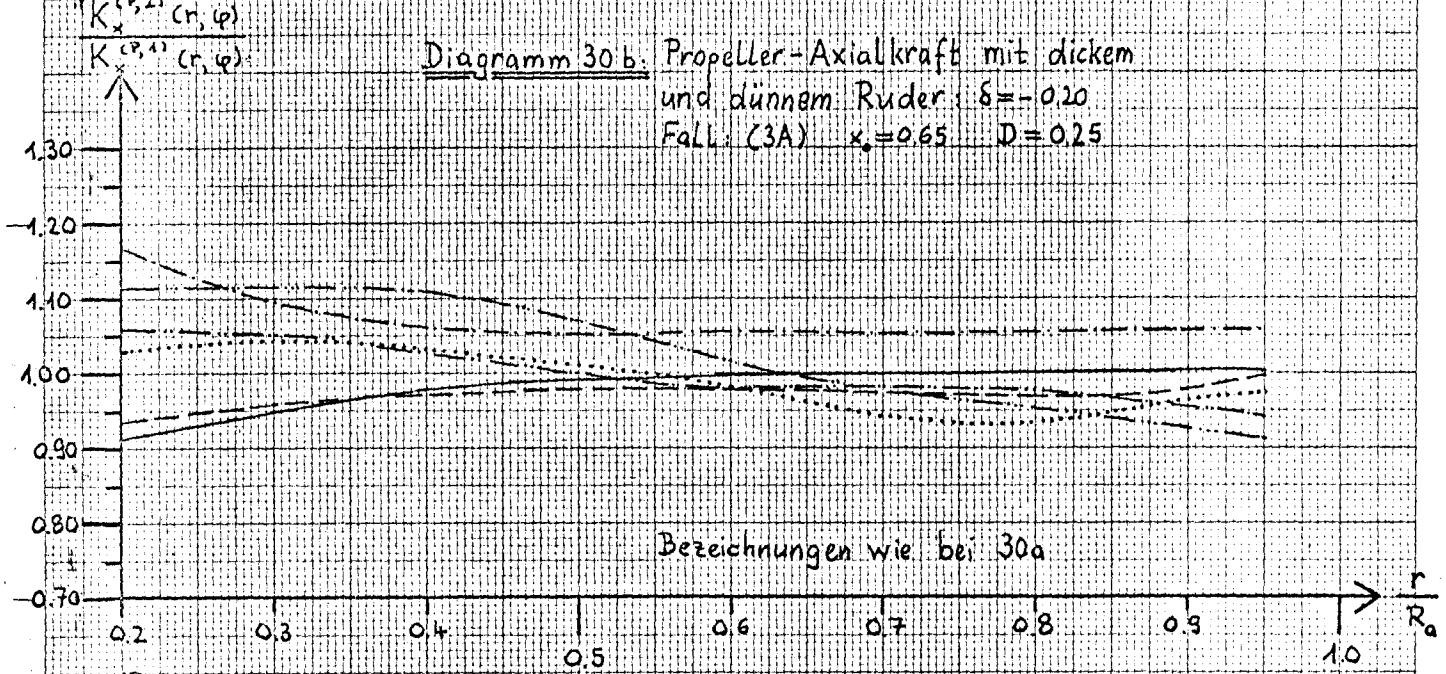
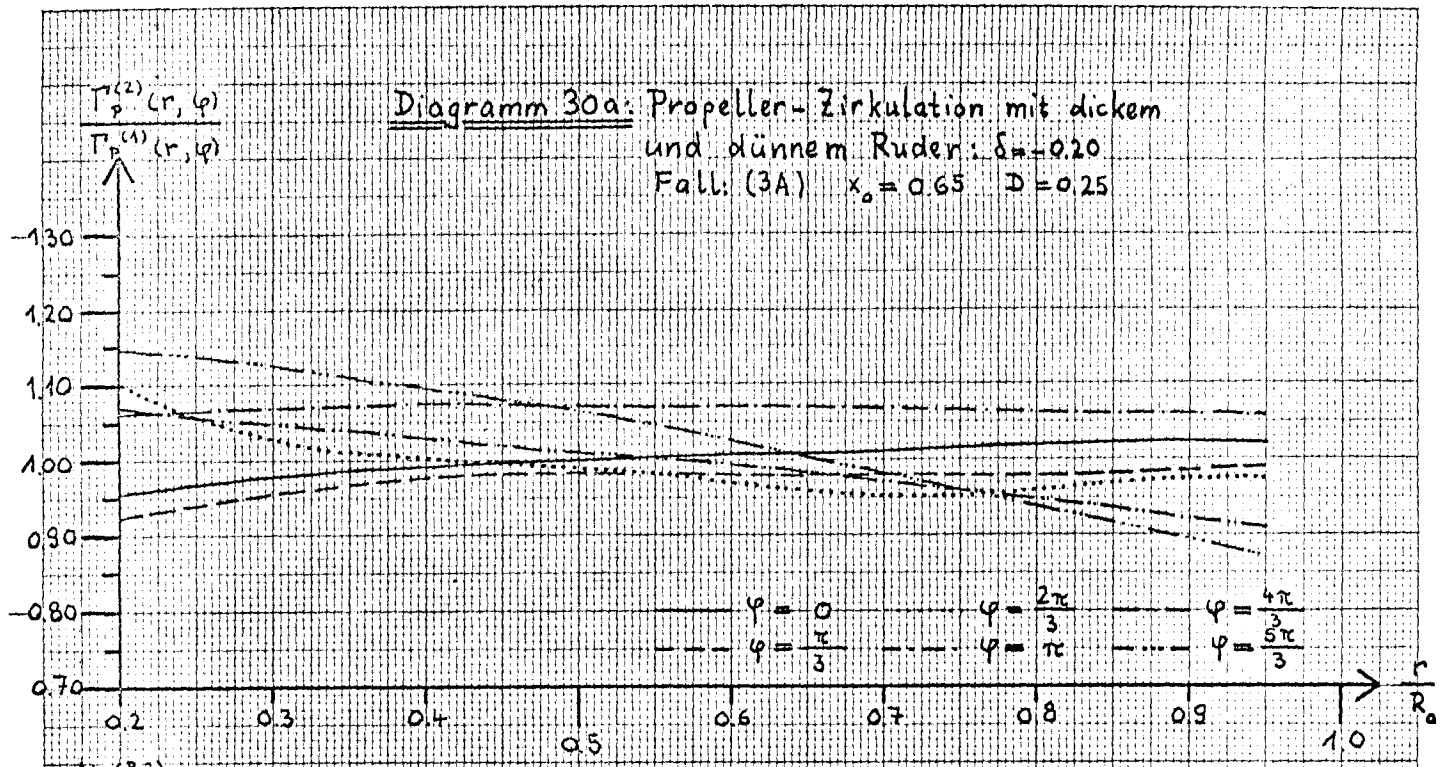
Diagramm 26b: Umfangskomponente der Ruder-Dicken-Induktion
am Propeller: $\delta = -0.20$
Fall: (3A) $x_0 = 0.65$ $D = 0.25$











X. Wirkung eines Totwassers am Ruder

Wir haben in Kap. VIII gezeigt, daß der Schub des Propellers allein durch die am Ruder angreifende Vortriebskraft um ca. 4-6% vergrößert wird. Dagegen ist die Rückwirkung sowohl des dünnen als auch des mäßig-dicken Ruders gering (1-2%). Es bleibt für die Wirkung des Systems Schiff-Propeller-Ruder daher die Frage interessant, durch welche Einflüsse die am Ruder aus dem Propellerstrahl gewonnene Energie wieder verlorengehen kann. Eine solche Vortriebsminderung wird dann auftreten, wenn sich die Strömung am Ruder ablöst.

Wir können hier nicht untersuchen, ob und unter welchen Bedingungen sich ein Totwasser ablösen würde. Diese Frage ist zurzeit auch experimentell völlig ungeklärt. Zu ihrer theoretischen Behandlung bedürfte es einer genaueren Kenntnis des Strömungsfeldes, um eventuell aus dem Druckverlauf am Ruder Rückschlüsse ziehen zu können. Wir wollen daher für das Totwasser einige plausible Annahmen machen.

Ein Totwasser auf der der Anströmung abgewandten Seite kann sich allenfalls bei hohen Drallgeschwindigkeiten, d.h. großen Schubbelastungsgraden ausbilden. Um den größt-möglichen Einfluß des Totwassers zu untersuchen, nehmen wir Ablösung direkt an der Vorderkante ($\zeta_A = -\frac{a}{2}$) an. Wir betrachten dafür im folgenden ein rechteckig-berandetes Ruder A: ($\Lambda=2$; $b_0=b_A=1$; $x_0=0.65$) jeweils bei den Belastungsgraden $c_3 = 7.98$ bzw. $c_3 = 5.20$ für $\delta = (0, -0.2)$, s. Tabelle 15.

Tabelle 15: Beispiele zur Totwasserablösung:

Beispiel	Ruder und Propeller	Ergebnisse ohne Totwasser		
		K_A^*/s	K_E^*/s	\bar{E}
α_T	$x_0=0.65$; (1A); $\delta=0$	-4.9%	-1.0%	0.69
β_T	$x_0=0.65$; (1A); $\delta=-0.2$	+0.9%	+28.0%	0.54
γ_T	$x_0=0.65$; (4A); $\delta=0$	-5.6%	-1.4%	0.69
δ_T	$x_0=0.65$; (4A); $\delta=-0.2$	+1.3%	+34.4%	0.52

Für die in Kap. V behandelte Theorie ist es notwendig, außer dem Ablösepunkt $x_A(y) = x_0 - \frac{a}{2} \cos \delta$ noch in mehreren Schnitten $y = \text{constan}$

die Totwasserkontur $Z(x,y)$ und den Ablöswinkel $\beta(y)$ vorzugeben. Dazu hat das Studium eines Totwassers an einem homogen-angeströmten Tragflügel nach Isay [9] gezeigt, daß $\beta(y)$ etwa gleich dem halben Anstellwinkel ist: $\beta(y) \cong \frac{\delta}{2}$. In der vorliegenden Behandlung wurde daher für $\beta(y)$ der halbe Winkel der am 1/4-Strahl resultierenden Anströmung ($\delta; u_o, u_N, u_P; w_N, w_P, w_M$) eingesetzt. Der Betrag dieser Geschwindigkeit $U(y)$ wurde ebenfalls auf der Totwasser-Mittellinie zur Normierung der Quellbelegung benutzt. Bei $\delta=0$ tritt dann die Ablösung in der oberen und unteren Ruderhälfte jeweils auf verschiedenen Seiten auf ($y < 0 \rightarrow \beta(y) > 0; y > 0 \rightarrow \beta(y) < 0$), während für $\delta = -0.20$ sich ein Totwasser nur für $y < 0$ bildet. Als Beispiel zeigt Tabelle 16 die wichtigsten Totwasserdaten für den Fall β_T ($\delta = -0.20$):

Tabelle 16: Totwasser-Parameter für Fall β_T ($\delta = -0.20$):

y	$\beta(y)$	$x_A(y)$	$x_E(y)$	$Z(x_A, y)$	$Z(x_E, y)$	$Q_T(y)$
-1.0	-0.15	0.40	1.40	0.05	-0.05	0.09
-0.9	+0.05		1.44		0.37	1.13
-0.8	+0.00		1.43		0.26	0.89
-0.6	-0.05		1.42		0.15	0.57
-0.4	-0.10		1.41		0.05	0.29
-0.2	-0.17		1.39		-0.09	0.04
0 bis +1.0	-0.20		1.39		-0.15	0

Bei Auflösung des Gleichungssystemes (85) erhält man eine gute Konvergenz der Quellverteilungs-Koeffizienten

$$q(x,y) = 2u_o \sum_{k=1}^K q_k(y) \cdot \sin(k \cdot t)$$

$$\text{mit: } x(t) = \frac{x_E(y) + x_A(y)}{2} - \frac{x_E(y) - x_A(y)}{2} \cdot \cos t$$

bereits für $K=6$, und die daraus berechnete Totwasserkontur stimmt gut mit der vorgegebenen überein. Diese angenommenen Konturen sind für die Fälle α_T, β_T in Diagramm 31 (a,b) über $t(x)$ dargestellt. Die dazu gehörigen Quellbelegungen auf der Totwasser-Mittellinie zeigt Diagramm 32 (a,b).

Aus der Quellverteilung können wir die Geschwindigkeitsinduktion am Ruder berechnen. Für die Beiträge am 1/4-Strahl erhalten wir z.B. für den Fall β_T mit (96) die in Tabelle 17 angegebenen Werte:

Tabelle 17: Totwasserinduktion am 1/4-Strahl (β_T):

y	$\frac{u_T(y)}{u_0}$	$\frac{w_T(y)}{u_0}$
-0.9	-0.465	-0.165
-0.7	-0.562	-0.164
-0.5	-0.449	-0.085
-0.3	-0.256	-0.026
-0.1	-0.107	-0.007
+0.1	-0.043	-0.004
+0.5	-0.011	-0.002
+0.9	-0.004	-0.001

Die Ruder-Zirkulationsdichte ist für 5 ausgewählte y -Schnitte jeweils mit und ohne Totwasser in Diagramm 33 (a,b) dargestellt. Für die gleichen Fälle zeigen die Diagramme 34 a-c Ruder-Zirkulation und -Kräfte. Schließlich gibt Tabelle 18 die integralen Kräfte sowie die über y gemittelte Exzentrizität mit Totwassereinfluß an; außerdem wird das Verhältnis der Kräfte sowie der Gesamt-Kraft $K = \sqrt{K_x^{*2} + K_z^{*2}}$ mit und ohne Totwasser angegeben.

Tabelle 18: Ruderkräfte und Exzentrizität mit Totwassereinfluß:

Beispiel	$\frac{K_x^{*(T)}}{S}$	$\frac{K_z^{*(T)}}{S}$	$\bar{\epsilon}^{(T)}$	$\frac{K_x^{*(T)}}{K_x^{*(0)}}$	$\frac{K_z^{*(T)}}{K_z^{*(0)}}$	$\frac{K^{(T)}}{K^{(0)}}$	$\frac{\bar{\epsilon}^{(T)}}{\bar{\epsilon}^{(0)}}$
	$\alpha_T (\delta=0)$	-3.8%	-0.8%	0.67	0.77	0.78	0.77
$\beta_T (\delta=-0.2)$	+0.1%	+16.6%	0.42	—	0.60	0.60	0.78
$\gamma_T (\delta=0)$	-4.3%	-0.9%	0.68	0.77	0.77	0.76	0.98
$\delta_T (\delta=-0.2)$	+0.3%	+19.6%	0.41	—	0.62	0.62	0.79

Die Exzentrizität, bei $\delta=0$ wird nur geringfügig von dem auf verschiedenen Seiten ablösenden Totwasser beeinflusst, während bei $\delta=-0.20$ der Saugeffekt der Vorderkante durch das Totwasser deutlich verringert wird und damit der Flächen-Schwerpunkt zur Mitte rückt; d.h. die Exzentrizität kleiner wird.

