

183 | Juni 1967

## SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Dipl.-Ing. Alfred Kracht

**Lineartheoretische Abhandlung über  
die optimale Verringerung des  
Wellenwiderstandes gegebener  
Schiffsformen durch einen Wulst in  
symmetrischer oder asymmetrischer  
Anordnung**

**TUHH**

*Technische Universität Hamburg-Harburg*

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

IfS - Bericht Nr. 183

Lineartheoretische Abhandlung über die optimale  
Verringerung des Wellenwiderstandes gegebener  
Schiffsformen durch einen Wulst in symmetrischer  
oder asymmetrischer Anordnung

(Ungekürzte Fassung der von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Hochschule Hannover genehmigten Dissertation)

von

Dipl.-Ing. Alfred Kracht

Hamburg, Juni 1967

## II

3.1.3. Die Darstellung der Form der freifahrenden Wulstkörper	36
3.1.4. Die Singularitätendarstellung der freifahrenden Wulstkörper	37
3.2. Schiff-Wulst-Kombinationen und deren Singularitätendarstellung	37
3.2.1. Die Ordnung der Wulstsingularitäten	39
3.2.2. Die gegenseitige Zuordnung der Größe des effektiven Wulstvolumens $V_b$ und des Momentes $m_0$ der Dipolsingularität	41
3.3. Die numerische Behandlung der Typintegrale	44
3.3.1. Die Zerlegung des Typintegrales	44
3.3.2. Die berechneten Matrizen $U^{oo}[i,j](\gamma,K)$ für $K = 0.075$	47
3.4. Schiff-Wulst-Kombinationen	49
3.4.1. Optimale Schiff-Wulst-Kombinationen	51
3.4.1.1. Volloptimierte Kombinationen	54
3.4.1.2. Teiloptimierte Kombinationen	57
3.4.2. Fixierte Schiff-Wulst-Kombinationen	58
4. Zusammenfassung	59
5. Anhänge	61
5.1. Anhang 1: Beweis	61
5.2. Anhang 2: Matrizenprodukte	66
5.3. Anhang 3: M-Funktionen hoher Potenzen	68
5.4. Anhang 4: Wellenerhebungen des freien Wellensystems	70
5.5. Anhang 5: Rankinesches Ovoid kombiniert mit Dipolen	71
5.6. Anhang 6: $M_D$ -Funktionen	73
6. Liste der verwendeten Symbole	75
7. Literaturverzeichnis	79
8. Diagramme 5 bis 12	
9. Tabellen 1 bis 4	

## Inhaltsverzeichnis

1. Allgemeiner Teil	1
1.1. Einleitung	1
1.2. Bemerkungen zur Geschichte des Wulstproblems	3
2. Theoretischer Teil	5
2.1. Hydrodynamische Grundgleichungen	5
2.1.1. Die ideale Flüssigkeit	8
2.1.1.1. Eigenschaften der idealen Flüssigkeit	8
2.1.1.2. Beschränkungen der Bewegung	9
2.2. Die Differentialgleichungen der Bewegung	9
2.3. Formulierung des Widerstandsproblems eines Schiffes als ein Randwertproblem	11
2.3.1. Das Michell-Havelocksche Widerstandsintegral	15
2.3.1.1. Die Singularitätenverteilungen und deren P- und Q-Funktionen	16
2.4. Die Widerstandsmatrix $\mathcal{W} \begin{bmatrix} s, t \\ i, j \end{bmatrix} (\gamma_0, K)$	18
2.4.1. Der Aufbau der Widerstandsmatrix	20
2.4.2. Das Berechnen des Widerstandes mit Hilfe der $\mathcal{W}$ -Matrix	21
2.5. Die Verminderung des Wellenwiderstandes	22
2.5.1. Das erste Minimalproblem, die Verteilung geringsten Wellenwiderstandes	22
2.5.2. Das zweite Minimalproblem, die Verminderung des Wellenwiderstandes gegebener Singularitätenverteilungen	26
2.5.2.1. Die Optimalaufgabe	28
2.5.3. Der Änderungswiderstand $\Delta R^+(\gamma_0, K)$	30
3. Numerischer Teil	31
3.1. Relationen zwischen Singularitätenverteilungen und Körperform	31
3.1.1. Die Darstellung der Schiffsoberfläche	33
3.1.2. Die Quell-Senken-Darstellung der Schiffsform	35

## Vorwort

Angeregt durch die geradezu sensationellen Leistungseinsparungen, die der Bugwulst zum Beispiel bei den großen Tankern vor allem in Ballastfahrt und bei niedrigen Froudeschen Zahlen bewirkt, und aus der Überzeugung heraus, daß die lineare Theorie des Wellenwiderstandes einen Teil der Erklärung dieses Phänomens liefern kann, hat mich Herr Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. G. W e i n b l u m für dieses Problem interessiert. An dieser Stelle möchte ich ihm auch als meinem verehrten Lehrer für das Vertrauen, das er in mich gesetzt hat, und für seine wertvollen Anregungen und Hinweise zu diesem Thema danken. Herrn Dr. K. E g g e r s danke ich für die Anregungen und für die konstruktive Kritik an den mathematischen Formulierungen. Ebenso möchte ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft danken, die durch die Bereitstellung der Mittel die theoretischen und numerischen Arbeiten ermöglicht hat.

Dem Rechenzentrum der Universität Hamburg unter der Leitung des Herrn Prof. Dr. A l b r e c h t danke ich für das Entgegenkommen in der Benutzung der elektronischen Rechenanlage TR4, ohne deren Einsatz die umfangreichen, numerischen Rechnungen nicht denkbar gewesen wären.

Schließlich möchte ich auch Herrn Prof. Dr.-Ing. K. W e n d e l für die Übernahme des Korreferates und für die Kritik am Text der Arbeit danken.

## 1. Allgemeiner Teil

### 1.1. Einleitung

Unter den zahlreichen Teilproblemen der Optimierung eines Schiffsentwurfs nimmt die Widerstandsfrage eine Zentralstellung ein, da Leistungseinsparungen das wirtschaftliche Betreiben eines Schiffes stark beeinflussen. In diesem Zusammenhang wird das Bemühen verständlich, Schiffe mit einem minimalen Widerstand zu entwerfen und bei schon gebauten Objekten durch konstruktive Maßnahmen den Widerstand nachträglich noch zu verringern.

Wie in einigen anderen Zweigen der Ingenieurwissenschaften kann im Schiffbau der Bau eines Prototyps zu Studienzwecken nicht in Frage kommen. Hier müssen die Theorie und das Modellversuchswesen die für die Entwurfsarbeit nötigen Informationen erbringen. Auch wenn die existierende Theorie keine brauchbaren quantitativen Angaben für den Entwurf einer Schiffsform liefern kann, worauf die Praktiker gelegentlich hinweisen, lassen sich die Zusammenhänge zwischen Form und Widerstand sehr wohl qualitativ beurteilen. In diesem Sinne verwendet hat die lineare Theorie des Wellenwiderstandes, seit Weinblum und Wigley sie zu einem festen Bestandteil der Schiffstheorie gemacht haben, schon Beachtliches geleistet. Wenn auch gegenwärtig mit Erfolg an der nichtlinearen Version der Widerstandstheorie gearbeitet wird, ist die lineare Theorie nach Michell-Havelock mit ihren Resultaten nicht wertlos geworden.

Speziell galt das Wulstproblem für schnelle Schiffe durch Weinblum /44/ und Wigley /47/ lineartheoretisch als ziemlich befriedigend gelöst und ein erneutes Behandeln dieses Problems wäre kaum sinnvoll erschienen, würden nicht bei Großtankern,

deren Völligkeit größer als 0.80 ist und deren Dienstgeschwindigkeit unter  $Fr = 0.20$  liegt, in Ballastfahrt beachtliche Leistungersparnisse durch den Anbau eines Bugwulstes erreicht (Acevedo /1/ , Müller /27/). Die Vermutung, daß der Bugwulst auch bei Froudeschen Zahlen unter 0.22 noch eine gewisse praktische Bedeutung haben kann, hat Weinblum in seiner Arbeit "Theorie der Wulstschiffe" zwar schon geäußert, eine lineartheoretische Bestätigung konnte jedoch wegen der großen Schwierigkeiten bei der numerischen Lösung des Widerstandsintegrals noch nicht gegeben werden.

Die vorliegende Arbeit hat nun das Ziel, unter der Voraussetzung der Havelockschen Approximation die Brauchbarkeit der linearen Theorie des Wellenwiderstandes nach Michell-Havelock zum Beschreiben des Wulsteffektes besonders bei kleinen Froudeschen Zahlen zu untersuchen. Erhöhtes Augenmerk wird dabei auf das Verringern des Wellenwiderstandes gegebener Schiffsformen gelegt, das durch die Addition günstig gelegener Wulstformen erzielt werden kann. Es ist selbstverständlich, daß die lineartheoretischen Resultate erst durch eine experimentelle Bestätigung ihre volle Bedeutung für die Praxis erlangen werden. Diesbezügliche systematische Modellversuche stehen noch aus.

## 1.2. Bemerkungen zur Geschichte des Wulstproblems

Gegenwärtig hat das Wulstproblem auch in der Praxis wieder sehr stark an Aktualität gewonnen, so daß an dieser Stelle einige Bemerkungen zur Geschichte des Wulstes eingeflochten werden sollen. Obwohl das Wulstproblem ein Teil des Widerstandsproblems ist, ist nicht beabsichtigt, einen historischen Abriß der theoretischen und experimentellen Bemühungen im 17. und 18. Jahrhundert um die Lösung der allgemeinen Widerstandsfrage von Schiffen zu geben. Über dieses Thema berichten ausführlich Artsay /2/, Barnaby /3/, Gawn /11/ und Weber /34/.

Gleich zu Beginn sei bemerkt, daß der Bugwulst keine Erfindung ist, sondern sich aus dem Rammstevan der Kriegsschiffe entwickelt hat, der schon im Altertum als Waffe bekannt gewesen ist. Die Verdickung des Buges unterhalb der Schwimmwasserlinie war für den Bau des Rammstevens eine konstruktive Notwendigkeit, um die Kräfte beim Rammstoß ohne Eigenbeschädigung aufnehmen zu können. Keineswegs ist damit beabsichtigt worden, den Widerstand des Schiffes zu beeinflussen. Durch einen Zufall ist dieser Einfluß erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts entdeckt worden, in dem der Rammstevan, der wegen seiner beschränkten Einsatzfähigkeit als Waffe lange Zeit in Vergessenheit geraten war, erneut Anwendung im Kriegsschiffbau fand (Gawn /11/).

Warum nicht schon beim Bau der rammstevanbewehrten Kriegsschiffe der günstige Effekt der Stevenverdickung entdeckt worden war, liegt daran, daß die Frage nach dem Einfluß des Rammstevens auf den Widerstand und das Ausnutzen des Effektes zur Geschwindigkeitssteigerung gar nicht gestellt wurde; denn zu jener Zeit ließen sich mit der Verbesserung der Dampfkraftmaschinen und der Propulsionsorgane noch weit größere Wirkungen erzielen.

Erst nachdem W. Froude durch die Anwendung des Ähnlichkeitsgesetzes, das er zu einem festen Prinzip des Modellversuchswesens gemacht hat, die intuitiv richtige, analytische Trennung des gemessenen Gesamtwiderstandes vorgenommen hatte, konnten richtige Prognosen für eine Großausführung gestellt und sinn-

voll mit dem Untersuchen des Formeinflusses auf den Widerstand durch systematische Modellversuche begonnen werden. Froude schleppte zur Klärung einer Kontroverse zwischen Scott Russel, der auf Grund seiner Wellenlinientheorie ein scharfes Vorschiff vorschrieb, und Rankine, der nach seiner Stromlinientheorie einen völligen Vorsteven vorschlug, zwei Modelle, die nachträglich "Swan" und "Raven" genannt wurden. Die vielfach wiederholten Versuche zeigten das interessante Ergebnis, daß für niedrige Geschwindigkeiten der feine Steven ("Raven") und für höhere Geschwindigkeiten der völligere Steven ("Swan") vorteilhaft ist. Froude folgerte daraus, daß bei Geschwindigkeiten, bei denen der Wellenwiderstand überwiegt, solche Schwannenhalsformen günstig sind, ein Ergebnis, das durch die lineare Theorie des Wellenwiderstandes voll und ganz bestätigt wird.

Unter Anwendung dieser grundlegenden Erkenntnis deutete R., E. Froude als erster die widerstandsmäßig günstigen Eigenschaften eines im Jahre 1886 gebauten Torpedofängers als eine Folge der wulstartigen Form des Vorstevens, die der Einbau eines Torpedorohres im Vorschiff forderte. Gleichzeitig wies er dem Rammsteven, der noch immer verwendet wurde, einen ähnlichen, günstigen Einfluß auf den Wellenwiderstand zu. Damit war der Bugwulst als ein elementares Mittel erkannt worden, den wellenbildenden Widerstand zu reduzieren.

Während der sich aus dem Rammsteven gebildete Bugwulst mit seinem günstigen Effekt auf den Wellenwiderstand in Europa wieder in Vergessenheit geriet, obwohl sich auch russische Konstrukteure, wie Artsayoloff sehr darum bemüht haben, griff D., W. Taylor diese Idee erneut auf. Er rüstete 1907 ein Schiff, das Schlachtschiff "Delaware", mit einem Bugwulst aus, eigens zur Erhöhung der Geschwindigkeit bei gleicher Leistung. Das Verdienst Taylors liegt darin, die Bedeutung des Wulstes voll erkannt zu haben. Selbst für seine berühmte systematische Modellserie wählte er als Ausgangsmodell das englische Schlachtschiff "Leviathan", dessen Rammsteven er zu einem Bugwulst umgestaltete. Als Wulstcharakteristik führte er die Querschnittsfläche im vorderen Lot ein, deren Bedeutung als Parameter für den Wulsteffekt auch nach der linearen Theorie

gezeigt werden kann.

Erst jetzt wurden in vielen Ländern systematische Versuchsreihen durchgeführt, um den Einfluß des Wulstes auf den Wellenwiderstand zu klären. In den Jahren 1909 - 1920 hat O. Schlichting /30/ das Problem sehr eingehend untersucht und konnte auf empirischem Wege die Leistungsverbesserung durch einen Wulst als eine Funktion der Geschwindigkeit, sowie der Größe und Lage des Wulstvolumens zeigen. Das umfangreichste Programm mit 43 Modellen ist von E., F. Eggert /9,10/ 1921 in Washington durchgeführt worden. Weitere Experimente folgten von Taylor /33/ 1923, Bragg /6/ 1930, Thews 1932, Weinblum /42/ 1936, Wigley /47/ 1935 und Lindblad /23/ 1943. Dabei haben Weinblum und Wigley als erste das Problem gleichzeitig theoretisch nach der linearen Theorie des Wellenwiderstandes behandelt, die erst allmählich in die Schiffstheorie Eingang gefunden hatte, obwohl Michell /26/ schon 1898 sein Widerstandsintegral für schmale Schiffe veröffentlicht hatte.

Nach dem zweiten Weltkrieg hat sich der Bugwulst als ein konstruktives Mittel zur Verbesserung einer Schiffsform bezüglich seiner Widerstandseigenschaften allgemein durchgesetzt, so daß viele Schiffe noch nachträglich mit einer solchen Konstruktion versehen worden sind. Seine größte Rolle spielt der Bugwulst gegenwärtig im Großtankerbau. Dabei ist die konsequente Anwendung der lineartheoretischen Erkenntnisse von Weinblum und Wigley bezüglich des Wulsteffektes in der Praxis von Japan ausgegangen; als ihr Initiator ist Inui anzusehen.

## 2. Theoretischer Teil

### 2.1. Hydrodynamische Grundgleichungen

Die zu untersuchenden Vorgänge spielen sich in einem physikalisch homogenen Medium ab, dessen Molekularstruktur klein gegen die Abmessungen der Strömungsdimensionen ist. Der thermodynamische Zustand dieses Mediums wird durch die Angabe der absoluten Temperatur  $T$ , des Druckes  $p$  und der Dichte  $\rho$  und dessen Bewegung durch den Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{u}$  mit den Komponenten  $u, v, w$  beschrieben. Um die Gleichungen ableiten zu können,

müssen noch die auf die Volumeneinheit bezogene innere Energie  $e$  und die Enthalpie  $i$  (oder Entropie  $s$ ) des Mediums eingeführt werden. Für die thermodynamischen Zustandsgrößen genügt es, im Rahmen von Strömungsvorgängen die Unabhängigkeit nur zweier Größen von einander vorauszusetzen, wie etwa  $p$  und  $\varrho$ , und alle übrigen davon abzuleiten.

Von den fünf unabhängigen Funktionen, die den Strömungsvorgang beschreiben, betreffen drei die Bewegung des Mediums im Raume und zwei dessen thermodynamischen Zustand. Zum mathematischen Beschreiben der Vorgänge wird die Eulersche Methode benutzt, da diese den Versuchspraktiken, die z.B. Drücke und Geschwindigkeiten an den verschiedenen Orten aufmessen, am besten gerecht wird.

Die fünf abhängigen Variablen  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $p$  und  $\varrho$  sind Funktionen der Zeit  $t$  und der Ortskoordinaten des gewählten Bezugssystems, deren fünf Bestimmungsgleichungen sich aus den drei Sätzen der Hydrodynamik ableiten lassen, die in Integraldarstellung gegeben sind (Oswatitsch /28/). Erklärend sei hinzugefügt, daß sich die Vorgänge in einem Gebiet  $B$  abspielen, das von der Fläche  $F$  begrenzt wird, deren Normaleneinheitsvektor  $n$  positiv nach außen gerichtet ist.

1. Der Satz von der Erhaltung der Masse (Kontinuitätssatz):

Dieser Satz ist für Strömungsverhältnisse typisch und gibt die zeitliche Änderung der Masse in dem Gebiet  $B$  an, in dem sich Quellen der Gesamtstärke  $Q$  befinden können.

$$Q = \frac{d}{dt} \iiint_B \varrho \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \int_F \varrho \cdot w \cdot n \cdot df \quad (1)$$

$\varrho \cdot w$  kann auch als Stromdichtevektor aufgefaßt werden, analog zu  $\varrho$  der Massendichte. Die Kontrollfläche  $F$  ist zeitlich konstant.

2. Der Satz von der Erhaltung des Impulses (Impulssatz):

Dieser Satz besagt, daß die Resultierende aller auf das Gebiet  $B$  ausgeübten Kräfte eine Erhöhung der Bewegungsgröße in Kraftrichtung bewirkt. Unter der Berücksichtigung der äußeren Kräfte  $\mathcal{K} = (K_x, K_y, K_z)$ , der Massenkräfte

$\alpha = (X, Y, Z)$  und der Flächenkräfte, die sich in Form eines symmetrischen Spannungstensors zweiter Stufe angeben lassen, der den statischen Druck nicht mehr enthalten soll

$$S = \begin{vmatrix} -p+S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & -p+S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & -p+S_{zz} \end{vmatrix}$$

ergibt sich die Integralform zu (2)

$$\dot{A} + \iiint_B \alpha \cdot g \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \int_F S \cdot n \cdot df = \frac{d}{dt} \iiint_B \rho \cdot w \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \int_F \rho \cdot w (w \cdot n) \cdot df$$

3. Der Satz von der Erhaltung der Energie (Energiesatz):

Betrachtet werden nur die mechanischen und thermischen Energieformen. Die Wärmestrahlung bleibt unberücksichtigt. Es werden alle möglichen Energien pro Zeiteinheit, die um die Leistung der Massen- und Oberflächenkräfte und um die Reibungsenergie vermehrt werden, den Änderungen der kinetischen und inneren Energie des Mediums im Gebiet B gleichgesetzt.

$$L + \iiint_B \rho \cdot w \cdot g \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \int_F (w \cdot S) \cdot w \cdot df + \int_F \lambda \cdot w \cdot \text{grad} T \cdot df = \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_B (1/2 \cdot w^2 + e) \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \int_F (1/2 \cdot w^2 + e) \cdot \rho \cdot (w \cdot n) \cdot df .$$

Dabei enthält L noch andere denkbare Energiezufuhren, während  $\lambda \cdot w \cdot \text{grad} T$  die Energiezufuhr durch Wärmeleitung ist ( $\lambda$  ist das Wärmeleitvermögen des Mediums).

Damit sind die Grundlagen zum Beschreiben der Bewegung einer allgemeinen Strömung eines physikalisch homogenen Mediums aufgezeichnet. Prinzipiell kann nun die Kraft, die ein Körper in einem solchen Medium erfährt, berechnet werden. Mit bekanntem Spannungstensor S ergibt dafür das Integral

$$K = \int_F S \cdot n \cdot df, \tag{4}$$

wobei F die von dem Medium beaufschlagte Körperoberfläche und

„ deren positiv nach außen gerichteter Normaleneinheitsvektor ist. Der Widerstand R soll definitionsgemäß die negative Komponente von K sein, die der Bewegungs- oder negativen Anströmungsrichtung des Körpers parallel ist.

### 2.1.1. Die ideale Flüssigkeit

Die geschlossene mathematische Behandlung des Widerstandsproblems eines Körpers in einer physikalisch homogenen Flüssigkeit führt noch auf erhebliche Schwierigkeiten. Um es dennoch lösen zu können, müssen vereinfachende Annahmen getroffen werden, die zwar keine strenge physikalische Rechtfertigung haben, jedoch das analytische Lösen des vereinfachten Problems erleichtern. Dabei ergeben sich die Annahmen aus dem Vergleich des Mediums mit der realen Flüssigkeit, in der die Bewegung ja stattfindet, und aus den Besonderheiten der Bewegung selbst, die beschrieben werden soll. Schließlich können Eigenschaften der realen Flüssigkeit, die auf das Endergebnis nur einen unbedeutenden Einfluß ausüben, unberücksichtigt bleiben.

#### 2.1.1.1. Eigenschaften der idealen Flüssigkeit

Bezogen auf das Widerstandsproblem des Schiffes, hat das Medium verglichen mit Wasser die folgenden Eigenschaften.

a, Das Medium ist homogen, d.h. die Dichte der Flüssigkeit ist überall konstant

$$\rho = \text{const.}$$

b, Das Medium ist isentrop. Die Annahme besagt, daß die Entropie eines Flüssigkeitsteilchens während der Bewegung zwar konstant bleibt, die einzelnen Teilchen untereinander aber verschiedene Entropien haben können.

c, Das Medium ist inkompressibel. Diese Einschränkung kann für Wasser bedenkenlos gemacht werden. Damit ist die zeitliche Änderung der Dichte Null

$$\text{no. grad } \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

d, Das Medium ist wärmeleitungsfrei. Da eine Wärmezufuhr oder -abfuhr beim Widerstandsproblem eines Schiffes keine Rolle spielt, kann

$$\lambda = 0$$

gesetzt werden.

- e, Das Medium ist isotherm. Um Schichten verschiedener Temperatur auszuschließen, wird die Forderung

$$T = \text{const}$$

auf das gesamte vom Medium eingenommene Gebiet ausgedehnt.  $T$  ist dadurch keine unabhängige Variable mehr. Für das Widerstandsproblem bedeutet diese Bedingung keine besondere Beschränkung.

- f, Das Medium ist reibungsfrei. Nur wenn die Flüssigkeitsreibung eine untergeordnete Rolle innerhalb des Vorganges spielt, kann diese Bedingung gestellt werden, da sie völlig im Widerspruch zu einer realen Flüssigkeit steht. Allerdings vereinfacht diese Bedingung den Spannungstensor sehr, der nur noch die Normalkomponenten (Drücke) enthält, die alle gleich und Funktionen des Ortes sind. Infolge der Reibungsfreiheit findet keine Energiedissipation mehr statt. Für das Widerstandsproblem bedeutet diese Bedingung leider eine einschneidende Beschränkung, die für dessen theoretische Lösung allerdings notwendig ist.

Ein Medium mit diesen Eigenschaften ist eine ideale Flüssigkeit.

#### 2.1.1.2. Beschränkungen der Bewegung

Für den Ablauf der Bewegungsvorgänge selbst sind noch einige Annahmen zu treffen, die zwar nicht notwendig sind, die mathematische Behandlung des Problems jedoch erleichtern.

- a, Die Bewegung verläuft stoßfrei. Unendliche Druckgradienten, die im Widerstandsproblem nicht vorkommen, sind ausgeschlossen.
- b, Die Bewegung verläuft rotationsfrei. Diese Annahme schließt Wirbelbewegungen des Mediums aus.
- c, Die Bewegung verläuft stationär. Durch den Ausschluß beschleunigter Bewegungen verschwindet die Zeit  $t$  als unabhängige Variable.

#### 2.2. Die Differentialgleichungen der Bewegung

Für das isotrope, inkompressible, reibungs- und rotationsfreie mathematische Flüssigkeitsmodell können nun die Differential-

gleichungen der stationären Bewegung eines Körpers in der Eulerschen Schreibweise angegeben werden. Mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes für ein Funktionentripel ergeben sie sich in der folgenden Form, wenn das Gebiet B so klein gemacht wird, daß der Integrand als konstant angesehen werden kann.

1. Der Kontinuitätssatz ergibt

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} \boldsymbol{w} = 0. \quad (5)$$

2. Der Impulssatz ergibt

$$\boldsymbol{w} \cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{w} = -1/\rho \cdot \operatorname{grad} p + \boldsymbol{g}, \quad (6)$$

die Vektorschreibweise der drei Eulerschen Bewegungsgleichungen.

Der Energiesatz ist für die Bestimmung der vier unabhängigen Variablen  $u$ ,  $v$ ,  $w$  und  $p$  nicht notwendig, da er keine zusätzliche Aussage liefert, wenn keine Energiezufuhr in die Flüssigkeit stattfindet.

Besitzt nun die Massenkraft  $\boldsymbol{g}$  ein Potential in der Form

$$\boldsymbol{g} = - \operatorname{grad} U,$$

dann lassen sich die Gleichungen (6) in Richtung einer Stromlinie integrieren und ergeben die Bernoullische Gleichung für stationäre Strömungen

$$1/2 \cdot \boldsymbol{w}^2 + 1/\rho \cdot p + U = \text{const} \quad (7)$$

Mit

$$\boldsymbol{w} = \operatorname{grad} \Phi$$

folgt, daß ein Potential  $\Phi$  existiert, das eine Lösung des Differentialgleichungssystems ist. Hieraus ergibt sich das Typische von Potentialströmungen, daß deren Eulersche Differentialgleichungen durch eine einzige Funktion erfüllt werden können.

Gibt es mehrere Lösungsfunktionen, dann ist deren Summe wieder eine Lösung.

Aus dem Kontinuitätssatz folgt für diesen Fall die Laplacesche Differentialgleichung

$$\operatorname{div} \boldsymbol{w} = \operatorname{div}(\operatorname{grad} \Phi) = \Delta \Phi = 0. \quad (8)$$

### 2.3. Formulierung des Widerstandsproblems des Schiffes als ein Randwertproblem

Mit der kurzen Darstellung der allgemeinen Differentialgleichungen der Hydrodynamik läßt sich das Problem des Schiffswiderstandes in einer idealen Flüssigkeit als ein nichtlineares Randwertproblem der Potentialtheorie formulieren. Dazu ist zu bemerken, daß ein gleichförmig angeströmter oder bewegter Körper, der allseitig von einer idealen Flüssigkeit umgeben ist, keinen Widerstand erfährt. Erst die Anwesenheit einer freien Oberfläche läßt einen Widerstand infolge der Wellenbildung entstehen. Daraus ergibt sich eine mögliche Definition des Wellenwiderstandes des Schiffes.

Bleibt die Oberflächenspannung der Flüssigkeit unberücksichtigt, dann soll im Folgenden unter dem **Wellenwiderstand**  $R_w$  eines Schiffes diejenige Energie bezogen auf die Schiffsgeschwindigkeit  $c$  verstanden werden, die zum Aufrechterhalten des stationären, freien Wellensystems aufgebracht werden muß. In der idealen Flüssigkeit ist  $R_w$  gleich dem Gesamtwiderstand  $R_t$  und wird als Widerstand  $R$  bezeichnet, da Verwechslungen ausgeschlossen sind.

Um das Problem etwas übersichtlicher zu gestalten, werden noch einige Vereinfachungen eingeführt, die die Allgemeingültigkeit der Formulierungen nicht beschränken. Danach soll das Schiff weder vertrimmen noch tiefertauchen, wenn es sich auf der freien Oberfläche der Flüssigkeit bewegt. Ferner werden zum Beschreiben Zylinderkoordinaten benutzt, in denen sich die Bedeutung der Abstrahlungsbedingung besser zeigen läßt.

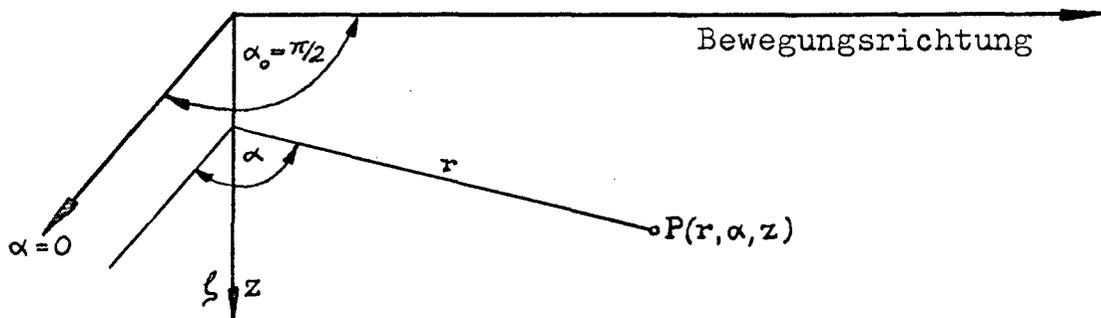


Fig. 1 Das System der Zylinderkoordinaten

In dem benutzten Koordinatensystem bewegt sich das Schiff in die Richtung  $\alpha = \pi/2 = \alpha_0$  ( $\sin\alpha_0 > 0$ ), wenn  $\alpha = 0$  die Richtung quer zur Längsachse des Schiffes angibt und  $\alpha$  positiv im entgegengerichteten Uhrzeigersinn gezählt wird. In der Ebene  $z = 0$  liegt die ungestörte, freie Oberfläche der Flüssigkeit, die den unteren Halbraum ganz ausfüllt.

In einer idealen Flüssigkeit besteht nun ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen der Druck- und der Geschwindigkeitsverteilung an einem bestimmten Ort, der durch eine Potentialfunktion analytisch ausgedrückt werden kann. Dadurch wird das Problem auf das Aufsuchen einer solchen Potentialfunktion

$$\bar{\phi}(r, \alpha, z) = -c \cdot r \cdot \sin\alpha + \varphi(r, \alpha, z) \quad (9)$$

als Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung

$$\Delta\bar{\phi} = \bar{\phi}_{rr} + 1/r \cdot \bar{\phi}_r + 1/r^2 \cdot \bar{\phi}_{\alpha\alpha} + \bar{\phi}_{zz} = 0 \quad (8)$$

reduziert.  $c$  ist die Geschwindigkeit der Parallelströmung, dessen Potential  $-c \cdot r \cdot \sin\alpha$  ebenso wie das Störpotential  $\varphi(r, \alpha, z)$  die Gleichung (8) erfüllen muß, die für das Störpotential

$$\Delta\varphi = \varphi_{rr} + 1/r \cdot \varphi_r + 1/r^2 \cdot \varphi_{\alpha\alpha} + \varphi_{zz} = 0 \quad (8a)$$

lautet.

Die Lösung (9) selbst muß nun an der stückweise gegebenen Randfläche den folgenden Randbedingungen genügen:

1. an der benetzten Körperoberfläche  $S = r - B(\alpha, z) = 0$   
der kinematischen Randbedingung an dieser Fläche

$$\text{grad}S \cdot \text{grad}\bar{\phi} = 0$$

oder

$$-\varphi_r + 1/r \cdot \varphi_\alpha \cdot B_\alpha + \varphi_z \cdot B_z = c(-\sin\alpha + 1/r \cdot B_\alpha \cdot \cos\alpha), \quad (10)$$

2. an der freien Flüssigkeitsoberfläche  $F = z - \zeta(r, \alpha) = 0$   
der kinematischen Randbedingung an dieser Fläche

$$\text{grad}F \cdot \text{grad}\bar{\phi} = 0$$

oder

$$\varphi_r \cdot \zeta_r + 1/r^2 \cdot \varphi_\alpha \cdot \zeta_\alpha - \varphi_z = -c \cdot (\zeta_r \cdot \sin\alpha + 1/r \cdot \zeta_\alpha \cdot \cos\alpha), \quad (11)$$

(dabei ist  $\zeta$  die Wellenerhebung),

3. an der freien Flüssigkeitsoberfläche  $F = z - \zeta(r, \alpha) = 0$   
 der dynamischen Randbedingung an dieser Fläche (Bernoulli-  
 sche Gleichung)

$$1/2(\text{grad}\phi)^2 + g \cdot \zeta = c^2/2$$

oder

$$-c \cdot (\varphi_r \cdot \sin\alpha + 1/r \cdot \varphi_\alpha \cdot \cos\alpha) + 1/2(\text{grad}\varphi)^2 + g \cdot \zeta = 0 \quad (12)$$

mit

$$p - p_0 = 0$$

(g ist die Erdbeschleunigung und  $p_0$  der atmosphärische Druck  
 an der ungestörten freien Oberfläche  $z = 0$ ),

4. am Zylinderboden  $z = h$  oder  $z \rightarrow \infty$

$$\varphi_z(r, \alpha, h) = 0$$

oder

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \varphi_z(r, \alpha, z) = 0 \quad (13)$$

und

5. an der Wand eines Kontrollzylinders  $r = \text{const}$  im vorderen  
 Halbraum der Abstrahlungsbedingung

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\varphi_r^2 - \varphi \cdot \varphi_{rr}) \cdot r = 0 \quad (\sin\alpha > 0). \quad (14)$$

Auf die Wichtigkeit der Abstrahlungsbedingung soll hier be-  
 sonders hingewiesen werden, da sie in der Literatur entweder  
 gar nicht oder nur sehr wenig betont wird. Die Begründung die-  
 ser Bedingung für den linearen Fall wird weiter unten gegeben.

Die Bedingungen 4 und 5 beschreiben das Verhalten von  $\varphi$  im Un-  
 endlichen.

Eine exakte Lösung dieser Aufgabe ist bisher noch nicht gelungen.  
 Selbst der Existenzbeweis für eine Lösung steht noch aus. Die  
 Schwierigkeit der Lösung ergibt sich aus der Tatsache, daß die  
 Randbedingungen selbst nicht linear sind und ein Teil des Randes  
 a priori unbekannt ist, wie die freie Oberfläche  $F(r, \alpha, z)$  der  
 Flüssigkeit und die von der Flüssigkeit benetzte Körperober-  
 fläche  $S(r, \alpha, z)$ .

Nach dem Energiesatz läßt sich nun der Wellenwiderstand als das

Integral des Energietransportes pro Zeiteinheit durch eine gedachte Zylinderfläche im Abstand  $r$  angeben

$$R = \frac{g}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} (-\varphi_r^2 + 1/r^2 \cdot \varphi_\alpha^2 + \varphi_z^2) \sin\alpha \cdot r \cdot d\alpha \cdot dz + \frac{gB}{2} \int_0^{2\pi} \zeta^2 \sin\alpha \cdot r \cdot d\alpha. \quad (15)$$

Diese Formel ist exakt, wie nach Eggers /7/ und Wehausen /36/ folgt.

Um für das Störpotential  $\varphi$  zu einer Lösung zu gelangen, werden die Randbedingungen linearisiert. Dabei werden alle Störgeschwindigkeiten als klein gegen  $c$  angesehen und deren Quadrate vernachlässigt. Ferner seien alle partiellen Ableitungen der freien Oberfläche  $F(r, \alpha, z)$  und der Körperoberfläche  $S(r, \alpha, z)$  so klein, daß deren Produkte mit den Störgeschwindigkeiten in erster Näherung ebenfalls verschwinden können. Hieraus ergibt sich die Berechtigung, die Randbedingungen für die freie Oberfläche in der Ebene  $z = 0$  und die der Körperoberfläche in der Ebene  $\alpha = \pi/2$  zu erfüllen.

Die linearisierten Randbedingungen lauten:

1. für die Körperoberfläche

$$\varphi_r(r, \pi/2, z) = -c \cdot (-\sin\alpha + 1/r \cdot \beta_\alpha \cos\alpha) \quad (10a)$$

2. für die freie Oberfläche

$$\varphi_z(r, \alpha, 0) = c \cdot (\zeta_r \sin\alpha + 1/r \cdot \zeta_\alpha \cos\alpha) \quad (11a)$$

3. die linearisierte Form der Bernoullischen Gleichung

$$-c \cdot (\varphi_r(r, \alpha, 0) \sin\alpha + 1/r \cdot \varphi_\alpha(r, \alpha, 0) \cos\alpha) + g \cdot \zeta = 0. \quad (12a)$$

Die Bedingungen 4 und 5 ändern sich nicht.

Mit den linearisierten Randbedingungen läßt sich das exakte Widerstandsintegral (15) in die Form

$$R = \frac{g c^2}{2 \cdot g} \int_0^\pi (\varphi_r^2 - \varphi \cdot \varphi_{rr}) \Big|_{z=0} \sin^3 \alpha \cdot r \cdot d\alpha - \int_0^\pi \int_0^\infty (\varphi_r^2 - \varphi \cdot \varphi_{rr}) \sin\alpha \cdot r \cdot d\alpha \cdot dz \quad (16)$$

bringen. Dieser Ausdruck hat den Vorteil, nur noch Ableitungen

des Potentials  $\varphi$  in radialer Richtung zu enthalten und läßt deutlich erkennen, daß die vordere Kontrollfläche nur dann keinen Beitrag zum Widerstandsintegral leistet, wenn die Abstrahlungsbedingung (14) erfüllt wird.

Der Lösungsweg für das Potential  $\varphi$  soll hier nicht verfolgt werden. Selbst das linearisierte Problem bereitet noch einige Schwierigkeiten. In einer sehr anschaulichen Art hat Lunde /24/ den Gang der Lösung beschrieben. Als erster hat Michell /26/ im Jahre 1898 ein Potential, das diesen Randbedingungen genügt, und das Widerstandsintegral für ein dünnes Schiff angegeben.

### 2.3.1. Das Michell-Havelocksche Widerstandsintegral

Im folgenden werden die Zylinderkoordinaten zugunsten der kartesischen wieder aufgegeben. Fig. 2 zeigt das benutzte System der dimensionslosen  $(\xi, \eta, \zeta)$  und der dimensionsbehafteten Koordinaten  $(x, y, z)$ , wobei  $z$  und  $\zeta$  nach unten gerichtet positiv sind, und die Flüssigkeit den unteren Halbraum ausfüllt.

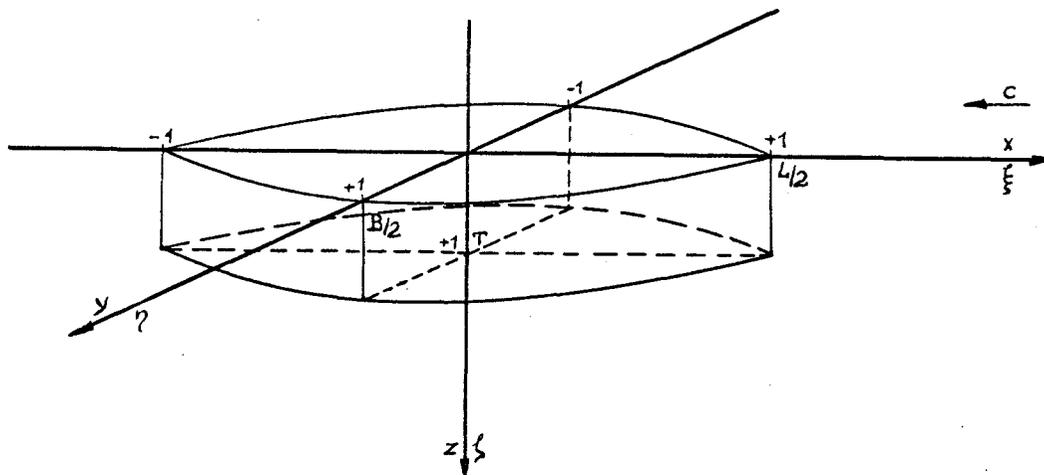


Fig. 2 Das System der kartesischen Koordinaten

Zwischen den Koordinaten bestehen die folgenden Beziehungen

$$x = \frac{L}{2} \cdot \xi , \quad y = \frac{B}{2} \cdot \eta , \quad z = T \cdot \zeta , \quad (17)$$

wobei L die Länge, B die Breite und T der Tiefgang eines Körpers ist.

Im weiteren Verlaufe der Arbeit wird vorzugsweise die dimensions-

lose Schreibweise benutzt.

Kennt man die Singularitätenverteilung von Körpern, die zu einer Ebene  $\eta = y = \text{const}$  symmetrisch sein sollen, dann läßt sich das Widerstandsintegral (16) in der von Havelock /13/ gegebenen Form

$$R = 16\pi g K_0^2 \int_0^{\pi/2} (P^2 + Q^2) \cdot \sec^3 \theta \cdot d\theta \quad (18)$$

(mit  $K_0 = g/c^2$ ) schreiben. P und Q sind Funktionen, die sowohl von der Ordnung p der Singularitäten, die als Exponent in  $\langle \rangle$ -Klammern angegeben wird, als auch von deren Verteilungsform abhängen. Das Integral gilt demnach für beliebige Singularitätenverteilungen und ist absolut konvergent (Birkhoff /5/).

Zur Ordnung von Singularitäten sei bemerkt, daß solche 0. Ordnung ( $p=0$ ) Quellen und solche 1. Ordnung ( $p=1$ ) Dipole sind. Da Singularitäten der Ordnung  $p > 1$  in dem vorliegenden Problem eine untergeordnete Rolle spielen, bleiben diese unberücksichtigt.

### 2.3.1.1. Die Singularitätenverteilungen und deren P- und Q-Funktionen

Der allgemeinste Fall einer Singularitätenverteilung  $S^{\langle p \rangle}(\xi, \zeta)$  ist die Belegung einer Fläche  $\Omega(\xi, \zeta)$ , die in der Schiffshydrodynamik im allgemeinen die Oberfläche oder die Mittellängsebene des Schiffes ist. Sie hat die Gleichung

$$S^{\langle p \rangle}(\xi, \zeta) = s_0^{\langle p \rangle} \cdot \sigma^{\langle p \rangle}(\xi, \zeta). \quad (19a)$$

Mit dem Belegungsintervall  $-1 \leq \xi \leq +1$  und  $0 \leq \zeta \leq +1$ .

