

344 | August 1976

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

E. Lehmann

**Analytische und halbanalytische
Elemente zur
Konstruktionsberechnung
schiffbaulicher Tragwerke**

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

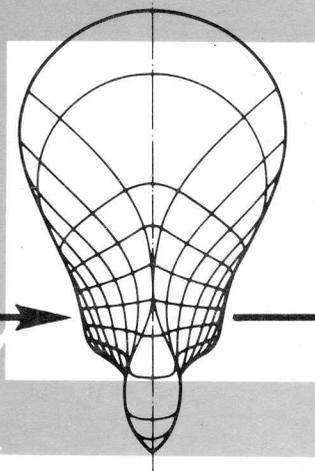
**Analytische und halbanalytische Elemente zur Konstruktionsberechnung schiffbaulicher
Tragwerke**

E. Lehmann, 1. Auflage, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1976

© Technische Universität Hamburg-Harburg
Schriftenreihe Schiffbau
Schwarzenbergstraße 95c
D-21073 Hamburg

<http://www.tuhh.de/vss>

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU
DER UNIVERSITÄT HAMBURG



Analytische und halbanalytische Elemente zur
Konstruktionsberechnung schiffbaulicher
Tragwerke

E. Lehmann

August 1976

Bericht Nr. 344

Analytische und halbanalytische
Finite Elemente
zur
Konstruktionsberechnung schiffbaulicher Tragwerke
von
E. Lehmann

Hamburg
im April 1976

1. Einleitung, Zusammenfassung und Dankwort

Die Methode der "Finiten Elemente" stellt nunmehr eine nicht mehr wegzudenkende Methode der Konstruktionsberechnung dar. Die dem Ingenieur sehr anschauliche Aufteilung in endliche Bereiche einer Konstruktion ist zunächst noch nicht mit einem mechanischen Prinzip verbunden. So ist die Deformationsmethode und die Kraftmethode in dualer Weise anwendbar. Auch die Kombination beider Methoden, wie sie in der Methode der Übertragungsmatrizen verwendet wird, ist heute gebräuchlich. Üblicherweise wählt man für den Verlauf der Verformungs- bzw. Kraftgrößen möglichst einfache Ansätze, die über die Formulierung als Variationsproblem dann zu Steifigkeits- oder Flexibilitätsmatrizen führen, die angenäherte Lösungen ergeben. Die Deformationsmethode und die Übertragungsmatrizenmethode haben, das hat die Entwicklung der letzten 10 Jahre gezeigt, die elegante Programmierung für sich und es soll daher im folgenden nur mit diesen gearbeitet werden. Während in den letzten Jahren durch eine Anzahl von Veröffentlichungen diese Methoden sehr in den Vordergrund gerückt sind, scheinen Methoden, die auf Lösungen der Differentialgleichungen beruhen, etwas - und wie der Autor meint - ungerechtfertigt stark zurückgedrängt worden zu sein. Man soll nicht vergessen, daß der Hauptgrund für die Einführung der Finiten Elemente lediglich in ihrer sehr guten Anpassung an geometrisch komplizierte Geometrien beruhte. Sehr oft hat man es aber mit Konstruktionen zu tun, die nur teilweise die üblichen Finiten Elemente rechtfertigen. Zunächst soll nun im wesentlichen von Differentialgleichungen ausgegangen werden. Es lassen sich für die einzelnen Dgl. Steifigkeitsmatrizen und Übertragungsmatrizen ableiten. Man erhält einen ganzen Katalog von Elementen, die geschlossene Lösungen darstellen.

Interessant ist es, daß man eine Taylorreihen-Entwicklung angeben kann, die jeweils für alle Fälle der Dgl. 2. bzw.

4. Ordnung gelten. Eine solche Entwicklung ermöglicht es dann, ein Matrizeneigenwertproblem explizit anzugeben, ohne die manchmal numerisch unbefriedigende Restdeterminanten-Methode verwenden zu müssen. Weiterhin zeigt eine Literaturdurchsicht, daß die entsprechenden Elementsteifigkeitsmatrizen, welche man mit Hilfe des Variationsproblems erhält, sehr ähnlich bzw. identisch sind mit denen der Taylorreihenentwicklung.

Um praktisch mit dem dargestellten Elementkatalog arbeiten zu können, sind noch einige schiffbautypische Transformationen und Vermaschungen dargestellt. Die dargestellten Rechenbeispiele sollen das wirkungsvolle und dabei sehr zeit- und aufwandsparende Verfahren erläutern.

Abschließend werden noch eine Reihe von praktischen Beispielen mit halbanalytischen Ansätzen gezeigt, die für Scheiben- und Volumenelemente eine sehr wirkungsvolle Berechnung ermöglichen.

Ziel der vorgelegten Arbeit ist es, zu sagen, daß man unter Vermeidung einer willkürlichen Vorgabe irgend eines Ansatzes für das Verschiebungsfeld unter Verwendung der Differentialgleichungen sich eine wirkungsvolle Berechnungsmethode mit sehr hoher Genauigkeit aufbauen kann. Außerdem kann man mit der gewählten Darstellung die methodischen Zusammenhänge bei physikalisch unterschiedlichen Problemen deutlich herausarbeiten und eine Reihe von Qualitäten verdeutlichen. Schließlich wird anhand der Beispiele deutlich, daß der Rechenzeitbedarf beim Einsatz von analytischen bzw. halbanalytischen Finiten Elementen sehr viel geringer ist als üblich. Bei der Konstruktionsoptimierung spielt die Rechenzeit eine bedeutende Rolle, so daß, verwendet man die vorgeschlagenen Elemente, ein echter Fortschritt auf diesem Gebiet erwartet werden kann.

Die Ideen, die zu der vorgelegten Arbeit führten, erhielt der Autor durch seine Tätigkeit als Obering. am Lehrstuhl für Konstruktion und Statik der Schiffe (Prof. H. Petershagen), später durch seine nebenberufliche Tätigkeit im Sonderforschungsbereich 98, sowie durch seine zusätzliche Lehrtätigkeit am Institut für Schiffbau. Besonders durch die letztere Aufgabe war es möglich, die Betreuung einer Reihe von Diplomarbeiten durchzuführen. Besonders hervorzuheben sind dabei die Diplomanden W. Fricke und H. Kröger, die durch ihre vorbildlichen Arbeiten ganz wesentlich dazu beigetragen haben, mit einer Reihe von Beispielen die gute Verwendbarkeit analytischer und halbanalytischer Elemente zu zeigen.

Die Arbeit konnte entstehen, weil das Verständnis meiner Frau Mechthild es ermöglichte, viele Abende mit der Durchführung von Berechnungen und der Abfassung des Manuskripts zu verbringen.

2. Definition der Elemente

Unter eindimensionalen Elementen sollen Elemente bezeichnet werden, die sich in einer lokalen Koordinate beschreiben lassen. Dabei ist an Bauteile gedacht, die sich durch die bekannten linearen Differentialgleichungen beschreiben lassen. In Abb. 2.1 sind einige im Schiffbau üblichen Rechenmodelle dargestellt. Es liegt nun nahe, zunächst eine Übersetzung der alle diesen Elementen zugrundeliegenden Differentialgleichung in eine Übertragungsmatrix bzw. Steifigkeitsmatrix vorzunehmen, denn wie bereits angedeutet, hängt die Entscheidung ob Übertragungsmatrix oder Steifigkeitsmatrix-Konzept oder auch eine Kombination aus beiden von dem jeweiligen praktischen Problem ab. Es handelt sich im wesentlichen um die gewöhnliche Dgl. 2. Ordnung und 4. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

2.1 Stabelemente

Zunächst betrachten wir die lineare gewöhnliche Dgl. 2. Ordnung

$$y'' + \left(\frac{a}{l}\right)^2 y = \text{konst.} \quad (2.1)$$

Die Lösungen lauten bekanntlich

$$\begin{aligned} y_{\text{hom}} &= A_1 \sin a \frac{x}{l} + A_2 \cos a \frac{x}{l} \\ y_{\text{inh}} &= \text{Konst} \left(\frac{l}{a}\right)^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

wenn l die Berechnungslänge sein soll und D und a noch näher zu bestimmende phy. Konstante. (D siehe Seite 5)

Die Übertragungsmatrix für die homogene Differentialgleichung erhält man dann mit

$$\begin{Bmatrix} y \\ Dy' \end{Bmatrix}_x = \begin{bmatrix} \sin a \frac{x}{l} & \cos a \frac{x}{l} \\ D \frac{a}{l} \cos a \frac{x}{l} & -D \frac{a}{l} \sin a \frac{x}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

$$\begin{Bmatrix} z \end{Bmatrix}_x = [C(x)] \begin{Bmatrix} A \end{Bmatrix}$$

$D = \text{phys. Konstante}$

Zustandsvektor an der Stelle 0 bzw. 1

$$\begin{Bmatrix} z \end{Bmatrix}_0 = [C(0)] \begin{Bmatrix} A \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} z \end{Bmatrix}_1 = [C(1)] \begin{Bmatrix} A \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

$$\begin{Bmatrix} z \end{Bmatrix}_1 = [C(1)] [C(0)]^{-1} \begin{Bmatrix} z \end{Bmatrix}_0$$

d.h.

$$[U] = [C(1)] [C(0)]^{-1}$$

$$[U] = \begin{bmatrix} \cos a & \frac{l}{Da} \sin a \\ -D \frac{a}{l} \sin a & \cos a \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Die zugehörige Steifigkeitsmatrix erhält man durch Umsortierung und Einführung eines positiven Vorzeichens für alle Schnittgrößen zu

$$\begin{Bmatrix} Dy'_0 \\ Dy'_1 \end{Bmatrix} = D \frac{a}{l} \begin{bmatrix} \text{ctg } a & -\frac{1}{\sin a} \\ -\frac{1}{\sin a} & \text{ctg } a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

$$\begin{Bmatrix} P \end{Bmatrix} = [k] \begin{Bmatrix} u_k \end{Bmatrix}$$

in Taylorreihen entwickelt

$$[k] = \frac{D}{l} \left[\begin{array}{c|c} 1 - \frac{a^2}{3} & \frac{-1}{1 + \frac{a^2}{6}} \\ \hline \frac{-1}{1 + \frac{a^2}{6}} & 1 - \frac{a^2}{3} \end{array} \right] \quad (2.7)$$

Die Taylorreihendarstellung erlaubt nun eine Aufteilung mit

$$[k] = [k_1] + [k_2] = \frac{D}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{D a^2}{6l} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Für die Lösung der Dgl.

$$y'' - \left(\frac{a}{l}\right)^2 y = \text{konst.}$$

ergeben sich die entsprechenden Ausdrücke mit den hyperbolischen Funktionen zu

$$[u] = \left[\begin{array}{c|c} \cosh a & \frac{l}{D a} \sinh a \\ \hline D \frac{a}{l} \sinh a & \cosh a \end{array} \right] \quad (2.9)$$

und die Steifigkeitsmatrix

$$[k] = D \frac{a}{l} \begin{bmatrix} \text{ctgh } a & \frac{-1}{\sinh a} \\ \frac{-1}{\sinh a} & \text{ctgh } a \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Die Reihenentwicklung ergibt dann den gleichen Ausdruck wie Gl. 2.8

$$[k] = \frac{D}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{D a^2}{6l} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Nach diesen rein formalen Umrechnungen lassen sich für die jeweiligen Elemente die physikalischen Konstanten a bzw. D aus den jeweiligen Differentialgleichungen bestimmen.