Für $\delta=0$ wird die Zirkulation um ca. 10-15% verkleinert. Damit wird auch die Vortriebskraft

$$-K_x^{(R)}(y) \sim [w_N(y) + w_P(y) + w_{R_f}(y) + w_T(y)] \cdot \Gamma_R(y)$$

verkleinert. Die - über y integrierte - Gesamtkraft $K_x^* / S u_0^2 R_a^2$

nimmt gegenüber dem Fall "ohne Totwasser" um 23% ab, d.h. um fast 1/4 des durch Strahlumlenkung erzielten Vortriebs; bezogen auf den Schub beträgt die Abnahme ca 1-1.5%.

Auch die Steuerkraft

$$K_z^{(R)}(y) \sim [u_0 + u_N(y) + u_P(y) + u_T(y)] \cdot \Gamma_R(y)$$

wird durch $u_T < 0$ und $\Gamma_R(y)$ um ca. 20% verkleinert.

Für den Anstellwinkel $\delta = -0.20$ haben wir Strömungsablösung nur für den Bereich $y < 0$ angenommen, in dem die Ruder-Zirkulation wesentlich beiträgt. Hier wird für $y < 0$ die Zirkulation durch das Totwasser ebenfalls deutlich verringert (ca. 20%), während der Effekt bei $y > 0$ gering ist.

Bei der Kraft $K_x^{(R)}(y, \delta = -0.2)$ wirkt sich die Abnahme von $\Gamma_R(y)$ und damit der schwächere Anstieg bei $y \approx -0.9$ in einer Verminderung des Beitrages w_{Rf} der freien Ruderwirbel aus; andererseits induziert w_T einen zusätzlichen Widerstand. Insgesamt wird die ohnehin kleine Vortriebskraft nicht wesentlich verändert. Bei der Steuerkraft $K_z^{(R)}(y, \delta = -0.2)$ wirkt neben der Abnahme von $\Gamma_R(y)$ der Beitrag $u_T < 0$ stark abmindernd.

Zusammenfassend kann man feststellen: Falls ein Totwasser in der angenommenen Form an der Ruder-Vorderkante ablöst, so beträgt bei $\delta = 0$ die Vortriebsminderung etwa 1/4 des erzielten Vortriebs, d.h. 1-1.5% des Schubgewinns. Bei $\delta = -0.2$ ist der Vortrieb ohnehin gering, hier wird die Steuerkraft deutlich verkleinert und der Flächenschwerpunkt zur Rudermitte hin verschoben.

Zum Abschluß dieser Betrachtungen sollen noch einige neuere - ebenfalls mit den vorliegenden Programmen erhaltene - Ergebnisse für Totwasserablösung an rechteckig-berandeten, homogen-angeströmten Tragflügeln verschiedener Seitenverhältnisse $\lambda = \frac{b}{a} = (1, 2, 4, 6)$ (jeweils mit $b=1$ als Längeneinheit) und für die Anstellwinkel $\delta = (0.2, 0.4)$ zusammengestellt werden. Dabei wurden für das Totwasser die folgenden Annahmen gemacht: Die Ablösung trete an der Vorderkante $\zeta_a = -\frac{a}{2}$ auf, und der Ablöse-

winkel sei im Hauptbereich der Zirkulation ($-0.7 \leq y \leq +0.7$) gleich dem halben Anstellwinkel: $\beta(y) = \frac{\delta}{2}$. An der oberen und unteren Kante soll keine Ablösung auftreten: $\beta(-1) = \beta(1) = \delta$. Schließlich verlaufe die Totwasserkontur linear zwischen $Z(x_A, y)$ und $Z(x_E, y)$. Die mit diesen Annahmen erhaltene Quellstärke $Q_T(y)$ ist in Tabelle 19 angegeben. Aus Ähnlichkeitsgründen verhalten sich diese Q_T bei verschiedenen Seitenverhältnissen und gleichem Anstellwinkel δ jeweils wie die Flügeltiefen und damit umgekehrt wie die Seitenverhältnisse.

Tabelle 19: Totwasser-Quellstärke am Tragflügel in homogener Strömung:

\sqrt{V}	$-0.7 \leq y \leq +0.7:$	
	$Q_T(y): \delta=0.20$	$Q_T(y): \delta=0.40$
1	0.403	0.828
2	0.202	0.414
4	0.101	0.207
6	0.067	0.138

Die am $1/4$ -Strahl induzierte Axialgeschwindigkeit $u_T(y)$ ist für die verschiedenen Seitenverhältnisse in Tabelle 20 angegeben; die Komponente w_T ist jeweils vergleichsweise klein: $|w_T| \leq 0.3 \cdot |u_T|$.

Tabelle 20: Axialkomponente $u_T(y)$ am Tragflügel:

\sqrt{V}	y	$\frac{u_T(y)}{u_0} (\delta=0.2)$	$\frac{u_T(y)}{u_0} (\delta=0.4)$
1	± 0.9	-0.108	-0.213
	± 0.6	-0.173	-0.338
	± 0.3	-0.207	-0.406
	0	-0.246	-0.425
2	± 0.9	-0.102	-0.199
	± 0.6	-0.209	-0.380
	± 0.3	-0.235	-0.465
	0	-0.244	-0.478
4	± 0.9	-0.092	-0.174
	± 0.6	-0.190	-0.390
	± 0.3	-0.230	-0.460
	0	-0.245	-0.485
6	± 0.9	-0.085	-0.157
	± 0.6	-0.180	-0.380
	± 0.3	-0.208	-0.418
	0	-0.250	-0.475

Mit zunehmendem Seitenverhältnis nimmt zwar die Gesamt-Quellstärke stark ab; da aber gleichzeitig die Quelle näher an den Tragflügel rückt, wird die Axialkomponente erst bei größerem λ kleiner.

In Tabelle 21 sind die Ergebnisse des Tragflügels ohne Totwasserwirkung (oberer Index 0) angegeben, und zwar der Maximalwert der Zirkulation $\Gamma_{max}^{(0)}$, die Gesamt-Axialkraft $K_x^{(0)}/\rho u_0^2 b^2$, die Gesamt-Steuerkraft $K_z^{(0)}/\rho u_0^2 b^2$, die Gesamt-Kraft $K^{(0)} = \sqrt{K_x^{(0)2} + K_z^{(0)2}}$ sowie die über y gemittelte Exzentrizität $\frac{\bar{\epsilon}^{(0)}}{a}$.

Tabelle 21: Tragflügel ohne Totwasser:

δ	λ	$\frac{\Gamma_{max}^{(0)}}{u_0 b}$	$\frac{K_x^{(0)}}{\rho u_0^2 b^2}$	$\frac{K_z^{(0)}}{\rho u_0^2 b^2}$	$\frac{K^{(0)}}{\rho u_0^2 b^2}$	$\frac{\bar{\epsilon}^{(0)}}{a}$
0.20	1	0.59	0.44	0.89	0.90	0.46
	2	0.39	0.06	0.60	0.61	0.49
	4	0.25	0.02	0.39	0.39	0.50
	6	0.19	0.01	0.29	0.29	0.50
0.40	1	1.51	0.96	2.29	2.48	0.41
	2	0.91	0.34	1.39	1.43	0.46
	4	0.54	0.12	0.83	0.84	0.48
	6	0.39	0.06	0.60	0.61	0.49

Die Änderung dieser Werte durch das angenommene Totwasser (oberer Index T) ist in Tabelle 22 zusammengestellt.

Tabelle 22: Tragflügel mit Totwasser:

δ	λ	$\frac{\Gamma_{max}^{(T)}}{\Gamma_{max}^{(0)}}$	$\frac{K_x^{(T)}}{K_x^{(0)}}$	$\frac{K_z^{(T)}}{K_z^{(0)}}$	$\frac{K^{(T)}}{K^{(0)}}$	$\frac{\bar{\epsilon}^{(T)}}{\bar{\epsilon}^{(0)}}$
0.20	1	0.65	0.45	0.55	0.55	0.74
	2	0.64	0.43	0.52	0.52	0.82
	4	0.68	0.44	0.54	0.54	0.88
	6	0.72	0.45	0.62	0.56	0.91
0.40	1	0.71	0.54	0.48	0.49	0.70
	2	0.69	0.47	0.43	0.43	0.74
	4	0.70	0.48	0.45	0.45	0.82
	6	0.71	0.49	0.50	0.51	0.86

Zunächst ergibt sich für die Zirkulation $\Gamma_{max}^{(T)}$ bei $\delta = (0.20, 0.40)$, daß mit zunehmendem Seitenverhältnis der Totwassereinfluß entsprechend der langsamen Abnahme der Quellinduktion geringer wird. Aus diesem Schema fallen die Werte bei $\lambda=1$ etwas heraus. Es erscheint aber fraglich, ob das hier benutzte

Rechenverfahren - Lösung der Randbedingung am 3/8-7/8-Strahl für den Ansatz $L=2$, ferner Berechnung der Kräfte am 1/4-Strahl - noch für $\lambda=1$ ausreicht. Insbesondere weicht die Exzentrizität stark von $\frac{\xi}{a} = 0.50$ ab: $\frac{\xi(\delta=0.2)}{a} = 0.34$; $\frac{\xi(\delta=0.4)}{a} = 0.29$. Endlich dürfte auch die Näherung $\beta(\delta) \approx \frac{\delta}{2}$ bei so großen Flügeltiefen ($2a=2$) nicht mehr gültig sein.

Gut zu übersehen ist die Totwasserwirkung auf die Steuerkraft

$$(407) \quad K_z^{(T)} = \varrho \cdot [u_0 + u_T] \cdot \Gamma_R^{(T)} = K_z^{(0)} \cdot \left[1 + \frac{u_T}{u_0} \right] \cdot \frac{\Gamma_R^{(T)}}{\Gamma_R^{(0)}}$$

Hier wirkt das Totwasser sowohl über die Zirkulation als auch über $u_T < 0$ abmindernd.

Schwieriger zu überblicken ist die Totwasserwirkung auf die Axialkraft, da hier auch noch der veränderte Beitrag der freien Ruderwirbel auftritt:

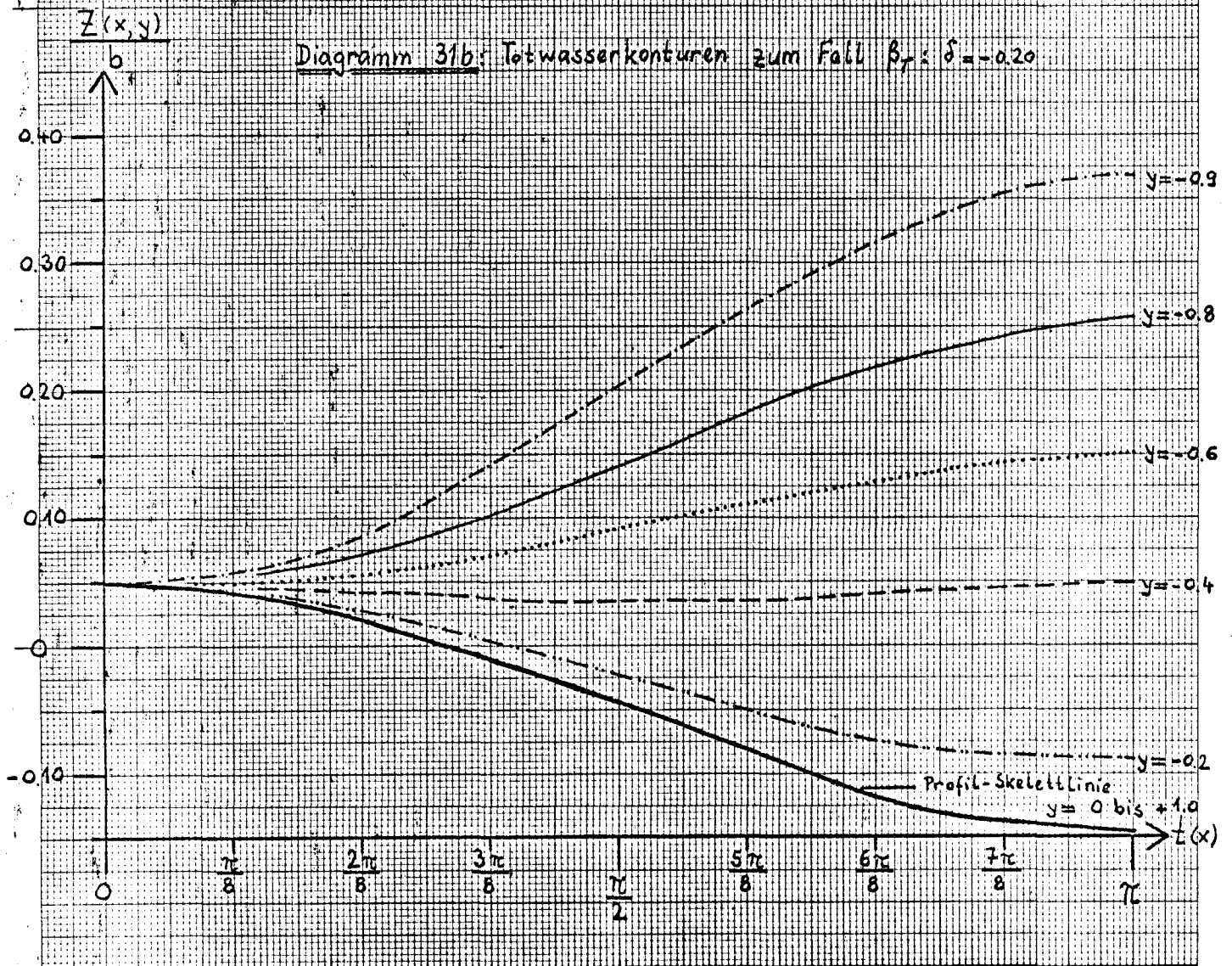
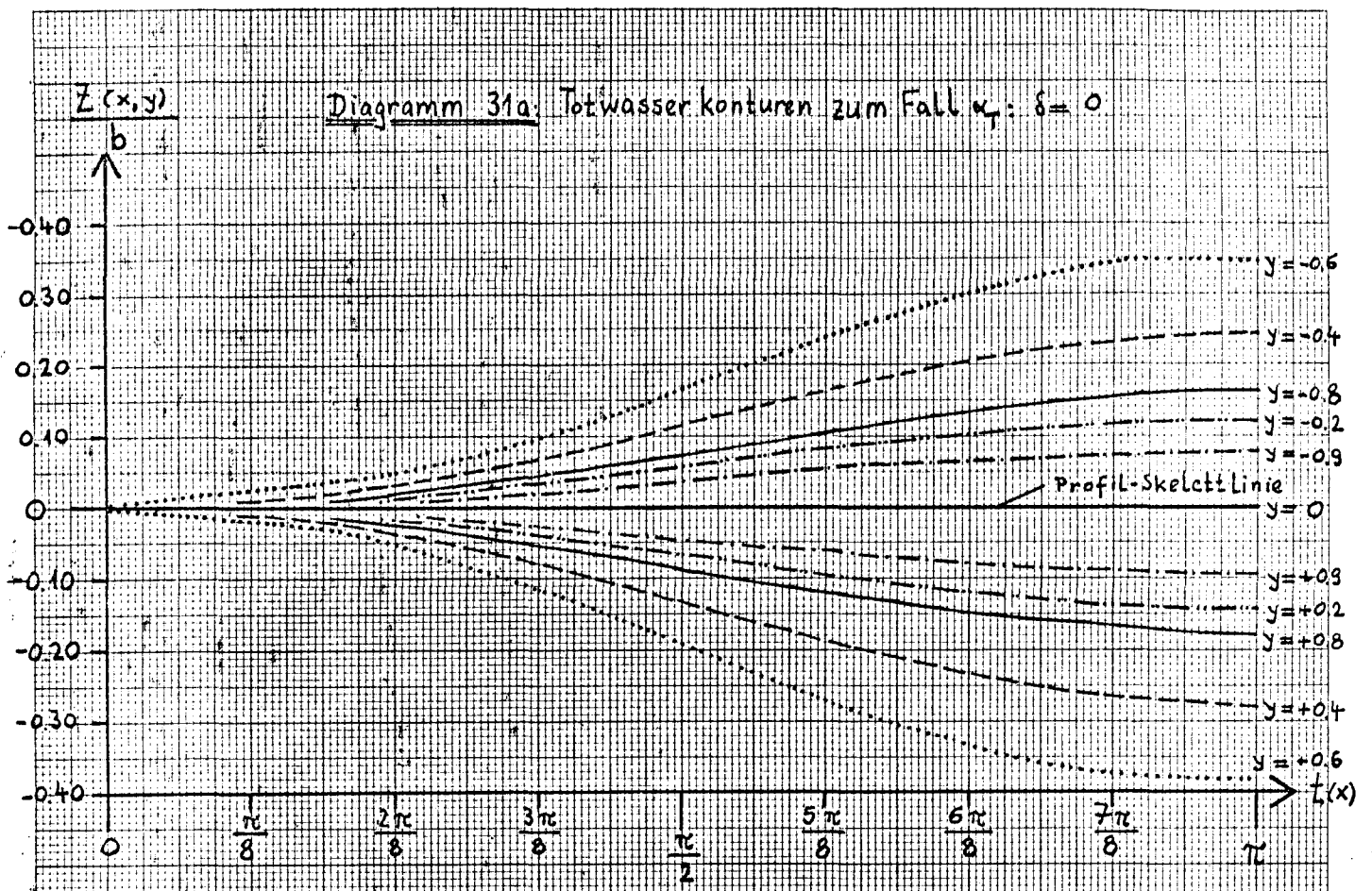
$$K_x^{(T)} = -\varrho \cdot [w_T + w_{R_f}] \cdot \Gamma_R^{(T)} = \frac{w_T + w_{R_f}^{(T)}}{w_{R_f}^{(0)}} \cdot \frac{\Gamma_R^{(T)}}{\Gamma_R^{(0)}} \cdot K_x^{(0)}$$