$\sigma^{\langle p \rangle}(\xi, \zeta)$  ist die Intensitätsverteilung der Singularitäten p-ter Ordnung und  $s_0^{\langle p \rangle}$  deren Stärke pro Fläche, die eine beliebige Bezugsfläche sein kann. Die P- und Q-Funktionen ergeben sich aus der Gleichung

$$P^{\langle p \rangle} + i \cdot Q^{\langle p \rangle} = q \cdot \int_{\Omega} \sigma^{\langle p \rangle}(\xi, \zeta) \cdot \frac{\partial^p}{\partial \xi^p} \left\{ \exp [K_0 (i \cdot d - \zeta \cdot T) \sec^2 \theta] \right\} d\omega \quad (20a)$$

mit  $q = s_0^{\langle p \rangle} \cdot F_1 / (L/2)^p$ ,  $F_1 = L \cdot T / 2$ ,  $\varepsilon = B/L$

und  $d = L/2 (\xi \cdot \cos \theta + \varepsilon \cdot \eta \cdot \sin \theta)$ .

Die Gleichungen (19a, 20a) gelten formal auch für Kurvenbelegungen und diskrete Singularitäten, von denen drei Sonderfälle der Belegung einer Geraden  $G(\xi, \zeta)$  notiert werden sollen, die für das Wulstproblem von Bedeutung sind.

1. Die Belegungsgerade geht durch den Punkt  $P(\xi_0, \zeta_0)$  und ist zur  $\eta$ -Achse parallel

$$S^{(p)}(\eta) = s_0^{(p)} \cdot \sigma^{(p)}(\eta) \quad (19b)$$

mit dem Belegungsintervall  $-b \leq \eta \leq +b$  und  $s_0^{(p)}$  auf  $\frac{B}{2}$  bezogen;

$$P^{(p)} + i \cdot Q^{(p)} = q \cdot \int_{-b}^{+b} \sigma^{(p)}(\eta) \cdot \frac{\partial^p}{\partial \xi_0^p} \left\{ \exp[K_0(i \cdot \delta - \zeta_0 \cdot T) \sec^2 \theta] \right\} \cdot d\eta \quad (20b)$$

mit  $q = s_0^{(p)} \cdot \frac{B}{2} / (L/2)^p$ ,

$$\delta = L/2(\xi_0 \cdot \cos \theta + \varepsilon \cdot \eta \cdot \sin \theta), \quad \varepsilon = B/L \quad \text{und} \quad \zeta_0 > 0 \quad \text{für} \quad p \geq 1.$$

2. Die Belegungsgerade geht durch den Punkt  $P(\eta_0, \zeta_0)$  und ist zur  $\xi$ -Achse parallel

$$S^{(p)}(\xi) = s_0^{(p)} \cdot \sigma^{(p)}(\xi) \quad (19c)$$

mit dem Belegungsintervall  $-1 \leq \xi \leq +1$  und  $s_0^{(p)}$  auf  $\frac{L}{2}$  bezogen;

$$P^{(p)} + i \cdot Q^{(p)} = q \cdot \int_{-1}^{+1} \sigma^{(p)}(\xi) \cdot \frac{\partial^p}{\partial \xi_0^p} \left\{ \exp[K_0(i \cdot \delta - \zeta_0 \cdot T) \sec^2 \theta] \right\} \cdot d\xi \quad (20c)$$

mit  $q = s_0^{(p)} / (L/2)^{p-1}$ ,

$$\delta = L/2(\xi \cdot \cos \theta + \varepsilon \cdot \eta_0 \cdot \sin \theta), \quad \varepsilon = B/L \quad \text{und} \quad \zeta_0 > 0 \quad \text{für} \quad p \geq 1.$$

3. Die Belegungsgerade geht durch den Punkt  $P(\xi_0, \eta_0)$  und ist zur  $\zeta$ -Achse parallel

$$S^{(p)}(\zeta) = s_0^{(p)} \cdot \sigma^{(p)}(\zeta) \quad (19d)$$

mit dem Belegungsintervall  $t_0 \leq \zeta \leq t$  und  $s_0^{(p)}$  auf  $T$  bezogen;

$$P^{(p)} + i \cdot Q^{(p)} = q \cdot \int_{t_0}^t \sigma^{(p)}(\zeta) \cdot \frac{\partial^p}{\partial \xi_0^p} \left\{ \exp[K_0(i \cdot \delta - \zeta \cdot T) \sec^2 \theta] \right\} \cdot d\zeta \quad (20d)$$

mit  $q = s_0^{(p)} \cdot T / (L/2)^p$ ,

$$\delta = L/2(\xi_0 \cdot \cos \theta + \varepsilon \cdot \eta_0 \cdot \sin \theta), \quad \varepsilon = B/L \quad \text{und} \quad t > t_0 > 0 \quad \text{für} \quad p \geq 1.$$

Die P- und Q-Funktionen der diskreten Singularitäten, die sich in dem Punkt  $P(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$  befinden und wegen ihrer einfachen Gestalt bevorzugt werden, ergeben sich aus der Gleichung

$$P^{(p)} + i \cdot Q^{(p)} = \frac{s_0^{(p)}}{(L/2)^p} \cdot \frac{\partial^p}{\partial \xi_0^p} \left\{ \exp \left[ K_0 (i \cdot \delta - \zeta_0 \cdot T) \sec^2 \theta \right] \right\} \quad (20e)$$

mit  $\delta = L/2 \cdot (\xi_0 \cdot \cos \theta + \epsilon \cdot \eta_0 \cdot \sin \theta)$ ,  $\epsilon = B/L$  und  $\zeta_0 > 0$  für  $p \geq 1$ . Für  $p = 0$ , diskrete Quellen, ist

$$s_0^{(p)} = q_0 = \frac{c \cdot r^2}{4} \quad (19e)$$

die Quellstärke ( $r$  ist der Radius der Querschnittsfläche des Halbkörpers im Unendlichen und  $c$  die Anströmgeschwindigkeit).

Für  $p = 1$ , diskrete Dipole, ist

$$s_0^{(1)} = m_0 = \frac{c \cdot r^3}{2} \quad (19f)$$

das Dipolmoment ( $r$  ist der Radius der Kugel).

Auf Grund der Linearität der Laplaceschen Differentialgleichung (8) kann der Wellenwiderstand auch von beliebigen Kombinationen von verteilten und diskreten Singularitäten unterschiedlicher Ordnung nach Gleichung (18) berechnet werden. Diese Tatsache ist von großer Bedeutung für das Problem der Widerstandsverminderung gegebener Singularitätenverteilungen.

Die Funktion  $\sigma^{(p)}(\xi, \zeta)$  der Gleichung (19a) läßt sich nun in einen symmetrischen und asymmetrischen Anteil zerlegen, so daß

$$\sigma^{(p)}(\xi, \zeta) = \sigma_a^{(p)}(\xi, \zeta) + \sigma_s^{(p)}(\xi, \zeta), \quad (21)$$

wobei sich die Indices  $s$  und  $a$  auf Symmetrie, bzw. Asymmetrie beziehen. Zusammen mit dieser Gleichung ergibt sich die Bedeutung der P- und Q-Funktionen im Integral (18). Danach stellt P den Beitrag des symmetrischen und Q denjenigen des asymmetrischen Terms der Verteilungsfunktion (21) zum Widerstand dar.

#### 2.4. Die Widerstandsmatrix $\mathcal{W} \begin{bmatrix} s, t \\ i, j \end{bmatrix} (r_0, K)$

Werden die Singularitäten nur in der Ebene  $y = \eta = 0$  angeordnet, wobei speziell für Dipole noch deren Achsen parallel zur x-, bzw.

$\xi$ -Achse sein sollen, und wählt man nach einem Vorschlag von Weinblum /58/ aus der Mannigfaltigkeit der Verteilungsfunktionen Produkte

$$\sigma^{(P)}(\xi, \zeta) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} \cdot \xi^{\nu} \cdot \sum_{\mu=0}^m b_{\mu} \cdot \zeta^{\mu} = \eta(\xi) \cdot \tau(\zeta) \quad (22)$$

der Klasse der Polynome, dann lassen sich Typintegrale

$$\mathcal{M}_{ij}^{st}(\gamma_0, K) = \int_0^{\pi/2} M_i(\gamma_0, \theta) \cdot M_j(\gamma_0, \theta) \cdot E_S(\gamma_0, K, \theta) \cdot E_t(\gamma_0, K, \theta) \cdot f(\theta) \cdot d\theta \quad (23)$$

des Integrals (18) angeben, die sich nach einer Idee von Eggers als Elemente einer Widerstandsmatrix

$$\mathcal{M} \left[ \begin{matrix} s, t \\ i, j \end{matrix} \right] (\gamma_0, K)$$

auffassen lassen. Dabei ist

$$\gamma_0 = K_0 \cdot L/2 = 1/(2Fr^2)$$

ein Geschwindigkeitsparameter und K eine Konstante, die sich aus  $K_0 \cdot T$  zu

$$K = 2T/L$$

ergibt. Zunächst werden  $\gamma_0$  und K konstant gehalten.

Der Ausdruck in []-Klammern gibt das Format der Matrix an, auf das im Abschnitt 2.4.1 noch näher eingegangen wird. Zum Kennzeichnen der Matrizen werden vorzugsweise die Buchstaben des deutschen Alphabets verwendet.

Im Typintegral (23) sind nur die M-Funktionen

$$M_i^{(P)} = \int_{-1}^{+1} \xi^i \cdot \frac{\partial^p}{\partial \xi^p} \left\{ \frac{\sin(\gamma_0 \cdot \xi \cdot \sec \theta)}{\cos(\gamma_0 \cdot \xi \cdot \sec \theta)} \right\} \cdot d\xi \quad (23a)$$

sowohl von der Ordnung p als auch von dem Verteilungscharakter der Singularitäten in  $\xi$ -Richtung abhängig. Dagegen bleiben die Funktionen

$$f(\theta) = \sec^3 \theta \quad (23b)$$

und die E-Funktionen

$$E_S(\gamma_0, K, \theta) = \int_0^1 \xi^S \cdot \exp(-K \cdot \gamma_0 \cdot \xi \cdot \sec^2 \theta) \cdot d\xi, \quad (23c)$$

welche die Verteilungsform in  $\zeta$ -Richtung charakterisieren, gleich.

Für diskrete Singularitäten vereinfachen sich die M- und E-Funktionen sehr; indem  $s = i = 0$  wird, konzentriert sich die gesamte Ergiebigkeit in dem Punkt  $P(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ .

Der Vorteil der Typintegrale, der für systematische Untersuchungen von Verteilungsformen und deren Kombinationen mit diskreten Singularitäten nicht hoch genug eingeschätzt werden kann, liegt in deren einmaliger Berechnung für eine Polynomklasse. Ihre Bedeutung im Zusammenhang mit dem Matrizenformalismus, der für das Bearbeiten dieser Probleme auf elektronischen Rechenanlagen prädestiniert ist und auch weitgehend in der vorliegenden Arbeit Anwendung findet, braucht nicht noch extra hervorgehoben zu werden.

#### 2.4.1. Der Aufbau der Widerstandsmatrix

Aus der formalen Darstellung des Typintegrals (23) läßt sich unter Beachtung des kommutativen Gesetzes erkennen, daß die Gesamtheit aller  $\mathcal{M}_{ij}^{st}(\gamma, K)$  für  $s = \text{const}$  und  $t = \text{const}$  eine zur Hauptdiagonalen symmetrische, zweidimensionale Matrix  $\mathcal{U}^{st}[i, j]$

$$\mathcal{U}^{st}[i, j](\gamma, K) = \begin{vmatrix} \mathcal{M}_{00}^{st} & \mathcal{M}_{01}^{st} & \mathcal{M}_{02}^{st} & \dots & \mathcal{M}_{0j}^{st} \\ \mathcal{M}_{10}^{st} & \mathcal{M}_{11}^{st} & \mathcal{M}_{12}^{st} & \dots & \mathcal{M}_{1j}^{st} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \mathcal{M}_{i0}^{st} & \mathcal{M}_{i1}^{st} & \mathcal{M}_{i2}^{st} & \dots & \mathcal{M}_{ij}^{st} \end{vmatrix}$$

bildet, die das Format von  $i$  Zeilen und  $j$  Spalten hat. Dabei sind die Zeilen- und Spaltenindices mit den Exponenten der M-Funktionen identisch.

Alle  $\mathcal{U}^{st}[i, j]$ -Matrizen bilden wiederum als Submatrizen die ebenfalls zur Hauptdiagonalen symmetrische allgemeine Widerstandsmatrix  $\mathcal{M} \begin{bmatrix} s, t \\ i, j \end{bmatrix}$ , die das Format von  $s$  Zeilen und  $t$  Spalten hat.

Dabei sind die Zeilen- und Spaltenindices mit den Exponenten der

E-Funktionen identisch.

$$n_{\substack{[s,t] \\ [i,j]}}(\gamma, K) = \begin{vmatrix} \mathcal{U}^{00}[i,j] & \mathcal{U}^{01}[i,j] & \mathcal{U}^{02}[i,j] & \dots & \mathcal{U}^{0t}[i,j] \\ \mathcal{U}^{10}[i,j] & \mathcal{U}^{11}[i,j] & \mathcal{U}^{12}[i,j] & \dots & \mathcal{U}^{1t}[i,j] \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \mathcal{U}^{s0}[i,j] & \mathcal{U}^{s1}[i,j] & \mathcal{U}^{s2}[i,j] & \dots & \mathcal{U}^{st}[i,j] \end{vmatrix}$$

Sind die Verteilungen in  $\xi$ -Richtung konstant ( $\tau(\xi) = \text{const}$ ,  $s = t = 0$ ), dann ist die Widerstandsmatrix mit der ersten Submatrix  $\mathcal{U}^{00}[i,j]$  identisch, d.h.

$$n_{\substack{[s,t] \\ [i,j]}}(\gamma, K) \equiv \mathcal{U}^{00}[i,j](\gamma, K).$$

2.4.2. Das Berechnen des Widerstandes mit Hilfe der  $n$ -Matrix  
Stehen die Widerstandsmatrizen  $n$  zur Verfügung, dann läßt sich der Widerstand einer beliebigen Singularitätenverteilung in Polynomdarstellung als das Matrizenprodukt schreiben

$$\begin{aligned} R(\gamma, K) &= C \cdot \mathcal{b}[1, m] \cdot (\alpha[1, n] * n_{\substack{[s,t] \\ [i,j]}} * \alpha[1, n]^T) \cdot \mathcal{b}[1, m]^T \\ &= C \cdot \alpha[1, n] * (\mathcal{b}[1, m] \cdot n_{\substack{[s,t] \\ [i,j]}} \cdot \mathcal{b}[1, m]^T) * \alpha[1, n]^T. \end{aligned} \quad (24)$$

C ist eine Konstante, die alle Dimensionsfaktoren enthält.  
 $\alpha[1, n]$  und  $\mathcal{b}[1, m]$  sind einzeilige Koeffizientenmatrizen, deren Elemente mit den Koeffizienten  $a_\nu$ , bzw.  $b_\mu$  des Polynoms (22) übereinstimmen.  $\alpha^T$  und  $\mathcal{b}^T$  sind die entsprechenden transponierten Matrizen. Werden kontinuierliche Flächen- mit Linienverteilungen oder diskreten Singularitäten kombiniert, dann wird deren Verwendung im Format der Matrix  $\alpha$  mit

$$\alpha[1, n; s_0; s_1; \dots]$$

angezeigt, wobei  $s_0; s_1; \dots$  die Konstanten nach Gleichung (19) sind. Die Ausführung der verschiedenen Matrizenprodukte, deren Definition für die Programmierung notwendig ist, wird im Anhang 2

näher beschrieben, so daß eine eingehende Erläuterung an dieser Stelle unterbleiben kann.

## 2.5. Die Verminderung des Wellenwiderstandes

Außer der Berechnung des Wellenwiderstandes gegebener Singularitätenverteilungen umfaßt das Widerstandsproblem noch die beiden Minimalprobleme

1. das Suchen der Verteilung geringsten Wellenwiderstandes und
2. das Vermindern des Wellenwiderstandes gegebener Verteilungen, deren lineartheoretische Lösungen auch für die Praxis wertvoll sind. Da das Optimum in beiden Fällen immer nur für eine bestimmte Geschwindigkeit gilt, wird in diesem Abschnitt  $\gamma_0$  zunächst als konstanter Parameter angesehen.

### 2.5.1. Das erste Minimalproblem, die Verteilung geringsten Wellenwiderstandes

Mit Hilfe einer analytischen Form des Integrales (18) läßt sich dieses Minimalproblem als eine Variationsaufgabe formulieren, deren Lösung die optimale Verteilungsform ist, aus der sich dann der resultierende Umströmungskörper geringsten Wellenwiderstandes berechnen läßt. Damit triviale Lösungen ausgeschlossen sind, muß die Verteilungsfunktion noch geeigneten Grenzbedingungen unterworfen werden. Um das Problem übersichtlicher behandeln zu können, wird das Integral (18) durch die Substitution

$$\gamma = L/2 \cdot K_0 \cdot \sec\theta = \gamma_0 \cdot \sec\theta \quad (\gamma_0 \leq \gamma \leq \infty)$$

in die dimensionslose Form

$$R^+(\gamma_0, K) = \iiint_{\gamma_0^{-1} \cdot 0}^{\infty \cdot 1 \cdot 1} \sigma^{(p)}(\xi, \zeta) d\xi \cdot d\zeta \cdot \iiint_{-1 \cdot 0}^{+1 \cdot 1} \sigma^{(q)}(\xi', \zeta') d\xi' \cdot d\zeta' \cdot \exp[-\lambda(\xi + \xi')] \cdot \frac{\partial^{p+q}}{\partial \xi^p \cdot \partial \xi'^q} \left\{ \cos[\gamma(\xi - \xi') + h(\gamma) \cdot (\eta - \eta')] \right\} \cdot f(\gamma) \cdot d\gamma \quad (25)$$

gebracht, mit  $\lambda = 2T/L \cdot \gamma^2/\gamma_0 = K \cdot \gamma^2/\gamma_0$ ,

$$h(\gamma) = B/L \cdot \gamma/\gamma_0 \cdot \sqrt{\gamma^2 - \gamma_0^2} = \epsilon \cdot \gamma/\gamma_0 \cdot \sqrt{\gamma^2 - \gamma_0^2}, \quad f(\gamma) = \frac{\gamma^2}{\gamma_0^2 \cdot \sqrt{\gamma^2 - \gamma_0^2}}$$

$$\text{und} \quad R^+(\gamma_0, K) = R(\gamma_0, K) \cdot \frac{(L/2)^{p+q}}{16 \cdot \pi \cdot \rho \cdot K_0^2 \cdot s_0^{(p)} \cdot s_0^{(q)} \cdot F_1 \cdot F_1} \quad (25a)$$

Wird das Problem auf Mittellängsbelegungen beschränkt ( $\eta = \eta' = 0$ ), dann ist die optimale Verteilungsfunktion  $\sigma^{(p)}(\xi, \xi')$  die Lösung der Integralgleichung 1. Ordnung

$$\iint_{-1}^{+1} \sigma^{(p)}(\xi', \xi') d\xi' d\xi' \cdot \int_0^{\infty} \frac{\partial^p}{\partial r^p} \{ \cos[r(\xi - \xi')] \} \cdot \exp[-\mathcal{A}(\xi + \xi')] \cdot f(r) \cdot dr = k \cdot \xi \quad (26)$$

Der Punkt  $P(\xi, \xi')$  muß innerhalb des Intervalls  $-1 \leq \xi \leq +1$  und  $0 \leq \xi' \leq +1$  liegen. Als Grenzbedingung, die zum Bestimmen der Konstanten  $k$  notwendig und hinreichend ist, muß für  $p = 0$  (Quellen)

$$\sigma^{(0)}(\xi, \xi) = \sigma(\xi, \xi) \quad (27)$$

$$\iint_{-1}^{+1} \xi \sigma(\xi, \xi) \cdot d\xi d\xi = 1 \quad (27a)$$

und

für  $p = 1$  (Dipole)

$$\sigma^{(1)}(\xi, \xi) = \mu(\xi, \xi) \quad (28)$$

$$\iint_{-1}^{+1} \mu(\xi, \xi) \cdot d\xi \cdot d\xi = 1 \quad (28a)$$

gefordert werden, damit ein Körper endlichen aber von Null verschiedenen Volumens aus der Singularitätenverteilung, die ein endliches Gesamtmoment hat, resultiert.

Die Aufgabe ist eingehend in der Literatur behandelt worden (Wehausen /35/, Maruo /25/). Hier sollen nur die Ergebnisse die Karp, Kotik und Lurye /20/ mit Dipolverteilungen  $\mu(\xi)$ , die in vertikaler Richtung von  $0 \leq \xi \leq \infty$  konstant sind, angedeutet werden. Für diesen Fall läßt sich nämlich die vereinfachte Integralgleichung (26)

$$\int_{-1}^{+1} \mu(\xi) \cdot Y_0(r(\xi - \xi')) \cdot d\xi' = \mathcal{A} \quad (26a)$$

( $\mathcal{A}$  ist der konstante Lagrangesche Multiplikator und  $Y_0$  die Neumannsche Funktion 0. Ordnung) mit der Bedingung

$$\int_{-1}^{+1} \mu(\xi) \cdot d\xi = 1 \quad (28b)$$

nach der Regel B für  $\mu = 0$  der Arbeit von Krein /21/ lösen, wenn für die Lösungsfunktion  $\mu(\xi)$  nur die Integrierbarkeit gefordert wird, die i.a. leichter zu erfüllen ist als die Stetigkeit und Beschränktheit.  $\mu(\xi)$  kann dabei auch Unstetigkeitsstellen und unendliche Differentialquotienten haben, wie die Ergebnisse in /20/, die für kleine  $\mu$  nach Wehausen /35/ vom Typ

$$\mu(\xi) = \frac{1}{\pi \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (29)$$

sind, an den Intervallgrenzen bei  $\xi = \pm 1$  zeigen.

Die von Karp, Kotik und Lurye /20/ errechneten Körperkonturen, die trotz der Polstellen der Verteilungsfunktion (29) bei  $\xi = \pm 1$  geschlossene Körper endlichen Volumens ergeben, zeigen die typischen Eigenschaften von Optimalformen. Bei hohen Geschwindigkeiten ( $Fr > 0.6$ ) haben die knochenförmigen Konturen ihre größte Breite an den Enden; das Volumen verlagert sich in das Stevengebiet. Die Wellenlängen werden hierbei so groß, daß die Effekte schon durch Singularitäten beschrieben werden können, die im Stevengebiet konzentriert sind. Werden die Froudeschen Zahlen kleiner, dann gehen die Konturen über die Schwanenhalsformen in normale Formen über, die ihre größte Breite in der Mitte haben ( $Fr < 0.5$ ). Allen Konturen ist die unendliche Tangentensteigung bei  $\xi = \pm 1/2$ , den Körperenden, gemeinsam.

Lösungsfunktionen für kleine Geschwindigkeiten hat Bessho /4/ angegeben, ohne jedoch die zugehörigen Körperkonturen bestimmt zu haben.

Engt man die Klasse der Lösungsfunktionen ein, dann wird zwar die Allgemeingültigkeit der Lösungen beschränkt, der Lösungsweg aber einfacher. So läßt sich das Problem, wie Weinblum /39/ gezeigt hat, für die Funktionenklasse der Polynome nach Gleichung (22) nach der Ritzschen Methode behandeln. Danach entartet die Variationsaufgabe in das Auflösen eines linearen Gleichungssystems, dessen Lösungen die unbekanntenen Koeffizienten des gewählten Polynoms sind. Mit Hilfe der Matrizenrechnung kann diese Minimalaufgabe unter Verwenden des Lagrangeschen Multiplikators  $\lambda$  wie folgt gelöst werden. (Die Formate der Matrizen sind der Übersichtlichkeit halber weggelassen worden.)

Die Funktion

$$F(\alpha, b, \lambda_1, \lambda_2) = b \cdot (\alpha * \mathcal{N} * \alpha^T) \cdot b^T - \lambda_1 \cdot (\alpha \cdot \alpha^T - \mathcal{L}_a) - \lambda_2 \cdot (b \cdot b^T - \mathcal{L}_b) = 0 \quad (30)$$

ist so zu optimieren, daß unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \alpha^T - \mathcal{L}_a &= 0 \\ b \cdot b^T - \mathcal{L}_b &= 0 \end{aligned} \quad (30a)$$

der Widerstand  $R^+ = b \cdot (\alpha * \mathcal{N} * \alpha^T) \cdot b^T$

zu einem Minimum wird. Zum Bestimmen der unbekanntenen Matrizen, ist das folgende Gleichungssystem zu lösen

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \alpha} &= 0 = 2 \cdot b \cdot (\mathcal{N} * \alpha^T) \cdot b^T - \lambda_1 \cdot \alpha \\ \frac{\partial F}{\partial b} &= 0 = 2 \cdot (\alpha * \mathcal{N} * \alpha^T) \cdot b^T - \lambda_2 \cdot b \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} &= 0 = \alpha \cdot \alpha^T - \mathcal{L}_a \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} &= 0 = b \cdot b^T - \mathcal{L}_b \end{aligned} \quad (30b)$$

Die Differentiation der Funktion F nach den Matrizen ist elementweise durchzuführen. (Über die Matrizenmultiplikation, siehe Anhang 2.)

Als Lösung ergeben sich die gesuchten Koeffizientenmatrizen in der impliziten Form zu

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha * (b \cdot \mathcal{N} \cdot b^T)^{-1} \cdot (\alpha * (b \cdot \mathcal{N} \cdot b^T) * \alpha^T)^{-1/2} \cdot \mathcal{L}_a \\ b &= b \cdot (\alpha * \mathcal{N} * \alpha^T)^{-1} \cdot (b \cdot (\alpha * \mathcal{N} * \alpha^T) \cdot b^T)^{-1/2} \cdot \mathcal{L}_b \end{aligned} \quad (31)$$

Dabei bedeutet

- $\alpha[1, n]$  die gesuchte Koeffizientenmatrix der horizont. Verteilung  $\eta(\xi)$
- $b[1, m]$  die gesuchte Koeffizientenmatrix der vertikal. Verteilung  $\tau(\xi)$
- $\alpha[1, n]$  die Koeffizientenmatrix der Nebenbedingungen zu  $\alpha$
- $b[1, m]$  die Koeffizientenmatrix der Nebenbedingungen zu  $b$
- $\mathcal{L}_a[1, n]$  die Konstantenmatrix der Nebenbedingungen zu  $\alpha$
- $\mathcal{L}_b[1, m]$  die Konstantenmatrix der Nebenbedingungen zu  $b$
- $\lambda_1[1, n], \lambda_2[1, m]$  die Matrizen der Lagrangeschen Multiplikatoren.

Die Schwierigkeit in der numerischen Auswertung der allgemeinen Lösung (31) zwingt auch in diesem Fall, sich auf vertikal konstante Verteilungen zu beschränken. Wegen  $b \equiv 1$  und  $\mathcal{N} \equiv \mathcal{N}^{\circ\circ}$  erhält man

die gesuchte Koeffizientenmatrix der horizontalen Verteilung zu

$$\alpha_{[1,n]} = \alpha \cdot \mathcal{U}^{-1} \cdot (\alpha \cdot \mathcal{U} \cdot \alpha^T)^{-1} \cdot \mathcal{L}_a \quad (31a)$$

als optimale Lösung der Gleichung

$$F(\alpha, \mathcal{L}) = \alpha \cdot \mathcal{U} \cdot \alpha^T - \mathcal{L} \cdot (\alpha \cdot \alpha^T - \mathcal{L}_a) = 0 \quad (30a)$$

Prinzipiell können die Matrizen  $\alpha$  und  $\mathcal{L}$  auch mehrzeilig sein, d.h. verschiedene Polynomformen mit gleichen Nebenbedingungen, oder gleiche Polynome verschiedener Nebenbedingungen können gleichzeitig behandelt werden. (Sharma /29/).

Die Lösungen dieses vereinfachten Minimalproblems für Quellsingularitäten sind als Schwanenhalsformen von Weinblum /39/ bekannt, deren zugehörige Körperkonturen wegen der Havelockschen Approximation alle endliche Tangentensteigungen in den Loten ( $\xi = \pm 1$ ) haben.

### 2.5.2. Das zweite Minimalproblem, die Verminderung des Wellenwiderstandes gegebener Singularitätenverteilungen

In der Literatur finden sich hierfür zwei Betrachtungsweisen, die theoretisch identisch sind und sich nur in der experimentellen Behandlung des Problems unterscheiden.

1. Methode : Da der Wellenwiderstand einen unmittelbar visuellen Ausdruck im Wellenbild hat, ist das Auslöschen des Wellenbildes äquivalent mit dem Annullieren des Wellenwiderstandes. Dadurch erscheint das Optimieren gegebener Verteilungsformen nach der ersten Betrachtungsmethode als ein reines Interferenzproblem, die von Inui /13 - 16/, Kumano /20/, Takahei /29/ und teilweise auch von Yim/46 - 50/ bevorzugt angewandt wird.

Nach Havelock /14/ ist die Wellenerhebung  $\zeta(\xi, \eta)$  des freien Wellensystems einer mit konstanter Geschwindigkeit  $c$  fortschreitenden Störung das Integral aller sin- und cos-Elementarwellen

$$\zeta(\xi, \eta) = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \{S(\theta) \cdot \sin(K_0 \sec^2 \theta \cdot \sigma) + C(\theta) \cdot \cos(K_0 \sec^2 \theta \cdot \sigma)\} \cdot d\theta \quad (32)$$

mit  $\sigma = \xi \cdot \cos \theta + \eta \cdot \sin \theta$ . Dabei können  $S(\theta)$  und  $C(\theta)$  als Amplitudenfunktionen der sin- und cos-Anteile gedeutet werden. Es liegt nun nahe, daß ein primäres Wellensystem nur dann für alle  $\xi$  und  $\eta$

durch ein sekundäres ausgelöscht werden kann, wenn

$$S(\theta) - s(\theta) = 0 \tag{33}$$

und 
$$C(\theta) - c(\theta) = 0$$

als zu fordernde Bedingungen von den interferierenden Systemen erfüllt werden. ( $s(\theta)$  und  $c(\theta)$  sind die Amplitudenfunktionen des Sekundärwellensystems.)

Yim /49/ hat nun in sehr eindrucksvoller Weise gezeigt, daß das freie Wellensystem einer gegebenen Singularitätenverteilung  $p$ -ter Ordnung nur dann vollständig zum Verschwinden gebracht werden kann, wenn in deren Endpunkten halb unendlich lange vertikale Verteilungen von Singularitäten der Ordnung  $q > p$  addiert werden. Wird die vertikale Verteilung z.B. bei  $\zeta = \zeta_1$  abgebrochen, dann verbleibt ein Restwellensystem, das demjenigen der Ausgangsverteilung äquivalent ist, wenn diese in der Tiefe  $\zeta_1$  angeordnet werden würde (Maruo /25/). Die Wellenerhebungen der elementaren Singularitäten sind im Anhang 4 wiedergegeben. Innerhalb der experimentellen Verifikation wird die transversale Komponente ( $\theta \approx 0$ ) des Wellensystems bevorzugt.

Da diese Methode für systematische Untersuchungen von Verteilungsformen weniger geeignet ist, hat Weinblum /42/ einen anderen Weg vorgeschlagen, der auf die zweite Methode führt.

2. Methode : Hierbei wird auf das Integral (18) zurückgegriffen und die Wirkung einer additiven Singularität betrachtet, die bezüglich des zu behandelnden Themas als Wulstsingularität bezeichnet werden soll. Zur Unterscheidung der verschiedenen  $P$ - und  $Q$ -Funktionen nach Gleichung (20) erhalten diejenigen der Ausgangsverteilung den Index 0 und die Ordnung  $p$ , resp. diejenigen der Wulstsingularitäten den Index  $w$  und die Ordnung  $q$ .

Nach Gleichung (18) wird  $R^+$  nur dann verschwinden, wenn der Ausdruck

$$(P_0^{(p)})^2 + 2 \cdot P_0^{(p)} \cdot P_w^{(q)} + (P_w^{(q)})^2 + (Q_0^{(p)})^2 + 2 \cdot Q_0^{(p)} \cdot Q_w^{(q)} + (Q_w^{(q)})^2 = 0 \tag{34}$$

zu Null gemacht werden kann. Dies gelingt wiederum nur, wenn  $P_w^{(q)}$  und  $Q_w^{(q)}$  unendlich langen, vertikalen Verteilungen von Wulstsingularitäten nach Gleichung (19d) in den Endpunkten der Aus-

gangsverteilung entsprechen, deren Ordnung

$$q > p$$

sein muß (Yim /49/).

In der Praxis spielen jedoch halbunendliche, vertikale Verteilungen keine Rolle, so daß  $R^+(\gamma, K)$  nach Gleichung (25) nur zu einem Minimum gemacht werden kann, das im allgemeinen größer als Null sein wird. Die Frage, ob der Wellenwiderstand jeder Verteilung  $S_0^{(p)}(\xi, \zeta)$  durch eine Wulstsingularität verringert werden kann, ist im Anhang 1 geklärt worden. An späterer Stelle wird noch näher darauf eingegangen.

### 2.5.2.1. Die Optimalaufgabe

Bei dem zweiten Minimalproblem handelt es sich also um das Widerstandsverhalten von Singularitätenkombinationen, die im einfachsten und zugleich häufigsten Fall aus zwei Elementen bestehen. Ist das erste Element  $S_0^{(p)}(\xi, \zeta)$  die gegebene Ausgangsverteilung und das zweite die additive Wulstsingularität  $S_w^{(q)}(\xi, \zeta)$ , dann lassen die P- und Q-Funktionen nach Gleichung (20) erkennen, daß der minimale Wellenwiderstand der Kombination

$$R_{\text{komb}} = f(S_w^{(q)}(\xi, \zeta)) \quad (35)$$

sowohl von der Wulststärke  $s_w^{(q)}$  als auch von deren Lage abhängt. Darüber hinaus spielt die Ordnung  $q$  noch eine Rolle.

Damit ist das Ziel der vorliegenden Arbeit umrissen:

Für gegebene Singularitätenverteilungen die geeignetsten Verteilungen von Wulstsingularitäten zu finden, die optimal in ihrer Größe, Lage und Ordnung den Wellenwiderstand der Singularitätenkombination zu einem Minimum machen.

Beschränkt man sich beim Untersuchen von Verteilungsfunktionen auf die Klasse der Polynome nach Gleichung (22), dann kann zur Lösung der Aufgabe die Matrizenrechnung herangezogen werden. Die Anwendung der Optimalbedingung

$$\frac{\partial}{\partial s_w^{(q)}} \{R(\gamma, K)\} = 0$$

auf die Gleichung (24) führt auf die Gleichung

$$0 = 2 \cdot \alpha' * (\beta \cdot \mathcal{N} \cdot \beta^T) * \alpha [1, n; s_w^{(q)}]^T, \quad (36)$$

wobei  $\alpha' = \frac{\partial}{\partial s_w^{(q)}} (\alpha [1, n; s_w^{(q)}])$ , die man mit

$$\alpha [1, n; 0]^T = \alpha [1, n; s_w^{(q)}]^T - s_w^{(q)} \cdot \alpha'^T$$

zu

$$0 = \alpha' * (\beta \cdot \mathcal{N} \cdot \beta^T) * \alpha [1, n; 0]^T + s_w^{(q)} \cdot \alpha' * (\beta \cdot \mathcal{N} \cdot \beta^T) * \alpha'^T \quad (36a)$$

umformen kann. Aus dieser Gleichung folgt nun das optimale  $s_w^{(q)}$  als der Quotient

$$s_w^{(q)} = - \frac{\alpha' * (\beta \cdot \mathcal{N} \cdot \beta^T) * \alpha [1, n; 0]^T}{\alpha' * (\beta \cdot \mathcal{N} \cdot \beta^T) * \alpha'^T}, \quad (37a)$$

der sich für die vertikal konstante Verteilung  $S_0^{(p)}(\xi)$  zu

$$s_w^{(q)} = - \frac{\alpha' \cdot \mathcal{U}^{00} [i, j] \cdot \alpha [1, n; 0]^T}{\alpha' \cdot \mathcal{U}^{00} [i, j] \cdot \alpha'^T} \quad (37b)$$

vereinfacht.

Über die Abhängigkeit des optimalen  $s_w^{(q)}$  von den Ortskoordinaten läßt sich zwar keine so einfache Aussage mehr treffen, eine qualitative Abschätzung, z.B. für diskrete Wulstsingularitäten, ist aber möglich. So wird in diesem Fall

$$s_w^{(q)} = f(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$$

eine Funktion der Lage der Punktsingularität sein. Sind nun  $\xi_0$  und  $\eta_0$  konstant; dann ist das optimale  $s_w^{(q)}$  eine monotone Funktion von  $\zeta_0$ , wie in evidenter Weise aus der Gleichung (20e) folgt. Es wächst einsinnig, wenn  $\zeta_0$  gegen Unendlich geht. Da monotone Funktionen keine Extremwerte haben, kann

$$\zeta_0 = f = z_0 / T$$

als Parameter eingeführt werden, das die Lage der Tiefe nach angibt. Bei konstantem  $\eta_0$  und  $\zeta_0$  ist  $s_w^{(q)}$  eine mehr oder minder stark oszillierende Funktion von

$$\xi_0 = d = x_0 / (L/2)$$

der Lage der Länge nach, mit ausgeprägten Extremwerten, die sich leider nicht in einer so einfachen Weise explizit ausdrücken lassen, wie sie in der Gleichung (37) für  $s_w^{(q)}$  gefunden worden ist.

Um dennoch zu einem Ergebnis zu gelangen, hilft hier nur das punktweise Berechnen des optimalen  $s_w^{opt}$  und das Anwenden eines graphischen oder numerischen Interpolationsverfahrens. Die Abhängigkeit von  $\eta_0$  ist nur der Vollständigkeit halber erwähnt worden. Für Mittellängsbelegungen ist  $\eta_0 = 0$ .

### 2.5.3. Der Änderungswiderstand $\Delta R^+(r_0, K)$

Um den Einfluß einer infinitesimalen Änderung einer gegebenen Singularitätenverteilung auf deren Wellenwiderstand abschätzen zu können, wird der Änderungswiderstand  $\Delta R^+(r_0, K)$  definiert, der sich aus der Gleichung (26) in dimensionsloser Form zu

$$\Delta R^+(r_0, K) = \int_{r_0}^{\infty} f(r) \cdot \iint \sigma^{(p)}(\xi, \zeta) \cdot d\xi \cdot d\zeta \cdot \Delta \sigma^{(q)} \cdot \exp[-\nu(\zeta + \zeta_0)] \cdot \frac{\partial^{p+q}}{\partial \xi^p \cdot \partial \xi_0^q} \{ \cos[r(\xi - \xi_0) + h(r) \cdot (\eta - \eta_0)] \} \cdot dr \quad (38)$$

ergibt und eine Funktion der Lage der Änderungssingularität  $\Delta \sigma^{(q)}$ , die sich in dem Punkt  $P(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$  befindet, sowie deren Ordnung  $q$  ist. Die primäre Information des Änderungswiderstandes ist sein Vorzeichen, das direkt die positive oder negative Wirkung einer solchen Änderung anzeigt. Nebenbei sei bemerkt, daß  $\Delta R^+(r_0, K)$  für Optimalverteilungen Null sein muß, wenn  $p = q$  ist.

Für Mittellängsbelegungen vereinfacht sich der Ausdruck (38) zu

$$\Delta R^+(r_0, K) = \int_{r_0}^{\infty} f(r) \cdot \iint \sigma^{(p)}(\xi, \zeta) \cdot d\xi \cdot d\zeta \cdot \Delta \sigma^{(q)} \cdot \exp[-\nu(\zeta + \zeta_0)] \cdot \frac{\partial^{p+q}}{\partial \xi^p \cdot \partial \xi_0^q} \{ \cos[r(\xi - \xi_0)] \} \cdot dr \quad (38a)$$

und hat für die spezielle Klasse der Polynome die Gestalt

$$\Delta R^+(r_0, K) = \frac{\partial}{\partial \Delta \sigma^{(q)}} \{ \alpha_L [1, \eta; \Delta \sigma^{(q)}] \} * (B \cdot \eta \cdot B^T) * \alpha_L [1, \eta; 0]^T \quad (38b)$$

beziehungsweise

$$\Delta R^+(r_0, K) = \frac{\partial}{\partial \Delta \sigma^{(q)}} \{ \alpha_L [1, \eta; \Delta \sigma^{(q)}] \} \cdot \mathcal{U}^{oo} [i, j] \cdot \alpha_L [1, \eta; 0]^T \quad (38c)$$

Mit Hilfe des Änderungswiderstandes ist es nun möglich, diejenige

Ordnung  $q$  einer Wulstsingularität zu bestimmen, die mit einer Ausgangsverteilung  $\sigma_0^{(q)}(\xi, \zeta)$  kombiniert deren Wellenwiderstand in einem möglichst großen Geschwindigkeitsintervall

$$\Gamma_1 \leq \gamma_0 \leq \Gamma_2$$

verringert. Damit

$$R_{\text{komb}}^+(\gamma, K) \leq R_0^+(\gamma_0, K)$$

ist, muß  $\Delta R^+(\gamma, K) \leq 0$

im ganzen Intervall sein.

### 3. Numerischer Teil

In dem folgenden Teil soll an Hand konkreter Fälle die Frage der Verringerung des Wellenwiderstandes gegebener Schiffsformen mit Hilfe der Ergebnisse der linearen Theorie erörtert werden. Dabei erscheint es sinnvoll, die anfallende numerische Arbeit auf ein notwendiges Maß herabzudrücken und sich nur auf zum Hauptspant symmetrische Schiffsformen zu beschränken, deren Wellenwiderstand im Vergleich zu asymmetrischen Formen der geringste ist, wie in evidenter Weise aus dem Michell-Havelockschen-Widerstandsintegral (18) folgt. Nur in der Addition der Wulstformen werden neben symmetrischen auch asymmetrische Anordnungen zugelassen, um praktischen Fällen gerecht zu werden, in denen nur ein Bugwulst Verwendung findet.

Bevor mit der eigentlichen numerischen Arbeit begonnen werden kann, muß noch auf die gegenseitige Zuordnung von Singularitätenverteilung und Körperform eingegangen werden, da das Widerstandsintegral (18) exakt nur für Singularitätenverteilungen gilt.

#### 3.1. Relationen zwischen Singularitätenverteilungen und Körperform

Wegen einer gewissen Indeterminiertheit des Problems selbst, ist eine umkehrbar eindeutige Zuordnung von Singularitätenverteilung und Körperform kaum möglich, die durch die Anwesenheit einer freien Oberfläche noch fragwürdiger wird. Verzichtet man dagegen auf so strenge Forderungen der gegenseitigen Zuordnung, dann lassen

sich zwei Wege verfolgen, eine Korrespondenz zwischen Körperform und Singularitätenverteilung zu erreichen.

Im ersten Fall ist die Singularitätenverteilung gegeben, aus der die Körperkontur durch Lösen der Differentialgleichungen der Stromlinien ermittelt werden kann. Dieses Verfahren bereitet selbst für kompliziertere Verteilungsformen mit Berücksichtigung des Einflusses einer freien Oberfläche (Kajitani /17/) mit der heutigen Leistungsfähigkeit der elektronischen Rechengерäte kaum noch Schwierigkeiten. Allerdings ist dieser Weg speziell für das Untersuchen systematischer Schiffsförmn, die durch geeignete Hauptparameter gekennzeichnet sind, besonders für Schiffsförmn mit Wülsten an den Enden, sehr aufwendig; da die resultierenden Umströmungskörper relativ willkürlich sind.

