34 | 1956

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Dipl.-Ing. G. Weinblum

Ein Verfahren zur Auswertung des Wellenwiderstandes vereinfachter Schiffsformen

TUHH
Technische Universität Hamburg-Harburg

Ein Verfahren zur Auswertung des Wellenwiderstandes vereinfachter Schiffsformen

Prof. Dr.-Ing. G. Weinblum, Institut für Schiffbau, Hamburg

I. Bemerkungen zur Geometrie des Schiffes

Einleitung:

Das Interesse an der Berechnung des Wellenwiderstandes von Schiffsformen hat sich in den letzten Jahren außerordentlich belebt. Dies ist zunächst auf den allgemein herrschenden Zug zur wissenschaftlichen Vertiefung auf allen Gebieten der technischen Wissenschaften zurückzuführen, der sich auch in unserer Disziplin stärker bemerkbar macht. Sodann haben die jetzt zur Genüge bekannten Schwierigkeiten, die bei Modellversuchen auftraten, wesentlich dazu beigetragen, die Bedeutung der Theorie im allgemeinen und der des Wellenwiderstandes im besonderen für die Praxis und das Versuchswesen hervorzuheben.

In neuester Zeit sind deshalb eine ganze Reihe von Arbeiten über das uns hier beschäftigende Thema erschienen. Wir unterscheiden hierbei zwei Arbeitsrichtungen.

Die erste erstreckt sich auf die Weiterentwicklung der Theorie. Hier müssen wir wieder eine Unterteilung in zwei Gruppen vornehmen. In die eine gehören Bemühungen, die von der sogenannten linearisierten Theorie, der Annahme flacher Wellen, ausgehen. Als vornehmlichste Ergebnisse in dieser Gruppe nennen wir einen umfassenden Bericht von Lunde [1] und Arbeiten japanischer Gelehrter, über deren Ergebnisse Inui vor dem VII. Internationalen Kongreß der Schiffbauversuchsanstalten vorgetragen hat [2]. Die bahnbrechenden Arbeiten von Havelock und wichtige Beiträge russischer Wissenschaftler gehören schon zum klassischen Bestand der Schiffstheorie. Zur zweiten Gruppe gehören Untersuchungen, die wenigstens in einigen Punkten über die genannte Voraussetzung der Linearisierung hinausgehen. Diese stellen jedoch vorläufig nur erste Ansätze vor und haben noch zu keinen konkreten Ergebnissen geführt.

Die zweite Arbeitsrichtung hat sich ein bescheideneres Ziel gesteckt — die bekannten theoretischen Lösungen möglichst weitgehend für die praktische Rechnung nutzbar zu machen, d. h. soweit auszuwerten, daß man mühelos explicite Schlüsse über den Zusammenhang von Schiffsform und -widerstand ziehen kann. Die Verfasser der einschlägigen Arbeiten gehen von der Vorstellung aus, daß die Ergebnisse der vereinfachten klassischen Theorie auch dann noch von Wert sein werden, wenn man weitergehende theoretische Lösungen gefunden haben sollte. Unsere vorliegende Arbeit gehört in diese Gruppe. Die meisten Erörterungen gelten dem Michell'schen Integral, doch sind auch weitergehende Lösungen in Betracht gezogen worden, auf die wir hinweisen werden. Wir geben einen Überblick über die wichtigsten, in dieses Gebiet gehörenden neueren Abhandlungen:

1. Der ausgezeichnete amerikanische Mathematiker G. Birkhoff hat zusammen mit B. Korvin-Kroukovsky und J. Kotik einen systematischen Überblick über die Methoden zur Auswertung des Michell'schen Integrals gegeben, und selbst zwei neue Vorschläge gemacht, die z. T. auf der Verwendung von Rechenautomaten aufbauen [3]. Es läßt sich noch nicht übersehen, welchen Nutzen diese Anregungen bringen. Sehr beachtlich ist jedoch das Bestreben, den Einfluß lokaler Formänderungen des Schiffsrumpfes auf den Widerstand systematisch zu untersuchen, denn hier liegt noch eine ernsthafte Lücke vor. Bekanntlich darf man nicht a priori voraussetzen, daß glatte „harmonische" Schiffsformen vom Standpunkt des Wellenwiderstands die günstigsten Lösungen abgeben. Der Wulstbug ist ein gutes Beispiel, daß Abweichungen von der „Harmonie" vorteilhaft sein können, und es ist im Prinzip nicht ausgeschlossen, daß Anschwellungen an anderen Stellen des Schiffskörpers unter bestimmten Bedingungen ebenfalls zu Widerstandsreduktionen führen. Das Problem der Wellenhosen sollte einmal unter diesem Gesichtspunkt behandelt werden.

2. Die Untersuchungen von Dr. Guilloton gehören zu einem erheblichen Teil in die Gruppe der Arbeiten, die sich eine „Verbesserung" der Theorie zum Ziel setzen, sie enthalten jedoch in gleicher Weise sehr beachtliche Vorschläge über Methoden zur Auswertung, die gelegentlich auch die Verwertung von Versuchsergebnissen einschließen. Wir erwähnen die Beiträge von Korvin-Kroukovsky [4a] [4].

3. Wichtige Fortschritte verdanken wir dem japanischen Forscher Inui [2]. Bei dem bisher bekannten Verfahren wurde der Zusammenhang zwischen der Schiffsform und den sie erzeugenden hydrodynamischen Singularitäten auf Grund einer recht groben Näherung hergestellt, wodurch sich eine beträchtliche Unsicherheit in das bisherige Berechnungsverfahren hineingeschlichen hat. Es ist bezeichnend für die menschliche Natur, daß in solchen Fällen die Neigung besteht, grundlegende Schwierigkeiten etwas in den Hintergrund zu drängen und mit einem „als ob" zu operieren. Inui hat die Größe der durch das alte Verfahren bedingten Fehler aufgezeigt, indem er eine Methode entwickelte, mit der man in allseitig unbeschränkter Flüssigkeit schiffsähnliche Formen erzeugen kann. Man darf annehmen, daß sich damit wenigstens im Gebiet kleiner und mittlerer Froude'scher Zahlen zuverlässigere Annäherungslösungen für die Körperformen als bisher ergeben. Inuis Arbeiten enthalten darüber hinaus beachtliche Vorschläge für eine halb empirische Erfassung der Zähigkeitseinflüsse.

4. Einar Hogner in Stockholm hat schon vor mehr als einem Vierteljahrhundert eine sogenannte Interpolationsformel aufgestellt, von der man erwarten kann, daß sie den Widerstand von Schiffsformen besser wiedergibt als das

Michell'sche Integral. Nach anfänglichen Erfolgen ist die Anwendung dieser nützlichen Interpolationsformel wegen der großen mit der Berechnung verbundenen Schwierigkeiten zeitweise steckengeblieben. Herr Hogner hat jetzt eine wesentlich vereinfachte Methode vorgeschlagen, seine Interpolationsformel auszuwerten, welche die genannten Klippen vermeidet.

5. Der Vollständigkeit halber erwähnen wir eine russische Arbeit von Reinov [14]. Sie befaßt sich mit der Auswertung von Lösungen für das Geschwindigkeitspotential von Körpern, die der bedeutende russische Hydrodynamiker Kochin für die Bewegung von Körpern an oder in der Nähe der freien Oberfläche gegeben hat.

6. Schließlich hat der Verfasser während seiner Tätigkeit am David Taylor Model Basin in Fortsetzung der Arbeiten von Wigley [5] und eigener Bemühungen in Gemeinschaft mit dem Bureau of Standards in Washington ein Auswertverfahren für das Michell'sche Integral vorgeschlagen, das als TMB-Bericht Nr. 886 erschienen ist [6]. Es beruht auf der Darstellung vereinfachter Schiffsformen durch Polynome. Die Arbeit befaßt sich vorzugsweise mit dem Einfluß der Längsverteilung des Deplacements (der Spantarealkurve) auf den Wellenwiderstand, gibt jedoch auch einige Aufschlüsse über die Auswirkung der Deplacementsverteilung in vertikaler Richtung. Das Kernstück dieser Untersuchung bilden Tabellen von Zwischenintegralen. Es ist eine angenehme Pflicht, dem Direktor des David Taylor Model Basin, Admiral Leahy, für seine Erlaubnis zu danken, diese Tabellen im Rahmen des vorliegenden ersten Teils unserer Arbeit zu veröffentlichen, nachdem sie im genannten TMB-Bericht nur in beschränkter Auflage erschienen waren. Darüber hinaus sind noch einige Tabellen von Hilfsfunktionen, die häufig von Nutzen sind und nur unvollständig veröffentlicht waren, beigefügt. Neben dem Tabellenmaterial als pièce de resistance enthält der erste Teil bekannte geometrische Betrachtungen über die Schiffsform und ein Rezept für die praktische Anwendung der Tabellen.

Ein später folgender zweiter Teil, der gemeinsam mit D. Wustrau verfaßt wird, behandelt zwei Aufgaben:

1. Widerstandskurven für vereinfachte systematisch variierte Schiffsformen aufzustellen.
2. für Schiffsformen mit vorgeschriebenem Schärfegrad und zwei willkürlichen Parametern die beste Längsverteilung zu ermitteln, d. h. Formen geringsten Wellenwiderstands innerhalb gewisser angenommener Familien von Schiffsformen zu finden.

Daneben wird der Zusammenhang zwischen Singularitäten-Systemen, auf denen die Berechnung des Wellenwiderstands aufbaut, und den resultierenden Schiffsformen erörtert werden.

Die Arbeiten Inuis haben die Frage nahegelegt, wieweit zahlreiche frühere Untersuchungen ihre unmittelbare praktische Bedeutung verlieren, da sie nur für extrem dünne Schiffe entsprechend dem Gültigkeitsbereich der Michell'schen Theorie gelten, und eine auch nur angenäherte Anwendung der Ergebnisse auf Schiffsformen mit üblichen Proportionen fraglich erscheint. Dies trifft im Prinzip zu; es ist aber zu erwarten, daß durch weitere Auswertungen von Formen im Sinne Inuis die praktische Anwendbarkeit früher erzielter rechnerischer Ergebnisse sich über das anfänglich Erhoffte hinaus steigern lassen wird.