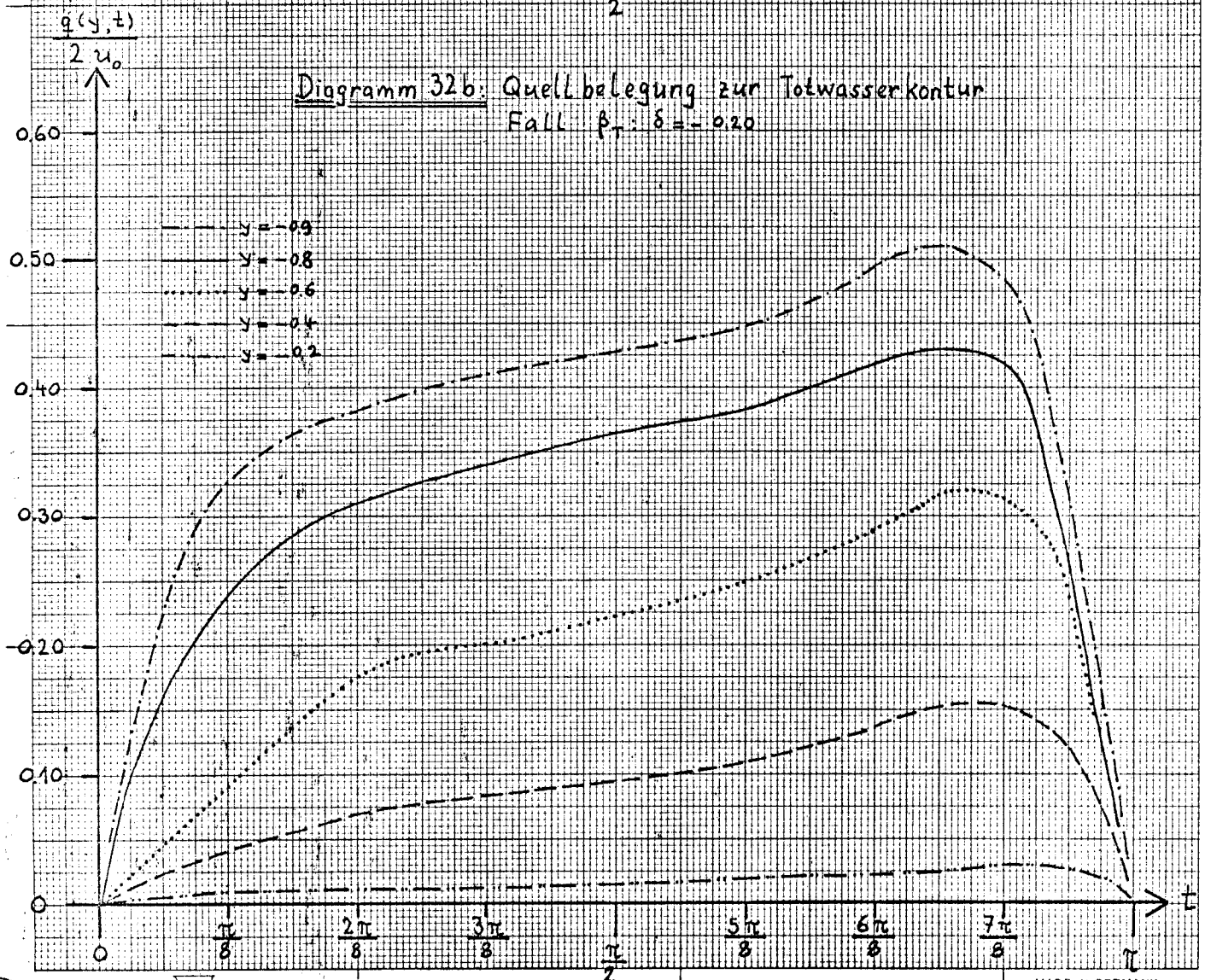
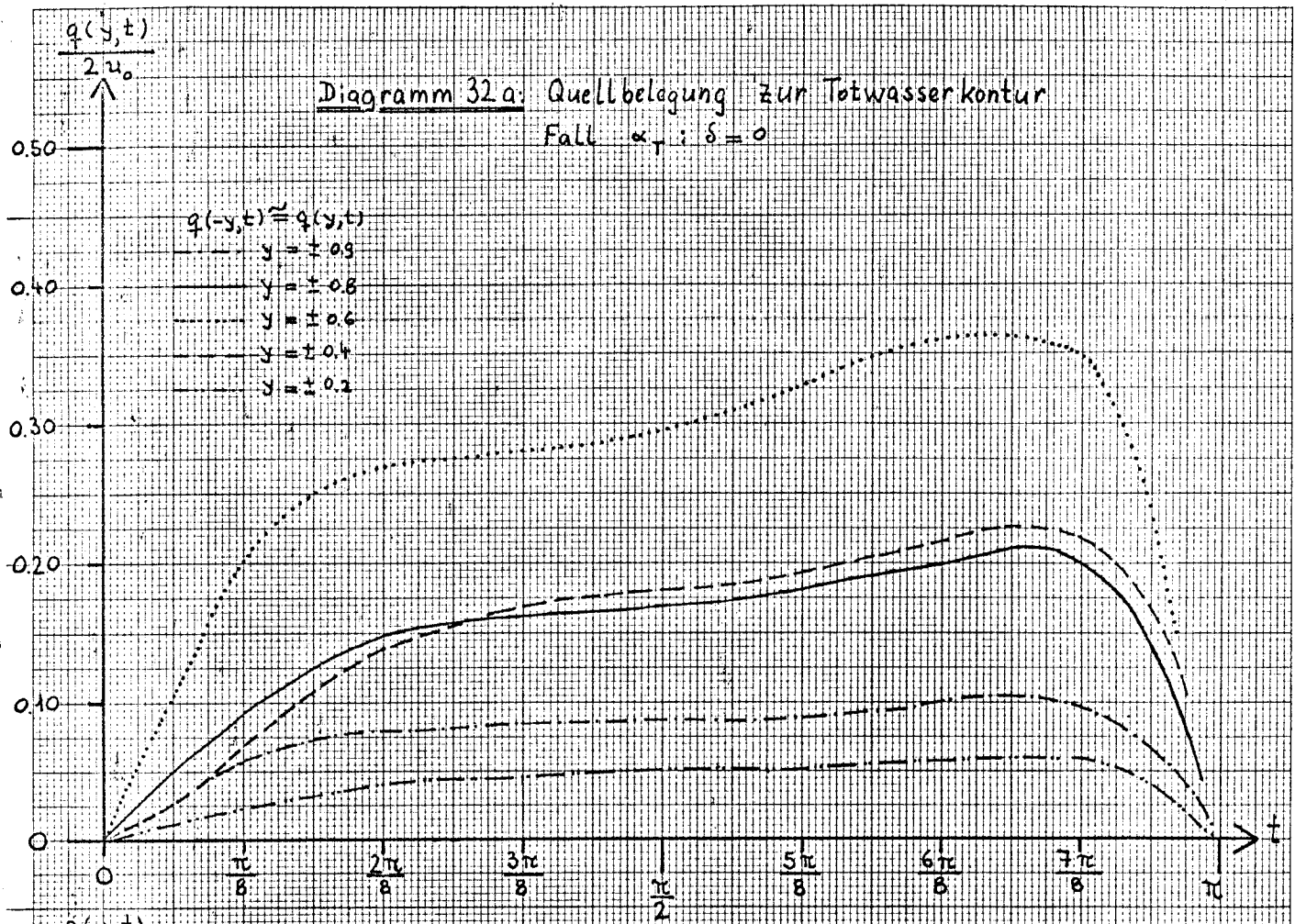
Setzt man in grober Näherung: $w_T = 0$ und $\frac{w_{R_f}^{(T)}}{w_{R_f}^{(0)}} \approx \frac{\Gamma_R^{(T)}}{\Gamma_R^{(0)}}$ so wird:

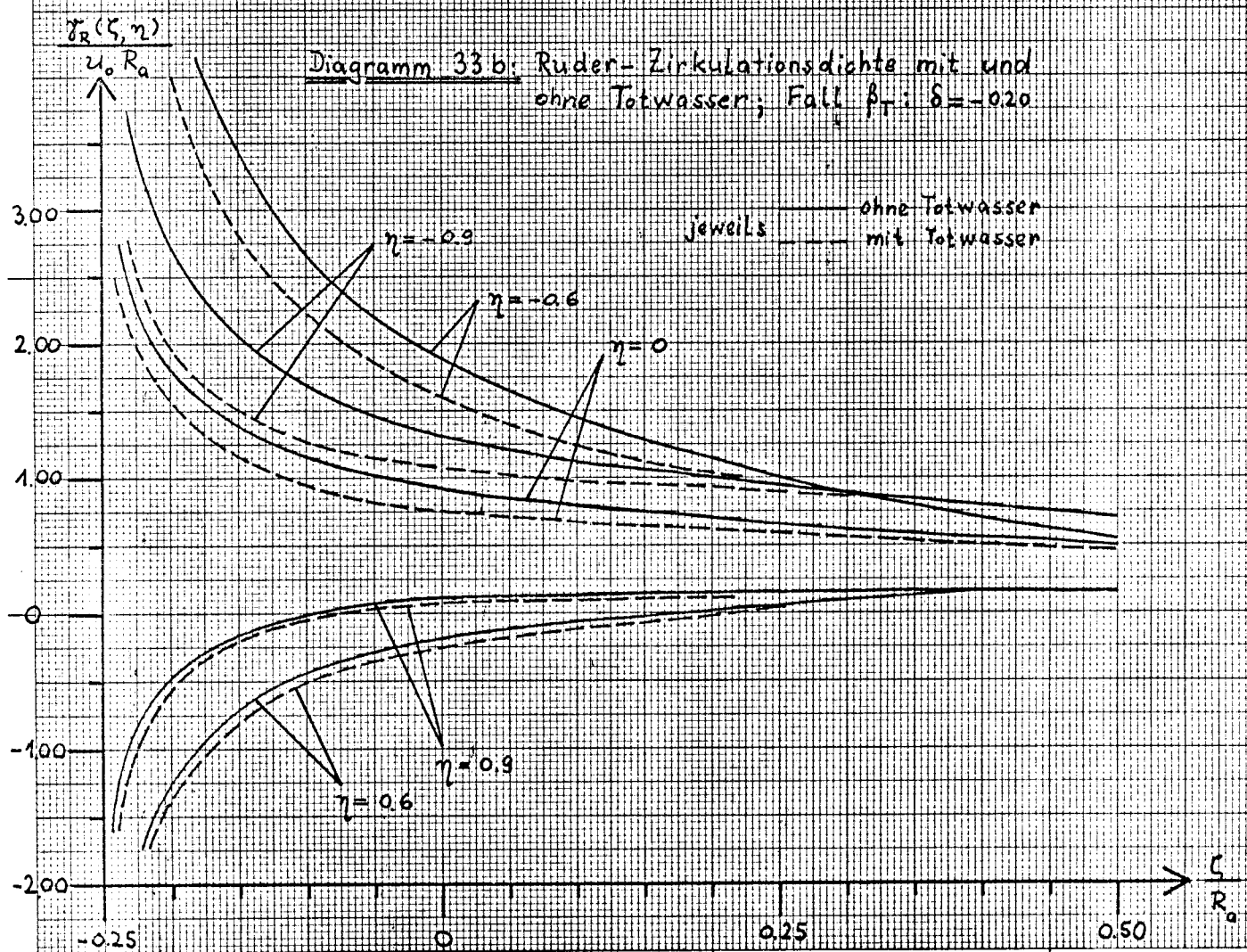
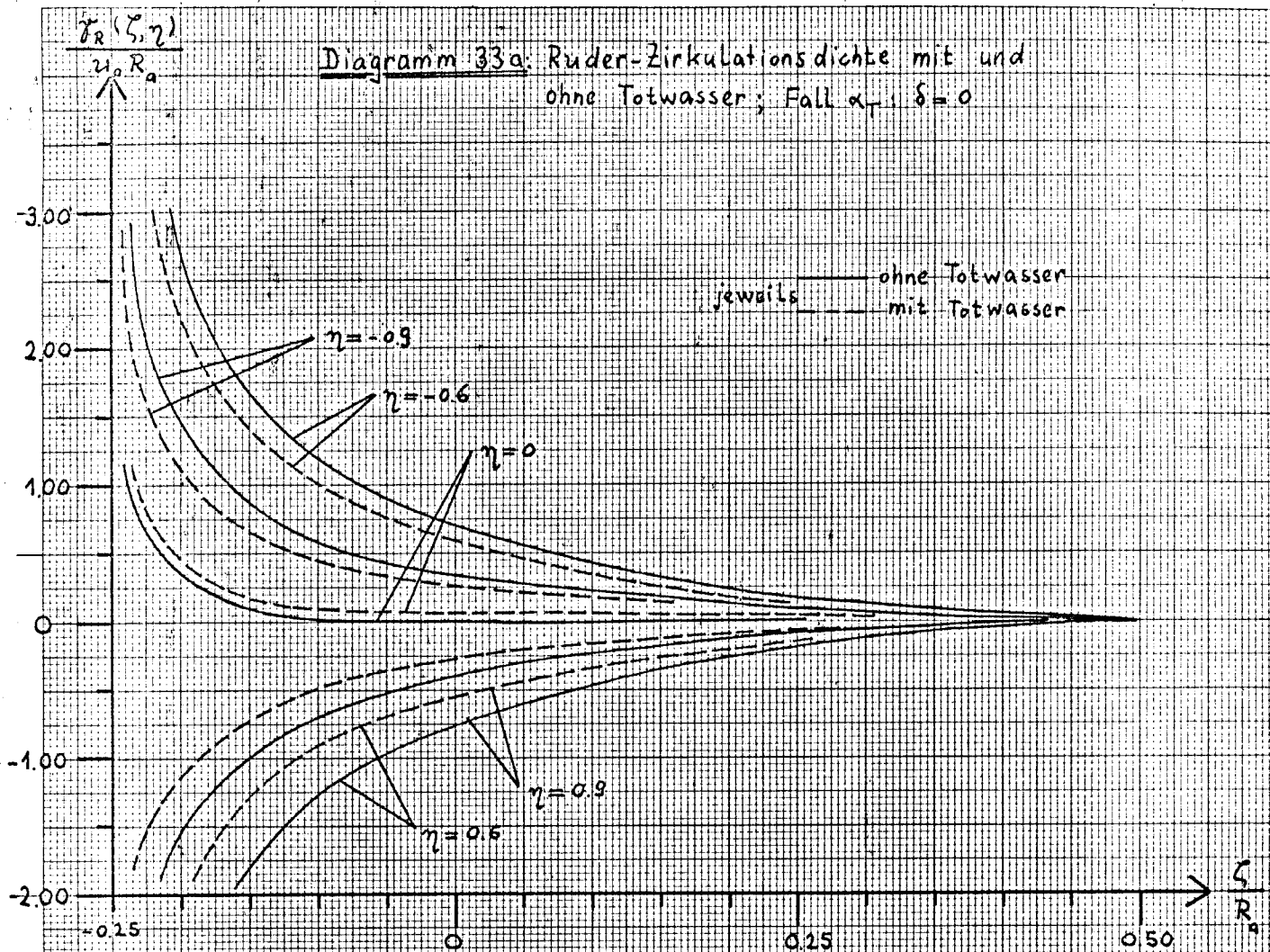
$$(408) \quad K_x^{(T)} \approx K_x^{(0)} \cdot \left[\frac{\Gamma_R^{(T)}}{\Gamma_R^{(0)}} \right]^2 \approx [0.40 \dots 0.50] \cdot K_x^{(0)}$$

