213 | 1967

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

O. Krappinger

Die quantitative Berücksichtigung der Sicherheit und Zuverlässigkeit bei der Konstruktion von Schiffen

TUHH
Technische Universität Hamburg-Harburg

Die quantitative Berücksichtigung der Sicherheit und Zuverlässigkeit bei der Konstruktion von Schiffen

O.Krappinger, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1967

Schriftenreihe Schiffbau
Schwarzenbergstraße 95c
D-21073 Hamburg

http://www.tuhh.de/vss

Die quantitative Berücksichtigung der Sicherheit und Zuverlässigkeit bei der Konstruktion von Schiffen

von

O. Krappinger, Hamburg

Vortrag zur STG-Hauptversammlung 1967

INHALTSÜBERSICHT

1. Einführung

Die Sorge um die Sicherheit von Schiff und Ladung und vor allem um die der sich auf die See wagenden Menschen ist sicher ebenso alt wie Schiffahrt und Schiffbau selbst. Nicht weniger alt ist aber auch die Art und Weise, wie die Schiffbauer sich mit Sicherheitsfragen auseinandersetzen. Es handelt sich dabei seit alters her um eine indirekte Methode: Man befolgt beim Bau der Schiffe gewisse Regeln, von denen man - meist mit Recht - annimmt, daß sie der Sicherheit förderlich sind. Früher waren solche Regeln in der handwerklichen Tradition begründet. Heute beziehen sie sich oft auf physikalische Eigenschaften der Schiffe und sind zu einem großen Teil in Bau- und Sicherheitsvorschriften niedergelegt. In jedem Fall handelt es sich aber nur um Mittel zur Erzielung von Sicherheit; die Sicherheit an sich wurde und wird vielfach auch heute noch für unmeßbar, für rational nicht faßbar gehalten.

Es liegt auf der Hand, daß dies heute mehr denn je zu praktischen Schwierigkeiten führen muß. Es gibt heute viele Möglichkeiten, um Sicherheit zu erreichen. Wie will man aber ihre Wirksamkeit feststellen, wie die besten auswählen, wenn man das, was bewirkt werden soll, nicht messen kann? Wie soll eine Sicherheitskonferenz zu Ergebnissen kommen, wenn sie den Gegenstand, über den sie verhandeln soll, nicht rational erfassen kann? Muß sie nicht zwangsläufig in der Diskussion der möglichen Mittel stecken bleiben? Schließlich soll auch nicht unerwähnt bleiben, daß Wartung und Ersatzteilhaltung nur dann wirtschaftlich optimal geplant werden können, wenn man dem Aufwand dafür auch die angestrebten Ergebnisse quantitativ gegenüberstellen kann.

Es wäre also sehr wünschenswert, die Sicherheit an sich quantitativ in den Griff zu bekommen. Wir wollen deshalb zunächst sehen, wo dabei die Schwierigkeiten liegen. Absolute Sicherheit gibt es auf unserer Welt nicht. Der Mensch muß sich mit mehr oder weniger unvollkommener Sicherheit abfinden. Dabei macht er aber manchmal recht paradoxe Erfahrungen: Es gibt zahlreiche Beispiele für Fälle, in denen viel für die Sicherheit getan wurde, ohne daß dadurch ein Unglück hätte abgewehrt werden können. Andererseits findet man auch gegenteilige Beispiele, in denen man trotz Außerachtlassen von Sicherheitsmaßnahmen sicher über die Runden gekommen ist. Schließlich kann man häufig feststellen, daß eine Sache bei gleichen Voraussetzungen manchmal gut ausgeht und manchmal nicht. Solche Erfahrungen deuten darauf hin, daß bei der Sicherheit zwei grundverschiedene Einflüsse mitspielen: Einerseits solche, die man in der Hand hat; andererseits aber auch vom Zufall abhängige, wo es also darauf ankommt, ob man Glück oder Unglück hat. Die Schwierigkeiten liegen offenbar bei den zweitgenannten Einflüssen. In früheren Zeiten war man sich dieser Einflüsse (gleich wie man sie nannte) wohl bewußt, es fehlten aber - ebenso wie auf vielen anderen Gebieten - die wissenschaftlichen Grundlagen, die notwendig gewesen wären, um auf die Idee zu kommen, quantitative Aussagen über die zufälligen Einflüsse zu machen. Später, mit der modernen Technik, entstand zunächst auch eine Fehleinschätzung der durch sie möglichen Fortschritte. Man hielt ihre Möglichkeiten für unbegrenzt und es schien nur eine Frage der Zeit, daß man alles beherrschen und den Zufall ausschalten könne [1]. Unter diesen Voraussetzungen ist es kein Wunder, daß man sich auf die Mittel zur Erzielung von Sicherheit konzentrierte und die Frage nach der Sicherheit an sich wenig beachtet hat. Auf den tra-

---

1) Ein Beispiel für diese Haltung sind die folgenden Bemerkungen, die bei der Diskussion eines Vortrages vor der INA über "Losses at Sea" im Jahre 1887 gemacht worden sind: I believe that if the matter was left in the hands of the shipbuilders..., it would be very much better .... All respectable shipbuilder would fix such a loadline as would make a ship perfectly safe .... (TINA 1877, S.122).

ditionellen Gebieten der Ingenieurwissenschaft hat sich an dieser Haltung bis heute wenig geändert. Erst das Aufkommen völlig neuer Gebiete (Elektronik, Weltraumfahrt) gab den Anstoß, die Dinge neu zu überdenken. Man akzeptierte die Tatsache, daß man Zufälligkeiten nicht ausschließen und vollkommene Sicherheit nicht erreichen kann. Dieses Erkennen des Problems ist die eine Voraussetzung dafür, die Sicherheit an sich quantitativ behandeln zu können. Die zweite Voraussetzung ist das Vorhandensein eines dafür geeigneten und genügend entwickelten mathematischen Formalismus. Man findet ihn in der Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematischen Statistik.

Im folgenden will ich einen Überblick über neuere Methoden zur Behandlung von Sicherheitsfragen geben. Ich glaube, daß ihre Anwendung es auch im Schiffbau möglich machen wird, sowohl die Sicherheit zu erhöhen als auch die Wirtschaftlichkeit zu verbessern.

2. Einige grundsätzliche Überlegungen

Der Begriff Sicherheit, so wie er in der Alltagssprache verwendet wird, ist ungenau und vieldeutig. Man kann ihn deshalb nicht ohne weiteres quantitativ fassen oder mit anderen Worten: er läßt sich nicht unmittelbar durch ein mathematisches Modell beschreiben. Dies braucht uns jedoch nicht zu entmutigen. Wir wissen, daß man in den meisten Fällen, in denen man daran ging, Begriffe aus der Alltagssprache zu quantisieren, vor einer ähnlichen Situation stand. Denken wir z.B. an die Leistung. Was wurde - und was wird - im alltäglichen Sprachgebrauch nicht alles darunter verstanden. Mit den physikalischen Begriffen Kraft, Arbeit, Leistung wird längst nicht alles erfaßt, was beim alltäglichen Gebrauch des Wortes Leistung gemeint sein kann und für viele Anwendungen des Wortes gibt es überhaupt kein quantisierbares Explicat (z.B. die "schöpferische Leistung" eines Künstlers, oder die "Leistung der Wissenschaft" usw.). Andererseits kann man den gegenüber dem alltäglichen Leistungsbegriff in seiner Bedeutung eingeschränkten physikalischen Begriff mit Hilfe sehr unterschiedlicher Größen ausdrücken (m.kp/s; V.A; kcal/s).

Um auf dem Gebiet der Sicherheit weiterzukommen, müssen wir zunächst feststellen, was wir unter Sicherheit verstehen wollen. Dabei ist es zweckmäßig, vom Begriff "unsicher" auszugehen. Er ist zwar ebenso ungenau und vieldeutig wie "sicher". Wir können ihn aber leicht durch eine Aussage ersetzen, die einerseits präzise genug ist, um als Ausgangspunkt für mathematische Überlegungen zu dienen und die andererseits aber auch genügend allgemein ist, um der Wirklichkeit, die ja sehr vielfältig ist, gerecht zu werden. Statt unsicher (oder unzuverlässig, gefährlich usw.) wollen wir konkreter sagen: Es tritt in einem bestimmten Zeitabschnitt mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit ein unerwünschtes Ereignis ein. Diese Aussage enthält drei wichtige Komponenten: 1. Eintreten eines unerwünschten Ereignisses. Dies kann z.B. Sinken eines Schiffes, Ausfall einer Maschinenanlage, Versagen eines Reglers, Nichtansprechen einer Alarmeinrichtung im Gefahrenfalle oder fälschliche Auslösung eines Alarms, Über- oder Unterschreiten eines Grenzwertes sein. 2. Das Eintreten des Ereignisses muß sich auf ein bestimmtes Zeitintervall beziehen und es muß 3. in diesem Intervall eine gewisse Wahrscheinlichkeit haben. Zwischen den Punkten 2 und 3 besteht dabei offensichtlich ein Zusammenhang. Dieser Zusammenhang ist, ~~wie wir sehen~~ werden, die Grundlage für quantitative Aussagen über die Sicherheit. Die zu seiner Beschreibung notwendigen Methoden sind dabei weitgehend unabhängig von der Art des Ereignisses. Auf den ersten Blick mag dies vielleicht nicht einleuchten; z.B. besteht doch ein sehr wesentlicher Unterschied zwischen dem Ausfall der Steward-Ruf-Anlage und dem der Hauptmaschine eines

Schiffes - wie will man das über einen Kamm scheren? Wenn wir aber überlegen, daß diese beiden Anlagen auch hinsichtlich ihres Leistungsbedarfs nicht zu vergleichen sind, der Leistungsbedarf in beiden Fällen aber dennoch mit genau der gleichen physikalischen Größe ausgedrückt werden kann, dann scheint es nicht mehr so abwegig, auch die Unsicherheit in beiden Fällen durch grundsätzlich gleiche Beziehungen zu beschreiben.

Im folgenden müssen wir uns also zunächst mit dem oben erwähnten Zusammenhang von Zeit und Wahrscheinlichkeit beschäftigen. Es wird dabei vorausgesetzt, daß der Leser hinreichend mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung vertraut ist. Diese Voraussetzung ist sicher nicht sehr befriedigend, aber wegen der mir auferlegten Beschränkung hinsichtlich des Umfangs dieses Vortrages kann ich dazu nicht mehr als die Hinweise in dem sich auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung beziehenden Teil des Schrifttumsverzeichnisses bringen. Weiter werden wir dann untersuchen, wie man Sicherheitsaussagen kombinieren kann. Praktisch sind die "unerwünschten Ereignisse", auf die es letztlich ankommt, ja immer aus verschiedenen Einzelereignissen zusammengesetzt. Zum Beispiel kann man das Ereignis: Hauptmaschine fällt aus zerlegen in die Ereignisse: Schmierölpumpe <u>und</u> Reserveschmierölpumpe fällt aus <u>oder</u> Brennstoffversorgung fällt aus <u>oder</u> Kühlwasserversorgung fällt aus usw. Ich hoffe, mit den Ausführungen in den Abschnitten 4 bis 6 einen Eindruck davon zu vermitteln, wie umfassend die Anwendbarkeit der mathematischen Methoden im Hinblick auf praktische Aufgaben ist. Daß die Anwendung dieser Methoden nicht nur möglich ist sondern daß mit ihrer Hilfe auch wirklich neue Möglichkeiten für rationale Aussagen über die Sicherheit erschlossen werden, soll der abschließende Abschnitt 7 zeigen.

Leider war es bei dem diesem Vortrag zugebilligten Umfang nicht möglich, auch auf die praktische Ermittlung von Funktionen und Parametern für die vorkommenden Wahrscheinlichkeits-Verteilungen einzugehen. Darüber hinaus mußte das Thema auch nach einer anderen Richtung beschnitten werden: Die wichtige Frage der Bemessung der Sicherheit unter Berücksichtigung von Wirtschaftlichkeit und des Schutzes von menschlichem Leben konnte nicht einmal angedeutet werden. Was hier gebracht wird, kann mit einem Vortrag über Schiffsstatik verglichen werden, in dem weder Zahlenwerte über Materialeigenschaften gegeben noch Angaben über Schiffe, für die die behandelten Konstruktionen zu verwenden wären, gemacht werden. Trotzdem hoffe ich, daß der hier gebrachte "Mittelteil" des zu behandelnden Themas einerseits als Einführung in die quantitative Behandlung von Sicherheitsfragen dienen kann und andererseits auch Anregungen für weitere Untersuchungen bietet.

3. Ausfallverteilung, Ausfallrate und mittlere Lebensdauer

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein "unerwünschtes Ereignis" E - was auch immer dies sei - im Zeitintervall (0,t) eintritt oder mit anderen Worten die Wahrscheinlichkeit, daß die Zeit bis zum Eintreten des Ereignisses kleiner oder gleich t ist, wird durch die Verteilungsfunktion F(t) der als zufällige Variable betrachteten Zeit τ bestimmt :

$$W\left\{\text{E tritt im Zeitintervall } (0,t) \text{ ein}\right\} = W\left\{\tau \leq t\right\} = F(t) \qquad (1)$$

F(t) wird als Ausfallverteilungsfunktion (failure distribution function, mortality distribution function) bezeichnet. Die Ableitung der Ausfallverteilungsfunktion nach der Zeit $f(t) = dF(t)/dt$ wird als Ausfallverteilungsdichte (failure oder mortality distribution density) bezeichnet. Man kann damit die Wahrscheinlichkeit angeben, daß das Ereignis E "um den Zeitpunkt t" (genauer: im Zeitintervall (t,t+dt)) auftritt:

$$W\left\{\text{E tritt im Zeitintervall } (t,t+dt) \text{ ein}\right\} = W\left\{t < \tau \leqq t+dt\right\} =$$

$$= f(t)dt \qquad (2)$$

Unter Ausfallverteilung wird F(t) oder f(t) verstanden.

Sehr leicht kann man auch die Wahrscheinlichkeit dafür angeben, daß das "unerwünschte Ereignis" E in dem betrachteten Zeitraum (0,t) nicht eintritt. Da dies komplementär zum Auftreten von E ist, ist die Wahrscheinlichkeit [2]

$$W\left\{\text{E tritt im Zeitintervall } (0,t) \text{ nicht ein}\right\} = W\left\{\tau > t\right\} =$$

$$= 1 - F(t) = R(t) \qquad (3)$$

Von Nutzen ist schließlich noch die bedingte Wahrscheinlichkeit, daß das Ereignis E in (t, t+dt) eintritt, wenn es bis zum Zeitpunkt t nicht eingetreten ist:

$$W\left\{\text{E tritt in } (t,\ t+dt) \text{ ein unter der Hypothese, daß es bis } t \text{ nicht eingetreten ist}\right\} = W\left\{t < \tau \leqq t+dt \,\middle|\, \tau > t\right\} =$$

$$= \frac{W\left\{t < \tau \leqq t+dt\right\}}{W\left\{\tau > t\right\}} = \frac{f(t)dt}{1 - F(t)} = \lambda(t)dt \qquad (4)$$

---

2) Diese Wahrscheinlichkeit wird häufig als Sicherheitswahrscheinlichkeit bezeichnet. Auch Ausdrücke wie Überlebenswahrscheinlichkeit, Zuverlässigkeit (reliability) u.ä. werden dafür benutzt.

wobei

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \qquad (4a)$$

ist. $\lambda(t)$ heißt Ausfallrate (failure rate, force of mortality, intensity function). Zwischen Ausfallrate und auch Ausfallverteilungsfunktion bzw. Ausfallverteilungsdichte kann man folgende Beziehungen ableiten:

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(t)dt = \int_0^t \frac{dF(t)}{1-F(t)} = -\ln(1 - F(t))$$

$$F(t) = 1 - \exp(-\Lambda(t)) \qquad (5)$$

$$f(t) = \lambda(t)\exp(-\Lambda(t)) \qquad (5a)$$

Bild 1 zeigt ein Beispiel für einander entsprechende Funktionen $\lambda(t)$, $f(t)$ und $F(t)$.

Die eben eingeführten Begriffe kann man durch einige formale Überlegungen noch etwas anders deuten. Wir nehmen an, daß wir n Schiffe oder Motoren oder Geräte haben, die unter den gleichen [3] Bedingungen eingesetzt (oder mit anderen Worten den gleichen [3] Risiken ausgesetzt) werden. Der Erwartungswert der Zahl der Objekte, bei denen das "unerwünschte Ereignis" während der Zeit t eintritt, ist nach einem Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung

$$n_f(t) = n \cdot F(t). \qquad (6)$$

---

[3] "Gleich" steht hier nicht für "identisch", sondern ist in einem statistischen Sinn gemeint.

In den angenommenen Fällen kann das z.B. bedeuten, daß im Mittel während der Zeit t n_f Schiffe untergehen oder n_f Motoren ausfallen oder n_f Geräte unbrauchbar werden. In Betrieb sind zur Zeit t im Mittel noch

$$n_s(t) = n - n_f(t) = n(1-F(t)) = n \cdot R(t) \tag{7}$$

Objekte.

Für die durchschnittliche Zahl der je Zeiteinheit ausfallenden Objekte [4] findet man

$$\frac{dn_f\ (t)}{dt} = n\ \frac{dF\ (t)}{dt} = n \cdot f(t). \tag{8}$$

Damit können wir schließlich noch die Ausfallrate deuten als die durchschnittliche Zahl der je Zeiteinheit ausfallenden Objekte, bezogen auf die Anzahl der noch in Betrieb befindlichen Objekte:

$$\lambda(t) = \frac{dn_f(t)/dt}{n_s(t)} = \frac{n \cdot f(t)}{n(1 - F(t))} = \frac{f(t)}{1-F(t)} \tag{9}$$

Wenn der gleiche Zweck sowohl von Objekten der Bauart A als auch von solchen der Bauart B erfüllt wird, und wenn in einer bestimmten Zeit von n Objekten A bzw. B im Durchschnitt n_{fA} bzw. n_{fB} ausfallen (oder versagen oder zugrunde gehen), dann liegt es nahe, die Bauart A für sicherer, unsicherer oder gleich sicher wie die Bauart B anzusehen, je nachdem, ob $n_{fA} < n_{fB}$; $n_{fA} > n_{fB}$ oder $n_{fA} = n_{fB}$ ist.

---

[4] Unter "ausgefallenen Objekten" werden hier und im folgenden diejenigen verstanden, bei denen das "unerwünschte Ereignis" eingetreten ist.