Methodisch beruht der zweite in Arbeit befindliche Teil unserer Untersuchungen auf einer älteren Veröffentlichung des Verfassers [7]. Über das Minimalproblem hat auch Ing. Vossers, zur Zeit bei der Niederländischen Schiffbauversuchsanstalt (NPS) in Wageningen tätig, vor einigen Jahren bei uns gearbeitet. Er hat sich mit scharfen Schiffsformen befaßt, während wir vornehmlich Schiffsoberflächen behandeln wollen, die höhere Völligkeitsgrade aufweisen und etwa Frachtschiffen entsprechen. Die Abhandlung von Herrn Vossers, die manche bemerkenswerte Ergebnisse enthält, wird gesondert erscheinen.

Geometrie der Schiffsoberfläche

Die Beschäftigung mit der Theorie des Wellenwiderstands setzt ein Studium der geometrischen Eigenschaften der Schiffsform und damit der zweckmäßigen Darstellung der Oberfläche durch geeignete Gleichungen und Kenngrößen voraus. Schon seit langem ist bekannt, daß man gelegentlich durch kleine Änderungen der Form meßbare oder sogar beachtliche Änderungen im Widerstand von Schiffsmodellen hervorrufen kann, während andererseits stark unterschiedliche Formen u. U. praktisch gleiche Widerstände aufweisen. Solange eine vernünftige Theorie fehlte, trug diese Beobachtung dazu bei, die Lehre vom Schiffswiderstand zu einer Geheimwissenschaft zu stempeln. Im Verlauf der Weiterentwicklung des Schiffsschleppversuchswesens wurde man dann auf die sattsam bekannten Schwierigkeiten infolge der Labilität der Umströmung (Umschlag laminar-turbulent) aufmerksam, eigentümlicherweise in einigen führenden Schiffbauländern mit einer Phasenverschiebung von 10 bis 15 Jahren. Dies komplizierte die Sachlage beträchtlich und führte gelegentlich sogar zu einer an sich unberechtigten Vertrauenskrise gegenüber dem Schleppversuch, denn man war häufig im unklaren, ob die bei vergleichenden Untersuchungen auftretenden Differenzen im Widerstand tatsächlich durch Formunterschiede oder durch Verschiedenheit des Umströmungszustands bedingt waren. Die Klärung dieses Problems liegt auf einem anderen Gebiet und ist inzwischen recht weit gediehen; immerhin hat die Anwendung der Theorie des Wellenwiderstands auch hier einen nützlichen Beitrag geliefert, insofern, als rechnerisch die obenerwähnte Tatsache bestätigt wurde, daß gelegentlich kleinen Formänderungen größere Differenzen im Wellenwiderstand entsprechen können. Die Notwendigkeit einer exakten Methode der Darstellung von Schiffsformen, auf die schon D. W. Taylor nachdrücklich hingewiesen hat, ist damit deutlich exemplifiziert.

Im Licht unserer jetzigen Erkenntnis erscheint es ziemlich aussichtslos, rein experimentell durch Schleppen geometrisch variierter Modellserien die Änderung des Wellenwiderstands in Abhängigkeit von der Form zu finden. Die Theorie hat gezeigt, daß die funktionellen Zusammenhänge hierfür zu kompliziert sind, besonders wenn man die Froudesche Methode in ihrer heutigen Form der Auswertung zugrunde legt.

Der gegebene Weg ist daher, zunächst rechnerisch die Verhältnisse zu untersuchen und daraufhin die Ergebnisse experimentell zu verifizieren. Auch dieses Vorgehen ist wegen des angenäherten Charakters der Theorie mit Schwierigkeiten verknüpft.

Wir verweisen auf den Vortrag des erstgenannten Verfassers im Jb. d. STG 1953 und auf einige frühere Veröffentlichungen [8, 9, 10]; im folgenden können wir uns auf eine kurze Darstellung beschränken.

Einen wichtigen Beitrag zu unserem Thema findet man in der Neuausgabe der Standardserienversuche D. W. Taylors durch M. Gertler [11]. Hier wird nachgewiesen, daß Taylor seinen klassischen Untersuchungen Spantflächenkurven zugrunde gelegt hat, die nach einem von ihm später publizierten Verfahren [12] durch Polynome ausgedrückt sind. Es ist ein beruhigendes Gefühl zu wissen, daß diese hinsichtlich ihrer Systematik und Güte vorbildlichen „Standard"-Experimente auf einer Methode der Darstellung der Oberfläche beruhen, die noch Jahrzehnte nach der Veröffentlichung des bekannten Buches als utopisch angesehen wurde.

D. W. Taylor hat schon Ende des vorigen Jahrhunderts versucht, auf analytischem Wege die Strömungsverhältnisse um schiffsähnliche Körper zu studieren. Er hat die Quellsenkenmethode (für das ebene und drehsymmetrische Problem) auf kontinuierliche Verteilung erweitert und wohl als erster graphisch-numerische Lösungen für die Erzeugung hierauf basierender Zylinder- und Spindelformen gegeben [13]. Spätere Arbeiten haben manche Verbesserungen beigesteuert; grundsätzlich ist man jedoch bis vor kurzem hierbei stehen geblieben. Für den dreidimensionalen Fall lagen nur die schon lange bekannten Resultate für die Umströmung des allgemeinen Ellipsoids vor [15].

Rein vom Standpunkt der Darstellung (zunächst ohne Berücksichtigung des hydrodynamischen Problems der Umströmung) ist es zweckmäßig, eine vereinfachte Schiffsform, das sog. Elementarschiff nach der Gleichung

$$\pm\, y(x,z) = \pm\, b\,\eta(\xi,\zeta) = \pm\, b\,X(\xi)\,Z(\zeta) \qquad (1)$$

einzuführen, wobei wir, wie üblich

$$\eta = y/b \quad \xi = x/l \quad \zeta = z/T \quad b = \frac{B}{2} \quad l = \frac{L}{2}$$

setzen (Bild 1).

Die Gleichung der CWL $y(x,z)/_{z=0} = y(x,0)$ ist unter Weglassen des doppelten Vorzeichens $y(x,0) = b\,X(\xi)$; $Z(\zeta)$ das Verhältnis der Hauptspantordinaten zu der Hauptspantordinate in der CWL.

Aus der Gleichung (1) ergibt sich die Spantflächenkurve als Kriterium der Deplacementsverteilung über die Schiffslänge

$$A(x) = 2\int_0^T y(x,z)\,dz = 2\beta\, b\, T\, X(\xi) = A(0)\, X(\xi) \qquad (2)$$

wenn wir dir Fläche des Hauptspants

$$A_{\boxtimes} = A(x)/_{x=0} - A(0)$$

setzen. Hieraus gewinnen wir eine übliche dimensionslose Darstellung

$$A^*(\xi) = \frac{A(x)}{A(0)} = X(\xi) \qquad (2a)$$

d. h. die Ordinaten der Spantflächenkurve $A(x)$ sind denen der CWL proportional, die dimensionslosen Ausdrücke $A^*(\xi)$ und $X(\xi)$ sind identisch (2a); $\varphi = \alpha$.

Die Kurve der Wasserlinienflächen, welche die Verteilung der Verdrängung über den Tiefgang charakterisiert, errechnet sich zu

$$W(z) = 2\int_{-l}^{+l} y(x,z)\,dx = 2\,b\,l\int_{-1}^{+1}\eta(\xi\,\zeta)\,d\xi$$

$$= 4\,b\,l\,\alpha\, Z(\zeta) = W(0)\, Z(\zeta) \qquad (3)$$

mit $W(0)$ der CWL-Fläche

$$W^*_z = \frac{W(z)}{W(0)} = \frac{\alpha(z)}{\alpha} = Z(\zeta).$$

Bei dieser vereinfachten Schiffsform ergibt sich die Beschreibung der Verdrängungsverteilung über Länge und Tiefgang direkt durch die CWL und das Hauptspant. Ihre Bedeutung liegt darin, daß man im Rahmen einer ersten Annäherung auch die Abhängigkeit des Wellenwiderstands von diesen beiden Verteilungen verhältnismäßig einfach getrennt studieren kann.

Bei dem gegenwärtigen Stand der Theorie ist die wichtigste Aufgabe, die wir mit ihrer Hilfe behandeln können, das Auffinden günstiger Spantflächenkurven. Glücklicherweise ist das auch das wichtigste von der Praxis gestellte Problem. Den Einfluß der Tiefenverteilung des Deplacements auf den Wellenwiderstand kann man qualitativ (wenn auch nicht quantitativ) leicht abschätzen.

Diese Schlußfolgerungen gelten für dünne Schiffe, die durch ein großes L : B und großes T : B gekennzeichnet sind und bei denen die Hauptströmung ungefähr nach Wasserlinien erfolgt.

In [8] sind einige generelle Erörterungen über Systeme von geeigneten geometrischen Formparametern enthalten. Für die Kennzeichnung der Längsverteilung des Deplacements wählen wir zunächst in Anlehnung an Taylor die Beiwerte φ und t.

Sie sind durch die Gliederungen definiert:

$$\varphi = \frac{\varphi_v + \varphi_h}{2}$$

$$\varphi_v = \int_0^1 A^*(\xi)\,d\xi \qquad (4)$$

$$\varphi_h = \int_{-1}^0 A^*(\xi)\,d\xi$$

$$t_v = -\left.\frac{d\,A^*(\xi)}{d\xi}\right|_{\xi=1} \qquad (4a)$$

$$t_h = -\left.\frac{d\,A^*(\xi)}{d\xi}\right|_{\xi=1}.$$

Auf die Bedeutung der getrennten Berücksichtigung der wichtigsten Parameter für das Vor- und Hinterschiff hat der erstgenannte Verfasser häufig hingewiesen (vgl. Jb. d. STG 1953).

Beim Elementarschiff fallen die Völligkeitsgrade φ und α, bzw. die Tangentenwerte für die Spantflächenkurve und die CWL zusammen.