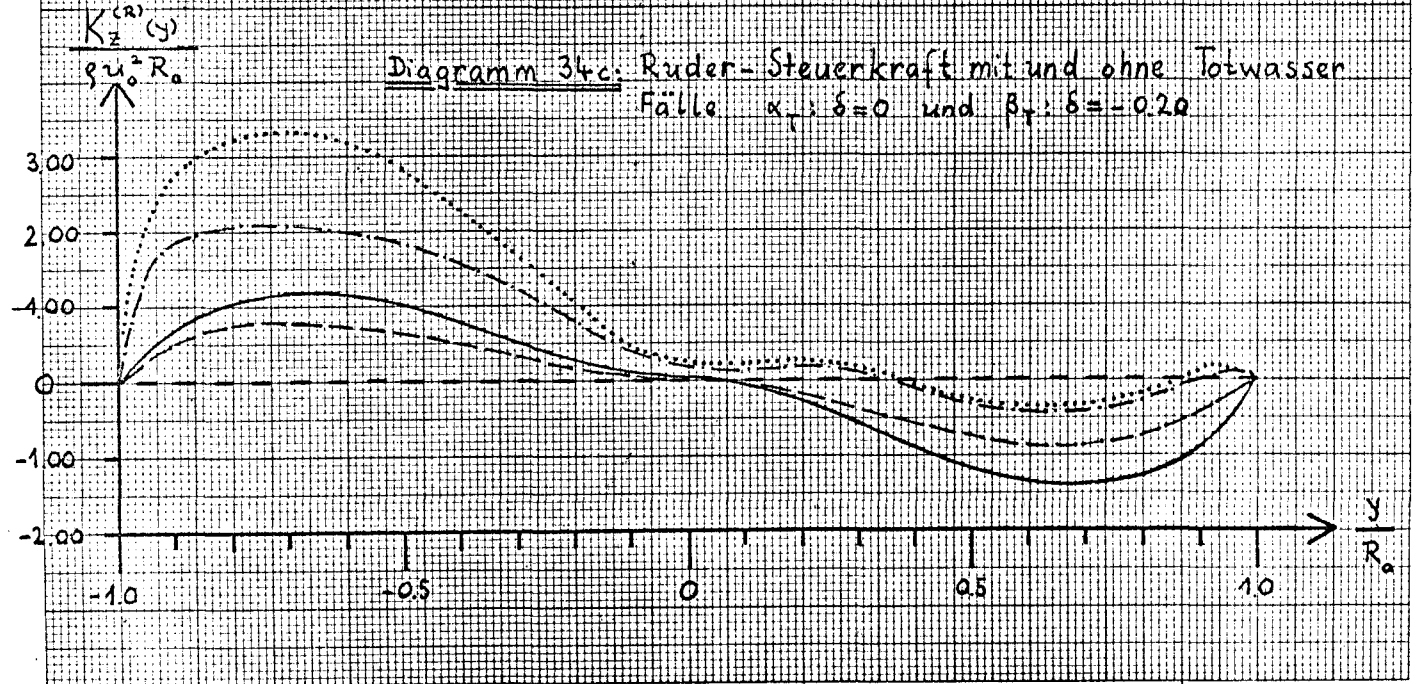
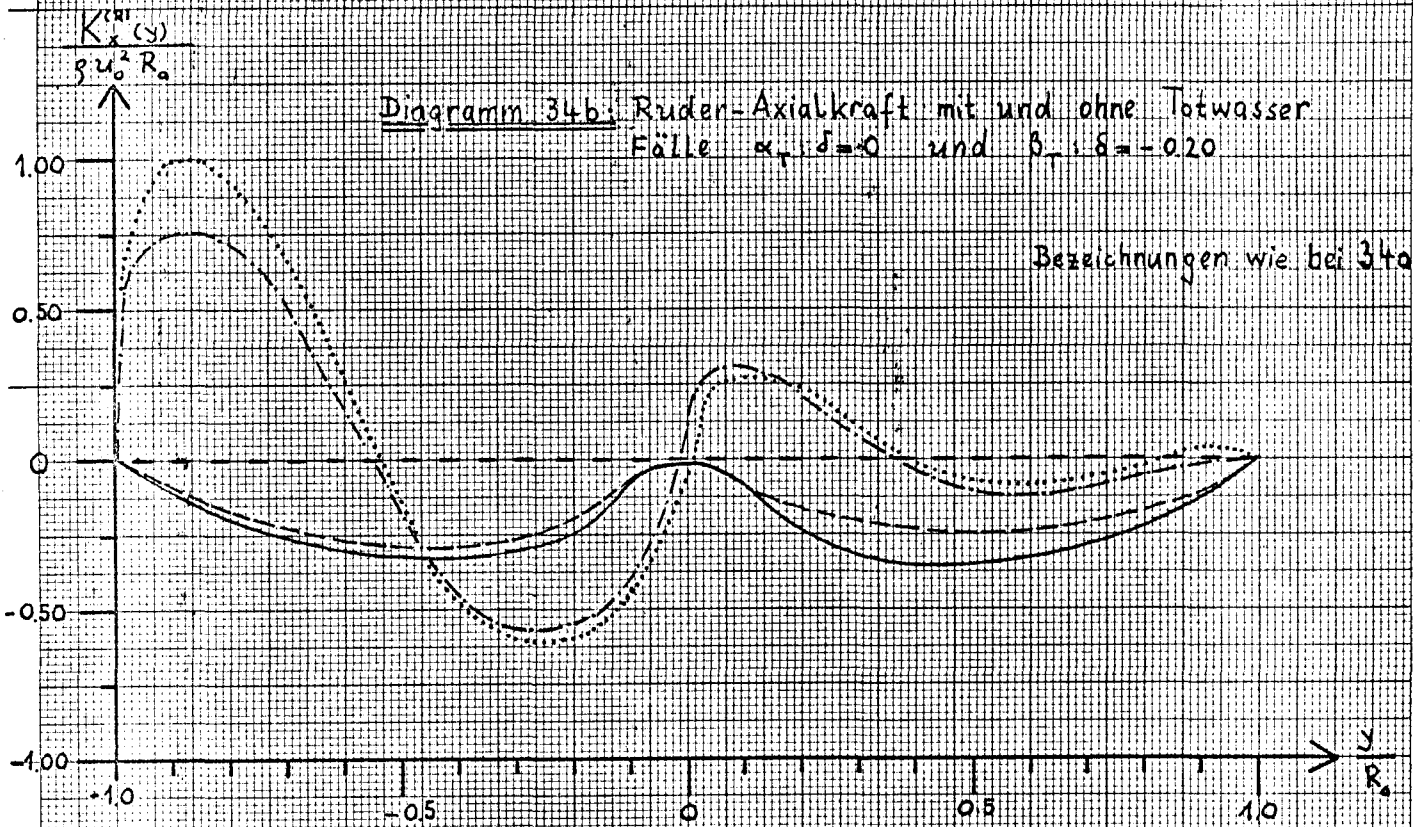
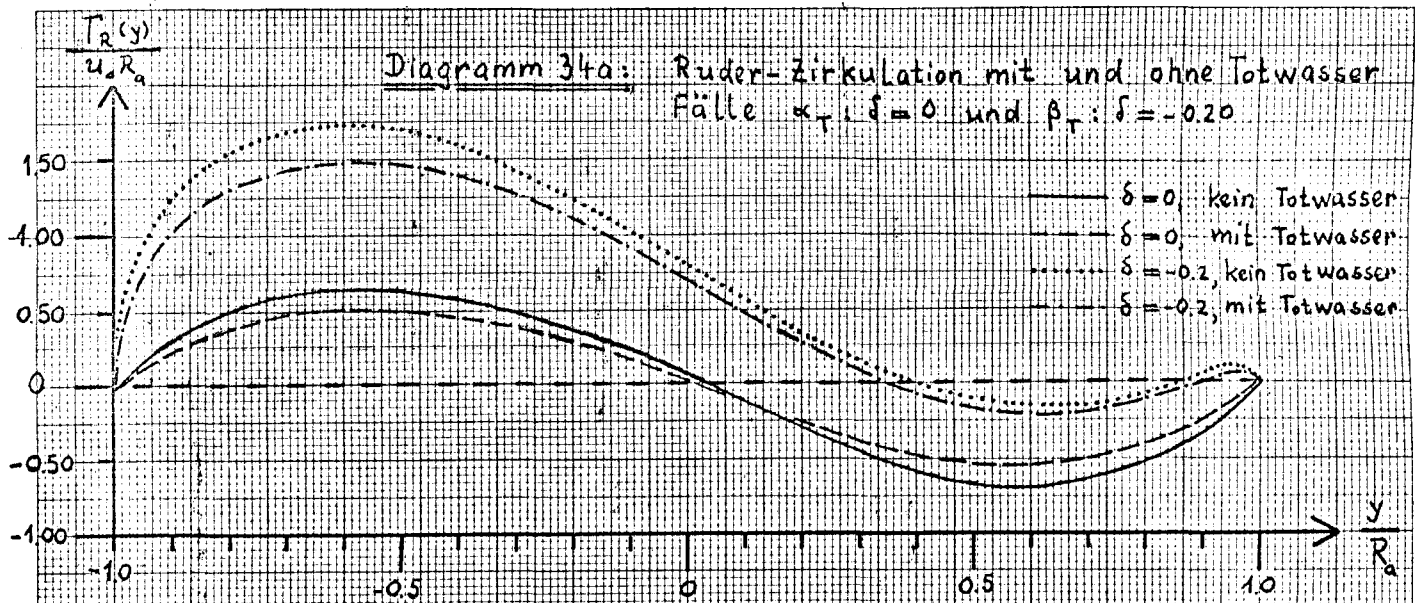
Die Axialkraft wird durch das Totwasser stark vermindert; die Größenordnung der Abnahme entspricht den Ergebnissen in Tabelle 22.

Die Exzentrizität wird durch das Totwasser erheblich verkleinert, d.h. der Flächenschwerpunkt wird vom 1/4-Strahl weg zur Mitte verschoben. Dieser Effekt ist umso kleiner, je größer das Seitenverhältnis ist: die Stauwirkung des Totwassers nimmt mit der Gesamt-Quellstärke ab bei zunehmendem λ , und daher macht sich die Saugkante des Ruders wieder stärker bemerkbar.









XI. Zusammenfassung der Ergebnisse

Für einen einfach-berandeten Propeller^{*)} im Nachstromfeld nach Lerbs erhält man schon mit einem Netzwerk von 3·5 Aufpunkten und einem Ansatz mit 3·5 Gliedern eine sehr gut konvergente instationäre Zirkulationsdichte. Die Schwankungen der erhaltenen Propellerzirkulation hängen stark vom Belastungsgrad (c_s) ab. Bei niedriger Belastung macht sich der Beitrag der freien Quer- und Längs-Wirbel relativ wenig bemerkbar; daher schwankt dort die Zirkulation sehr viel stärker als bei hoher Belastung, wo die freien Wirbel erheblich beitragen und einen stabilisierenden Effekt ausüben. Die vorausgeschätzte hydrodynamische Steigung wird recht gut reproduziert, und sie ist in einem großen Bereich des Fortschrittsgrades relativ konstant. Die Steigung der abschwimmenden freien Wirbel ist stets so groß, daß der nachfolgende Flügel nicht getroffen wird.