2.2 Balkenelemente

Neben der Dgl. 2. Ordnung spielt die Dgl. 4. Ordnung eine bedeutende Rolle. Sie lautet

$$y^{IV} + \left(\frac{a}{l}\right)^2 y'' - \left(\frac{b}{l}\right)^4 y = \text{Konst} \quad (2.12)$$

Je nachdem, welchen Wertebereich a^2 bzw. b^4 einnehmen, (Tab.2.1) ergeben sich verschiedene Lösungen der Dgl. In Abb. 2.2 sind die Gültigkeitsbereiche eingetragen. Es ergeben sich 9 unterschiedliche Lösungen, die in Anhang 1 zusammengestellt sind. Die Übertragungs- bzw. Steifigkeitsmatrizen erhält man mit Hilfe der bekannten Formeln (Anhang 1). Dabei ist als Zustandsvektor die Lösung selbst sowie ihre Ableitungen verwendet worden. Aus praktischen Gründen wurde als vierte Zustandsgröße eine Kombination aus der dritten und ersten Ableitung gewonnen.

$$\left. \begin{matrix} D \\ a^2 \end{matrix} \right\} = \text{physikalische Konstante,} \quad l = \text{Elementlänge}$$

$$\left\{ z \right\}_i = \left\{ \begin{matrix} y \\ y' \\ Dy'' \\ D(y''' \pm (\frac{a}{l})^2 y') \end{matrix} \right\}_i \quad \left\{ u_k \right\} = \left\{ \begin{matrix} y_i \\ y'_i \\ y_j \\ y'_j \end{matrix} \right\} \quad \left\{ p_k \right\} = \left\{ \begin{matrix} Dy''_i \\ D(y''' \pm (\frac{a}{l})^2 y)_i \\ Dy''_j \\ D(y''' \pm (\frac{a}{l})^2 y)_j \end{matrix} \right\} \quad (2.13)$$

Das Vorzeichen von $\left(\frac{a}{l}\right)^2$ wird entsprechend der Lösung der Dgl. eingesetzt.

Entwickelt man die Steifigkeitsmatrizen in Taylorreihen, so erhält man nach längerer Zwischenrechnung die in Tabelle 2.2 dargestellten Steifigkeitsmatrizen.

$$[k] = \frac{D}{l^3} [k_1] - \frac{D a^2}{30 l^3} [k_2] - \frac{D b^4}{l^3 420} [k_3] \quad (2.14)$$

Die Teilmatrizen entpuppen sich z.B. für ein Balkenelement mit $D = EJ$ $a^2 = \pm \frac{H}{EJ}$ $b^4 = \frac{\mu \omega^2}{EJ} l^4$ zu

$$\begin{aligned} [k_1] &= [k_E] && \text{lineare Steifigkeitsmatrix des Balkens} \\ [k_2] &= [k_G] && \text{geometrische Steifigkeitsmatrix des Balkens} \\ [k_3] &= [k_m] && \text{Massenmatrix des Balkens} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Es liegt nun nahe, eine Sammlung von Differentialgleichungen für diverse Probleme zusammenzustellen. Die Übersetzung in ein diskretes Rechenmodell erfolgt dann in einfacher Zuweisung der physikalischen Konstanten zu den mathematischen Koeffizienten a^2 bzw. b^4 . Ob man die geschlossene Lösung oder die Taylorreihen verwendet, hängt von der Zweckmäßigkeit bei der praktischen Lösung von Problemen ab.

Im Elementkatalog sind eine Reihe von Elementen, ohne den Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben, zusammengestellt.

Es sind in der Spezialliteratur noch eine Vielzahl von Anwendungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen angegeben, die von Fall zu Fall ebenfalls mit Hilfe der vorgeschlagenen Elementmethode berechnet werden können.

Die rechten Seiten der Differentialgleichungen können natürlich Funktionen von x sein.

Es lassen sich entsprechende Lösungen meist leicht angeben. Da man aber die geometrischen Größen in jedem Element als konstant annimmt, ist die Bestimmung von Lastspalten bei der Übertragungsmatrizenmethode bzw. die der rechten Seiten der Gleichungssysteme bei der Deformationsmethode für konstante rechte Seiten der Dgl. am wichtigsten.

Die Lastspalten für die Dgl. 2. Ordnung ergeben sich z.B. zu

Fall 1	Fall 2
$\left(\frac{l}{a}\right)^2 (1 - \cos a)$	$\left(\frac{l}{a}\right)^2 (\cosh a - 1)$
$D\left(\frac{l}{a}\right)^2 a \sin a$	$D\left(\frac{l}{a}\right)^2 a \sinh a$

Tab. 2.3

Einzellasten bzw. Einzelmomente lassen sich auf einfache Art und Weise als Knotenlasten direkt angeben, entweder im Lastvektor (Deformationsmethode) oder in der Lastspalte der entsprechenden Punktmatrix.

Die rechten Seiten der Gleichungssysteme bei Verwendung der Deformationsmethode erhält man, indem man äquivalente Knotengrößen, die z.B. Knotenkräfte oder Momente sein können, bestimmt. Diese Knotenkräfte sind definiert als diejenigen Kräfte und Momente, die mit den Knotenverschiebungen die gleiche Arbeit leisten wie die Arbeit der Feldlasten mit den Verformungen des ganzen Elementes.

Es ergibt sich also bei konstanten Feldlasten

$$A_{\text{Knoten}} = A_{\text{Feld}}$$

$$\{y_k\}^T \{P_k\} = \int_0^l y p dx \quad (2.16)$$

Die Verformung des Elementes wird mit der jeweiligen Lösung der Dgl. beschrieben.

$$y = [C] \{A\} \quad p = \text{Konst} \quad (2.17)$$

Die Knotenverschiebungen erhält man mit

$$\left. \begin{aligned} \{y_k\} &= [B] \{A\} \\ y &= [C] [B]^{-1} \{y_k\} \\ y &= [w_u] \{y_k\} \\ p &= [w_p] \{P_k\} \\ \{y_k\}^T \{P_k\} &= \{y_k\}^T \int_0^l [w_u]^T [w_p] dx \cdot \{P_k\} \\ \{P_k\} &= [B]^{-1T} \int_0^l [C]^T [w_p] dx \end{aligned} \right\} (2.18)$$

Da die Verlaufsmatrix für p sehr einfach gebaut ist, erhält man

$$\begin{aligned} \{P_k\} &= [B]^{-1T} \{Z\} \cdot \text{const} \\ \{Z\} &= \int_0^l [C]^T dx \end{aligned} \quad (2.19)$$

Die Matrizen $[B]$ bzw. $[Z]$ ergeben sich für die Dgl. 2. Ordnung für beide Fälle zu

$$[Z] = \begin{bmatrix} -\frac{l}{a} (\cos a - 1) \\ -\frac{l}{a} \sin a \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sin a & \cos a \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

für Fall 1 und für Fall 2

$$[Z] = \begin{bmatrix} \frac{l}{a} (\cosh a - 1) \\ \frac{l}{a} \sinh a \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sinh a & \cosh a \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Die entsprechenden Matrizen für die Dgl. 4. Ordnung sind im Anhang 2 zusammengefaßt.

Die Dgl. 4. Ordnung kann je nach Vorzeichen von a^2 und b^4 auf ein- oder auch zweiparametrische Eigenwertaufgaben, wie sie bei Stabilitäts- und Schwingungsproblemen auftreten, führen. Interessant ist der prinzipielle Zusammenhang zwischen den Eigenwerten.

Die Differentialgleichung

$$y^{IV} + \left(\frac{a}{l}\right)^2 y'' + \left(\frac{b}{l}\right)^4 y = 0 \quad (2.22)$$

führt auf die einparametrische Eigenwertaufgabe für a^2 . Geht man von der Lösung

$$y = A \sin \frac{m\pi}{l} x$$

aus, so erhält man

$$\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 - \left(\frac{a}{l}\right)^2 \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{b}{l}\right)^4 = 0 \quad (2.23)$$

und nach Umformung

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{m\pi}\right)^2$$

Diese Funktion ist in Abb. 2.3 dargestellt und man erkennt die bekannte Girlandenkurve, der somit eine ganz allgemeine Bedeutung zukommt.

Handelt es sich um eine 2parametrische Eigenwertaufgabe, dann erhält man

$$\left(\frac{a}{l}\right)^2 \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{b}{l}\right)^4 = \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4$$

bzw.

(2.24)

$$\left(\frac{b}{\pi}\right)^4 + \left(\frac{a}{\pi} m\right)^2 = m^4$$

für $m = 1$, $m = 2$ erhält man die sog. Dunkerley'schen Geraden (Abb. 2.4).

2.3 Plattenelemente

Grundlage der Plattenelemente ist die partielle Differentialgleichung 4. Ordnung.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + A_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial z^2} + A_2 \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} \pm A_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \pm A_4 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \pm A_5 w = 0 \quad (2.25)$$

Diese Dgl. läßt sich mit Hilfe einer Fourierschen Reihe in ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen 4. Ordnung darstellen.

$$w(x, y) = \sum w_n(x) \sin \frac{n\pi}{B} z \quad (2.26)$$

Man erhält dann

$$w_n^{(4)}(x) + \left(\pm A_3 - \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 \right) w_n''(x) + \left(\left(\frac{n\pi}{B} \right)^4 A_2 \pm \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 A_4 \pm A_5 \right) w_n(x) = 0 \quad (2.27)$$

Man erkennt, daß man die Lösungen der unter 2.2. angegebenen Dgl. direkt verwenden kann. Im Elementkatalog sind eine Reihe von Plattenelementen angegeben, die eine sehr schnelle Plattenberechnung ermöglichen.

An dem Reihenansatz Gl. (2.26) kann man erkennen, daß sich die vorgeschlagenen Elemente für Probleme mit an 2 Seiten aufgelagerten Rändern eignen. Eingespannte Ränder sind mit verschiedenen Methoden (siehe 2.6) zu verwirklichen.