Natürlich ist es völlig unzureichend, mit zwei Parametern zu operieren. Unsere Untersuchung basiert auf Polynomen mit d r e i w i l l k ü r l i c h e n Parametern, von denen wir zudem eine ganze Reihe betrachten werden; sie gestatten daher, eine weitere Formgröße einzuführen und ihre Eignung für die Beschreibung von Schiffslinien und deren Widerstandseigenschaften zu prüfen.

Als solcher präsentiert sich der ebenfalls schon von D. W. Taylor vorgeschlagene Wert der zweiten Ableitung (Krümmung) im Hauptspant $\varkappa = \left.\frac{d^2 A^*(\xi)}{d\xi^2}\right|_{\xi=0}$; da jedoch $\varkappa = 0$ wird für Polynomfamilien, bei denen der niedrigste Exponent $n_1 \geqq 3$, muß man nach weiteren „Koeffizienten" Umschau halten. Das dimensionslos gemachte statische Moment der halben Spantflächenkurve (Wasserlinie)

$$\sigma_\eta = \int_0^1 \eta\xi\,d\xi \qquad (5)$$

oder der dimensionslose Schwerpunktabstand

$$\xi_{\odot} = \frac{\sigma_\eta}{\varphi_v} = \frac{x_{\odot}}{l} = \frac{2\,x_{\odot}}{L}$$

gewinnt neuerdings an Beliebtheit; z. B. ist letzterer als kennzeichnender Parameter für die Beschreibung des „Eintritts" (entrance) und „Austritts" (run) der Serie 60 des TMB verwandt worden [16]. Zweckmäßigerweise hat man hier in Anlehnung an Taylor die Länge des parallelen Mittelschiffs als weitere unabhängige Formgröße beibehalten.

Die grundlegende Bedeutung der Spantflächenkurve, als Hilfsmittel bei der Widerstandsanalyse, ist durch zahlreiche experimentelle und theoretische Untersuchungen erhärtet, neuerdings besonders durch Guilloton [4]. Es ist deswegen zulässig und sinnvoll, die soeben e r w ä h n t e n E l e m e n t a r s c h i f f e einer systematischen Auswertung des Michell'schen Integrals zugrunde zu legen.

Als weitere Vereinfachung nehmen wir Symmetrie zum Hauptspant, d. h. identisches Vor- und Hinterschiff an. Später wird die Tabellierung auf die unsymmetrische Form ausgedehnt werden. Wir setzen daher für die Gleichung der Spantflächenkurve (oder was für das Elementarschiff dasselbe ist, für die CWL) die Funktion $X(\xi)$ in der Form

$$X(\xi) = X_s(\xi) = 1 - \Sigma a_n \xi^n \tag{6}$$

wobei n die geraden Zahlen 2, 4, 6, 8, 10, 12 bedeuten; außerdem führen wir, wie früher, den Kubus des absoluten Werts $|\xi|^3$ ein, um den großen Sprung zwischen ξ^2 und ξ^4 zu überbrücken.

Für den vorliegenden Zweck darf die Gleichung des Hauptspants sehr einfach gewählt werden. Ein Ausdruck

$$Z(\zeta) = 1 - e^+ \zeta^4 \quad \text{mit } 1 \geqq e^+ \geqq 0 \tag{7}$$

gestattet schon den üblichen Bereich von Völligkeitsgraden des Hauptspants β zu erfassen. Auch negative Werte von e^+ lassen sich verwenden, wenn man Untersuchungen über den Einfluß der Tiefenverteilung des Deplacements auf den Wellenwiderstand anstellen will.

II. Eine praktische Methode für die Auswirkung des Michell'schen Integrals

Schreiben wir für das symmetrische Elementarschiff $\eta = X_s(\xi)\, Z(\zeta)$ das Michell'sche Widerstandsintegral in der Form

$$R = \frac{8}{\pi} \varrho g \frac{B^2 T^2}{L} R^+$$

$$R^+ = \frac{R}{\frac{8}{\pi} \varrho g \frac{B^2 T^2}{L}} = \int_{\gamma_0}^{\infty} \frac{(\gamma/\gamma_0)^2}{\sqrt{(\gamma/\gamma_0)^2 - 1}} J^{+2}(\gamma)\, d\gamma =$$

$$= \int_{\gamma_0}^{\infty} f(\gamma)\, J^{+2}(\gamma)\, d\gamma \tag{8}$$

wobei

$$J^+(\gamma) = \int_0^1 e^{-\vartheta\zeta} Z(\zeta)\, d\zeta \int_0^1 \frac{\partial X(\xi)}{\partial \xi} \sin \gamma\xi\, d\xi = \Phi(\vartheta)\, S(\gamma) \tag{8a}$$

$$\text{mit } \gamma_0 = \frac{1}{2 F^2} \qquad \vartheta = 2 \frac{T}{L} \frac{\gamma^2}{\gamma_0} = K \frac{\gamma^2}{\gamma_0}$$

$$f(\gamma) = \frac{(\gamma/\gamma_0)^2}{\sqrt{(\gamma/\gamma_0)^2 - 1^1}}$$

Setzen wir ferner (6) (7) $Z(\zeta) = 1 - e^+ \zeta^4$

$$X(\xi) = 1 - \Sigma a_n \xi^n$$

so wird $\Phi(\vartheta) = \int_0^1 e^{-\vartheta\zeta} (1 - \zeta^4)\, d\zeta = E_0(\vartheta) - E_4(\vartheta)$;

$$E_0 = E_0(\vartheta) = \int_0^1 e^{-\vartheta\zeta} d\zeta \qquad E_4 = E_4(\vartheta) = \int_0^1 e^{-\vartheta\zeta} \zeta^4\, d\zeta \tag{8b}$$

sind leicht zu bestimmende Quadraturen.

$$\text{Ferner wird mit } \frac{\partial X(\xi)}{\partial \xi} = - \Sigma n a_n \xi^{n-1}$$

$$S(\gamma) = - \int_0^1 n a_n \xi^{n-1} \sin \gamma\xi\, d\xi = - \Sigma n a_n M_{n-1}(\gamma)$$

Die Zwischenfunktionen

$$M_{n-1} = M_{n-1}(\gamma) = \int_0^1 \xi^{n-1} \sin\gamma\xi\, d\xi$$

spielen eine Rolle in verschiedenen schiffbautechnischen Untersuchungen und sind tabuliert.

Damit ist $R^+ = R^+(\gamma_0) =$

$$\int_{\gamma_0}^{\infty} (E_0 - e^+ E_4)^2 \{\Sigma n a_n M_{n-1}\}^2 f(\gamma)\, d\gamma \tag{9}$$

Wir gehen gleich zu einem Beispiel über:

Setzt man z. B. $X(\xi) = 1 - \Sigma a_n \xi^n \quad (n = 2, 4, 6)$ (10)

$$\text{und damit } \frac{\partial X}{\partial \xi} = -2 a_2 \xi - 4 a_4 \xi^3 - 6 a_6 \xi^5 \tag{10a}$$

so ergibt sich

$$R^+(\gamma_0) = \int_{\gamma_0}^{\infty} [E_0^2 - 2 e^+ E_0 E_4 + e^{+2} E_4^2] \;\{4 a_2^2 M_1^2 + 16 a_4^2 M_3^2 + 36 a_6 M_5^2 + 16 a_3 a_4 M_1 M_3 + 24 a_2 a_6 M_1 M_5 + 48 a_4 a_6 M_3 M_5\} \; f(\gamma)\, d\gamma \tag{11}$$

Die Berechnung ist damit auf Quadraturen des Typs

$$\begin{aligned} &\int_{\gamma_0}^{\infty} E_0^2 f(\gamma) M_i M_j\, d\gamma = \mathfrak{M}_{ij}\,[00\,;K\,;\gamma_0] \\ &\int_{\gamma_0}^{\infty} E_0 E_4 f(\gamma) M_i M_j\, d\gamma = \mathfrak{M}_{ij}\,[04\,;K\,;\gamma_0] \\ &\int_{\gamma_0}^{\infty} E_4^2 f(\gamma) M_i M_j\, d\gamma = \mathfrak{M}_{ij}\,[44\,;K\,;\gamma_0] \end{aligned} \tag{12}$$

reduziert. In den Symbolen $\mathfrak{M}$ bedeuten:

1. die Indices ij die Indices der Produkte der Zwischenfunktionen z. B. $M_1^2 = M_1 M_1$, $M_1 M_3$ usw.

2. in den eckigen Klammern die beiden ersten Zahlen die Indices der Produkte $E_0^2 = E_0 E_0$, $E_0 E_4$; $E_4^2 = E_4 E_4$

3. $K = \dfrac{2\,T}{L}$ und

4. $\gamma_0 = \dfrac{1}{2 F^2}$.

Gehen wir in der Vereinfachung noch einen Schritt weiter, indem wir $Z(\zeta) = 1$ d. h. $e^+ = 0$ setzen (rechteckiges Hauptspant oder richtiger rechteckförmige Dipolverteilung), stellt sich $R^+(\gamma)$ in der Kurzschrift dar

$$R^+(\gamma) = 4 a_2^2 \mathfrak{M}_{11} + 16 a_4^2 \mathfrak{M}_{33} + 36 a_6^2 \mathfrak{M}_{55} + 16 a_2 a_4 \mathfrak{M}_3 + 24 a_2 a_6 \mathfrak{M}_{15} + 48 a_4 a_6 \mathfrak{M}_{35} \tag{13}$$

hier steht $\mathfrak{M}_{ij}$ für $\mathfrak{M}_{ij}\,[00, K, \gamma_0]$.

Der Vergleich mit der geschweiften Klammer in (11) ergibt das einfache Rezept:

1. Man quadriert den Ausdruck für $\dfrac{\partial X}{\partial \xi}$ Gl. (10a) und schreibe ihn in der Form

$$\left[\frac{\partial X}{\partial \xi}\right]^2 = 4 a_2^2 \xi^1 \xi^1 + 16 a_4^2 \xi^3 \xi^3 + 36 a_6^2 \xi^5 \xi^5 + 16 a_2 a_4 \xi^1 \xi^3 + 24 a_2 a_6 \xi^1 \xi^5 + 48 a_4 a_6 \xi^3 \xi^5 \tag{14}$$

2. Man setzt die Exponenten der Potenzen $\xi^i \xi^j$ z. B. $\xi^1 \xi^3$ als Indices der $\mathfrak{M}$ Funktionen ein und schreibt die Koeffizienten vor die entsprechenden Funktionen; das Resultat ergibt unmittelbar den Ausdruck für R^+.