Bei Geradeausfahrt ($\delta=0$) tritt am Ruder in der vom Propeller erzeugten Drallströmung ein Vortriebsgewinn auf, der bei starker Belastung ($c_s \approx 4-8$) etwa 5-6%, bei mäßiger Belastung ($c_s \approx 2$) etwa 4-5% des Propellerschubes beträgt. Diese Kraft hängt kaum vom Abstand ab, da in dem betrachteten Bereich die Strahlgeschwindigkeit nur noch schwach ansteigt. Der Vortriebsgewinn nimmt etwas zu, wenn die im Strahl befindliche Fläche vergrößert wird, also bei kleinerem Seitenverhältnis (λ), oder wenn bei gleichem λ das Ruder den Propellerstrahl teilweise überragt. Mit zunehmendem Anstellwinkel nimmt der Vortriebsgewinn schnell ab; z.B. wird selbst bei hoher Belastung ($c_s = 7.98$) kein Vortrieb mehr erzielt bei $\delta = -0.2 = -11.5^\circ$. Wegen der geringfügigen Asymetrie des Nachstromes tritt auch bei Geradeausfahrt eine kleine Steuerkraft auf. Diese Kraft verschwindet in dem vorgegebenen Nachstromfeld bei $\delta \approx -0.6^\circ$ und steigt mit zunehmendem Anstellwinkel stark an.

Das dünne Ruder verkleinert bei Geradeausfahrt den Propellerschub um etwa 1/2-1%. Bei ausgeschlagenem Ruder ist die ab-

^{*)} Eine konvergente Reihe von instationären Tragflächenkoeffizienten konnte bisher nur für den Propeller mit kreissektorförmigen Flügeln erhalten werden.

mindernde Wirkung umso größer, je schwächer der Propeller belastet ist, d.h. je geringer der Beitrag der freien Propellerwirbel ist. Diese Abminderung nimmt schnell mit wachsendem Abstand ab.

Das 25% dicke Ruder ergibt - nur wenig abhängig vom Anstellwinkel bei nicht zu großen Ausschlägen - einen Vortriebsgewinn von etwa 1% bei starker ($c_s \approx 8$) bis etwa 2% bei mäßiger ($c_s \approx 2$) Belastung. Der Einfluß nimmt schnell mit wachsendem Abstand ab.

Insgesamt ergibt sich bei Geradeausfahrt ein Vortriebsgewinn eines 25% dicken Ruders von 6 - 7% gegenüber dem Propellerschub im Schiffsnachstrom ohne Ruder. Bei den vorgelegten Ergebnissen wurde allerdings die zu groß vorausgeschätzte hydrodynamische Steigung eingesetzt: eine Kontrollrechnung mit den in erster Näherung erhaltenen $k_o^{(4)}$ ergibt einen niedrigeren Schubgewinn von ca. 4 - 5%. Eine Iterationsrechnung erscheint nur dann sinnvoll, wenn der Schiffsnachstrom auch in seiner α -Abhängigkeit besser bekannt ist.

Die am Ruder auftretende Vortriebskraft kann dadurch vermindert werden, daß sich in der Schräganströmung von Schiff und Propeller her ein Totwasser bildet. Dieser Fall kann allenfalls bei hohen Belastungsgraden und größeren Anstellwinkeln auftreten, bei denen ohnehin kein Vortrieb erzielt wird. Unter speziellen Annahmen kann bei Geradeausfahrt der Vortriebsgewinn um etwa 1/4 verkleinert werden; dies entspricht einem Vortriebsverlust von etwa 1 - 1.5% des Schubes.

Anhang 1.A: Auswertung der ξ -Integrale bei 10_Q, 10_L:

Auszuwerten sind die ξ -Integrale:

$$(1A.1) \quad I_Q = \int_{\sigma}^{\infty} d\xi \frac{\mu_x \cdot [r \cdot \cos \Phi - s] + \mu_y \cdot [k_0 \cos \Phi - k_0 \frac{r}{s} + (x - \xi - k_1 \chi) \cdot \sin \Phi] + \mu_r \cdot [k_0 \sin \Phi - (x - \xi - k_1 \chi) \cdot \cos \Phi]}{\sqrt{(x - \xi - k_1 \chi)^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos \Phi}^3}$$

$$(1A.2) \quad I_L = \int_{\sigma}^{\infty} d\xi \frac{\mu_x \cdot r \cdot \sin \Phi - \mu_y \cdot (x - \xi - k_1 \chi) \cdot \cos \Phi - \mu_r \cdot (x - \xi - k_1 \chi) \cdot \sin \Phi}{\sqrt{(x - \xi - k_1 \chi)^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos \Phi}^3}$$

Die auftretenden Integrale sind vom Typ:

$$(1A.3) \quad \mathcal{I} = a \int_{\sigma}^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - 2A\xi + A^2 + B^2}^3} + b \int_{\sigma}^{\infty} \frac{\xi \cdot d\xi}{\sqrt{\xi^2 - 2A\xi + A^2 + B^2}^3} \quad \text{mit: } \begin{cases} A = x - k_1 \chi \\ B = r^2 + s^2 - 2rs \cos \Phi \end{cases}$$

Diese Beiträge können elementar ausgewertet werden, vergl. z.B. Rottmann-Formelsammlung, S. 141:

$$(1A.4) \quad \mathcal{I}_1(\alpha, \beta, \gamma) = \int_{X_1}^{X_2} \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}^3} = \frac{1}{\alpha\gamma - \beta^2} \cdot \frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}} \Big|_{X_1}^{X_2}$$

$$(1A.5) \quad \mathcal{I}_2(\alpha, \beta, \gamma) = \int_{X_1}^{X_2} \frac{x dx}{\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}^3} = \frac{-1}{\alpha\gamma - \beta^2} \cdot \frac{\beta x + \gamma}{\sqrt{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}} \Big|_{X_1}^{X_2}$$

sofern:
 $\alpha\gamma \neq \beta^2$

$$(1A.6) \quad \text{Durch Vergleich folgt: } \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -A = -(x - k_1 \chi) \\ \gamma = A^2 + B^2 = (x - k_1 \chi)^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos \Phi \end{cases}$$

Die Integralformeln sind also anwendbar, solange:

$$\alpha\gamma - \beta^2 = r^2 + s^2 - 2rs \cos \Phi \neq 0 \implies r \neq s \text{ oder } \Phi \neq 0.$$

Die Anwendung von (1A.4-1A.6) auf (1A.3) ergibt:

$$(1A.7) \quad \mathcal{I} = \frac{a + b \sqrt{(x - k_1 \chi)^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos \Phi}}{r^2 + s^2 - 2rs \cos \Phi} \cdot \left\{ 1 + \frac{x - k_1 \chi}{\sqrt{(x - k_1 \chi)^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos \Phi}} \right\}$$

Daraus folgt für die Auswertung der Integrale (1A.1-1A.2):

$$(1A.8) \quad I_Q = \frac{K_Q(s, \chi, \Phi)}{r^2 + s^2 - 2rs \cos \Phi} \cdot \left\{ 1 + \frac{x - k_1 \chi}{\sqrt{(x - k_1 \chi)^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos \Phi}} \right\}$$

$$(1A.9) \quad I_L = \frac{K_L(s, \chi, \Phi)}{r^2 + s^2 - 2rs \cos \Phi} \cdot \left\{ 1 + \frac{x - k_1 \chi}{\sqrt{(x - k_1 \chi)^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos \Phi}} \right\}$$

$$(1A.10) \quad \text{mit: } K_Q(s, \chi, \Phi) = \mu_x \cdot [r \cdot \cos \Phi - s] + \mu_y \cdot [k_0 \cos \Phi - k_0 \frac{r}{s} + (x - k_1 \chi - \sqrt{(x - k_1 \chi)^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos \Phi}) \cdot \sin \Phi] + \mu_r \cdot [k_0 \sin \Phi - (x - k_1 \chi - \sqrt{(x - k_1 \chi)^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos \Phi}) \cdot \cos \Phi]$$

$$(1A.11) \quad K_L(s, \chi, \Phi) = \mu_x \cdot r \sin \Phi - [\mu_y \cdot \cos \Phi + \mu_r \cdot \sin \Phi] \cdot [x - k_1 \chi - \sqrt{(x - k_1 \chi)^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos \Phi}]$$

Anhang 1.B: Auswertung eines Integrales nach der Residuenmethode:

Auszuwerten ist das Integral ($\mu \geq 0$):

$$(1B.1) \quad \mathcal{J}_\mu = \int_0^{2\pi} d\vartheta e^{i\mu\vartheta} \frac{(k_0 k_1 - s^2) \cdot r - (k_0 k_1 - r^2) \cdot s \cos \vartheta}{r^2 + s^2 - 2rs \cos \vartheta}$$

Mit der Substitution $z = e^{i\vartheta} \rightarrow e^{i\mu\vartheta} d\vartheta = -i \left(\frac{dz}{z}\right) \cdot z^\mu$
 und der Darstellung $\cos \vartheta = \frac{1}{2} \cdot (e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}) = \frac{1}{2} \cdot (z + z^{-1})$

gehen wir von der ϑ -Winkelintegration zur z -Integration im komplexen Einheitskreis (EK) über. Hierbei sind die folgenden Fälle zu unterscheiden: $\left\{ \begin{array}{l} \mu = 0 \\ \mu > 0 \end{array} \right\}$:

$$(1B.2) \quad \mathcal{J}_\mu = \begin{cases} \mu = 0: & \frac{i}{2rs} \oint_{EK} dz \frac{2r \cdot (k_0 k_1 - s^2)z - s \cdot (k_0 k_1 - r^2) \cdot (z^2 + 1)}{z \cdot (z - \frac{s}{r}) \cdot (z - \frac{r}{s})} \end{cases}$$

$$(1B.3) \quad \mathcal{J}_\mu = \begin{cases} \mu > 0: & \frac{i}{2rs} \oint_{EK} dz \cdot z^{\mu-1} \cdot \frac{2r \cdot (k_0 k_1 - s^2)z - s \cdot (k_0 k_1 - r^2) \cdot (z^2 + 1)}{(z - \frac{s}{r}) \cdot (z - \frac{r}{s})} \end{cases}$$

Da kein Pol auf dem Rande des Einheitskreises liegen darf, ist der Fall $s=r$ bei der folgenden Residuenbetrachtung auszuschließen. Wie man an (1B.2-3) erkennt, besitzt der Integrand nur einfache Pole im Einheitskreis. Nach dem Residuensatz gilt für diese:

$$\oint_{EK} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{Pole } z_0 \text{ im EK}} a_{-1}(z_0) \quad \text{mit: } a_{-1}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ (z - z_0) \cdot f(z) \right\}$$

Für die Residuen der einzelnen Pole erhält man:

$$\begin{aligned} \mu = 0: & \quad a_{-1}(z_0 = \sigma) = -s \cdot (k_0 k_1 - r^2) \\ & \quad a_{-1}(z_0 = \frac{s}{r}) = \frac{2s \cdot (k_0 k_1 - s^2) - s \cdot (k_0 k_1 - r^2) \cdot (\frac{s^2}{r^2} + 1)}{\frac{s^2}{r^2} - 1} \\ & \quad a_{-1}(z_0 = \frac{r}{s}) = \frac{2r \cdot (k_0 k_1 - s^2) \cdot \frac{r}{s} - s \cdot (k_0 k_1 - r^2) \cdot (\frac{r^2}{s^2} + 1)}{\frac{r^2}{s^2} - 1} \\ \mu > 0: & \quad a_{-1}(z_0 = \frac{s}{r}) = \frac{2r \cdot (k_0 k_1 - s^2) - s \cdot (k_0 k_1 - r^2) \cdot (\frac{s}{r} + \frac{r}{s})}{\frac{s}{r} - \frac{r}{s}} \cdot \left(\frac{s}{r}\right)^\mu \\ & \quad a_{-1}(z_0 = \frac{r}{s}) = \frac{2r \cdot (k_0 k_1 - s^2) - s \cdot (k_0 k_1 - r^2) \cdot (\frac{r}{s} + \frac{s}{r})}{\frac{r}{s} - \frac{s}{r}} \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^\mu \end{aligned}$$

Daraus folgt für \mathcal{J}_μ :

$$(1B.4) \quad \mathcal{J}_\mu = \begin{cases} \mu = 0: & s < r: \frac{2\pi k_0 k_1}{r} \\ & s > r: -2\pi r \\ \mu > 0: & s < r: \pi \cdot \left(\frac{s}{r}\right)^\mu \cdot r \cdot \left(1 + \frac{k_0 k_1}{r^2}\right) \\ & s > r: -\pi \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^\mu \cdot r \cdot \left(1 + \frac{k_0 k_1}{r^2}\right) \end{cases}$$

Anhang 1.C: Integralumformung durch partielle Integration:

(1C.1) Gegeben:
$$J_{\mu} = \int_{R_i(x)}^{R_a(x)} ds \frac{\partial P_k(s, \chi)}{\partial s} \begin{cases} \mu = 0: & s < r: \frac{2\pi k_0 k_1}{r} \\ & s > r: -2\pi r \\ \mu > 0: & s < r: \pi \cdot \left(\frac{s}{r}\right)^{\mu} \cdot r \cdot \left(1 + \frac{k_0 k_1}{r^2}\right) \\ & s > r: -\pi \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^{\mu} \cdot r \cdot \left(1 + \frac{k_0 k_1}{r^2}\right) \end{cases}$$

Der Integrand ist bei $s=r$ (Ausnahmepunkt bei der Residuenauswertung, s. Anhang 1.B) nicht stetig; man erhält jedoch durch partielle Integration eine Darstellung mit stetigem Integranden. Dazu wird die Eigenschaft benutzt (s. II.4 A):

$$P_k(s, \chi) = 0 \quad \text{für } s \leq R_i(x) \quad \text{oder} \quad s \geq R_a(x).$$

1. Fall: $\mu = 0$:

(1C.2)
$$J_{\sigma} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{R_i(x)}^{r-\epsilon} ds \frac{\partial P_k(s, \chi)}{\partial s} \cdot \frac{2\pi k_0 k_1}{r} - \int_{r+\epsilon}^{R_a(x)} ds \frac{\partial P_k(s, \chi)}{\partial s} \cdot 2\pi r \right\} = 2\pi r \cdot \left(1 + \frac{k_0 k_1}{r^2}\right) \cdot P_k(r, \chi)$$

2. Fall: $\mu > 0$:

$$J_{\mu} = \pi r \cdot \left(1 + \frac{k_0 k_1}{r^2}\right) \cdot \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{R_i(x)}^{r-\epsilon} ds \frac{\partial P_k(s, \chi)}{\partial s} \cdot \left(\frac{s}{r}\right)^{\mu} - \int_{r+\epsilon}^{R_a(x)} ds \frac{\partial P_k(s, \chi)}{\partial s} \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^{\mu} \right\}$$

Mit den Relationen
$$\frac{d}{ds} \left(\frac{s}{r}\right)^{\mu} = \frac{\mu}{r} \cdot \left(\frac{s}{r}\right)^{\mu-1} = \frac{\mu}{s} \cdot \left(\frac{s}{r}\right)^{\mu}$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{r}{s}\right)^{\mu} = -\frac{\mu r}{s^2} \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^{\mu-1} = -\frac{\mu}{s} \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^{\mu}$$

erhält man dann:

(1C.3)
$$J_{\mu} = \pi r \cdot \left(1 + \frac{k_0 k_1}{r^2}\right) \cdot \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \left[P_k(s, \chi) \cdot \left(\frac{s}{r}\right)^{\mu} \right]_{R_i(x)}^{r-\epsilon} - \left[P_k(s, \chi) \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^{\mu} \right]_{r+\epsilon}^{R_a(x)} - \int_{R_i(x)}^{r-\epsilon} ds \cdot P_k(s, \chi) \cdot \frac{\mu}{s} \cdot \left(\frac{s}{r}\right)^{\mu} - \int_{r+\epsilon}^{R_a(x)} ds \cdot P_k(s, \chi) \cdot \frac{\mu}{s} \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^{\mu} \right\}$$

$$= \pi r \cdot \left(1 + \frac{k_0 k_1}{r^2}\right) \cdot \left[2 P_k(r, \chi) - \mu \int_{R_i(x)}^{R_a(x)} ds \frac{P_k(s, \chi)}{s} \cdot \begin{cases} s < r: \left(\frac{s}{r}\right)^{\mu} \\ s > r: \left(\frac{r}{s}\right)^{\mu} \end{cases} \right]$$

Der hierin auftretende s -Integrand ist stetig. Überdies enthält (1C.3) bereits den Fall $\mu = 0$ (1C.2), da wegen des Faktors μ und der Endlichkeit des Integrales dieses nicht zu $\mu = 0$ beiträgt. Die Darstellung (1C.3) ist daher das Ergebnis des Integrales (1C.1) für alle μ .