2.4 Scheibenelemente

Bekanntlich gilt für die Scheiben die Bipotentialgleichung $\Delta \Delta F = 0$. Shimizu /34/ verwendet diese auch und leitet eine Flexibilitätsmatrix für einen Elementstreifen ab. Diese Matrix ist leider nicht symmetrisch. Nach dem Dargestellten läßt sich ohne weiteres die Spannungsverteilung ermitteln. Man muß die Randbedingungen allerdings in der Form einer Spannungsfunktion definieren können. Für die simultane Verwendung mit einer Plattenbiegesteifigkeit eignet sich diese aber nicht. Im folgenden werden halbanalytische Verschiebungsansätze verwendet. Man muß allerdings zur Aufstellung der Steifigkeitsmatrix nunmehr doch das bekannte Integral

$$[k] = \int_V [B]^T [E] [B] dv \quad (2.28)$$

welches man aus einem Energieansatz erhält, verwenden.

Als Ansatz für das Verschiebungsfeld können lineare quadratische oder kubische Ansätze infrage kommen. Abb. 2.5

$$\begin{aligned} u_n &= [F] \sin \frac{n\pi}{B} z \left\{ u_k \right\}_n \\ w_n &= [F] \cos \frac{n\pi}{B} z \left\{ w_k \right\}_n \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=1} u_n \\ w &= \sum_{n=1} w_n \end{aligned} \quad (2.30)$$

Die Dehnungsmatrix erhält man wie üblich mit

$$\{\varepsilon\}_n = [\Delta] \{u\}_n \quad (2.31)$$

eingesetzt

$$\{\varepsilon\}_n = [B]_n \{u_k\}_n$$

oder in sinus- und cosinusbehaftete Terme aufgeteilt

$$[B]_n = [\bar{B}]_n \sin \frac{n\pi}{B} z + [\bar{\bar{B}}]_n \cos \frac{n\pi}{B} z \quad (2.32)$$

mit dem Stoffgesetz

$$\{\sigma\}_n = [E] \{\varepsilon\}_n$$

$$[E] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

erhält man mit Berücksichtigung der Orthogonalität der trigonometrischen Funktionen die Steifigkeitsmatrix zu

$$\begin{aligned} [k]_n &= \frac{Bt}{2} \int_1^l [\bar{B}]_n^T [E] [\bar{B}]_n dx + \frac{Bt}{2} \int_1^l [\bar{\bar{B}}]_n^T [E] [\bar{\bar{B}}]_n dx \\ &= [\bar{k}]_n + [\bar{\bar{k}}]_n \end{aligned} \quad (2.34)$$

Die Spannungsmatrix zur Bestimmung der Spannungen aus den Verschiebungen erhält man dann zu

$$\{\sigma\}_n = [E] \{\varepsilon\}_n$$

$$\{\sigma\}_n = [E] [B]_n \{u_k\}_n \quad (2.35)$$

$$\{\sigma\}_n = [S]_n \{u_k\}_n$$

oder aufgeteilt in Sinus- und Cosinusanteile

$$[S]_n = [\bar{S}]_n \sin \frac{n\pi}{B} z + [\bar{\bar{S}}]_n \cos \frac{n\pi}{B} z \quad (2.36)$$

Die Steifigkeits- und Spannungsmatrizen sind in Anhang 3 zusammengestellt.

2.5 Volumenelemente

Volumenelemente lassen sich erzeugen, indem man zweidimensionale Scheibenelemente erweitert, indem man die dritte Dimension analytisch beschreibt /13/. Diese analytische Beschreibung kann man wieder mit Fourierreihen durchführen. Für ein dreieckiges Element (Abb. 2.6)

kann man dann den Ansatz für das Verschiebungsfeld mit

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_n \left[L_1 \quad L_2 \quad L_3 \right] \sin \frac{n\pi}{B} z \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix}_n \\
 v &= \sum_n \left[L_1 \quad L_2 \quad L_3 \right] \sin \frac{n\pi}{B} z \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_m \end{Bmatrix}_n \\
 w &= \sum_n \left[L_1 \quad L_2 \quad L_3 \right] \cos \frac{n\pi}{B} z \begin{Bmatrix} w_i \\ w_j \\ w_m \end{Bmatrix}_n
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

annehmen. Wobei

$$L_k = \frac{1}{2\Delta} \left\{ a_k + b_k x + c_k y \right\} \quad k = i, j, m \tag{2.38}$$

die bekannten Flächenkoordinaten darstellen, die sich besonders leicht integrieren lassen mit

$$\int_A L_1^i L_2^j L_3^m dA = \frac{i! j! m!}{(i+j+m+2)!} \cdot 2A \tag{2.39}$$

Die Dehnungsmatrix lautet dann

$$\left[B_i \right]_n = \left[\begin{array}{ccc|ccc}
 \frac{\partial L_i}{\partial x} \sin \frac{n\pi}{B} z & & & 0 & & 0 \\
 & 0 & & \frac{\partial L_i}{\partial y} \sin \frac{n\pi}{B} z & & 0 \\
 & & & 0 & & -L_i \frac{n\pi}{B} \sin \frac{n\pi}{B} z \\
 \frac{\partial L_i}{\partial y} \sin \frac{n\pi}{B} z & & & \frac{\partial L_i}{\partial x} \sin \frac{n\pi}{B} z & & 0 \\
 & 0 & & L_i \frac{n\pi}{B} \cos \frac{n\pi}{B} z & & \frac{\partial L_i}{\partial y} \cos \frac{n\pi}{B} z \\
 L_i \frac{n\pi}{B} \cos \frac{n\pi}{B} z & & & 0 & & \frac{\partial L_i}{\partial x} \cos \frac{n\pi}{B} z
 \end{array} \right] \quad (2.40)$$

Teilt man die Dehnungsmatrix in Sinus- und Cosinusanteile auf, so erhält man wieder

$$\left[B_i \right]_n = \left[\bar{B}_i \right]_n \sin \frac{n\pi}{B} z + \left[\bar{\bar{B}}_i \right]_n \cos \frac{n\pi}{B} z \quad (2.41)$$

Die Steifigkeitsmatrix erhält man wieder unter Berücksichtigung der Orthogonalität der trigonometrischen Funktionen zu

$$\begin{aligned}
 \left[k_{ij} \right] &= \iiint \left[B_i \right]_n^T \left[E \right] \left[B_j \right]_n dx dy dz \\
 &= \frac{Bt}{2} \iint \left[\bar{B}_i \right]_n^T \left[E \right] \left[\bar{B}_j \right]_n dx dy + \frac{Bt}{2} \iint \left[\bar{\bar{B}}_i \right]_n^T \left[E \right] \left[\bar{\bar{B}}_j \right]_n dx dy \\
 &= \left[\bar{k}_{ij} \right]_n + \left[\bar{\bar{k}}_{ij} \right]_n \quad (2.42)
 \end{aligned}$$

Für das Stoffgesetz sind nunmehr alle 6 Spannungskomponenten zu berücksichtigen mit

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yx} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & & & \\ \nu & 1-\nu & \nu & & & \\ \nu & \nu & 1-\nu & & & \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

Im Anhang 4 sind die Steifigkeits- und Spannungsmatrizen zusammengestellt.

2.6 Rotations- und Sektorelemente

Eine weitere Klasse von halbanalytischen Elementen sind die Rotations- und Sektorelemente. Es liegt für solche Elemente eine umfangreiche Literatur vor, so daß eine kurze Beschreibung ausreicht. Es wird im übrigen auf den Übersichtsaufsatz von Buck /23/ hingewiesen, in dem über die wichtigsten Elemente berichtet wird, Ein Rotationselement entsteht, indem man die bekannten Stab-, Scheibenelemente um eine Achse rotieren läßt. Abb. 2.7

Man erhält so Membranschalen und Volumenelemente. Die Knotenfreiheitsgrade sind nunmehr v in z -Richtung und u_r in r -Richtung. Eine weitere Möglichkeit besteht, eine Kreisringplatte aus einem rotierenden Balken zu erzeugen /3/.

Die Balkenfreiheitsgrade lauten dann w und dw/dv . Die Sektorelemente entstehen, indem man den Winkel θ mit α und kleiner als 360° wählt. Für die Verschiebungsverläufe sind nunmehr wieder die Fourierreihen zu verwenden, so erhält man z.B. für die Platte Abb. 2.8

$$w = [F] \sin \frac{n\theta}{\alpha} \{u_k\}$$

$$\text{mit } [F]^T = \begin{bmatrix} 1 - 3R^2 + 2R^3 \\ (R - 2R^2 + R^3) l_r \\ 3R^2 - 2R^3 \\ (R^3 - R^2) l_r \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Man erkennt, daß für die Verlaufsmatrix wieder die Hermitpolynome des Balkens dienen. Integration der Steifigkeitsmatrix ist wieder für jede harmonische Fourierkomponente getrennt möglich. Die Berechnung einer ganzen Konstruktion geschieht wieder wie üblich ohne Besonderheiten.

2.7 Eingespannte Ränder

Die halbanalytischen Elemente wurden unter Verwendung einer sinus-Reihe ermittelt, die sich besonders eignet zur Berechnung von frei drehbar aufgelagerten Rändern, oder frei verschiebbaren Kanten.

Um nun eingespannte Ränder zu berücksichtigen, sind drei verschiedene Methoden denkbar:

1. Superpositionsmethode
2. Eigenformmethode
3. Differenzenmethode

Während die Superpositionsmethode sich ganz allgemein auf inhomogene Probleme anwenden läßt, kann man die Eigenformmethode besonders bei homogenen Problemen verwenden. Die Differenzenmethode eignet sich für beide Formen von Problemen. Um einen Einblick in diese drei Methoden zu erhalten, werden die folgenden Erläuterungen nur so ausführlich wie zum Verständnis notwendig durchgeführt. Zum Teil sind es neuartige Anwendungsmöglichkeiten, die es Wert sind, gründlicher durchdacht zu werden, als in diesem Rahmen möglich.

2.7.1 Superpositionsmethode

Von GHALI und TARDOS /41/ wird dazu folgender Vorschlag gemacht: Man nimmt ein fest eingespanntes System zunächst als frei aufgelagert an und bestimmt die Verformungen, die an dessen Enden durch die Feldbelastung hervorgerufen werden. In einem zweiten Schritt läßt man an diesen Enden dann Randkräfte angreifen, welche ihrerseits Verformungen erzeugen, die gleich und entgegengesetzt den ersteren sind. Addiert man die Ergebnisse beider Lastfälle, so hat man dadurch den Zustand 'feste Einspannung' simuliert. Voraussetzung für diese Vorgehensweise ist die Gültigkeit des Superpositionsprinzips.

Im Folgenden soll der geschilderte Gedankengang auf die hier behandelten halbanalytischen Scheibenelemente angewendet werden, immer in Anlehnung an die oben zitierte Literaturstelle, in der eine entsprechende Herleitung für halbanalytische Plattenelemente angegeben ist. Es wird die Deformationsmethode verwendet.