Im zweiten Fall ist die Körperkontur gegeben. Die zugehörige Singularitätenverteilung ergibt sich dann als Lösung der entsprechenden Integralgleichung. Obwohl dieser Weg für das vorliegende Problem geeignet ist, kann das äußerst komplizierte Lösen der Integralgleichung für das linearisierte Problem vermieden werden. Die Unstetigkeitsstelle, die  $\varphi_y(x,y,z)$  in der Ebene  $y = 0$  hat, führt zu Singularitätenverteilungen nach Gleichung (19a) der Ordnung  $p = 0$ ; denn Quellsingularitäten erzeugen gerade einen Geschwindigkeitssprung in ihrer Verteilungsebene  $F(x,z)$ , deren Rand allerdings ausgeschlossen ist. Nach Lunde /24/ erhält man für die Summe aller im Punkt  $P(x,0,z)$  innerhalb von  $F(x,z)$  induzierten Komponenten der Normalgeschwindigkeiten der Verteilung  $S^{(0)}(x,z)$  zusammen mit der Randbedingung nach Gleichung (10a) die Beziehung

$$v = \pm 2\pi \cdot S^{(0)}(x,z) = \pm \varphi_y(x,0,z) = \mp c \cdot \frac{\partial S(x,z)}{\partial x} \quad (39)$$

aus der sich die Havelocksche Approximation für schmale Körper

$$S^{(0)}(x,z) = - \frac{c}{2\pi} \cdot \frac{\partial S(x,z)}{\partial x} \quad (L/B \gg 1) \quad (40)$$

ableitet.

Diese Beziehung zwischen der Körperkontur  $S(x,z)$  und der sie erzeugenden Verteilungsfunktion  $S^{(0)}(x,z)$  von Quellsingularitäten soll im Rahmen der Linearisation als umkehrbar eindeutig gelten.

Sie wird um so genauer, je größer L/B wird, d.h. wenn

$$\frac{\partial S(x,z)}{\partial x} \rightarrow 0$$

geht. Setzt man die Approximation in das Widerstandsintegral (18) ein, dann erhält man die Darstellung, die Michell /26/ für das Integrationsintervall  $-\infty \leq x \leq +\infty$  und  $0 \leq z \leq +\infty$  angegeben hat.

In dem dimensionslosen Koordinatensystem lautet Gleichung (40)

$$S^{(0)}(\xi, \zeta) = - \frac{c \cdot B}{2\pi \cdot L} \cdot \frac{\partial \Omega(\xi, \zeta)}{\partial \xi} . \quad (41)$$

Zusammen mit Gleichung (19a) folgt für die Intensitätsverteilung der Quellsingularitäten, wobei der Exponent  $p = 0$  wegfallen kann,

$$\sigma(\xi, \zeta) = - \frac{\partial \Omega(\xi, \zeta)}{\partial \xi} \quad (42)$$

und 
$$s_0 = \frac{c \cdot B}{2\pi \cdot L} . \quad (43)$$

Ist nun die Funktion  $\Omega(\xi, \zeta)$  in Form von Polynomprodukten nach Gleichung (22) gegeben, dann kann die eingeführte Matrixschreibweise vollkommen beibehalten werden, da die definierten Typintegrale der Widerstandsmatrix  $\mathcal{M}$  unverändert bleiben.

### 3.1.1. Die Darstellung der Schiffsoberfläche

Die Möglichkeiten in der mathematischen Beschreibung der Schiffsoberfläche  $y = S(x,z)$ , die erst die Grundlage einer systematischen Forschung bildet, sind von Weinblum /41/ eingehend beschrieben worden und brauchen nicht wiederholt zu werden. Für das Studium des Wulsteffektes ist es dabei angebracht, einfache analytische Ausdrücke der Funktion  $S(x,z)$  auszuwählen, die aber noch das Typische eines Schiffes erkennen lassen.

Die einfachste Schiffform ist die von Weinblum /41/ eingeführte Elementarschiffform, deren Oberflächengleichung

$$y = f(x) \cdot g(z)$$

die Hauptmerkmale erkennen läßt, nämlich alle Wasserlinien und Spante sind affin, die Mittellängsebene ist ein Rechteck und die dimensionslose Form der Schwimmwasserlinie stimmt mit derjenigen der Spantarealkurve überein.

Das Beschränken auf Polynome und die dimensionslose Schreibweise führen schließlich zu der Oberflächengleichung

$$\Omega(\xi, \zeta) = \eta(\xi) \cdot \tau(\zeta) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} \cdot \xi^{\nu} \cdot \sum_{\mu=0}^m b_{\mu} \cdot \zeta^{\mu} \quad \begin{array}{l} -1 \leq \xi \leq +1 \\ 0 \leq \zeta \leq +1 \end{array} \quad (44)$$

bzw.

$$\Omega(\xi, \zeta) = \eta(\xi) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} \cdot \xi^{\nu} \quad (44a)$$

für Schiffe mit rechteckigem Hauptspant. Im Falle zum Hauptspant symmetrischer Schiffssformen ist

$$\Omega(\xi, \zeta) = \eta(\xi) = \sum_{\nu=0}^n a_{2\nu} \cdot \xi^{2\nu} \quad (44b)$$

Die Bedingungen, die z.B. an die Völligkeiten und an das Verhalten der Funktionen  $\eta(\xi)$  und  $\tau(\zeta)$  an den Intervallgrenzen  $\xi=\zeta=0$  und  $\xi=\zeta=\pm 1$  gestellt werden, führen zu den Bestimmungsgleichungen für die unbekanntenen Koeffizienten  $a_{\nu}$  und  $b_{\mu}$  (näheres s. Weinblum /45/ und /46/).

Für Elementarschiffe nach Gleichung (44b) hat Weinblum eine Kurzschreibweise eingeführt, die sowohl die Hauptparameter als auch den Grad des verwendeten Polynoms erkennen läßt. Danach bedeutet

$$\text{Form}(2,4,\dots,2n,\varphi,t)$$

eine zum Hauptspant symmetrische Elementarschiffsform mit senkrechten Seitenwänden, deren Oberfläche durch ein Polynom  $2n$ . Grades mit nur geraden Exponenten von  $\xi$  beschrieben wird und deren Spantarealkurve  $\eta(\xi)$  die Völligkeit

$$\varphi = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \eta(\xi) \cdot d\xi = \sum_{\nu=0}^n \frac{1}{2\nu+1} \cdot a_{2\nu} \quad (45)$$

und die Tangentensteigung

$$t = -\eta'(1) = -\sum_{\nu=0}^n 2\nu \cdot a_{2\nu} \quad (46)$$

im Punkt  $\xi = +1$  hat. Diese Kurzschreibweise wird zur Charakterisierung der Schiffssformen in dieser Arbeit verwendet.

An konkreten Formen werden nur Polynome 6. Grades numerisch behandelt. Zur Bestimmung der vier Koeffizienten  $a_0$ ,  $a_2$ ,  $a_4$  und  $a_6$

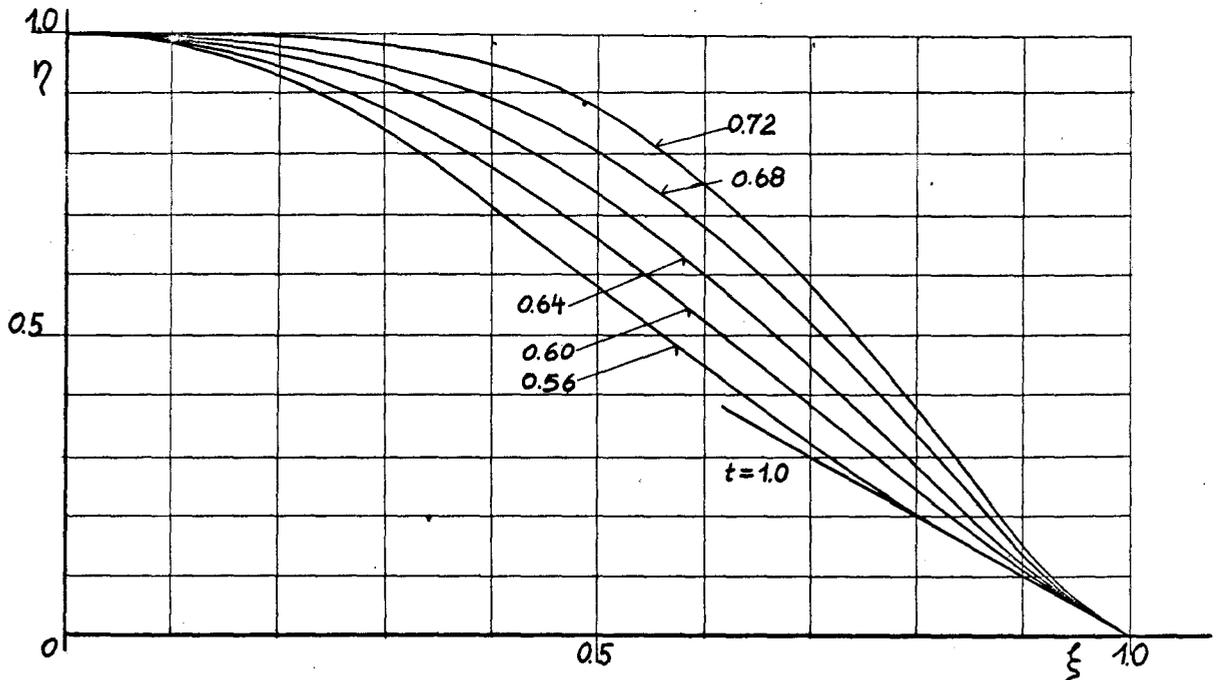
nach Gleichung (44b) wird von der Funktion  $\eta(\xi)$  noch

$$\eta(1) = 0 = \sum_{v=0}^3 a_{2v}$$

und 
$$\eta(0) = 1 = a_0$$

verlangt. In der folgenden Tabelle sind die Koeffizienten der verschiedenen Formen  $(2,4,6,\varphi,t)$ , deren Spantarealkurve das Diagramm 1 zeigt, zusammengestellt:

Form	$\varphi$	t	$a_2$	$a_4$	$a_6$
(2,4,6,0.72,1)	0.72	1.0	+0.0750	-2.6500	+1.5750
(2,4,6,0.68,1)	0.68	1.0	-0.4500	-1.6000	+1.0500
(2,4,6,0.64,1)	0.64	1.0	-0.9750	-0.5500	+0.5250
(2,4,6,0.60,1)	0.60	1.0	-1.5000	+0.5000	0
(2,4,6,0.56,1)	0.56	1.0	-2.0250	+1.5500	-0.5250



Diagr.1 Spantarealkurven der Formen  $(2,4,6,\varphi,t)$

### 3.1.2. Die Quell-Senken-Darstellung der Schiffsform

Die korrespondierende Singularitätenverteilung der zu untersuchen-

den Schiffssform(2,4,6, $\varphi$ ,t) ergibt sich nach der Havelockschen Approximation (Gleichung (41)) aus der Gleichung (44b) als eine in  $\xi$ -Richtung konstante asymmetrische Quellverteilung

$$\sigma(\xi) = -\eta'(\xi) = - \sum_{\nu=0}^n 2\nu \cdot a_{2\nu} \cdot \xi^{2\nu-1} . \quad (47)$$

Bleiben die Bodenpartien als relativ unbedeutend außer acht, dann stellt diese erzwungene Proportionalität ein breites Schiff mit flachem Boden dar. Im Gegensatz hierzu würde die exakte Durchrechnung ein schmales Schiff mit stark im Hauptspant durchhängendem Boden als resultierenden Umströmungskörper ergeben (Inui /13/, Kajitani /17/).

Für die numerische Behandlung der Singularitätenverteilungen nach Gleichung (47) mit Hilfe der Matrizenrechnung muß noch erwähnt werden, daß sich die Elemente der Koeffizientenmatrizen  $\alpha$  nach den Gleichungen (22) und (47) um den Faktor  $\nu$ , bzw.  $2\nu$  unterscheiden.

### 3.1.3. Die Darstellung der Form der freifahrenden Wulstkörper

Das wesentlichste Charakteristikum des Wulstes an einem Schiff ist die örtliche Volumenkonzentration, die auch als eine mögliche Definition des Wulstes gelten kann.

Betrachtet man zunächst den Wulst als vom Schiff getrennt, der in diesem Zustand als freifahrender Wulstkörper bezeichnet werden soll; dann sind die gleichen mathematischen Methoden in der Beschreibung seiner Oberfläche anwendbar, wie sie für diejenige der Schiffssform gefunden wurden. Es ist jedoch naheliegend, für die Wulstkörper einfache geometrische Körper zu nehmen, die in reicher Auswahl vorhanden und deren Oberflächengleichungen bekannt sind. Die Kugel erweist sich dabei als der geeignetste und zugleich einfachste Körper, der die Forderung nach der örtlichen Volumenkonzentration am besten erfüllt.

Selbstverständlich eignen sich auch die Umströmungsfiguren diskreter Singularitäten und einfacher Linienverteilungen als Wulstkörper, deren Oberflächengleichungen zwar nicht in allen Fällen analytisch gegeben sind, die aber mit relativ geringem Aufwand numerisch berechnet werden können. Bei diesen Formen erübrigt

sich automatisch die Frage nach der gegenseitigen Zuordnung von Singularitätenverteilung und Körperform.

### 3.1.4. Die Singularitätendarstellung der freifahrenden Wulstkörper

Da für die Wulstkörper die Bedingungen

$$\frac{\partial S(x,z)}{\partial x} \Big|_{x = \pm 1/2} \text{ klein und } 1/b \gg 1$$

nicht mehr gefordert werden können, ist auch die Havelocksche Approximation nicht mehr bedenkenlos anwendbar. Folglich ist auch eine Polynomdarstellung nach Gleichung (44), wie sie Weinblum noch benutzt hat, nur begrenzt zum Beschreiben der Wulstoberfläche geeignet, da sie auf zwei Schwierigkeiten führt:

1. treten Polynome sehr hohen Grades auf, die auf numerisch schwer zu handhabende Typintegrale führen (s. Anhang 3) und
2. ergeben sich für  $\mu = 0$  vertikal konstante Verteilungsformen der Singularitäten, die nach Abschn. 2.5.2. (s. auch Wehausen /37/) nicht optimal sind und deren entsprechende Wulstformen in der Praxis keine Anwendung finden.

Der Vorteil der Polynomdarstellung, die relativ übersichtliche Zuordnung der Volumina von Schiff und Wulst, wiegt die Nachteile nicht auf.

Im Gegensatz zur Schiffsform werden für den Wulst die Singularitäten vorgeschrieben und die zugehörigen Konturen gerechnet. Um auch hier die Variationsmöglichkeiten einzuschränken, werden in erster Linie nur diskrete Singularitäten und in Einzelfällen einfache Linienverteilungen untersucht, die zur Beschreibung des Wulsteffektes ausreichen dürften.

### 3.2. Schiff-Wulst-Kombinationen und deren Singularitätendarstellung

Verbunden mit der Havelockschen Approximation führt das Übertragen der Ergebnisse des Abschnitts 2.5. auf Schiff-Wulst-Kombinationen auf zwei Möglichkeiten im Ausbilden und Anordnen eines Wulstes am Schiff, die sich auf verschiedene Entwurfsstadien beziehen.

1. Möglichkeit: Der Wulst stellt verschobenes Volumen dar

$$\varphi_{\text{komb}} = \varphi_m = \text{const}$$

resp. innerhalb der Gesamtverteilung werden Singularitäten verschoben. Der Index  $m$  bezieht sich auf das Schiff ohne Wulst.

Konstruktiv gesehen bleibt hierbei zwar das Gesamtvolumen der Schiffsform konstant, die Form selbst aber ändert sich leicht. Dabei wird Volumen aus einem widerstandsmäßig ungünstigen in ein günstiges Gebiet verschoben. Ein wertvolles Hilfsmittel, diese Verschiebungen nach Ort und Größe zu erreichen, ist der Änderungswiderstand nach Gleichung (38). Die konsequente Durchführung einer Volumenvariation unter dieser Bedingung führt zu Optimalformen nach Abschn. 2.5.2 als Lösungen des ersten Minimalproblems. Diese Möglichkeit ist nur im Entwurfsstadium eines Schiffes von Bedeutung.

2. Möglichkeit: Der Wulst stellt zusätzliches Volumen dar

$$\varphi_{\text{komb}} = \varphi_m + \varphi_w$$

resp. zur Ausgangsverteilung wird eine Wulstsingularität addiert.

Ohne die Ausgangsform zu verändern, wird hiernach das Volumen der Schiffsform um dasjenige des Wulstes vergrößert. Für die Praxis hat dieser Fall die größere Bedeutung, da viele Schiffe erst nachträglich mit einem Wulst versehen werden, um ihren Widerstand zu verringern. Sowohl die Größe als auch die Lage des Wulstes ist dabei nicht beliebig wählbar. Optimalformen nach Abschn. 2.5.2 lassen sich damit nicht erreichen. Dieser Fall ist mit dem zweiten Minimalproblem identisch und das Grundproblem der vorliegenden Arbeit.

Das Anordnen oder Verschieben des Volumens, bzw. der Wulstsingularität kann wieder unter zwei Gesichtspunkten gesehen werden.

a, die symmetrische Anordnung oder Verschiebung: Das Wulstvolumen oder die Singularität wird symmetrisch zur Mitte angeordnet oder verschoben.

b, die asymmetrische Anordnung oder Verschiebung: Das Wulstvolumen oder die Wulstsingularität wird nur in eine Richtung verschoben oder nur einseitig zur Mitte angeordnet. Dieser Fall kommt in der Praxis am häufigsten vor.

### 3.2.1. Die Ordnung der Wulstsingularitäten

Selbstverständlich können nur solche Wulstsingularitäten in Frage kommen, mit denen der größte Effekt erzielt werden kann, bzw. die mit den Quellverteilungen der Formen  $(2,4,6,\varphi,1)$  einen im ganzen Geschwindigkeitsintervall negativen Änderungswiderstand erzeugen. In der Rechnung genügt es, hierfür nur mit symmetrisch in den Punkten  $P(\pm d,0,1)$  angeordneten Änderungssingularitäten zu rechnen.

1. Singularitäten 0. Ordnung: Die Kombination der gewählten Quellverteilungen mit einer diskreten Quelle nach Gleichung (19e) ergibt nach Gleichung (38a) für  $p = q = 0$  einen Änderungswiderstand von

$$\Delta R^+(\gamma, K) = - \int_{\gamma_0}^{\infty} \gamma \cdot f(\gamma) \cdot \int_{-1}^{+1} \int_0^{+1} \eta'(\xi) \cdot \sin(\gamma \cdot \xi) \cdot d\xi \cdot \exp[-\gamma(\xi+1)] \cdot d\xi \cdot \sin(\gamma \cdot d) \cdot d\gamma \quad (48)$$

$$(\Delta R(\gamma, K) = 2\varrho g \cdot \frac{B \cdot T}{L} \cdot r^2 \cdot \Delta R^+(\gamma, K)).$$

Die Ergebnisse sind in den Diagrammen 3a und 4a graphisch dargestellt worden.

Diagramm 3a zeigt für die Form  $(2,4,6,0.72,1.0)$  den Einfluß einer konstanten Singularitätenänderung an den verschiedenen Punkten  $P(\pm d,0,1)$  mit  $0.3 \leq d \leq 1.2$  auf den Widerstand der Form. Deutlich kommt zum Ausdruck, daß bei hohen Geschwindigkeiten kräftige Singularitäten im Stevengebiet ( $d = \pm 1$ ) angeordnet werden müssen, um den Widerstand der Form zu reduzieren.

Diagramm 4a zeigt den Einfluß einer Singularitätenänderung in den Punkten  $P(\pm 1,0,1)$  auf den Widerstand der verschiedenen Formen  $(2,4,6,\varphi,1.0)$  mit  $0.56 \leq \varphi \leq 0.72$ . Aus diesem wichtigen Diagramm geht klar hervor, daß eine Quelle als Wulstsingularität wenig geeignet ist, da sie die Forderung nach einem negativen Änderungswiderstand nur in einem kleinen Geschwindigkeitsbereich erfüllt, der mit kleiner werdendem  $\varphi$  immer enger wird. Für die asymmetrische Wulstanordnung werden die Verhältnisse noch ungünstiger, da die Quelle durch eine Senke kompensiert werden muß.

2. Singularitäten 1. Ordnung: Die Kombination eines diskreten Dipols nach Gleichung (19f) mit der gleichen Quellverteilung führt für  $p = 0$  und  $q = 1$  auf einen Änderungswiderstand von

$$\Delta R^+(\gamma_0, K) = - \int_{\gamma_0}^{\infty} \gamma_0 \cdot f(\gamma) \cdot \int_{-1}^{+1} \int_0^{\eta} \eta'(\xi) \cdot \sin(\gamma \cdot \xi) d\xi \cdot \exp[-\nu(\xi+1)] d\xi \cdot \gamma \cdot \cos(\gamma \cdot d) \cdot d\gamma \quad (49)$$

$$(\Delta R(\gamma_0, K) = 4 \rho g \cdot \frac{B \cdot T}{L^2} \cdot r^3 \cdot \Delta R^+(\gamma_0, K)).$$

Die gleichen Fälle wie unter Punkt 1 sind mit der Dipolsingularität durchgerechnet und deren Ergebnisse in den Diagrammen 3b und 4b aufgezeichnet worden. Aus Diagramm 4b geht hervor, daß der Dipol die Forderung nach einem negativen Änderungswiderstand im ganzen Geschwindigkeitsintervall

$$1 \leq \gamma_0 \leq 26$$

erfüllt. Darüber hinaus eignet er sich für jede beliebige Wulst-anordnung und wird aus diesen Gründen als Wulstsingularität verwendet.

Zusätzlich zu den diskreten Singularitäten werden mit Rücksicht auf die Praxis noch beschränkte Linienverteilungen untersucht. Über die Auswahl dieser Verteilungen ist folgendes zu sagen.

1. die beschränkte Linienverteilung in  $\eta$ -Richtung  $B(d, \eta, f)$  mit  $f \neq 0$  (Gleichung (19b)): Diese Verteilungen entsprechen zwar der Forderung nach der Volumenkonzentration, werden aber aus praktischen Erwägungen nicht behandelt. Bei so breiten Körpern ist die Gefahr der Ablösung der Strömung zu groß. (Wigley/45/).
2. die beschränkte Linienverteilung in  $\xi$ -Richtung  $\eta(\xi, 0, f)$  mit  $f \neq 0$  (Gleichung (19c)): Diese Verteilungen erfüllen die Bedingung der örtlichen Volumenkonzentration in Längsrichtung nicht und bleiben daher unberücksichtigt.
3. die beschränkte Linienverteilung in  $\zeta$ -Richtung  $\tau(d, 0, \zeta)$  nach Gleichung (19d): Diese Verteilung wird als einzige beschränkte Linienverteilung in der Form  $\zeta^n$  ( $n > 0$ ) benutzt. Sie entspricht den praktischen Gegebenheiten eines birnenförmigen Wulstes.

Damit ist für die Schiff-Wulst-Kombination die Quell-Senken-Dipol-Kombination als die geeignetste Singularitätendarstellung gefunden worden, die unter der Bedingung

$$\varphi_{\text{komb}} = \varphi_m + \varphi_w$$

mit den folgenden Anordnungen der Wulstsingularitäten untersucht werden.

1. die symmetrische Anordnung:

- a, Dipolpaar: je ein diskreter Dipol in den Punkten  $P(\pm d, 0, f)$ ,
- b, vertikale Dipolverteilung  $\zeta^n$  ( $n > 0$ ): je eine Verteilung zwischen den Punkten  $P(\pm d, 0, 0)$  und  $P(\pm d, 0, 1.0)$ .

2. die asymmetrische Anordnung:

- a, Einzeldipol: ein diskreter Dipol in dem Punkt  $P(+d, 0, f)$ ,
- b, vertikale Dipolverteilung  $\zeta^n$  ( $n > 0$ ): eine Verteilung zwischen den Punkten  $P(+d, 0, 0)$  und  $P(+d, 0, 1.0)$ .

3.2.2. Die gegenseitige Zuordnung der Größe des effektiven Wulst-  
volumens  $V_b$  und des Momentes  $m_0$  der Dipolsingularität

Durch die Kombination der Wulstsingularitäten mit der Quellverteilung werden sich durch gegenseitige Induktionswirkungen Änderungen in den Konturen der resultierenden Umströmungskörper und damit in deren Volumina ergeben. Liegen die verschiedenen Singularitäten so dicht beieinander, daß ein geschlossener Körper entsteht, wie es bei den meisten Kombinationen der Fall sein wird, dann sind die Kontur- und damit die Volumenänderungen im Bereich der Wulstsingularitäten beträchtlich. Es werden daher für die Körper nominelle, das sind diejenigen der freifahrenden Körper, und effektive Volumina zu unterscheiden sein.

Will man im Bestimmen der Volumina den Aufwand zum Berechnen des Umströmungskörpers aus der Q-S-Dipol-Kombination umgehen, dann kann man die Kontur im Bereich der größten gegenseitigen Beeinflussung der Singularitäten nach einem Vorschlag von Wigley /47/ auch recht gut näherungsweise ermitteln. Danach ist die Kontur gebildet aus den beiden freifahrenden Körpern mit strakenden Übergängen eine gute Näherungskonstruktion; denn die Havelocksche Approximation ist in diesem Bereich nicht anwendbar. Das Gesamt- oder effektive Volumen der Kombination ergibt sich dann als Summe der nominellen Volumina und des Verkleidungsvolumens. Als eine qualitative Bestätigung mögen hierfür die Figuren A bis D im Anhang 5 dienen, welche die Umströmungskonturen des Rankineschen Ovoides kombiniert mit einem Dipolpaar darstellen. Liegt die Wulstsingularität innerhalb der Quellverteilung, dann gilt dieser

Vorschlag nicht mehr (siehe Fig. D).

Zum Spezifizieren der einzelnen Volumina muß noch gesagt werden, daß das Verkleidungsvolumen immer zum Wulstvolumen gezählt werden soll. Speziell ist:

$V_m$  - das Volumen des Schiffes ohne Wulst, für das sich die Unterteilung in ein effektives und nominelles Volumen erübrigt.

$V_k$  - das Volumen des freifahrenden Wulstkörpers, oder das nominelle Wulstvolumen, das im Falle des diskreten Dipols mit dem Kugelvolumen (Index k) übereinstimmt.

$V_f$  - das Verkleidungsvolumen (Index f von fairing).

$V_b = V_k + V_f$  - das gesamte oder effektive Wulstvolumen (Index b von bulb).

Liegen keine exakten Umströmungskonturen vor, so wird in der Abschätzung des effektiven Wulstvolumens  $V_b$  das Verkleidungsvolumen  $V_f$  ein Unsicherheitsfaktor sein, der sehr stark von der relativen Lage der Dipolsingularität zur Quellverteilung abhängen wird. Diagramm 2 kann hierfür als Orientierungshilfe benutzt werden. Es stellt das effektive Wulstvolumen

$$V_b = V_{\text{komb}} - V_{\text{Ovoid}} = V_k + V_f$$

bezogen auf  $V_m = V_{\text{Ovoid}}$  als Funktion der Lage des konstanten Dipols dar und zeigt deutlich, daß  $V_b$  bis auf das Doppelte des nominellen Volumens  $V_k$  des Dipols anwachsen kann.

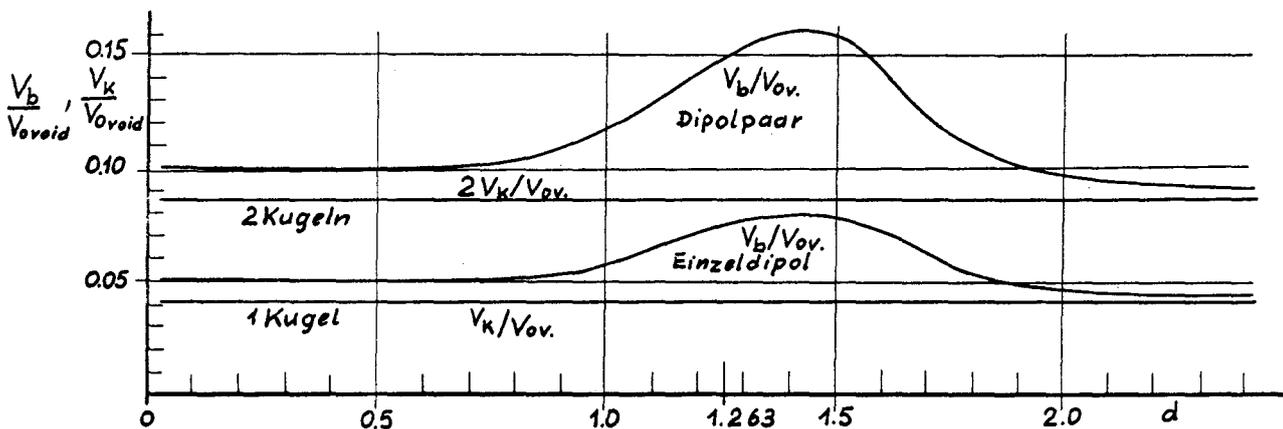


Diagramm 2 Das effektive Wulstvolumen der Ovoid-Dipol-Kombination als Funktion der Lage  $d$  des Dipols. Die Quelle des Ovoides liegt bei  $d = 1.0$  und der Staupunkt  $d = 1.263$

Für die freifahrenden Wulstkörper ergeben sich nun die folgenden Formeln für die gegenseitige Zuordnung von Volumen und Dipolmoment, wobei die Volumina zweckmäßigerweise auf  $V_m$  bezogen werden.

1. Kugel - diskreter Dipol:

$$\frac{V_k}{V_m} = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3 \cdot L \cdot B \cdot T \cdot \varphi \cdot \beta} \quad (50a)$$

Mit Gleichung (19f) ergibt sich  $m_0$  als Funktion von  $V_k/V_m$  zu

$$m_0 = \frac{3 \cdot c}{8 \cdot \pi} \cdot \frac{V_k}{V_m} \cdot L \cdot B \cdot T \cdot \varphi \cdot \beta \quad (50b)$$

2. Der vertikal veränderliche Wulst - vertikale Dipolverteilung  $\xi^n$  ( $n > 0$ ): Ist  $r^2 = f(\xi^n)$  und  $r_0$  der Radius bei  $\xi = 1.0$ , dann ergibt sich nach der Integration von 0 bis 1.0 über  $\xi$  für den Rotationskörper um die  $\xi$ -Achse ein Volumenverhältnis von

$$\frac{V_k}{V_m} = \frac{\pi \cdot r_0^2}{(n+1) \cdot L \cdot B \cdot \varphi \cdot \beta} \quad (51a)$$

Mit  $m_0 = c \cdot r^2$ , dem Moment des ebenen Dipols, ist analog zu 1.

$$m_0 = \frac{n+1}{\pi} \cdot c \cdot \frac{V_k}{V_m} \cdot L \cdot B \cdot \varphi \cdot \beta \quad (51b)$$

wobei  $m_0 \cdot \xi^n \sim f((r^2)^n)$  mit  $n > 0$ .

Da das effektive Wulstvolumen nicht genau angegeben werden kann, wird sich die Antwort auf die Frage, ob  $V_f$  am Wulsteffekt beteiligt ist, nur experimentell finden lassen. Bei der Auswahl von Experimenten müssen daher die beiden Möglichkeiten

1.  $V_b = V_k$  : (das effektive Wulstvolumen ist gleich dem nominellen. Die Aufteilung in Kugel- und Verkleidungsvolumen erfolgt etwa nach Diagr. 2.), und
2.  $V_b = V_k + V_f$  : (das effektive Wulstvolumen ist gleich dem nominellen Volumen vermehrt um das Verkleidungsvolumen. Die Vergrößerung von  $V_k$  um  $V_f$  erfolgt etwa nach Diagr. 2.)

in Betracht gezogen werden.

### 3.3. Die numerische Behandlung der Typintegrale

Allgemein bestehen keine Schwierigkeiten, die Formeln, die im theoretischen Teil aufgestellt worden sind, so zu programmieren, daß alle Elemente der Widerstandsmatrix berechnet werden können. Durch die Auswahl von Elementarschiffsformen nach Gleichung (44b) beschränkt sich die Arbeit auf das Aufstellen der ersten Submatrix  $\mathcal{W}^{oo}[i,j](\gamma_0, K)$ . Die  $\mathcal{M}$ -Funktionen sind von Weinblum /38,40/ mehrfach bestimmt worden, der die Rechnungen zuerst mit Tischrechenmaschinen und später mit elektronischen Rechenanlagen durchgeführt hat. Sie liegen im Bereich  $0.18 < Fr \leq 1.0$  tabelliert vor.

Für das Studium des Widerstandsverhaltens von Schiffen mit Wulst bei kleinen Fr-Zahlen mußten diese Funktionen noch für den Bereich  $0.10 \leq Fr \leq 0.18$  ( $50 \geq \gamma_0 \geq 15$ ) berechnet werden, sowie alle Interferenzfunktionen der Quell-Dipol-Kombinationen in dem Intervall  $0.10 \leq Fr \leq 1.00$  ( $50 \geq \gamma_0 \geq 0.5$ ).

Trotz der absoluten Konvergenz der Typintegrale bereitet deren numerische Behandlung doch noch einige Schwierigkeiten, besonders für große  $\gamma_0$ . Hier treten neben Ungenauigkeiten, wenn die bisher übliche Berechnungsmethode benutzt wird, noch sehr lange Rechenzeiten auf. Aus diesem Grunde ist das Typintegral umgeformt und zerlegt worden, um mit einem Minimum an Rechenzeit ein Maximum an Genauigkeit zu erreichen. Die hohe Genauigkeit ist von größter Wichtigkeit bei der Berechnung von Optimalformen nach Abschn.2.5.2.

#### 3.3.1. Die Zerlegung des Typintegrales

Durch die Substitution

$$\gamma = \frac{L}{2} \cdot K_0 \cdot \sec\theta = \gamma_0 \cdot \sec\theta$$

gehen die Gleichungen (23) in die folgenden Formen über:

1. das Typintegral

$$\mathcal{W}_{ij}^{oo}(\gamma_0, K) = \int_{\gamma_0}^{\infty} M_i(\gamma) \cdot M_j(\gamma) \cdot E_s(\gamma, \gamma_0, K) \cdot E_t(\gamma, \gamma_0, K) \cdot \gamma_0 \cdot f(\gamma) \cdot d\gamma \quad (52a)$$

2. die M-Funktionen

a, der asymmetrischen Quellverteilung

$$M_i(\gamma) = \int_0^1 \xi^i \sin(\gamma \cdot \xi) d\xi = -\frac{\cos \gamma}{\gamma} + \frac{i}{\gamma^2} (\sin \gamma - (i-1) \cdot M_{i-2}(\gamma)) \quad (52b)$$

$$i = 2n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

b, der Dipole (Index D):

$$M_D(\gamma, d) = + \sin(\gamma d) \quad \text{für die asymmetrische Anordnung}$$

$$M_D(\gamma, d) = \cos(\gamma d) \quad \text{für die symmetrische Anordnung}$$

### 3. die E-Funktionen

a, der vertikalen Verteilungen:

$$\begin{aligned} E_S(\gamma, \gamma_0, K) &= \int_0^1 \xi^s \exp(-\nu \xi) \cdot d\xi = -\frac{\exp(-\nu)}{\nu} + \frac{s}{\nu} \cdot E_{S-1}(\gamma, \gamma_0, K) \\ &= -\exp(-\nu) \cdot \left\{ \sum_{\mu=0}^s \frac{s!}{(s-\mu)!} \cdot \frac{1}{\nu^{\mu+1}} \right\} + \frac{s!}{\nu^{\mu+1}} \end{aligned} \quad (52c)$$

b, der diskreten Dipole:

$$E_D(\gamma, \gamma_0, K, f) = \exp(-\nu f) \quad (52c)$$

4.

$$f(\gamma) = \frac{\gamma^{2+p}}{\gamma_0^2 \sqrt{\gamma^2 - \gamma_0^2}} \quad (52d)$$

mit  $p = 0$  für die Quellsingularitäten

$p = 1$  für die Singularitätenkombinationen

$p = 2$  für die Dipolsingularitäten.

Erwähnt werden muß noch, daß sich durch die Substitution der Faktor des Integrales (18) für symmetrische Schiffe verändert, und zwar

$$16\pi g K_0^2 \quad \longrightarrow \quad \frac{128\pi g \cdot g}{c^2 \cdot L} \quad .$$

Wegen der Polstelle der Gleichung (52d) bei  $\gamma = \gamma_0$  ist das Typintegral (52a) in zwei Teilintegrale zerlegt worden. Das erste Teilintegral

$$I_1 = \int_0^{\delta} M_i(z^2 + \gamma_0) \cdot M_j(z^2 + \gamma_0) \cdot E_S(z^2 + \gamma_0, K) \cdot E_t(z^2 + \gamma_0, K) \gamma_0 f(z) \cdot dz \quad (53a)$$

mit

$$f(z) = \frac{2(z^2 + \gamma_0)^{2+p}}{\gamma_0^2 \sqrt{z^2 + 2\gamma_0}}$$

erhält man durch die erneute Substitution  $\gamma = z^2 + \gamma_0$  aus den Formeln (52). Die obere Grenze  $\delta$  von  $I_1$  wird nun mit Rücksicht auf das zweite Teilintegral  $I_2$  so gewählt, daß  $\sin(z^2 + \gamma_0) = 0$  und

damit 
$$\delta = +\sqrt{\pi \cdot n - \gamma_0} \quad (n \cdot \pi > \gamma_0)$$

wird.  $I_2$  erhält dadurch eine definierte untere Grenze von

$$\delta_0 = n \cdot \pi$$

und kann auf Grund der Periodizität des Integranden bezüglich  $\gamma$  in eine unendliche Summe von Einzelintegralen zerlegt werden, die sich alle von 0 bis  $2\pi$  erstrecken:

$$I_2 = \sum_{N=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} M_i(x) \cdot M_j(x) \cdot E_s(y, \gamma_0, K) \cdot E_t(y, \gamma_0, K) \cdot \gamma_0 \cdot f(y) \cdot dx \quad (53b)$$

mit 
$$y = x + \pi(n + 2N) \quad (n \geq 1; n \cdot \pi > \gamma_0).$$

Nur die M-Funktionen haben eine andere Gestalt.

Für die Quellverteilung (53c)

$$M_i(x) = - \operatorname{sign}(\cos n\pi) \cdot \frac{\cos x}{y} + \frac{i}{y^2} (\operatorname{sign}(\cos n\pi) \cdot \sin x - (i-1) \cdot M_{i-2}(x))$$

und für Dipole

$$M_D(x, d) = \operatorname{sign}(\cos n\pi) \cdot y \cdot \cos(x(1 \pm z)) \cdot \cos(z\pi(n+2N)) \pm \sin(x(1 \pm z)) \cdot \sin(z\pi(n+2N)) \quad (53d)$$

mit  $d = 1 \pm z$  und  $0 \leq z \leq 1.0$ . Hierzu sei speziell auf den Anhang 6 verwiesen.

Die Aufspaltung verkürzt die Rechenzeit rapide, die für  $\gamma_0 = 50$  noch in erträglichen Grenzen bleibt. Die Ursache hierfür liegt in dem Berechnen der sin/cos-Werte für das Integrationsintervall von 0 bis  $2\pi$ , das für die gesamte Rechnung nur einmal ausgeführt wird, und in dem Anwenden der Trapezregel als Quadraturformel, die bei genügend feiner Unterteilung des Intervalls genau genug ist.

Da nur mit einer endlichen Anzahl G von Summengliedern gerechnet werden kann, entsteht als Rest ein drittes Teilintegral

$$I_3 = \Delta \pi(\gamma_0, K),$$

das durch Abschätzen der einzelnen Funktionen (Gleichung (52)) auf explizit lösbare Integrale führt und für hinreichend großes G eine Steuergröße der Genauigkeit des Rechenganges ist.

Ist  $G$  so groß, daß  $r \gg \gamma_0$ , dann lassen sich nach Weinblum /38/ für die Formeln (52) die einfachen Ausdrücke

$$\begin{aligned} M_i(\gamma) &= M(\gamma) \approx \left| \pm \frac{1}{\gamma} \right| \\ M_D(\gamma) &\approx \left| \pm \gamma \right| \\ E_S(\gamma, \gamma_0, K) &= s! / (K \cdot \gamma^2 / \gamma_0)^{s+1}, \\ E_D(\gamma, \gamma_0, K) &= 0, \end{aligned} \quad (54)$$

und  $f(\gamma) \approx \gamma^{1+p} / \gamma_0^2$

angeben, die auf die folgenden verschiedenen Lösungen für  $I_3$  führen, das vom Grad des verwendeten Polynoms unabhängig ist:

1. für die Quellverteilung allein mit  $s = 0$

$$I_3 = \frac{1}{2} \int_{\sigma}^{\infty} \frac{\gamma_0 \cdot d\gamma}{K^2 \cdot \gamma^5} = \frac{\gamma_0}{8K^2} \cdot \frac{1}{(\pi(n+2G))^4} \quad (55a)$$

2. für die Interferenzterme und für den diskreten Dipol allein

$$I_3 = 0$$

3. für die vertikale Dipolverteilung  $\xi^n$  ( $n > 0$ ) allein

$$I_3 = \frac{1}{2} \int_{\sigma}^{\infty} \left[ \frac{n!}{(K \cdot \gamma^2 / \gamma_0)^{n+1}} \right]^2 \cdot \frac{\gamma^3 d\gamma}{\gamma_0} = \frac{(n!)^2 \cdot \gamma_0^{2n+1}}{8 \cdot n \cdot K^{2(n+1)}} \cdot \frac{1}{(\pi(n+2G))^{4n}} \quad (55b)$$

mit  $\sigma = \pi(n+2G)$

4. für die Interferenzterme der vertikalen Dipolverteilung mit der Quellverteilung

$$I_3 = \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma_0^{n+1} \cdot n!}{(2n+2) \cdot K^{n+2} \cdot (\pi(n+2G))^{4n}} \quad (55c)$$

Der Faktor  $1/2$  vor den Integralen deutet an, daß die Fläche nur zur Hälfte von dem oszillierenden Integranden eingenommen wird.

3.3.2. Die berechneten Matrizen  $\mathcal{U}^{00}[i,j](\gamma_0, K)$  für  $K = 0.075$ . Für den Geschwindigkeitsbereich  $0.10 \leq Fr \leq 0.42$  und den Parameter  $K = 0.075$  sind die  $\mathcal{U}$ -Matrizen auf der TR4 des Rechenzen-

trums der Universität Hamburg mit Hilfe eines ALGOL-Programms berechnet worden. Sie liegen sowohl in Tabellenform, als auch in Lochkarten gestanzt vor. Wegen des Umfanges des Tabellenwerkes, werden in dieser Arbeit nur einige Beispiele in den Tabellen 1 bis 4 wiedergegeben.