3. Gilt für das Hauptspant die allgemeinere Gleichung $Z(\zeta) = 1 - e^+ \zeta^4$, so ergibt sich für R^+ unter Beachtung von (11), oder nach dem Schema

$$Z^2(\zeta) = \zeta^0 \zeta^0 - 2 e^+ \zeta^0 \zeta^4 + e^{+2} \zeta^4 \zeta^4$$

a) eine Summe nach Gl. (13) mit den $\mathfrak{M}_{ij}\,[0, 0\,; K\,; \gamma_0]$ in den Summanden des Typs $(i + 1)\,(j + 1)\; a_{i+1} a_{j+1} \mathfrak{M}^{ij}\,[0, 0\,; K\,; \gamma_0]$,

b) eine zweite Summe mit dem Faktor $-2 e^+$ und den Summanden wie (13), jedoch mit den Parametern 0,4 in der eckigen Klammer der $\mathfrak{M}$-Funktionen, also Gliedern der Form $\mathfrak{M}_{ij}\,[0{,}4\,; K\,; \gamma_0]$,

c) und einer dritten Summe mit dem Faktor e^{+2} und den Summanden des Typs $\mathfrak{M}_{ij}\,[44\,; K\,; \gamma_0]$.

Nochmals wiederholt: das Symbol, z. B. $\mathfrak{M}_{ij}$ [00 ; K ; γ_0] weist darauf hin, daß das Integral abhängt von:

1. den Exponenten ij der Produkte $\xi^i \xi^j$ bzw. den Indices der Hilfsfunktionen $M_i\, M_j$,

2. den Indices der Funktionen E, z. B. $E_0\, E_4$ usw.,

3. dem Verhältnis $K = 2\,T/L$,

4. der Froudeschen Zahl F in der Form $\gamma_0 = \dfrac{1}{2\,F^2}$

Offenbar ist das Schema, das an diesem einfachen Beispiel exemplifiziert ist, ganz allgemein verwendbar, solange die entsprechenden Funktionen in Tabellenform vorliegen.

Zu den Tafeln selbst ist folgendes zu sagen:

1. Wir haben sieben Exponenten 2 3 4 6 8 10 12 der Polynome zugelassen und entsprechend sieben Werte der i, j. Um Arbeit zu sparen, haben wir nicht alle $7 + \binom{7}{2} = 28$ möglichen Produkte $M_i\, M_j$ für die Rechnung verwandt, sondern 4, die von geringerer Bedeutung wie z. B. $M_1\, M_{11}$ sind, ausgelassen.

2. Als wichtigste Hauptspantform sehen wir die durch $Z(\zeta) = 1$ gegebene an.

3. Es werden die Tiefgangsverhältnisse

$$T/L = 0{,}03 \quad 0{,}05 \quad 0{,}10 \quad \text{und entsprechend}$$
$$K = 2\,T/L = 0{,}06 \quad 0{,}10 \quad 0{,}20 \quad \text{gewählt.}$$

4. Die Geschwindigkeitsintervalle werden durch den Tabellenschritt $\Delta\gamma_0 = 0{,}5$ bestimmt. Dies führt zu einer groben Unterteilung für hohe Froudesche Zahlen, die jedoch noch zulässig erscheint. Der gesamte Bereich der untersuchten Froudezahlen liegt zwischen

$$F = 1\ (\gamma_0 = 0{,}5) \ \text{und}\ F = \frac{1}{\sqrt{30}} \approx 0{,}183\ (\gamma_0 = 15).$$

Bei der Tabulierung der Funktionen haben wir uns auf Froudesche Zahlen über ca. 0,18 ($\gamma_0 = 15$) beschränkt, um Rechenarbeit zu ersparen. Wir stützten uns zusätzlich auf die Überlegung, daß unterhalb dieser Grenze Zähigkeitseffekte die Ergebnisse der Rechnung besonders unsicher machen. Andererseits ist es wichtig, wenigstens die Größenordnung des Wellenwiderstands auch in diesem Bereich abschätzen zu können. Eine kürzlich veröffentlichte Entwicklung von Inui leistet diesen Dienst ohne weitgehende Tabulierung [17]. In ihr ist gezeigt, daß für Elementarschiffe des Typs $\eta = \chi(\xi)\, b$ das Michell'sche Integral im Gebiet kleiner Froudezahlen mit guter Genauigkeit einfach berechnet werden kann, indem der Widerstand in einen etwa mit der sechsten Potenz der Froudezahl ansteigenden Mittelwert und eine oszillierende Komponente aufgespalten wird.

5. Bei hohen Froudezahlen (kleinen γ_0-Werten) spielen Formen, die durch Polynome hoher Ordnung dargestellt werden, im allgemeinen keine wesentliche Rolle. Die Tabulierung der $\mathfrak{M}$-Funktionen, die die Indices 9 oder 11 enthalten, beginnt deshalb erst bei $\gamma_0 = 5$.

6. Bei der Behandlung der allgemeineren Hauptspantgleichung $Z(\zeta) = 1 - e^{+}\zeta^4$ sind noch folgende Reduktionen in der Berechnung zugelassen worden:

a) Als Grundverhältnis gilt $K = 0{,}1$; nur hierfür behielten wir den Tabellenschritt $\Delta\gamma_0 = 0{,}5$ bei. Für $K = 0{,}2$ und $K = 0{,}06$ wurde $\Delta\gamma_0$ verdoppelt, $\Delta\gamma_0 = 1$.

b) Anstatt von 24 Produkten $M_i\, M_j$ wurden nur sechs Produkte entsprechend der Familie $< 2\ 4\ 6 >$ der Berechnung zugrunde gelegt.

Bei dieser Vereinfachung gingen wir von der Überlegung aus, daß man durch Interpolation und Analogieschlüsse sich helfen kann in solchen Fällen, wo die Unterlagen nicht ausreichen.

Die Tabellen sind im Bureau of Standards in Washington D.C. auf einem JBM Rechenautomaten 604 ermittelt worden. Die Arbeit stellt eine der ersten Anwendungen dieser mächtigen Hilfsmittel auf schiffstheoretische Probleme vor. Es mußten deswegen Erfahrungen gesammelt werden, deren Fehlen sich u. a. in der Planung negativ äußerte. Da die Programmierung, wie sich später herausstellte, den größten Teil der Arbeit ausmachte und die tatsächliche Rechnung nur wenig Zeit erforderte, hätte man die Tabellen ohne wesentlichen Mehraufwand vollständiger gestalten können.

Die Genauigkeit der $\mathfrak{M}$-Tabellen wird für die meisten Zwecke ausreichen. Nur wenn man es mit sehr völligen Schiffsformen zu tun hat, deren analytische Darstellung Polynome mit hohen Potenzen und mit gelegentlich großen Koeffizienten erfordert, kann sie verloren gehen. Über die Grenzen der Rechengenauigkeit bei Ermittelung von Optimalformen wird in einer späteren Arbeit berichtet werden. Formen mit einem Bugwulst sind nicht in den Kreis der Betrachtungen einbezogen. Außerdem fehlen vorläufig noch Unterlagen für die Berücksichtigung der antimetrischen Glieder. In den genannten Ausnahmefällen kann es wünschenswert sein, auf das früher vom Verfasser entwickelte numerische Verfahren zurückzugreifen, das auf den Hilfsfunktionen

$$M_n = \int_0^1 \xi^n \sin\gamma\xi\, d\xi\,; \quad M'_m = \int_0^1 \xi^m \cos\gamma\xi\, d\xi$$

aufbaut. Da letztere auch bei Untersuchungen über das Verhalten von Schiffen im Seegang eine Rolle spielen, sind Tabellenwerte der Hilfsfunktionen $M_n(\gamma)\; M'_m(\gamma)$ im Anhang aufgeführt.

Wir fassen zusammen: im Bereich des Umfangs der Tabellen ist die Berechnung des Wellenwiderstands nach Michell auf elementare Operationen zurückgeführt.

Als Abschluß dieses Abschnitts bringen wir zur Veranschaulichung Widerstandskurven einiger aufs äußerste vereinfachter Formen, die das gesamte Gebiet von üblichen Schärfegraden überdecken. Dieses Diagramm läßt sich fast unmittelbar den Tabellen entnehmen.

Schrifttum

[1] Lunde, T SNAME 1951.

[2] T. Inui, VII. Internat. Kongreß der Versuchsanstalten, Oslo 1954.

[3] G. Birkhoff, J. Kotik, B. Korvin-Kroukovsky, T SNAME 1954.

[4] R. Guilloton, BATMA 1954.

[4a] B. Korvin-Kroukovsky, Experimental Towing Tank, Rep. 541.

[5] C. Wigley, BATMA 1949.

[6] G. Weinblum, TMB Report 886.

[7] G. Weinblum, Schiffe geringsten Widerstandes, III. Int. Kongreß für Mechanik, Stockholm 1930.

[8] G. Weinblum, J. STG 1953.

[9] G. Weinblum, Rechnerische Entwicklung von Schiffsformen, Schiffbau 1938.

[10] G. Weinblum, Schiffsform und Widerstand, Schiffbau 1938/39.

[11] M. Gertler, TMB Report 806.

[12] D. W. Taylor, TINA 1895.

[13] D. W. Taylor, Trans. Int. Engineering Congress, San Francisco 1915.

[14] Reinov, Poklosky, Akademie UdSSR 1951, LXXVII, 2.

[15] Maruhn, Jahrbuch der Luftfahrtforschung 1941.

[16] H. Todd, T SNAME 1953.