Gesucht ist der Ersatzlastvektor $\{\bar{F}\}_n$, der unter den oben genannten Bedingungen die Feldbelastung sowie die Belastung durch die Rückstellkräfte beinhaltet.

Man geht aus von dem Verformungsansatz
(*: Größe bezieht sich auf ein Element)

$$w^*(x, z) = \sum_n f_n^*(x) \cdot Y_n(z) = \sum_n [w(x)] \left\{ u_k \right\}_n^* \cdot Y_n(z)$$

mit $Y_n(z) = \sin \frac{n\pi}{b} z$ oder $Y_n(z) = \cos \frac{n\pi}{b} z$

$[w_u(x)]$ Verlaufsmatrix für die Verformung in x-Richtung

$\left\{ u_k \right\}_n^*$ Knotenlinienverschiebungen für Reihenglied n

Als erstes werden die Verformungen an denjenigen Elementrändern definiert, an denen später die zu superponierenden Kräfte angreifen sollen. Diese Definition erfolgt in Abhängigkeit von den Elementverformungen $\{u_k\}_n^*$:

$$\{\alpha_k\}_n^* = [C]_n^* \cdot \{u_k\}_n^* \quad (2.46)$$

mit $\{\alpha_k\}_n^*$ gesuchte Randverformungen

$$[C]_n^* = \begin{bmatrix} [H]_n & & & 0 \\ & [H]_n & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & [H]_n \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

$[H]_n$ und $[C]_n^*$ sind

in /40/ ausführlich diskutiert.

Als nächstes werden die Rückstellkräfte definiert, welche die Verformungen, die durch die Feldbelastung entstehen, wieder rückgängig machen sollen:

$$\{F_Q\}_n^* = [G]_n^* \cdot \{Q_k\}_\alpha^* \quad (2.48)$$

- $\{F_Q\}_n^*$ äquivalente Knotenlast der Rückstellbelastung für das Reihenglied n
- $[G]_n^*$ Verlaufsmatrix
- $\{Q_k\}_\alpha^*$ Knotenpunktbelastung in Richtung der Verformung

Mittels der Freiheitsgradzuordnung werden $\{F_Q\}_n^*$ und $\{\alpha_k\}_n^*$ in die entsprechenden Vektoren für das Gesamtsystem überführt:

$$\{\alpha_k\}_n = [C]_n \cdot \{u_k\}_n \quad (2.49)$$

$$\{F_Q\}_n = [G]_n \cdot \{Q_k\}_\alpha \quad (2.50)$$

weiter gilt allgemein:

$$\{F\}_n = [SK]_n \{u_k\}_n \quad (2.51)$$

mit $[SK]$ der Systemsteifigkeitsmatrix aufgelöst nach $\{u_k\}_n$:

$$\{u_k\}_n = [SK]_n^{-1} \{F\}_n \quad (2.52)$$

eingesetzt in 2.49 ergibt für die Randverformungen durch die Rückstellbelastung:

$$\{\alpha_{K_a}\}_n = [C]_n \cdot [SK]_n^{-1} \{F_a\}_n \quad (2.53)$$

und für die Verformung durch die Feldbelastung:

$$\{\alpha_{K_o}\}_n = [C] \cdot [SK]_n^{-1} \cdot \{F_o\}_n \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} \{\alpha_{K_a}\}_n &= [C]_n \cdot [SK]_n^{-1} \cdot [G]_n \cdot \{Q_K\}_\alpha \\ [f]_n &= [C]_n \cdot [SK]_n^{-1} [G]_n \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} [f] &= \sum_n [C]_n [SK]_n^{-1} [G]_n \\ \{\alpha_{K_a}\} &= [f] \cdot \{Q_K\}_\alpha \end{aligned}$$

aufgelöst nach $\{Q_K\}_\alpha$:

$$\{Q_K\}_\alpha = [f]^{-1} \{\alpha_{K_a}\} \quad (2.56)$$

Die Verformungen $\{\alpha_{K_a}\}$, hervorgerufen durch die Rückstellkräfte, sollen gleich und entgegengesetzt den Verformungen sein, die durch die Feldbelastung (Index 0) entstehen:

$$\{\alpha_{K_a}\} = - \{\alpha_{K_o}\} \quad (2.57)$$

eingesetzt in

$$\{Q_K\}_\alpha = -[f]^{-1} \{\alpha_{K_0}\} \quad (2.58)$$

man erhält dann:

$$\{\alpha_{K_0}\} = \sum_n [C]_n [SK]_n^{-1} \{F_0\}_n \quad (2.59)$$

eingesetzt in:

$$\{Q_K\}_\alpha = -[f]^{-1} \sum_n [C]_n [SK]_n^{-1} \{F_0\}_n \quad (2.60)$$

Die aus beiden Belastungen resultierenden Verformungen werden superponiert; der resultierende Verschiebungsvektor $\{u_K\}_n$ ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} \{u_K\}_n &= [SK]_n^{-1} \{F_0\}_n + [SK]_n^{-1} \{F_G\}_n \\ \{u_K\}_n &= [SK]_n^{-1} (\{F_0\}_n + \{F_G\}_n) \end{aligned} \quad (2.61)$$

2.50 eingesetzt in 2.61

$$\{u_K\}_n = [SK]_n^{-1} (\{F_0\}_n + [G]_n \{Q_K\}_\alpha)$$

Der Ersatzvektor wird damit:

$$\{\bar{F}\}_n = \{F_0\}_n + [G]_n \{Q_K\}_\alpha$$

Es ergibt sich schließlich der endgültige Lastvektor zu

$$\{\bar{F}\}_n = \{F_0\}_n - [G]_n [f]^{-1} \sum_n [C]_n [SK]_n^{-1} \{F_0\}_n \quad (2.62)$$

In Tabelle 2.3 ist ein Flußdiagramm einer solchen Berechnung dargestellt.

2.7.2 Eigenformmethode

Die Eigenformmethode stammt von Cheng /3/ und ist von diesem mit Erfolg auf Plattenprobleme angewendet worden. Der Ansatz für das Verschiebungsfeld wird in einer Richtung durch die jeweilige Eigenform des Balkens unter Beachtung der gewünschten Randbedingungen und in der anderen Richtung durch die Hermitpolynome des Balkens gebildet.

Leider ist es nicht möglich, die Funktionen der Eigenformen zur Umformung der partiellen Dgl. in die gewöhnliche Dgl. 4. Ordnung mit konstanten Koeffizienten zu verwenden.

Daher muß man mit Hilfe der Energiemethode die Integration der Steifigkeitsmatrix durchführen. Es liegt auf der Hand, daß solche Elemente Näherungslösungen darstellen, deren Genauigkeit sorgfältig überprüft werden muß. Dieses Vorgehen ist für Beulprobleme und Schwingungsprobleme geeignet, für inhomogene Probleme ist dieses Vorgehen dagegen nicht geeignet.

2.7.3 Differenzenverfahren

Die Möglichkeit, mit Hilfe der Differenzenrechnung feste Einspannungen zu berücksichtigen, soll am Beispiel der Plattenelemente erläutert werden. Gegeben sei eine an 2 Seiten eingespannte und an 2 Seiten frei aufgelegte Platte. Abb. 2.9.

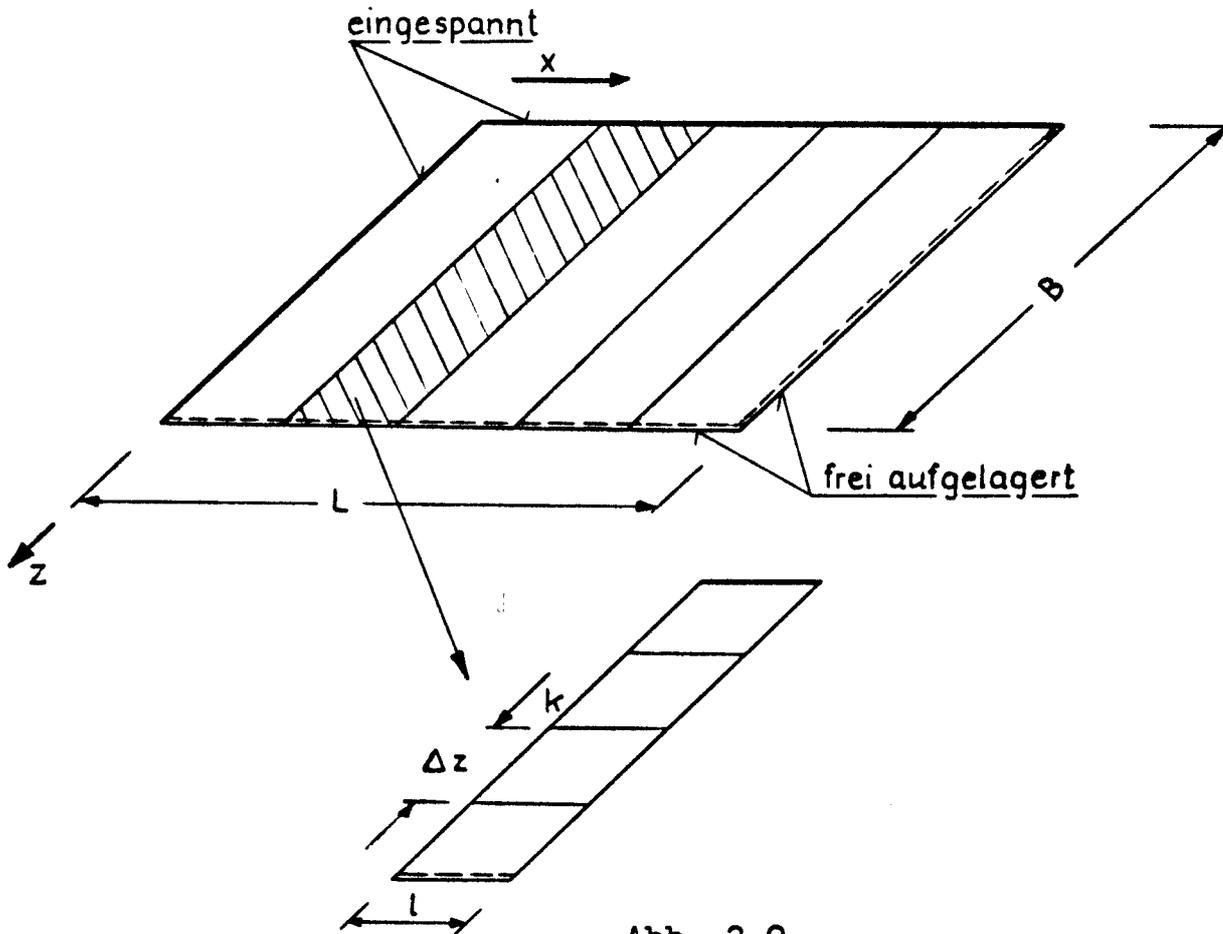


Abb. 2.9

Die Dgl. der Platte in y-Richtung in Differenzen lautet /23/

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{2}{\Delta z^2} \left(\frac{d^2 w_{k-1}}{dx^2} - 2 \frac{d^2 w_k}{dx^2} + \frac{d^2 w_{k+1}}{dx^2} \right) + \frac{1}{\Delta z^4} \left(w_{k-2} - 4 w_{k-1} + 6 w_k - 4 w_{k+1} + w_{k+2} \right) = \frac{P_i}{D} \quad (2.63)$$

d.h., man muß die beiden sogenannten Differenzensterne

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

und

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

für jeden Punkt in z-Richtung anschreiben. Man erhält eine Differenzen-Matrizen-Differentialgleichung

$$[I]\{w\}'''' + [A]\{w\}'' + [B]\{w\} = \frac{1}{D}\{P\} \quad (2.64)$$

Für die Randbedingungen gilt $z = 0$, $w' = 0$ und $z = 8$, $w = 0$, also Symmetrie- und Antimetriebedingung.