1. die  $\mathcal{M}_{ij}^{00}$ -Funktionen der Quellverteilung: Für die Exponenten

$$i = j = 0, 1, 2, 3, 5, 7, 9$$

sind die 28 Kombinationen (mit Wiederholung) der 7 Elemente der 2. Klasse berechnet worden. (Beispiele, siehe die Tabellen 1A bis 4A).

2. die  $\mathcal{M}_{iD}^{sn}$ -Funktionen der vertikalen Dipolverteilung  $\zeta^n (n > 0)$ :

Für die Exponenten

$$s = 0, n$$

$$i = 0, 1, 2, 3, 5, 7, 9 \quad \text{und } i = D$$

sind die 8 Kombinationen der vertikalen Verteilung n-ten Grades mit

$$n = 1, 2, 3,$$

die sich zwischen den Punkten  $P(+d,0,0)$  und  $P(+d,0,1.0)$  mit

$$d = 0.95, 1.00, 1.05$$

befindet, berechnet worden. (Beispiele, siehe die Tabellen 1A bis 4A).

3. die  $\mathcal{M}_{iD}^{00}$ -Funktionen des diskreten Dipols: Für die Exponenten

$$i = 0, 1, 2, 3, 5, 7, 9 \quad \text{und } i = D$$

sind die 8 Kombinationen des diskreten Dipols, der sich in dem Punkt  $P(d,0,f)$  mit

$$d = 0.90, 0.95, 1.00, 1.05, 1.10$$

und

$$f = 0.85, 1.00, 1.25$$

befindet, berechnet worden. (Beispiele, siehe die Tabellen 1B und 4B).

Als Erklärung zu den Tabellen sei hinzugefügt: Die  $\mathcal{M}_{DD}$ -Funktionen der symmetrisch angeordneten vertikalen Verteilung

( $\mathcal{M}_{DD}^{SS} = MDV$ ) sowie der diskreten Dipole ( $\mathcal{M}_{DD}^{OO} = MDD$ ) enthalten den Eigeninterferenzterm mit. Für die asymmetrische Anordnung, die von  $n$  unabhängig ist, enthalten die  $\mathcal{M}_{DD}$ -Funktionen der vertikalen Verteilung den Exponenten  $n$  als zusätzliche Information in Klammern ( $MD(n.Grades)$ ) und diejenigen der diskreten Dipole die Tiefenlage  $f$  ( $MDD(f)$ ).

Die Tabellen geben nur die Elemente der halben Matrix wieder, die im Falle einer Benutzung durch

$$\mathcal{M}_{ij}^{OO} = \mathcal{M}_{ji}^{OO}$$

erst ergänzt werden muß. Beim Aufstellen der vollständigen Matrix für eine Q-S-Dipol-Kombination müssen dann noch die  $\mathcal{M}_{iD}$ -Funktionen der Wulstsingularitäten an die entsprechende Zeile, resp. Spalte gesetzt werden.

### 3.4. Schiff-Wulst-Kombinationen

Innerhalb der numerischen Behandlung der Schiff-Wulst-Kombinationen werden zweckmäßigerweise auch die Dipolmomente der äquivalenten Singularitätenkombination dimensionslos gemacht und in dieser Form in der Symbolik der ALGOL-Programme geschrieben, die auch auf die Volumenverhältnisse nach den Gleichungen (50,51) übertragen wird. Setzt man die Gleichungen (20) in das Integral (18) ein, dann bekommt man für die beiden Wulstanordnungen den Klammerausdruck, der noch mit dem konstanten Faktor des Integrals multipliziert wird:

1. für die symmetrische Anordnung

$$A \cdot P_{\text{komb}}^2 = a(q_o \cdot P_o^+ + q_w \cdot P_w^+)^2 = a \cdot q_o^2 \left( P_o^+ + \frac{q_w \cdot P_w^+}{q_o} \right)^2 \quad (57)$$

Aus Gleichung (20a) folgt

$$q_o = s_o^{\otimes} \cdot \frac{L \cdot T}{2} = \frac{c}{2\pi} \cdot \frac{B \cdot T}{2}$$

und aus Gleichung (20e)

$$q_w = 2 \cdot \frac{m_o}{L} \quad .$$

Damit wird zunächst

$$A = 128 \cdot \frac{g \cdot \pi \cdot g}{c \cdot L} \cdot q_o^2 = \frac{8 \cdot g \cdot g}{\pi} \cdot \frac{B^2 \cdot T^2}{L}$$

der bekannte Faktor des Michell-Havelockschen-Widerstandsinte-

grals und weiterhin das dimensionslose Dipolmoment a, für das Dipolpaar (DP)

$$DP = \frac{q_w}{q_o} = \frac{2\pi \cdot 4m_o}{c \cdot L \cdot B \cdot T} \quad (57a)$$

Mit  $m_o$  nach Gleichung (50b) wird das Volumenverhältnis

$$VP = \frac{2V_k}{V_m} = \frac{2}{3} \cdot \frac{DP}{\varphi \cdot B} \quad (57b)$$

b, für die vertikale Dipolverteilung (DVP) erhält man analog mit

$$q_w = \frac{2m_o \cdot T}{L}$$

nach Gleichung (20d)

$$DVP = \frac{2\pi \cdot 4m_o}{c \cdot L \cdot B} \quad (57c)$$

und schließlich mit Gleichung (51b)

$$VVP = \frac{2V_k}{V_m} = \frac{2 \cdot DVP}{8(n+1) \cdot \varphi \cdot B} \quad (57d)$$

$2V_k$  weist auf das Volumen der beiden Körper der symmetrischen Anordnung hin.

2. für die asymmetrische Anordnung

$$A \cdot (P_{\text{komb}}^2 + Q_{\text{komb}}^2) = a q_o^2 \cdot \left\{ (P_o^+ + \frac{1}{2} \cdot \frac{q_w}{q_o} \cdot P_w^+)^2 + (\frac{1}{2} \cdot \frac{q_w}{q_o} \cdot Q_w^+)^2 \right\} \quad (58)$$

Diese Gleichung läßt erkennen, daß folgendes gilt

a, für den Einzeldipol (DE)

$$DE = \frac{1}{2} \cdot DP \quad \text{und} \quad VE = \frac{1}{2} \cdot VP = \frac{V_k}{V_m} = \frac{2}{3} \cdot \frac{DE}{\varphi \cdot B} \quad (58a)$$

b, für die vertikale Dipolverteilung (DVE)

$$DVE = \frac{1}{2} \cdot DVP \quad \text{und} \quad VVE = \frac{1}{2} \cdot VVP = \frac{V_k}{V_m} = \frac{2}{8(n+1)} \cdot \frac{DVE}{\varphi \cdot B} \quad (58b)$$

Da es in der Berechnung des Widerstandes sowohl der Formen mit konstantem Wulst als auch der optimalen Schiff-Wulst-Kombinationen weniger auf absolute als vielmehr auf relative Größen, auf Vergleiche ankommt, wird der Widerstand der Kombination auf denjenigen des Schiffes ohne Wulst bezogen. Dadurch werden die Dia-

gramme kleiner und übersichtlicher und lassen die Verbesserung eines Schiffes durch einen Wulst sofort erkennen.

### 3.4.1. Optimale Schiff-Wulst-Kombinationen

Optimale Schiff-Wulst-Kombinationen nach dem zweiten Minimalproblem stellen physikalisch gesehen Mehrkörpersysteme dar (Eggers /8/), deren freie Wellensysteme sich gegenseitig durch Interferenz möglichst vollständig spektral auslöschen. Angewandt auf die Formen(2,4,6, $\varphi_m$ ,1.0) ist hierfür das optimale Dipolmoment D, entsprechend den Gleichungen (57,58), gesucht, mit dem unter der Bedingung

$$\varphi_m = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \alpha[1,8;0] \cdot \mathcal{H}[1,8;1]^T d\xi \leq \varphi_{\text{komb}} = \varphi_m + \varphi_w = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \alpha[1,8;\varphi_w] \mathcal{H}[1,8;1]^T d\xi \quad (59)$$

das Widerstandsverhältnis

$$\frac{R_{\text{komb}}^+}{R_m^+} = 1 + \frac{\Delta R_{\text{ges}}^+}{R_m^+} = \frac{\alpha[1,8;D] \cdot \mathcal{U}^{00} \cdot \alpha[1,8;D]^T}{\alpha[1,8;0] \cdot \mathcal{U}^{00} \cdot \alpha[1,8;0]^T} \leq 1 \quad (60)$$

kleiner, höchstens gleich 1 wird. Hierbei haben die Matrizen die Elemente

$\alpha[1,8;\varphi_m]$  = (1,  $a_2$ , 0,  $a_4$ ,  $a_6$ , 0, 0;  $\varphi_m$ ): Die Koeffizientenmatrix der Funktion  $\eta(\xi)$  der Formen(2,4,6,  $\varphi_m$ ,1.0). (s. Abschn.3.1.1).

$\mathcal{H}[1,8;1]$  = (1,  $\xi^2$ ,  $\xi^3$ ,  $\xi^4$ ,  $\xi^6$ ,  $\xi^8$ ,  $\xi^{10}$ ; 1): Die Matrix der Polynomglieder der Funktion  $\eta(\xi)$ .

$\alpha[1,8;D]$  = (0,  $2a_2$ , 0,  $4a_4$ ,  $6a_6$ , 0, 0; D): Die Koeffizientenmatrix der Verteilungsfunktion  $\sigma(\xi)$ .

Die additive optimale Dipolsingularität D führt also auf eine gesamte Widerstandsänderung von

$$\Delta R_{\text{ges}}^+(\gamma_0, f) = - 2D \cdot \alpha[1,8;0] \cdot \mathcal{U}^{00} \cdot \alpha'^T - D^2 \cdot \alpha' \cdot \mathcal{U}^{00} \cdot \alpha'^T \leq 0 \quad (61)$$

mit  $\alpha' = \frac{\partial \alpha}{\partial D}$  und  $D \geq 0$ , die ein Maximum und kleiner als Null sein soll.

Im Abschnitt 2.5.2.1 war nun schon festgestellt worden, daß  $\Delta R_{\text{ges}}^+$

sowohl für das Dipolmoment  $D$  als auch für dessen Lage der Länge nach  $d$  ausgeprägte Maxima besitzt und ist demnach für

$$\rho_0 = \text{const} \quad \text{und} \quad f = \text{const},$$

- die Tiefenlage  $f$  war wegen der Monotonie schon als Parameter eingeführt worden-, eine zweiparametrische Funktion der beiden Variablen  $D$  und  $d$

$$\Delta R_{\text{ges}}^+(\rho_0, f) = f(D, d). \quad (61a)$$

Für das Optimieren ergeben sich daraus die beiden folgenden Möglichkeiten, die nicht nur für die behandelten Formen gelten:

1. die volloptimierte Kombination: Innerhalb dieser Kombination ist die gesamte Widerstandsänderung nach den beiden Variablen  $D$  und  $d$  zu optimieren, d.h.

$$d(\Delta R_{\text{ges}}^+) = \frac{\partial f(D, d)}{\partial D} \cdot dD + \frac{\partial f(D, d)}{\partial d} \cdot dd = 0 \quad (62)$$

2. die teiloptimierte Kombination: Ist eine der beiden Variablen noch zusätzlich konstant, dann läßt sich die Kombination nur noch nach einer Variablen optimieren, deren Optimalwert die Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial D}(\Delta R_{\text{ges}}^+) = 0 \quad (\text{mit } d = \text{const}) \quad (63)$$

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial d}(\Delta R_{\text{ges}}^+) = 0 \quad (\text{mit } D = \text{const}) \quad (64)$$

ist.

In der optimalen Lage der Länge nach existiert zwischen den beiden Wulstanordnungen noch ein Unterschied. Wird außer  $\rho_0$  und  $f$  auch  $d$  noch als Parameter betrachtet, dann ist Gleichung (61)

$$\Delta R_{\text{ges}}^+(\rho_0, d, f) = -2D \cdot R_{\text{qw}}^+ + D^2 \cdot R_{\text{w}}^+, \quad (61b)$$

wenn  $R_{\text{qw}}^+$  den Interferenzterm zwischen Dipol- und Quellsingularitäten und  $R_{\text{w}}^+$  den Eigenwiderstand der Wulstsingularität, die im Falle der symmetrischen Anordnung deren Eigeninterferenzterm mitenthält, bezeichnet, dann folgt nach Gleichung (63) daraus

$$D = \frac{R_{qw}^+(d)}{R_w^+(d)} = f(d) \quad (65)$$

und somit 
$$R_{ges}^+(\gamma_0, d, f) = - \frac{(R_{qw}^+(d))^2}{R_w^+(d)} = g(d) \quad (66)$$

Für die beiden Funktionen  $f(d)$  und  $g(d)$  folgt nun ganz allgemein, daß ihre Maxima nicht unbedingt an der gleichen Stelle  $d$  liegen müssen. Da die Widerstandsänderung ein Maximum sein soll, wird das optimale  $d$  aus der Funktion  $g(d)$  durch numerische Interpolation bestimmt. Dadurch ist  $D$  streng genommen nicht mehr optimal, eine Einschränkung, die das Wulstproblem nicht nachteilig beeinflusst. Im Falle der asymmetrischen Anordnung liegen die Maxima der beiden Funktionen an ein und demselben Ort, da  $R_w^+$  von  $d$  unabhängig ist.

Die wichtige Frage, ob alle Q-S-Verteilungen optimiert werden können, kann sowohl für die Voll- als auch für die Teiloptimierbarkeit im vollen Umfang bejaht werden. Der ausführliche Beweis hierzu, ist im Anhang 1 zu finden, dessen Ergebnis soweit verallgemeinert werden kann, daß jede Singularitätenverteilung

p-ter Ordnung

durch eine additive Wulstsingularität der Ordnung

$$q = p+1$$

mindestens in dem Bereich

$$2n(2n-1) \leq \gamma_0 \leq \infty$$

volloptimierbar ist, wenn  $2n$  der Grad des Polynoms der Spantarealkurve ist. Die numerischen Ergebnisse mit den Formen (2,4,6,  $\varphi_m$ , 1.0) bekräftigen nicht nur diese Aussage, sie dehnen sogar das Geschwindigkeitsintervall durch Verschieben der Grenze von  $2n(2n-1)$  auf 1.0 aus. Die Widerstandseigenschaften der untersuchten Formen können im ganzen Intervall

$$1 \leq \gamma_0 \leq \infty \quad \text{oder} \quad 0 \leq Fr \leq 0.5$$

durch einen positiven Dipolwulst in Vorstevennähe verbessert werden (s. Diagr. 4b). Für die Praxis bedeutet diese Aussage der linearen Theorie, daß ein optimal ausgelegter Wulst in Form des konzentrierten Volumens am Schiff stets eine Verringerung des Wel-

lenwiderstandes bis zu den kleinsten Froudeschen Zahlen bewirkt, für die er ausgelegt sein muß und bei denen die Wellenbildung noch eine praktische Bedeutung hat.

Die Ergebnisse der numerischen Behandlung sind in den Diagrammen 6 bis 11 graphisch dargestellt worden, die im einzelnen noch erläutert werden. Wegen des großen Rechen- und Zeichenaufwandes sind vorwiegend Q-S-Dipol-Kombinationen mit diskreten Dipolen untersucht worden. Diese Beschränkung hat keinen Einfluß auf die allgemeinen Aussagen.

Zu den Diagrammen sind noch die folgenden allgemeinen Erläuterungen voranzustellen. In allen Fällen tritt die Froudesche Zahl als unabhängige Variable auf, die geläufiger als  $\gamma_0$  ist. An Ergebnissen sind aufgetragen:

1. das nominelle Volumenverhältnis

$$\frac{V_k}{V_m} = f(\text{Fr}). \quad (67)$$

Es handelt sich hierbei immer um das Gesamtvolumen der zugehörigen Wulstanordnung, das im symmetrischen Fall je zur Hälfte auf die beiden Wulstkörper verteilt werden muß. Über die Größe des effektiven Volumens  $V_0$  geben die Diagramme keine Auskunft.

2. das Widerstandsverhältnis

$$\frac{R_{\text{komb}}^+}{R_m^+} = f(\text{Fr}) \quad (68)$$

und

3. für die volloptimierten Kombinationen die optimale Lage des Dipols der Länge nach

$$d = f(\text{Fr}). \quad (69)$$

3.4.1.1. Volloptimierte Kombinationen

Die Berechnung des Wertetripels

$$\frac{V_k}{V_m}, \quad \frac{R_{\text{komb}}^+}{R_m^+} \quad \text{und} \quad d$$

für die volloptimierten Kombinationen der Formen(2,4,6, $\varphi_m$ ,1.0)

ist wie folgt durchgeführt worden:

Das optimale Dipolmoment  $D$  und die gesamte Widerstandsänderung sind simultan als Funktionen von  $d$  (Gleichungen (65,66)) bestimmt und anschließend aus der Funktion  $g(d)$  die maximale Widerstandsänderung mit dem optimalen  $d$  durch Interpolation berechnet worden. Zuletzt ist dann mit dem optimalen  $d$  aus der Funktion  $f(d)$  das optimale Dipolmoment, bzw. nach den Gleichungen (57) das maximale Volumenverhältnis des freifahrenden Wulstkörpers ermittelt worden, das weder theoretisch noch praktisch überschritten werden sollte. (Da die Werte ohnehin sehr groß sind, wird ein Überschreiten in der Praxis auch kaum vorkommen.)

1. Das maximale nominelle Volumenverhältnis  $V_k/V_m$ : (Diagr. 6a und 7a): Die Diagramme zeigen deutlich die beträchtliche Zunahme der Wulstvolumina ab  $Fr = 0.25$ , die bei  $Fr = 0.40$  schon 15% des Schiffsvolumens erreicht haben, bleiben aber entgegen allen Erwartungen endlich und kleiner als  $V_m$ . Weiter läßt sich die hinreichend bekannte Tatsache erkennen, daß Formen, die von sich aus schon einen geringen Wellenwiderstand haben, auch nur in einem bescheidenen Maße durch einen Wulst verbessert werden können. Wie Diagr. 6a für die Form(2,4,6,0.56,1.0) im Bereich  $0.22 \leq Fr \leq 0.35$  zeigt, ist in diesen Fällen das Wulstvolumen sehr gering. Unter  $Fr = 0.20$  sind keine so großen Unterschiede in den maximalen Volumina der verschiedenen Formen mehr vorhanden.  
Der Parameter  $f$  wirkt sich in evidenter Weise auf die Vergrößerung des Volumens  $V_k$  aus (Diagr. 7a). Je größer  $f$  wird, desto größer muß  $V_k$  werden, um den gleichen Effekt zu erzielen.
2. Die optimale Lage der Wulstsingularität der Länge nach: (Diagramm 6c und 7a): Aus dem Diagramm 3b folgt, daß eine positive Dipolsingularität am wirksamsten ist, wenn sie sich im Bereich der Enden der Q-S-Verteilung, bzw. des Schiffes befindet (Yim /49/). In den Diagrammen 6c und 7a sind daher nur die Bereiche des Vor- und Hinterstevens wiedergegeben worden, aus denen sich eine optimale Lage von etwa  $0.95 \leq d \leq 1.00$  für fast alle Formen im untersuchten Geschwindigkeitsbereich ergibt. Die Ergebnisse des Einzeldipols oszillieren deshalb so stark, weil im Gegensatz zum Dipolpaar ein Eigeninterferenzterm fehlt.

Der Parameter  $f$  wirkt sich auf die optimale Lage der diskreten Dipole nur wenig aus (Diagr. 7a und 7b).

Geht man auf die freien Wellenbilder der Mehrkörpersysteme zurück und bestimmt hiernach die optimale Lage, die sich aus der Interferenzbedingung nach Gleichung (33) für die eine Wellenkomponente mit  $\theta = 0$  ergibt und nach Inui /18/ den Hauptbeitrag zum Wellenwiderstand leistet, dann ist  $d > 1,0$ , wie das Beispiel nach Diagr. 5 zeigt. Hier offenbart sich der Unterschied der beiden im Abschnitt 2.5.2 geschilderten Methoden. Die Diskrepanz kann nur das Experiment vollständig klären.

3. Das optimale Widerstandsverhältnis  $R_{\text{komb}}^+ / R_m^+$ : (Diagr. 6b bis 8b):

In diesen Diagrammen kann der Gesamtwiderstand der Kombination sofort in Prozenten des Widerstandes der Ausgangsform ohne Wulst abgelesen werden. Bei kleinen Geschwindigkeiten, bei denen der Wellenwiderstand kaum eine Rolle spielt, täuscht dieses Verhältnis etwas und es ist ein wenig Vorsicht geboten.

Über den absoluten Betrag von  $R_{\text{komb}}^+$  geben die Diagramme keine Auskunft. Interessant ist der äußerst gute Erfolg, der mit einem Wulst in dem Bereich  $0.18 \leq Fr \leq 0.35$  erzielt werden kann (Diagr. 6b), wobei  $\varphi_m$  sogar eine untergeordnete Rolle spielt.

Selbst wenn die reale Flüssigkeit die starken Oszillationen der einzelnen Funktionen nicht mitmacht, dürfte auch in der Praxis in diesem Bereich der größte Effekt zu erzielen sein.

Ferner bestätigen die Diagramme die Regel 2 von Wigley /47/,-  
- je schlechter die Wellenbildung der Schiffsförmung ist, desto aussichtsreicher ist der Erfolg mit einem Wulst -, besonders gut durch die Form (2,4,6,0.72,1.0) im Bereich des zweiten Buckels ( $Fr \approx 0.32$ ) der Widerstandskurve. Im Gegensatz dazu verhält sich die Form (2,4,6,0.56,1.0), die in diesem Gebiet kaum, auch nicht mit dem optimalen Wulst, verbessert werden kann (Diagr. 6a). Die Ursache hierfür liegt in dem ohnehin schon niedrigen Wellenwiderstand dieser Form allein, der einen kleinen optimalen Wulst ( $V_k \rightarrow 0$ ) zur Folge hat.

Der Einfluß von  $f$  ist ebenfalls wieder gering (Diagr. 7b). Im übrigen gelten hierzu die gleichen Bemerkungen wie zu Punkt 1.

Zusammenfassend ergeben die Diagramme 6 und 7 den nach Größe und Lage optimalen Wulst, der sowohl in asymmetrischer als auch in symmetrischer Anordnung die lineartheoretisch größt mögliche Reduktion des Wellenwiderstandes der untersuchten Formen bewirkt.

Ähnliche Ergebnisse lassen sich auch mit einer vertikalen Dipolverteilung  $\xi'' (n > 0)$  erreichen. Als Parameter  $f$ , der sich hier in einer ähnlichen Weise wie beim diskreten Dipol auswirken würde, wird die obere Grenze  $t$  (Gleichung (20d)) des Integrationsintervalls  $0 \leq \xi \leq t=f$  ( $f > 0$ ) genommen. In dieser Arbeit ist nur  $t = f = 1.0$  untersucht worden.

### 3.4.1.2. Teiloptimierte Kombinationen

Unter den teiloptimierten Kombinationen hat der Fall

$$\frac{\partial}{\partial D}(\Delta R_{\text{ges}}^+) = 0 \quad (\text{mit } d = \text{const})$$

die größere Bedeutung und wird daher in dieser Arbeit auch bevorzugt behandelt.

1. Das maximale Volumenverhältnis  $V_k/V_m$ : (Diagr. 8a bis 11a): In diesen Diagrammen ist die Faustregel von Weinblum /42/, - das Wulstvolumen der asymmetrischen Anordnung ist etwa die Hälfte desjenigen der symmetrischen -, gut zu erkennen. Darüber hinaus enthalten diese Diagramme im Vergleich zu 6a und 7a keine weiteren, wesentlich neuen Aspekte. Nur für die vertikale Dipolverteilung  $\xi''$  ( $f = 1.0, n > 0$ ) ergibt sich als wichtigstes Resultat, daß mit ihr keine solchen profilierten Wirkungen wie mit einem diskreten Dipol erreicht werden können (Diagr. 8a im Vergleich mit 8b). Hervorzuheben ist jedoch, daß der Effekt mit wachsendem Exponenten  $n$  zunimmt. Dieses Ergebnis ist nicht unerwartet, sondern typisch für das Problem der Widerstandsverringerung, das immer mit einer Verschiebung der Singularitäten aus der Umgebung der freien Oberfläche so tief wie möglich verbunden ist (Wehausen /37/). Das konsequente Verschieben der gesamten vertikal verteilten Wulstsingularitäten in die Intervallgrenze bei  $\xi=t=1.0$  führt zum diskreten Dipol in diesem Punkt. (Eine horizontale Verteilung würde sich ganz analog verhalten.)

Für die Konstruktion eines Wulstes optimaler Wirkung ergibt sich daraus, daß dessen Volumen so tief und so konzentriert wie möglich angeordnet werden sollte.

Die mathematisch strenge Teiloptimierung kann bei konstantem Parameter  $d$  in einigen Fällen zu negativen Wulstvolumina führen (s. Diagr. 10a), die allerdings nur akademischen Wert haben und zeigen, daß ein Teiloptimieren bei kleinen  $Fr$ -Zahlen nur für  $d \rightarrow 1.0$  sinnvoll ist (vergl. Diagr. 6c).

Die monotone Abhängigkeit des Volumenverhältnisses von dem Parameter  $f$  kommt gut zum Ausdruck.

## 2. Das optimale Widerstandsverhältnis $R_{\text{komb}}^+ / R_m^+$ : (Diagr. 8b bis 11b):

Diese Diagramme liefern ebenfalls keine weiteren Aussagen zu den allgemeinen Resultaten, außer daß auch die zweite Faustregel von Weinblum /42/, - die Widerstandsverringering mit einem asymmetrisch angeordneten Wulst beträgt etwa die Hälfte derjenigen der symmetrischen Wulstanordnung -, gut bestätigt wird. Im einzelnen demonstrieren die Diagramme den Einfluß der verschiedenen Parameter,  $d$ ,  $f$  und  $\varphi_m$ , auf das Widerstandsverhältnis, auf deren ausführliche Diskussion verzichtet werden kann.

### 3.4.2. Fixierte Schiff-Wulst-Kombinationen

Mit Hilfe der Diagramme 6 und 7 kann für jede Geschwindigkeit die optimale Schiff-Wulst-Kombination der untersuchten Formen bestimmt werden. Die praktische Ausführung einer solchen Kombination mit einem nach Größe und Lage konstanten Wulst kann jedoch nur im Auslegungspunkt optimal sein.

Die Diagramme 12 zeigen das charakteristische Verhalten der Funktion

$$R_{\text{komb}}^+ / R_m^+ = f(Fr)$$

einer solchen fixierten Schiff-Wulst-Kombination. Wie zu erwarten war, ist der Widerstand der Kombination zuerst um ein Vielfaches größer als derjenige der Form ohne Wulst. Erst ab  $Fr = 0.85 \cdot Fr_{\text{opt}}$  kehrt sich das Verhältnis um. Mit wachsender  $Fr$ -Zahl wird das Widerstandsverhältnis immer kleiner, um bei  $Fr_{\text{opt}}$ , der Auslegungsgeschwindigkeit, sein Minimum zu erreichen. Steigt die  $Fr$ -Zahl

weiter an, dann nähert sich  $R_{\text{komb}}^+ / R_m^+$  wieder dem Wert 1.0, bleibt aber stets kleiner als 1.0.

In dem Diagramm 12 sind mehrere Widerstandsverhältnisse von fixierten Schiff-Wulst-Kombinationen als Funktionen der Froudeschen Zahl aufgetragen worden. Als Wulstsingularität wurde eine vertikale Dipolverteilung 2. Grades ( $\xi^2$ ) in symmetrischer Anordnung gewählt, mit einer Lage der Länge nach von  $d = \pm 1.0$ . Kurvenparameter ist die Froudesche Zahl, bei der die Kombination optimal ist, bzw.  $R_{\text{komb}}^+$  sein Minimum hat.

Das Diagramm 12a zeigt das Widerstandsverhältnis einer fixierten Schiff-Wulst-Kombination mit einem diskreten Dipol als Wulstsingularität in symmetrischer und asymmetrischer Anordnung. Die Kombination ist für  $Fr = 0.20$  teiloptimal. Kurvenparameter ist die Lage des diskreten Dipols der Länge nach

Dieses charakteristische Verhalten der Widerstandskurve von Schiff-Wulst-Kombinationen läßt sich auch experimentell bestätigen. Der Hinweis auf Schlichting /30/ soll hierzu genügen.

#### 4. Zusammenfassung

In einem historischen Abriß über die Entwicklung des Bugwulstes konnte gezeigt werden, daß ein Erfinder nicht existiert. Der Bugwulst hat sich aus dem Rammstegen der stählernen Kriegsschiffe des 19. Jahrhunderts entwickelt. Die Entdeckung des Wulsteffektes selbst war ein Zufall.

Es werden die theoretischen Grundlagen und die lineartheoretische Lösung des Widerstandsproblems eines Schiffes in einer idealen Flüssigkeit erörtert. Die Randbedingungen sind um die Abstrahlungsbedingung

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\varphi_r^2 - \varphi \cdot \varphi_{rr}) \cdot r = 0$$

erweitert worden, die in der Literatur nur ungenügend oder gar nicht beachtet wird.

Das allgemeine Problem der Widerstandsverringering wird betrachtet und auf die vorliegende Aufgabe, der Verringerung des Wellenwiderstandes gegebener Schiffsförmungen, ausgedehnt. Von den beiden Betrachtungsmethoden, die theoretisch identisch sind, sich in der praktischen Anwendung jedoch unterscheiden, wird die Methode 2

welche die vollständige spektrale Auslöschung des gesamten freien Wellensystems des Schiffes betrachtet, zur Dimensionierung von Mehrkörperkombinationen benutzt.

Der Änderungswiderstand  $\Delta R^+(\rho)$  wird definiert, der das Auffinden der geeigneten Wulstsingularität für jede Singularitätenverteilung gestattet und mit dem darüber hinaus der Einfluß einer Oberflächenänderung auf den Wellenwiderstand untersucht werden kann, was experimentell oft nur sehr schwer zu erreichen ist. Die besten Wirkungen werden mit Wulstsingularitäten erzielt, deren Ordnung um ein Grad höher ist als derjenige der zu verbessernden Singularitätenverteilung.

Auf Grund der Verwendung der Klasse der Polynome als Verteilungsfunktionen der Singularitäten lassen sich Widerstandsmatrizen aufbauen, deren Anwendung in der Berechnung des Wellenwiderstandes konkreter Verteilungsformen unter Beachten der verschiedenen Matrizenmultiplikationen von großem Vorteil ist. Die Berechnung der Typintegrale der Matrizenelemente, deren Genauigkeit von größter Bedeutung in dem Bestimmen von Optimalformen ist, wird nach einer verbesserten Methode ausgeführt. Das Integral wird aufgespalten und dadurch der Rechenmethodik elektronischer Rechenanlagen besser angepaßt. Es werden genauere Resultate erzielt, als sie mit den bisher verwandten Quadraturformeln erreicht werden konnten.

Als konkrete Fälle werden Elementarschiffe behandelt, deren Singularitätenverteilung sich nach der Havelockschen Approximation als eine Quell-Senken-Verteilung ergibt. Auf Grund des Änderungswiderstandes ist hierfür der positive Dipol die geeignetste Wulstsingularität. Polynomdarstellungen des Wulstes analog zu denjenigen des Schiffes scheiden wegen der schwierigen, numerischen Handhabung der Typintegrale aus. Es ist mathematisch bewiesen worden, daß alle Q-S-Verteilungen durch einen positiven Dipol mindestens in dem Bereich

$$2n(2n-1) \leq \rho_0 \leq \infty$$

( $2n$  ist der Grad des Polynoms der Spantarealkurve) in ihren Widerstandseigenschaften verbessert werden können, der für die untersuchten Elementarschiffsformen auf Grund der numerischen Resultate auf

$$1.0 \leq \rho_0 \leq \infty$$

erweitert werden kann.

Unter der Bedingung

$$\varphi_{\text{komb}} = \varphi_m + \varphi_w$$

werden Q-S-Dipol-Kombinationen in symmetrischer und asymmetrischer Anordnung numerisch untersucht, die sich in voll- und teiloptimierte Kombinationen unterteilen lassen. Wichtig ist, daß innerhalb der Optimierung das Dipolmoment endlich bleibt. Die Schwierigkeit des Berechnens der zugehörigen Wulstvolumina aus den Singularitätenkombinationen zwang, das Volumen in ein effektives und in ein nominelles Wulstvolumen zu unterscheiden.

Alle lineartheoretischen Ergebnisse sind entweder in Tabellen- oder in Diagrammform wiedergegeben worden. Eine experimentelle Bestätigung dieser Ergebnisse steht noch aus.

## 5. Anhänge

### 5.1. Anhang 1

Es soll gezeigt werden, daß für jede Polynomquellverteilung, bzw. Polynomschiffsform, eine positive Dipolsingularität im Steven einen negativen Änderungswiderstand induziert, wenn nur der Geschwindigkeitsparameter  $\gamma_0$  größer als ein Mindestwert  $\Gamma(n)$  ist, der nur vom Grad des Polynoms abhängt, mit wachsendem  $n$  allerdings beliebig groß wird.

Der Beweis beschränkt sich auf Elementarschiffsformen mit rechteckigem Hauptspant, die überdies ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit als zum Hauptspant symmetrisch angenommen werden. Als Wulstsingularität wird ein im Punkt  $P(\pm 1.0, 0, 1.0)$  symmetrisch angeordneter diskreter Dipol genommen.

Nach der Havelock'schen Approximation ist die Verteilungsfunktion der Quellsingularitäten

$$\sigma(\xi) = -\eta'(\xi) \quad (1)$$

mit

$$\eta(\xi) = \sum_{\nu=0}^n a_{2\nu} \cdot \xi^{2\nu} \quad (2)$$

und den Nebenbedingungen

$$0 = \sum_{\nu=0}^n a_{2\nu} \quad \text{und} \quad a_0 = 1. \quad (3)$$

Nach Gleichung (49) ist hierfür der Änderungswiderstand

$$\Delta R^+(r_0, K) = - \int_{r_0}^{\infty} f(r) dr \cdot \frac{e^{-\nu} - e^{-2\nu}}{\nu} \cdot \int_0^1 \eta'(\xi) \cdot \sin(r\xi) \cdot r \cdot \cos(r) \cdot d\xi \quad (4)$$

mit  $f(r) = \frac{r^2}{r_0 \cdot \sqrt{r^2 + r_0^2}}$  und  $\nu = K \cdot \frac{r_0^2}{r}$  ( $K = 2T/L$ ),

wobei die Integration über  $\xi$  schon ausgeführt worden ist.

Durch partielle Integration geht das zweite Integral von (4) in die Reihendarstellung

$$\int_0^1 \eta'(\xi) \cdot \sin(r\xi) \cdot d\xi = - \frac{\cos r}{r} \{ \eta'(1) - \frac{1}{r^2} \cdot \eta'''(1) + \frac{1}{r^4} \cdot \eta^{(5)}(1) - + \dots \} \\ + \frac{\sin r}{r} \{ \eta''(1) - \frac{1}{r^2} \cdot \eta^{(4)}(1) + \frac{1}{r^4} \cdot \eta^{(6)}(1) - + \dots \} \quad (5)$$

über. Mit der p-ten Ableitung der Spantarealkurve im Punkt  $\xi = +1$

$$\eta^{(p)}(1) = \sum_{\nu=p}^n a_{2\nu} \cdot \frac{(2\nu)!}{(2\nu-p)!}$$

wird der Änderungswiderstand

$$\Delta R^+(r_0, K) = \int_{r_0}^{\infty} f(r) dr \cdot \frac{e^{-\nu} - e^{-2\nu}}{\nu} \left\{ \cos r \cdot \sum_{\mu=1}^{2n} \frac{\sin(r + \frac{\mu\pi}{2})}{r^{\mu-1}} \cdot \sum_{\nu=\mu}^n a_{2\nu} \cdot \frac{(2\nu)!}{(2\nu-\mu)!} \right\} \quad (6)$$

Von der Summe  $(e^{-\nu} - e^{-2\nu})$  wird, wegen  $e^{-\nu} > e^{-2\nu}$ , der erste Summand den Hauptbeitrag zu  $\Delta R^+$  liefern, der auch zuerst betrachtet werden soll und mit  $f(r)$  und  $1/r^{\mu-1}$  zu der Funktion

$$F(r) = \frac{e^{-ar^2}}{K \cdot r^{\mu-1} \cdot \sqrt{r^2 + r_0^2}}, \quad \text{mit } a = K/r_0 \quad (7)$$

zusammengefaßt wird. Wegen der Polstelle von  $F(r)$  bei  $r=r_0$ , wird  $r = z^2 + r_0$  substituiert. Da auch die Integration über  $z$  nicht elementar ausführbar ist, wird für die Funktion

$$F(z^2 + r_0) = \frac{2 \cdot e^{-a(z^2 + r_0)^2}}{K(z^2 + r_0)^{\mu-1} \cdot \sqrt{z^2 + 2r_0}} \quad (7a)$$

eine Ersatzfunktion  $G(z^2 + r_0)$  eingesetzt. Es muß nun unterschieden werden, ob der Anfangswert des Integranden positiv oder negativ ist, denn in den beiden Fällen müssen verschiedene Ersatzfunktionen  $G_1$ , bzw.  $G_2$  betrachtet werden. Das Kriterium für die Auswahl ist

$$\text{sign}(\sin r_0 \cdot \cos r_0) .$$

Ist  $\text{sign}(\sin \gamma_0 \cdot \cos \gamma_0) < 0$ , dann wird für  $F(z^2 + \gamma_0)$  die Funktion

$$G_1(z^2 + \gamma_0) = \frac{2 \cdot e^{-a(z^2 + \gamma_0^2)}}{K \cdot \gamma_0^{\mu-1} \cdot \sqrt{2\gamma_0}} \quad (8a)$$

genommen, wobei im ganzen Intervall  $0 \leq z \leq \infty$

$$F(z^2 + \gamma_0) \leq G_1(z^2 + \gamma_0).$$

Ist  $\text{sign}(\sin \gamma_0 \cdot \cos \gamma_0) > 0$ , dann wird für  $F(z^2 + \gamma_0)$  die Funktion

$$G_2(z^2 + \gamma_0) = \frac{2z \cdot e^{-a(z^2 + \gamma_0)}}{K \cdot \gamma_0^{\mu-1} \sqrt{2\gamma_0}}$$

genommen, wobei

$$F(z^2 + \gamma_0) > G_2(z^2 + \gamma_0) \quad \text{im Intervall } 0 \leq z < Z$$

und

$$F(z^2 + \gamma_0) \leq G_2(z^2 + \gamma_0) \quad \text{im Intervall } Z \leq z \leq \infty.$$

In dem Ausdruck (6) sind nun die folgenden Integrale zu lösen

$$I_{1F} = \sin \frac{\mu K}{2} \int_{\gamma_0}^{\infty} F(\gamma) \cdot \cos^2 \gamma \cdot d\gamma = \sin \frac{\mu K}{2} \int_0^{\infty} F(z^2 + \gamma_0) \cdot \cos^2(z^2 + \gamma_0) \cdot dz$$

und

$$I_{2F} = \cos \frac{\mu K}{2} \int_{\gamma_0}^{\infty} F(\gamma) \cdot \sin \gamma \cdot \cos \gamma \cdot d\gamma = \frac{1}{2} \cos \frac{\mu K}{2} \int_0^{\infty} F(z^2 + \gamma_0) \cdot [\sin(2\gamma_0) \cdot \cos(2z^2) + \cos(2\gamma_0) \cdot \sin(2z^2)] \cdot dz,$$

wobei der Index F die verwendete Funktion  $F(z^2 + \gamma_0)$  anzeigt.