[17] T. Inui, Schlußwort zu [2].

r_0	$\mathfrak{M}_{11}$	$\mathfrak{M}_{12}$	$\mathfrak{M}_{13}$	$\mathfrak{M}_{15}$	$\mathfrak{M}_{17}$	$\mathfrak{M}_{19}$
.5	1.00789	.69936	.52663	.34442	.25200	
1.0	.78640	.60509	.41755	.27344	.19940	
1.5	.66884	.47282	.35914	.23553	.17139	
2.0	.54919	.38711	.29284	.19018	.13695	
2.5	.40351	.28208	.21139	.13449	.094829	
3.0	.25594	.17988	.13454	.084282	.058036	
3.5	.14461	.11000	.086180	.056607	.039723	
4.0	.090826	.085389	.074778	.055622	.042116	
4.5	.085892	.094170	.087895	.069770	.054984	
5.0	.10039	.10982	.10221	.080839	.063613	.051123
5.5	.10561	.11006	.10008	.076968	.059403	.046996
6.0	.090596	.090039	.079977	.059636	.044898	.034713
6.5	.063950	.061389	.054137	.040220	.030105	.023044
7.0	.042112	.040290	.037107	.029975	.023864	.019128
7.5	.035039	.034729	.034697	.031706	.027347	.023239
8.0	.040011	.040326	.041374	.039061	.034311	.029534
8.5	.046340	.046101	.046505	.042827	.036989	.031437
9.0	.045181	.044022	.043285	.038401	.032297	.026863
9.5	.035945	.034442	.033129	.028539	.023524	.019227
10.0	.025032	.024042	.022980	.019989	.016794	.013974
10.5	.019313	.019241	.018798	.017536	.015808	.013963
11.0	.020463	.021033	.020972	.020522	.019247	.017524
11.5	.024491	.025086	.024926	.024207	.022542	.020397
12.0	.025941	.026117	.025596	.024176	.021988	.019513
12.5	.022578	.022331	.021587	.019827	.017610	.015317
13.0	.016675	.016316	.015704	.014278	.012616	.010950
13.5	.012392	.012218	.011982	.011266	.010343	.0093359
14.0	.012013	.012071	.012169	.011990	.011506	.010804
14.5	.014307	.014423	.014604	.014476	.013955	.013146
15.0	.016070	.016048	.016077	.015637	.014817	.013746

$\mathfrak{M}_{ij}$ [00; 0.06, r_0]

r_0	$\mathfrak{M}_{22}$	$\mathfrak{M}_{23}$	$\mathfrak{M}_{25}$	$\mathfrak{M}_{27}$	$\mathfrak{M}_{33}$	$\mathfrak{M}_{35}$
.5	.50285	.38783	.26128	.19451	.30400	.20900
1.0	.40889	.32060	.21912	.16375	.25725	.18089
1.5	.35617	.28172	.19395	.14513	.22879	.16272
2.0	.29431	.23371	.16102	.12009	.19155	.13728
2.5	.21861	.17510	.12110	.089995	.14631	.10666
3.0	.14855	.12290	.087488	.065612	.10775	.082175
3.5	.10633	.094721	.072409	.056215	.089641	.073237
4.0	.098592	.094060	.076601	.061467	.093144	.079087
4.5	.11187	.10772	.088511	.071431	.10568	.089023
5.0	.12306	.11583	.093039	.074128	.11039	.090473
5.5	.11576	.10596	.082452	.064320	.098236	.078238
6.0	.090022	.080584	.061064	.046679	.073492	.057703
6.5	.059416	.053164	.040707	.031327	.049155	.039950
7.0	.039139	.036971	.031238	.025772	.036551	.033098
7.5	.034991	.035703	.033670	.029693	.037507	.036733
8.0	.041026	.042491	.040729	.036201	.044499	.043293
8.5	.046124	.046747	.043468	.037882	.047604	.044618
9.0	.043123	.042568	.038153	.032437	.042165	.038081
9.5	.033262	.032177	.028169	.023635	.031272	.027705
10.0	.023409	.022603	.020201	.017452	.022003	.020062
10.5	.019484	.019264	.018462	.017041	.019226	.018792
11.0	.021821	.021909	.021735	.020615	.022124	.022188
11.5	.025800	.025721	.025143	.023545	.025731	.025307
12.0	.026355	.025890	.024566	.022443	.025508	.024334
12.5	.022137	.021459	.019819	.017708	.020884	.019431
13.0	.016023	.015495	.014221	.012695	.015084	.014020
13.5	.012115	.011965	.011400	.010604	.011925	.011547
14.0	.012190	.012356	.012292	.011900	.012603	.012670
14.5	.014581	.014806	.014753	.014290	.015078	.015101
15.0	.016057	.016115	.015731	.014959	.016199	.015866

$\mathfrak{M}_{ij}$ [00; 0.06; r_0]

r_0	$\mathfrak{M}_{37}$	$\mathfrak{M}_{39}$	$\mathfrak{M}_{55}$	$\mathfrak{M}_{57}$	$\mathfrak{M}_{59}$	$\mathfrak{M}_{5,11}$
.5	.15747		.14746	.11285		
1.0	.13746		.13183	.10238		
1.5	.12413		.12064	.094413		
2.0	.10485		.10347	.081556		
2.5	.081876		.083019	.066367		
3.0	.064306		.067874	.055733		
3.5	.059188		.064320	.054271		
4.0	.065140		.070556	.059970		
4.5	.073086		.077732	.065440		
5.0	.073176	.060151	.076716	.063654	.053356	.045413
5.5	.062162	.050393	.065019	.053396	.044417	.037557
6.0	.045401	.036455	.048357	.040014	.033424	.028305
6.5	.032212	.023518	.035856	.031020	.026673	.023038
7.0	.028604	.024457	.032978	.030231	.026948	.023861
7.5	.033148	.029151	.037776	.035142	.031596	.028145
8.0	.038873	.034066	.043094	.039365	.034979	.030900
8.5	.039149	.033747	.042503	.037858	.033069	.028837
9.0	.032628	.027621	.035060	.030645	.026423	.022802
9.5	.023546	.019822	.025335	.022252	.019304	.016738
10.0	.017682	.015369	.019200	.017702	.015980	.014300
10.5	.017642	.016112	.019127	.018554	.017381	.015988
11.0	.021235	.019657	.022707	.022088	.020716	.019067
11.5	.023833	.021784	.025172	.023945	.022084	.020064
12.0	.022353	.020032	.023446	.021753	.019685	.017615
12.5	.017500	.015442	.018333	.016757	.015009	.013325
13.0	.012684	.011279	.013342	.012367	.011260	.010155
13.5	.010908	.010112	.011500	.011151	.010578	.0098828
14.0	.012379	.011806	.012965	.012862	.012427	.011778
14.5	.014694	.013958	.015265	.014976	.014332	.013474
15.0	.015134	.014132	.015643	.015019	.014112	.013066

$\mathfrak{M}_{ij}$ [00; 0.06; r_0]

r_0	$\mathfrak{M}_{77}$	$\mathfrak{M}_{79}$	$\mathfrak{M}_{7,11}$	$\mathfrak{M}_{99}$	$\mathfrak{M}_{9,11}$	$\mathfrak{M}_{11,11}$
.5	.087220					
1.0	.080606					
1.5	.075104					
2.0	.065585					
2.5	.054419					
3.0	.047100					
3.5	.046985					
4.0	.052019					
4.5	.056088					
5.0	.053847	.045809	.039446	.039419	.034251	.029976
5.5	.044981	.038159	.032772	.032866	.028565	.025062
6.0	.034366	.029524	.025561	.025896	.022783	.020291
6.5	.028097	.024959	.022100	.022675	.020416	.018612
7.0	.028691	.026193	.023614	.024305	.022182	.020432
7.5	.033343	.030420	.027414	.028059	.025506	.023347
8.0	.036461	.032771	.029227	.029733	.026727	.024184
8.5	.034208	.030260	.026676	.027064	.024085	.021607
9.0	.027336	.024002	.021044	.021415	.019035	.017117
9.5	.020188	.018010	.015995	.016446	.014890	.013690
10.0	.016966	.015790	.014480	.015039	.014041	.013288
10.5	.018458	.017622	.016453	.017062	.016106	.015335
11.0	.021767	.020630	.019155	.019721	.018443	.017352
11.5	.022984	.021372	.019560	.020022	.018448	.017099
12.0	.020384	.018627	.016820	.017181	.015651	.014372
12.5	.015553	.014144	.012739	.013053	.011916	.011013
13.0	.011741	.010932	.010061	.010387	.0097300	.0092508
13.5	.011063	.010703	.010165	.010523	.010129	.0098545
14.0	.012924	.012623	.012074	.012440	.011988	.011626
14.5	.014801	.014258	.013484	.013815	.013135	.012548
15.0	.014510	.013718	.012774	.013045	.012216	.011501

$\mathfrak{M}_{ij}\,[00;\ 0.1;\ r_0]$

r_0	$\mathfrak{M}_{1,1}$	$\mathfrak{M}_{1,2}$	$\mathfrak{M}_{1,3}$	$\mathfrak{M}_{1,5}$	$\mathfrak{M}_{1,7}$	
.5	.72185	.50356	.38139	.25218	.18625	
1.0	.62857	.43752	.33010	.21634	.15844	
1.5	.55564	.38694	.29145	.18990	.13817	
2.0	.45972	.31742	.23695	.15172	.10867	
2.5	.33334	.22634	.16609	.10285	.071422	
3.0	.20404	.13723	.099160	.059000	.039153	
3.5	.10757	.077280	.057909	.035503	.023596	
4.0	.062129	.057205	.049131	.035411	.026191	
4.5	.058841	.065673	.061190	.048091	.037590	
5.0	.071696	.079532	.073851	.057841	.045153	.036096
5.5	.076521	.080269	.072580	.054997	.041925	.032864
6.0	.064732	.064412	.056622	.041199	.030343	.023031
6.5	.043757	.041831	.036258	.025896	.018673	.013813
7.0	.026809	.025454	.023059	.017980	.013861	.010797
7.5	.021464	.021271	.021302	.019396	.016605	.014006
8.0	.025317	.025596	.026446	.025043	.021939	.016818
8.5	.030111	.029976	.030346	.027915	.023984	.020272
9.0	.029319	.028507	.028037	.024710	.020573	.016937
9.5	.022678	.021615	.020727	.017605	.014247	.011425
10.0	.014924	.014225	.013513	.011526	.0094591	.0076854
10.5	.010917	.010862	.010584	.0098087	.0087681	.0076766
11.0	.011716	.012107	.012092	.011878	.011149	.010139
11.5	.014468	.014876	.014794	.014396	.013399	.012100
12.0	.015449	.015575	.015250	.014379	.013029	.011506
12.5	.013222	.013067	.012594	.011496	.010126	.0087217
13.0	.0093580	.0091305	.0087424	.0078624	.0068538	.0058591
13.5	.0065870	.0064783	.0063330	.0059104	.0053786	.0048085
14.0	.0063373	.0063768	.0064445	.0063640	.0061120	.0057362
14.5	.0077738	.0078498	.0079698	.0079219	.0076465	.0072035
15.0	.0088641	.0088545	.0088805	.0086391	.0081777	.0075720