Anhang 1.D: Auswertung eines Integrales nach der Residuenmethode:

Auszuwerten ist das Integral für $\mu > 0$:

$$(1D.1) \quad \mathcal{J}_\mu = \int_0^{2\pi} d\vartheta e^{i\mu\vartheta} \frac{-r^2 \sin \vartheta}{r^2 + s^2 - 2rs \cos \vartheta}$$

Mit der Substitution $z = e^{i\vartheta}$

und den Darstellungen $\sin \vartheta = \frac{1}{2i} \cdot (e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}) = \frac{1}{2i} \cdot (z - z^{-1})$

$\cos \vartheta = \frac{1}{2} \cdot (e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}) = \frac{1}{2} \cdot (z + z^{-1})$

führen wir die ϑ -Winkelintegration in eine Integration im komplexen Einheitskreis (EK) über. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\mu &= -i \oint_{EK} \frac{dz}{z} z^\mu \frac{-\frac{r^2}{2i} \cdot (z - z^{-1})}{r^2 + s^2 - rs \cdot (z + z^{-1})} \\ &= -\frac{r}{2s} \oint_{EK} dz z^\mu \frac{z - z^{-1}}{(z - \frac{s}{r}) \cdot (z - \frac{r}{s})} \end{aligned}$$

Wie in Anhang 1.B kann dieses Integral nach der Residuenmethode ausgewertet werden. Es treten nur einfache Pole auf:

$s < r$: Pol bei $z_0 = \frac{s}{r}$ mit: $a_{-1}(z_0) = (\frac{s}{r})^\mu$

$s > r$: Pol bei $z_0 = \frac{r}{s}$ mit: $a_{-1}(z_0) = (\frac{r}{s})^\mu$

Daraus folgt die in s stetige Darstellung für (1D.1):

$$(1D.2) \quad \mathcal{J}_\mu = -\pi i \frac{r}{s} \cdot \begin{cases} s < r: (\frac{s}{r})^\mu \\ s > r: (\frac{r}{s})^\mu \end{cases}$$

Anhang 1.E: Darstellung eines Integrales durch ein vollständiges elliptisches Normalintegral 1. Gattung:

Wir betrachten:

$$(1E.1) \quad \mathcal{J} = \int_{\sigma}^{2\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{r^2 + s^2 - 2rs \cos \vartheta}} = \int_{\sigma}^{\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{r^2 + s^2 - 2rs \cos \vartheta}} + \int_{\sigma}^{\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{r^2 + s^2 + 2rs \cos \vartheta}}$$

Mit der Substitution $x = \cos \vartheta$; $[\sigma, \pi] \rightarrow [-1, +1]$
 $d\vartheta = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

erhalten wir die Weierstraß'sche Normalform:

$$(1E.2) \quad \mathcal{J} = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2) \cdot (r^2 + s^2 - 2rsx)}} + \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2) \cdot (r^2 + s^2 + 2rsx)}} = \sqrt{\frac{2}{rs}} \left\{ \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{P_1(x)}} + \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{P_2(x)}} \right\}$$

mit:

$$P_1(x) = \frac{2}{rs} (1-x^2) \cdot (r^2 + s^2 - 2rsx) = 4 \cdot (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x-A)$$

$$P_2(x) = \frac{2}{rs} (1-x^2) \cdot (r^2 + s^2 + 2rsx) = 4 \cdot (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x+A)$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{s}{r} + \frac{r}{s} \right)$$

Für die Weierstraß'sche Normalform gilt die Darstellung durch vollständige elliptische Normalintegrale (vergl. z.B. Gröbner-Hofreiter: Bestimmte Integrale, S. 43, 1a, 2a-b):

Sei: $p(x) = 4 \cdot (x-e_1) \cdot (x-e_2) \cdot (x-e_3)$ mit: $e_1 > e_2 > e_3$

$$(1E.3) \quad \int_{e_3}^{e_2} \frac{dx}{\sqrt{p(x)}} = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} K \left(\sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}} \right)$$

$$(1E.4) \quad \int_{e_2}^{e_1} \frac{dx}{\sqrt{p(x)}} = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} K \left(\sqrt{\frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}} \right)$$

Wir betrachten: $s \approx r$ [$s \neq r$]

o.B.d.A. sei: $s < r \longrightarrow \frac{r}{s} = 1 + \alpha$ mit $\alpha \ll 1$

$$\implies A = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{s}{r} + \frac{r}{s} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1+\alpha} + 1 + \alpha \right) \approx 1 + \frac{\alpha^2}{2} > 1$$

Daraus folgt für die Anordnung der Polstellen:

$$(1E.5) \quad \text{bei } p_1(x): \quad e_1 = A > e_2 = 1 > e_3 = -1$$

$$(1E.6) \quad \text{bei } p_2(x): \quad e_1 = 1 > e_2 = -1 > e_3 = -A$$

Durch Einsetzen von (1E.5-6) in (1E.2-4) erhält man schließlich:

$$(1E.7) \quad \mathcal{J} = \sqrt{\frac{2}{rs}} \cdot \frac{2}{\sqrt{1+A}} \cdot K \left(\sqrt{\frac{2}{1+A}} \right) = \frac{4}{s+r} \cdot K \left(\sqrt{\frac{4rs}{(s+r)^2}} \right)$$

Anhang 1.F: Induktion im Propellerstrahl, Anteil u_{AP} :

(1F.1) Wir betrachten:
$$u_{AP} = \frac{N}{8\pi^2 k_0} \sum_{\mu=-M}^{+M} \int_{R_{i0}}^{R_{a0}} s ds \cdot \frac{d\Gamma_{\mu}^{(P)}(s)}{ds} \cdot K_{1\mu}(s)$$

mit:
$$K_{1\mu}(s) = e^{i\mu\varphi} \int_{\sigma}^{2\pi} d\vartheta e^{i\mu\vartheta} \frac{r \cos \vartheta - s}{r^2 + s^2 - 2rs \cos \vartheta} \left\{ 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos \vartheta}} \right\} = 2K_{11\mu}(s) + K_{12\mu}(s)$$

(1F.2)
$$K_{11\mu}(s) = e^{i\mu\varphi} \int_{\sigma}^{2\pi} d\vartheta e^{i\mu\vartheta} \frac{r \cos \vartheta - s}{r^2 + s^2 - 2rs \cos \vartheta}$$

(1F.3)
$$K_{12\mu}(s) = e^{i\mu\varphi} \int_{\sigma}^{2\pi} d\vartheta e^{i\mu\vartheta} \frac{r \cos \vartheta - s}{r^2 + s^2 - 2rs \cos \vartheta} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos \vartheta}} - 1 \right]$$

Der Integrand von $K_{12\mu}(s)$ erweist sich als überall stetig; insbesondere gilt:

$$\lim_{s \rightarrow r} \left\{ \frac{r \cos \vartheta - s}{r^2 + s^2 - 2rs \cos \vartheta} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos \vartheta}} - 1 \right] \right\} = -\frac{1}{2r} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + 2r^2(1 - \cos \vartheta)}} - 1 \right]$$

bei $\vartheta = \sigma, 2\pi$ verschwindet diese Funktion.

Für den Anteil $K_{11\mu}(s)$ führen wir wie in Anhang 1.B mit der Substitution $z = e^{i\vartheta}$; $dz = ie^{i\vartheta} d\vartheta$; $\cos \vartheta = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$; $\sin \vartheta = \frac{1}{2i}(z - z^{-1})$

die ϑ -Winkelintegration in eine Integration im komplexen Einheitskreis (EK) über:

$$K_{11\mu}(s) = \frac{1}{rs} e^{i\mu\varphi} \oint_{(EK)} \frac{dz}{z} z^{\mu} \frac{\frac{1}{2}rz^2 - sz + \frac{r}{2}}{(z - \frac{r}{s})(z - \frac{s}{r})}$$

Mit Anwendung des Residuensatzes erhalten wir:

(1F.4)
$$K_{11\mu}(s) = \frac{2\pi i^2}{rs} e^{i\mu\varphi} \sum_{\substack{\text{Pole } z_0 \\ \text{im EK}}} a_{-1}(z_0) = \frac{\pi}{s} e^{i\mu\varphi} \left\{ \begin{array}{l} \mu = 0, s < r: \sigma \\ s > r: -2 \\ \mu > 0, s < r: (\frac{s}{r})^{\mu} \\ s > r: -(\frac{r}{s})^{\mu} \end{array} \right\}$$

Dieser Anteil kann durch partielle Integration noch so umgeformt werden, daß der Integrand in s stetig ist:

(1F.5)
$$\begin{aligned} \tilde{K}_{1\mu} &= \int_{R_{i0}}^{R_{a0}} s ds \frac{d\Gamma_{\mu}^{(P)}(s)}{ds} K_{11\mu}(s) \\ &= \pi e^{i\mu\varphi} \cdot \lim_{\epsilon \rightarrow \sigma} \left[\int_{R_{i0}}^{r-\epsilon} ds \frac{d\Gamma_{\mu}^{(P)}(s)}{ds} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \mu = \sigma: \sigma \\ \mu > \sigma: (\frac{s}{r})^{\mu} \end{array} \right\} + \int_{r+\epsilon}^{R_{a0}} ds \frac{d\Gamma_{\mu}^{(P)}(s)}{ds} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \mu = \sigma: -2 \\ \mu > \sigma: -(\frac{r}{s})^{\mu} \end{array} \right\} \right] \\ &= \pi e^{i\mu\varphi} \cdot \left[2\Gamma_{\mu}^{(P)}(r) - \mu \int_{R_{i0}}^{R_{a0}} \frac{ds}{s} \Gamma_{\mu}^{(P)}(s) \cdot \left\{ \begin{array}{l} s < r: (\frac{s}{r})^{\mu} \\ s > r: (\frac{r}{s})^{\mu} \end{array} \right\} \right] \end{aligned}$$

Anhang 1.G: Induktion im Propellerstrahl, Anteil u_{LP} :

Wir betrachten für $\mu > 0$:

$$(1G.1) \quad u_{LP} = \frac{iN}{8\pi^2 k_0} \sum_{\mu=-M}^{+M} \mu \int_{R_{i0}}^{R_{a0}} ds T_{\mu}^{(CP)}(s) \cdot K_{2\mu}(s)$$

$$K_{2\mu}(s) = e^{i\mu\varphi} \int_{\sigma}^{2\pi} d\vartheta e^{i\mu\vartheta} \frac{-r \cdot \sin\vartheta}{r^2 + s^2 - 2rs \cdot \cos\vartheta} \left\{ 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cdot \cos\vartheta}} \right\}$$

$$= 2K_{21\mu}(s) + K_{22\mu}(s)$$

$$(1G.2) \quad K_{21\mu}(s) = e^{i\mu\varphi} \int_{\sigma}^{2\pi} d\vartheta e^{i\mu\vartheta} \frac{-r \cdot \sin\vartheta}{r^2 + s^2 - 2rs \cdot \cos\vartheta}$$

$$(1G.3) \quad K_{22\mu}(s) = e^{i\mu\varphi} \int_{\sigma}^{2\pi} d\vartheta e^{i\mu\vartheta} \frac{-r \cdot \sin\vartheta}{r^2 + s^2 - 2rs \cdot \cos\vartheta} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cdot \cos\vartheta}} - 1 \right]$$

Der Integrand von $K_{22\mu}(s)$ ist stetig für alle s ; insbesondere gilt:

$$\lim_{s \rightarrow r} \left\{ \frac{-r \cdot \sin\vartheta}{r^2 + s^2 - 2rs \cdot \cos\vartheta} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cdot \cos\vartheta}} - 1 \right] \right\} = -\frac{1}{2r} \frac{\sin\vartheta}{1 - \cos\vartheta} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + 2r^2(1 - \cos\vartheta)}} - 1 \right]$$

In der Umgebung von $\vartheta = \sigma$ zeigt eine Reihenentwicklung, daß die [...] wie ϑ^2 gegen σ geht, während $\frac{\sin\vartheta}{1 - \cos\vartheta} \approx \frac{2}{\vartheta}$; der Integrand ist also auch bei $s=r, \vartheta=\sigma$ stetig und verschwindet dort.