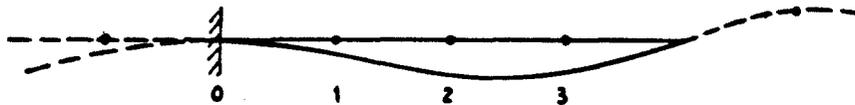


Abb. 2.10

Die Matrizen $[A]$ und $[B]$ lauten

$$[A] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & & 1 & -2 & \\ & & & & \end{bmatrix} \cdot \frac{2}{\Delta z^2} \text{ bzw. } [B] = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 & & \\ -4 & 6 & -4 & & \\ & & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\Delta z^4} \quad (2.65)$$

Die Lösungen der allg. gewöhnlichen Differentialgleichung sind nun wieder verwendbar.

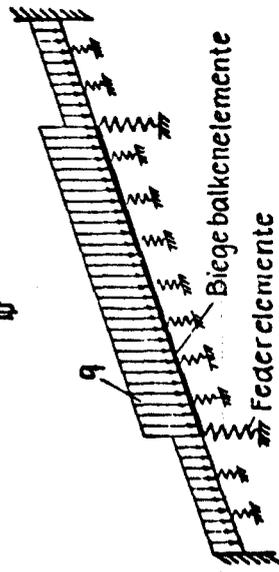
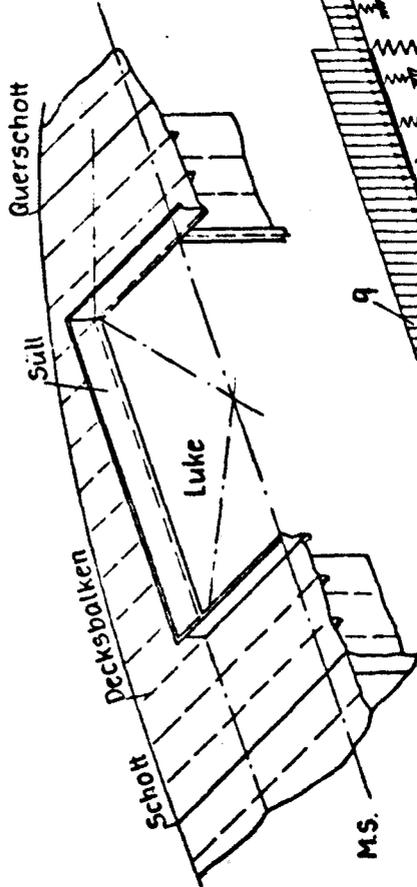
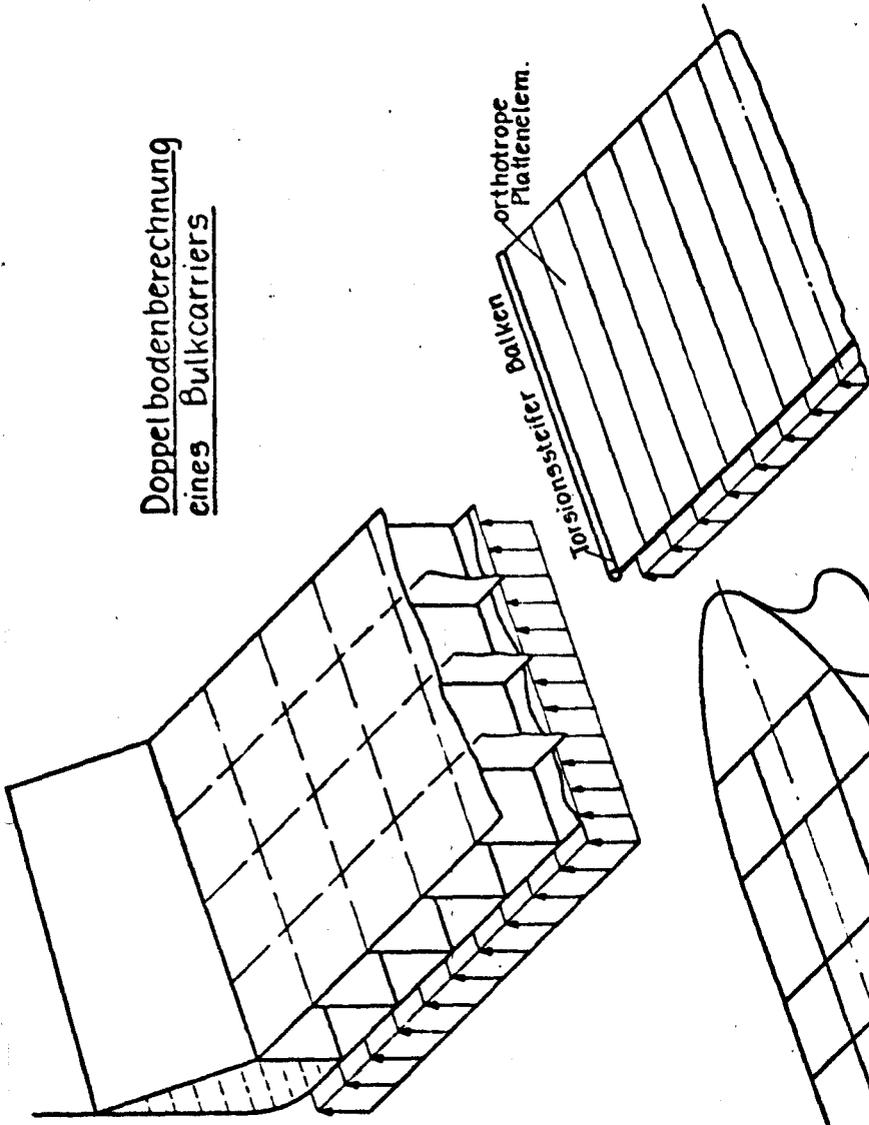
Die Koeffizienten $(a/l)^2$ bzw. $(b/l)^4$ sind nunmehr lediglich als die Matrizen $[A]$ bzw. $[B]$ zu interpretieren. Verwendet man die exakte Lösung, dann treten in den trigonometrischen Funktionen als Argument arithmetische Ausdrücke der Matrizen $[B]$ und $[A]$ auf.

Diese sind mit Hilfe der Matrizen-Taylorreihen zu entwickeln. Die Steifigkeitsmatrix in gekürzter Potenzreihenentwicklung lautet dann wie dargestellt. (Tabelle 2.5 - 2.7)

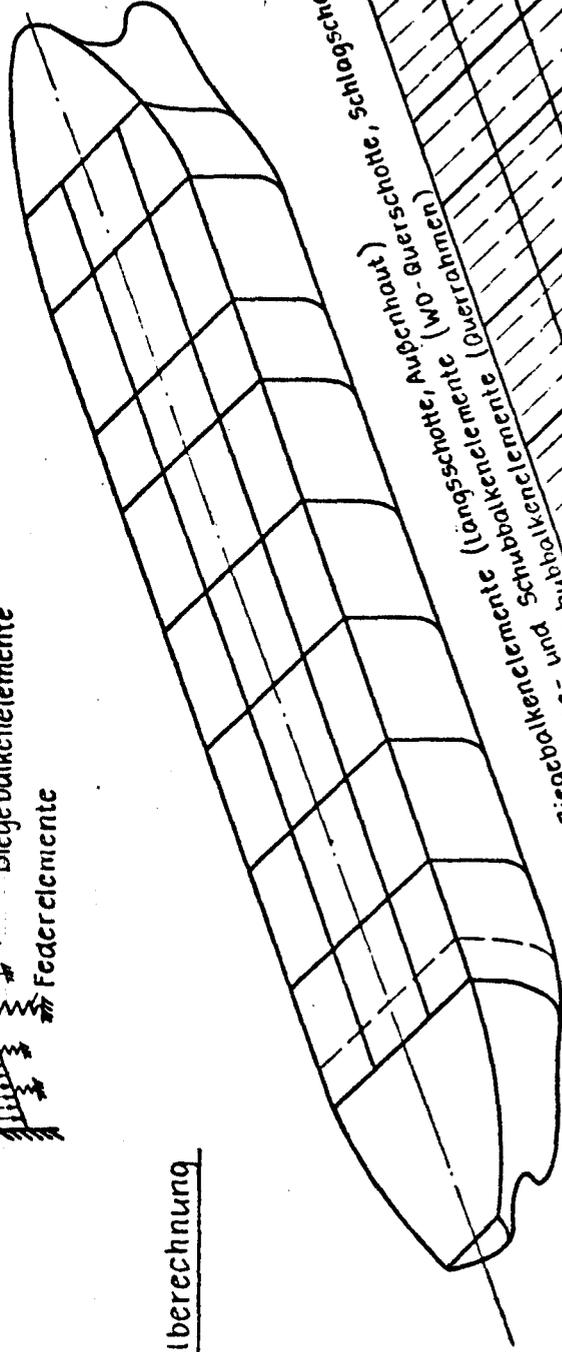
Das zu lösende Gesamtgleichungssystem, welches man durch Superponierung erhält, hat eine größere Bandbreite als bei freier Einspannung, (statt 4, 12 Koeffizienten) und ist ein größeres (statt 14, 42 Gleichungen). Der Speicherplatzbedarf steigt also rasch an. (Abb. 2.11)

Es ist sicher ein weites Feld, die für den jeweiligen Optimierungsprozeß geeignete Methode zu ermitteln. Man kann, das hat dieser Abschnitt gezeigt, wohl keine allgemein als am günstigsten bezeichnete Methode angeben. Die schnellsten Berechnungsverfahren werden die sein, die am stärksten am Problem orientiert werden können.