$\mathfrak{M}_{ij}\,[00;\ 0.1;\ r_0]$

r_0	$\mathfrak{M}_{2,2}$	$\mathfrak{M}_{2,3}$	$\mathfrak{M}_{2,5}$	$\mathfrak{M}_{2,7}$	$\mathfrak{M}_{3,3}$	$\mathfrak{M}_{3,5}$
.5	.35905	.27601	.18591	.13879	.21436	.14627
1.0	.31622	.24465	.16536	.12328	.19249	.13287
1.5	.28277	.21987	.14893	.11082	.17460	.12140
2.0	.23324	.18145	.12231	.090351	.14506	.10119
2.5	.16851	.13157	.088307	.064588	.10693	.075500
3.0	.10838	.087118	.059811	.043898	.074525	.055152
3.5	.073064	.064002	.047775	.036523	.060192	.048516
4.0	.067810	.064766	.052394	.041793	.064490	.054558
4.5	.080227	.077421	.063289	.050826	.076124	.063754
5.0	.090404	.084944	.067620	.053473	.080750	.065492
5.5	.084939	.077309	.059270	.045661	.071202	.055778
6.0	.064455	.057087	.042197	.031553	.051475	.039395
6.5	.040310	.035464	.026149	.019444	.032299	.025426
7.0	.024572	.022919	.018845	.015177	.022566	.020179
7.5	.021476	.022042	.020806	.018265	.023407	.023074
8.0	.026133	.027272	.026232	.023258	.028793	.028127
8.5	.030009	.030520	.028340	.024563	.031184	.029182
9.0	.027861	.027506	.024483	.020600	.027244	.024428
9.5	.020765	.020025	.017290	.014253	.019398	.016950
10.0	.013765	.013221	.011627	.0098574	.012810	.011518
10.5	.011017	.010884	.010412	.0095717	.010868	.010632
11.0	.012639	.012719	.012680	.012047	.012878	.012986
11.5	.015359	.015325	.015010	.014050	.015344	.015120
12.0	.015738	.015445	.014627	.013312	.015200	.014470
12.5	.012943	.012509	.011480	.010171	.012135	.011219
13.0	.0089415	.0086038	.0078142	.0068867	.0083379	.0076757
13.5	.0064118	.0063183	.0059853	.0055291	.0062915	.0060715
14.0	.0064517	.0065597	.0065464	.0063470	.0067158	.0067799
14.5	.0079497	.0080945	.0080884	.0078447	.0082667	.0083035
15.0	.0088620	.0089031	.0086917	.0082560	.0089591	.0087723

$\mathfrak{M}_{ij}\,[00;\ 0.1;\ r_0]$

r_0	$\mathfrak{M}_{3,7}$	$\mathfrak{M}_{3,9}$	$\mathfrak{M}_{5,5}$	$\mathfrak{M}_{5,7}$	$\mathfrak{M}_{5,9}$	$\mathfrak{M}_{5,11}$
.5	.11005		.10151	.077164		
1.0	.10029		.094199	.072261		
1.5	.091754		.087278	.067312		
2.0	.076317		.073740	.057123		
2.5	.056986		.056750	.044514		
3.0	.042421		.044429	.035936		
3.5	.038840		.042293	.035417		
4.0	.044729		.048485	.040966		
4.5	.052046		.055193	.046089		
5.0	.052513	.042909	.054771	.044927	.037350	.031610
5.5	.043714	.035076	.045441	.036718	.030175	.025288
6.0	.030326	.023927	.032161	.026051	.021406	.017900
6.5	.019951	.015911	.022358	.019012	.016127	.013783
7.0	.017218	.014562	.020218	.018489	.016418	.014486
7.5	.020795	.018237	.024006	.022350	.020062	.017837
8.0	.025201	.022013	.028114	.025616	.022679	.019967
8.5	.025460	.021816	.027735	.024543	.021294	.018460
9.0	.020707	.017344	.022311	.019280	.016439	.014046
9.5	.014158	.011716	.015301	.013228	.011302	.0096691
10.0	.0099891	.0085484	.010941	.0099946	.0089402	.0079339
10.5	.0099649	.0090712	.010895	.010596	.0099259	.0091193
11.0	.012454	.011525	.013377	.013046	.012236	.011250
11.5	.014230	.012979	.015064	.014317	.013172	.011932
12.0	.013239	.011802	.013908	.012846	.011561	.010285
12.5	.010019	.0087565	.010517	.0095321	.0084572	.0074366
13.0	.0068643	.0060269	.0072470	.0066545	.0059983	.0053563
13.5	.0057101	.0052654	.0060506	.0058620	.0055502	.0051720
14.0	.0066395	.0063376	.0069770	.0069450	.0067212	.0063731
14.5	.0080904	.0076860	.0084183	.0082700	.0079142	.0074344
15.0	.0083599	.0077898	.0086490	.0082922	.0077736	.0071763

$\mathfrak{M}_{ij}\,[00;\ 0.1;\ r_0]$

r_0	$\mathfrak{M}_{7,7}$	$\mathfrak{M}_{7,9}$	$\mathfrak{M}_{7,11}$	$\mathfrak{M}_{9,9}$	$\mathfrak{M}_{9,11}$	$\mathfrak{M}_{11,11}$
.5	.059034					
1.0	.055993					
1.5	.052580					
2.0	.045006					
2.5	.035749					
3.0	.029919					
3.5	.030417					
4.0	.035260					
4.5	.039092					
5.0	.037482	.031564	.026983	.026843	.023124	.020042
5.5	.030373	.025417	.021609	.021568	.018539	.016072
6.0	.021917	.018536	.015858	.016015	.013928	.012266
6.5	.017029	.014986	.013170	.013518	.012099	.010973
7.0	.017576	.016018	.014409	.014849	.013526	.012434
7.5	.021228	.019331	.017382	.017788	.016124	.014709
8.0	.023648	.021159	.018793	.019095	.017080	.015368
8.5	.022010	.019321	.016917	.017132	.015131	.013462
9.0	.016991	.014746	.012797	.013000	.011434	.010173
9.5	.011836	.010423	.0091521	.0094140	.0084410	.0076972
10.0	.0095473	.0088460	.0080749	.0084139	.0078367	.0074098
10.5	.010598	.010133	.0094604	.0098348	.0092867	.008455
11.0	.012892	.012218	.011331	.011676	.010903	.010240
11.5	.013725	.012726	.011609	.011883	.010907	.010067
12.0	.011979	.010881	.0097658	.0099726	.0090252	.0082309
12.5	.0087737	.0079053	.0070545	.0072307	.0065434	.0059974
13.0	.0062735	.0057975	.0052959	.0054799	.0051056	.0048369
13.5	.0058287	.0056417	.0053552	.0055599	.0053555	.0052190
14.0	.0070076	.0068585	.0065646	.0067745	.0065339	.0063417
14.5	.0081833	.0078818	.0074466	.0076347	.0072500	.0069161
15.0	.0079982	.0075418	.0070013	.0071515	.0066745	.0062611

$\mathfrak{M}_{ij}\,[00;\ 0.2;\ r_0]$

r_0	$\mathfrak{M}_{11}$	$\mathfrak{M}_{12}$	$\mathfrak{M}_{13}$	$\mathfrak{M}_{15}$	$\mathfrak{M}_{17}$	$\mathfrak{M}_{19}$
.5	.39530	.28000	.21474	.14472	.10837	
1.0	.41383	.28958	.21988	.14596	.10811	
1.5	.39129	.27096	.20388	.13336	.097673	
2.0	.32701	.22215	.16437	.10458	.074964	
2.5	.23134	.15226	.10942	.066137	.045405	
3.0	.13355	.084666	.058441	.032493	.020516	
3.5	.062757	.040775	.028231	.015211	.0090156	
4.0	.030750	.026893	.022316	.015330	.010960	
4.5	.028792	.033066	.030894	.024209	.018885	
5.0	.037519	.042504	.039498	.030793	.023963	.019140
5.5	.040773	.043181	.038863	.029083	.021962	.017112
6.0	.033667	.033585	.029179	.020670	.014877	.011082
6.5	.021310	.020274	.017162	.011617	.0079562	.0056036
7.0	.011620	.010905	.0096028	.0070636	.0051695	.0038413
7.5	.0086347	.0085598	.0085972	.0078092	.0066478	.0055781
8.0	.010663	.010841	.011319	.010802	.0094741	.0081263
8.5	.013128	.013093	.013324	.012275	.010517	.0088635
9.0	.012718	.012341	.012151	.010650	.0087879	.0071710
9.5	.0094603	.0089603	.0085649	.0071626	.0056791	.0044599
10.0	.0057563	.0054286	.0051163	.0042518	.0033816	.0026607
10.5	.0038788	.0038486	.0037368	.0034326	.0030379	.0026340
11.0	.0042150	.0043857	.0043930	.0043427	.0040900	.0037244
11.5	.0054053	.0055841	.0055619	.0054322	.0050630	.0045718
12.0	.0058125	.0058707	.0057447	.0054129	.0048931	.0043063
12.5	.0048685	.0048092	.0046211	.0041943	.0036660	.0031294
13.0	.0032742	.0031847	.0030315	.0026938	.0023140	.0019765
13.5	.0021509	.0021089	.0020496	.0018988	.0017105	.0015220
14.0	.0020407	.0020570	.0020847	.0020654	.0019875	.0018670
14.5	.0025837	.0026141	.0026621	.0026557	.0025694	.0024236
15.0	.0029877	.0029859	.0029986	.0029194	.0027632	.0025564