1. Fall:  $\text{sign}(\sin \gamma_0 \cdot \cos \gamma_0) < 0$ , Ersatzfunktion  $G_1(z^2 + \gamma_0)$

Integral  $I_1$ : Obwohl dieses Integral stets größer als Null ist, muß zur Abschätzung von  $\Delta R^+$  auch eine explizite Lösung gefunden werden. Mit Hilfe der Additionstheoreme des sin und cos erhält man

$$I_{1G_1} = \frac{2 \cdot e^{-a\gamma_0^2}}{K \cdot \gamma_0^{\mu-1} \sqrt{2\gamma_0}} \cdot \sin \frac{\mu K}{2} \int_0^{\infty} e^{-az^2} (\sin^2 \gamma_0 + \cos 2\gamma_0 \cdot \cos^2 z^2 - \frac{1}{2} \sin(2z^2) \sin 2\gamma_0) \cdot dz.$$

Mit der Abschätzung des zweiten Integrals von  $I_1$

$$\int_0^{\infty} e^{-az^2} \cdot \cos^2 z^2 dz \geq \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-az^2} dz = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > 0)$$

wird

$$I_{1G_1} = \frac{e^{-a\gamma_0^2}}{2K \gamma_0^{\mu-1}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2a \cdot \gamma_0}} \cdot \left\{ 1 - \sqrt{\frac{a \cdot (-a + \sqrt{a^2 + 4})}{2(a^2 + 4)}} \right\} \cdot \sin \frac{\mu K}{2} \quad (9a)$$

### Fehlerkorrektur

auf Seite 63 muß die Formel 9a richtig heißen

$$I_{1G_1} = \frac{e^{-a\gamma_0^2}}{2K\gamma_0^{\mu-1}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2a\gamma_0}} \cdot \left\{ 1 - \sin(2\gamma_0) \cdot \sqrt{a \cdot \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4}}{2(a^2 + 4)}} \right\} \cdot \sin \frac{\mu\pi}{2}$$

auf Seite 64 muß der erste Teil der Formel 10 richtig heißen

$$\Delta_{1R_{G_1}}^+ = \frac{e^{-a\gamma_0^2}}{2K} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\gamma_0}} \cdot \sum_{\mu=1}^{2n} \left\{ 1 - \sin(2\gamma_0) \cdot \sqrt{a \cdot \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4}}{2(a^2 + 4)}} \right\} \cdot \sin \frac{\mu\pi}{2}$$

Die Absolutbeträge des Integrals  $I_1$  mit den Funktionen  $F$  und  $G_1$  verhalten sich wie

$$|I_{1G_1}| \geq |I_{1F}| \cdot$$

Integral  $I_2$ :

$$I_{2G_1} = \frac{e^{-a\gamma_0^2}}{K \cdot \gamma_0^{\mu-1} \sqrt{2\gamma_0}} \cdot \cos \frac{\mu\pi}{2} \int_0^\infty e^{-az^2} [\sin(2\gamma_0) \cos(2z^2) + \cos(2\gamma_0) \sin(2z^2)] dz$$

$$I_{2G_1} = \frac{e^{-a\gamma_0^2}}{K \cdot \gamma_0^{\mu-1}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{4\gamma_0(a^2+4)}} \cdot \cos \frac{\mu\pi}{2} \left\{ \sqrt{a+\sqrt{a^2+4}} \cdot \sin \gamma_0 \cdot \cos \gamma_0 + \right. \quad (9b)$$

$$\left. + \sqrt{-a+\sqrt{a^2+4}} \cdot \left( \cos^2 \gamma_0 - \frac{1}{2} \right) \right\}$$

Da der Anfang des Integranden den Hauptbeitrag zum Integral liefert, verhalten sich die Absolutbeträge wie

$$|I_{2G_1}| \geq |I_{2F}| \cdot$$

Der erste Anteil des Änderungswiderstandes wird in diesem Fall

$$\Delta_{1R_{G_1}^+} = \frac{e^{-a\gamma_0^2}}{2K} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\gamma_0}} \sum_{\mu=1}^{2n} \left\{ \left( 1 - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2(a^2+4)}} \right) \cdot \frac{\sin \frac{\mu\pi}{2}}{2a} \right. \quad (10)$$

$$\left. + \left( \sqrt{a+\sqrt{a^2+4}} \cdot \sin \gamma_0 \cdot \cos \gamma_0 + \sqrt{-a+\sqrt{a^2+4}} \left( \cos^2 \gamma_0 - \frac{1}{2} \right) \frac{\cos \frac{\mu\pi}{2}}{\sqrt{a^2+4}} \right) \sum_{\nu=\mu}^n \frac{a_{2\nu} \cdot (2\nu)!}{(2\nu-\mu)! \gamma_0^{\mu-1}} \right\}$$

Aus (5) und (6) folgt, daß der Beitrag des Gliedes  $\mu=1$  wegen

$$\eta'(1) = \sum_{\nu=1}^n a_{2\nu} \cdot 2\nu \leq 0$$

und

$$\cos^2 \gamma_0 \geq 0$$

kleiner als Null ist. Die übrigen Glieder leisten nur dann einen vernachlässigbaren Beitrag, wenn

$$\gamma_0 \geq 2n(2n-1); \quad (11)$$

denn für alle

$$\mu \geq 2$$

ist wegen  $\frac{(2n)!}{(2n-\mu)!} \leq (2n(2n-1))^{\mu-1}$

und der Nebenbedingungen (3)

$$1 > \sum_{\nu=\mu}^n a_{2\nu} \cdot \frac{(2\nu)!}{(2\nu-\mu)! (2n(2n-1))^{\mu-1}} > \sum_{\nu=\mu+1}^n a_{2\nu} \cdot \frac{(2\nu)!}{(2\nu-\mu-1)! (2n(2n-1))^{\mu}}$$

Mit der unteren Grenze (11), sowie  $K < 1$  und  $n \geq 1$  wird

$$a = K/\gamma_0 \ll 1$$

und

$$\Delta_{1R_{G_1}}^+ = C \cdot \sum_{\mu=1}^{2n} \left\{ \left[ \frac{\sin \frac{\mu\pi}{2}}{\sqrt{2a}} + \sqrt{\frac{1}{2}} (\sin \gamma_0 \cdot \cos \gamma_0 + \cos^2 \gamma_0 - \frac{1}{2}) \cos \frac{\mu\pi}{2} \right] \sum_{\nu=\mu}^n \frac{a_{2\nu} (2\nu)!}{(2\nu-\mu)! \cdot \gamma_0^{\mu-1}} \right\} \quad (12)$$

mit  $C = \frac{e^{-a\gamma_0^2}}{2K} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\gamma_0}}$

Voraussetzungsgemäß ist  $\sin \gamma_0 \cdot \cos \gamma_0 < 0$ , also treten für

$$\gamma_0 = (2m+1) \cdot \pi/2 \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

die ungünstigsten Fälle ein und (12) wird

$$\Delta_{1R_{G_1}}^+ = C \cdot \sum_{\mu=1}^{2n} \left\{ \left[ \frac{\sin \frac{\mu\pi}{2}}{\sqrt{2a}} - \frac{\cos \frac{\mu\pi}{2}}{2 \cdot \sqrt{2}} \right] \cdot \sum_{\nu=\mu}^n a_{2\nu} \cdot \frac{(2\nu)!}{(2\nu-\mu)!} \cdot \frac{1}{\gamma_0^{\mu-1}} \right\} \quad (13)$$

Wegen  $\eta'(1) \leq 0$  wird für den ersten Fall der erste Term des Änderungswiderstandes

$$\Delta_{1R_{G_1}}^+ = -\frac{C}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{a}} (|\eta'(1)| + \frac{1}{\gamma_0^2} \eta'''(1) - \frac{1}{\gamma_0^4} \eta^{(5)}(1) + \dots) - \frac{1}{2\gamma_0} (\eta'(1) - \frac{1}{\gamma_0^2} \eta'''(1) + \frac{1}{\gamma_0^4} \eta^{(5)}(1) - \dots) \right\} \leq 0 \quad (14)$$

2. Fall:  $\text{sign}(\sin \gamma_0 \cdot \cos \gamma_0) > 0$ , Ersatzfunktion  $G_2(z^2 + \gamma_0)$

Für diesen Fall können die Integrationen über  $\gamma$  ausgeführt werden.

Integral  $I_1$ :

$$I_{1G_2} = \frac{C}{\gamma_0^{\mu-1}} \cdot \sin \frac{\mu\pi}{2} \cdot (a \cdot \cos^2 \gamma_0 - 2 \sin \gamma_0 \cdot \cos \gamma_0 + 2/a) \quad (15a)$$

mit  $C = \frac{e^{-a\gamma_0}}{K \cdot (4+a^2) \cdot \sqrt{2\gamma_0}}$

Da der Anfangsbereich  $0 \leq z \leq Z$  des Integranden den Hauptbeitrag zum Integral liefert, verhalten sich die Absolutbeträge wie

$$|I_{1G_2}| \leq |I_{1F}|$$

Integral  $I_2$ :

$$I_{2G_2} = \frac{C}{\gamma_0^{\mu-1}} \cdot \cos \frac{\mu\pi}{2} \cdot (a \cdot \sin \gamma_0 \cdot \cos \gamma_0 + 1 - 2 \cos^2 \gamma_0) \quad (15b)$$

Die Absolutbeträge verhalten sich wie

$$|I_{2G_2}| \leq |I_{2F}|$$

Unter den gleichen Bedingungen wie im 1. Fall und mit der Voraussetzung  $\sin \gamma_0 \cdot \cos \gamma_0 > 0$  wird in diesem Fall der Änderungswiderstand

$$\Delta_1 R_{G_2}^+ = C \cdot \sum_{\mu=1}^{2n} \left\{ \left[ \left( \frac{2}{a} - 2 \cdot \sin \gamma_0 \cdot \cos \gamma_0 \right) \sin \frac{\mu \pi}{2} + (1 - 2 \cos^2 \gamma_0) \cos \frac{\mu \pi}{2} \right] \sum_{\nu=\mu}^n a_{2\nu} \cdot \frac{(2\nu)!}{(2\nu-\mu)!} \frac{1}{\gamma_0^{\mu-1}} \right\},$$

dessen ungünstigste Fälle bei

$$\gamma_0 = m \cdot \pi \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

eintreten mit

$$\Delta_1 R_{G_2}^+ = C_0 \cdot \sum_{\mu=1}^{2n} \left\{ \left[ \frac{2}{a} \sin \frac{\mu \pi}{2} - \cos \frac{\mu \pi}{2} \right] \sum_{\nu=\mu}^n a_{2\nu} \cdot \frac{(2\nu)!}{(2\nu-\mu)!} \frac{1}{\gamma_0^{\mu-1}} \right\}$$

mit  $C_0 = e^{-a\gamma_0} / (4K \cdot \sqrt{2\gamma_0})$ . Schließlich wird auch im 2. Fall mit

$$\eta'(1) \leq 0$$

$$\Delta_1 R_{G_2}^+ = -2C_0 \cdot \left\{ \frac{1}{a} (|\eta'(1)| + \frac{1}{\gamma_0^2} \eta'''(1) - \frac{1}{\gamma_0^4} \eta^{(5)}(1) + \dots) - \frac{1}{2\gamma_0} (\eta''(1) - \frac{1}{\gamma_0^2} \eta^{(4)}(1) + \frac{1}{\gamma_0^2} \eta^{(6)}(1) - \dots) \right\} \leq 0.$$

In einer analogen Weise erhält man aus dem zweiten Term der Formel (6) die gleichen Ausdrücke für  $\Delta_2 R_G^+$ , nur statt  $a$ , ist  $2a$  zu setzen. Wegen  $e^{-a} > e^{-2a}$  wird in beiden Fällen

$$\Delta_2 R_G^+ < \Delta_1 R_G^+.$$

Damit ist gezeigt worden, daß unter Benutzung der Nebenbedingungen (3) und wegen des monotonen Abklingens des Faktors  $F(\gamma)$  der Änderungswiderstand

$$\Delta R_G^+ = \Delta_1 R_G^+ - \Delta_2 R_G^+ \leq 0$$

zumindest dann stets negativ ausfällt, wenn

$$\Gamma(n) = 2n(2n-1) \leq \gamma_0 \leq \infty. \quad (\text{q.e.d.})$$

## 5.2. Anhang 2

Bei einer Matrix  $\alpha[\mu, \nu]$  gibt  $\mu$  die Zahl der Zeilen und  $\nu$  die der Spalten an. Die Größen  $\mu$  und  $\nu$ , die in den eckigen Klammern stehen, beschreiben das Format der Matrix. Das Produkt zweier Matri-

zen mit den Elementen  $a_{1n}$ , bzw.  $b_{1n}$  ist der folgende Summenausdruck

$$\begin{aligned} p_{[1,1]} = \alpha_{[1,v]} \cdot b_{[v,1]} &= \sum_{n=1}^v a_{1n} \cdot b_{n1} = \quad (1) \\ &= a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \dots + a_{1v} \cdot b_{v1} . \end{aligned}$$

Voraussetzung: Die Spaltenzahl von  $\alpha$  muß gleich der Zeilenzahl von  $b$  sein.

Ergebnis: Die Ergebnismatrix  $p_{[1,1]}$  hat das Format  $[1,1]$  .

Enthält die Matrix  $b$  an Stelle der einzelnen Elemente  $b_{1n}$  Matrizen der Form  $c^{v1}_{[1,\mu]} = b_{v1}$  (Submatrizen), deren hochgestellte Indices  $v1$  mit dem Format von  $b$  identisch sind, dann lassen sich zwei verschiedene Produkte aus  $\alpha$  und  $b$  formulieren.

1. Produkt:

$$\begin{aligned} p_{[\mu,1]} = \alpha_{[1,v]} \cdot b_{[v,1]} &= \sum_{n=1}^v a_{1n} \cdot b_{n1} = \sum_{n=1}^v a_{1n} \cdot c^{n1}_{[\mu,1]} = \quad (2) \\ &= a_{11} \cdot c^{11}_{[\mu,1]} + a_{12} \cdot c^{21}_{[\mu,1]} + \dots + a_{1v} \cdot c^{v1}_{[\mu,1]} . \end{aligned}$$

Voraussetzung: Die Spaltenzahl von  $\alpha$  muß gleich der Zeilenzahl von  $b$  sein.

Ergebnis: Die Ergebnismatrix  $p_{[\mu,1]}$  hat das Format der Submatrix.

2. Produkt:

$$p_{[v,1]} = \alpha_{[1,\mu]} \cdot b_{[v,1]} = (\alpha_{[1,\mu]} \cdot c^{11}_{[\mu,1]}, \alpha_{[1,\mu]} \cdot c^{21}_{[\mu,1]}, \dots, \alpha_{[1,\mu]} \cdot c^{v1}_{[\mu,1]}). \quad (3)$$

Die Produkte  $\alpha \cdot c$  sind normale Matrizenprodukte nach (1).

Voraussetzung: Die Spaltenzahl von  $\alpha$  muß gleich der Zeilenzahl der Submatrix  $c$  sein.

Ergebnis: Die Ergebnismatrix  $p_{[v,1]}$  hat das Format der Matrix  $b$ .

Die Matrizenprodukte der Widerstandsrechnung:

Für den allgemeinen Fall der gleichzeitigen Bearbeitung von  $p$  verschiedenen Längs- und  $q$  verschiedenen Tiefenverteilungsformen ergibt sich der Wellenwiderstand in Form einer Matrix  $k^*$ , die geeignet dimensionslos gemacht ist.

$$\hat{K}^* \begin{bmatrix} q, q \\ p, p \end{bmatrix} = \mathcal{B} [q, \mu] \cdot \left\{ \alpha [p, \nu] * \mathcal{N} \begin{bmatrix} s, t \\ i, j \end{bmatrix} * \alpha [p, \nu]^T \right\} \cdot \mathcal{B} [q, \mu]^T$$

Nach dem kommutativen Gesetz gilt ebenfalls

$$\hat{K}^* \begin{bmatrix} q, q \\ p, p \end{bmatrix} = \alpha [p, \nu] * \left\{ \mathcal{B} [q, \mu] \cdot \mathcal{N} \begin{bmatrix} s, t \\ i, j \end{bmatrix} \cdot \mathcal{B} [q, \mu]^T \right\} * \alpha [p, \nu]^T$$

Voraussetzung für die Multiplikation ist

$$\nu = i = j \quad \text{und} \quad \mu = s = t.$$

$\alpha [p, \nu]$  ist die Koeffizientenmatrix der  $p$  verschiedenen Formen der Längsverteilung, von denen jedes Polynom  $\nu$  Koeffizienten hat.

$\mathcal{B} [q, \mu]$  ist die Koeffizientenmatrix der  $q$  verschiedenen Formen der Tiefenverteilung, von denen jedes Polynom  $\mu$  Koeffizienten hat.

$\mathcal{N} \begin{bmatrix} s, t \\ i, j \end{bmatrix}$  ist die Widerstandsmatrix mit  $s$  Zeilen und  $t$  Spalten, deren Submatrizen  $i$  Zeilen und  $j$  Spalten haben. Sowohl die Hauptmatrix als auch deren  $s \cdot t$  Submatrizen sind diagonalsymmetrisch. Die oberen Indices  $s$  und  $t$  des Formates sind mit den Exponenten der E-Funktionen und die unteren Indices  $i$  und  $j$  mit den Exponenten der M-Funktionen identisch.

Die Matrix  $\hat{K}^*$  hat die gleichen Symmetrieeigenschaften wie  $\mathcal{N}$ , aus denen sich eine Kontrollmöglichkeit für die Rechengenauigkeit ergibt. Aus Symmetriegründen gilt für die einzelnen Elemente von  $\hat{K}^*$

$$K_{kl}^{+nm} = K_{lk}^{+mn}.$$

Als Widerstände der verschiedenen Formen kommen nur die Diagonalelemente der Submatrizen von  $\hat{K}^*$  in Frage. Alle anderen Elemente stellen mögliche Interferenzen der einzelnen Formen untereinander dar. Es ergeben sich für die  $p \cdot q$  möglichen Formkombinationen auch  $p \cdot q$  Lösungen (Sharma /29/).

### 5.3. Anhang 3

Prinzipiell ist gegen das Berechnen der  $\mathcal{M}$ -Funktionen sehr hoher Potenzen nichts einzuwenden, deren Integrale sich nach der Rekursionsformel explizit lösen lassen. Die numerischen Schwierigkeiten hierfür sind allerdings beträchtlich, da das Integral

$$M_i(r) = \int_0^1 \xi^i \cdot \sin(r \cdot \xi) \cdot d\xi$$

mit wachsendem  $i$  schlechter konvergiert. Sind die Singularitäten etwa in der Nähe von  $\xi = +1$  konzentriert, dann läßt sich auf Grund eines Vorschlages von Weinblum /42/ für

$$\sin(r \cdot \xi) = \sin\{1 - (1 - \xi)\}r\}$$

schreiben. Die Anwendung des Additionstheorems für den  $\sin$  und die Reihenentwicklung der Funktionen  $\sin\{r(1 - \xi)\}$  und  $\cos\{r(1 - \xi)\}$  führen zu der Formel

$$M_i(r) = \sin r \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{r^{2(n-1)}}{\prod_{m=1}^{2n-1} (i+m)} - \cos r \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2(n-1)}{\prod_{m=1}^{2n} (i+m)}$$

Obwohl auch diese Formel exakt ist, zeigt sie doch die erheblichen numerischen Schwierigkeiten und läßt die Gefahr eines verfrühten Abbrechens der Reihen erkennen; denn für konstantes  $r$  und  $i$  konvergieren die Reihen erst ab

$$r \geq \prod_{m=1}^N (i+m).$$

Sie sind dann aber absolut konvergent.

Die Funktion  $M_i(r)$  zeigt also zunächst ein divergierendes Verhalten, konvergiert aber stets absolut gegen Null, wenn  $r$  gegen Unendlich geht. Während der numerischen Auswertung müssen demnach für  $i = \text{const}$  aber wachsendes  $r$  stets weitere Reihenglieder hinzugenommen werden. Daher kann die Behauptung von Weinblum /42/, daß die Reihen für  $\sin\{r(1 - \xi)\}$ , bzw.  $\cos\{r(1 - \xi)\}$  für nicht zu große  $r$  schnell abgebrochen werden können, dann nicht mehr aufrechterhalten werden, wenn die  $m$ -Funktionen berechnet werden sollen. Z.B. divergiert die Reihe

$$\cos\{r(1 - \xi)\} = \frac{1}{(i+1)} - \frac{r^2}{(i+1)(i+2)(i+3)} ;$$

denn für

$$r \geq \pm \sqrt{(i+2)(i+3)} \quad \text{wird} \quad 1 \leq \left| \frac{r^2}{(i+2)(i+3)} \right|.$$

Damit geht auch das Integral

$$\mathcal{M}_i(\gamma_0) = \int_{\gamma_0}^{\infty} \{M_i(\gamma)\}^2 \cdot F(\gamma) \cdot d\gamma$$

gegen Unendlich; denn  $F(\gamma)$  geht zwar wie  $\gamma^{-3}$  gegen Null,  $\{M_i(\gamma)\}^2$  aber wie  $\gamma^{+4}$  gegen Unendlich.

#### 5.4. Anhang 4

Nach Havelock /14/ und Yim /49/ erzeugen die elementaren, diskreten Singularitäten, die sich dem Punkt  $P(0,0,f)$  befinden, ein freies Wellensystem mit den folgenden Wellenerhebungen:

1. die Singularität 0. Ordnung oder die Quelle der Stärke  $q$

$$\zeta(\xi, \eta) \sim + \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} C(\theta) \cdot \cos(K_0 \beta \cdot \sec^2 \theta) \cdot d\theta$$

2. die Singularität 1. Ordnung oder der Dipol mit dem Moment  $m$

$$\zeta(\xi, \eta) \sim - \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} S(\theta) \cdot \sin(K_0 \beta \cdot \sec^2 \theta) \cdot d\theta$$

3. die Singularität 2. Ordnung oder der Quadrupol der Stärke  $l$

$$\zeta(\xi, \eta) \sim - \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} C(\theta) \cdot \cos(K_0 \beta \cdot \sec^2 \theta) \cdot d\theta$$

mit  $\beta = x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta$  und  $C(\theta)$  und  $S(\theta)$  als Amplitudenfunktionen.

Die Wellenerhebung der Komponente  $\theta = 0$ , bzw.  $y = 0$ , des freien Wellensystems der Formen  $(2, 4, 6, \varphi_m, 1.0)$  ergibt sich nach einigen Umformungen (s. Lunde /24/) und unter Verwendung der Havelockschen Approximation zu

$$\frac{z(x, 0)}{T} = - \frac{4 \cdot B}{\pi \cdot T} \cdot \int_{\gamma_0}^{\infty} \int_0^1 \eta'(\xi) \cdot \sin(\gamma \cdot \xi) \frac{(1 - e^{-\gamma \xi})}{\sqrt{\gamma^2 - \gamma_0^2}} \cdot d\xi \cdot \sin(\gamma \cdot \frac{2x}{L}) \cdot d\gamma$$

Entsprechend ergibt sich für die freifahrende Kugel, deren Mittelpunkt sich in  $P(0,0,f)$  befindet, mit dem Radius  $r$  bezogen auf den Schiffstiefgang  $T$

$$\frac{z(x, 0)}{T} = + 16 \left(\frac{r}{T}\right)^3 \cdot (T/L)^2 \cdot \int_{\gamma_0}^{\infty} \sin(\gamma \cdot \frac{2x}{L}) \cdot \frac{\exp(-\gamma f)}{\sqrt{\gamma^2 - \gamma_0^2}} \cdot \frac{\gamma^3}{\gamma_0} \cdot d\gamma$$

Beide Wellenkonturen sind für  $Fr = 0.18$  in dem Diagramm 5 graphisch dargestellt.

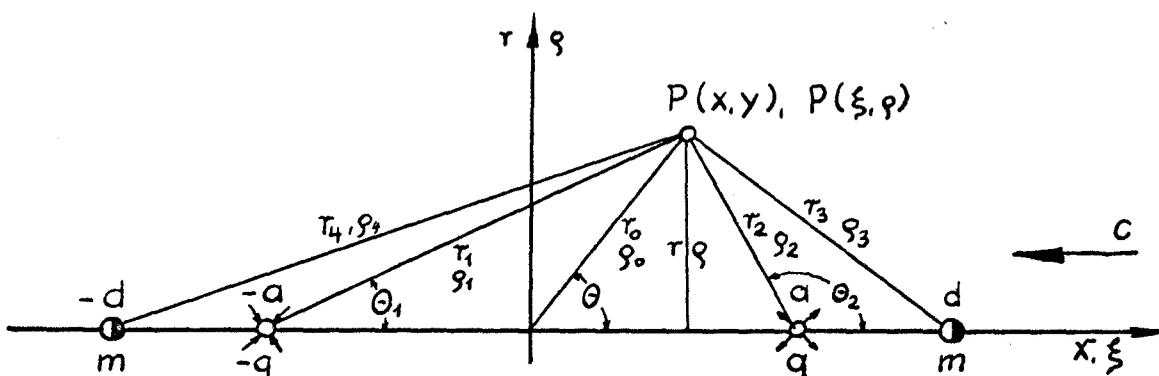
### 5.5. Anhang 5

Prinzipiell ist das Berechnen des Umströmungskörpers einer Quell-Senken-Dipol-Kombination möglich, der über die Volumenverhältnisse die richtige Auskunft geben würde. Da diese aufwendigen Rechnungen durch das Anwenden der Havelockschen Approximation unterbleiben, aber trotzdem eine Vorstellung von der Volumenverteilung notwendig ist, wurden die Verhältnisse an dem einfachen Fall des Rankineschen Ovoides studiert, das mit einem symmetrisch und asymmetrisch angeordneten Dipol versehen worden ist.

Die Singularitäten, Quelle ( $q$ ), Senke ( $-q$ ) und Dipol ( $m$ ), liegen auf einer Achse und sind unendlich tiefgetaucht. Die Entfernung  $2a$  zwischen Quelle und Senke bleibt konstant, während die Lage des Dipols auf der Achse veränderlich ist. Diese Singularitätenkombination wird mit der Geschwindigkeit  $c$  angeströmt. Nach Milne-Thomson (p.411) ergibt sich hierfür eine Stromfunktion  $\psi$  von

$$\psi = \frac{1}{2}c \cdot r_0^2 \cdot \sin^2\theta + q(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) - m \cdot \left( \frac{r^2}{r_3} + \frac{r^2}{r_4} \right),$$

wenn das Koordinatensystem



benutzt wird. Dabei bedeuten

$$r = r_0 \cdot \sin\theta, \quad x + a = r_1 \cdot \cos\theta_1, \quad x - a = r_2 \cdot \cos\theta_2$$

$$r_1 = \sqrt{(x+a)^2 + r^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-a)^2 + r^2}$$

$$r_3 = \sqrt{(x-d)^2 + r^2}, \quad r_4 = \sqrt{(x+d)^2 + r^2}$$

Die Quellsingularitäten befinden sich in den Punkten  $P(\pm a, 0)$  und die Dipole in  $P(\pm d, 0)$ . Wird  $x$  mit  $a$  und  $r$  mit  $b$ , der kl. Halbachse des ungestörten Ovoides, dimensionslos gemacht, ergibt sich

$$\varrho_1 = \sqrt{(\xi+1)^2 + \alpha^2 \cdot \varrho^2}, \quad \varrho_2 = \sqrt{(\xi-1)^2 + \alpha^2 \cdot \varrho^2}$$

$$\varrho_3 = \sqrt{(\xi-\vartheta)^2 + \alpha^2 \cdot \varrho^2}, \quad \varrho_4 = \sqrt{(\xi+\vartheta)^2 + \alpha^2 \cdot \varrho^2}$$

$$\xi + 1 = \varrho_1 \cdot \cos\theta_1, \quad \xi - 1 = \varrho_2 \cdot \cos\theta_2$$

mit  $\alpha = b/a$  und  $\vartheta = d/a$ .

Die Quellstärke ergibt sich aus der Bedingung, daß das Ovoid so breit sein soll, wie der Halbkörper im Unendlichen, der durch eine Quelle in Parallelströmung erzeugt wird, zu

$$q = \frac{c \cdot b^2}{4} \cdot \sqrt{1 + \alpha^2}.$$

Mit dem Dipolmoment

$$m = \frac{R^3 \cdot c}{2}$$

( $R$  ist der Radius der freifahrenden Kugel) erhält man die Kontur des Rotationskörpers aus der Stromfunktion nach der Bedingung  $\psi = 0$  zu

$$0 = 2\varrho^2 + \sqrt{1+\alpha^2} \left( \frac{\xi-1}{\varrho_2} + \frac{\xi+1}{\varrho_1} \right) - 2(R/b)^3 \cdot \alpha^3 \cdot \varrho^2 \left( \frac{1}{\varrho_3^3} + \frac{1}{\varrho_4^3} \right).$$

Für den asymmetrischen Fall fällt das Glied  $1/\varrho_4^3$  weg.

Die Bedingung  $\partial\psi/\partial\tau = 0$  liefert die Staupunkte, die sich aus der Gleichung

$$1 - \alpha^2 \cdot \sqrt{1+\alpha^2} \frac{\xi}{(\xi^2-1)^2} - (R/b)^3 \cdot \alpha^3 \left[ \frac{1}{\pm(\xi-\vartheta)^3} + \frac{1}{\pm(\xi+\vartheta)^3} \right] = 0$$

ergeben. Ist  $\vartheta > 1/2a + R/b$  ( $1$  ist die Länge des ungestörten Ovoides), dann hat die Gleichung sechs verschiedene Lösungen, d.h. es entstehen drei getrennte Körper.

Die Figuren A bis D geben für die symmetrische Dipolanordnung die Konturen der verschiedenen Rotationskörper wieder.

Diagramm 1 zeigt die Volumenverhältnisse

$$(V_{\text{komb}} - V_{\text{ovoid}}) / V_{\text{ovoid}} = f(\vartheta)$$

als Funktion von  $\vartheta = d/a$ .

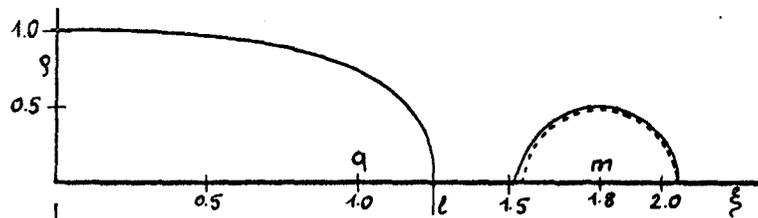


Fig. A

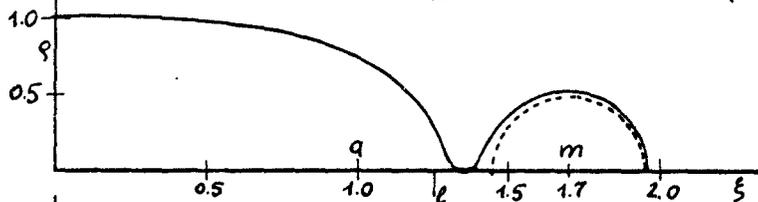


Fig. B

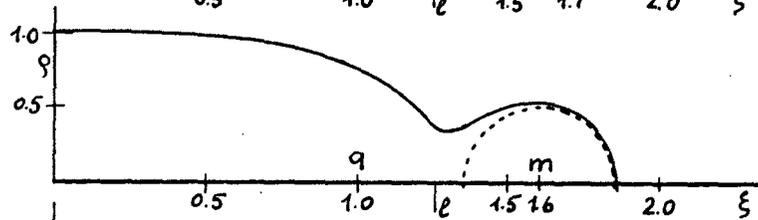


Fig. C

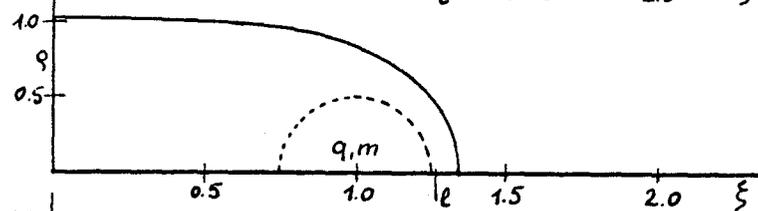


Fig. D

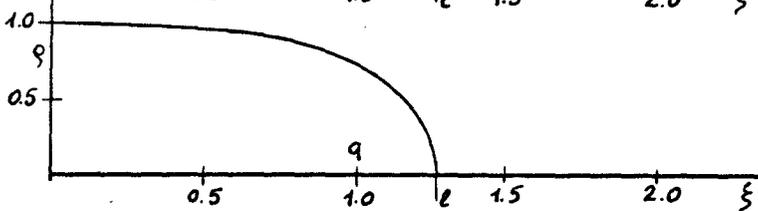


Fig. E  
ungestörtes  
Ovoid

Rotationskörper einer Quell-Senken-Dipol-Kombination  
in symmetrischer Anordnung mit  $\alpha = 0.5$  und  $R/b = 0.5$ .  
(q - Quelle, m - Dipol)

### 5.6. Anhang 6

Die allgemeine Form der M-Funktionen der Dipolsingularität für den Wulst ist

$$M_D(\gamma, d) = \gamma \cdot \cos(d\gamma).$$

Wegen der Reduktion des zweiten Teilintegrals  $I_2$  auf das Intervall von 0 bis  $2\pi$  und aus rechentechnischen Gründen muß der Ausdruck  $\cos(d\gamma)$  umgeformt werden. Wird erst die Substitution

$$\gamma = x + \pi(n+2N) \quad (n \text{ positiv und ganz})$$

und dann die Transformation  $d = 1 \mp p$  durchgeführt, dann ergibt sich

$$M_D(\gamma, d) = (x + \pi(n+2N)) \cdot \cos((1 \mp p) \cdot (x + \pi(n+2N))).$$

Der cos-Term kann mit Hilfe des Additionstheorems zerlegt werden in

$$\cos((1 \mp p)x + (1 \mp p)\beta) = \cos((1 \mp p)x) \cdot \cos A - \sin((1 \mp p)x) \cdot \sin A$$

mit  $\beta = \pi(n+2N)$  und

$$\cos(A) = \cos\beta \cdot \cos(\mp p\beta) - \sin\beta \cdot \sin(\mp p\beta)$$

$$\sin(A) = \sin\beta \cdot \cos(\mp p\beta) + \cos\beta \cdot \sin(\mp p\beta) .$$

Voraussetzungsgemäß war  $\sin\beta = 0$ , damit wird

$$\cos(A) = \text{sign}(\cos n\pi) \cdot \cos(\mp p\beta)$$

$$\sin(A) = - \text{sign}(\cos n\pi) \cdot \sin(\mp p\beta)$$

und die M-Funktionen bekommen die einfache Gestalt

$$M_D(\gamma, d) = (x + \pi(n+2N)) \cdot \text{sign}(\cos n\pi) \{ \cos(x(1 \mp p)) \cdot \cos(p\beta) \\ \pm \sin(x(1 \mp p)) \cdot \sin(p\beta) \} .$$

Die Funktionen  $\sin / \cos(x(1 \mp p))$  werden nur einmal bestimmt, während die  $\sin / \cos(p\beta)$ -Werte für jedes N neu berechnet werden müssen.

6. Liste der verwendeten Symbole

- $\alpha$  Winkelkoordinate des Systems der Zylinderkoordinaten.  
 $\alpha = b/a$  Breiten-Längen-Verhältnis (-).  
 $B$  Völligkeitsgrad der Hauptspantfläche (-).  
 $B(\alpha, z) = r$  Gleichung der Körperoberfläche in Zylinderkoordinaten.  
 $\gamma, \gamma_0 = 1/2 \cdot Fr^2$  Geschwindigkeitsparameter (-).  
 $\delta$  Hilfsgröße.  
 $\delta = \sqrt{n \cdot \pi - \gamma_0}$  obere Grenze des ersten Teilintegrals, Gleichung(53).  
 $\varepsilon = B/L$  Breiten-Längen-Verhältnis (-).  
 $\xi$  dimensionslose Tiefenkoordinate.  
 $\xi(r, \alpha) = z$  Gleichung der freien Oberfläche in Zylinderkoordinaten.  
 $\eta$  dimensionslose Breitenkoordinate.  
 $\eta(\xi)$  Verteilungsfunktion der Länge nach, Gleichung der Wasserlinie und der Spantarealkurve.  
 $\theta, \theta_1, \theta_2$  Integrationsvariable, Winkel.  
 $\nu = K \cdot \delta^2 / \gamma_0$  Hilfsgröße.  
 $\lambda$  Lagrangescher Multiplikator.  
 $\mu(\xi, \zeta), \mu(\xi)$  Intensitätsverteilung von Dipolen (-).  
 $\xi$  dimensionslose Längenkoordinate.  
 $\rho$  Dichte ( $Kp \cdot s^2 / m^4$ ).  
 $\sigma^{(p)}(\xi, \zeta)$  Intensitätsverteilung von Singularitäten p-ter Ordnung.  
 $\sigma(\xi, \zeta), \sigma(\xi)$  Intensitätsverteilung von Quellen (-).  
 $\Delta \sigma^{(q)}$  Änderungssingularität q-ter Ordnung (-).  
 $\tau(\zeta)$  Verteilungsfunktion der Tiefe nach, Gleichung der Spante.  
 $\Phi$  Geschwindigkeitspotential ( $m^2/s$ ).  
 $\varphi$  Störpotential ( $m^2/s$ ), Völligkeitsgrad der Spantarealkurve (-).  
 $\psi$  Stromfunktion ( $m^2/s$ ).  
 $\Omega(\xi, \zeta)$  Belegungsfläche, Schiffsoberfläche.

$$A = \frac{\varepsilon \cdot \rho \cdot B^2 \cdot \pi^2}{c^2 \cdot L} \quad \text{Dimensionskonstante des Widerstandsintegrals (Kp), Gleichung (57,58).}$$

$$a = 128 \cdot \frac{\varepsilon \cdot \rho \cdot \pi}{c^2 \cdot L} \quad \text{Faktor.}$$

- $a_{\nu}$  Elemente der Matrix  $\alpha$ .
- B Breite (m), Gebiet.
- b kleine Halbachse des ungestörten Ovoides (m), Integrationsgrenze in y-Richtung (-).
- $b_{\mu}$  Elemente der Matrix  $\beta$ .
- C = A Konstante, Gleichung (24)
- $C(\theta)$ ,  $c(\theta)$  Amplitudenfunktion der cos-Komponente.
- c Anströmgeschwindigkeit, Geschwindigkeit der Parallelströmung (m/s).
- D, DE, DP, DVE, DVP dimensionslose Dipolmomente, Gleichung (57, 58).
- d Lage der Wulstsingularität der Länge nach (-).
- $E_S(\gamma, \gamma_0, K)$  E-Funktion, Gleichung (23c, 52c).
- F,  $F_0$ ,  $F_1$  Bezugsflächen ( $m^2$ ).
- $Fr = v/\sqrt{g \cdot L}$  Froudesche Zahl (-).
- $F(r, \alpha, z)$  freie Flüssigkeitsoberfläche in Zylinderkoordinaten.
- f Lage der Wulstsingularität der Tiefe nach (-).
- $f(x)$  Gleichung der Wasserlinie.
- $f(\gamma)$  Funktion, Gleichung (52d).
- $G(\xi, \zeta)$  Gerade.
- $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  Erdbeschleunigung.
- $g(z)$  Gleichung der Spante.
- h Wassertiefe (m).
- $h(\gamma)$  Funktion, Gleichung (25a).
- $I_1, I_2, I_3$  Teilintegrale des Typintegrals.
- K Kraft ( $K_p$ ).
- $K = 2T/L$  Tiefen-Längen-Verhältnis.
- $K_0 = g/c^2$  Wellenzahl (1/m).
- $K_{kl}^{+nm}$  Element der Kraftmatrix.
- k Konstante.
- L Länge (m).
- l Länge des Ovoides (m), Integrationsgrenze in x-Richtung (-).
- $M_{ij}^{st}(\gamma_0, K)$  Typintegral des Michell-Havelockschen Widerstandsintegrals, Gleichung (23, 52a).

- $M_i(\gamma)$  M-Funktion, Gleichung (23a, 52b).
- $m_o = \frac{c \cdot r^3}{2}$  Moment des diskreten Dipols ( $m^4/s$ ).
- $m_o = c \cdot r^2$  Moment des ebenen Dipols ( $m^3/s$ ).
- P P-Funktion des Michell-Havelockschen Widerstandsintegrals, Gleichung (20) ( $m^3/s$ ).
- p,  $p_o$  Druck, atmosphärischer Druck ( $Kp/m^2$ ).
- p Ordnung der Singularitäten.
- Q Q-Funktion des Michell-Havelockschen Widerstandsintegrals, Gleichung (20) ( $m^3/s$ ).
- q Ordnung der Wulstsingularitäten, Singularitätenkonstante nach Gleichung (20) ( $m^3/s$ ).
- $q_o = \frac{c \cdot r^2}{4}$  Stärke der diskreten Quelle ( $m^3/s$ ).
- R Widerstand, Wellenwiderstand in idealer Flüssigkeit ( $Kp$ ).
- $\Delta R^+(\gamma_o, K)$  Änderungswiderstand, Gleichung (38) (-).
- r Radius (m).
- $S(\theta)$ ,  $s(\theta)$  Amplitudenfunktion der sin-Komponente.
- S Spannungstensor.
- $S^{(p)}(\xi, \zeta)$  Singularitätenverteilung ( $m^3/(s \cdot m^2)$ ).
- $S(r, \alpha, z)$  benetzte Körperoberfläche in Zylinderkoordinaten.
- $S(x, z)$  Oberfläche des Schiffes in kartesischen Koordinaten.
- $s_o^{(p)}$  Stärke der Singularität p-ter Ordnung pro Fläche ( $m^3/(s \cdot m^2)$ ).
- T Tiefgang (m).
- t,  $t_o$  Zeit (s), Integrationsgrenze in z-Richtung (-).
- U Potentialfunktion der Massenkraft ( $m^2/s^2$ ).
- u Geschwindigkeit in x-Richtung (m/s).
- $V_b$  effektives Wulstvolumen ( $m^3$ ).
- $V_f$  Verkleidungsvolumen ( $m^3$ ).
- $V_k$  nominelles Wulstvolumen ( $m^3$ ).
- $V_{komb}$  Volumen der Schiff-Wulst-Kombination ( $m^3$ ).
- $V_m$  Volumen des Schiffes ( $m^3$ ).
- VE, VP, VVE, VVP auf  $V_m$  bezogene Wulstvolumina, Gleichung(57, 58).

v      Geschwindigkeit in y-Richtung (m/s).  
w      Geschwindigkeit in z-Richtung (m/s).  
x, y, z      kartesische Koordinaten (m).  
z(x,y)      Wellenerhebung (m).

#### Matrizen und Vektoren

$\alpha[1,n]$       Koeffizientenmatrix der Nebenbedingungen zu  $\alpha$ .  
 $\alpha[1,n]$       Koeffizientenmatrix der Verteilung  $\eta(\xi)$ .  
 $\mathcal{L}[1,m]$       Koeffizientenmatrix der Nebenbedingungen zu  $\mathcal{L}$ .  
 $\mathcal{L}[1,m]$       Koeffizientenmatrix der Verteilung  $\tau(\xi)$ .  
 $\mathcal{L}_a[1,n]$       Konstantenmatrix zu  $\alpha$ .  
 $\mathcal{L}_b[1,m]$       Konstantenmatrix zu  $\mathcal{L}$ .  
 $c^{nm}_{[\mu,\nu]}$       Submatrix.  
 $\mathcal{Q}$       Vektor der Massenkräfte, Komponenten (X, Y, Z).  
 $\mathcal{K}$       Kraftvektor, Komponenten ( $K_x, K_y, K_z$ ).  
 $\mathcal{K}^+ \begin{bmatrix} q,q \\ p,p \end{bmatrix}$       Kraftmatrix.  
 $\mathcal{A}[1,n]$       Matrix der Lagrangeschen Multiplikatoren.  
 $n$       Normaleneinheitsvektor.  
 $\mathcal{P}[\mu,\nu]$       Produktmatrix.  
 $\mathcal{U}^{st}[i,j]$       Submatrix der Widerstandsmatrix  $n\mathcal{O}$ .  
 $n\mathcal{O} \begin{bmatrix} s,t \\ i,j \end{bmatrix} (\gamma_0, K)$       Widerstandsmatrix.  
 $n\mathcal{O}$       Geschwindigkeitsvektor, Komponenten (u, v, w).  
 $\mathcal{K}$       Matrix der Polynomglieder.

#### Indices

a      für die Asymmetrie.  
ges      für die gesamte Widerstandsänderung durch einen Wulst.  
komb      für die Körper-, bzw. Singularitätenkombination.  
m      für das Schiff.  
o      für die ungestörten, bzw. Ausgangsformen.  
q      für die Quellsingularitäten.  
qw      für den Interferenzterm von Quell- und Wulstsingularitäten.  
s      für die Symmetrie.  
t      für den Gesamtwiderstand.  
w      für die Wulstsingularitäten und für den Wellenwiderstand.

D für den Dipol.

Exponenten

- <p> Ordnung der Singularitäten.
- <q> Ordnung der Wulstsingularitäten.
- + Kennzeichen der dimensionslosen Größen.