Statt der durchschnittlichen Zahlen n_{fA} und n_{fB} kann man natürlich ebenso gut (s. die Gleichungen (6) und (7)) die Wahrscheinlichkeiten $F_A(t)$ und $F_B(t)$ bzw. $R_A(t)$ und $R_B(t)$ einander gegenüber stellen, um die Sicherheit zu bewerten bzw. zu vergleichen.

Die Ausfallwahrscheinlichkeit oder Zahl der Ausfälle in einer bestimmten Zeit sind nicht die einzige Möglichkeit, einen intuitiven Zusammenhang zwischen Sicherheit und Zahlen herzustellen. In vielen Fällen wird man ein Objekt dann als unsicher ansehen, wenn es schon nach kurzer Zeit ausfällt (und deshalb häufig repariert oder ersetzt werden muß). Ein Maß für diese Art von Unsicherheit ist die mittlere Zeit bis zum Ausfall (dem Eintreten des "unerwünschten Ereignisses"). Diese Zeit - sie wird oft als mittlere Lebensdauer bezeichnet - ist

$$t_{L1} = \int_0^\infty t \cdot f(t)dt \qquad (10)$$

Wenn man nur an einer bestimmten Zeit T interessiert ist (z.B. spielt es bei einem Hilfsaggregat keine Rolle, wieviel es länger funktionieren würde als die Zeit T, nach der die gesamte Maschine ausgetauscht wird), kann man die mittlere Lebensdauer auch auf die Zeit T beziehen:

$$t_{L2} = \int_0^T t \cdot f(t)dt + T(1 - F(T)) \qquad (11)$$

Schließlich kann man auch die mittlere Lebensdauer der Objekte angeben, die in der Zeit T ausfallen

$$t_{L3} = \frac{1}{F(T)} \int_0^T t \cdot f(t)dt \qquad (12)$$

t_{L3} kann z.B. dazu verwendet werden, um das, was mit der Ausfallwahrscheinlichkeit ausgesagt wird zu ergänzen. Wenn zwei Objekte die gleiche Ausfallwahrscheinlichkeit (bezogen auf eine Zeit T) haben, ist es für die Beurteilung der Objekte nicht gleichgültig, ob sie gleich zu Beginn der Zeit T ausfallen oder ob dies erst kurz vor Erreichen von T geschieht. Ersteres ist z.B. für das Ansehen des Produzenten sicher schädlicher als letzteres, wo man geneigt ist, entschuldigend zu sagen: Das Objekt hat ja doch ziemlich lange seinen Dienst getan.

Zum Schluß dieses Abschnittes möchte ich noch auf die Stellung eingehen, die den oben eingeführten Begriffen bei der Behandlung von Sicherheitsfragen zukommt. Ebenso wie die Schreibmaschine es uns nicht erspart, schreiben zu lernen, oder wie sie auch den Schriftsteller nicht überflüssig macht, sind auch die oben eingeführten Begriffe nur die formale Voraussetzung zur Behandlung von Sicherheitsproblemen. Sie können uns weder der Aufgabe entheben, uns zu überlegen, auf welche "unerwünschten Ereignisse" es im Einzelfall ankommt, noch ersparen sie es uns, daß wir uns Gedanken darüber machen, was wir eigentlich anstreben wollen (d.h. welche Sicherheitskennwerte im Einzelfall zu benutzen sind). Allein die Tatsache, daß der Formalismus zu solchen Überlegungen und zu einer Ordnung der Gedanken zwingt, spricht schon für seine Anwendung. Dabei ist die große Allgemeinheit des Formalismus ein Vorteil, den man nicht verschenken sollte, indem man Bezeichnungen einführt, die den an sich allgemeinen mathematischen Aussagen eine bestimmte Bedeutung zuordnen. Ich gebe zwar zu, daß im Einzelfall so eine Konkretisierung abstrakter Begriffe nützlich sein und das Verständnis fördern kann. Auf lange Sicht werden dadurch aber nur unnötige Schranken errichtet, durch die es in vielen Fällen erschwert wird, die eigentlichen Probleme zu sehen.

4. Beziehungen für Systeme

4.1 Jedes Schiff, jede Maschine und jedes Gerät ist aus einer mehr oder weniger großen Zahl von Einzelaggregaten zusammengesetzt. Die Funktion der Gesamtanlage hängt dabei weitgehend vom Funktionieren der Einzelaggregate ab oder in der hier benutzten Ausdrucksweise: Das "unerwünschte Ereignis" im Hinblick auf die Gesamtanlage ist eine Folge davon, daß bei den einzelnen Aggregaten "unerwünschte Ereignisse" auftreten. Wie kann man nun von den Eigenschaften der Einzelaggregate auf die der Gesamtanlage schließen?

Wir führen zunächst die Begriffe "System" und "Element" ein. Unter einem System verstehen wir die Kombination von Elementen. Die Elemente sind dabei die jeweils betrachteten kleinsten Einheiten. Bei der Wahl dessen, was man als kleinste Einheit ansehen will, kann man sich bis auf folgende Einschränkungen danach richten, was rechentechnisch und im Hinblick auf die beste Ausnutzung statistischer Informationen am zweckmäßigsten scheint.

Um eine Einheit als Element im hier verstandenen Sinne betrachten zu dürfen, darf das Ausfallen [5] der Einheit nicht zu einer Änderung der Wahrscheinlichkeit für das Ausfallen anderer Einheiten führen. Insbesondere darf es nicht zwangsweise das Ausfallen anderer Einheiten nach sich ziehen. Auch Einheiten, für die es mehrere im Hinblick auf den Ausfall der Gesamtanlage relevante Grade des Ausfallens (die mit verschiedenen Wahrscheinlichkeiten vorkommen können) gibt, dürfen nicht als Elemente betrachtet werden. Wir bezeichnen sie als Teilsystem. Wie man von Teilsystemen auf das Gesamtsystem schließen kann, wird in Abschnitt 6 gezeigt werden.

---

[5] "Ausfallen" steht hier für "Eintreten des unerwünschten Ereignisses" - was auch immer das sei!

4.2 Ein System, das nur dann funktioniert, wenn alle seine Elemente funktionieren, kann man sich als "Serie" der Elemente vorstellen (Bild 2), die unterbrochen wird, wenn ein Element ausfällt. Wenn $R_1(t)$, $R_2(t)$ ... $R_n(t)$ die Wahrscheinlichkeiten sind, daß die Elemente 1, 2 ... n, in der Zeit t nicht ausfallen, dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß das System in dieser Zeit nicht ausfällt

$$R(t) = R_1(t) \cdot R_2(t) \cdot \ldots R_n(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t) \tag{13}$$

Zwischen der Ausfallverteilung des Systems $F(t) = 1 - R(t)$ und den Ausfallverteilungen der Elemente $F_i(t) = 1 - R_i(t)$ besteht folgende Beziehung [6]

$$F(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - F_i(t)) = F_1 + F_2 + \ldots F_n - F_1F_2 - F_1F_3 - \ldots - F_{n-1}F_n +$$

$$+ F_1F_2F_3 + F_1F_2F_4 \ldots + F_{n-2}F_{n-1}F_n - \quad + \ldots F_1F_2 \ldots F_n \tag{14}$$

Für den einfachen Fall, daß alle Elemente die gleiche Ausfallverteilung haben, zeigt Bild 3, wie rasch bei einer größeren Zahl von Elementen die Wahrscheinlichkeit, daß das System ausfällt, ansteigt, auch wenn die Wahrscheinlickeit für den Ausfall der einzelnen Elemente nur klein ist.

4.3 Wenn ein System aus n Elementen nur dann ausfällt, wenn alle Elemente ausfallen, kann man sich die Elemente als "parallel geschaltet" vorstellen (Bild 4). Man bezeichnet diesen Fall auch als heiße Redundanz. Die Ausfallverteilung des Systems ist hier

$$F(t) = F_1(t) \cdot F_2(t) \cdot \ldots F_n(t) = \prod_{i=1}^{n} F_i(t) \tag{15}$$

---

6) Auf der rechten Seite von Gl.(14) bzw. (16) wurde zur Abkürzung F_i statt $F_i(t)$ bzw. $R_i(t)$ geschrieben.

Zwischen der Wahrscheinlichkeit R(t), daß das System nicht ausfällt und den Wahrscheinlichkeiten $R_i(t)$, daß die Elemente nicht ausfallen, besteht die Beziehung [6])

$$R(t)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-R_i(t))=R_1+R_2+\ldots+R_n-R_1R_2-R_1R_3-\ldots$$

$$\ldots-R_{n-1}R_n+R_1R_2R_3+R_1R_2R_n+\ldots+R_{n-2}R_{n-1}R_n-\ldots+\ldots R_1R_2\ldots R_n \tag{16}$$

Bild 5 zeigt - wiederum unter der Annahme gleicher Ausfallverteilung aller Elemente - wie mit der Zahl der redundanten Elemente die Wahrscheinlichkeit, daß das System ausfällt, abnimmt, und wie diese Wahrscheinlichkeit von F_i abhängt.

4.4 Wenn von mehreren parallel geschalteten Elementen immer nur eines in Betrieb ist und von den anderen immer dann eines zugeschaltet wird, wenn das jeweils in Betrieb befindliche ausfällt, kann man die Ausfallverteilung des Systems nicht mehr nach der in 4.3 angegebenen Methode berechnen.

Wir betrachten zunächst den Fall von zwei Elementen. Die Zeit bis zum Ausfall des ersten Elements sei τ_1. Von diesem (zufälligen) Zeitpunkt an beginnt die Betriebszeit des zweiten Elements, von dem angenommen wird, daß es mit Sicherheit einsatzfähig ist und daß die Zuschaltung mit Sicherheit funktioniert. Die Zeit bis zum Ausfall dieses Elements sei τ_2. Das System fällt während einer Zeit t aus, wenn $\tau_1+\tau_2 \leqq t$ ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür läßt sich leicht berechnen: Mit der Ausfallverteilung für die beiden Elemente

$$W\{\tau_1 \leqq t\} = F_1(t_1)\ ; \qquad dF_1(t_1)/dt_1 = f_1(t_1)$$

$$W\{\tau_2 \leqq t\} = F_2(t_2)\ ; \qquad dF_2(t_2)/dt_2 = f_2(t_2)$$

gilt

$$W\{\tau_1+\tau_2 \leqq t\} = F(t) = \int_{t_1=0}^{t} \int_{t_2=0}^{t-t_1} f_1(t_1)f_2(t_2)dt_1dt_2 \qquad (17)$$

und

$$f(t) = \int_{t_1=0}^{t} f_1(t_1)f_2(t-t_1)dt_1 \qquad (18)$$

Die durch (18) gegebene Operation heißt Faltung von f_1 und f_2. Man schreibt dafür auch

$$f(t) = f_1(t_1) * f_2(t_2) \qquad (18a)$$

Besteht das System aus n Elementen, so erhält man die Ausfallverteilungsdichte des Systems durch fortgesetzte Faltung der Ausfallverteilungsdichten der Elemente:

$$f(t) = f_1(t_1) * f_2(t_2) * \ldots\ldots * f_n(t_n) \qquad (19)$$

Man spricht in diesem Fall von Systemen mit Reserveelementen oder auch von kalter Redundanz. Bild 6 zeigt an einem Beispiel den Zusammenhang von F_i und F für Systeme mit verschiedener Zahl von Elementen. Von Interesse ist ein Vergleich von Bild 5 und 6; bei kalter Redundanz ist unter sonst gleichen Bedingungen die Wahrscheinlichkeit, daß das System ausfällt, immer kleiner als bei heißer Redundanz.

4.5 Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das Ausfallen eines Systems, das aus parallel und hintereinander geschalteten Elementen besteht, wird das System in Elementegruppen, die entweder nur aus parallel oder nur aus hintereinander geschalteten Elementen bestehen, zerlegt und zunächst die Ausfallwahrscheinlichkeit für die Gruppen berechnet. Wenn man nun die Gruppen als Elemente betrachtet, kann man sie wiederum zu Gruppen von parallel oder hintereinander geschalteten

Elementen zusammenfassen, dafür die Ausfallwahrscheinlichkeit berechnen usw., bis man schließlich die Ausfallwahrscheinlichkeit des Systems erhält.

Betrachten wir z.B. eine Antriebsanlage, bei der drei Dieselgeneratoren, die jeweils aus einem Dieselmotor D und Generator G bestehen, beliebig auf jeden von zwei Elektromotoren M geschaltet werden können. Die Motoren arbeiten auf ein Zahnradgetriebe Z. Der Dieselgenerator D_3-G_3 steht in Reserve und wird nur dann zugeschaltet, wenn die beiden anderen ausgefallen sind. Die Anlage wird als ausgefallen betrachtet, wenn das Schiff fahrunfähig ist. Bild 7a zeigt den logischen Aufbau dieser Anlage. Die Ausfallverteilungen F(t) (bzw. die Wahrscheinlichkeiten R(t) = 1-F(t)) der einzelnen Elemente werden durch Indizes gekennzeichnet. Z.B. bedeutet $F_{D1}(t)$ die Ausfallverteilungsfunktion für den Dieselmotor D_1. Entsprechend gilt $R_{D1}(t) = 1-F_{D1}(t)$. Der erste Schritt besteht nun darin, die Ausfallwahrscheinlichkeit für folgende Elementegruppen (sie sind in Bild 7a durch gestrichelte Linienzüge gekennzeichnet) zu berechnen:

D_1 in Reihe mit G_1 gibt Elementegruppe DG_1:

$$F_{DG1} = 1-R_{D1}\cdot R_{G1}$$

D_2 in Reihe mit G_2 gibt Elementegruppe DG_2:

$$F_{DG2} = 1-R_{D2}\cdot R_{G2}$$

D_3 in Reihe mit G_3 gibt Elementegruppe DG_3:

$$F_{DG3} = 1-R_{D3}\cdot R_{G3}$$

vergl. Gleichung (14)

M_1 parallel zu M_2 gibt Elementegruppe M_{12}:

$$F_{M12} = F_{M1} \cdot F_{M2}$$ vergl. Gleichung (15)

In Bild 7b sind diese Elementegruppen als Elemente dargestellt.

Man faßt wiederum zusammen:

DG_1 parallel zu DG_2 gibt DG_{12}: $F_{DG12} = F_{DG1} \cdot F_{DG2}$; vergl. Gleichung (15)

M_{12} in Reihe mit Z gibt $M_{12}Z$: $F_{M12Z} = 1 - R_{M12} \cdot R_Z$; vergl. Gleichung (14)

Die neuen Gruppen sind in Bild 7c als Elemente dargestellt. Neuerliches Zusammenfassen ergibt:

DG_3 als Reserve zu DG_{12} gibt DG_{123}:

$$F_{DG123} = \int_{t_1=0}^{t} \int_{t_2=0}^{t-t_1} f_1(t_1) f_2(t_2) dt_1 dt_2$$

mit $f_1(t_1) = \frac{dF_{DG3}}{dt}$ und $f_2(t_2) = \frac{dF_{DG12}}{dt}$; vergl. Gleichung (17)

Man kommt nun zu den in Bild 7d dargestellten Elementen. Für sie kann nun die Ausfallverteilung der Gesamtanlage berechnet werden:

$$F = 1 - R_{DG123} \cdot R_{M12}$$

5. Beispiele

5.1 Als erstes Beispiel soll die Sicherheit von Schiffen im Hinblick auf ihre Gefährdung durch Kollisionen untersucht werden. Das Beispiel soll einerseits dazu dienen, einige bisher nicht beachtete Zusammenhänge aufzuzeigen. Andererseits soll damit auch die Verwendung der Ausfallrate oder Intensitätsfunktion (ein Ausdruck, der für den vorliegenden Zusammenhang zweckmäßiger ist) illustriert werden.

Wir beginnen mit einer qualitativen Betrachtung der Intensitätsfunktion. Sie wird zunächst als durchschnittliche Zahl der je Zeiteinheit in eine Kollision verwickelten Schiffe, bezogen auf die Gesamtzahl der in Betrieb befindlichen Schiffe definiert und mit $\lambda_o(t)$ bezeichnet. Wir haben dafür die in Bild 8 angedeutete Zeitabhängigkeit zu erwarten. Wenn das Schiff im Hafen liegt (Bereich a) ist die Intersitätsfunktion praktisch gleich null. Beim Auslaufen steigt sie an und nimmt beim Durchfahren des hafennahen Gebiets mit seiner hohen Verkehrsdichte relativ große Werte an (Bereich b). Wenn das Schiff auf die freie See kommt, nimmt sie wieder ab (Bereich c), und bei Annäherung an den Zielhafen sind wieder ähnlich hohe Werte wie nach der Abfahrt zu erwarten (Bereich d). Die Bereiche a bis d umfassen einen Zeitraum der Größenordnung von etwa 10 Tagen. Der gesamte in diesem Zusammenhang zu betrachtende Zeitbereich ist die "natürliche Lebensdauer" eines Schiffes und hat eine Größenordnung von etwa 20 Jahren.

Wenn ein Schiff in eine Kollision verwickelt wird, besteht eine gewisse Wahrscheinlichkeit W dafür, daß es nicht untergeht (Siehe auch Wendel (1961), St. Denis (1962), Robertson (1967), Krappinger (1961). Diese Wahrscheinlichkeit kann auch als der Prozentsatz der Kollisionsfälle, bei denen ein Schiff nicht verlorengeht, gedeutet werden. Die Intensitätsfunktion für das Ereignis "Verlorengehen infolge von Kollision" ist deshalb

$$\lambda(t) = \lambda_o(t) \cdot (1-W)$$

Der Einfachheit halber wurde hier angenommen, daß W konstant ist. Es wäre denkbar, daß auch W ähnlich wie λ_o von der Zeit abhängt: In den verschiedenen Fahrtgebieten entsprechenden Zeiträumen kann u.a. die statistische Verteilung der Leckabmessungen verschieden sein, was zu der erwähnten Zeitabhängigkeit führen würde. Diese Zeitabhängigkeit könnte ohne große Schwierigkeiten auch formal berücksichtigt werden.