$\mathfrak{M}_{ij}\,[00;\ 0.2;\ r_0]$

r_0	$\mathfrak{M}_{22}$	$\mathfrak{M}_{23}$	$\mathfrak{M}_{25}$	$\mathfrak{M}_{27}$	$\mathfrak{M}_{33}$	$\mathfrak{M}_{35}$
.5	.20058	.15500	.10545	.079391	.12042	.082474
1.0	.20663	.15899	.10728	.080226	.12345	.084280
1.5	.19288	.14788	.099028	.073532	.11485	.078185
2.0	.15708	.11950	.078798	.057724	.092671	.062636
2.5	.10725	.080922	.052279	.037520	.063136	.042620
3.0	.061880	.047423	.030767	.021860	.038817	.027375
3.5	.036408	.030914	.022266	.016680	.028784	.022880
4.0	.033264	.032006	.025937	.020700	.032365	.027558
4.5	.042264	.041122	.033707	.027097	.040746	.034145
5.0	.049338	.046400	.036770	.028977	.044080	.035479
5.5	.046098	.041746	.031581	.024079	.038181	.029409
6.0	.033670	.029452	.021166	.015450	.026172	.019408
6.5	.019429	.016688	.011672	.0082690	.014844	.011139
7.0	.010421	.0094994	.0074670	.0057932	.0092601	.0081117
7.5	.0086753	.0089798	.0085143	.0074630	.0096919	.0096791
8.0	.011135	.011749	.011391	.010108	.012548	.012360
8.5	.013125	.013416	.012468	.010768	.013774	.012893
9.0	.012033	.011888	.010515	.0087604	.011780	.010488
9.5	.0085510	.0082177	.0069831	.0056408	.0079311	.0068174
10.0	.0052034	.0049633	.0042692	.0035286	.0047783	.0042125
10.5	.0039076	.0038573	.0036821	.0033723	.0038544	.0037776
11.0	.0046150	.0046607	.0046822	.0044670	.0047372	.0048165
11.5	.0057920	.0057884	.0056894	.0053317	.0058036	.0057377
12.0	.0059419	.0058269	.0055130	.0050039	.0057293	.0054470
12.5	.0047603	.0045859	.0041837	.0036772	.0044344	.0040739
13.0	.0031090	.0029743	.0026699	.0023198	.0028665	.0026099
13.5	.0020822	.0020453	.0019240	.0017633	.0020333	.0019540
14.0	.0020859	.0021282	.0021328	.0020734	.0021880	.0022207
14.5	.0026526	.0027092	.0027170	.0026411	.0027754	.0027979
15.0	.0029896	.0030072	.0029377	.0027896	.0030296	.0029686

$\mathfrak{M}_{ij}\,[00;\ 0.2;\ r_0]$

r_0	$\mathfrak{M}_{37}$	$\mathfrak{M}_{39}$	$\mathfrak{M}_{55}$	$\mathfrak{M}_{57}$	$\mathfrak{M}_{59}$	$\mathfrak{M}_{5,11}$
.5	.062335		.056980	.043296		
1.0	.063454		.058407	.044379		
1.5	.058625		.054363	.041296		
2.0	.046583		.043714	.033162		
2.5	.031456		.030420	.023243		
3.0	.020530		.021223	.016831		
3.5	.018178		.019948	.016661		
4.0	.022639		.024629	.020803		
4.5	.027852		.029425	.024448		
5.0	.028282	.023032	.029270	.023758	.019614	.016527
5.5	.022749	.018088	.023401	.018570	.015066	.012511
6.0	.014557	.011253	.015277	.012030	.0096794	.0079663
6.5	.0084008	.0064863	.0094615	.0078420	.0065281	.0055006
7.0	.0068053	.0056800	.0082073	.0075098	.0066605	.0058700
7.5	.0087497	.0076790	.010271	.0096145	.0086457	.0076945
8.0	.011084	.0096774	.012449	.011341	.010025	.0088143
8.5	.011203	.0095598	.012239	.010770	.0092922	.0080168
9.0	.0087985	.0072948	.0094965	.0081069	.0068326	.0057792
9.5	.0055791	.0045252	.0060514	.0051287	.0043015	.0036197
10.0	.0035741	.0029965	.0039553	.0035677	.0031551	.0027725
10.5	.0035385	.0032153	.0039091	.0038223	.0035882	.0032995
11.0	.0046398	.0043022	.0050066	.0049062	.0046107	.0042427
11.5	.0054050	.0049269	.0057325	.0054501	.0050084	.0045294
12.0	.0049681	.0044112	.0052247	.0048077	.0043060	.0038124
12.5	.0036084	.0031242	.0037926	.0034076	.0029944	.0026080
13.0	.0023037	.0019943	.0024406	.0022165	.0019750	.0017442
13.5	.0018285	.0016772	.0019482	.0018863	.0017835	.0016590
14.0	.0021825	.0020878	.0023007	.0023007	.0022330	.0021210
14.5	.0027322	.0025986	.0028466	.0028022	.0026842	.0025219
15.0	.0028272	.0026314	.0029267	.0028038	.0026245	.0024183

$\mathfrak{M}_{ij}\,[00;\ 0.2;\ r_0]$

r_0	$\mathfrak{M}_{77}$	$\mathfrak{M}_{79}$	$\mathfrak{M}_{7,11}$	$\mathfrak{M}_{99}$	$\mathfrak{M}_{9,11}$	$\mathfrak{M}_{11,11}$
.5	.032714					
1.0	.033915					
1.5	.031627					
2.0	.025472					
2.5	.018139					
3.0	.013765					
3.5	.014277					
4.0	.017852					
4.5	.020562					
5.0	.019541	.016295	.013837	.013692	.011696	.010037
5.5	.015031	.012384	.010410	.010324	.0087610	.0074895
6.0	.0098337	.0081444	.0068606	.0068930	.0059054	.0051251
6.5	.0069123	.0060114	.0052373	.0053817	.0047888	.0043252
7.0	.0071907	.0065673	.0059125	.0061084	.0055712	.0051277
7.5	.0091804	.0083700	.0075279	.0077046	.0069801	.0063586
8.0	.010454	.0093272	.0082626	.0083828	.0074706	.0066902
8.5	.0095892	.0083570	.0072729	.0073469	.0064416	.0056836
9.0	.0070466	.0060373	.0051815	.0052488	.0045625	.0040095
9.5	.0045055	.0039026	.0033786	.0034743	.0030779	.0027781
10.0	.0033934	.0031293	.0028440	.0029758	.0027686	.0026202
10.5	.0038564	.0037028	.0034641	.0036119	.0034192	.0032653
11.0	.0048710	.0046243	.0042905	.0044249	.0041320	.0038788
11.5	.0052234	.0048345	.0043909	.0045029	.0041213	.0037908
12.0	.0044631	.0040317	.0035985	.0036723	.0033031	.0029924
12.5	.0031083	.0027734	.0024515	.0025121	.0022522	.0020457
13.0	.0020717	.0018978	.0017194	.0017830	.0016516	.0015590
13.5	.0018812	.0018236	.0017319	.0018036	.0017409	.0017017
14.0	.0023336	.0022914	.0021974	.0022710	.0021945	.0021338
14.5	.0027779	.0026774	.0025294	.0025945	.0024629	.0023479
15.0	.0027014	.0025426	.0023551	.0024057	.0022395	.0020946

$\mathfrak{M}_{ij}\,[44;\,0.1,\,\gamma_0]$

γ_0	$\mathfrak{M}_{1,1}$	$\mathfrak{M}_{1,3}$	$\mathfrak{M}_{1,5}$
.5	.015933	.0087277	.0059210
1.0	.017384	.0091606	.0060687
1.5	.016506	.0084922	.0055278
2.0	.013821	.0068476	.0043267
2.5	.0097856	.0045427	.0027134
3.0	.0056258	.0023858	.0012913
3.5	.0025958	.0011057	.00056105
4.0	.0012255	.00086566	.00057761
4.5	.0011538	.0012515	.00097297
5.0	.0015451	.0016364	.0012669
5.5	.0016947	.0016150	.0011967
6.0	.0013889	.0011959	.00083206
6.5	.00085276	.00067423	.00043908
7.0	.00043329	.00034734	.00024265
7.5	.00030571	.00030555	.00027651
8.0	.00039465	.00042438	.00040679
8.5	.00050137	.00051134	.00047077
9.0	.00048481	.00046233	.00040246
9.5	.00034839	.00031205	.00025618
10.0	.00019461	.00016883	.00013524
10.5	.00011748	.00011213	.00010150
11.0	.00013095	.00013856	.00013821
11.5	.00017830	.00018508	.00018155
12.0	.00019418	.00019215	.00018068
12.5	.00015761	.00014865	.00013350
13.0	.000096999	.000088194	.000076412
13.5	.000054949	.000051514	.000046544
14.0	.000050533	.000052316	.000052255
14.5	.000069587	.000072557	.000072969
15.0	.000083385	.000084010	000081899

$\mathfrak{M}_{ij}\,[44;\,0.1,\,\gamma_0]$

γ_0	$\mathfrak{M}_{3,3}$	$\mathfrak{M}_{3,5}$	$\mathfrak{M}_{5,5}$
.5	.0048305	.0032961	.0022563
1.0	.0050056	.0033816	.0023080
1.5	.0046629	.0031405	.0021520
2.0	.0037685	.0025178	.0017300
2.5	.0025533	.0016978	.0011891
3.0	.0015431	.0010684	.00081348
3.5	.0011335	.00089178	.00077201
4.0	.0013055	.0011073	.00098512
4.5	.0016828	.0014035	.0012015
5.0	.0018371	.0014685	.0012004
5.5	.0015852	.0012078	.00094798
6.0	.0010643	.00077397	.00059583
6.5	.00057275	.00041550	.00034435
7.0	.00033193	.00028578	.00029177
7.5	.00035255	.00035546	.00038292
8.0	.00047722	.00047241	.00047809
8.5	.00053084	.00049624	.00047001
9.0	.00044700	.00039483	.00035416
9.5	.00028561	.00024083	.00020962
10.0	.00015467	.00013262	.00012252
10.5	.00011667	.00011480	.00012067
11.0	.00015230	.00015663	.00016488
11.5	.00019474	.00019328	.00019375
12.0	.00019173	.00018176	.00017370
12.5	.00014160	.00012861	.00011825
13.0	.000081962	.000072888	.000066760
13.5	.000050673	.000048184	.000048129
14.0	.000055951	.000057540	.000060615
14.5	.000076558	.000077797	.000079764
15.0	.000085153	.000083493	.000082313