Doppelbodenberechnung eines Bulkcarriers



Lukensüllberechnung



Gesamtfestigkeitsrechnung für Tanker

$$y^{iv} + \left(\frac{a}{l}\right)^2 \cdot y'' - \left(\frac{b}{l}\right)^4 \cdot y = \text{const.}$$

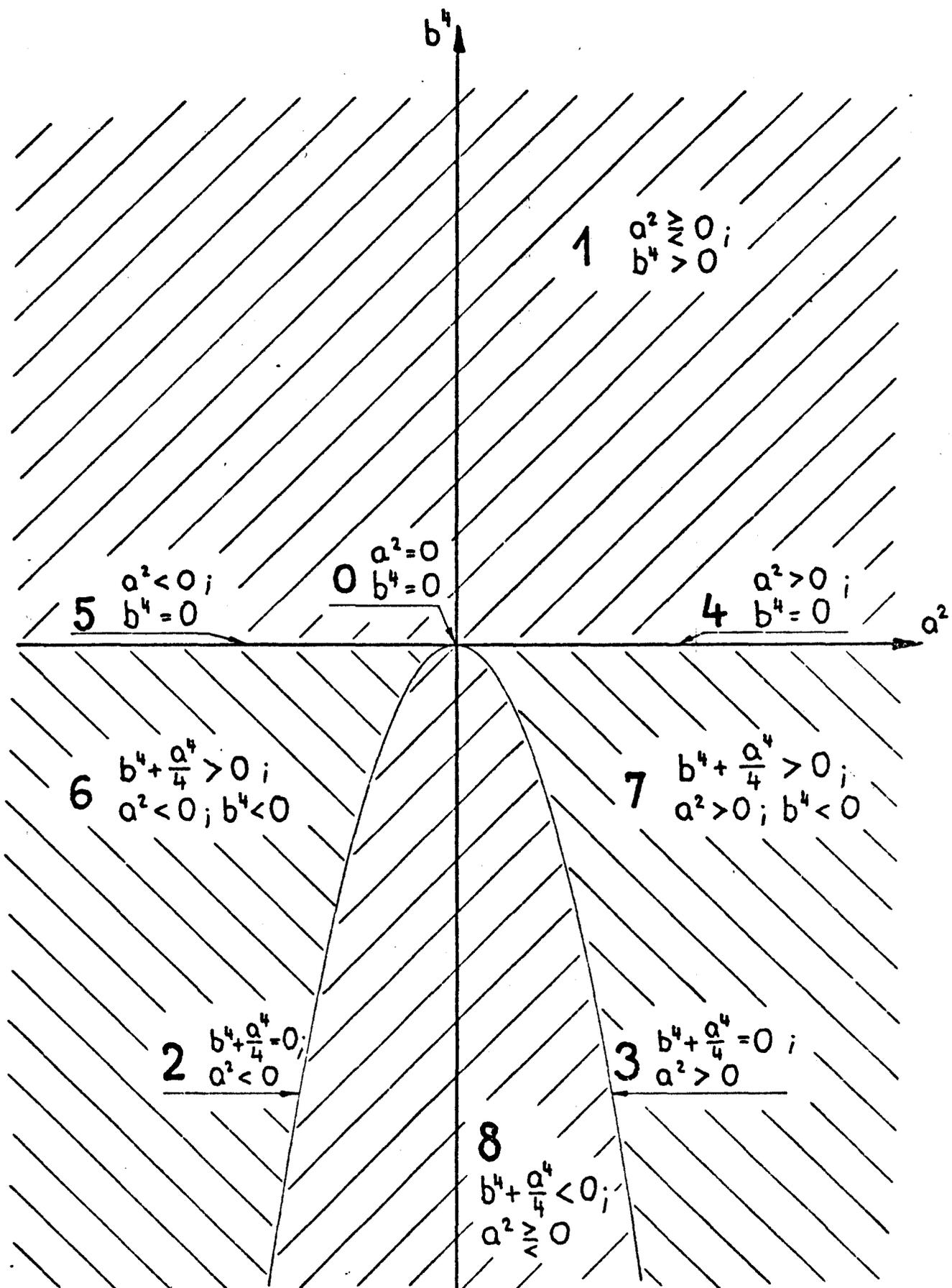


Abb. 2.2

Gültigkeitsbereiche der neun Differentialgleichungstypen

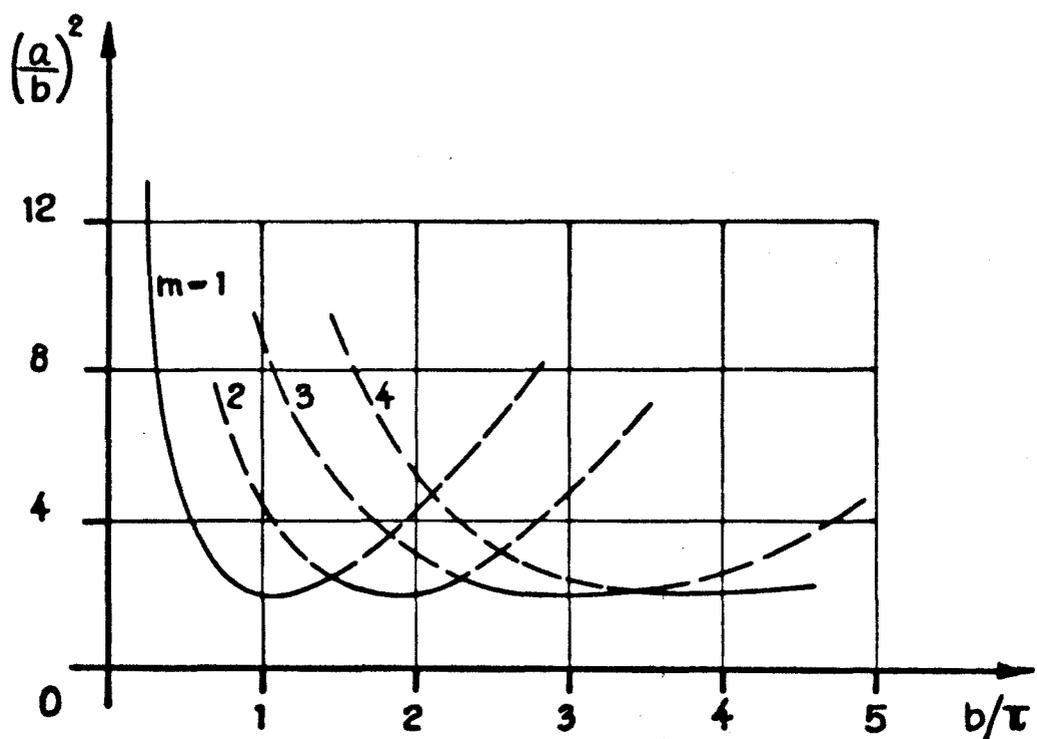


Abb. 2.3

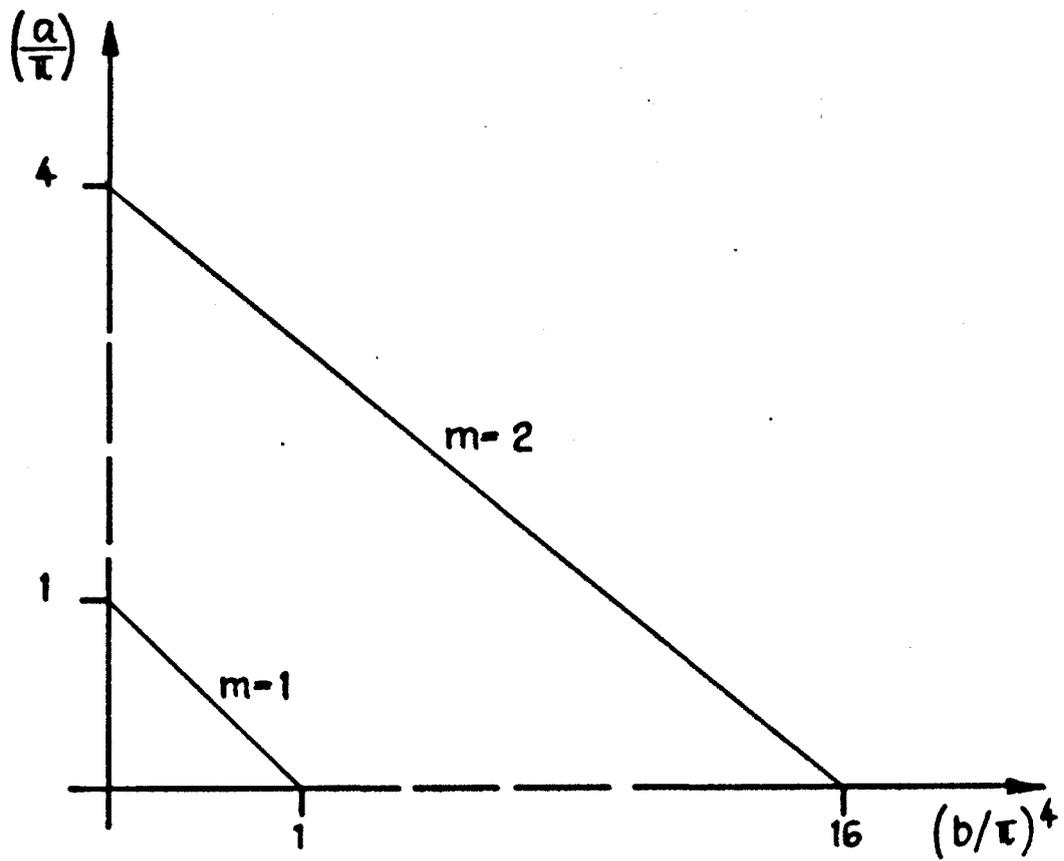
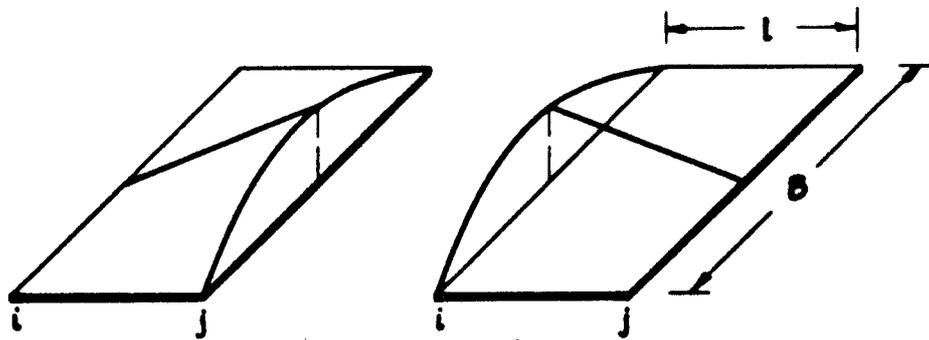
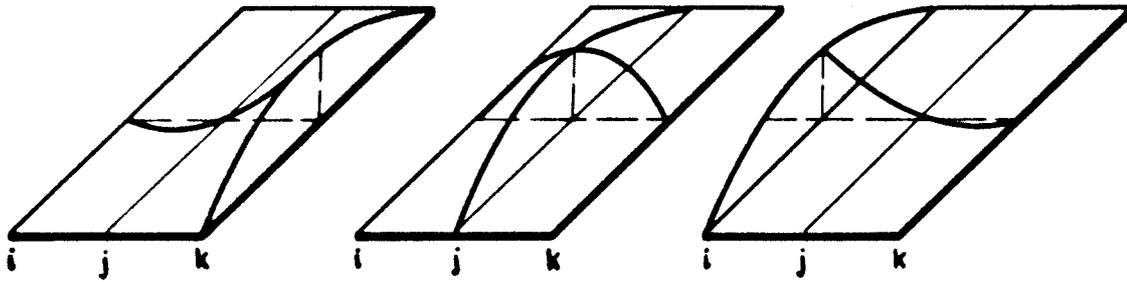