Mit Hilfe von Gleichung (5) können wir nun die Ausfallverteilung berechnen; im vorliegenden Fall handelt es sich dabei um die Verteilung der Zeit bis zum Verlust eines Schiffes infolge einer Kollision oder - gleichbedeutend damit - um die Wahrscheinlichkeit eines solchen Verlustes in einem bestimmten Zeitraum

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\int_o^t \lambda(t)dt\right) = 1 - \exp\left(-(1-W)\cdot\int_o^t \lambda_o(t)dt\right)$$

Praktisch wird man dabei die Zeit t in Jahren messen. Wenn man berücksichtigt, wie kurzperiodisch im Verhältnis zu dieser Zeiteinheit die Schwankungen von $\lambda_o(t)$ sind, kann man feststellen, daß es praktisch kaum einen Unterschied macht, wenn man statt $\lambda_o(t)$ einen über eine längere Zeit T gehenden Mittelwert

$$\bar{\lambda}_o = \frac{1}{T}\int_o^T \lambda_o(t)dt$$

verwendet. Diese Tatsache ist sehr wichtig: Während es kaum möglich wäre, die Funktion $\lambda_o(t)$ auf statistischem Wege zu ermitteln, ist dies für den Mittelwert $\bar{\lambda}_o$ sehr einfach: Man braucht nur festzustellen, welche Zahl n_k von einem Kollektiv von n Schiffen in T Jahren in eine Kollision verwickelt ist.

Mit diesen Angaben kann man $\bar{\lambda}_o$ abschätzen:

$$\bar{\lambda}_o = \frac{n_K}{n \cdot T}$$

Für die Ausfallverteilungsfunktion erhalten wir damit die sehr einfache Beziehung

$$F(t) = 1 - e^{-(1-W)\,\bar{\lambda}_o t} = 1 - e^{-\bar{\lambda} t}$$

wobei

$$\bar{\lambda} = (1-W) \cdot \bar{\lambda}_o$$

ist. Mit Hilfe dieser Beziehung kann nun z.B. gezeigt werden, wie sich schiffbauliche Maßnahmen (durch die ja W verändert werden kann) und wie sich nautische Vorkehrungen (durch die $\bar{\lambda}_o$ beeinflußt wird) auf die Wahrscheinlichkeit für Schiffsverluste auswirken. Bild 9 zeigt die Wahrscheinlichkeit F(t) dafür, daß ein Schiff innerhalb einer Zeit t infolge Kollision verlorengeht, in Abhängigkeit von W und von $\bar{\lambda}_o \cdot t$.

Wenn man $\bar{\lambda}_o$ als mittlere Häufigkeit je Zeit von Feindeinwirkungen interpretiert und W auf Grund der durch Feindeinwirkung zu erwartenden Verteilung der Beschädigungen berechnet, kann man aus Bild 9 auch einige für einen Kriegsfall wichtige Informationen entnehmen.

Mit den bisher gemachten Angaben und unter Benutzung von Gleichung (10) kann man auch die mittlere Zeit t_{L1} bis zum Untergang eines Schiffes berechnen. Obwohl es sich dabei um eine fiktive Zeit handelt, die viel größer sein kann als die natürliche Lebensdauer des Schiffes, kann man damit u.U. einen besseren intuitiven Zusammenhang zwischen einer Zahl und dem, was man als sicher empfindet, herstellen, als wenn man die

Wahrscheinlichkeit als Maßzahl für die Sicherheit benutzt. Mit Hilfe von Gleichung (10) findet man

$$t_{L1} = \int_0^\infty t\bar{\lambda}\, e^{-\bar{\lambda} t}\, dt = \frac{1}{\bar{\lambda}_0} \cdot \frac{1}{1-W}$$

Bild 10 zeigt t_{L1} als Funktion von $\bar{\lambda}_0$ und W.

Aus Platzgrpnden kann ich hier leider nicht näher auf all die Folgerungen, die man in verschiedenen praktischen Situationen aus Bild 9 und 10 ziehen kann, eingehen. Da aber einige recht naheliegen, hoffe ich, daß dies nicht als allzu großer Mangel empfunden werden wird.

5.2 Häufig wird die Konstrukitionsregel vertreten, daß man die einzelnen Bauteile einer Anlage alle gleich sicher machen soll. Wir wollen in diesem Beispiel untersuchen, ob diese Regel rational begründbar ist. Dazu betrachten wir eine Maschine, für die sechs Wälzlager gebraucht werden. Zwei der Lager können aus Platzgründen nur für eine nominelle Lebensdauer [7] von T_n = 5000 Stunden ausgelegt werden, die übrigen Lager könnten auch für eine Lebensdauer von 10 000 Stunden bemessen werden.

Die Ausfallverteilungsfunktion der Lager ist:

Für $T_n = 5\cdot 10^3 h$: $F_1(t) = 1 - \exp(-0.0125\ t^{1,3})$

Für $T_n = 10\cdot 10^3 h$: $F_2(t) = 1 - \exp(-0.005\ t^{1,3})$

(dabei ist t in $10^3 h$ einzusetzen)

---

[7] Unter der nominellen Lebensdauer T_n eines Wälzlagers versteht man die Lösung der Gleichung $F(T_n) = 0{,}1$, wobei F(t) die Ausfallverteilung der Lager ist.

Wenn wir der erwähnten Konstruktionsregel folgen und nur Lager mit der kleineren Lebensdauer verwenden, so finden wir als Ausfallverteilung $F_A(t)$ für die Maschine (alle Teile der Maschine außer den Lagern werden dabei als vollständig sicher angenommen, d.h. für sie ist $F(t) = 0$ für alle t):

$$F_A(t) = (1 - F_1(t))^6 \;; \qquad \text{vergl. Gleichung (13)}$$

Wenn wir der Konstruktionsregel nicht folgen und vier der Lager größer dimensionieren, so erhalten wir als Ausfallverteilung für die Maschine

$$F_B(t) = (1 - F_1(t)^2 \cdot (1 - F_2(t))^4 \;;$$

vergl. Gleichung (13)

Nach Einsetzen von Zahlenwerten erhält man für verschiedene Betriebszeiten t die in Tafel 1 gezeigten Ausfallwahrscheinlichkeiten.

Tafel 1

	Betriebszeit t(h)		
Fall	$5 \cdot 10^3$	$7 \cdot 10^3$	$10 \cdot 10^3$
A: Alle Lager für $T_n = 5 \cdot 10^3 h$ ausgelegt: $F_A(t)$ =	0,47	0,63	0,78
B: Zwei Lager für $T_n = 5 \cdot 10^3 h$ und vier Lager für $T_n = 10 \cdot 10^3 h$ ausgelegt: $F_B(t)$ =	0,32	0,45	0,6

Wenn man der Regel, alle Teile einer Anlage gleich sicher zu machen folgt, erhält man wesentlich größere Ausfallwahrscheinlichkeiten. Daher sollte man, wenn man Wert auf möglichst große Sicherheit legt, alle Teile so sicher wie möglich machen, auch wenn dadurch etwas höhere Kosten entstehen.

5.3 Es soll entschieden werden, welche der beiden Antriebsanlagen in Bild 11 günstiger im Hinblick auf die Sicherheit ist. Die Anlagen sollen dabei als ausgefallen gelten, wenn keine Leistung mehr auf die Antriebswelle gebracht werden kann.

Es sei:

$F_D = 0,04$ Ausfallwahrscheinlichkeit für einen Dieselmotor (einschließlich aller für den Betrieb des Motors notwendigen Aggregate)

$F_G = 0,02$ Ausfallwahrscheinlichkeit für einen Generator

$F_M = 0,02$ Ausfallwahrscheinlichkeit für einen E-Motor (bei F_G und F_M sind Lüfter, Ölpumpe, Schaltaggregate etc. mit berücksichtigt).

$F_Z = 0,03$ Ausfallwahrscheinlichkeit für das Zahnrad-Getriebe.

Die interessierende Betriebszeit ist in allen Fällen gleich und wurde deshalb nicht angeschrieben.

Unter Benutzung der Gleichungen (13) bis (16) können wir folgende Wahrscheinlichkeiten berechnen (siehe auch die logischen Schemata in Bild 11):

Wahrscheinlichkeit, daß ein Dieselmotor oder der dazugehörende Generator ausfällt $F_{DG} = F_D + F_G - F_D \cdot F_G$

Wahrscheinlichkeit, daß beide Dieselgeneratoren ausfallen $F_{DG+DG} = F_{DG}^2$

Wahrscheinlichkeit, daß beide E-Motoren ausfallen $F_{M+M} = F_M^2$

Wahrscheinlichkeit, daß die in Bild 11a gezeigte Anlage ausfällt $F_a = F_{DG}^2 + F_M - F_{DG}^2 \cdot F_M$

Wahrscheinlichkeit, daß die in Bild 11b gezeigte Anlage ausfällt

$$F_b = F_{DG}^2 + F_M^2 + F_Z - F_{DG}^2 \cdot F_M^2 - F_M^2 F_Z - F_{DG}^2 F_Z + F_{DG}^2 F_M^2 F_Z$$

Nach Einsetzen der Zahlenwerte erhält man

$$F_a = 0{,}0234$$

$$F_b = 0{,}0338$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit, daß die Anlage nach Bild 11b ausfällt, ist wesentlich größer als die für den Ausfall der Anlage nach Bild 11a. Die Bedingung dafür, daß die Anlage nach Bild 11b sicherer als die nach Bild 11a ist, lautet

$$F_Z < \frac{F_M}{1 + F_M}$$

Für das vorliegende Beispiel ist diese Bedingung offensichtlich nicht erfüllt.

6. Bereiche von "ungünstigen Ereignissen"

6.1 Die von einer Stromversorgungsanlage zu liefernde Leistung sei auf drei Generatoren (mit jeweils unabhängigem Primärantrieb) aufgeteilt. Da die Gesamtleistung notwendig ist, soll der Generatorsatz als ausgefallen gelten, wenn einer seiner Generatoren ausfällt. Wir nehmen nun an, daß - - um die Sicherheit der Stromversorgung zu erhöhen - ein weiterer Satz von z.B. vier Generatoren, der insgesamt ebenfalls die volle benötigte Leistung abgeben kann, zugleich mit dem ersten Satz betrieben wird.

Jeder Satz für sich betrachtet gilt unter den gemachten Annahmen als ausgefallen, wenn einer seiner Generatoren ausfällt. Es wäre aber falsch, anzunehmen, daß auch die Gesamtanlage ausfallen muß, wenn beide Generatorsätze ausfallen. Die in Betrieb verbleibenden Generatoren beider Sätze können dabei ~~aber~~ durchaus noch mehr als die volle Leistung eines Satzes aufbringen. Für das Versagen der Gesamtanlage kommt es also auf die Summe der Leistungen der nicht ausgefallenen Generatoren beider Sätze an. Es genügt deshalb nicht, für einen Generatorsatz nur die zwei Möglichkeiten: ausgefallen oder nicht ausgefallen zu betrachten. Man muß vielmehr die verschiedenen Grade des Ausfallens - oder mit anderen Worten verschiedene ungünstige Ereignisse - berücksichtigen. Nach der in 4.1 eingeführten Definition handelt es sich bei den Generatorsätzen also um Teilsysteme.

Ereignisse (von denen mehrere oder auch jedes für sich einen bestimmten Ausfallgrad darstellt) sind: Generator G_1 ausgefallen, G_2 ausgefallen usw., G_1 und G_2 ausgefallen, G_1 und G_3 ausgefallen usw. und G_1 und G_2 und G_3 ausgefallen. Wenn z.B. die Leistung von G_1 und G_2 gleich groß ist, dann stellt "G_1 ausgefallen" und "G_2 ausgefallen" den gleichen Ausfallgrad dar.

In der folgenden Tafel 2 sind für den Generatorsatz 1 die möglichen Ausfälle und die dabei noch verfügbar bleibenden Leistungen zusammengestellt. Die Tabelle enthält auch Zahlenwerte, denen folgende Annahmen zugrunde liegen: Die Leistung des gesamten Satzes ist 100%, die von Generator G_1 ist $N_1 = 25\%$, von G_2 beträgt sie $N_2 = 25\%$ und G_3 leistet $N_3 = 50\%$. Man kann nun die Wahrscheinlichkeiten W dafür berechnen, daß einzelne Generatoren oder Kombinationen von solchen ausfallen. Man benötigt dazu die Ausfallverteilungsfunktionen $F_i(t)$ für die einzelnen Generatoren. Näheres über die Berechnung dieser Wahrscheinlichkeiten wird im folgenden Absatz 6.2 gesagt. Da der Ausfall eines Generators oder einer Kombination von solchen jeweils einer bestimmten verfügbar bleibenden Leistung entspricht, sind die Wahrscheinlichkeiten W für bestimmte Generatorausfälle gleichzeitig auch die Wahrscheinlichkeiten (bzw. Teilwahrscheinlichkeiten) dafür, daß bestimmte Leistungen verfügbar sind. Diese Wahrscheinlichkeiten sind ebenfalls in die Tafel 2 eingetragen. Man kann nun die Verteilung der verfügbaren Leistung angeben. Z.B. ist die Leistung $N = 0$ mit der Wahrscheinlichkeit $q_0 = W_1$, die Leistung $N = 25\%$ mit der Wahrscheinlichkeit $q_{25} = W_2 + W_3$ usw. verfügbar. Die Leistungsverteilung ist in Bild 12 dargestellt. Es sei hier noch darauf hingewiesen, daß die q_N eine Funktion der Betriebszeit t sind, da sie ja aus den Ausfallverteilungen $F_i(t)$ berechnet worden sind. Für jede Zeit t erhält man eine andere Verteilung der verfügbaren Leistung; im Laufe der Zeit nehmen die Wahrscheinlichkeiten für die hohen Leistungen

Tafel 2

1 Ausgefallene Generatoren	2 Verbleibende Leistung	3 Wahrscheinlichkeit, daß die in Spalte 1 aufgeführten Generatoren ausfallen oder daß die in Spalte 2 aufgeführte Leistung verfügbar bleibt
G_1 und G_2 und G_3	$N = 0$	$W_1 = F_1F_2F_3$
G_2 und G_3	$N = N_1 = 25\%$	$W_2 = F_2F_3(1-F_1)$
G_1 und G_3	$N = N_2 = 25\%$	$W_3 = F_1F_3(1-F_2)$
G_1 und G_2	$N = N_3 = 50\%$	$W_4 = F_1F_2(1-F_3)$
G_3	$N = N_1 + N_2 = 50\%$	$W_5 = F_3(1-F_1)(1-F_2)$
G_1	$N = N_2 + N_3 = 75\%$	$W_6 = F_1(1-F_2)(1-F_3)$
G_2	$N = N_1 + N_3 = 75\%$	$W_7 = F_2(1-F_1)(1-F_3)$
kein Generator ausgefallen	$N = N_1 + N_2 + N_3 = 100\%$	$W_8 = (1-F_1)(1-F_2)(1-F_3)$

ab und für die niedrigen zu. Für $t = 0$ ist $p_{100} = 1$ [8)] und alle anderen $p_N = 0$, für $t \rightarrow \infty$ geht $p_o \rightarrow 1$, alle anderen gehen gegen Null.

Durch ganz ähnliche Überlegungen kann man auch die Leistungsverteilung für den zweiten Generatorsatz bestimmen. Zur Unterscheidung bezeichnen wir die verfügbare Leistung hier mit N^* und ihre Wahrscheinlichkeit mit q_N^*. Bild 13 zeigt ein Beispiel für eine solche Verteilung. Es wurden dabei vier Generatoren gleicher Leistung angenommen. Ihre Gesamtleistung ist gleich groß wie beim ersten Satz, die prozentualen Angaben beziehen sich daher auf denselben Wert.

Für uns kommt es nun auf die gesamte verfügbare Leistung von beiden Generatorsätzen an. Es ist dies die Summe N_s von den zwei zufälligen Variablen N und N^*. Die Verteilung der Summenvariablen ergibt sich durch Faltung der Verteilung der Summanden. Die Bedeutung dieser Operation wird durch Bild 14 veranschaulicht. Mit seiner Hilfe findet man leicht die Wahrscheinlichkeiten p_N für die Werte, die N_s annehmen kann. Die Verteilung von N_s zeigt Bild 15.

Die Wahrscheinlichkeit für den Ausfall der Gesamtanlage kann nun leicht berechnet werden. Sie ist gleich der Wahrscheinlichkeit für verfügbare Leistungen N_s, die kleiner als 100% sind:

$$W\left\{N_s < 100\%\right\} = \sum_{N_s = 0}^{N_s < 100\%} p_N = F_{Anlage}(t) \qquad (20)$$

---

8) Es ist dabei vorausgesetzt, daß die Anlage beim Beginn des Betriebes funktioniert!

Entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Stromversorgungsanlage funktionsfähig ist (d.h., daß sie mindestens 100% Leistung abgeben kann) gleich

$$W\left\{N_s \geqq 100\%\right\} = \sum_{N_s \geqq 100\%}^{N_s = 200\%} p_N = 1 - F_{Anlage}(t) = R_{Anlage}(t) \qquad (21)$$

Es sei noch bemerkt, daß man hier auch auf anderem Wege zu demselben Ergebnis hätte kommen können (siehe den folgenden Absatz 6.2). Der hier eingeschlagene Weg wurde jedoch gewählt, weil die dabei angestellten Überlegungen den Ausgangspunkt für einige der folgenden Untersuchungen (Absatz 6.3) ergeben.

6.2 Im vorstehenden Abschnitt war die Aufgabe zu lösen, die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, mit der bestimmte Elemente oder Kombinationen von solchen ausfallen, wenn die Ausfallverteilungen der Elemente gegeben sind. Wenn mit $E_1, E_2 \dots E_n$ die Ereignisse bezeichnet werden, daß die Elemente 1, 2 ... n ausfallen und mit $\bar{E}_1, \bar{E}_2 \dots \bar{E}_n$ die dazu komplementären Ereignisse (die darin bestehen, daß die Elemente nicht ausfallen), kann man mit den Ausfallverteilungsfunktionen der Elemente $F_1, F_2 \dots F_n$ und mit $R_1 = 1 - F_1$, $R_2 = 1 - F_2 \dots R_n = 1-F_n$ die gesuchten Wahrscheinlichkeiten wie folgt anschreiben :

$$W\left\{E_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3 \dots \bar{E}_n\right\} = F_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \dots R_n$$

$$W\left\{\bar{E}_1, E_2, \bar{E}_3 \dots \bar{E}_n\right\} = F_2\, R_1\, R_3 \dots R_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (22)$$

$$W\left\{E_1, E_2, \bar{E}_3, \bar{E}_4 \dots \bar{E}_n\right\} = F_1 \cdot F_2 \cdot R_3 \cdot R_4 \dots R_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$W\left\{E_1, E_2 \dots E_{n-1}, \bar{E}_n\right\} = F_1\, F_2 \dots F_{n-1}\, R_n$$

Nach dieser Methode hätte man bei dem Beispiel im vorstehenden Absatz 6.1 die Wahrscheinlichkeiten für den Ausfall aller jener Kombinationen von Generatoren aus beiden Sätzen berechnen können, für die die Summe der Leistung den Wert 100% erreicht oder überschreitet. Man hätte derart die in Bild 15 links von N_s = 100% eingetragenen Wahrscheinlichkeiten gefunden.