$\mathfrak{M}_{ij}\,[44,\,0.2,\,\gamma_0]$

γ_0	$\mathfrak{M}_{1,1}$	$\mathfrak{M}_{1,3}$	$\mathfrak{M}_{1,5}$
1.0	.0093205	.0051206	.0034797
2.0	.0081639	.0040733	.0026025
3.0	.0029271	.0011223	.00056729
4.0	.00037529	.00019893	.00011318
5.0	.00050078	.00055526	.00043500
6.0	.00043724	.00037473	.00025505
7.0	.000094031	.000067482	.000038716
8.0	.000073365	.000082292	.000080997
9.0	.000094212	.000090152	.000078379
10.0	.000028712	.000023724	.000017653
11.0	.000014318	.000015680	.000016048
12.0	.000023647	.000023541	.000022220
13.0	.0000096154	.0000085364	.0000071607
14.0	.0000033665	.0000035566	.0000036148
15.0	.0000064583	.0000065549	.0000064278

γ_0	$\mathfrak{M}_{3.3}$	$\mathfrak{M}_{3.5}$	$\mathfrak{M}_{5.5}$
1.0	.0028392	.0019393	.0013283
2.0	.0021168	.0013847	.00091792
3.0	.00057804	.00036367	.00025516
4.0	.00039753	.00035056	.00032416
5.0	.00064787	.00051985	.00042259
6.0	.00032858	.00023045	.00016801
7.0	.000060561	.000048361	.000050855
8.0	.000096573	.000097960	.00010127
9.0	.000087126	.000076528	.000067934
10.0	.000020689	.000016603	.000014601
11.0	.000017951	.000018997	.000020586
12.0	.000023582	.000022391	.000021383
13.0	.0000077231	.0000066343	.0000058638
14.0	.0000039287	.0000041437	.0000044975
15.0	.0000066843	.0000065836	.0000065109

$\mathfrak{M}_{ij}\,[04;\ 0.06;\ \gamma_0]$

γ_0	$\mathfrak{M}_{11}$	$\mathfrak{M}_{13}$	$\mathfrak{M}_{15}$	$\mathfrak{M}_{33}$	$\mathfrak{M}_{53}$	$\mathfrak{M}_{55}$
1.0	.13508	.070155	.045679	.040574	.027853	.019615
2.0	.097650	.050268	.032062	.030990	.021584	.015696
3.0	.043835	.021461	.012750	.016319	.012056	.0096836
4.0	.013723	.010903	.0078219	.014234	.011987	.010611
5.0	.015835	.016271	.012700	.017763	.014375	.012004
6.0	.014328	.012521	.0090863	.011382	.0086973	.0070940
7.0	.0059645	.0051262	.0039825	.0050208	.0044822	.0044887
8.0	.0056670	.0059196	.0055957	.0064484	.0062922	.0062851
9.0	.0065923	.0062982	.0055380	.0061165	.0054733	.0049903
10.0	.0033253	.0030024	.0025475	.0028420	.0025464	.0024149
11.0	.0026059	.0026934	.0026449	.0028749	.0029006	.0029916
12.0	.0034811	.0034352	.0032342	.0034232	.0032545	.0031242
13.0	.0020741	.0019313	.0017279	.0018370	.0016839	.0015847
14.0	.0013776	.0014033	.0013862	.0014668	.0014829	.0015296
15.0	.0019750	.0019793	.0019243	.0019977	.0019554	.0019265

$\mathfrak{M}_{ij}\,[04;\ 01;\ \gamma_0]$

γ_0	$\mathfrak{M}_{1,1}$	$\mathfrak{M}_{1,3}$	$\mathfrak{M}_{1,5}$	$\mathfrak{M}_{3,3}$	$\mathfrak{M}_{3,5}$	$\mathfrak{M}_{5,5}$
.5	.10400	.055848	.037440	.030634	.020776	.014179
1.0	.10270	.053597	.035228	.029674	.020111	.013843
1.5	.094441	.048630	.031551	.027446	.018650	.012967
2.0	.078698	.039390	.024925	.022546	.015281	.010714
2.5	.056321	.026770	.016150	.015907	.010816	.0077810
3.0	.033260	.014869	.0083293	.010300	.0073253	.0057008
3.5	.016253	.0076791	.0042433	.0079566	.0063033	.0054483
4.0	.0084259	.0062837	.0043256	.0088842	.0074956	.0066399
4.5	.0079820	.0084863	.0065985	.011025	.0091833	.0078774
5.0	.010261	.010727	.0083175	.011905	.0095497	.0078629
5.5	.011139	.010582	.0078897	.010378	.0079792	.0063473
6.0	.0092603	.0080145	.0056620	.0071911	.0053296	.0042002
6.5	.0059224	.0047701	.0032224	.0041357	.0031053	.0026429
7.0	.0032687	.0027050	.0019860	.0026170	.0022916	.0023182
7.5	.0024535	.0024443	.0022140	.0027589	.0027502	.0029149
8.0	.0030477	.0032347	.0030793	.0035870	.0035268	.0035477
8.5	.0037704	.0038240	.0035142	.0039520	.0036918	.0034985
9.0	.0036617	.0034933	.0030514	.0033829	.0030027	.0027108
9.5	.0027147	.0024497	.0020361	.0022622	.0019339	.0017084
10.0	.0016267	.0014372	.0011822	.0013373	.0011708	.0010957
10.5	.0010742	.0010331	.00094467	.0010690	.0010480	.0010886
11.0	.0011811	.0012358	.0012231	.0013397	.0013652	.0014232
11.5	.0015447	.0015929	.0015559	.0016658	.0016473	.0016463
12.0	.0016718	.0016519	.0015535	.0016470	.0015628	.0014960
12.5	.0013883	.0013138	.0011863	.0012569	.0011488	.0010640
13.0	.00090592	.00083276	.00073228	.00078251	.00070592	.00065515
13.5	.00056591	.00053681	.00049208	.00053080	.00050814	.00050711
14.0	.00053397	.00054805	.00054425	.00057948	.00059081	.00061589
14.5	.00070035	.00072490	.00072497	.00075938	.00076759	.00078310
15.0	.00082400	.00082801	.00080594	.00083752	.00082034	.00080834

$\mathfrak{M}_{ij}\,[04;\ 0.2;\ \gamma_0]$

γ_0	$\mathfrak{M}_{1,1}$	$\mathfrak{M}_{1,3}$	$\mathfrak{M}_{1,5}$
1.0	.060404	.032597	.021917
2.0	.050905	.025266	.016053
3.0	.019319	.0077132	.0040102
4.0	.0032112	.0020120	.0012652
5.0	.0041845	.0045317	.0035261
6.0	.0037137	.0031878	.0021907
7.0	.00097413	.00074529	.00048244
8.0	.00083627	.00091525	.00088705
9.0	.0010483	.0010009	.00087041
10.0	.00037541	.00031948	.00024861
11.0	.00022733	.00024346	.00024505
12.0	.00035083	.00034791	.00032755
13.0	.00016274	.00014672	.00012569
14.0	.000075133	.000078187	.000078493
15.0	.00012971	.00013098	.00012792

γ_0	$\mathfrak{M}_{3,3}$	$\mathfrak{M}_{35}$	$\mathfrak{M}_{5,5}$
1.0	.017928	.012178	.0083190
2.0	.013394	.0088272	.0059322
3.0	.0044218	.0029217	.0021420
4.0	.0034267	.0029577	.0026771
5.0	.0051854	.0041492	.0033786
6.0	.0028144	.0020078	.0015038
7.0	.00069528	.00058194	.00060139
8.0	.0010480	.0010483	.0010706
9.0	.00096727	.00085190	.00076035
10.0	.00028729	.00024044	.00021839
11.0	.00027149	.00028210	.00030011
12.0	.00034761	.00032968	.00031490
13.0	.00013509	.00011873	.00010748
14.0	.000084406	.000087453	.000092950
15.0	.00013301	.00013059	.00012887

$\mathfrak{M}_{ij}\,[44,\ 0.06;\ \gamma_0]$

γ_0	$\mathfrak{M}_{1,1}$	$\mathfrak{M}_{1,3}$	$\mathfrak{M}_{1,5}$
1.0	.023917	.012386	.0080880
2.0	.017769	.0089811	.0056916
3.0	.0077495	.0036134	.0020773
4.0	.0021906	.0016891	.0011842
5.0	.0026048	.0026987	.0020951
6.0	.0023566	.0020471	.0014617
7.0	.00089957	.00075788	.00057126
8.0	.00084949	.00089491	.00084858
9.0	.0010075	.00096146	.00084159
10.0	.00047303	.00042176	.00035141
11.0	.00035616	.00037072	.00036557
12.0	.00049318	.00048695	.00045795
13.0	.00027749	.00025629	.00022678
14.0	.00017181	.00017584	.00017424
15.0	.00025851	.00025949	.00025240

γ_0	$\mathfrak{M}_{3,3}$	$\mathfrak{M}_{3,5}$	$\mathfrak{M}_{5,5}$
1.0	.0069417	.0047191	.0032723
2.0	.0053166	.0036453	.0025965
3.0	.0026286	.0019028	.0015017
4.0	.0022932	.0019285	.0017040
5.0	.0029706	.0023894	.0019779
6.0	.0018472	.0013868	.0011098
7.0	.00073805	.00065209	.00065642
8.0	.00098439	.00096405	.00096632
9.0	.00093199	.00082962	.00075181
10.0	.00039544	.00034965	.00032917
11.0	.00039931	.00040512	.00042035
12.0	.00048534	.00046072	.00044139
13.0	.00024197	.00021959	.00020490
14.0	.00018513	.00018813	.00019532
15.0	.00026224	.00025675	.00025294