## 7. Literaturverzeichnis

- /1/ Acevedo, M., L.: 'La eficacia del moderno bulbo de proa'  
Report Canal de Experiencias Hidrodinamicas,  
Madrid, Sept. 1965
- /2/ Artsay: Note to the paper of Ed., M. Bragg  
SNAME, Vol. Nr. 38, 1930 (p.153)
- /3/ Barnaby, K., C.: 'The Institution of Naval Architects  
1860 - 1960' An Historical Survey of the  
Institution's Transactions and Activities  
over 100 Years.  
Royal Inst. of Naval Arch. 1960
- /4/ Bessho: 'Wave-Free-Distributions and their Applications'  
Int.Sem. on Theoret. Wave Res. Ann Arbor 1963
- /5/ Birkhoff, G.; Korvin-Kroukovsky, B., V.; Kotik, J.: 'Theorie of  
the Wave Resistance of Ships'  
SNAME, Vol. Nr. 62, 1954
- /6/ Bragg, Ed., M.: 'Results of Experiments of Bulbous Bow'  
SNAME, Vol. Nr. 38, 1930
- /7/ Eggers, K.: 'Über die Ermittlung des Wellenwiderstandes  
eines Schiffmodells durch Analyse seines  
Wellensystems'  
Schiffstechnik Bd. 9, 1962
- /8/ Eggers, K.: 'Über Widerstandsverhältnisse von Zweikörper-  
schiffen'  
Jhrb. STG 1956

- /9/ Eggert, E., F.: 'Form Resistance Experiments'  
SNAME, Vol. Nr. 62, 1935
- /10/ Eggert, E., F.: 'Further Form Resistance Experiments'  
SNAME, Vol. Nr. 47, 1939
- /11/ Gawn, R., W., L.: 'Historical Notes and Investigations at the  
Admiralty Experiment Works, Torquay'  
TINA, Vol. Nr. 83, 1941 (p.80)
- /12/ Havelock, T., H.: 'The Wave Pattern of a Doublet in a Stream'  
Proc. Roy. Soc. Series A, Vol. 121, 1928
- /13/ Havelock, T., H.: 'The Theory of the Wave Resistance'  
Proc. Roy. Soc. Series A, Vol. 138, 1932
- /14/ Havelock, T., H.: 'The Calculation of Wave Resistance'  
Proc. Roy. Soc. Series A, Vol. 144, 1934
- /15/ Inui, T.: 'Study on Wave-Making Resistance of Ships'  
Society of Naval Architects of Japan  
60. Anniversary Series, Vol. 2, 1957
- /16/ Inui, T.: 'Wave Profile Measurements on the Wave-Making  
Characteristics of Bulbous Bow' (japan.)  
Zosen Kiokai, 1961
- /17/ Inui, T.: 'Wave-Making Resistance of Ships'  
SNAME, Vol. Nr. 70, 1962
- /18/ Inui, T.; Takahei; Kumano: 'Wave Profile Measurements on the  
Wave-Making Characteristics of the Bulbous  
Bow' (japan.)  
Zosen Kiokai Nr. 108, 1960
- /19/ Kajitani, H.: 'The second order treatment of ships surface  
condition'  
Soc. of Nav. Arch. of Japan, 1965
- /20/ Karp, S.; Kotik, J.; Lurye, J.: 'On the Problem of Minimum Wave  
Resistance for Struts and Strut-Like Dipol  
Distributions'  
III. Symp. on Nav. Hydrodyn. Scheveningen, 1960

- /21/ Krein, M., G.: 'Über eine neue Methode der Lösung linearer Integralgleichungen der ersten und zweiten Art' (russ.)  
Dokladi Akademii Nauk SSSR, 1955
- /22/ Kumano, M.: 'A Study on the Waveless Stern'  
part I bis III (japan.)  
Zosen Kiokai, 1961
- /23/ Lindblad, A.: 'Further Experiments with Bulbous Bow'  
Publication of the Swedish State Shipbuilding  
Experimental Tank, 1948
- /24/ Lunde, J., K.: 'On the Linearized Theory of Wave Resistance  
for Displacement Ships in Steady and Accelerated Motion'  
Skipsmodelltanken Meddelelse Nr. 5, 1951
- /25/ Maruo, H.: 'Problems Relating to the Ship Form of Minimum Wave Resistance'  
V. Symp. on Nav. Hydrodyn., Bergen, 1964
- /26/ Michell, : 'The Wave Resistance of a Ship'  
Philosophical Magazine, Vol. 145, 1898
- /27/ Müller, B.: 'Einige Erfahrungen mit Bugwulstschiffen'  
Schiff und Hafen, Heft 1, 1965
- /28/ Oswatitsch, K.: 'Physikalische Grundlagen der Strömungslehre'  
Handb. der Physik Bd. VIII/1, Springer-V. 1959
- /29/ Sharma, S., D.: 'Über Dipolverteilungen für getauchte Rotationskörper geringsten Wellenwiderstandes'  
Schiffstechnik Bd. 9, 1962
- /30/ Schlichting, O.: 'Arbeiten der Marineversuchsanstalt bezüglich Entwicklung von Schiffenformen in den Jahren 1909 bis 1920'  
Jhrb. STG Bd. 47, 1953 (p.97)
- /31/ Takahei, T.: 'A Study of the Waveless Bow' (japan.)  
Int.Soc. of Nav.Arch. Japan, Nr. 109, 1961
- /32/ Taylor, D., W.: 'Speed and Power of Ships'  
US-Governm. Printing Office Washington, 1943

- /33/ Taylor,D.,W.: 'Influence of the Bulbous Bow on Resistance'  
Marine Engineering and Shipping Age, 1923
- /34/ Weber,M.: 'Der Schiffswiderstand vom Standpunkt der  
Ähnlichkeitsmechanik geschichtlich-kritisch  
dargestellt etc.'  
Jhrb. STG Bd. 43, 1942 (p.183)
- /35/ Wehausen,J.,V.: 'Wave Resistance of Thin Ships'  
Naval Hydrodynamics Publication Nr.515, 1957
- /36/ Wehausen,J.,V.;Laitone,E.,V.; 'Surface Waves'  
Handbuch der Physik Bd.IX, Springer-V., 1960
- /37/ Wehausen,J.,V.;Webster: 'Schiffe geringsten Widerstandes  
mit vorgegebenem Hinterschiff'  
Schiffstechnik Bd. 9, 1962
- /38/ Weinblum,G.: 'Anwendung der Michellschen Widerstandstheorie'  
Jhrb. STG Bd. 31, 1930
- /39/ Weinblum,G.: 'Schiffe geringsten Widerstandes'  
Jhrb. STG Bd. 51, 1957
- /40/ Weinblum,G.: 'A Systematic Evaluation of Michell's Integral'  
DTMB-Report Nr. 886
- /41/ Weinblum,G.: 'Analysis of Wave Resistance'  
DTMB-Report Nr. 710, 1950
- /42/ Weinblum,G.: 'Theorie der Wulstschiffe'
- /43/ Weinblum,G.;Schuster,S.;Boes,Ch.;Bhattacharyya,R.: 'Unter-  
suchungen über den den Widerstand einer  
systematisch entwickelten Modellfamilie'  
Jhrb. STG 1962
- /44/ Weinblum,G.: 'Schiffsform und Widerstand'  
Mitteilungen der Preußischen Versuchsanstalt  
für Wasserbau, Erdbau und Schiffbau, Berlin
- /45/ Weinblum,G.: 'Rechnerische Entwicklung von Schiffsformen'  
Mitteilungen der Preußischen Versuchsanstalt  
für Wasserbau, Erdbau und Schiffbau, Berlin

- /46/ Weinblum, G.: 'Die analytische Ausbildung von Schiffssformen'  
ZAMM Bd. 15, Heft 4, 1935
- /47/ Wigley, W., C., S.: 'The Theory of the Bulbous Bow and its  
Practical Application'  
Transact. North-East-Coast-Inst. of Engineers  
and Shipbuilders Vol 52, 1935/36
- /48/ Yim, B.: 'Analysis of the Bulbous Bow and Simple Ships'  
Hydronautics, inc. Tech. Report Nr.117, 1962
- /49/ Yim, B.: 'On Ships with Zero and Small Wave Resistance'  
Hydronautics, inc. Tech. Report Nr.117-4, 1963
- /50/ Yim, B.: 'Minimum Wave Resistance of Bulbous Ships'  
Hydronautics, inc. Tech. Report Nr.117-3, 1963
- /51/ Yim, B.: 'Some Recent Developments in Theory of Bulbous  
Ships'  
Hydronautics, inc. Tech. Report Nr.117-6, 1964
- /52/ Yim, B.: 'Analysis of Spherical Bulbs on a Ship Bow'  
Hydronautics, inc. Tech. Report Nr.117-8, 1965

## MIJ-FUNKTIONEN FUER KLEINE FROUESCHE ZAHLEN

M00=+1.0434238\$-3 M01=+3.3377100\$-4 M02=+3.3495360\$-4 M03=+3.3677782\$-4  
 M05=+3.3899844\$-4 M07=+3.4041439\$-4 M09=+3.4101947\$-4 M11=+5.4506235\$-4  
 M12=+5.4460884\$-4 M13=+5.4345344\$-4 M15=+5.4041242\$-4 M17=+5.3597480\$-4  
 M19=+5.3019939\$-4 M22=+5.4426711\$-4 M23=+5.4322646\$-4 M25=+5.4041182\$-4  
 M27=+5.3619868\$-4 M29=+5.3064411\$-4 M33=+5.4230595\$-4 M35=+5.3972811\$-4  
 M37=+5.3575180\$-4 M39=+5.3043224\$-4 M55=+5.3761924\$-4 M57=+5.3411398\$-4  
 M59=+5.2926381\$-4 M77=+5.3108573\$-4 M79=+5.2671469\$-4 M99=+5.2282859\$-4

MID-INTERFERENZFUNKTIONEN MIT EINER VERIKALEN DIPOLVERTEILUNG  
SYMMETRISCHE ANORDNUNGLAGE DER DIPOLVERTEILUNG DER LAENGE NACH  $D = 0.95 * L/2$ 

## VERTEILUNG 1. ORDNUNG

M0V=+2.0794685\$-1 M1V=+2.7366603\$-1 M2V=+2.7436788\$-1 M3V=+2.7477406\$-1  
 M5V=+2.7512688\$-1 M7V=+2.7472306\$-1 M9V=+2.7357401\$-1 MDV=+1.8654023\$+2

## VERTEILUNG 2. ORDNUNG

M0V=+7.7560911\$-2 M1V=+1.0673990\$-1 M2V=+1.0709173\$-1 M3V=+1.0732085\$-1  
 M5V=+1.0760019\$-1 M7V=+1.0757684\$-1 M9V=+1.0725499\$-1 MDV=+2.6150332\$+1

## VERTEILUNG 3. ORDNUNG

M0V=+3.9945727\$-2 M1V=+5.6859110\$-2 M2V=+5.7067169\$-2 M3V=+5.7206992\$-2  
 M5V=+5.7391468\$-2 M7V=+5.7411855\$-2 M9V=+5.7270331\$-2 MDV=+7.4825173

LAGE DER DIPOLVERTEILUNG DER LAENGE NACH  $D = 1.00 * L/2$ 

## VERTEILUNG 1. ORDNUNG

M0V=-2.1324555\$-1 M1V=-3.4235300\$-1 M2V=-3.4200073\$-1 M3V=-3.4121528\$-1  
 M5V=-3.3918626\$-1 M7V=-3.3628903\$-1 M9V=-3.3256103\$-1 MDV=+2.1532260\$+2

## VERTEILUNG 2. ORDNUNG

M0V=-7.2419979\$-2 M1V=-1.2873016\$-1 M2V=-1.2858801\$-1 M3V=-1.2826579\$-1  
 M5V=-1.2744768\$-1 M7V=-1.2628531\$-1 M9V=-1.2479401\$-1 MDV=+3.1520759\$+1

## VERTEILUNG 3. ORDNUNG

M0V=-3.5822715\$-2 M1V=-6.8093568\$-2 M2V=-6.8015919\$-2 M3V=-6.7837856\$-2  
 M5V=-6.7390405\$-2 M7V=-6.6756441\$-2 M9V=-6.5944408\$-2 MDV=+9.2230752

LAGE DER DIPOLVERTEILUNG DER LAENGE NACH  $D = 1.05 * L/2$ 

## VERTEILUNG 1. ORDNUNG

M0V=+1.4521521\$-1 M1V=+2.8476886\$-1 M2V=+2.8346609\$-1 M3V=+2.8174673\$-1  
 M5V=+2.7797113\$-1 M7V=+2.7348252\$-1 M9V=+2.6833298\$-1 MDV=+2.0004102\$+2

## VERTEILUNG 2. ORDNUNG

M0V=+5.0936676\$-2 M1V=+1.1134709\$-1 M2V=+1.1075161\$-1 M3V=+1.0998224\$-1  
 M5V=+1.0831689\$-1 M7V=+1.0636809\$-1 M9V=+1.0415763\$-1 MDV=+2.8579871\$+1

## VERTEILUNG 3. ORDNUNG

M0V=+2.4976460\$-2 M1V=+5.9429548\$-2 M2V=+5.9088323\$-2 M3V=+5.8650112\$-2  
 M5V=+5.7707909\$-2 M7V=+5.6612438\$-2 M9V=+5.5375778\$-2 MDV=+8.2495398

## ASYMMETRISCHE ANORDNUNG

MD(1.ORD)=+3.6956414\$+2 MD(2.ORD)=+5.1508200\$+1 MD(3.ORD)=+1.4677127\$+1

## TABELLE 1 A

FR = 0.100 2T/L = 0.075

(DIE ZAHLEN HINTER DEM \$-ZEICHEN GEBEN DIE ZEHNERPOTENZ AN.)

MID-INTERFERENZFUNKTIONEN EINES DISKRETEN DIPOLS  
 SYMMETRISCHE ANORDNUNG

LAGE DES DIPOLS DER TIEFE NACH  $F = 0.85 * T$

LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 0.90 * L/2$

MOD=-8.23973825-2 M1D=-6.78752435-2 M2D=-6.90118465-2 M3D=-7.01214705-2  
 M5D=-7.21637745-2 M7D=-7.39855085-2 M9D=-7.55739325-2 MDD=+2.89827845+1

LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 0.95 * L/2$

MOD=+8.67093405-2 M1D=+1.32473775-1 M2D=+1.33017625-1 M3D=+1.33389375-1  
 M5D=+1.33912775-1 M7D=+1.34042115-1 M9D=+1.33782535-1 MDD=+4.32916435+1

LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 1.00 * L/2$

MOD=-7.37457775-2 M1D=-1.59289765-1 M2D=-1.59100635-1 M3D=-1.58656815-1  
 M5D=-1.57560805-1 M7D=-1.56014685-1 M9D=-1.54039355-1 MDD=+5.52130925+1

LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 1.05 * L/2$

MOD=+4.84922635-2 M1D=+1.39011125-1 M2D=+1.38143445-1 M3D=+1.37030375-1  
 M5D=+1.34658635-1 M7D=+1.31919545-1 M9D=+1.28843055-1 MDD=+4.82700245+1

LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 1.10 * L/2$

MOD=-1.84606165-2 M1D=-7.87543835-2 M2D=-7.74411925-2 M3D=-7.59782695-2  
 M5D=-7.30014735-2 M7D=-6.98513745-2 M9D=-6.65580675-2 MDD=+3.30225305+1

LAGE DES DIPOLS DER TIEFE NACH  $F = 1.00 * T$

LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 0.90 * L/2$

MOD=-4.25918735-2 M1D=-3.49899775-2 M2D=-3.56040555-2 M3D=-3.62038365-2  
 M5D=-3.73105585-2 M7D=-3.83011395-2 M9D=-3.91686565-2 MDD=+8.1536926

LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 0.95 * L/2$

MOD=+4.41948725-2 M1D=+7.07870675-2 M2D=+7.10816155-2 M3D=+7.12801125-2  
 M5D=+7.15610495-2 M7D=+7.16289405-2 M9D=+7.14866665-2 MDD=+1.28244725+1

LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 1.00 * L/2$

MOD=-3.67175745-2 M1D=-8.56554785-2 M2D=-8.55530115-2 M3D=-8.53082225-2  
 M5D=-8.47092245-2 M7D=-8.38656065-2 M9D=-8.27888325-2 MDD=+1.66490505+1

LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 1.05 * L/2$

MOD=+2.29966895-2 M1D=+7.44250075-2 M2D=+7.39552255-2 M3D=+7.33487635-2  
 M5D=+7.20607835-2 M7D=+7.05739325-2 M9D=+6.89045255-2 MDD=+1.43482685+1

LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 1.10 * L/2$

MOD=-7.09066985-3 M1D=-4.10581375-2 M2D=-4.03492295-2 M3D=-3.95578985-2  
 M5D=-3.79517185-2 M7D=-3.62543795-2 M9D=-3.44821125-2 MDD=+9.4121747

LAGE DES DIPOLS DER TIEFE NACH  $F = 1.25 * T$

LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 0.90 * L/2$

MOD=-1.44441895-2 M1D=-1.19038955-2 M2D=-1.21232855-2 M3D=-1.23374595-2  
 M5D=-1.27336525-2 M7D=-1.30892495-2 M9D=-1.34017655-2 MDD=+1.0243396

LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 0.95 * L/2$

MOD=+1.46545565-2 M1D=+2.53915985-2 M2D=+2.54969755-2 M3D=+2.55656835-2  
 M5D=+2.56625655-2 M7D=+2.56819665-2 M9D=+2.56250115-2 MDD=+1.7463227

LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 1.00 * L/2$

MOD=-1.17220715-2 M1D=-3.09970985-2 M2D=-3.09600065-2 M3D=-3.08686215-2  
 M5D=-3.06478315-2 M7D=-3.03373705-2 M9D=-2.99414895-2 MDD=+2.3207843

LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 1.05 * L/2$

MOD=+6.73010645-3 M1D=+2.67586365-2 M2D=+2.65899035-2 M3D=+2.63693305-2  
 M5D=+2.59027925-2 M7D=+2.53637075-2 M9D=+2.47580375-2 MDD=+1.9564318

LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 1.10 * L/2$

MOD=-1.15105435-3 M1D=-1.41925845-2 M2D=-1.39391835-2 M3D=-1.36550805-2  
 M5D=-1.3303125-2 M7D=-1.24735885-2 M9D=-1.18407315-2 MDD=+1.2035559

ASYMMETRISCHE ANORDNUNG

MDD(0.85)=8.419202351 MDD(1.00)=2.476996751 MDD(1.25)=3.3320084

TABELLE 1 B

FR = 0.100 2T/L = 0.075

(DIE ZAHLEN HINTER DEM 5-ZEICHEN GEBEN DIE ZEHNERPOTENZ AN.)

## MIJ-FUNKTIONEN FUER KLEINE FROUDESCHES ZAHLEN

M00=+1.5950767\$-2 M01=+5.9473775\$-3 M02=+5.7496331\$-3 M03=+5.5975657\$-3  
 M05=+5.1785143\$-3 M07=+4.7118666\$-3 M09=+4.2223662\$-3 M11=+4.3836190\$-3  
 M12=+4.3265903\$-3 M13=+4.2689289\$-3 M15=+4.1026362\$-3 M17=+3.8938008\$-3  
 M19=+3.6544972\$-3 M22=+4.2765639\$-3 M23=+4.2250665\$-3 M25=+4.0724025\$-3  
 M27=+3.8770825\$-3 M29=+3.6506301\$-3 M33=+4.1791915\$-3 M35=+4.0387979\$-3  
 M37=+3.8557212\$-3 M39=+3.6409902\$-3 M55=+3.9259170\$-3 M57=+3.7707817\$-3  
 M59=+3.5832331\$-3 M77=+3.6445406\$-3 M79=+3.4855665\$-3 M99=+3.3552631\$-3

MID-INTERFERENZFUNKTIONEN MIT EINER VERIKALEN DIPOLVERTEILUNG  
SYMMETRISCHE ANORDNUNGLAGE DER DIPOLVERTEILUNG DER LAENGE NACH  $D = 0.95 * L/2$ 

VERTEILUNG 1. ORDNUNG

M0V=-8.7823592\$-1 M1V=-3.2241332\$-1 M2V=-2.8694163\$-1 M3V=-2.5444854\$-1  
 M5V=-1.8304218\$-1 M7V=-1.1113736\$-1 M9V=-4.1666259\$-2 MDV=+2.1387129\$+2

VERTEILUNG 2. ORDNUNG

M0V=-5.0963692\$-1 M1V=-1.9695646\$-1 M2V=-1.7824655\$-1 M3V=-1.6120281\$-1  
 M5V=-1.2341549\$-1 M7V=-8.5190534\$-2 M9V=-4.8126375\$-2 MDV=+5.4467426\$+1

VERTEILUNG 3. ORDNUNG

M0V=-3.4845261\$-1 M1V=-1.3684194\$-1 M2V=-1.2463126\$-1 M3V=-1.1354628\$-1  
 M5V=-8.8845249\$-2 M7V=-6.3796366\$-2 M9V=-3.9461885\$-2 MDV=+2.2814583\$+1

LAGE DER DIPOLVERTEILUNG DER LAENGE NACH  $D = 1.00 * L/2$ 

VERTEILUNG 1. ORDNUNG

M0V=-1.2289064 M1V=-9.3694415\$-1 M2V=-9.2516637\$-1 M3V=-9.1303062\$-1  
 M5V=-8.7858746\$-1 M7V=-8.3543810\$-1 M9V=-7.8600466\$-1 MDV=+2.0540222\$+2

VERTEILUNG 2. ORDNUNG

M0V=-6.4153290\$-1 M1V=-4.7431025\$-1 M2V=-4.6774011\$-1 M3V=-4.6107540\$-1  
 M5V=-4.4225024\$-1 M7V=-4.1884190\$-1 M9V=-3.9217964\$-1 MDV=+5.1921562\$+1

VERTEILUNG 3. ORDNUNG

M0V=-4.1898187\$-1 M1V=-3.0459706\$-1 M2V=-3.0016931\$-1 M3V=-2.9571644\$-1  
 M5V=-2.8316999\$-1 M7V=-2.6763229\$-1 M9V=-2.4999043\$-1 MDV=+2.1688144\$+1

LAGE DER DIPOLVERTEILUNG DER LAENGE NACH  $D = 1.05 * L/2$ 

VERTEILUNG 1. ORDNUNG

M0V=+2.0620439\$-1 M1V=-7.1784024\$-2 M2V=-9.7586218\$-2 M3V=-1.2100477\$-1  
 M5V=-1.6738413\$-1 M7V=-2.0938601\$-1 M9V=-2.4587475\$-1 MDV=+1.6447545\$+2

VERTEILUNG 2. ORDNUNG

M0V=+1.0118851\$-1 M1V=-5.2693697\$-2 M2V=-6.5926147\$-2 M3V=-7.7830908\$-2  
 M5V=-1.0140937\$-1 M7V=-1.2262427\$-1 M9V=-1.4088650\$-1 MDV=+3.8706915\$+1

VERTEILUNG 3. ORDNUNG

M0V=+6.5109343\$-2 M1V=-3.8019713\$-2 M2V=-4.6512932\$-2 M3V=-5.4115243\$-2  
 M5V=-6.9178278\$-2 M7V=-8.2686114\$-2 M9V=-9.4258132\$-2 MDV=+1.5564210\$+1

ASYMMETRISCHE ANORDNUNG

MD(1.ORD)=+3.8982715\$+2 MD(2.ORD)=+9.6956978\$+1 MD(3.ORD)=+4.0153221\$+1

TABELLE 2 A

FR = 0.150 2T/L = 0.075

(DIE ZAHLEN HINTER DEM \$-ZEICHEN GEBEN DIE ZEHNERPOTENZ AN.)

MID-INTERFERENZFUNKTIONEN EINES DISKRETEN DIPOLS  
 SYMMETRISCHE ANORDNUNG

LAGE DES DIPOLS DER TIEFE NACH  $F = 0.85 * T$

LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 0.90 * L/2$

MOD=+3.3761711s-1 M1D=+5.7235453s-1 M2D=+5.8403321s-1 M3D=+5.9237674s-1  
 M5D=+6.0473500s-1 M7D=+6.0912222s-1 M9D=+6.0586338s-1 MDD=+1.5641916s+2

LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 0.95 * L/2$

MOD=-1.2364768 M1D=-4.9211728s-1 M2D=-4.5131829s-1 M3D=-4.1447467s-1  
 M5D=-3.3176886s-1 M7D=-2.4760830s-1 M9D=-1.6563312s-1 MDD=+2.5398888s+2

LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 1.00 * L/2$

MOD=-1.4081241 M1D=-9.9962966s-1 M2D=-9.8414131s-1 M3D=-9.6875120s-1  
 M5D=-9.2553282s-1 M7D=-8.7231282s-1 M9D=-8.1215034s-1 MDD=+2.4077900s+2

LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 1.05 * L/2$

MOD=+2.1883044s-1 M1D=-1.3883204s-1 M2D=-1.6651469s-1 M3D=-1.9110808s-1  
 M5D=-2.3988379s-1 M7D=-2.8342707s-1 M9D=-3.2048563s-1 MDD=+1.6374847s+2

LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 1.10 * L/2$

MOD=+1.5901542 M1D=+8.9999765s-1 M2D=+8.6876634s-1 M3D=+8.4000716s-1  
 M5D=+7.6994660s-1 M7D=+6.9321873s-1 M9D=+6.1362873s-1 MDD=+2.6759961s+2

LAGE DES DIPOLS DER TIEFE NACH  $F = 1.00 * T$

LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 0.90 * L/2$

MOD=+2.2762960s-1 M1D=+4.0289339s-1 M2D=+4.1165137s-1 M3D=+4.1797477s-1  
 M5D=+4.2752201s-1 M7D=+4.3130103s-1 M9D=+4.2954113s-1 MDD=+7.9939388s+1

LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 0.95 * L/2$

MOD=-9.5775742s-1 M1D=-3.8142716s-1 M2D=-3.5141026s-1 M3D=-3.2445881s-1  
 M5D=-2.6351174s-1 M7D=-2.0128790s-1 M9D=-1.4052570s-1 MDD=+1.3867230s+2

LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 1.00 * L/2$

MOD=-1.0515925 M1D=-7.2872767s-1 M2D=-7.1678736s-1 M3D=-7.0507517s-1  
 M5D=-6.7227643s-1 M7D=-6.3211387s-1 M9D=-5.8690636s-1 MDD=+1.3143364s+2

LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 1.05 * L/2$

MOD=+1.6803384s-1 M1D=-1.0353944s-1 M2D=-1.2338322s-1 M3D=-1.4089281s-1  
 M5D=-1.7568292s-1 M7D=-2.0665270s-1 M9D=-2.3289793s-1 MDD=+8.4221448s+1

LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 1.10 * L/2$

MOD=+1.1950426 M1D=+6.5816060s-1 M2D=+6.3437376s-1 M3D=+6.1260497s-1  
 M5D=+5.5957563s-1 M7D=+5.0165304s-1 M9D=+4.4171696s-1 MDD=+1.4710101s+2

LAGE DES DIPOLS DER TIEFE NACH  $F = 1.25 * T$

LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 0.90 * L/2$

MOD=+1.2199851s-1 M1D=+2.2917106s-1 M2D=+2.3452248s-1 M3D=+2.3842535s-1  
 M5D=+2.4442138s-1 M7D=+2.4701492s-1 M9D=+2.4634000s-1 MDD=+2.7403914s+1

LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 0.95 * L/2$

MOD=-6.2400976s-1 M1D=-2.4773863s-1 M2D=-2.2950169s-1 M3D=-2.1326960s-1  
 M5D=-1.7615909s-1 M7D=-1.3808759s-1 M9D=-1.0077036s-1 MDD=+5.2580520s+1

LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 1.00 * L/2$

MOD=-6.5645347s-1 M1D=-4.3863570s-1 M2D=-4.3087540s-1 M3D=-4.2340500s-1  
 M5D=-4.0255615s-1 M7D=-3.7722800s-1 M9D=-3.4889018s-1 MDD=+4.9996176s+1

LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 1.05 * L/2$

MOD=+1.0932582s-1 M1D=-6.2333463s-2 M2D=-7.3912436s-2 M3D=-8.4029519s-2  
 M5D=-1.0419666s-1 M7D=-1.2208962s-1 M9D=-1.3717551s-1 MDD=+2.9140707s+1

LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 1.10 * L/2$

MOD=+7.5056974s-1 M1D=+3.9758411s-1 M2D=+3.8250250s-1 M3D=+3.6882979s-1  
 M5D=+3.3446956s-1 M7D=+2.9913479s-1 M9D=+2.6164216s-1 MDD=+5.6367630s+1

ASYMMETRISCHE ANORDNUNG

MDD(0.85)=4.4044362s2 MDD(1.00)=2.3715779s2 MDD(1.25)=8.8271691s1

TABELLE 2 B

FR = 0.150 2T/L = 0.075

(DIE ZAHLEN HINTER DEM S-ZEICHEN GEBEN DIE ZEHNERPOTENZ AN.)

## MIJ-FUNKTIONEN FUER KLEINE FROUDESCHES ZAHLEN

M00=+2.9732607s-2 M01=+9.3866780s-3 M02=+9.5173112s-3 M03=+9.8909865s-3  
 M05=+1.0074718s-2 M07=+9.9194278s-3 M09=+9.4825398s-3 M11=+1.8567690s-2  
 M12=+1.8365791s-2 M13=+1.7732425s-2 M15=+1.6246366s-2 M17=+1.4376304s-2  
 M19=+1.2447838s-2 M22=+1.8206431s-2 M23=+1.7626341s-2 M25=+1.6236193s-2  
 M27=+1.4451158s-2 M29=+1.2589504s-2 M33=+1.7130253s-2 M35=+1.5893657s-2  
 M37=+1.4257366s-2 M39=+1.2521743s-2 M55=+1.4949090s-2 M57=+1.3606297s-2  
 M59=+1.2128218s-2 M77=+1.2573057s-2 M79=+1.1377414s-2 M99=+1.0447363s-2

MID-INTERFERENZFUNKTIONEN MIT EINER VERIKALEN DIPOLVERTEILUNG  
SYMMETRISCHE ANORDNUNGLAGE DER DIPOLVERTEILUNG DER LAENGE NACH  $D = 0.95 * L / 2$ 

VERTEILUNG 1. ORDNUNG

M0V=-3.3001612s-1 M1V=-1.1017416 M2V=-1.0412392 M3V=-9.4908716s-1  
 M5V=-7.6397598s-1 M7V=-5.7107159s-1 M9V=-3.9452181s-1 MDV=+1.4943903s+2

VERTEILUNG 2. ORDNUNG

M0V=-1.8046790s-1 M1V=-6.5603352s-1 M2V=-6.2215707s-1 M3V=-5.6905646s-1  
 M5V=-4.6250983s-1 M7V=-3.5103978s-1 M9V=-2.4902786s-1 MDV=+4.4502164s+1

VERTEILUNG 3. ORDNUNG

M0V=-1.1847834s-1 M1V=-4.5840739s-1 M2V=-4.3540758s-1 M3V=-3.9877502s-1  
 M5V=-3.2533062s-1 M7V=-2.4833208s-1 M9V=-1.7786900s-1 MDV=+2.0526975s+1

LAGE DER DIPOLVERTEILUNG DER LAENGE NACH  $D = 1.00 * L / 2$ 

VERTEILUNG 1. ORDNUNG

M0V=-9.7529357s-1 M1V=-1.5882285 M2V=-1.5690787 M3V=-1.5189016  
 M5V=-1.3991996 M7V=-1.2493416 M9V=-1.0938397 MDV=+1.4848135s+2

VERTEILUNG 2. ORDNUNG

M0V=-5.1264185s-1 M1V=-8.9021672s-1 M2V=-8.7890340s-1 M3V=-8.4889778s-1  
 M5V=-7.7803143s-1 M7V=-6.8975234s-1 M9V=-5.9871148s-1 MDV=+4.4206903s+1

VERTEILUNG 3. ORDNUNG

M0V=-3.3718811s-1 M1V=-6.0719833s-1 M2V=-5.9929515s-1 M3V=-5.7818574s-1  
 M5V=-5.2860345s-1 M7V=-4.6700027s-1 M9V=-4.0367459s-1 MDV=+2.0396726s+1

LAGE DER DIPOLVERTEILUNG DER LAENGE NACH  $D = 1.05 * L / 2$ 

VERTEILUNG 1. ORDNUNG

M0V=-7.6120455s-1 M1V=-1.0003251 M2V=-1.0321507 M3V=-1.0469724  
 M5V=-1.0518171 M7V=-1.0215948 M9V=-9.6987312s-1 MDV=+1.2747357s+2

VERTEILUNG 2. ORDNUNG

M0V=-4.4187578s-1 M1V=-5.8870160s-1 M2V=-6.0546646s-1 M3V=-6.1195019s-1  
 M5V=-6.1055331s-1 M7V=-5.8878447s-1 M9V=-5.5492453s-1 MDV=+3.6354706s+1

VERTEILUNG 3. ORDNUNG

M0V=-3.0359811s-1 M1V=-4.0861926s-1 M2V=-4.1961076s-1 M3V=-4.2332691s-1  
 M5V=-4.2085228s-1 M7V=-4.0429345s-1 M9V=-3.7953355s-1 MDV=+1.6417371s+1

ASYMMETRISCHE ANORDNUNG

MD(1.ORD)=+2.6677399s+2 MD(2.ORD)=+7.7045410s+1 MD(3.ORD)=+3.5006059s+1

## TABELLE 3 A

FR = 0.210 2T/L = 0.075

(DIE ZAHLEN HINTER DEM S-ZEICHEN GEBEN DIE ZEHNERPOTENZ AN.)

MID-INTERFERENZFUNKTIONEN EINES DISKRETEN DIPOLS  
 SYMMETRISCHE ANORDNUNG

LAGE DES DIPOLS DER TIEFE NACH  $F = 0.85 * T$   
 LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 0.90 * L/2$   
 MOD=+7.0054636s-1 M1D=-3.8240014s-1 M2D=-2.9593429s-1 M3D=-1.7707313s-1  
 M5D=+3.3772066s-2 M7D=+2.2367112s-1 M9D=+3.7303644s-1 MDD=+2.0409341s+2  
 LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 0.95 * L/2$   
 MOD=-3.9530956s-1 M1D=-1.6827891 M2D=-1.6012426 M3D=-1.4685770  
 M5D=-1.2029098 M7D=-9.2364273s-1 M9D=-6.6809231s-1 MDD=+2.6258830s+2  
 LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 1.00 * L/2$   
 MOD=-1.147468s M1D=-2.1708799 M2D=-2.1418056 M3D=-2.0634314  
 M5D=-1.8806408 M7D=-1.6542956 M9D=-1.4225778 MDD=+2.6108853s+2  
 LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 1.05 * L/2$   
 MOD=-1.0883394 M1D=-1.4867172 M2D=-1.5238489 M3D=-1.5337756  
 M5D=-1.5178284 M7D=-1.4508085 M9D=-1.3548191 MDD=+2.0457701s+2  
 LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 1.10 * L/2$   
 MOD=-3.9635590s-1 M1D=-4.0223668s-2 M2D=-1.1638997s-1 M3D=-1.9842567s-1  
 M5D=-3.3654407s-1 M7D=-4.4291212s-1 M9D=-5.1465470s-1 MDD=+1.7093864s+2

LAGE DES DIPOLS DER TIEFE NACH  $F = 1.00 * T$   
 LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 0.90 * L/2$   
 MOD=+5.6485967s-1 M1D=-3.7281536s-1 M2D=-3.0295014s-1 M3D=-2.0500380s-1  
 M5D=-3.1060079s-2 M7D=+1.2678831s-1 M9D=+2.5187099s-1 MDD=+1.3152192s+2  
 LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 0.95 * L/2$   
 MOD=-2.8118662s-1 M1D=-1.4054371 M2D=-1.3399101 M3D=-1.2303698  
 M5D=-1.0114415 M7D=-7.8052291s-1 M9D=-5.6914456s-1 MDD=+1.7593500s+2  
 LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 1.00 * L/2$   
 MOD=-8.7729067s-1 M1D=-1.7750242 M2D=-1.7506516 M3D=-1.6839688  
 M5D=-1.5299352 M7D=-1.3399660 M9D=-1.1464217 MDD=+1.7532698s+2  
 LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 1.05 * L/2$   
 MOD=-8.7411602s-1 M1D=-1.2275238 M2D=-1.2556336 M3D=-1.2603240  
 M5D=-1.2405664 M7D=-1.1788596 M9D=-1.0942239 MDD=+1.3275911s+2  
 LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 1.10 * L/2$   
 MOD=-3.7209097s-1 M1D=-6.8037277s-2 M2D=-1.2880810s-1 M3D=-1.9436310s-1  
 M5D=-3.0355795s-1 M7D=-3.8631135s-1 M9D=-4.4062540s-1 MDD=+1.0696963s+2

LAGE DES DIPOLS DER TIEFE NACH  $F = 1.25 * T$   
 LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 0.90 * L/2$   
 MOD=+4.0718460s-1 M1D=-3.2813337s-1 M2D=-2.7863304s-1 M3D=-2.0710393s-1  
 M5D=-7.9877543s-2 M7D=+3.6859865s-2 M9D=+1.3034229s-1 MDD=+6.6770060s+1  
 LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 0.95 * L/2$   
 MOD=-1.5577826s-1 M1D=-1.0502245 M2D=-1.0039385 M3D=-9.2332520s-1  
 M5D=-7.6269832s-1 M7D=-5.9240337s-1 M9D=-4.3638224s-1 MDD=+9.4806937s+1  
 LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 1.00 * L/2$   
 MOD=-5.7148456s-1 M1D=-1.2922954 M2D=-1.2740230 M3D=-1.2228327  
 M5D=-1.1062215 M7D=-9.6319199s-1 M9D=-8.1842218s-1 MDD=+9.4978517s+1  
 LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 1.05 * L/2$   
 MOD=-6.1194654s-1 M1D=-9.0232633s-1 M2D=-9.2038867s-1 M3D=-9.2012268s-1  
 M5D=-8.9876430s-1 M7D=-8.4687866s-1 M9D=-7.7926542s-1 MDD=+6.8456352s+1  
 LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 1.10 * L/2$   
 MOD=-3.1167662s-1 M1D=-7.9690410s-2 M2D=-1.2192871s-1 M3D=-1.6758036s-1  
 M5D=-2.4242878s-1 M7D=-2.9778986s-1 M9D=-3.3260949s-1 MDD=+5.1911631s+1

ASYMMETRISCHE ANORDNUNG

MDD(0.85)=4.3951853s2 MDD(1.00)=2.8769320s2 MDD(1.25)=1.4999718s2

TABELLE 3 B  
 FR = 0.200 2T/L = 0.075  
 (DIE ZAHLEN HINTER DEM S-ZEICHEN GEBEN DIE ZEHNERPOTENZ AN.)

## MIJ-FUNKTIONEN FUER KLEINE FROUDESCHE ZAHLEN

M00=+8.4974397\$-1 M01=+3.2440304\$-1 M02=+1.5304014\$-1 M03=+7.9700427\$-2  
 M05=+2.1989646\$-2 M07=+1.5672910\$-3 M09=-7.1299651\$-3 M11=+2.0262787\$-1  
 M12=+1.4081725\$-1 M13=+1.0411962\$-1 M15=+6.3787403\$-2 M17=+4.3027551\$-2  
 M19=+3.0900330\$-2 M22=+1.1774177\$-1 M23=+9.7741117\$-2 M25=+6.9532772\$-2  
 M27=+5.1998781\$-2 M29=+4.0552391\$-2 M33=+8.6484852\$-2 M35=+6.6289855\$-2  
 M37=+5.1906604\$-2 M39=+4.1843106\$-2 M55=+5.5218525\$-2 M57=+4.5421914\$-2  
 M59=+3.7888778\$-2 M77=+3.8449907\$-2 M79=+3.2708992\$-2 M99=+2.8201312\$-2

 MID-INTERFERENZFUNKTIONEN MIT EINER VERIKALEN DIPOLVERTEILUNG  
 SYMMETRISCHE ANORDNUNG
LAGE DER DIPOLVERTEILUNG DER LAENGE NACH  $D = 0.95 * L/2$ 

## VERTEILUNG 1. ORDNUNG

M0V=-2.5817587 M1V=-1.7949798 M2V=-1.2889399 M3V=-9.4409184\$-1  
 M5V=-5.2315093\$-1 M7V=-2.9214376\$-1 M9V=-1.5647380\$-1 MDV=+3.1539257\$+1

## VERTEILUNG 2. ORDNUNG

M0V=-1.6028790 M1V=-1.0869834 M2V=-7.6417879\$-1 M3V=-5.4961298\$-1  
 M5V=-2.9552586\$-1 M7V=-1.6102717\$-1 M9V=-8.4360685\$-2 MDV=+9.7073496

## VERTEILUNG 3. ORDNUNG

M0V=-1.1576282 M1V=-7.7395208\$-1 M2V=-5.3763960\$-1 M3V=-3.8271980\$-1  
 M5V=-2.0223345\$-1 M7V=-1.0848610\$-1 M9V=-5.5856726\$-2 MDV=+4.6227523

LAGE DER DIPOLVERTEILUNG DER LAENGE NACH  $D = 1.00 * L/2$ 

## VERTEILUNG 1. ORDNUNG

M0V=-2.5417724 M1V=-1.9623788 M2V=-1.5553382 M3V=-1.2582038  
 M5V=-8.6416348\$-1 M7V=-6.2395178\$-1 M9V=-4.6799756\$-1 MDV=+3.1212316\$+1

## VERTEILUNG 2. ORDNUNG

M0V=-1.5529172 M1V=-1.1682412 M2V=-9.0491686\$-1 M3V=-7.1723412\$-1  
 M5V=-4.7559147\$-1 M7V=-3.3335719\$-1 M9V=-2.4367438\$-1 MDV=+9.5671484

## VERTEILUNG 3. ORDNUNG

M0V=-1.1142544 M1V=-8.2640623\$-1 M2V=-6.3231888\$-1 M3V=-4.9583358\$-1  
 M5V=-3.2292455\$-1 M7V=-2.2303099\$-1 M9V=-1.6098826\$-1 MDV=+4.5455700

LAGE DER DIPOLVERTEILUNG DER LAENGE NACH  $D = 1.05 * L/2$ 

## VERTEILUNG 1. ORDNUNG

M0V=-2.2481782 M1V=-1.8789559 M2V=-1.5853895 M3V=-1.3543559  
 M5V=-1.0238241 M7V=-8.0527462\$-1 M9V=-6.5365121\$-1 MDV=+3.0836503\$+1

## VERTEILUNG 2. ORDNUNG

M0V=-1.3828836 M1V=-1.1311086 M2V=-9.3620334\$-1 M3V=-7.8628842\$-1  
 M5V=-5.7761132\$-1 M7V=-4.4388918\$-1 M9V=-3.5345730\$-1 MDV=+9.4058344

## VERTEILUNG 3. ORDNUNG

M0V=-9.9368948\$-1 M1V=-8.0285957\$-1 M2V=-6.5744383\$-1 M3V=-5.4706206\$-1  
 M5V=-3.9577642\$-1 M7V=-3.0050423\$-1 M9V=-2.3696209\$-1 MDV=+4.4567175

## ASYMMETRISCHE ANORDNUNG

MD(1.ORD)=+6.0984492\$+1 MD(2.ORD)=+1.8511786\$+1 MD(3.ORD)=+8.7467702

## TABELLE 4 A

FR = 0.400 2T/L = 0.075

(DIE ZAHLEN HINTER DEM \$-ZEICHEN GEBEN DIE ZEHNERPOTENZ AN.)