Wenn die Elemente im Hinblick auf ihre Funktion alle die gleichen Eigenschaften haben (wenn es sich z.B. um Generatoren gleicher Leistung handelt; ihre Ausfallverteilungsfunktionen können aber verschieden sein), sind die Ausfälle aller einzelnen Elemente, aller Zweierkombinationen, Dreierkombinationen usw. gleichwertig. Man kann dann folgende Wahrscheinlichkeiten berechnen:

$$W\left\{\text{genau 1 Element von n Elementen fällt aus}\right\} =$$

$$= W\left\{E_1, \overline{E}_2, \overline{E}_3 \ldots \overline{E}_n\right\} + W\left\{\overline{E}_1, E_2, \overline{E}_3, \overline{E}_4 \ldots \overline{E}_n\right\} +$$

$$+ \ldots + W\left\{\overline{E}_1 \overline{E}_2, \ldots \overline{E}_{n-1} E_n\right\} =$$

$$= F_1 R_2 R_3 \ldots R_n + F_2 R_1 R_3 R_4 \ldots R_n + \ldots F_n R_1 R_2 \ldots R_{n-1}$$

$$W\left\{\text{genau 2 Elemente von n Elementen fallen aus}\right\} =$$

$$= W\left\{E_1, E_2, \overline{E}_3 \ldots \overline{E}_n\right\} + W\left\{E_1, E_3, \overline{E}_2 \overline{E}_4 \ldots \overline{E}_n\right\} +$$

$$+ \ldots W\left\{\overline{E}_1 \overline{E}_2 \ldots \overline{E}_{n-2}, E_{n-1}, E_n\right\} =$$

$$= F_1 F_2 R_3 \ldots R_n + F_1 F_3 R_2 R_4 \ldots R_n + \ldots F_{n-1} F_n R_1 R_2 \ldots R_{n-2}$$

....

$$W\left\{j \text{ Elemente von n Elementen fallen aus}\right\} =$$

$$= W\left\{E_1, E_2 \ldots E_j, \overline{E}_{j+1} \ldots \overline{E}_n + \ldots\right\}$$

$$+ W\left\{E_1, E_2 \ldots E_{j-1}, E_{j+1}, \overline{E}_j, \overline{E}_{j+2} \ldots \overline{E}_n\right\} + \ldots$$

$$W\left\{E_{n-j+1}, E_{n-j+2}, \ldots E_n, \overline{E}_1, \overline{E}_2 \ldots \overline{E}_{n-j}\right\} =$$

$$= F_1F_2 \ldots F_jR_{j+1} \ldots R_n + F_1 \ldots + F_1F_2 \ldots$$

$$\ldots F_{j-1}F_{j+1}R_jR_{j+2} \ldots R_n + \ldots F_{n-j+1}F_{n-j+2} \ldots$$

$$\ldots F_nR_1R_2 \ldots R_{n-j} \qquad (23)$$

Noch einfacher wird es, wenn die Elemente auch alle die gleiche Ausfallverteilungsfunktion F(t) haben. Die Zahl j der Ausfälle von n Elementen ist dann nach einer Binomialverteilung verteilt:

$$W\left\{j \text{ Elemente von n Elementen fallen aus}\right\} =$$

$$= \binom{n}{j} F^j \, (1-F)^{n-j} \qquad (24)$$

Diese Wahrscheinlichkeiten sind als Funktion von n,j und F tabelliert, was man sich bei vielen Aufgaben zur Einsparung von Rechenarbeit zunutze machen kann.

6.3 Man kann zeigen, daß für große Werte von n die Binomialverteilung der Werte j gut durch eine Normalverteilung angenähert werden kann (Satz von Moivre). Auch wenn man die Voraussetzung, auf Grund derer wir die Binomialverteilung gefunden haben, fallen läßt, kann bei einer großen Gesamtzahl von Elementen die Verteilung der Zahl der in Betrieb verbleibenden Elemente durch eine Normalverteilung angenähert werden (zentraler Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung). Letztlich kommt es uns jedoch nicht auf die Zahl der ausgefallenen Elemente an, sondern auf eine Eigenschaft x des Systems, die eine Funktion der Zahl der ausgefallenen Elemente ist. (In dem in Absatz 6.1 behandelten Beispiel war x die verfügbare Leistung). Aus der Normalverteilung der Zahl der ausgefallenen Elemente wäre es möglich, die Verteilung von x zu berechnen. Bei komplizierten Systemen (bei denen die Zahl der Elemente n sehr groß ist), ist aber nicht nur die Ausfallverteilung der Elemente häufig unbekannt, es ist oft auch unmöglich, alle die einzelnen Elemente (z.B. Schichten eines Transistors und dgl.) anzugeben. Dagegen kann es möglich sein, die Verteilung der die Eigenschaft des Systems angebenden Größe x unmittelbar zu bestimmen. Wenn sich die Verteilung von x über die Betriebszeit nur wenig ändert, ist diese kennzeichnend für das System.

In diesem Zusammenhang tritt die Frage auf, was man über das Zusammenarbeiten von solchen Systemen (die wir in einem solchen Fall als Teilsysteme bezeichnen wollen) aussagen kann. Um ein Beispiel vor Augen zu haben, betrachten wir folgendes System: Eine Größe y^* wird als Mittel von zwei anderen Größen x_1^* und x_2^* gebildet. (Siehe Bild 16). Die beiden Teilsysteme, in denen x_1^* und x_2^* erzeugt wird, liefern aber nicht die richtigen Werte $\bar{x}_1$ und $\bar{x}_2$, sondern Werte, die sich um x_1 u. x_2 gegenüber den richtigen Werten unterscheiden, d.h., es ist $x_1^* = \bar{x}_1 + x_1$ und $x_2^* = \bar{x}_2 + x_2$. x_1 und x_2 seien verteilt, ihre Verteilungen seien bekannt. Für die resultierende Größe y^* kann man dann schreiben:

$$y^* = \frac{x_1^* + x_2^*}{2} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}{2} + \frac{x_1 + x_2}{2} = \bar{y} + y \qquad (25)$$

Das Gesamtsystem kann z.B. nur dann funktionsfähig sein, wenn y zwischen zwei bestimmten Grenzwerten y_u und y_o liegt. Unsere Aufgabe besteht nun darin, die Wahrscheinlichkeit dafür, daß $y_u < y \leqq y_o$ ist, festzustellen. Es sind auch Fälle denkbar, daß nur das Überschreiten oder nur das Unterschreiten von Grenzwerten unzulässig ist. In solchen Fällen besteht die Aufgabe darin, die Wahrscheinlichkeit für $y > y_u$ bzw. $y < y_o$ zu berechnen. Die Kenntnis dieser Wahrscheinlichkeiten läßt gewisse Schlüsse zu. Z.B. wäre von zwei verschiedenen Gesamtsystemen dasjenige vorzuziehen, bei dem diejenige der erwähnten Wahrscheinlichkeiten, auf die es in dem betreffenden Fall ankommt, größer wäre; oder man kann feststellen, ob sich mit zwei gegebenen Teilsystemen die Funktionsfähigkeit des Gesamtsystems mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit erreichen läßt und dgl. mehr.

y ist die halbe Summe der zwei zufälligen Variablen x_1 und x_2. Die Verteilungsdichte der Summe z von x_1 und x_2 $(z = 2y = x_1 + x_2)$ kann durch Falten der Verteilungen von x_1 und x_2 gefunden werden:

$$\varphi_z(z) = \varphi_1(x_1) * \varphi_2(x_2) \tag{26}$$

Die Verteilungsdichte von y ist dann (es muß $\varphi_z(z)\ d\ (z) = \varphi(y)\ dy$ sein!):

$$\varphi(y) = \varphi_z\ (2y) \left| \frac{dz}{dy} \right| = 2\ \varphi_z(2y) \tag{27}$$

Damit kann man nun die gesuchten Wahrscheinlichkeiten berechnen:

$$
\begin{aligned}
W\left\{y_u < y_* \leqq y_o\right\} &= \int_{y_u}^{y_o} \varphi(y)dy \\
W\left\{y > y_u\right\} &= \int_{y_u}^{\infty} \varphi(y)dy \qquad (28) \\
W\left\{y < y_o\right\} &= \int_{-\infty}^{y_o} \varphi(y)dy
\end{aligned}
$$

Ganz ähnlich kann man vorgehen, wenn y^* durch eine andere Verknüpfung von x_1^* und x_2^* definiert ist. Aus Platzgründen will ich hier auf Beispiele verzichten und mich mit dem Hinweis begnügen, daß das in diesem Absatz entwickelte mathematische Modell bei Regeleinrichtungen, Zielgeräten und dgl. anwendbar ist: In einem Teilsystem wird z.B. ein Meßwert erfaßt und daraus ein Verstell- (oder Einstell-) Kommando x_i gebildet. Aus den x_i der Teilsysteme (die z.B. elektrische Spannungen, Verschiebungen, Drehungen sein können) wird dann eine die gesamte Verstellung darstellende Größe y zusammengesetzt.

7. Theorie und Erfahrung

Der auf Grund subjektiver Erfahrung überschaubare Horizont ist bei Sicherheits- und Zuverlässigkeitsfragen, wie sie in der Schiffstechnik auftreten, meist sehr eng begrenzt. Von solchen Erfahrungen allein kann man deshalb auch nicht die Einsicht erwarten, die notwendig wäre, um im Hinblick auf die Sicherheit optimale Entscheidungen treffen zu können. An Hand einiger einfacher Beispiele soll in diesem Abschnitt gezeigt werden, wie man mit Hilfe der Theorie zu weitergehenden Einsichten und damit letztlich zu einer besseren Ausnutzung der Erfahrung kommen kann.

7.1 Wir wollen uns zunächst mit der Frage beschäftigen, warum man von mehreren Objekten unter sonst gleichen Verhältnissen das mit der kleinsten Ausfallwahrscheinlichkeit wählen sollte. Wenn es sich um jeweils sehr große Zahlen von Objekten handeln würde, könnte diese Frage sehr leicht beantwortet werden: Man würde feststellen, daß man bei den Objekten mit der kleinsten Ausfallwahrscheinlichkeit den kleinsten Prozentsatz von Ausfällen erhält. Diese handgreifliche Erfahrung genügt als Grund, den Objekten mit der geringsten Ausfallwahrscheinlichkeit den Vorzug zu geben. Im Schiffbau geht es aber meist nicht um große Zahlen von jeweils gleichen Objekten, vielmehr hat man im allgemeinen von mehreren möglichen Objekten eines auszuwählen. Die Folgen einer bestimmten Wahl kann man hier nicht unmittelbar "erfahren": Ganz gleich welches Objekt [9] man wählt, für jedes besteht die Möglichkeit, daß es in dem betrachteten Zeitraum ausfällt; das Ausfallen ist in jedem Fall eine Zufallserscheinung und man kann keineswegs die Möglichkiet ausschließen, daß - wenn man einmal zwei Objekte realisiert - dasjenige mit der kleineren Ausfallwahrscheinlichkeit ausfällt und das andere nicht. Auf Grund solcher Erfahrungen scheint es also, als ob die Ausfallwahrscheinlichkeit ohne praktische Konsequenzen wäre und es sich nicht lohnen würde, sich damit zu beschäftigen.

Daß dieses nicht so ist, kann mit Hilfe eines Grenzwertsatzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der eine spezielle Form des starken Gesetzes der großen Zahlen ist, gezeigt werden. (Eine etwas weniger weitgehende Aussage könnte man unter Benutzung des schwachen Gesetzes der großen Zahlen in einer schon von Poisson angegebenen Form machen). Auf unser Problem angewandt, kann man den erwähnten Grenzwertsatz etwa

---

[9] Unseren Überlegungen liegt die realistische Annahme zugrunde, daß die Ausfallwahrscheinlichkeiten in allen Fällen nicht allzu groß sind.

wie folgt formulieren: Im Laufe der Zeit fallen (etwa im Rahmen einer Werft, oder eines Entwurfsbüros usw.) eine große Zahl von Entscheidungen zwischen Objekten mit verschiedener Ausfallwahrscheinlichkeit an. Die Entscheidungen können sich dabei in jedem Einzelfall auf Objekte für einen anderen Zweck beziehen; es sind aber auch mehrere Entscheidungen zwischen Objekten für den gleichen Zweck zugelassen. Die Ausfallwahrscheinlichkeit des im i-ten Falle gewählten Objektes sei p_i ($i = 1,2 \ldots n$). Die Zahl der Ausfälle bei n gewählten Objekten sei r. Das starke Gesetz der großen Zahlen besagt nun, daß die relative Zahl der Ausfälle r/n (man könnte auch sagen, der prozentuale Anteil an Mißerfolgen) fast sicher [10] gegen das arithmetische Mittel der Ausfallwahrscheinlichkeiten $\overline{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i$ konvergiert:

$$W\left\{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{n} - \overline{p}\right) = 0\right\} = 1 \qquad (29)$$

Wir sehen, daß die relative Häufigkeit der Ausfälle nur dann ein Minimum wird, wenn in jedem Einzelfall das Objekt mit der jeweils kleinsten Ausfallwahrscheinlichkeit gewählt wird. Nur auf diese Weise kann man also auf lange Sicht das günstigste Verhältnis von Erfolgen zu Mißerfolgen erreichen.

Von besonderer Bedeutung ist noch folgende Feststellung, die wir auf Grund vorstehender Überlegungen machen können: Es kommt bei den Einzelentscheidungen nicht auf die genaue Kenntnis der Ausfallwahrscheinlichkeiten der betrachteten Objekte an, sondern nur auf ihre relative Reihung entsprechend der Größe ihrer Ausfallwahrscheinlichkeiten. Da in vielen Fällen die Reihung von Systemen nach ihrer Ausfallwahrschein-

---

10) Näheres über "fast sichere Konvergenz" oder "Konvergenz mit Wahrscheinlichkeit" ist in den im Schrifttumsverzeichnis angeführten Lehrbüchern der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu finden.

lichkeit nicht von den Ausfallwahrscheinlichkeiten der Elemente, aus denen die Systeme zusammengesetzt sind, abhängt, genügen oft auch recht grobe Schätzungen der Ausfallwahrscheinlichkeiten der Elemente, um das angestrebte Ziel zu erreichen. Daß es vorteilhaft oder sogar notwendig ist, mit Hilfe theoretischer Überlegungen von den Ausfallwahrscheinlichkeiten der Elemente auf die Ausfallwahrscheinlichkeit von Systemen zu schließen und nicht unmittelbare Schätzungen der Ausfallwahrscheinlichkeit der Systeme selbst zu verwenden, soll in den beiden folgenden Absätzen gezeigt werden.

7.2 Wir betrachten zunächst fünf gleiche Objekte, bei denen die Wahrscheinlichkeit, daß sie in einer bestimmten Zeit ausfallen, gleich p ist. Da jedes einzelne Objekt ausfallen kann, ist es durchaus möglich (wenn auch wenig wahrscheinlich), daß alle fünf Objekte ausfallen. Es ist aber auch möglich, daß keines der Objekte ausfällt oder daß eins, zwei, drei oder vier ausfallen. Die Aussage über das, was passieren wird, kann daher nur eine Wahrscheinlichkeitsaussage sein. Die Wahrscheinlichkeit, daß von n Objekten, die alle die Ausfallwahrscheinlichkeit p haben, genau x Objekte ausfallen, ist (vergl. auch Gleichung (24) in Abschnitt 6):

$$b\,(x,n,p) = \binom{n}{x} p^{x}(1-p)^{n-x} \qquad (30)$$

Diese Verteilung (es handelt sich um die Binomialverteilung) ist in Bild 17 für p = 0,1 und p = 0,2 und den hier angenommenen Fall von n = 5 dargestellt.

Praktisch stehen wir jedoch meist vor der umgekehrten Situation: Wir können feststellen, daß von n gleichen Objekten in einem bestimmten Zeitraum x Objekte (x = 0,1 ... n) ausgefallen sind und wollen auf Grund dieser Erfahrung auf die Ausfallwahrscheinlichkeit p dieser Objekte schließen. Daß von n Objekten x ausfallen, kann bei verschiedenen

Ausfallwahrscheinlichkeiten der Objekte vorkommen. Wir können deshalb dem beobachteten Ergebnis (x Objekte von n Objekten ausgefallen) keine bestimmte Ausfallwahrscheinlichkeit p zuordnen. Wir können aber einen Bereich für p angeben, dessen Grenzen p_u und p_o so gewählt sind, daß die Wahrscheinlichkeit, daß p außerhalb dieser Grenzen liegt [11], klein ist.

Um den oberen Grenzwert zu bestimmen, stellen wir folgende Überlegungen an: Wäre die Ausfallwahrscheinlichkeit bekannt, dann könnten wir die Wahrscheinlichkeit, daß von n Objekten x oder weniger Objekte ausfallen, berechnen. (Die zufällige Variable ξ bedeutet die Zahl der Ausfälle):

$$W\left\{\xi \leqq x \mid p\right\} = \sum_{0}^{x} \binom{n}{\xi} p^{\xi}(1-p)^{n-\xi} \qquad (31)$$

Diese Wahrscheinlichkeit wird um so kleiner, je größer p ist. Wenn wir $p = p_o$ nun so wählen, daß $W\left\{\xi \leqq x \mid p_o\right\}$ den sehr kleinen Wert $\alpha/2$ annimmt, dann können wir wie folgt argumentieren: Wäre p_o der richtige Wert, dann wäre es sehr unwahrscheinlich, daß gerade x Objekte ausfallen. Wir nehmen nun an, daß wir es nicht mit einem so unwahrscheinlichen Ereignis zu tun haben, sondern daß vielmehr der gewählte Wert p_o (oder auch größere Werte für die Ausfallwahrscheinlichkeit) falsch ist. Die Wahrscheinlichkeit, daß wir uns bei dieser Annahme irren, ist genau $\alpha/2$.

Auf ähnliche Weise ermitteln wir den unteren Grenzwert p_u: Wenn p_u so bestimmt wird, daß $W\left\{\xi \geqq x \mid p_u\right\}$ nur die kleine Wahrscheinlichkeit $\alpha/2$ hat, dann können wir annehmen, daß die Ausfallwahrscheinlichkeit nicht gleich p_u oder kleiner

---

11) Exakter müßte man sagen, daß p von dem Bereich nicht überdeckt wird.

ist; denn wäre sie p_u, dann wäre es sehr unwahrscheinlich, daß wir gerade x Ausfälle beobachtet haben. Die Wahrscheinlichkeit, uns mit dieser Annahme zu irren, ist wieder $\alpha/2$.