Den Beitrag $K_{21\mu}(s)$ führen wir mit einer Substitution wie in Anhang 1.B in ein Integral im komplexen Einheitskreis (EK) über:

$$K_{21\mu}(s) = \frac{i}{rs} e^{i\mu\varphi} \oint_{(EK)} \frac{dz}{z} z^{\mu} \frac{-\frac{r}{2i} \cdot (z^2 - 1)}{(z - \frac{r}{s}) \cdot (z - \frac{s}{r})}$$

Mit Anwendung des Residuensatzes erhalten wir dann die in s stetige Darstellung:

$$(1G.4) \quad K_{21\mu}(s) = -\frac{\pi i}{s} e^{i\mu\varphi} \cdot \left\{ \begin{array}{l} s < r: \left(\frac{s}{r}\right)^{\mu} \\ s > r: \left(\frac{r}{s}\right)^{\mu} \end{array} \right\}$$

Anhang 1.H: Induktion im Propellerstrahl, Anteil \tilde{W}_{AP} :

Wir betrachten:

$$(1H.1) \quad \tilde{W}_{AP} = \frac{N}{8\pi^2 k_0} \sum_{\mu=-M}^{+M} \int_{R_{i0}}^{R_{a0}} ds \frac{d\Gamma_{\mu}^{(P)}(s)}{ds} L_{1\mu}(s)$$

$$L_{1\mu}(s) = e^{i\mu\varphi} \int_{\sigma}^{2\pi} d\vartheta e^{i\mu\vartheta} \frac{k_0 [s \cos(\varphi + \vartheta) - r \cos\varphi]}{r^2 + s^2 - 2rs \cos\vartheta} \cdot \left\{ 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos\vartheta}} \right\} = 2L_{11\mu}(s) + L_{12\mu}(s)$$

$$(1H.2) \quad L_{11\mu}(s) = e^{i\mu\varphi} \int_{\sigma}^{2\pi} d\vartheta e^{i\mu\vartheta} \frac{k_0 [s \cos(\varphi + \vartheta) - r \cos\varphi]}{r^2 + s^2 - 2rs \cos\vartheta}$$

$$(1H.3) \quad L_{12\mu}(s) = e^{i\mu\varphi} \int_{\sigma}^{2\pi} d\vartheta e^{i\mu\vartheta} \frac{k_0 [s \cos(\varphi + \vartheta) - r \cos\varphi]}{r^2 + s^2 - 2rs \cos\vartheta} \cdot \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos\vartheta}} - 1 \right]$$

Der Integrand in $L_{12\mu}(s)$ ist überall stetig; insbesondere gilt:

$$\lim_{s \rightarrow r} \left\{ \frac{k_0 [s \cos(\varphi + \vartheta) - r \cos\varphi]}{r^2 + s^2 - 2rs \cos\vartheta} \cdot \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2 + s^2 - 2rs \cos\vartheta}} - 1 \right] \right\} = -\frac{k_0}{2r} (\cos\varphi + \sin\varphi \cdot \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2}) \cdot \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + 2r^2(1 - \cos\vartheta)}} - 1 \right]$$

wie bei $K_{22\mu}(s)$, siehe Anhang 1.G, geht [...] schneller gegen σ als der Faktor $\operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2}$ divergiert; daher wird bei $s=r, \vartheta=\sigma$ der Grenzwert σ stetig angenommen.

Den Beitrag $L_{11\mu}(s)$ können wir mit einer Substitution wie in Anhang 1.B nach der Residuenmethode auswerten:

$$(1H.4) \quad \begin{aligned} L_{11\mu}(s) &= -\frac{ik_0}{2rs} e^{i\mu\varphi} \oint_{(EK)} \frac{dz}{z} z^{\mu} \frac{2rz \cos\varphi - z^2 se^{i\varphi} - se^{-i\varphi}}{(z - \frac{s}{r})(z - \frac{r}{s})} \\ &= \frac{\pi k_0}{r} e^{i\mu\varphi} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \mu = \sigma: s < r: -2 \cos\varphi \\ \quad \quad \quad s > r: \quad \quad \sigma \\ \mu > \sigma: s < r: -e^{i\varphi} \cdot \left(\frac{s}{r}\right)^{\mu} \\ \quad \quad \quad s > r: e^{-i\varphi} \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^{\mu} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Man kann diesen Beitrag noch durch partielle Integration umformen:

$$(1H.5) \quad \begin{aligned} \tilde{L}_{1\mu} &= \int_{R_{i0}}^{R_{a0}} ds \frac{d\Gamma_{\mu}^{(P)}(s)}{ds} L_{11\mu}(s) \\ &= \frac{\pi k_0}{r} e^{i\mu\varphi} \cdot \left[-2 \cos\varphi \cdot \Gamma_{\mu}^{(P)}(r) + \mu \int_{R_{i0}}^{R_{a0}} \frac{ds}{s} \Gamma_{\mu}^{(P)}(s) \cdot \left\{ \begin{array}{l} s < r: e^{i\varphi} \cdot \left(\frac{s}{r}\right)^{\mu} \\ s > r: e^{-i\varphi} \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^{\mu} \end{array} \right\} \right] \end{aligned}$$

Der s -Integrand erweist sich bei $s=r$ als unstetig; wir wollen an der dort auftretenden Sprungstelle den Mittelwert aus rechtem und linkem Limes einsetzen:

$$\frac{1}{2} [e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}] = \cos\varphi$$

Anhang 1.J: Auswertung eines Integrales (Totwasserbeitrag):

Auszuwerten ist das Integral:

$$(17.1) \quad \mathcal{J}(\eta) = \int_{\sigma}^{\Delta} \frac{dt \cdot t^4}{\sqrt{B_0(\eta) + B_1(\eta) \cdot t^2 + B_2(\eta) \cdot t^4}}$$

$$(17.2) \quad \text{mit:} \quad B_0(\eta) \cong C_0 \cdot [\eta - y]^2 \quad C_0 = 1 + \frac{x_A'(y)^2}{\cos^2 \delta} > \sigma$$

$$(17.3) \quad B_1(\eta) \cong C_1 \cdot [\eta - y] \quad C_1 = \frac{x_E(y) - x_A(y)}{2} \cdot x_A'(y) \cdot [1 + \operatorname{tg} \delta \cdot \operatorname{tg} \beta(y)]$$

$$(17.4) \quad B_2(\eta) \cong C_2 \quad C_2 = \left[\frac{x_E(y) - x_A(y)}{4 \cdot \cos \beta(y)} \right]^2 > \sigma$$

Mit der Transformation:

$$t^2 = x \quad \rightarrow \quad dt = \frac{1}{2} \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad ; \quad [\sigma, \Delta] \rightarrow [\sigma, \Delta^2]$$

geht das Integral (17.1) über in:

$$(17.5) \quad \mathcal{J}(\eta) = \frac{1}{2} \int_{\sigma}^{\Delta^2} \frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{B_0(\eta) \cdot x + B_1(\eta) \cdot x^2 + B_2(\eta) \cdot x^3} \cdot [B_0(\eta) + B_1(\eta) \cdot x + B_2(\eta) \cdot x^2]}$$

Umformulierung des Integranden:

$$(17.6) \quad \frac{x^2}{B_0(\eta) + B_1(\eta) \cdot x + B_2(\eta) \cdot x^2} = \frac{1}{B_2(\eta)} - \frac{1}{B_2(\eta)} \cdot \frac{B_0'(\eta) + B_1'(\eta) \cdot x}{B_0'(\eta) + B_1'(\eta) \cdot x + x^2}$$

$$(17.7) \quad \text{mit:} \quad B_0'(\eta) = \frac{B_0(\eta)}{B_2(\eta)} = C_0' \cdot [\eta - y]^2 \quad C_0' = \frac{1 + \frac{x_A'^2(y)}{\cos^2 \delta}}{[x_E(y) - x_A(y)]^2} \cdot 16 \cos^2 \beta(y)$$

$$(17.8) \quad B_1'(\eta) = \frac{B_1(\eta)}{B_2(\eta)} = C_1' \cdot [\eta - y] \quad C_1' = \frac{8 \cos^2 \beta(y) \cdot x_A'(y)}{x_E(y) - x_A(y)} [1 + \operatorname{tg} \delta \cdot \operatorname{tg} \beta(y)]$$

Produkt-Darstellung des Nenners:

$$B_0'(\eta) + B_1'(\eta) \cdot x + B_2'(\eta) \cdot x^2 = (x - \beta_1) \cdot (x - \beta_2)$$

$$\Rightarrow \quad \beta_{1,2} = -\frac{B_1'(\eta)}{2} \pm \sqrt{\frac{B_1'^2(\eta)}{4} - B_0'(\eta)} = -\frac{C_1'}{2} \cdot [\eta - y] \pm |\eta - y| \cdot \sqrt{\frac{C_1'^2}{2} - C_0'}$$

Wir wählen - bei festem η - das Vorzeichen so, daß gilt:

$$(17.9) \quad \beta_1(\eta) = -[\eta - y] \cdot \left\{ C_1' - \sqrt{\frac{C_1'^2}{2} - C_0'} \right\}$$

$$(17.10) \quad \beta_2(\eta) = -[\eta - y] \cdot \left\{ C_1' + \sqrt{\frac{C_1'^2}{2} - C_0'} \right\}$$

Partialbruch-Zerlegung:

$$(17.11) \quad \frac{B_0'(\eta) + B_1'(\eta) \cdot x}{(x - \beta_1(\eta)) \cdot (x - \beta_2(\eta))} = \frac{A_1(\eta)}{x - \beta_1(\eta)} + \frac{A_2(\eta)}{x - \beta_2(\eta)}$$

$$\text{mit:} \quad A_1(\eta) = -\frac{B_0'(\eta) + \beta_1(\eta) \cdot B_1'(\eta)}{\beta_2(\eta) - \beta_1(\eta)} \quad A_2(\eta) = \frac{B_0'(\eta) + \beta_2(\eta) \cdot B_1'(\eta)}{\beta_2(\eta) - \beta_1(\eta)}$$

Mit (17.6, 11) erhalten wir dann:

$$(17.12) \quad \mathcal{J}(\eta) = \frac{1}{2B_2(\eta)} \int_{\sigma}^{\Delta^2} \frac{dx}{Y(x, \eta)} - \frac{A_1(\eta)}{2B_2(\eta)} \int_{\sigma}^{\Delta^2} \frac{dx}{(x - \beta_1(\eta)) \cdot Y(x, \eta)} - \frac{A_2(\eta)}{2B_2(\eta)} \int_{\sigma}^{\Delta^2} \frac{dx}{(x - \beta_2(\eta)) \cdot Y(x, \eta)}$$

$$(17.13) \quad \text{mit:} \quad Y(x, \eta) = \sqrt{B_2(\eta) \cdot x \cdot [x - \beta_1(\eta)] \cdot [x - \beta_2(\eta)]}$$

Die in (1J.12) auftretenden Integrale sind Normalintegrale 1. bzw. 3. Gattung (vergl. [13], S. 76):

$$(1J.14) \quad \mathcal{J}(\eta) = \frac{1}{2B_2(\eta)} \mathcal{J}_\sigma(x) \Big|_\sigma^{\Delta^2} - \frac{A_1(\eta)}{2B_2(\eta)} \mathcal{J}_{-1}(x; \beta_1(\eta)) \Big|_\sigma^{\Delta^2} - \frac{A_2(\eta)}{2B_2(\eta)} \mathcal{J}_{-1}(x; \beta_2(\eta)) \Big|_\sigma^{\Delta^2}$$

Die Normalintegrale können auf die Legendre'sche Normalform transformiert werden. Dabei ist zu unterscheiden, ob $Y(x, \eta)$ drei reelle oder zwei konjugiert-komplexe und eine reelle Wurzel hat. Mit (1J.9-10) gilt:

$$(1J.15) \quad C_1^{12} > 2 \cdot C_0^1 \implies \beta_1(\eta), \beta_2(\eta) \text{ reell} \implies Y(x, \eta) \text{ hat 3 reelle Wurzeln}$$

$$(1J.16) \quad C_1^{12} < 2 \cdot C_0^1 \implies \beta_1(\eta) = \beta_2(\eta) \implies Y(x, \eta) \text{ hat 1 reelle und 2 komplexe Wurzeln}$$

Durch Einsetzen von (1J.7-8) und Umformung nimmt diese Bedingung die einfache Gestalt an:

$$x_A^{12}(y) \begin{cases} > \frac{\cos^2 \delta}{\cos(2[\delta - \beta(y)])} \\ < \frac{\cos^2 \delta}{\cos(2[\delta - \beta(y)])} \end{cases} \begin{cases} > : Y(x, \eta) \text{ hat 3 reelle Wurzeln} \\ < : Y(x, \eta) \text{ hat 2 komplexe Wurzeln und 1 reelle Wurzel} \end{cases}$$

Speziell für $\beta \approx \frac{\delta}{2}$ erhalten wir $x_A^{12}(y) \approx \cos \delta$. Wenn die Lage des Ablösepunktes sich nicht stark ändert, hat man eine reelle und zwei komplexe, andernfalls drei reelle Wurzeln zu untersuchen.

1. Fall: $x_A^{12}(y) < \frac{\cos^2 \delta}{\cos(2[\delta - \beta(y)])} \implies C_1^{12} < 2 \cdot C_0^1$

$$(1J.17) \quad \beta_1(\eta) = [y - \eta] \cdot \left\{ C_1^1 - i \sqrt{C_0^1 - \frac{C_1^{12}}{2}} \right\} = R - i \mathcal{J}$$

$$\beta_2(\eta) = [y - \eta] \cdot \left\{ C_1^1 + i \sqrt{C_0^1 - \frac{C_1^{12}}{2}} \right\} = R + i \mathcal{J}$$

$$(1J.18) \quad \text{mit: } R = [y - \eta] \cdot C_1^1 \quad \mathcal{J} = [y - \eta] \cdot \sqrt{C_0^1 - \frac{C_1^{12}}{2}}$$

Daraus erhalten wir mit [13, S. 79] die Darstellung:

$$\operatorname{tg}(2\vartheta) = -\frac{\mathcal{J}}{R} \longrightarrow \vartheta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(-\frac{\sqrt{C_0^1 - \frac{1}{2} C_1^{12}}}{C_1^1} \right)$$

$$x \geq \sigma, B_2(\eta) > \sigma \longrightarrow \sigma < \vartheta < \frac{\pi}{2}$$

$$a = -R + \mathcal{J} \cdot \operatorname{tg} \vartheta = [y - \eta] \cdot \left\{ \operatorname{tg} \vartheta \cdot \sqrt{C_0^1 - \frac{1}{2} C_1^{12}} - C_1^1 \right\}$$

$$b = R + \mathcal{J} \cdot \operatorname{ctg} \vartheta = [y - \eta] \cdot \left\{ \operatorname{ctg} \vartheta \cdot \sqrt{C_0^1 - \frac{1}{2} C_1^{12}} + C_1^1 \right\}$$

$$c = -1; \quad d = +1; \quad k = |\sin \vartheta|; \quad x = \frac{a \cdot \cos \varphi + b}{c \cdot \cos \varphi + d} \quad [\sigma \leq \varphi \leq \pi]$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{4 \cdot B_2(\eta) \cdot \mathcal{J}^2}{\sin^3(2\vartheta)}} = \sqrt{\frac{4 B_2(\eta)}{\sin^3(2\vartheta)} \cdot [y - \eta]^3 \sqrt{C_0^1 - \frac{1}{2} C_1^{12}}}$$

$$(1J.19) \quad \implies \int_\sigma^{\Delta^2} \frac{dx}{Y(x; \eta)} = \mathcal{J}_\sigma(x) \Big|_\sigma^{\Delta^2} = -\frac{a+b}{\gamma} F(\varphi, k) \Big|_{\varphi(\sigma)}^{\varphi(\Delta^2)}$$

$$(17.20) \quad \int_{\sigma}^{\Delta^2} \frac{dx}{[x-\varrho] \cdot \gamma(x;\eta)} = \mathbb{F}_{-1}(x;\varrho) \Big|_{\sigma}^{\Delta^2} = \frac{a+b}{\gamma \cdot [a+\varrho]} F(\varphi, k) \Big|_{\varphi(\sigma)}^{\varphi(\Delta^2)} - \frac{[a+b]^2}{\gamma \cdot [a+\varrho] \cdot [b-\varrho]} \int_{\varphi(\sigma)}^{\varphi(\Delta^2)} \frac{d\varphi}{(1 + \frac{a+\varrho}{b-\varrho} \cos \varphi) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

falls: $\varrho \neq -a$; $\varrho \neq b$

Das verbleibende Integral in (17.20) hat für den vorliegenden Fall

$$\varrho = \frac{\pm k i}{\sqrt{1-k^2}} = \pm i k \vartheta$$

nach [13, S. 62] die Gestalt:

$$(17.21) \quad \int \frac{d\varphi}{[1+\varrho \cdot \cos \varphi] \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = - \frac{k^2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot [1-\varrho \cdot \cos \varphi]}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} - \varrho \cdot \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} + E(\varphi, k) \stackrel{\text{def.}}{=} f_{\varrho}(\varphi, k) + E(\varphi, k)$$