MID-INTERFERENZFUNKTIONEN EINES DISKRETEN DIPOLS  
SYMMETRISCHE ANORDNUNG

LAGE DES DIPOLS DER TIEFE NACH  $F = 0.85 * T$   
 LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 0.90 * L/2$   
 MOD=-4.3927653 M1D=-2.5177021 M2D=-1.4754331 M3D=-8.5172767s-1  
 M5D=-2.0694767s-1 M7D=+7.5061772s-2 M9D=+2.0565516s-1 MDD=+6.2941470s+1  
 LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 0.95 * L/2$   
 MOD=-4.4406623 M1D=-2.9194812 M2D=-1.9985075 M3D=-1.4043662  
 M5D=-7.2560874s-1 M7D=-3.8112798s-1 M9D=-1.9132667s-1 MDD=+6.2022931s+1  
 LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 1.00 * L/2$   
 MOD=-4.2448312 M1D=-3.0962304 M2D=-2.3340962 M3D=-1.8063702  
 M5D=-1.1505980 M7D=-7.8030857s-1 M9D=-5.5456353s-1 MDD=+6.0815217s+1  
 LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 1.05 * L/2$   
 MOD=-3.7889824 M1D=-3.0173284 M2D=-2.4387344 M3D=-2.0060155  
 M5D=-1.4237462 M7D=-1.0648222 M9D=-8.2955078s-1 MDD=+5.9424084s+1  
 LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 1.10 * L/2$   
 MOD=-3.0981068 M1D=-2.6931245 M2D=-2.3085565 M3D=-1.9885890  
 M5D=-1.5175390 M7D=-1.2017801 M9D=-9.8178408s-1 MDD=+5.7968957s+1

LAGE DES DIPOLS DER TIEFE NACH  $F = 1.00 * T$   
 LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 0.90 * L/2$   
 MOD=-4.1347406 M1D=-2.3022432 M2D=-1.3240847 M3D=-7.5513161s-1  
 M5D=-1.8297155s-1 M7D=+6.0461789s-2 M9D=+1.7104380s-1 MDD=+4.744136Cs+1  
 LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 0.95 * L/2$   
 MOD=-4.1196129 M1D=-2.6238204 M2D=-1.7541503 M3D=-1.2095133  
 M5D=-6.0586323s-1 M7D=-3.0886787s-1 M9D=-1.4883599s-1 MDD=+4.6580795s+1  
 LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 1.00 * L/2$   
 MOD=-3.9048623 M1D=-2.7623404 M2D=-2.0345834 M3D=-1.5457854  
 M5D=-9.5731877s-1 M7D=-6.3558753s-1 M9D=-4.4389246s-1 MDD=+4.5447416s+1  
 LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 1.05 * L/2$   
 MOD=-3.4807998 M1D=-2.6956733 M2D=-2.1327260 M3D=-1.7249673  
 M5D=-1.1940566 M7D=-8.7738571s-1 M9D=-6.7456142s-1 MDD=+4.4140425s+1  
 LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 1.10 * L/2$   
 MOD=-2.8664162 M1D=-2.4303861 M2D=-2.0434965 M3D=-1.7335620  
 M5D=-1.2934020 M7D=-1.0082705 M9D=-8.1425173s-1 MDD=+4.2772572s+1

LAGE DES DIPOLS DER TIEFE NACH  $F = 1.25 * T$   
 LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 0.90 * L/2$   
 MOD=-3.7758669 M1D=-2.0088311 M2D=-1.1223062 M3D=-6.2759329s-1  
 M5D=-1.4913137s-1 M7D=+4.6736814s-2 M9D=+1.3333883s-1 MDD=+3.2324595s+1  
 LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 0.95 * L/2$   
 MOD=-3.6983643 M1D=-2.2408851 M2D=-1.4455798 M3D=-9.6894776s-1  
 M5D=-4.6306815s-1 M7D=-2.2485647s-1 M9D=-1.0046277s-1 MDD=+3.1550312s+1  
 LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 1.00 * L/2$   
 MOD=-3.4686004 M1D=-2.3364511 M2D=-1.6608812 M3D=-1.2274310  
 M5D=-7.2896653s-1 M7D=-4.6868525s-1 M9D=-3.1853043s-1 MDD=+3.0530302s+1  
 LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 1.05 * L/2$   
 MOD=-3.0836111 M1D=-2.2815689 M2D=-1.7462713 M3D=-1.3768416  
 M5D=-9.1836728s-1 M7D=-6.5748751s-1 M9D=-4.9575399s-1 MDD=+2.9352841s+1  
 LAGE DES DIPOLS DER LAENGE NACH  $D = 1.10 * L/2$   
 MOD=-2.5273189 M1D=-2.0797104 M2D=-1.6963935 M3D=-1.4060140  
 M5D=-1.0145272 M7D=-7.7301680s-1 M9D=-6.1403672s-1 MDD=+2.8119533s+1

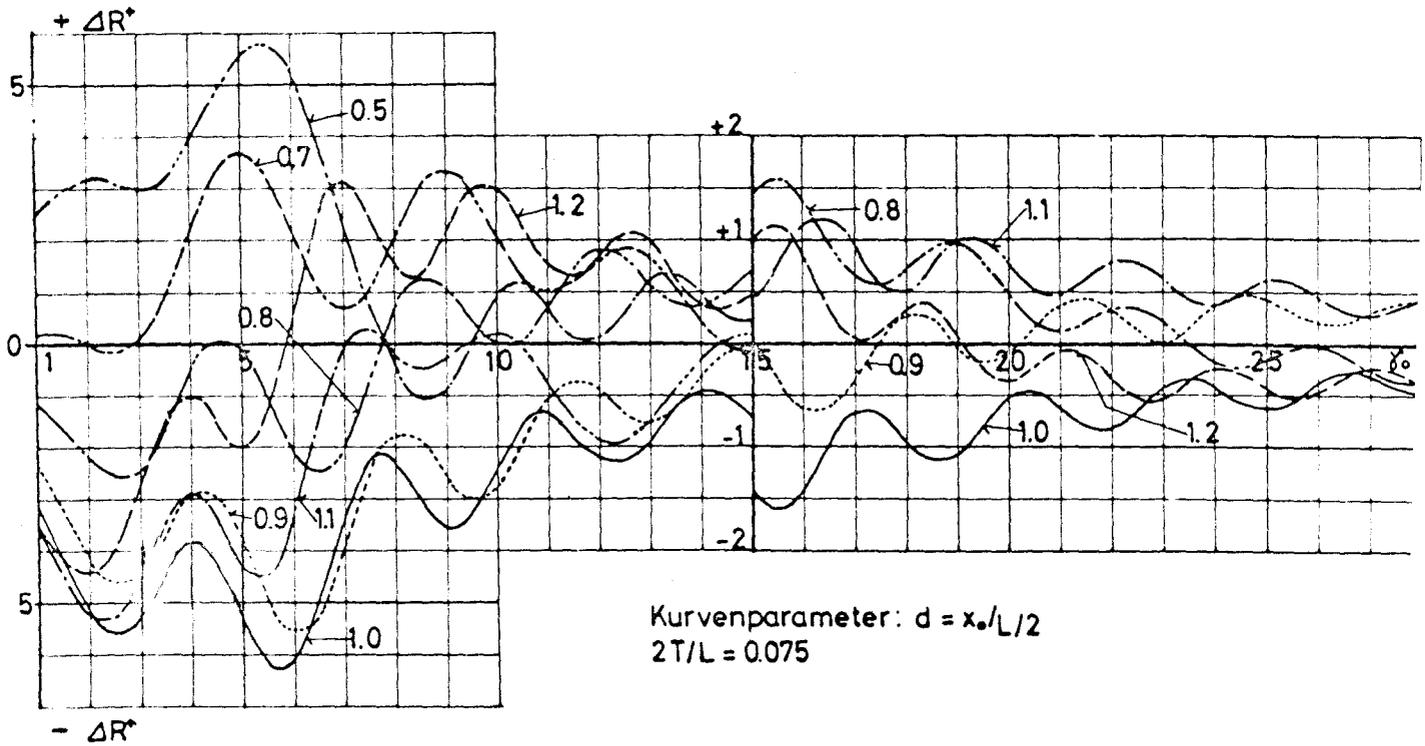
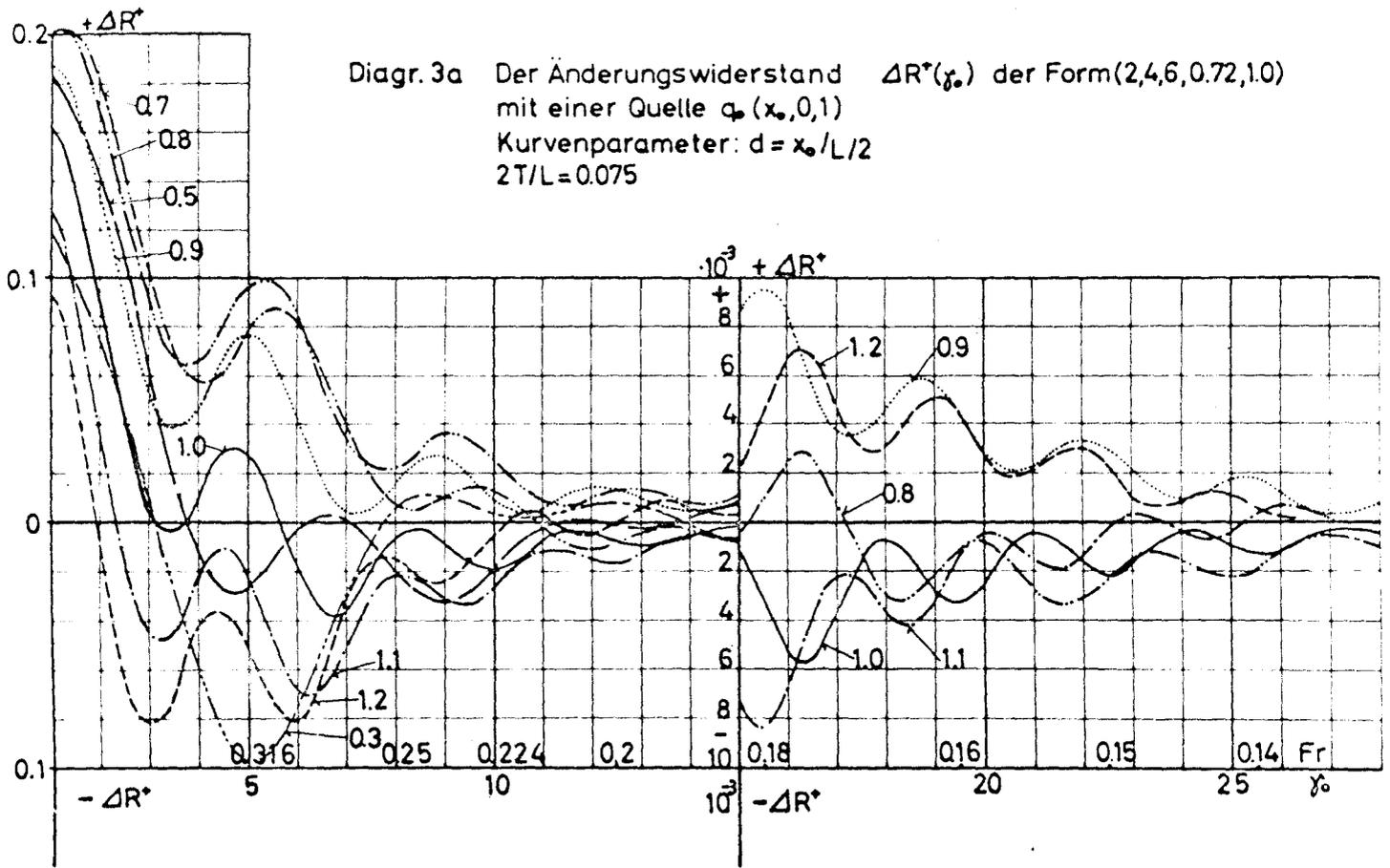
ASYMMETRISCHE ANORDNUNG

MDD(0.85)=1.1621411s2 MDD(1.00)=8.5737199s1 MDD(1.25)=5.6302894s1

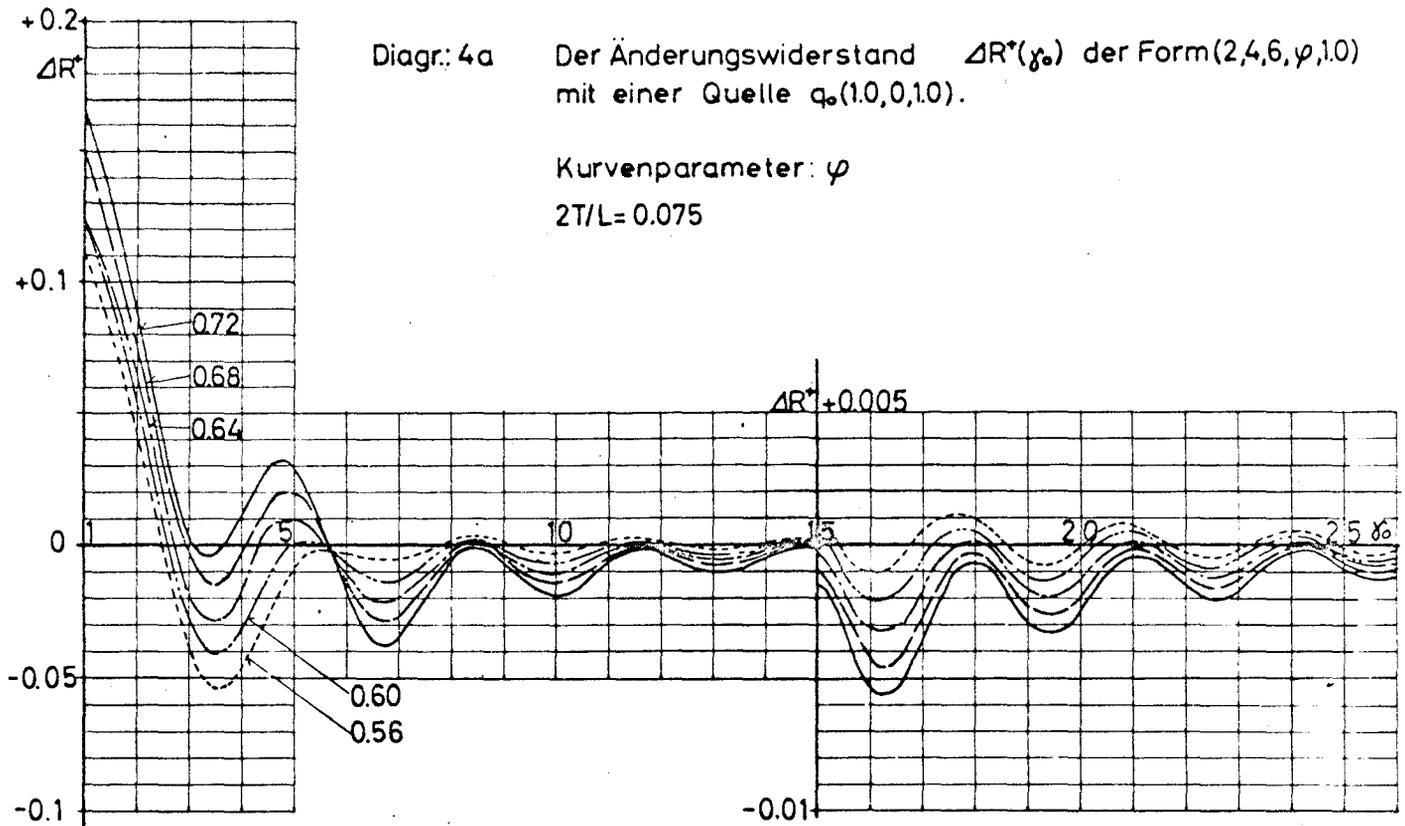
TABELLE 4 B

FR = 0.400 2T/L = 0.075

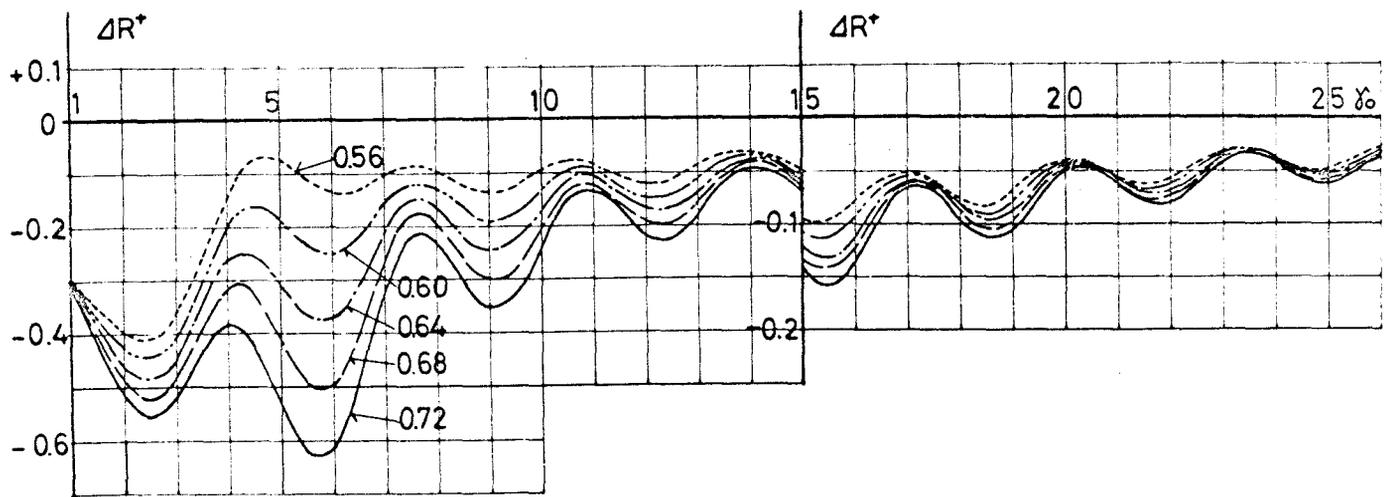
(DIE ZAHLEN HINTER DEM S-ZEICHEN GEBEN DIE ZEHNERPOTENZ AN.)



Diagr. 3b Der Änderungswiderstand  $\Delta R^*(\gamma_0)$  der Form(2,4,6,0.72,1,0) mit einem Dipol  $m_0(x_0,0,1)$

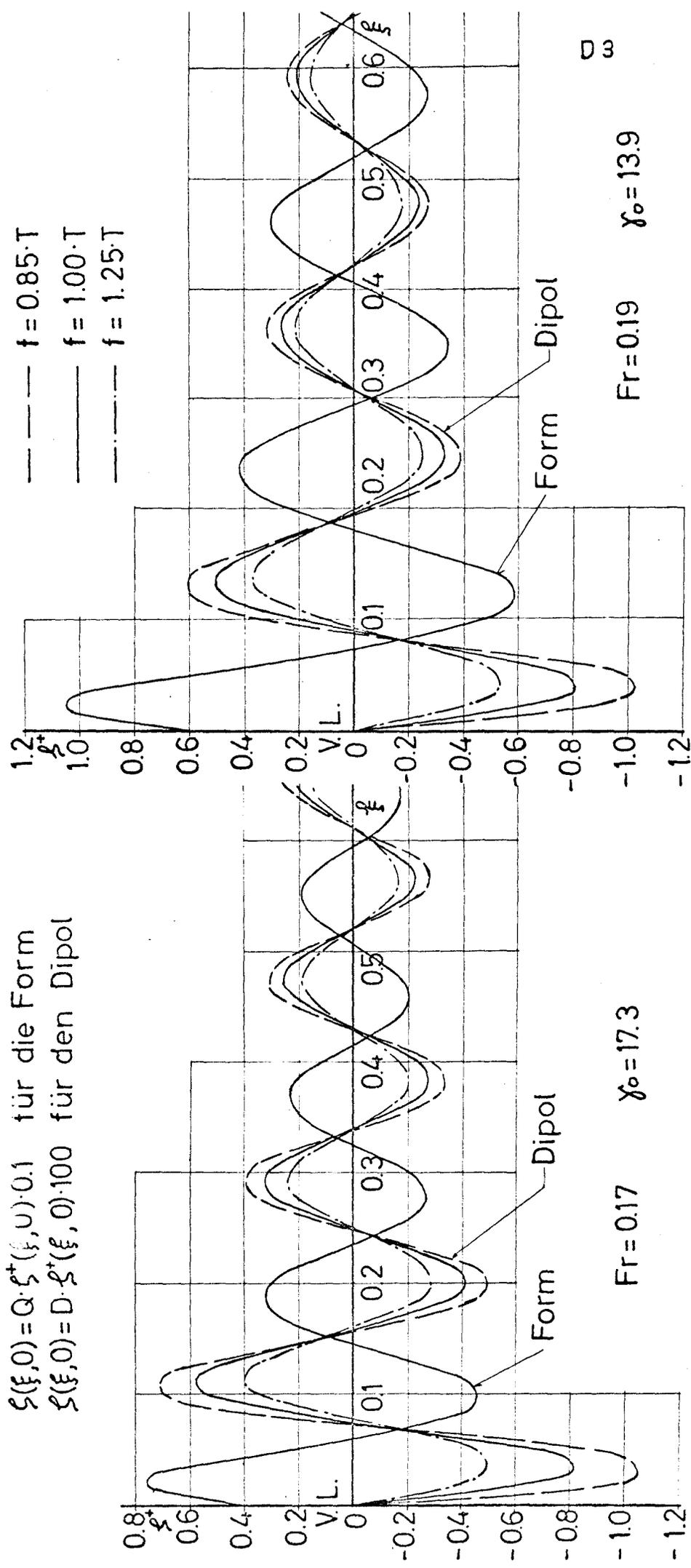


Kurvenparameter:  $\varphi$   
 $2T/L = 0.075$

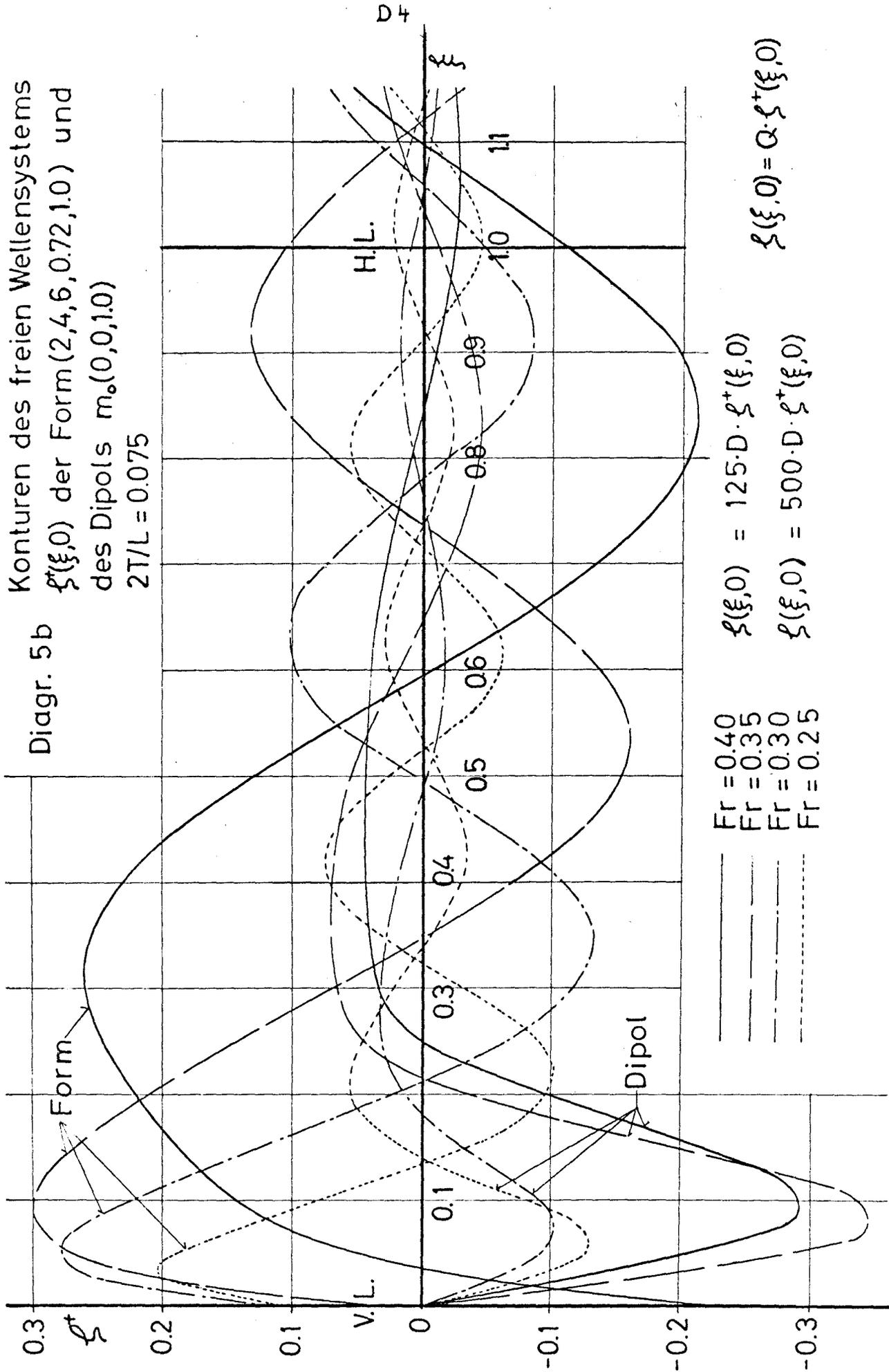


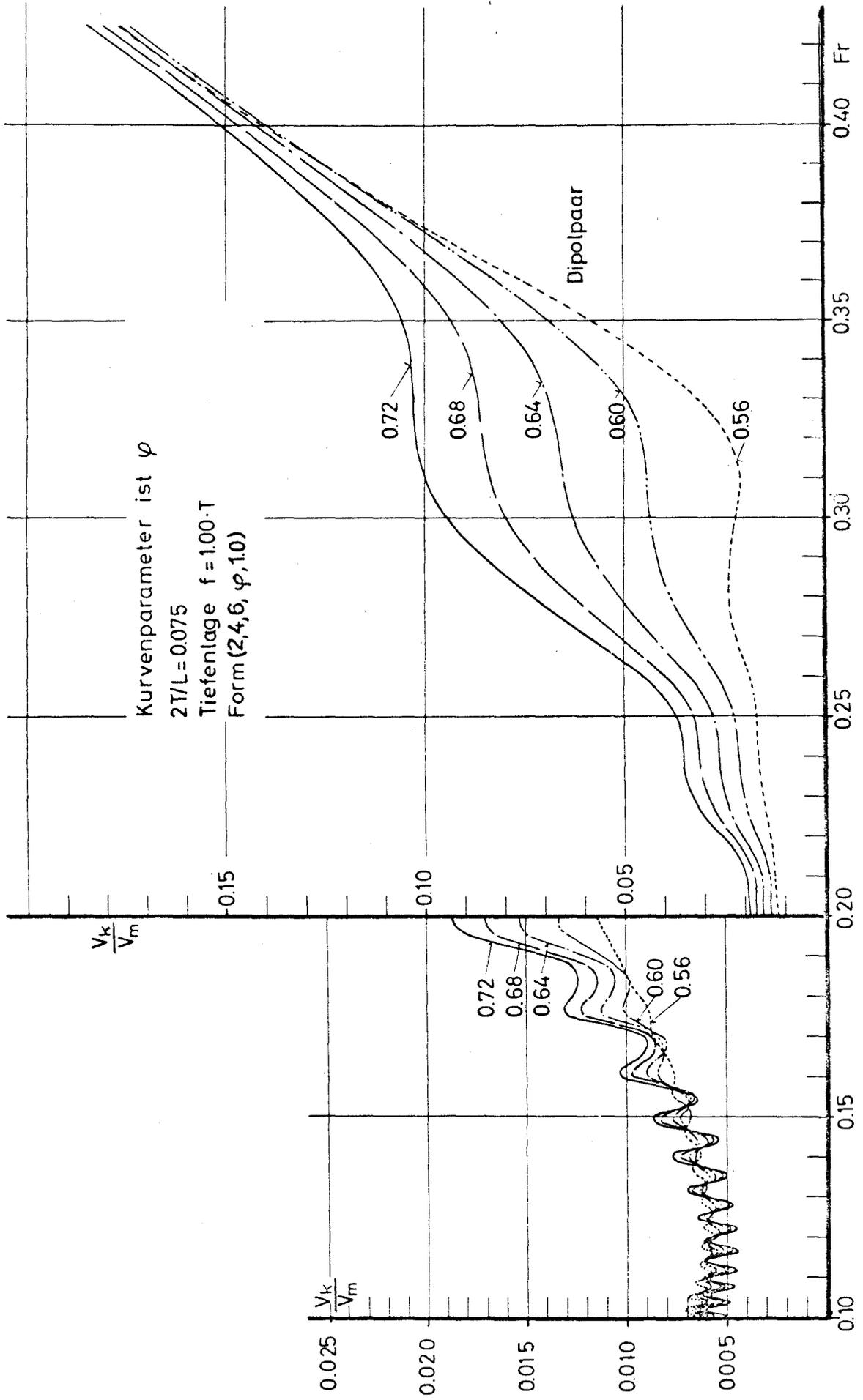
Diagr. 4b Der Änderungswiderstand  $\Delta R^*(\gamma_0)$  der Form (2,4,6,  $\varphi$ , 1,0) mit einem Dipol  $m_0(1,0,0,1,0)$ .

$\xi(\xi, 0) = Q \cdot \xi^*(\xi, 0) \cdot 0.1$  für die Form  
 $\xi(\xi, 0) = D \cdot \xi^*(\xi, 0) \cdot 100$  für den Dipol



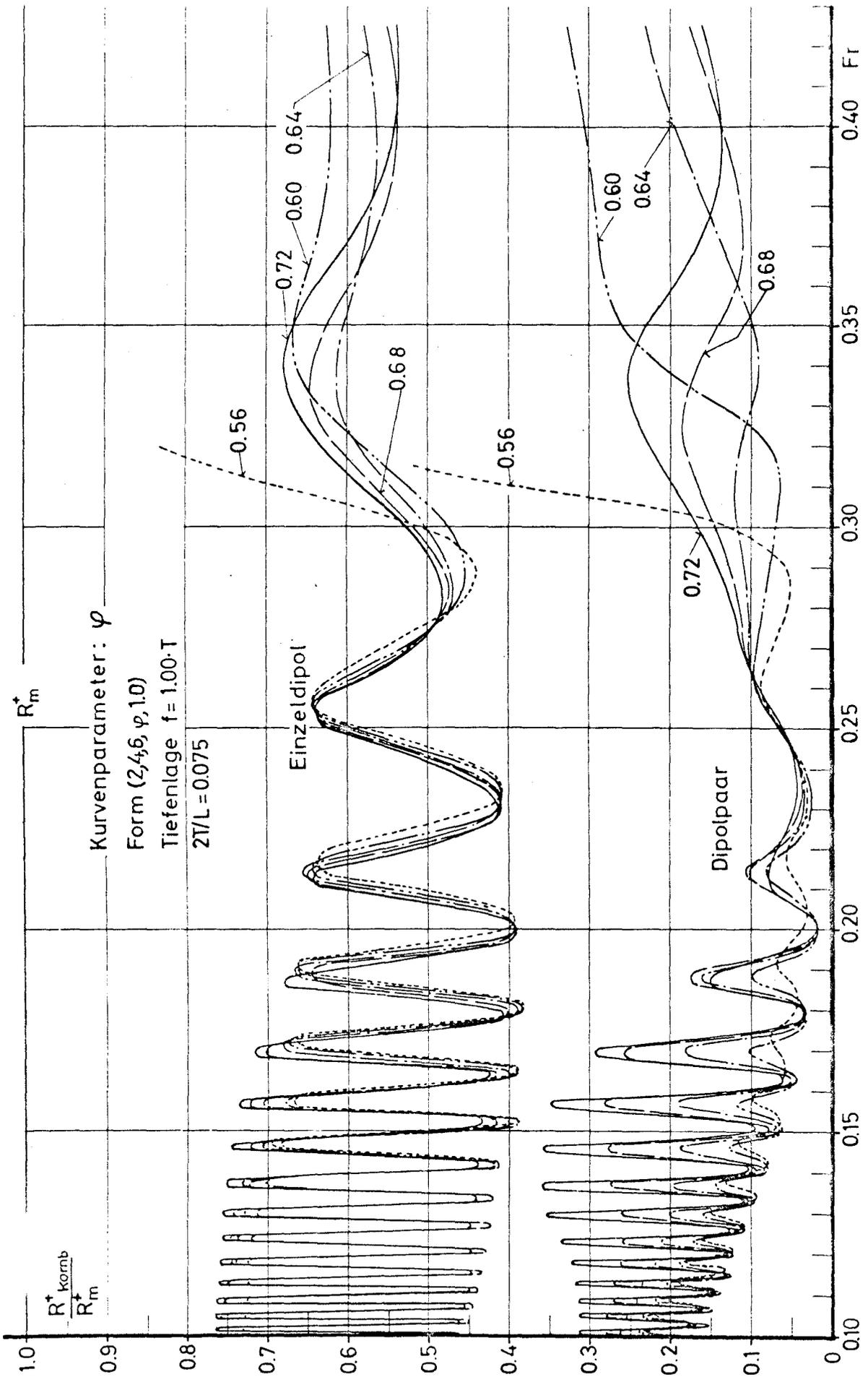
Diagr. 5a. Die Kontur des freien Wellensystems  $\xi^*(\xi, 0)$  der Form(2,4,6,0,72,1,0) und des Dipols  $m_0(0,0,f)$   
 $2T/L = 0.075$





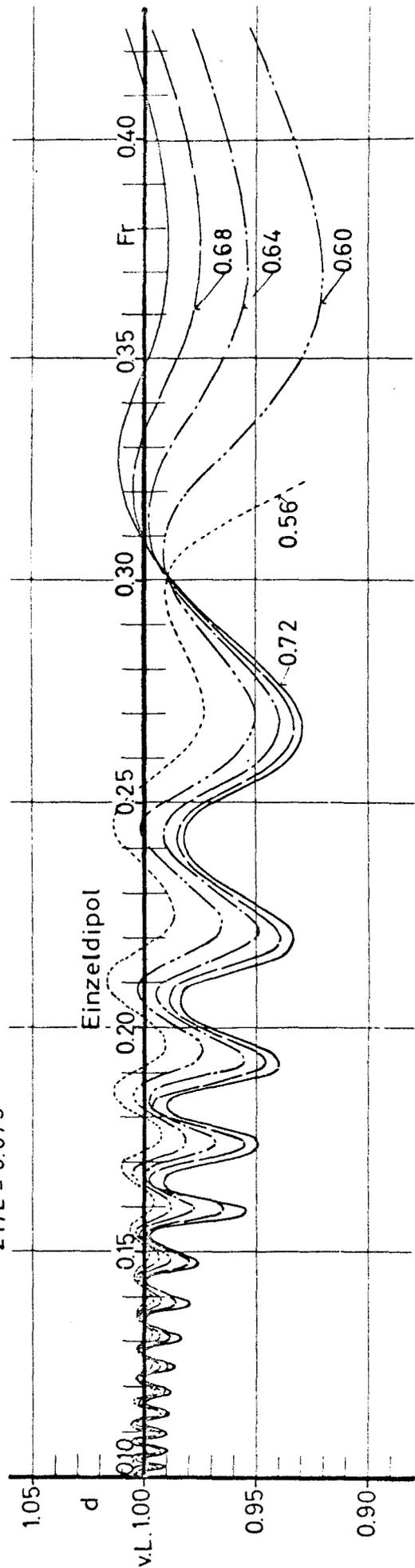
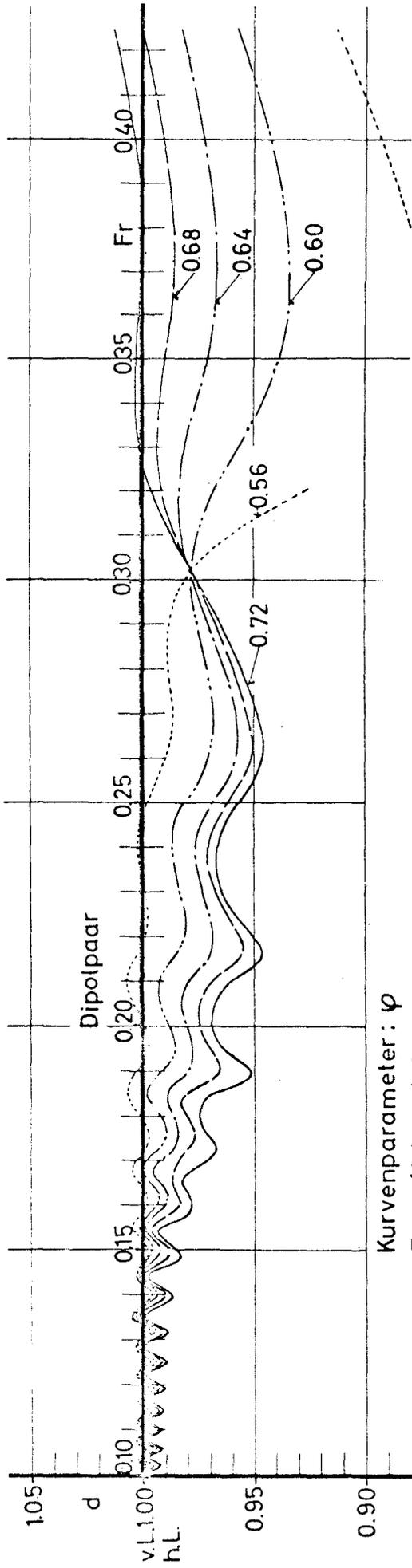
Das maximale Volumenverhältnis  $V_k/V_m$  einer Q-S-Dipol-Kombination als Funktion der Froudeschen Zahl.

Diagr.6a



Das optimale Verhältnis des Wellenwiderstandes einer Q-S-Dipol-Kombination zum Wellenwiderstand der Q-S-Verteilung allein als Funktion der Froudeschen Zahl.

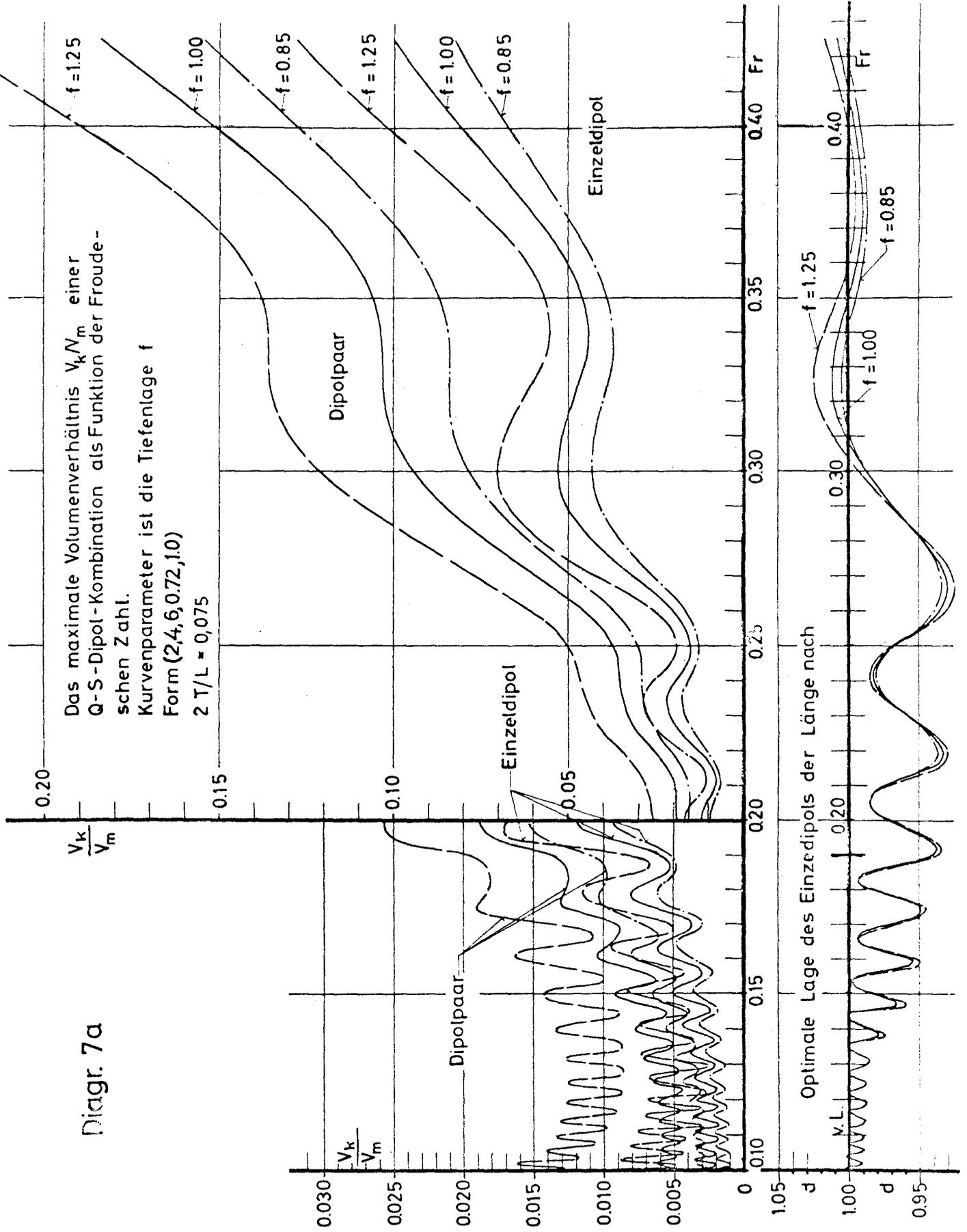
Diagr. 6b

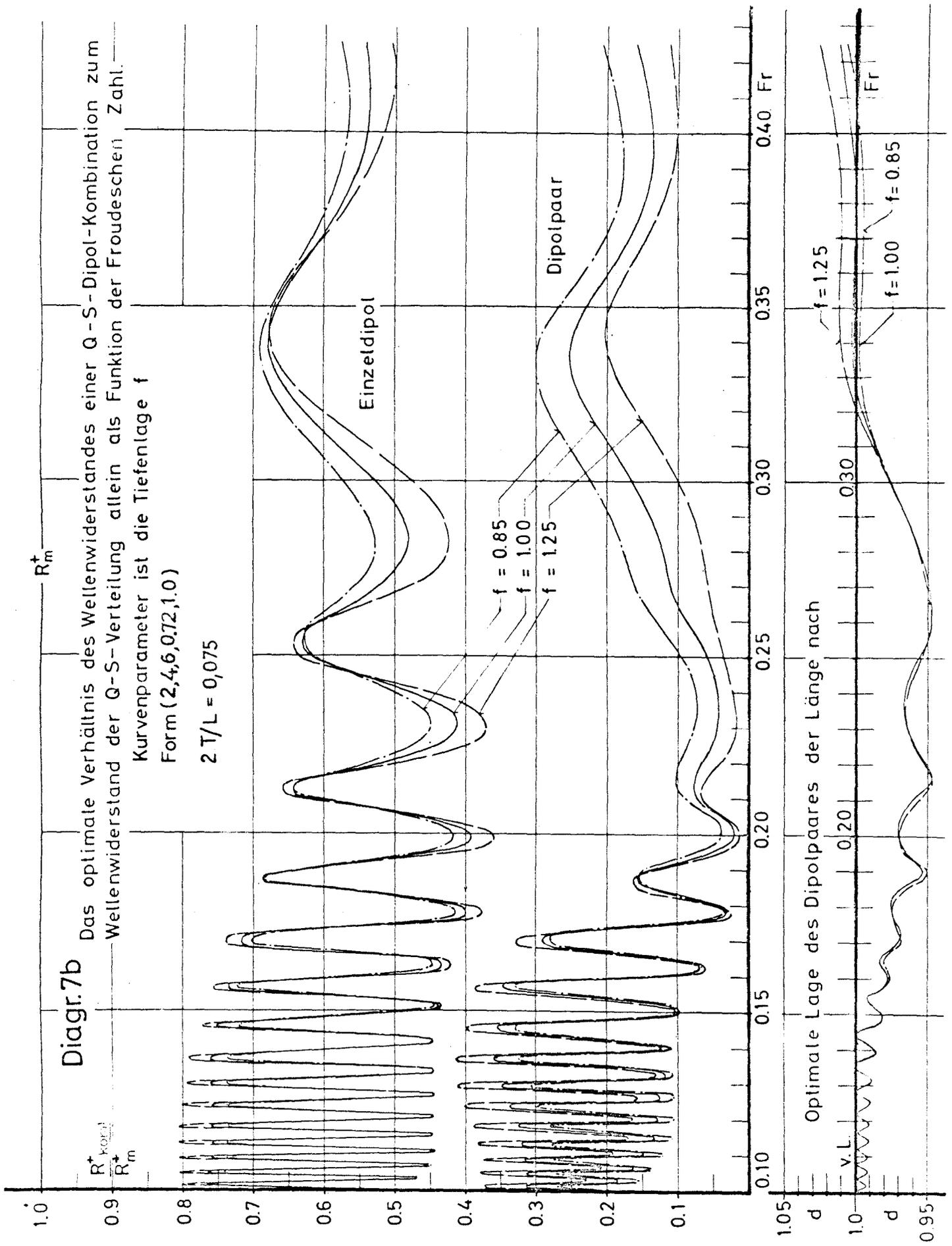


Diagr.6c Die optimale Lage der Wulstsingularitäten der Länge nach bezogen auf  $L/2$ .