Wenn wir nun zusammenfassend annehmen, daß die wirkliche Ausfallwahrscheinlichkeit irgendeinen Wert zwischen p_u und p_o hat, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß wir uns mit dieser Aussage irren, gleich α (α heißt deshalb Irrtumswahrscheinlichkeit). Wir können auch sagen, daß die voraussetzungsgemäß ziemlich große Wahrscheinlichkeit $\beta = 1 - \alpha$ dafür besteht, daß der durch p_u und p_o begrenzte Bereich die wirkliche Ausfallwahrscheinlichkeit überdeckt. Den durch p_u und p_o begrenzten Bereich nennt man Konfidenzbereich zum Konfidenzniveau β.

Zur Berechnung von p_u und p_o sind die bisher benutzten Beziehungen

$$\begin{aligned} W\left\{\xi \leqq x \mid p_o\right\} &= \sum_{0}^{x} \binom{n}{\xi} p_o^{\xi} (1 - p_o)^{n-\xi} = \alpha/2 \\ W\left\{\xi \geqq x \mid p_u\right\} &= \sum_{x}^{n} \binom{n}{\xi} p_u^{\xi} (1 - p_u)^{n-\xi} = \alpha/2 \end{aligned} \tag{32}$$

nicht sehr praktisch. Es kann gezeigt werden, daß man mit den folgenden Beziehungen zu den gleichen Ergebnissen kommt:

$$\begin{aligned} \int_{p_o}^{1} \left| \frac{dW\{\xi \leqq x \mid p\}}{dp} \right| dp &= \frac{\alpha}{2} \\ \int_{0}^{p_u} \left| \frac{dW\{\xi \geqq x \mid p\}}{dp} \right| dp &= \frac{\alpha}{2} \end{aligned} \tag{33}$$

Bild 18 zeigt auf Grund vorstehender Beziehungen berechnete Bereichsgrenzen p_u und p_o für verschiedene Verhältnisse $\frac{x}{n}$, Werte von n und für $\alpha = 0{,}1$ und $0{,}02$. Innerhalb dieser

Bereiche sind die richtigen (uns nicht bekannten) Werte der Ausfallwahrscheinlichkeit p mit der Wahrscheinlichkeit $\beta = 1 - \alpha$ zu erwarten, wenn wir beobachtet haben, daß x von n Objekten ausgefallen sind. Dem Bild kann man entnehmen, daß man die auf Grund der Beobachtung einer kleinen Anzahl von Objekten gewonnenen Ergebnisse recht vorsichtig interpretieren muß. Wenn wir z.B. feststellen, daß von fünf Objekten in einer vorgegebenen Zeit keins ausfällt, dürfen wir nicht schließen, daß die Ausfallwahrscheinlichkeit dieser Objekte sehr klein oder gar Null wäre. Wir können nur sagen, daß sie ziemlich sicher kleiner als etwa 0,6 ist.

Damit kann auch das am Ende von Absatz 1. Gesagte näher begründet werden: Im allgemeinen wird es möglich sein, die Ausfallwahrscheinlichkeit von Elementen enger einzugrenzen als die von Systemen, weil die Elemente häufiger vorkommen. Wenn wir dann noch feststellen können, daß sich bei Variation der Ausfallwahrscheinlichkeiten der Elemente innerhalb dieser Grenzen die Reihung der zu beurteilenden Systeme nach ihrer Ausfallwahrscheinlichkeit (die ja aus den Ausfallwahrscheinlichkeiten der Elemente berechnet werden kann) nicht ändert, haben wir eine einwandfreie Grundlage für zukünftige Entscheidungen zwischen den Systemen. Wenn wir dagegen von der mit Systemen unmittelbar gemachten Erfahrung ausgehen, würde eine solche Entscheidung meist auf Schwierigkeiten stoßen. Nehmen wir z.B. an, daß fünf Systeme der Bauart I einwandfrei funktionieren und daß von fünf Systemen der Bauart II eines ausfällt. Mit Hilfe von Bild 18 können wir feststellen, was wir über die Ausfallwahrscheinlichkeit der beiden Systeme auf Grund unserer Erfahrungen wirklich wissen: Für das System II liegt sie mit großer Sicherheit zwischen etwa 0,01 und 0,75 , für System I zwischen 0 und 0,6. Diese vage Information erlaubt keine begründete Entscheidung zwischen den beiden Systemen. Würden wir uns auf die gemachte Erfahrung verlassen, wäre es nicht unwahrscheinlich, daß wir eine Fehlentscheidung treffen würden. Im folgenden Absatz sollen die Möglichkeiten für den Vergleich der Ausfallwahrscheinlichkeiten von zwei Objekten noch etwas näher betrachtet werden.

7.3 Von n_1 Objekten der Bauart I fallen x_1 Objekte aus, bei n_2 Objekten einer anderen Bauart II werden x_2 Ausfälle festgestellt; dabei soll $x_1/n_1 < x_2/n_2$ sein. Darf man auf Grund dieser Beobachtung schließen, daß die Ausfallwahrscheinlichkeit p_1 bei Bauart I kleiner ist als die Ausfallwahrscheinlichkeit p_2 bei der Bauart II?

Um die Frage zu beantworten, nehmen wir zunächst an, daß $p_1 \geqq p_2$ sei. (In der Statistik wird eine solche Annahme als Nullhypothese bezeichnet). Wenn wir zeigen können, daß dies sehr unwahrscheinlich ist, dann können wir auch mit ziemlicher Sicherheit sagen, daß $p_1 < p_2$ ist. Andernfalls reicht die vorliegende Erfahrung nicht aus, um eine einigermaßen fundierte Aussage zu machen.

Für die Wahrscheinlichkeit, daß die Nullhypothese eintritt, kann man schreiben [12] (vergl. Bild 19):

$$W\left\{p_1 \geqq p_2\right\} = \int_{p_2=0}^{1} \int_{p_1=p_2}^{1} \left| \frac{dW\{\xi_1 \leqq x_1 | p_1\}}{dp_1} \right| \cdot \left| \frac{dW\{\xi_2 = x_2 | p_2\}}{dp_2} \right| dp_1 dp_2 \qquad (34)$$

---

[12] Die hier angegebene Methode ist dem von R.A.Fisher angegebenen Verfahren gleichwertig (siehe Fisher 1958, § 21.02). Der Vorteil besteht darin, daß es dabei nicht notwendig ist, sich in jedem Einzelfall Gedanken darüber zu machen, welche Fälle außer den beobachteten noch hätten auftreten können.

mit

$$W\left\{\xi_1 \leqq x_1 \middle| p_1\right\} = \sum_{0}^{x_1} \binom{n_1}{\xi_1} p_1^{\xi_1} (1 - p_1)^{n-\xi_1}$$

$$W\left\{\xi_2 \leqq x_2 \middle| p_2\right\} = \sum_{x_2}^{n_2} \binom{n_2}{\xi_2} p_2^{\xi_2} (1 - p_2)^{n-\xi_2} \tag{35}$$

Die Auswertung dieses Integrals ergibt:

$$W\left\{p_1 \geqq p_2\right\} =$$

$$= \sum_{r=0}^{x_1} \frac{n_1!\, n_2!}{(n_1+n_2)!} \cdot \frac{1}{(n_2-x_2)!\,(x_2-1)!} \cdot \frac{(x_1+x_2-r-1)!\,(n_1+n_2-x_1-x_2+r)!}{(x_1-r)!\,(n_1-x_1+r)!} \tag{36}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung können wir nun feststellen, ob in dem Beispiel am Ende von vorstehendem Absatz 2 angenommen werden darf, daß die Systeme der Bauart I die kleinere Ausfallwahrscheinlichkeit haben als die der Bauart II. Für die Systeme der Bauart I gilt:

$$n_1 = 5, \quad x_1 = 0,$$

für die der Bauart II

$$n_2 = 5, \quad x_2 = 1$$

Mit diesen Werten finden wir aus Gleichung (36)

$$W\left\{p_1 \geqq p_2\right\} = 0{,}5$$

Das bedeutet: Auf Grund der vorliegenden Erfahrung (d.h., der beobachteten Werte von x_1 und x_2) kann man nur feststellen, daß $p_1 \geqq p_2$ ebenso wahrscheinlich ist wie $p_2 \geqq p_1$, beide Möglichkeiten haben die gleiche Wahrscheinlichkeit und eine Aussage darüber, welches System besser ist, ist nicht möglich. Die folgende Tafel 3 zeigt das Ergebnis der gleichen Rechnung für Fälle, in denen wie früher, n_1 und n_2 gleich 5 und $x_1 = 0$ ist, x_2 jedoch verschiedene Werte zwischen 1 und 5 hat. Wir sehen daraus, daß erst wenn x_2 größer als 3 bis 4 ist, die Wahrscheinlichkeit für $p_1 \geqq p_2$ so klein wird, daß man mit genügender Sicherheit annehmen darf, daß die Bauart I die kleinere Ausfallwahrscheinlichkeit hat als die Bauart II.

Tafel 3

x_2	$W\{p_1 \geqq p_2\}$	$W\{p_2 > p_1\}$
1	0,5	0,5
2	0,22	0,77
3	0,083	0,916
4	0,0238	0,9762
5	0,00397	0,99603

8. Schrifttum

8.1 Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik:

a) Borel, E.: Probabilities and Life
New York 1962

Carnap, R.: The two Concepts of Probability. Philosophy and Phenomenological Research Vol. 5 (1945), pp 513/532

Weaver, W.: Lady Luck: The Theory of Probability
New York 1963

b) Brownlee, K.A.: Statistical Theory and Methodology in Science and Engineering
New York 1965

Gumbel, E.J.: Statistics of Extremes
New York 1960

Heinhold, J. und K.- W.Gaede: Ingenieur-Statistik
München - Wien 1964

McCord, J.R. and R.M.Moroney: Introduction to Probability Theory,
New York 1964

Miller, I. and J. Freund: Probability and Statistics for Engineers
Englewood Cliffs, New Jersey 1965

Smirnow, N.W. und I.W. Dunin-Barkowski: Mathematische
Statistik in der Technik
Berlin 1963

v.d. Waerden, B.L.: Mathematische Statistik
Berlin-Göttingen-Heidelberg 1957

c) Cramer, H.: Mathematical Methods of Statstics
Princeton 1951

Fisher, R.A.: Statistical Methods for Research Workers
Edinburgh 1958

Krickeberg, K.: Wahrscheinlichkeitstheorie
Stuttgart 1963

Morgenstern, D.: Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik
Berlin-Göttingen-Heidelberg 1964

Schmetterer, L.: Einführung in die mathematische Statistik
Wien 1956

Die unter a) genannten Veröffentlichungen befassen sich mit der Idee der Wahrscheinlichkeit und ihrer Deutung. Die Bücher unter b) sind für den Ingenieur leichter zugänglich als die unter c) genannten, die weitergehende mathematische Vorkenntnisse voraussetzen und ausführlicher auf die mathematischen Grundlagen eingehen. Außerdem enthalten auch die im folgenden unter 2. genannten Bücher meist eine kurze Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

8.2 Grundlagen der Zuverlässigkeitstechnik:

Bazovsky, I.: Reliability in Theory and Practice
Englewood Cliffs, New Jersey 1961

Lloyd, D. and M.Lipow: Reliability: Management, Methods and Mathmatics
Englewood Cliffs, New Jersey 1964

Pieruschka, E.: Principles of Reliability
Englewood Cliffs, New Jersey 1963

Sandler, G.: System Reliability Engineering
Englewood Cliffs, New Jersey 1963

Zelen, M.: Statistical Theory of Reliability
University of Wisconsin Press, Madison 1964

8.3 Einschlägige schiffbauliche Veröffentlichungen:

Benn, D.H.: The Application of Reliability Engineering to Warship Propulsion Plants
Trans. of the Inst. of Marine Eng. 1966, pp 43/58

Bragaw, L.K.: Optimization of the Major Mechanical Overhaul Interval from Reliability Studies
SNAME New England Section, May 1965

Day, B.B.: Reliability Engineering
ASNE Journ. 1961, pp 251/256

Frankel, E.G.: Reliability Analysis
ASNE Journ. 1962, pp 619/627

Frankel, E.G.: Complex System Reliability Analysis under Constraints. Study in Dynamic Programming
Internat. Shipbuilding Progress 1965, pp 429/436

Harrington, R.L. and R.P. Riddick, jr.: Reliability Engineering Applied to the Marine Industry
Marine Technology, Oct. 1964

Krappinger, O.: Die Betriebssicherheit von Schiffsanlagen
Hansa 1965, S. 979/987

West, G. (Editor): Proceedings of Conference on Advanced Marine Engineering Concepts for Increased Reliability
The University of Michigan 1963

Woodward, III, J.B.: Reliability Theory in Marine Engineering
SNAME Great Lake and Great Rivers Section, Feb. 1963

8.4 Sonstige in der Arbeit benutzte Veröffentlichungen:

Krappinger, O.: Einfluß von Tiefgang, Flutbarkeit, Stabilität und Seegang auf die Beurteilung von Unterteilungen
Jb. STG 1961, S.209/226

Robertson, J.B.: Subdivision of Ships as Related to Survival Probability
IMCO London, Sept. 1966

St. Denis, M.: A Note on the Probabilistic Method of Assessing Survivability
Schiffstechnik 1962, S.173/177

Wendel, K.: Bewertung von Unterteilungen
Jb. STG 1961, S.192/208

Bild 1

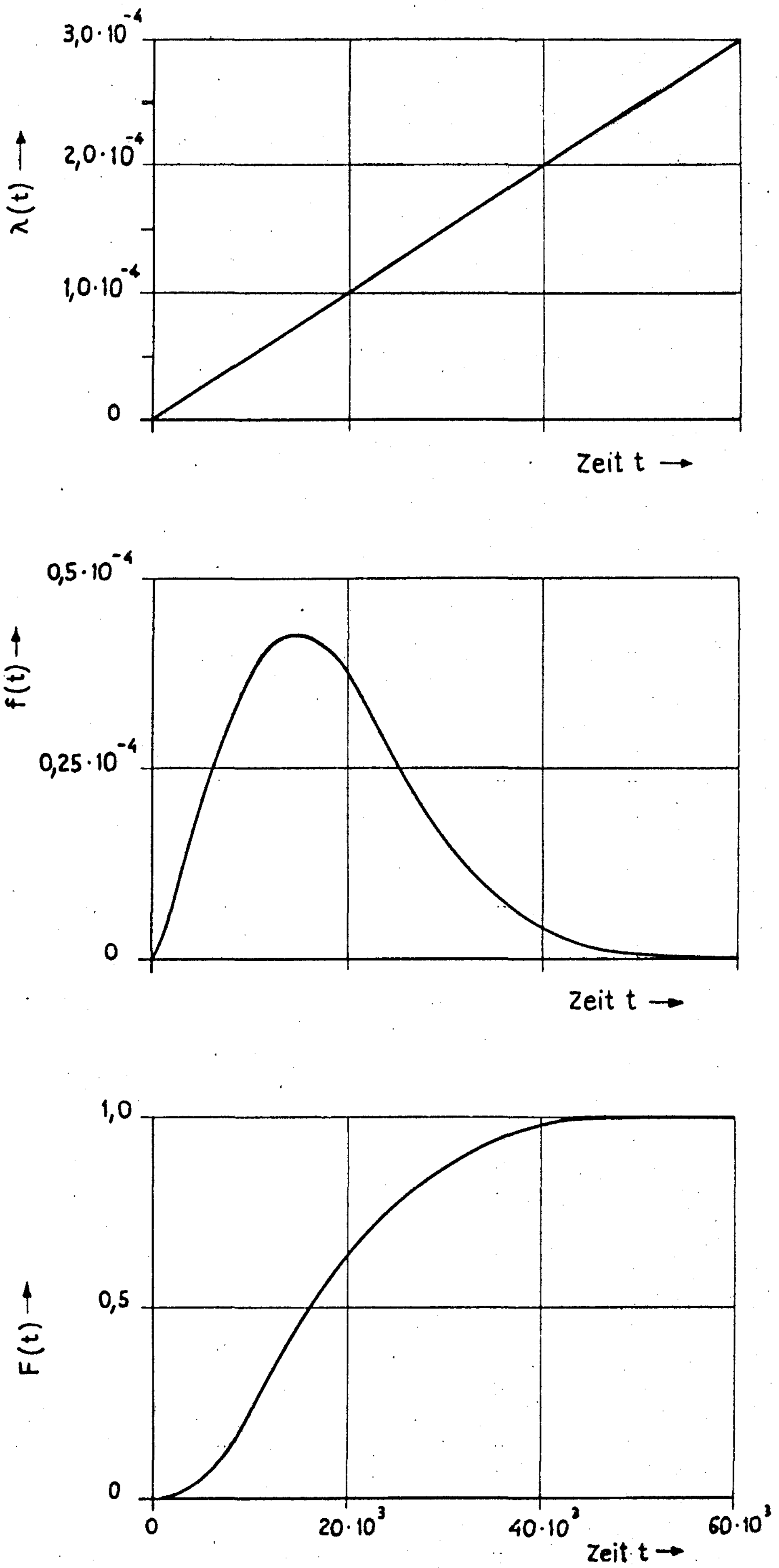

3,0·10⁻⁴
2,0·10⁻⁴
1,0·10⁻⁴
0
λ(t) →
Zeit t →
0,5·10⁻⁴
0,25·10⁻⁴
0
f(t) →
Zeit t →
1,0
0,5
0
F(t) →
0
20·10³
40·10³
60·10³
Zeit t →