Die Integrationsgrenzen in der Legendre-Form haben die Darstellung:

$$(17.22) \quad \begin{aligned} x = \sigma &: \varphi(\sigma) = \arccos \left(\frac{C_1' + c \operatorname{tg} \vartheta \cdot \sqrt{C_0' - \frac{1}{2} C_1'^2}}{C_1' - \frac{1}{2} c \operatorname{tg} \vartheta \cdot \sqrt{C_0' - \frac{1}{2} C_1'^2}} \right) \\ x = \Delta^2 &: \varphi(\Delta^2) = \arccos \left(\frac{\Delta^2 - [y-\eta] \cdot \{ C_1' + c \operatorname{tg} \vartheta \cdot \sqrt{C_0' - \frac{1}{2} C_1'^2} \}}{\Delta^2 - [y-\eta] \cdot \{ C_1' - \frac{1}{2} c \operatorname{tg} \vartheta \cdot \sqrt{C_0' - \frac{1}{2} C_1'^2} \}} \right) \end{aligned}$$

Durch Einsetzen aller angegebenen Ausdrücke erhalten wir die folgende Darstellung, in der die η -Abhängigkeit vorgezogen wurde und alle η -unabhängigen Anteile zusammengefaßt sind:

$$(17.23) \quad \mathbb{F}_{\sigma}(x) \Big|_{\sigma}^{\Delta^2} = \frac{\Phi_1}{\sqrt{|y-\eta|}} \cdot \{ F(\varphi(\Delta^2), k) - F(\varphi(\sigma), k) \}$$

$$(17.24) \quad \begin{aligned} A_1(\eta) \cdot \mathbb{F}_{-1}(x; \beta_1) \Big|_{\sigma}^{\Delta^2} &= \frac{\Phi_{21}}{\sqrt{|y-\eta|}} \cdot \{ F(\varphi(\Delta^2), k) - F(\varphi(\sigma), k) \} \\ &+ \frac{\Phi_{22}}{\sqrt{|y-\eta|}} \cdot \{ f_{\beta_1}(\varphi(\Delta^2), k) - f_{\beta_1}(\varphi(\sigma), k) + E(\varphi(\Delta^2), k) - E(\varphi(\sigma), k) \} \end{aligned}$$

$$(17.25) \quad \begin{aligned} A_2(\eta) \cdot \mathbb{F}_{-1}(x; \beta_2) \Big|_{\sigma}^{\Delta^2} &= \frac{\Phi_{31}}{\sqrt{|y-\eta|}} \cdot \{ F(\varphi(\Delta^2), k) - F(\varphi(\sigma), k) \} \\ &+ \frac{\Phi_{32}}{\sqrt{|y-\eta|}} \cdot \{ f_{\beta_2}(\varphi(\Delta^2), k) - f_{\beta_2}(\varphi(\sigma), k) + E(\varphi(\Delta^2), k) - E(\varphi(\sigma), k) \} \end{aligned}$$

Hierin hängen die Faktoren $\Phi_1, \Phi_{21}, \Phi_{22}, \Phi_{31}, \Phi_{32}$ nicht von η ab; die Klammeranteile $\{ \dots \}$ hängen zwar noch von η ab, aber mit $\eta \rightarrow y$ erhalten wir einen konstanten Grenzwert wegen:

$$\lim_{\eta \rightarrow y} \varphi(\Delta^2) = \arccos(1) = \sigma$$

$$E(\sigma, k) = F(\sigma, k) = \sigma \quad f_{\beta_1}(\sigma, k) = f_{\beta_2}(\sigma, k) = \sigma \quad \text{da: } \beta_1, \beta_2 \sim [y-\eta]$$

Wir führen den η -unabhängigen Anteil als Abkürzung ein:

$$(17.26) \quad \begin{aligned} \Phi_{\sigma}(y) &= - F(\varphi(\sigma), k) \cdot \{ \Phi_1 + \Phi_{21} + \Phi_{31} \} - E(\varphi(\sigma), k) \cdot \{ \Phi_{22} + \Phi_{32} \} \\ &- \Phi_{22} \cdot f_{\beta_1}(\varphi(\sigma), k) - \Phi_{32} \cdot f_{\beta_2}(\varphi(\sigma), k). \end{aligned}$$

Dieser Anteil $\Phi_\sigma(y)$ ist eine elementare, aber sehr komplizierte Funktion der geometrischen Angaben. Damit erhalten wir für das Verhalten bei $\eta=y$ die Darstellung:

$$(17.27) \quad \gamma(\eta) = \frac{\Phi_\sigma(y)}{2B_2(y)} \cdot \frac{1}{\sqrt{|y-\eta|}} = \frac{\delta \cos^2 \beta(y) \cdot \Phi(y)}{[x_E(y) - x_A(y)]^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{|y-\eta|}}$$

2. Fall: $x_A^{12}(y) > \frac{\cos^2 \delta}{\cos(2 \cdot [\delta - \beta(y)])} \implies C_1^{12} > 2C_0'$

$$(17.28) \quad \beta_1(y) = [y - \eta] \cdot \left\{ C_1' - \sqrt{\frac{1}{2} C_1^{12} - C_0'} \right\}$$

$$\beta_2(y) = [y - \eta] \cdot \left\{ C_1' + \sqrt{\frac{1}{2} C_1^{12} - C_0'} \right\}$$

In diesem Fall hat $Y(x; \eta)$ drei reelle Wurzeln, die für $\eta > y$ folgendermaßen angeordnet sind:

$$x \geq \alpha_1 = \sigma > \alpha_2 = \beta_1(\eta) > \alpha_3 = \beta_2(\eta)$$

(für $\eta < y$ ändern sich die folgenden Formeln entsprechend der Anordnung). Für die Darstellung der Beiträge (1J.14) führen wir nach [13, S. 78-79] die Transformation aus:

$$x = \frac{a \cdot \sin^2 \varphi + b}{c \cdot \sin^2 \varphi + d} \quad \left[0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right]$$

$$Y(x, \eta) = \sqrt{B_2(\eta) \cdot x \cdot [x - \beta_1(\eta)] \cdot [x - \beta_2(\eta)]}$$

$$k^2 = \frac{\beta_2(\eta) - \beta_1(\eta)}{\beta_2(\eta)} = \frac{2\sqrt{\frac{1}{2} C_1^{12} - C_0'}}{C_1' + \sqrt{\frac{1}{2} C_1^{12} - C_0'}}$$

$$\left. \begin{array}{l} a = -\beta_1(\eta) \\ b = \sigma \\ c = -1 \\ d = 1 \end{array} \right\} \varphi = \arcsin \left(\sqrt{\frac{x \cdot d - b}{a - x \cdot c}} \right) = \arcsin \left(\sqrt{\frac{x}{x - \beta_1(\eta)}} \right)$$

$$\delta = -\beta_1(\eta)$$

$$\gamma = -\beta_1(\eta) \cdot \sqrt{B_2(\eta) \cdot [-\beta_2(\eta)]} = -\beta_1(\eta) \cdot \sqrt{B_2(\eta) \cdot |\beta_2(\eta)|}$$

Damit erhalten wir für die Beiträge aus (1J.14):

$$(17.29) \quad \int_\sigma^{\Delta^2} \frac{dx}{Y(x; \eta)} = \mathbb{F}_\sigma(x) \Big|_\sigma^{\Delta^2} = \frac{2\delta}{\gamma} F(\varphi, k) \Big|_{\varphi(\sigma)}^{\varphi(\Delta^2)}$$

$$(17.30) \quad \int_\sigma^{\Delta^2} \frac{dx}{[x - \beta_1(\eta)] \cdot Y(x; \eta)} = \mathbb{F}_{-1}(x; \beta_1(\eta)) \Big|_\sigma^{\Delta^2} = -\frac{2c}{\gamma} \cdot \left\{ \left[d + \frac{c}{k^2} \right] \cdot F(\varphi, k) - \frac{c}{k^2} \cdot E(\varphi, k) \right\} \Big|_{\varphi(\sigma)}^{\varphi(\Delta^2)}$$

$$(17.31) \quad \int_\sigma^{\Delta^2} \frac{dx}{[x - \beta_2(\eta)] \cdot Y(x; \eta)} = \mathbb{F}_{-1}(x; \beta_2(\eta)) \Big|_\sigma^{\Delta^2} = \frac{2\delta}{\gamma \cdot [a - c \cdot \beta_2(\eta)]} \cdot \left\{ c \cdot F(\varphi, k) + \frac{\delta}{b - d \cdot \beta_2(\eta)} \cdot \Pi \left(\varphi, \frac{a - \beta_2(\eta) \cdot c}{b - \beta_2(\eta) \cdot d}, k \right) \right\} \Big|_{\varphi(\sigma)}^{\varphi(\Delta^2)}$$

Die Integrationsgrenzen haben nach der Transformation die Darstellung:

$$x = \sigma: \quad \varphi(\sigma) = \sigma \quad \text{und: } F(\sigma, k) = E(\sigma, k) = \sigma$$

$$x = \Delta^2: \quad \varphi(\Delta^2) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{\Delta^2}{\Delta^2 - \beta_4(\eta)}}\right)$$

Durch Einsetzen aller angegebenen Beiträge erhalten wir die folgende Darstellung, bei der wie schon in (1J.23-25) alle Anteile, die bei $\eta \rightarrow y$ stetig sind, zu Faktoren $\Psi_1, \Psi_{21}, \Psi_{22}, \Psi_{31}, \Psi_{32}$ zusammengefaßt sind:

$$(17.32) \quad \int_{\sigma}^{\Delta^2} (x) \Big|_{\sigma}^{\Delta^2} = \frac{\Psi_1}{\sqrt{|y-\eta|}} \cdot F(\varphi(\Delta^2), k)$$

$$(17.33) \quad A_1(\eta) \cdot \int_{-1}^{\Delta^2} (x; \beta_1(\eta)) \Big|_{\sigma}^{\Delta^2} = \frac{\Psi_{21}}{\sqrt{|y-\eta|}} \cdot F(\varphi(\Delta^2), k) + \frac{\Psi_{22}}{\sqrt{|y-\eta|}} \cdot E(\varphi(\Delta^2), k)$$

$$(17.34) \quad A_2(\eta) \cdot \int_{-1}^{\Delta^2} (x; \beta_2(\eta)) \Big|_{\sigma}^{\Delta^2} = \frac{\Psi_{31}}{\sqrt{|y-\eta|}} \cdot F(\varphi(\Delta^2), k) + \frac{\Psi_{32}}{\sqrt{|y-\eta|}} \cdot \{ \Pi(\varphi(\Delta^2), -k^2, k) - \Pi(\varphi(\sigma), -k^2, k) \}$$

Das in (1J.34) auftretende Normalintegral 3. Gattung Π kann durch die Integrale 1. und 2. Gattung (F, E) ausgedrückt werden.

Mit der Abkürzung:

$$(17.35) \quad \Psi_0(y) = F(\varphi(\Delta^2), k) \cdot \{ \Psi_1 + \Psi_{21} + \Psi_{31} \} + E(\varphi(\Delta^2), k) \cdot \Psi_{22} + \{ \Pi(\varphi(\Delta^2), -k^2, k) - \Pi(\sigma, -k^2, k) \} \cdot \Psi_{32}$$

erhalten wir die Darstellung:

$$(17.36) \quad \mathcal{J}(\eta) = \frac{\Psi_0(y)}{2 \cdot B_2(y)} \cdot \frac{1}{\sqrt{|y-\eta|}} = \frac{\beta \cdot \cos^2 \beta(y) \cdot \Psi_0(y)}{[x_E(y) - x_A(y)]^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{|y-\eta|}}$$

Damit ist das Integral (1J.1) in der Umgebung von $\eta=y$ ausgewertet. Die Konstanten $\Phi_0(y)$ bzw. $\Psi_0(y)$ sind in den jeweiligen Fällen elementar-angebbare, aber komplizierte Funktionen der geometrischen Parameter.

Anhang 2: Verzeichnis der benutzten Literatur

- [1] W.H. Isay, Propellertheorie, Springer-Verlag
- [2] W.H. Isay, Schiffstechnik Mai 1965 (12. Band, 62. Heft): Über die Wechselwirkung zwischen Schiffsruder und Schraubenpropeller
- [3] W. Zwick, Schiffbauforschung 1, 4/1962: Zur Berechnung der Zirkulation und der Kräfte eines Propellers im Nachstrom
- [4] Fourth Symposium on Naval Hydrodynamics: Ship Propulsion and Hydroelasticity, 27.-31. 8. 1962, Washington D.C.
- [4a] [4], S. 1-29: R. Yamazaki, On the Theory of Screw Propellers
- [4b] [4], S. 97-142: T. Hanaoka, Hydrodynamics of an oscillating Screw Propeller
- [5] W.H. Isay, R. Armonat, Schiffstechnik Juni 1966 (13. Band, 67. Heft): Zur Berechnung der potentialtheoretischen Druckverteilung am Flügelblatt eines Propellers
- [6] Schlichting-Truckenbrodt, Aerodynamik des Flugzeuges, 2. Band, Springer-Verlag Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1960
- [7] E. Jahnke, F. Emde, Tables of Functions, Dover Publications New York 1945

- (8) H. Lerbs, Schiff und Hafen 5, 1953, S. 529:
Über den Energieverlust eines Propellers
im örtlich veränderlichen Nachstrom
- (9) G. Jungclaus, Zeitschrift für Flugwissenschaft 5,
1957, S. 172: Druckverteilung angestellter ebener
Platten mit angenähertem Totwassereinfluß
- (10) W.H. Isay, Wissenschaftliche Zeitschrift der
T. H. Dresden 9, 1959/60, S. 903: Zur Behandlung
der Totwasserströmung bei einem Flügelprofil
- (11) W.H. Isay, unveröffentlicht: Zur Behandlung
der Totwasserströmung
- (12) Bericht des Cavitation Committee, 10. International
Towing Tank Conference, London 1963
- (13) W. Gröbner, N. Hofreiter, Integraltafel 1: Unbe-
stimmte Integrale, Springer-Verlag Wien und
Innsbruck, 1949
- (14) Breslin, Tsakonas, Stevens Institute of Technology,
Diese Arbeit soll Ende 1967 veröffentlicht werden.