Diagr. 7a

Das maximale Volumenverhältnis  $V_k/V_m$  einer Q-S-Dipol-Kombination als Funktion der Froudeschen Zahl.  
 Kurvenparameter ist die Tiefenlage  $f$   
 Form (2,4,6,0,72,10)  
 $2 T/L = 0,075$

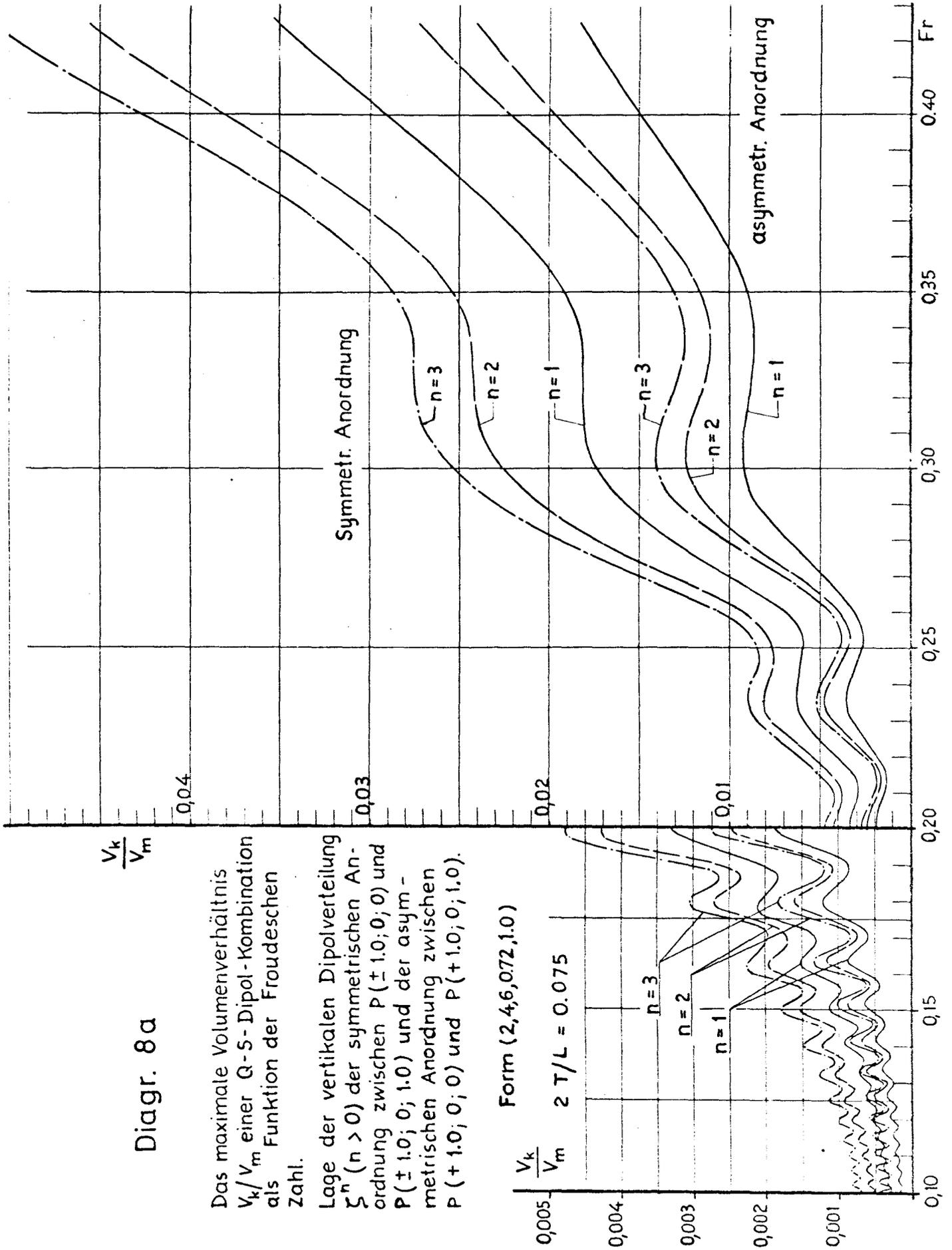


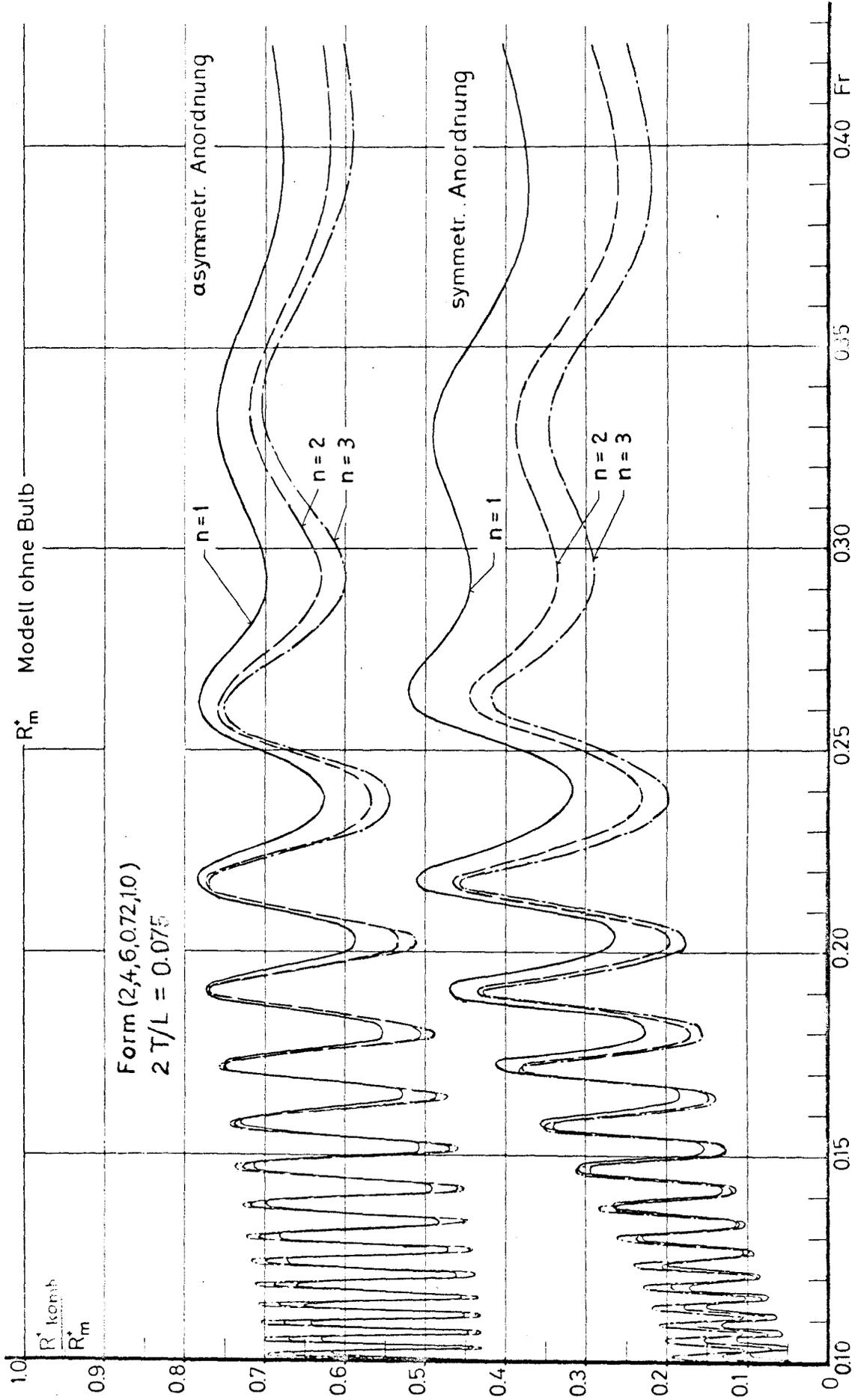


Diagr. 8a

Das maximale Volumenverhältnis  $V_k/V_m$  einer Q-S-Dipol-Kombination als Funktion der Froudeschen Zahl.

Lage der vertikalen Dipolverteilung  $\Sigma^n$  ( $n > 0$ ) der symmetrischen Anordnung zwischen  $P(\pm 1.0; 0; 0)$  und  $P(\pm 1.0; 0; 1.0)$  und der asymmetrischen Anordnung zwischen  $P(+1.0; 0; 0)$  und  $P(+1.0; 0; 1.0)$ .

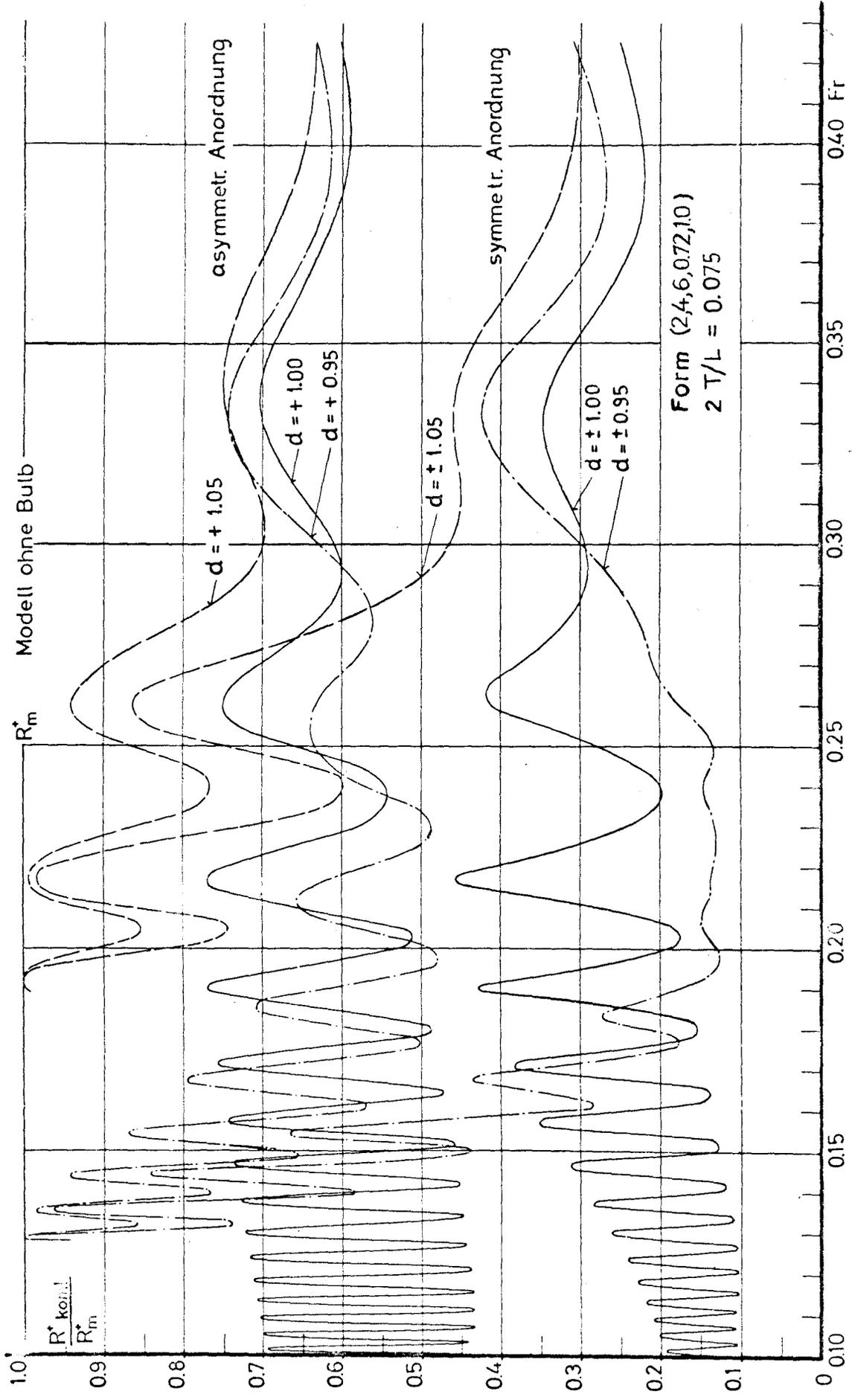




Diagr. 8b

Das optimale Verhältnis der Wellenwiderstände einer Q-S-Dipol-Kombination zum Wellenwiderstand der Q-S-Verteilung allein als Funktion der Froudeschen Zahl

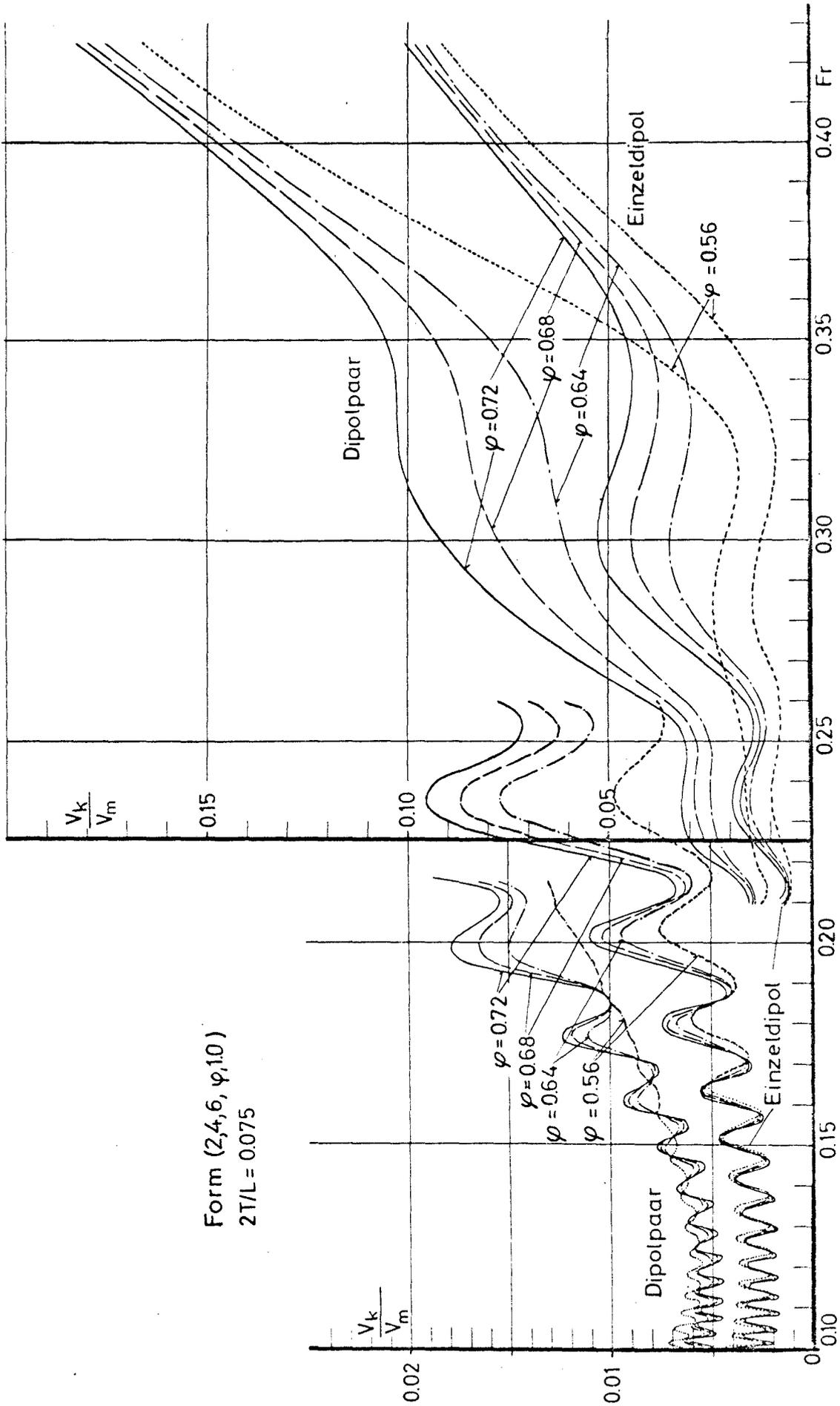
Lage der vertikalen Dipol-Verteilung  $\zeta^n$  ( $n > 0$ ) symmetr. Anordnung zwischen  $P(\pm 1, 0, 0)$  und  $P(\pm 1, 0, 1)$   
 asymmetr. Anordnung zwischen  $P(+1, 0, 0)$  und  $P(+1, 0, 1)$



Diagr. 8c

Das optimale Verhältnis des Wellenwiderstandes einer Q-S-Verteilung kombiniert mit einer vertikalen Dipol-Verteilung 3.Grades als Funktion der Froudeschen Zahl.

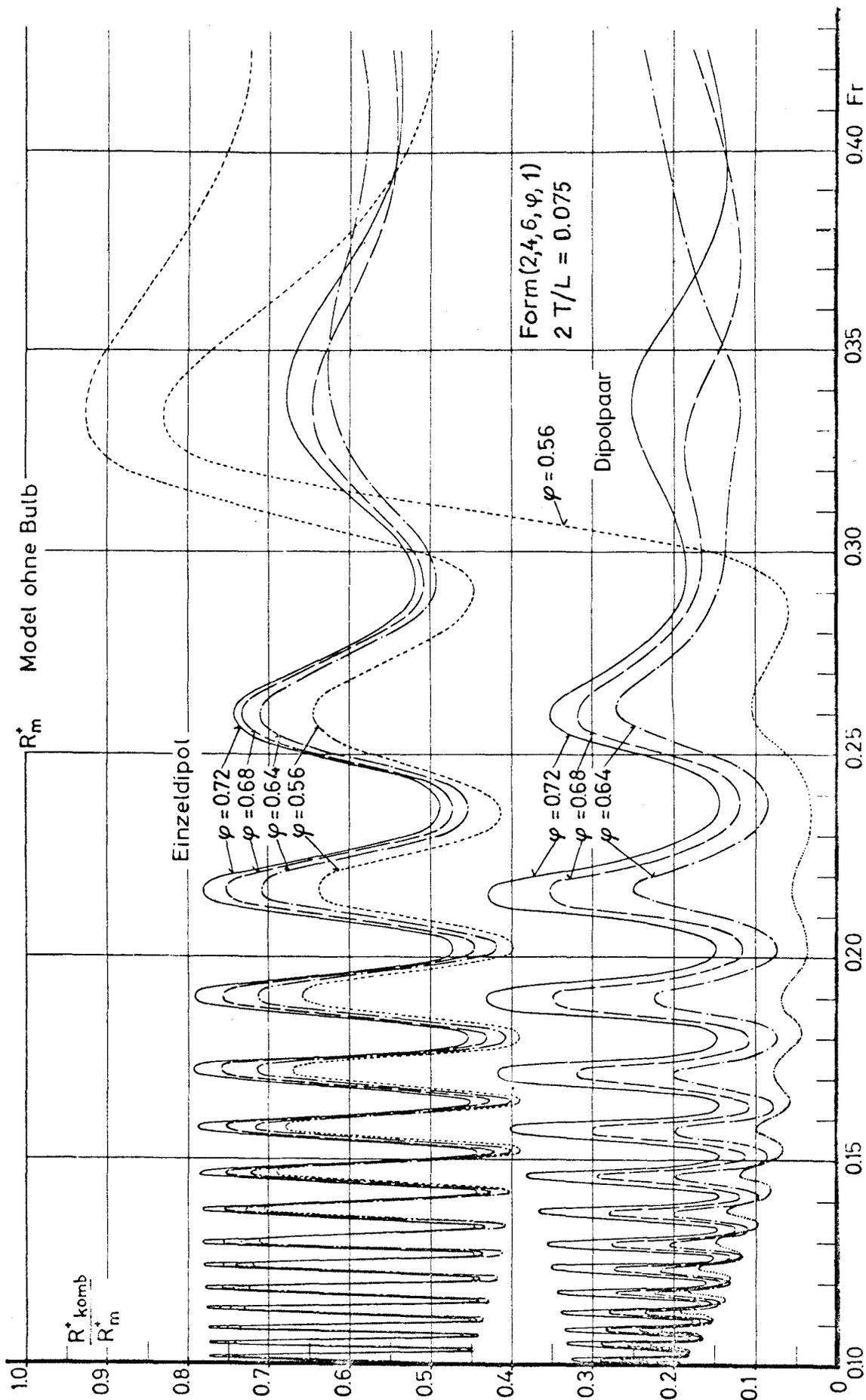
Lage der vertikalen Dipol-Vert.:  $\zeta^3$  symmetr. Anordnung zwischen  $P(\pm d; 0; 0)$  und  $P(\pm d; 0; 1,0)$   
 asymmetr. Anordnung zwischen  $P(+d; 0; 0)$  und  $P(+d; 0; 1,0)$



Form (2,4,6, phi,10)  
2T/L = 0.075

Das maximale Volumenverhältnis  $V_k/V_m$  einer Q-S-Dipol-Kombination als Funktion der Froudeschen Zahl.  
 Lage des Einzeldipols (+100,0,1,00)  
 Lage des Dipolpaares ( $\pm 100,0,1,00$ )

Diagr. 9a



Das optimale Verhältnis der Wellenwiderstände einer Q-S-Dipol-Kombination und einer Q-S-Verteilung als Funktion der Froudeschen Zahl.

Lage des Einzeldipols (+100,0,100)

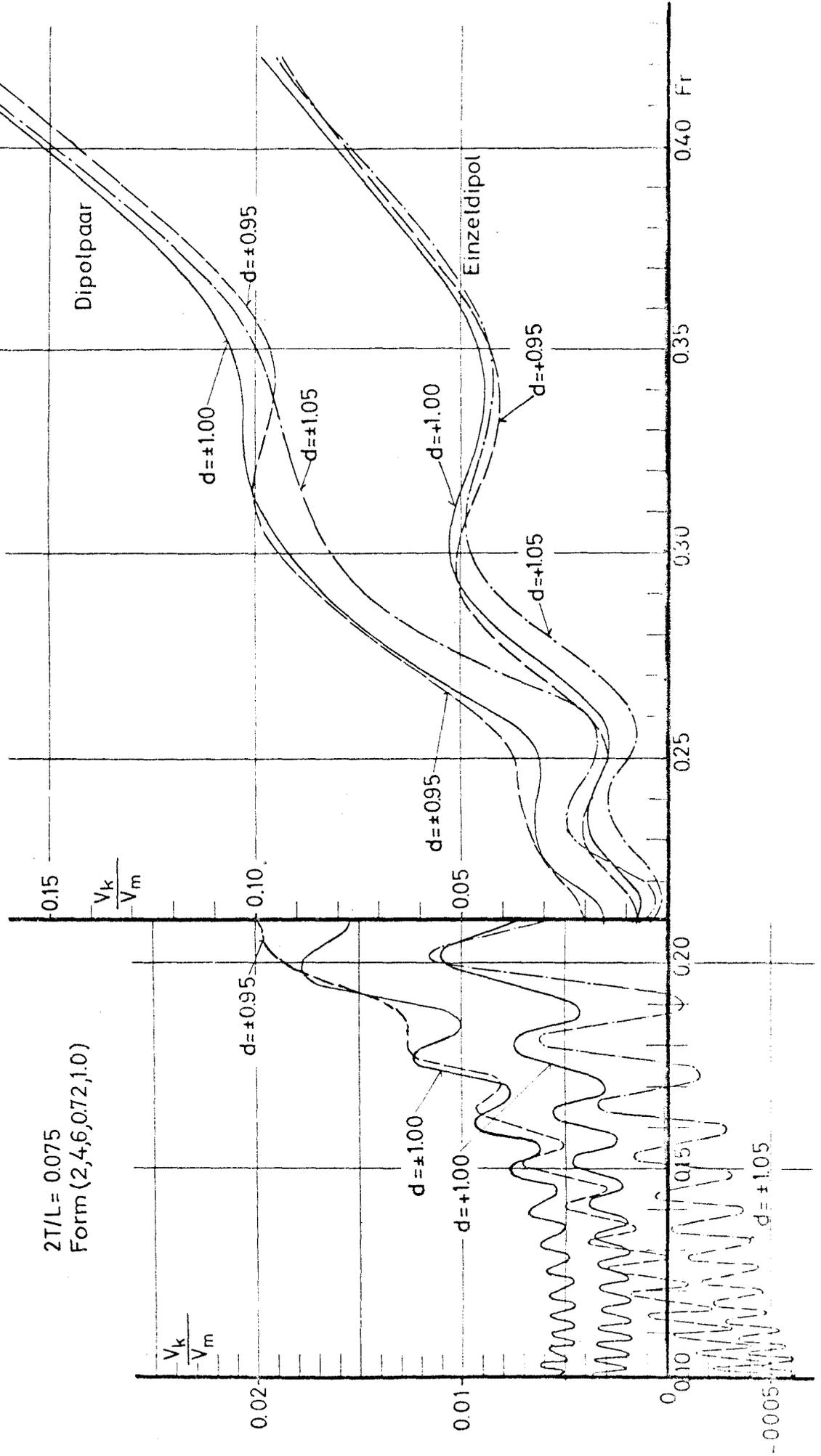
Lage des Dipolpaares (+100,0,100)

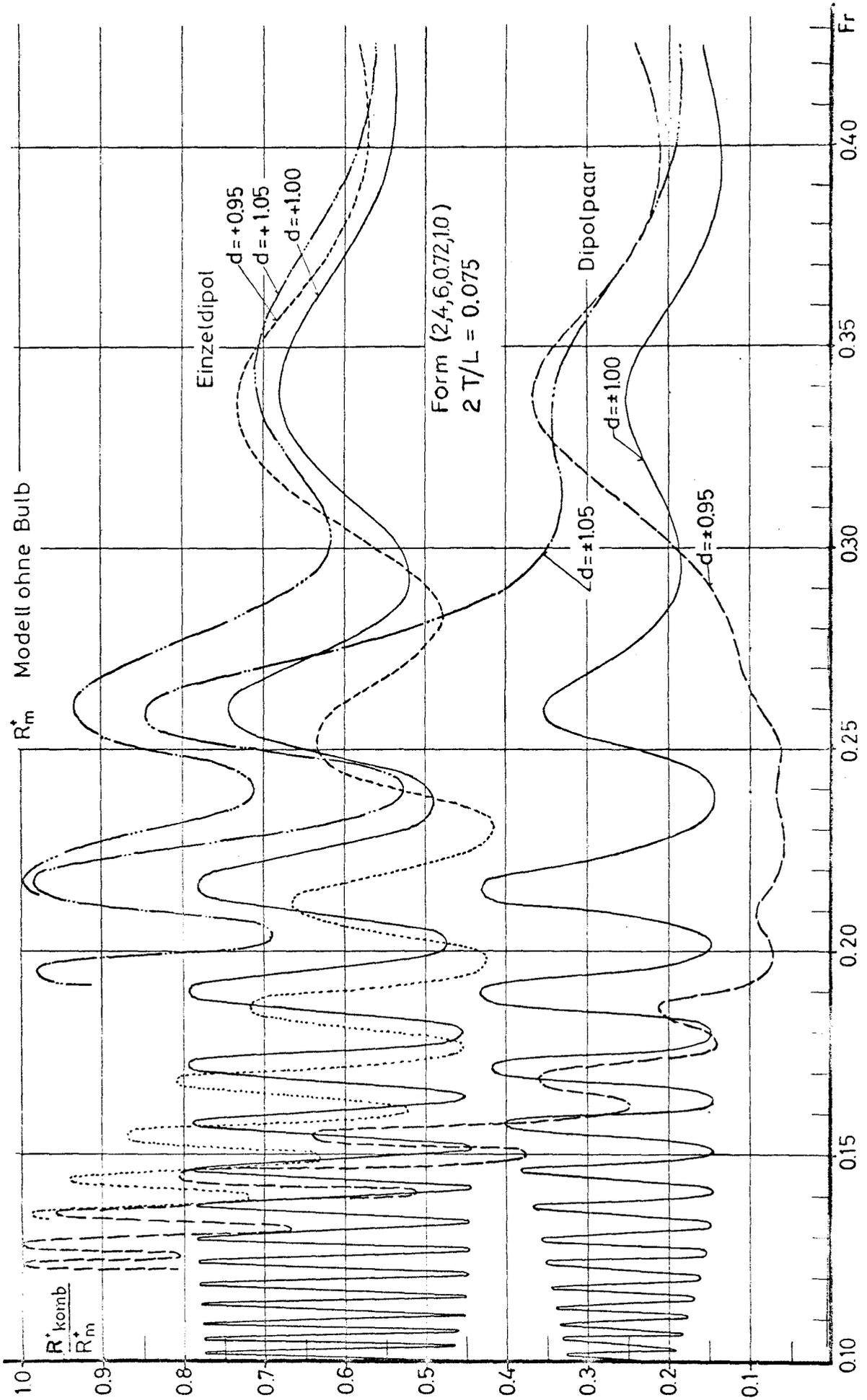
Diagr. 9b

Diagr.10a

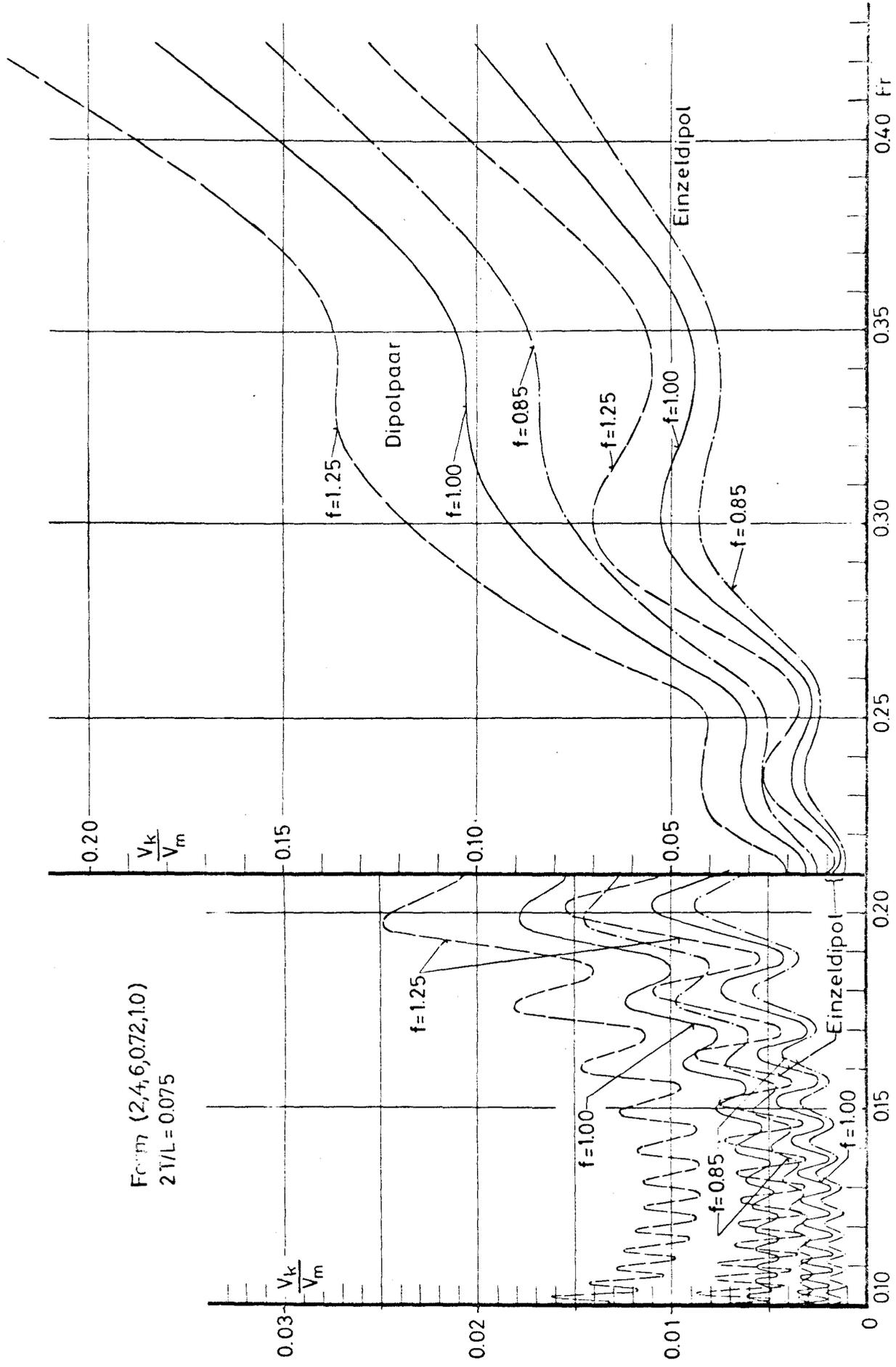
Das maximale Volumenverhältnis  $V_k/V_m$  einer Quell-Senken-Dipol-Kombination als Funktion der Froudeschen Zahl

Lage des Einzeldipols (+d,0,1,0)  
 Lage des Dipolpaares ( $\pm d,0,1,0$ )





Diagr.10b Das optimale Verhältnis des Wellenwiderstandes einer Quell-Senken-Dipol-Kombination zum Wellenwiderstand der Q-S-Verteilung allein als Funktion der Froudeschen Zahl.  
 Lage des Einzeldipols (+d,0,1,0)  
 Lage des Dipolpaares ( $\pm d,0,1,0$ )

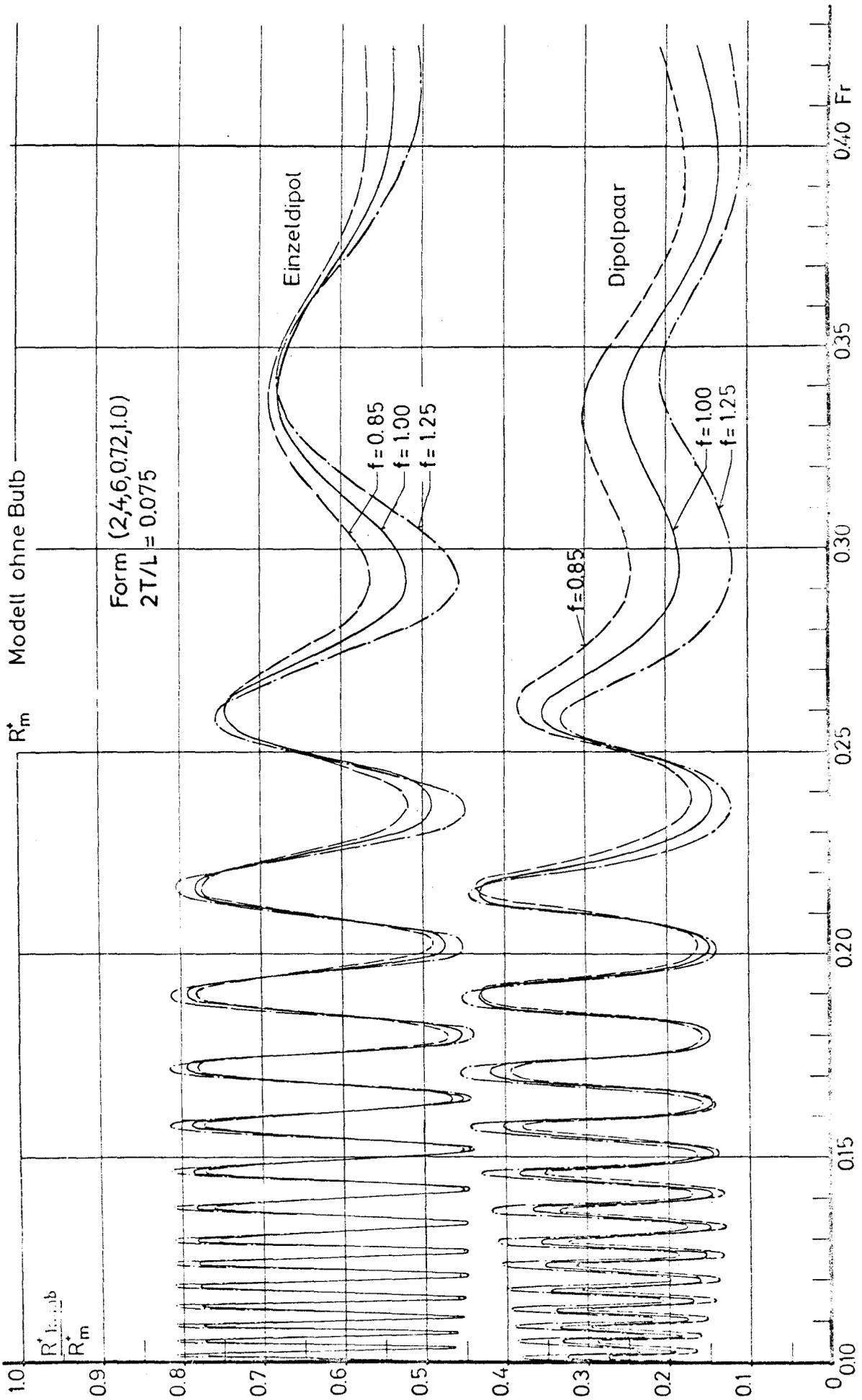


$F_{0.17} = (2, 4, 6, 0.72, 1.0)$   
 $2.1/L = 0.075$

Das maximale Volumenverhältnis  $V_k/V_m$  einer Quell-Senken - Dipol - Kombination als Funktion der Froudeschen Zahl.

Diagr.11a

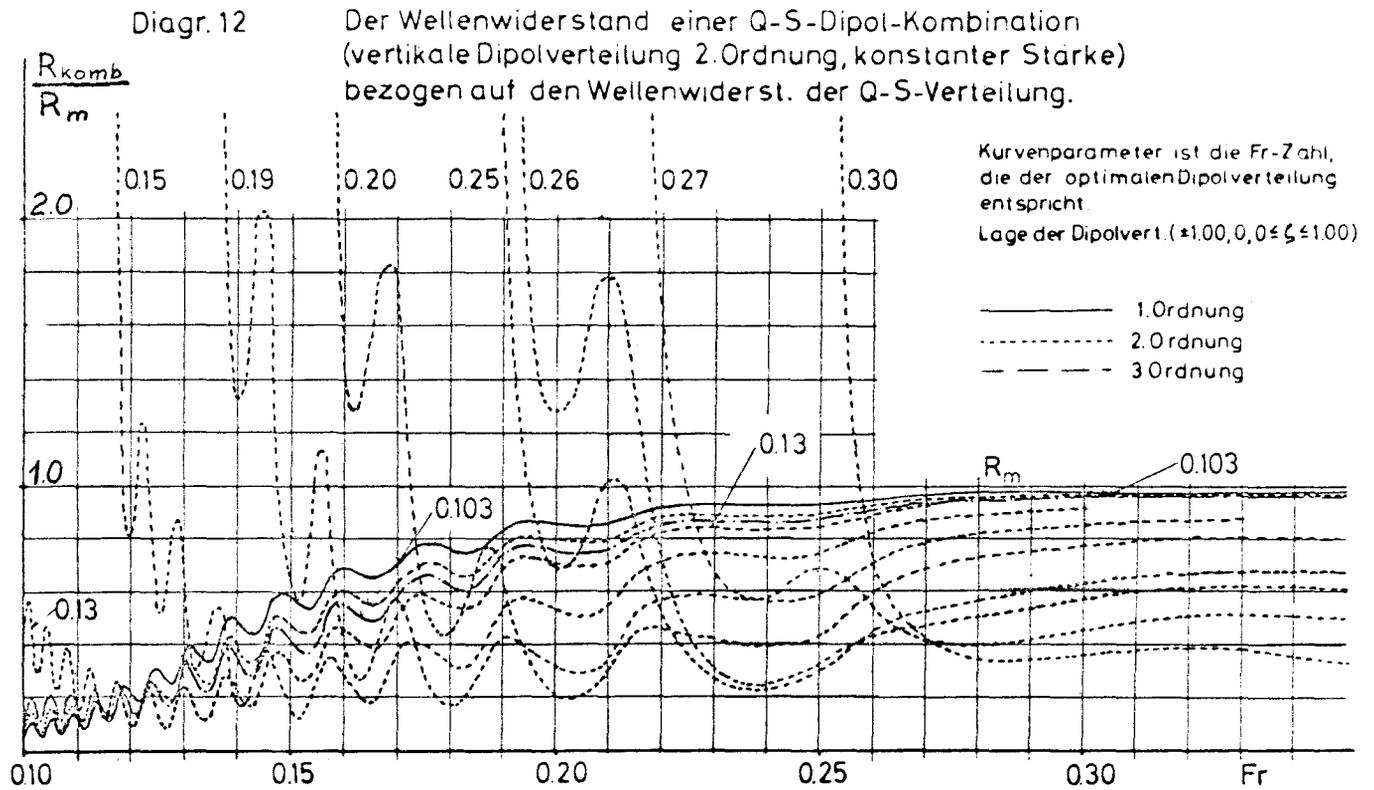
Lage des Einzeldipols (+1.00, 0, f)  
 Lage des Dipolpaares (+1.00, 0, f)



Das optimale Verhältnis der Wellenwiderstände einer Q-S-Dipol-Kombination und einer Q-S-Verteilung als Funktion der Froudeschen Zahl.

Lage des Einzeldipols (+100,0,f)  
 Lage des Dipolpaares ( $\pm 100,0,f$ )

Diagr. 11b



Form (2,4,6,0,72,1,0)  
 $2T/L = 0.075$