Bild 2

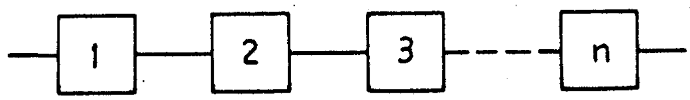

1
2
3
n

Bild 3

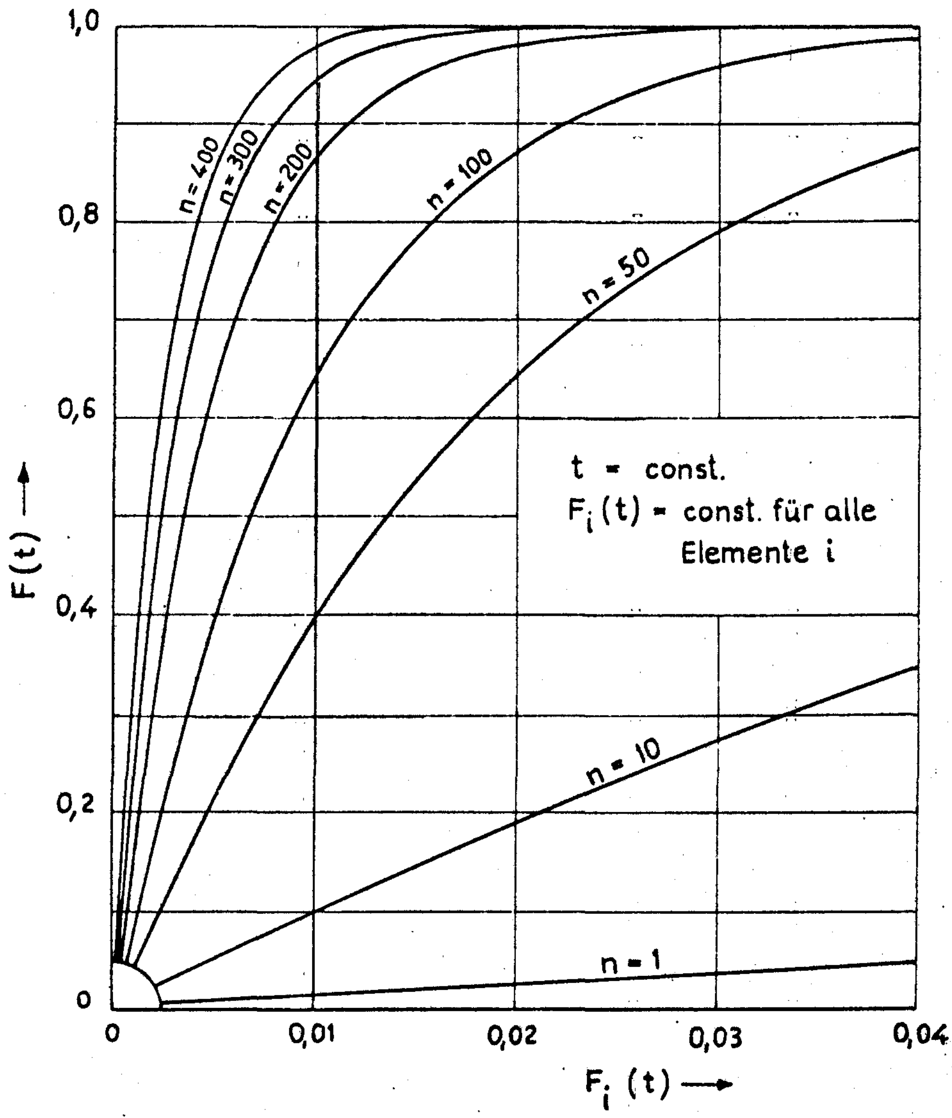

1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
0,01
0,02
0,03
0,04
F(t)
F_i (t)
n = 400
n = 300
n = 200
n = 100
n = 50
n = 10
n = 1
t = const.
F_i (t) = const. für alle
Elemente i

Bild 4

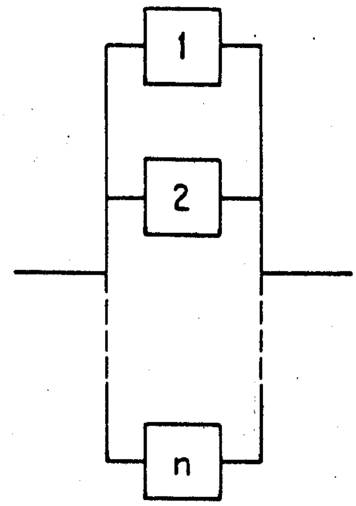

1
2
n

Bild 5

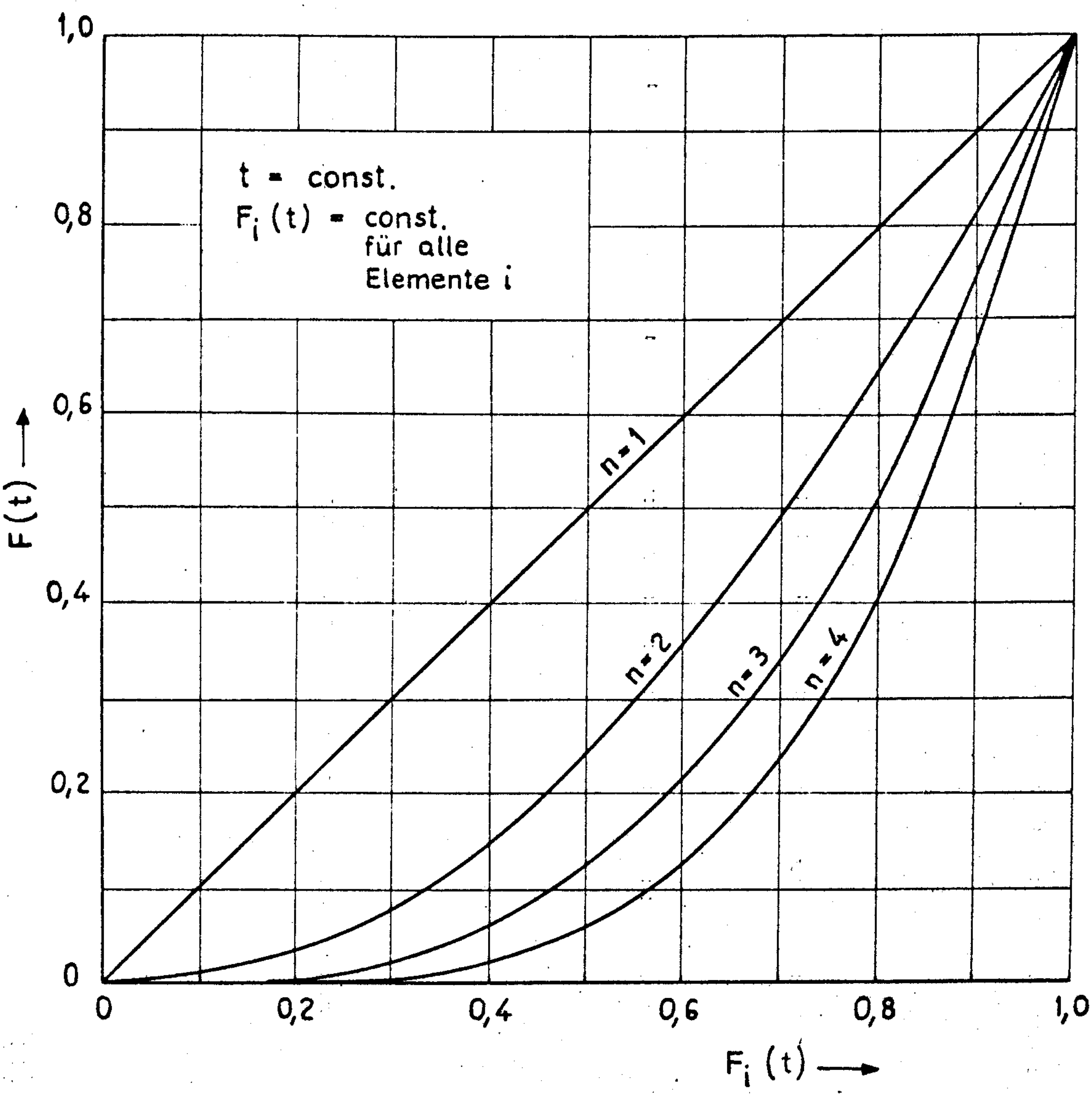

t = const.
F_i (t) = const.
für alle
Elemente i
n=1
n=2
n=3
n=4
F(t)
F_i (t)
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0

Bild 6

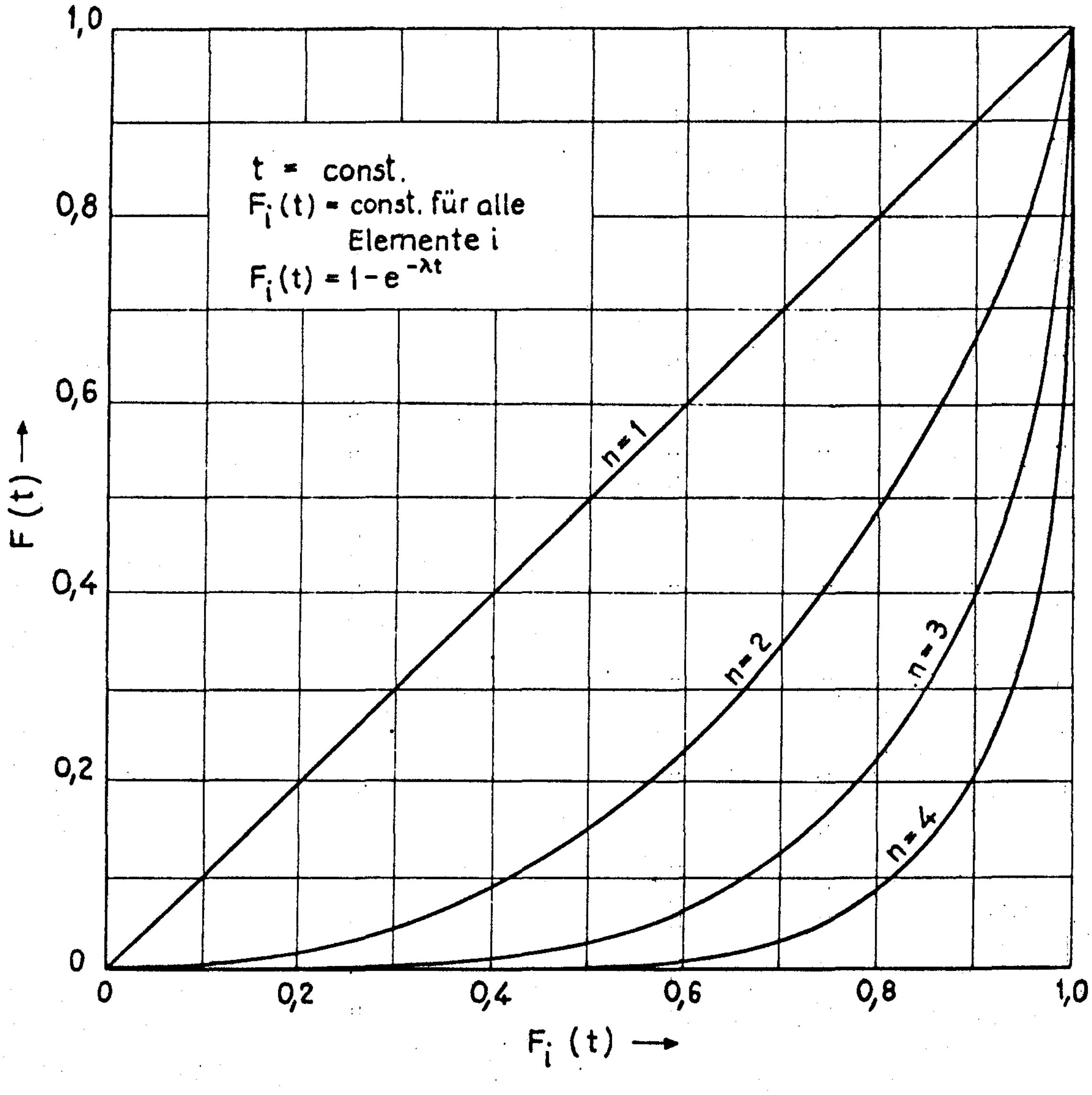
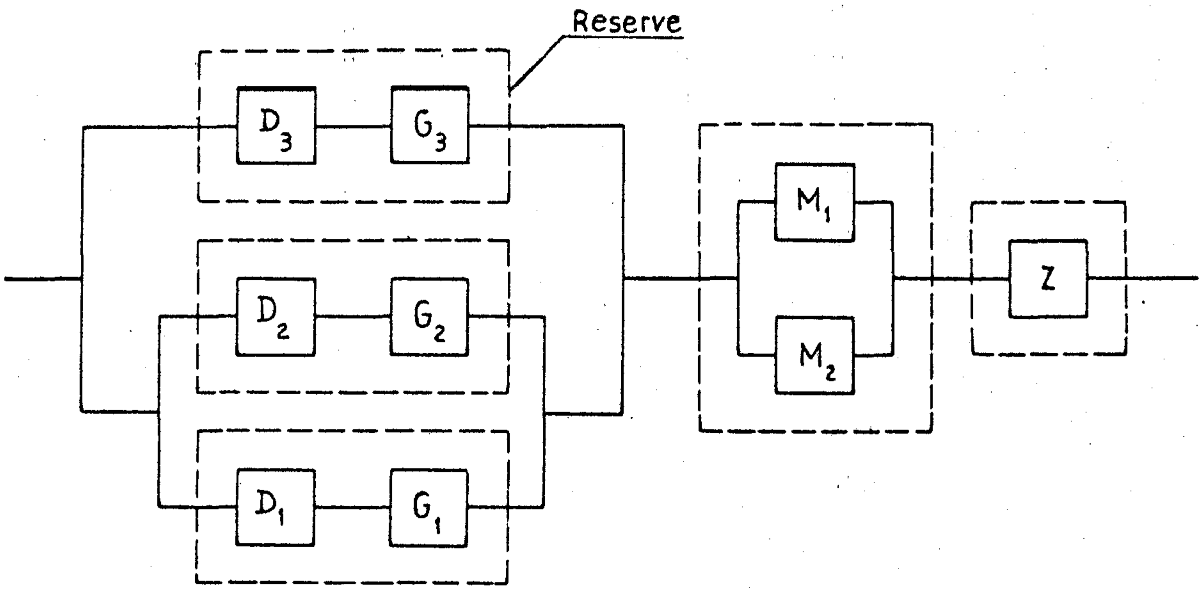
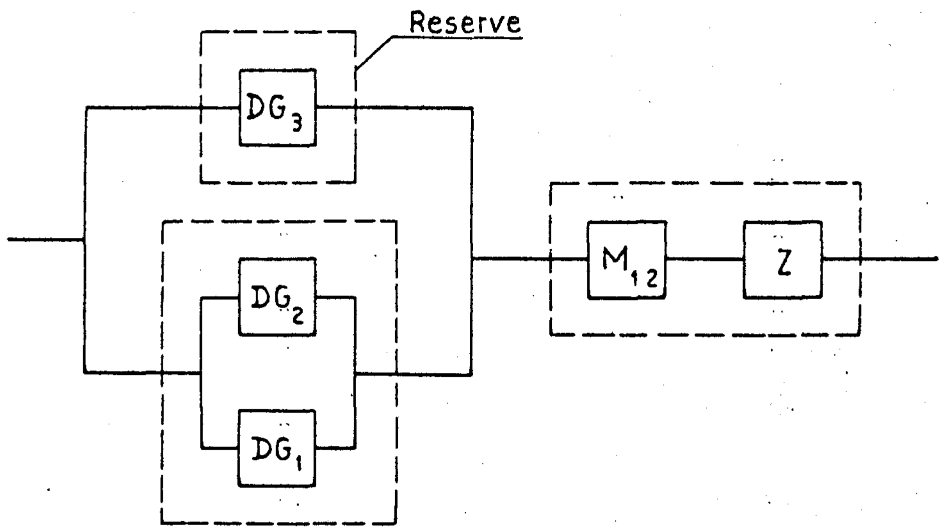

t = const.
$F_i(t)$ = const. für alle Elemente i
$F_i(t) = 1 - e^{-\lambda t}$
n=1
n=2
n=3
n=4
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
F (t) →
F_i (t) →

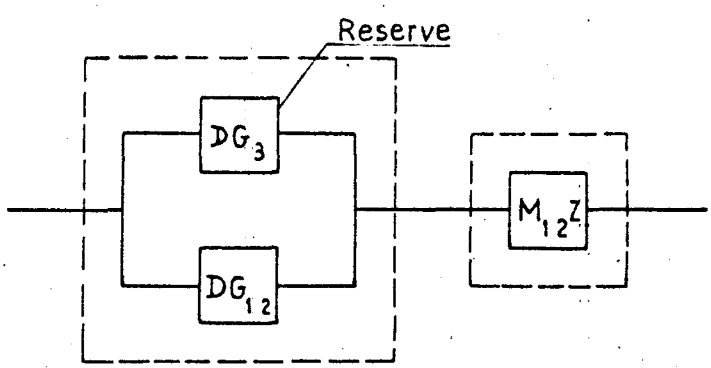
Bild 7


Reserve
D_3
G_3
D_2
G_2
D_1
G_1
M_1
M_2
Z

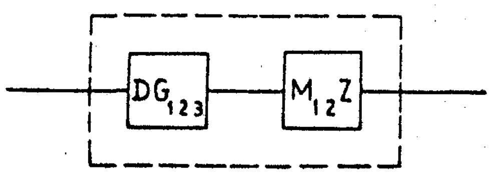
a)


Reserve
DG_3
DG_2
DG_1
M_{12}
Z

b)


Reserve
DG_3
DG_{12}
$M_{12}Z$

c)


DG_{123}
$M_{12}Z$

d)