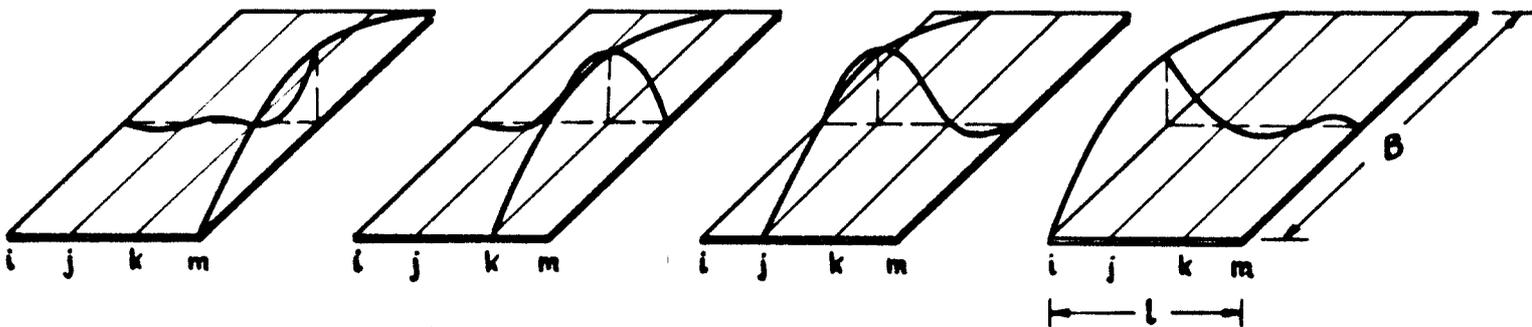
Abb. 2.4



SCHEI 2 $[10] = \left[1 - \frac{x}{l} \mid \frac{x}{l} \right]$



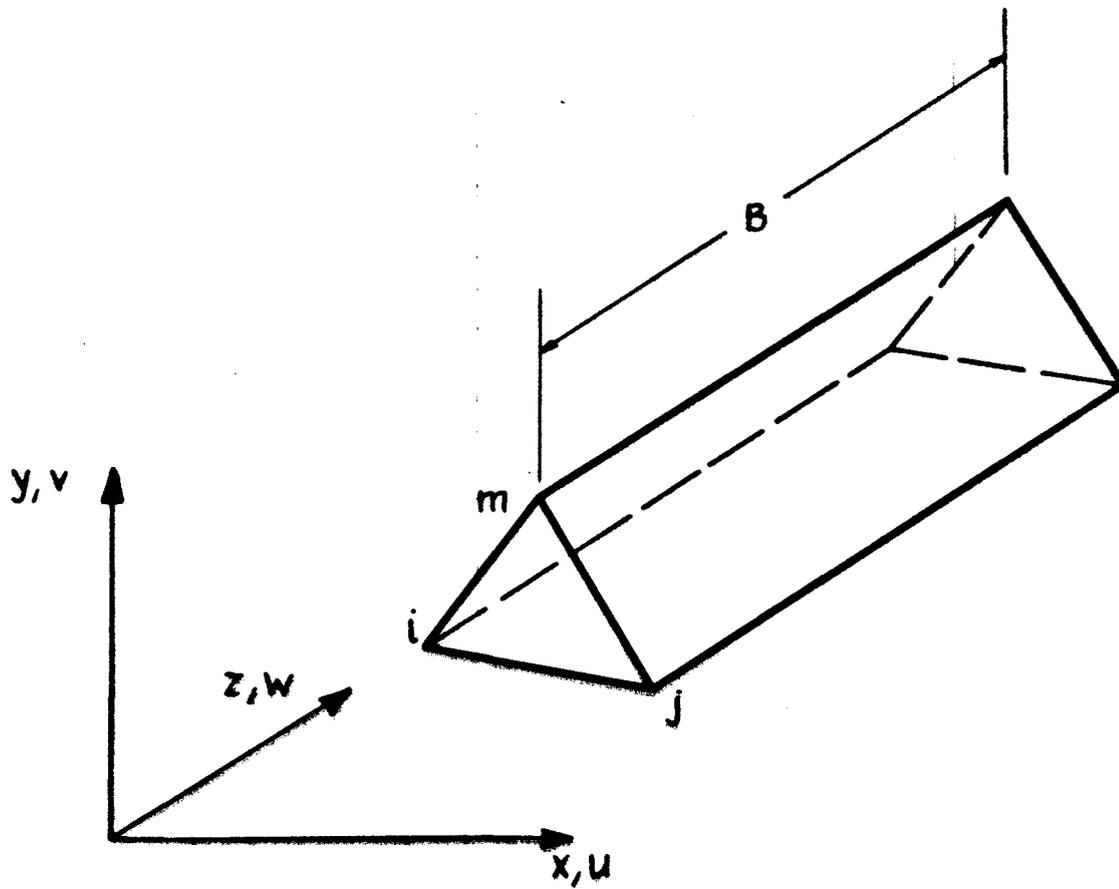
SCHEI 3 $[10] = \left[1 - 9\frac{x}{l} + 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 \mid 4\left(\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l}\right)^2\right) \mid -\frac{x}{l} + 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 \right]$



SCHEI 4

$$[10]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(2 - 11\frac{x}{l} + 18\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 9\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right) \\ \frac{1}{2} \left(18\frac{x}{l} - 45\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 27\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right) \\ \frac{1}{2} \left(-9\frac{x}{l} + 36\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 27\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right) \\ \frac{1}{2} \left(2\frac{x}{l} - 9\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 9\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right) \end{bmatrix}$$

Abb. 2.5



Dreieckiges Volumenelement

Abb. 2.6

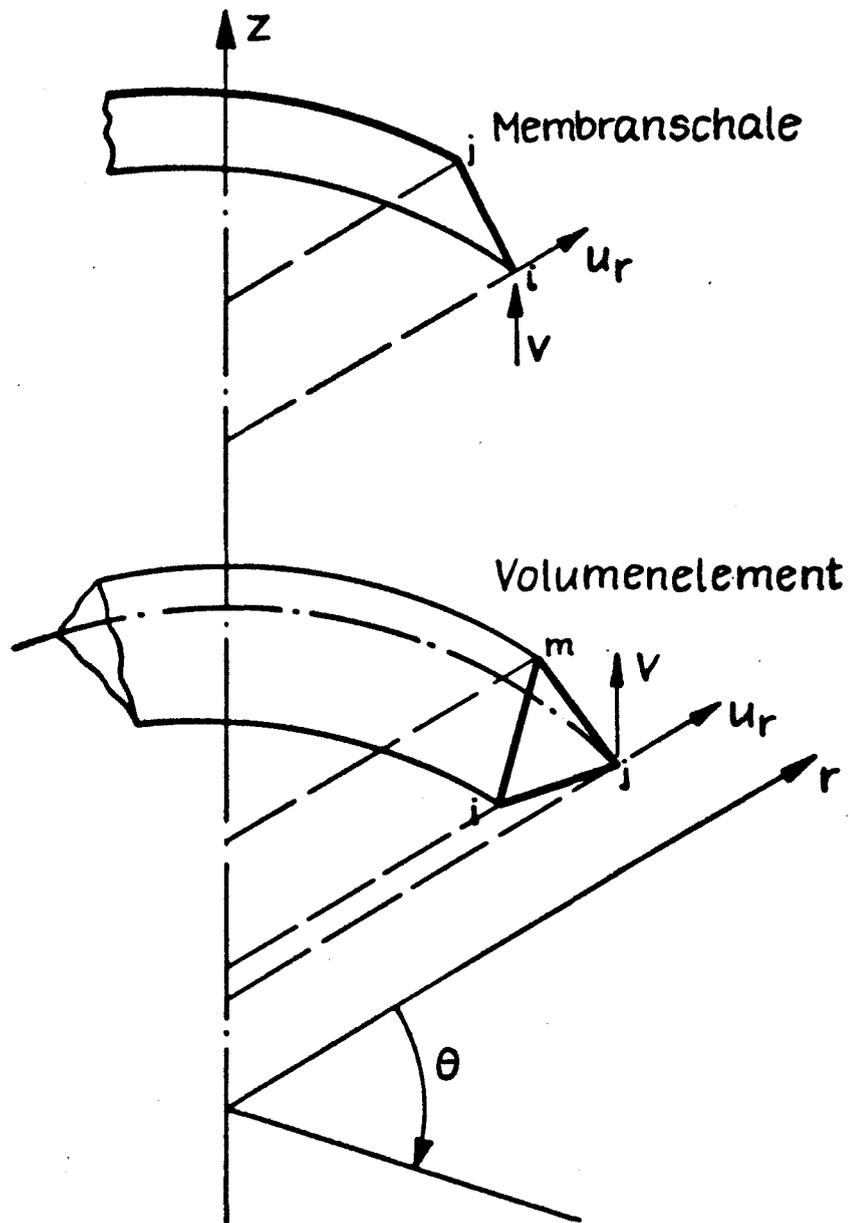
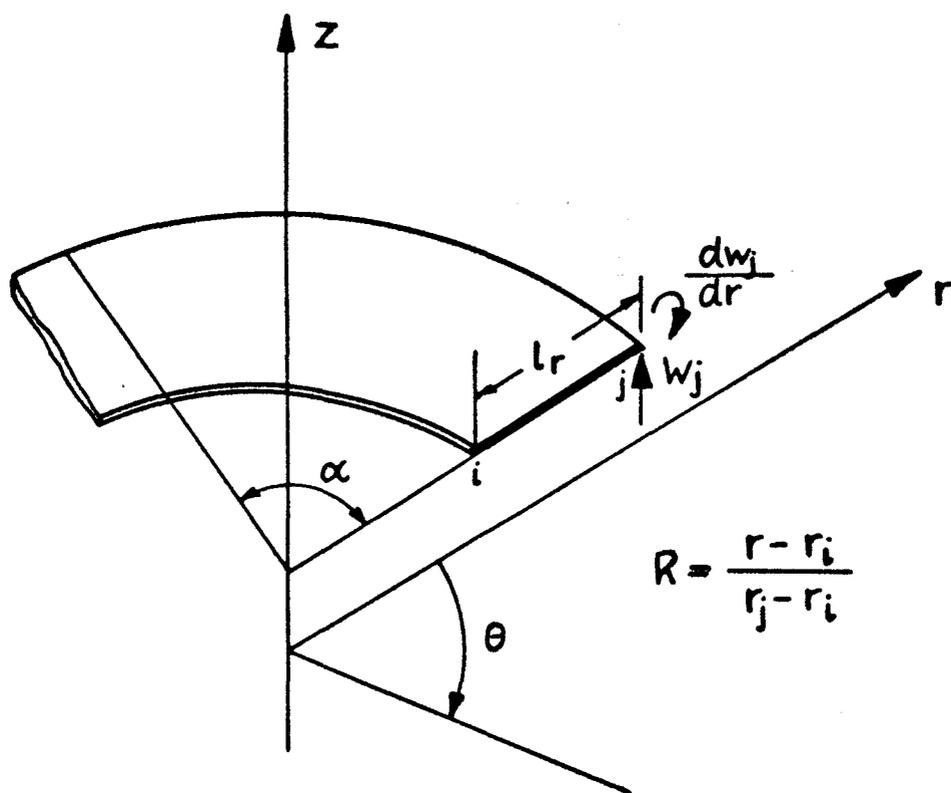