Bild 8

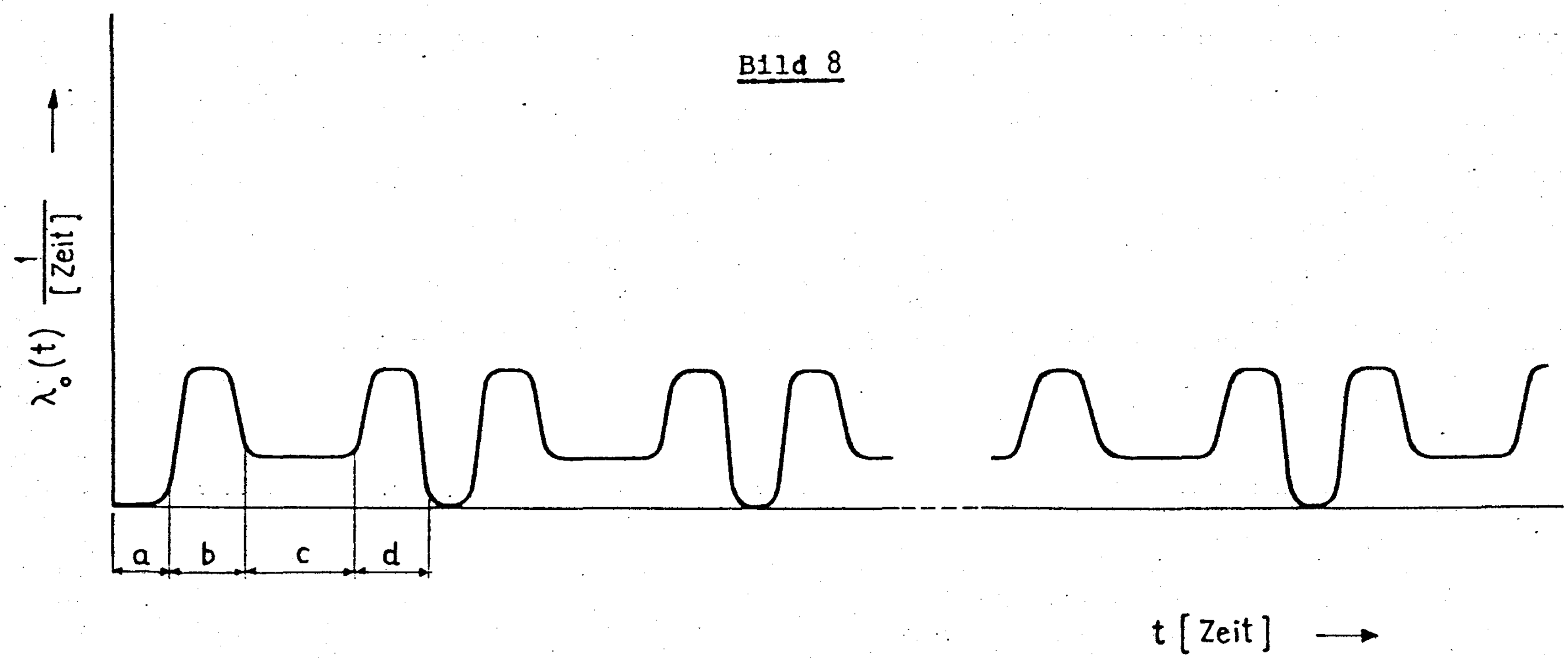


Bild 9

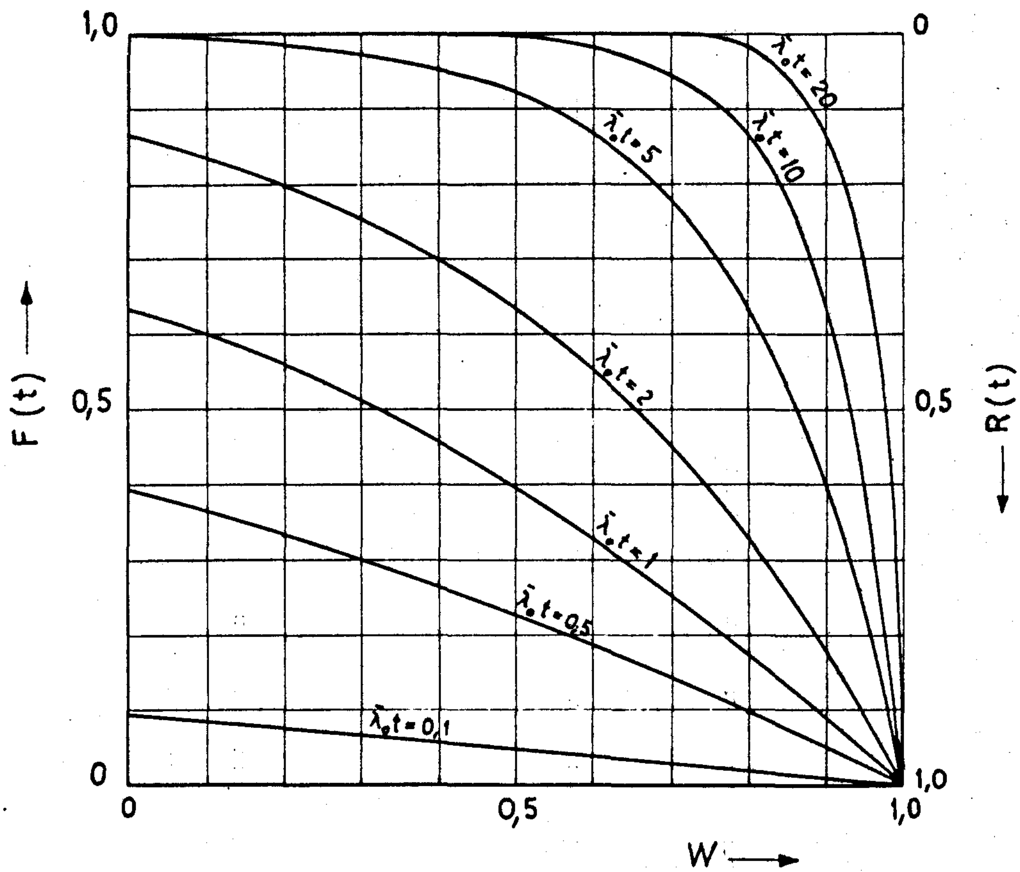
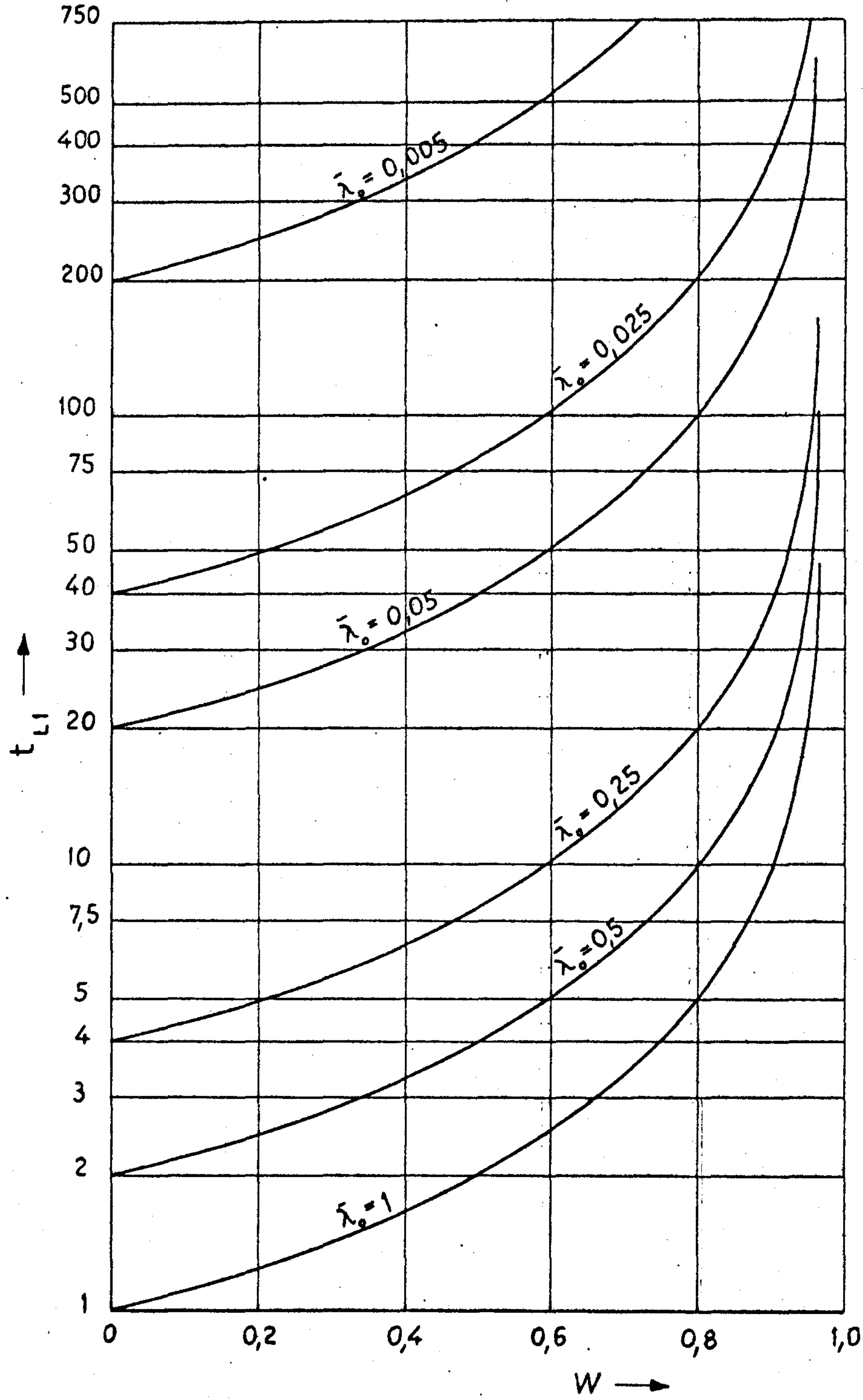
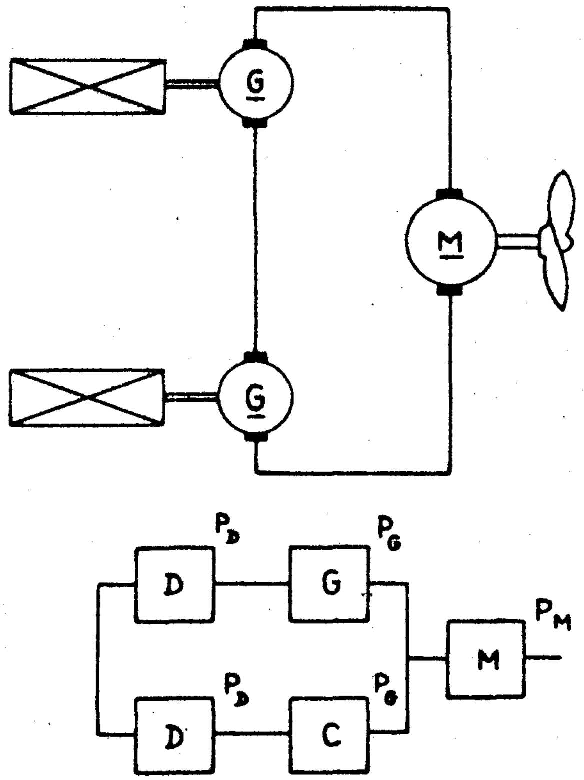

1,0
0,5
0
0
0,5
1,0
F(t)
W
0
0,5
1,0
R(t)
$\bar{\lambda}_o t = 20$
$\bar{\lambda}_o t = 10$
$\bar{\lambda}_o t = 5$
$\bar{\lambda}_o t = 2$
$\bar{\lambda}_o t = 1$
$\bar{\lambda}_o t = 0,5$
$\bar{\lambda}_o t = 0,1$

Bild 10

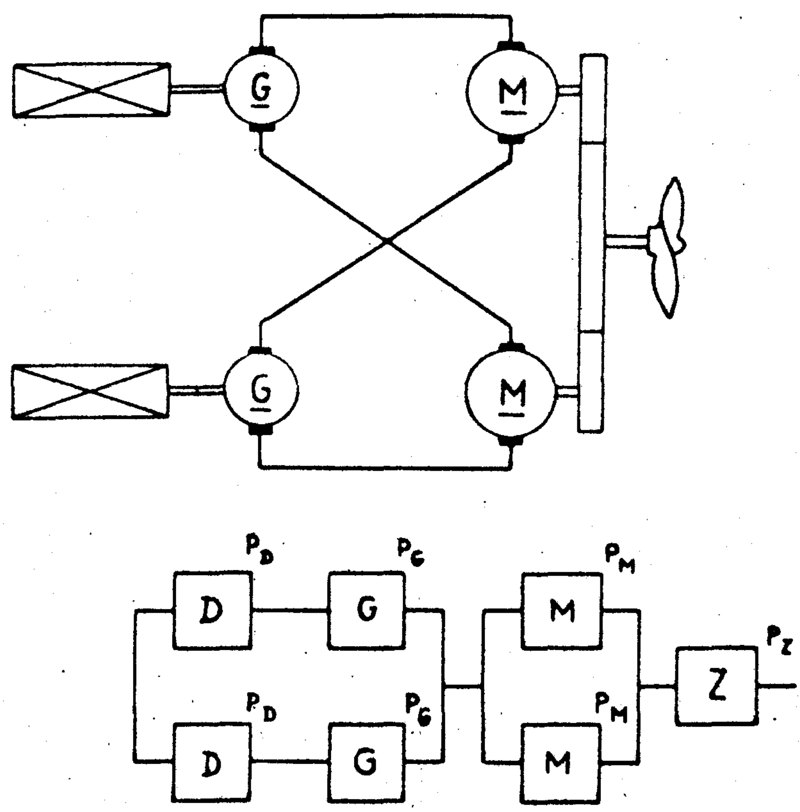


750
500
400
300
200
100
75
50
40
30
20
10
7,5
5
4
3
2
1
t_{L1}
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
W
$\bar{\lambda}_o = 0,005$
$\bar{\lambda}_o = 0,025$
$\bar{\lambda}_o = 0,05$
$\bar{\lambda}_o = 0,25$
$\bar{\lambda}_o = 0,5$
$\bar{\lambda}_o = 1$

Bild 11



a)



b)

Bild 12

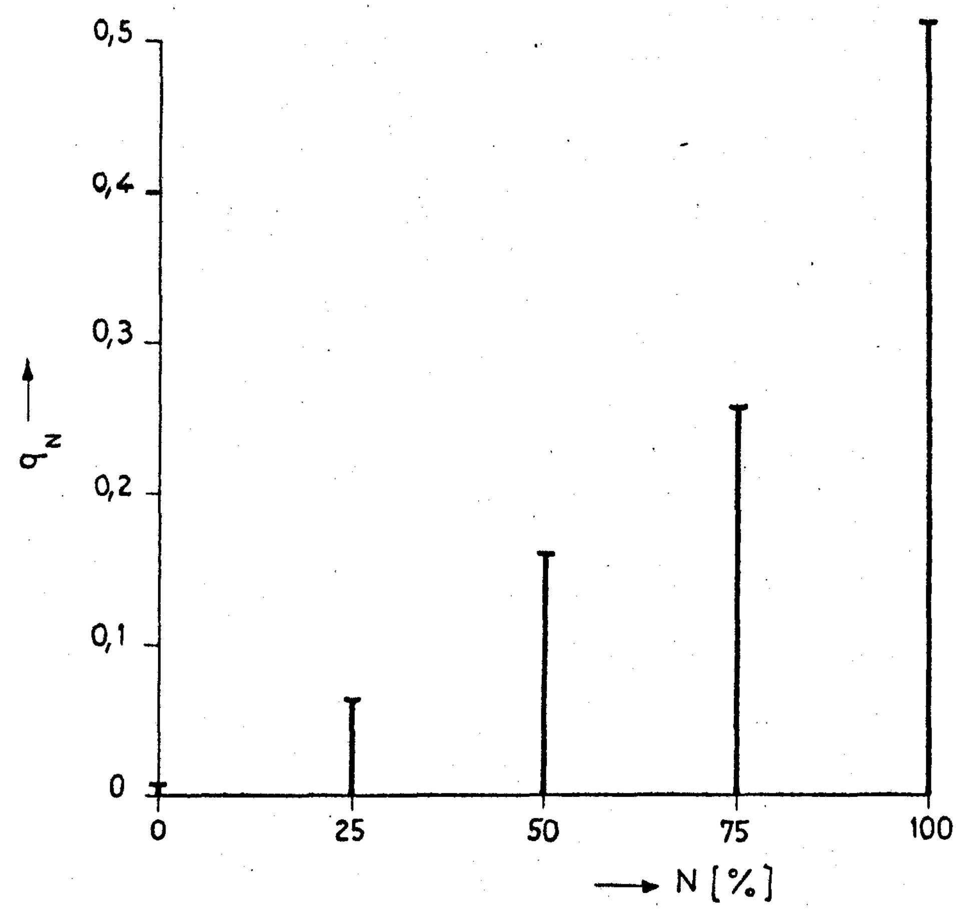


Bild 13

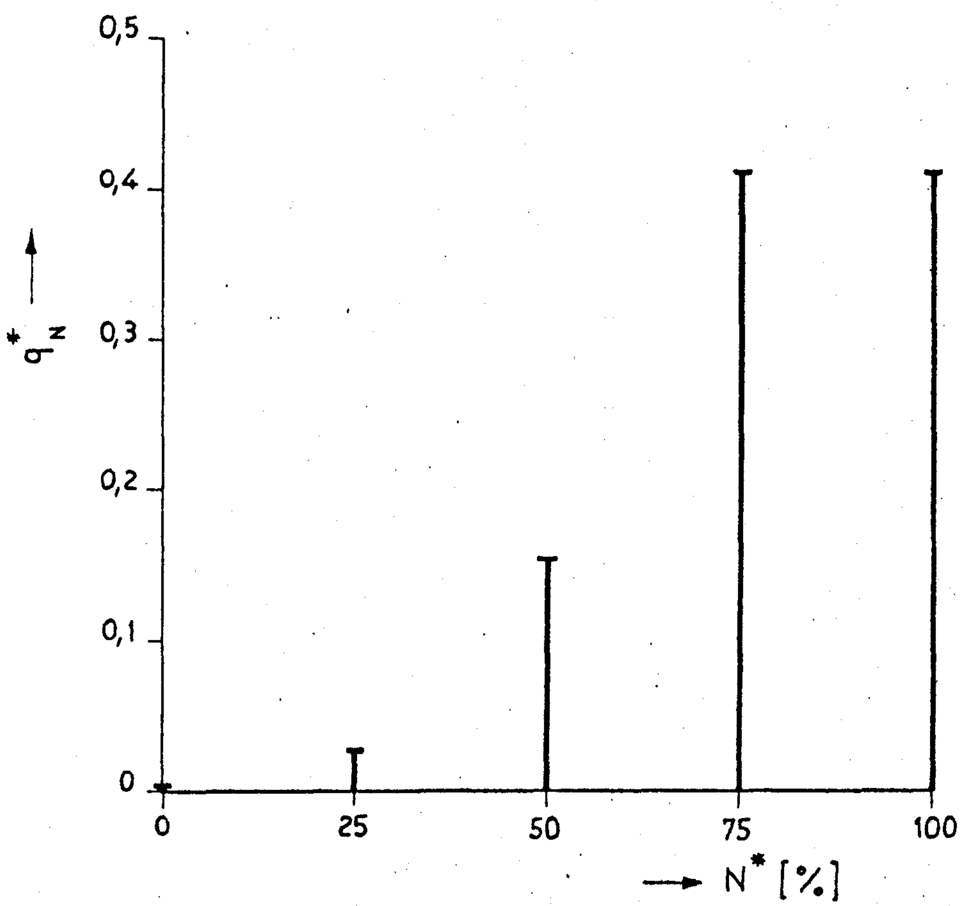
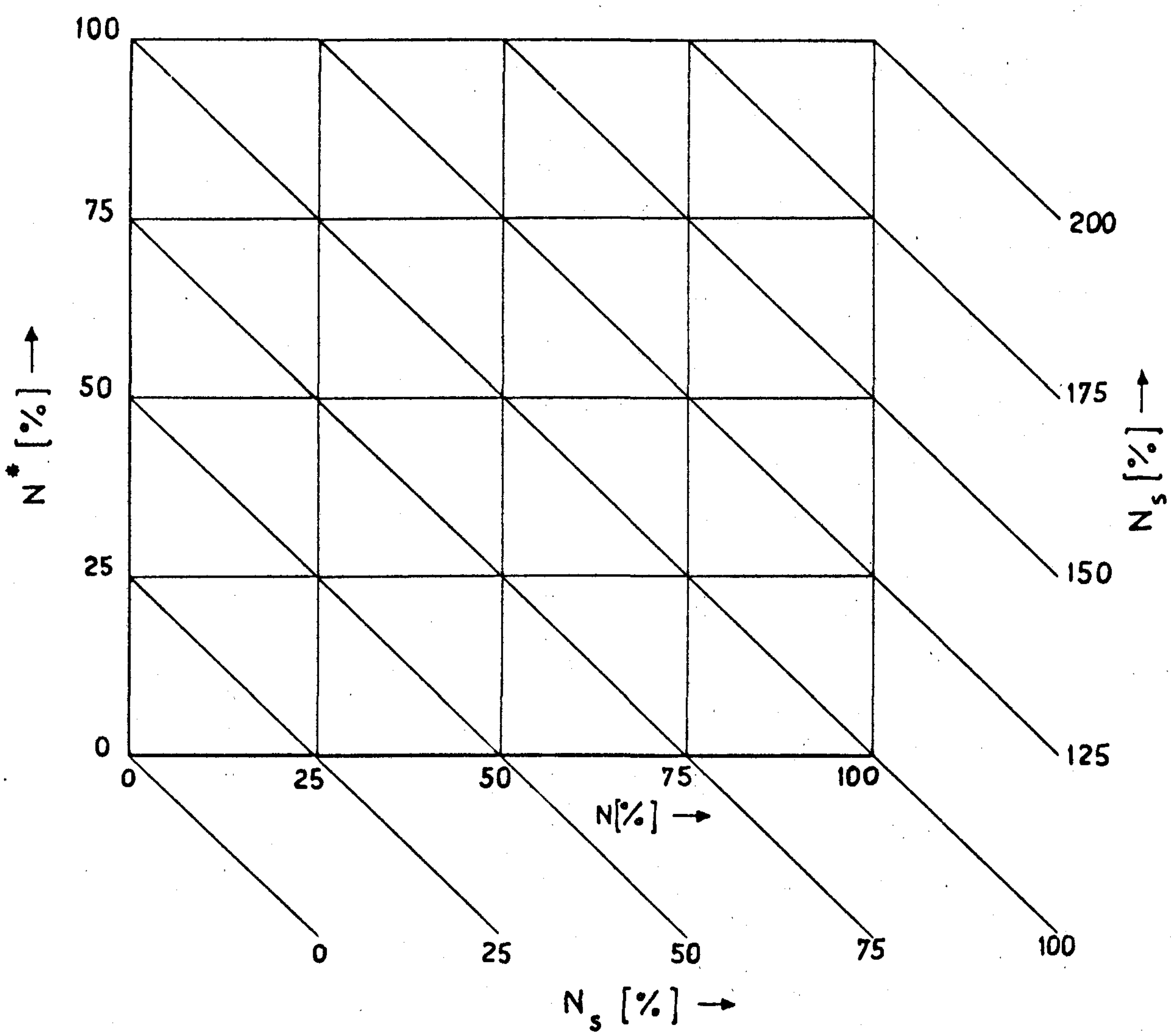


Bild 14



Beispiel:

$$W\left\{N_s = 150\right\} = W\left\{N = 50\,\% \text{ und } N^* = 100\,\%\right\} + W\left\{N = 75\,\% \text{ und } N^* = 75\,\%\right\} + W\left\{N = 100\,\% \text{ und } N^* = 50\,\%\right\}.$$

$$P_{150} = q_{50}\, q^*_{100} + q_{75}\, q^*_{75} + q_{100}\, q^*_{50}$$

Bild 15

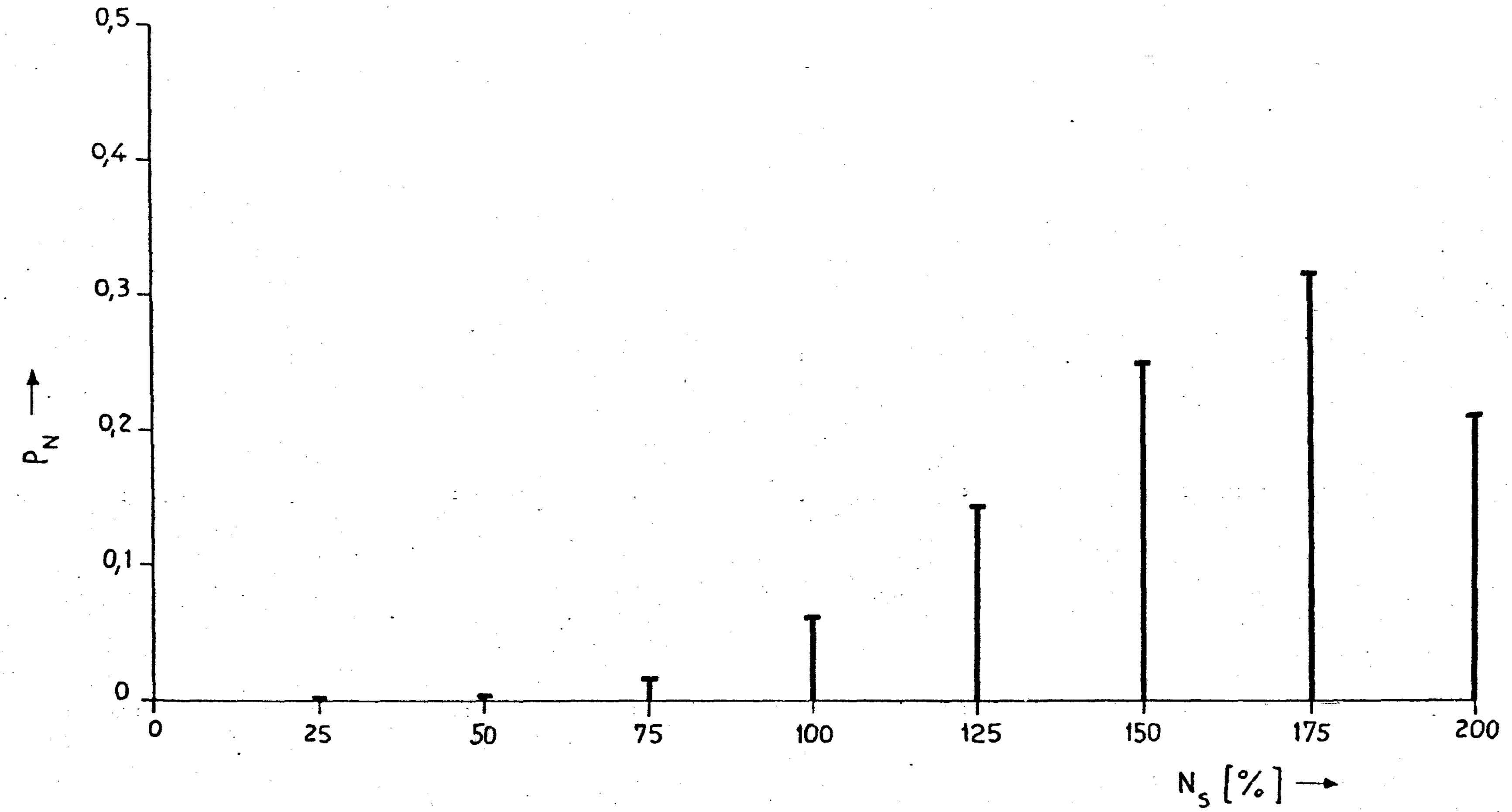


Bild 16

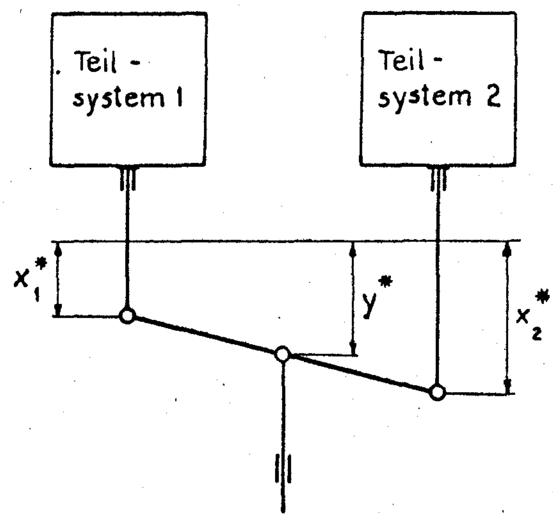
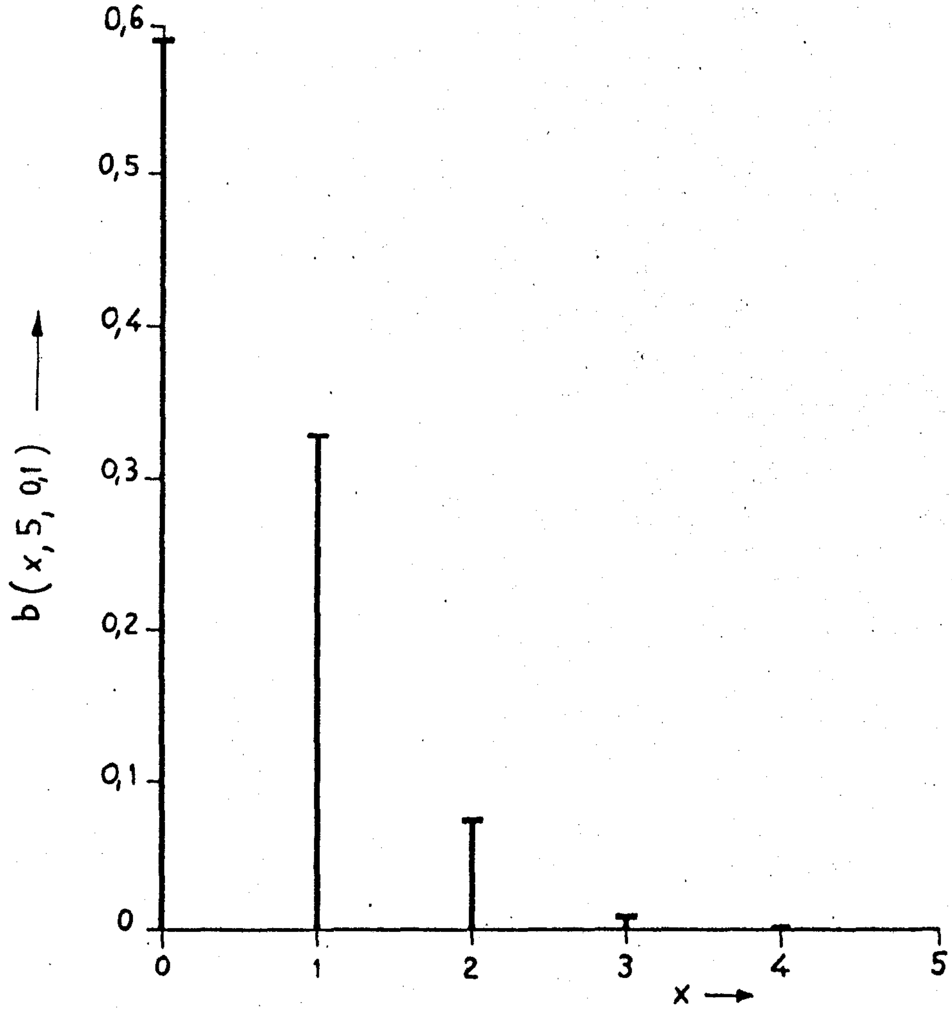


Bild 17



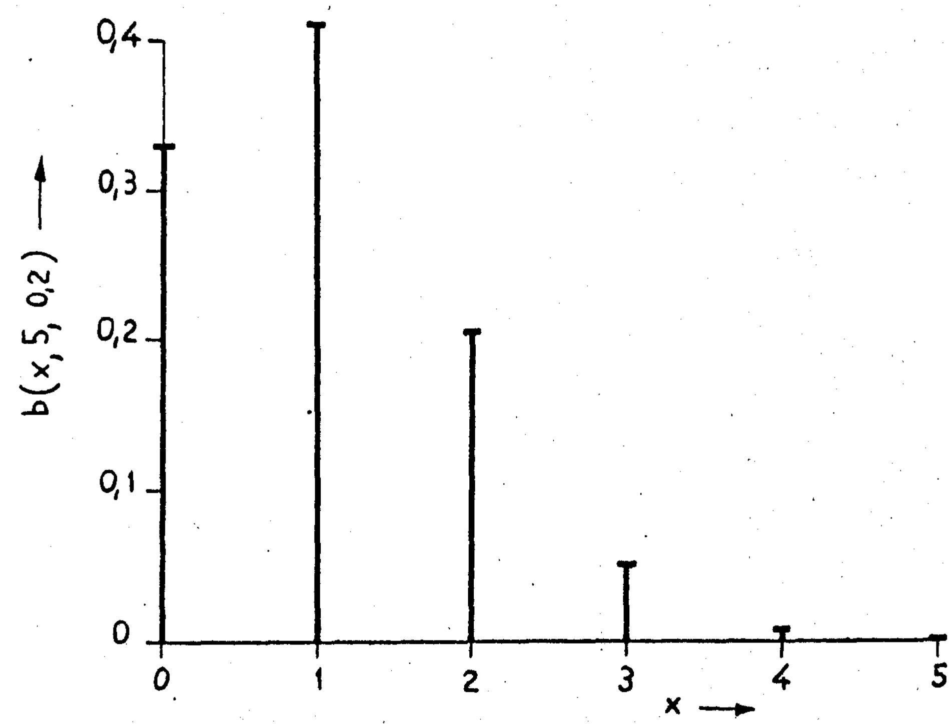
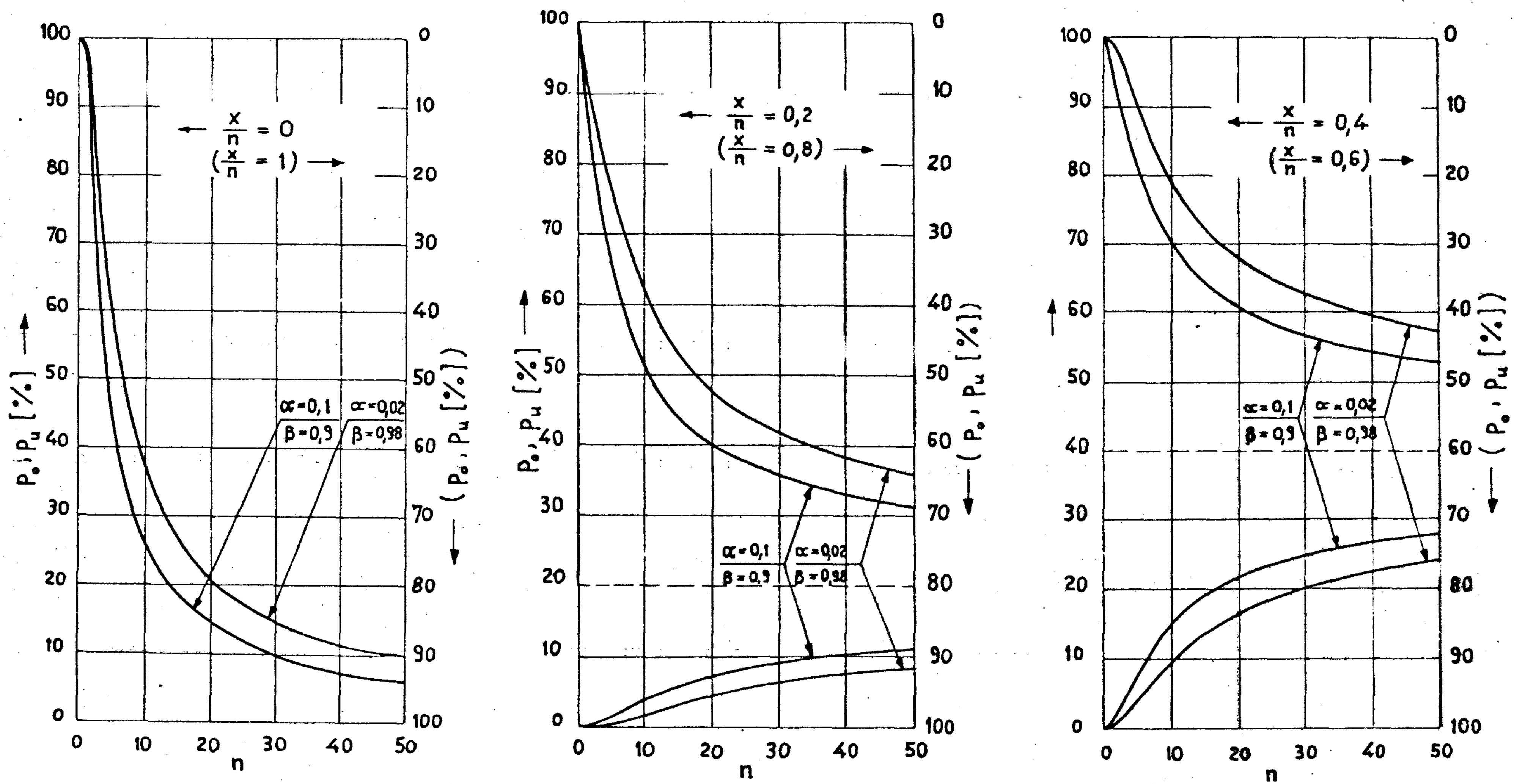


Bild 18



$\frac{x}{n} = 0$
$(\frac{x}{n} = 1)$
$\alpha = 0{,}1$, $\beta = 0{,}9$
$\alpha = 0{,}02$, $\beta = 0{,}98$
$\frac{x}{n} = 0{,}2$
$(\frac{x}{n} = 0{,}8)$
$\frac{x}{n} = 0{,}4$
$(\frac{x}{n} = 0{,}6)$
P_o, P_u [%]
$(P_o, P_u$ [%]$)$
n

Bild 19