Abb. 2.7



Sektorplatte

Abb. 2.8

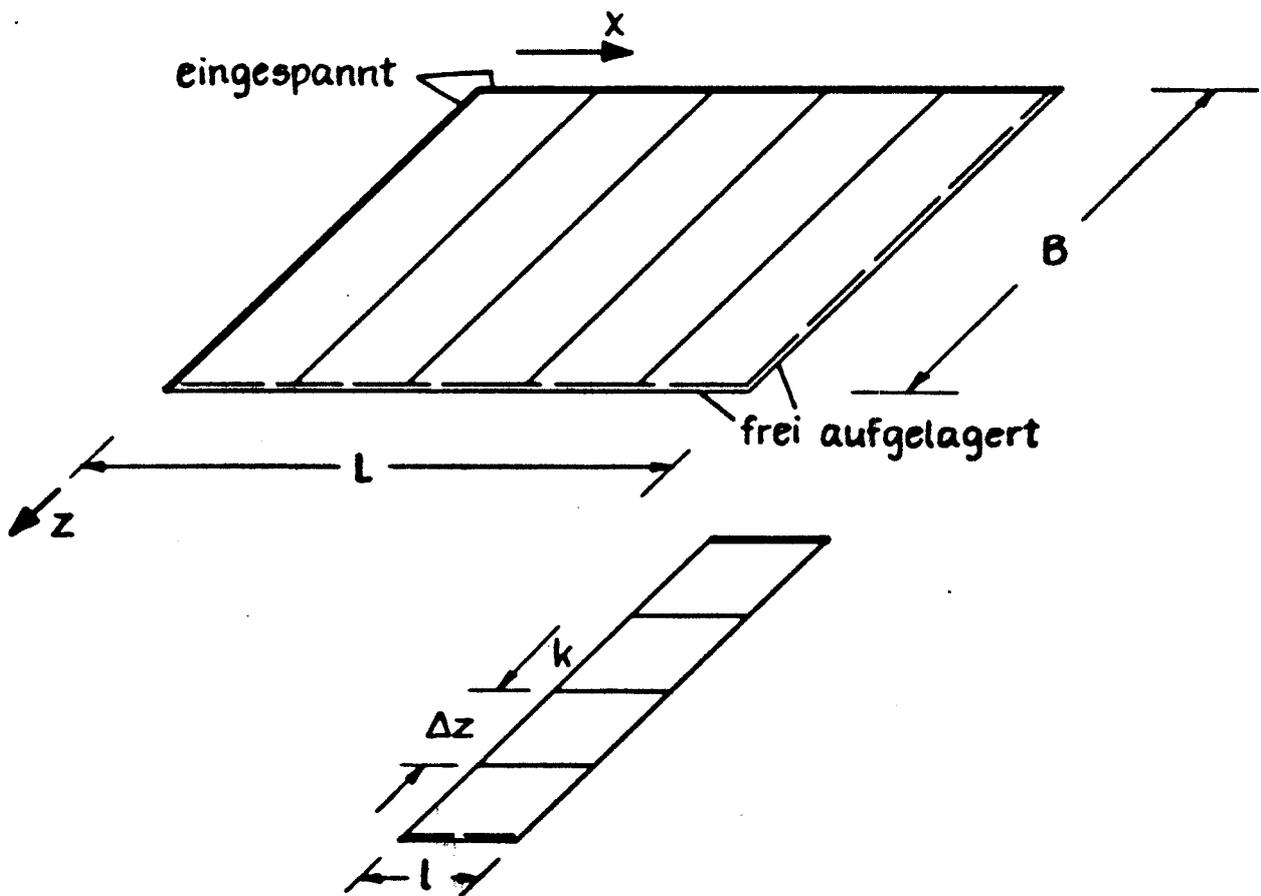
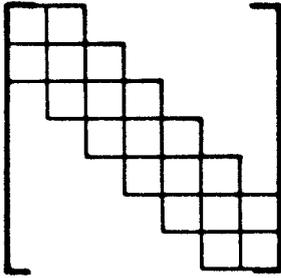
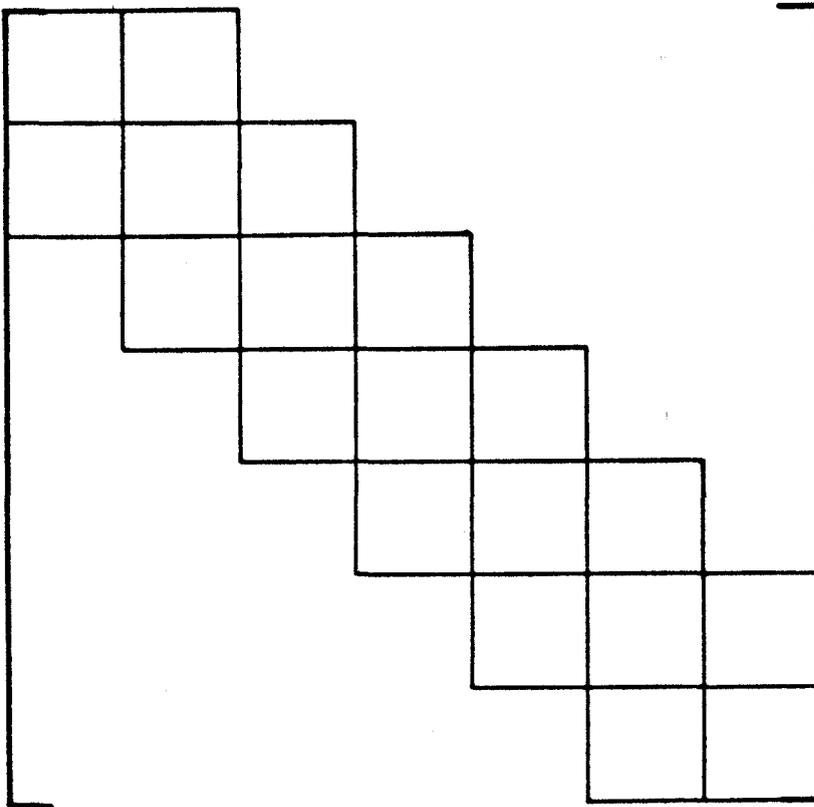


Abb. 2.9



Gleichungssystem für
6 Elemente frei aufgelagert
 $14 \times 4 = 56$ Speicherplätze



Gleichungssystem für 6 Elemente
eine Seite fest andere Seite
frei aufgelagert

$42 \times 12 = 504$ Speicherplätze

Abb. 2.11

$$y^{IV} + \left(\frac{a}{l}\right)^2 y'' - \left(\frac{b}{l}\right)^4 y = \text{const.}$$

Typ	Gültigkeitsbereich	Differentialgleichung mit den entsprechenden positiv gesetzten Koeffizienten $a^2 = a^2 $ und $b^4 = b^4 $	Homogene Lösung	Eigenwerte
0	$a^2 = 0; b^4 = 0$	$y^{IV} = \text{const.}$	$y(x) = A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + A_4 x^3$	$\lambda_{1,2} = 0$
1	$a^2 \geq 0; b^4 > 0$	$y^{IV} \pm \left(\frac{a^2}{l}\right)^2 y'' - \left(\frac{b^4}{l}\right)^4 y = \text{const.}$	$y(x) = A_1 \cdot \cosh(\lambda_1 \frac{x}{l}) + A_2 \cdot \sinh(\lambda_1 \frac{x}{l}) + A_3 \cdot \cos(\lambda_2 \frac{x}{l}) + A_4 \cdot \sin(\lambda_2 \frac{x}{l})$	$\lambda_1 = \sqrt{\sqrt{b^4} + a^4/4} \pm a^2/2$ $\lambda_2 = \sqrt{\sqrt{b^4} + a^4/4} \pm a^2/2$
2	$b^4 + \frac{a^4}{4} = 0; a^2 < 0$	$y^{IV} - 2\alpha^2 y'' + \alpha^4 y = \text{const.}$ mit $\alpha^2 = \frac{1}{2} \cdot \left \frac{a^2}{l} \right $	$y(x) = A_1 \cdot \cosh(\alpha x) + A_2 \cdot \sinh(\alpha x) + A_3 \cdot x \cdot \sinh(\alpha x) + A_4 \cdot x \cdot \cosh(\alpha x)$	$\lambda_{1,2} = \alpha$
3	$b^4 + \frac{a^4}{4} = 0; a^2 > 0$	$y^{IV} + 2\alpha^2 y'' + \alpha^4 y = \text{const.}$ mit $\alpha^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{l^2}$	$y(x) = A_1 \cdot \cos(\alpha x) + A_2 \cdot \sin(\alpha x) + A_3 \cdot x \cdot \sin(\alpha x) + A_4 \cdot x \cdot \cos(\alpha x)$	$\lambda_{1,2} = \alpha$
4	$a^2 > 0; b^4 = 0$	$y^{IV} + \left(\frac{a^2}{l}\right)^2 y'' = \text{const.}$	$y(x) = A_1 + A_2 x + A_3 \cos(\frac{a^2 x}{l}) + A_4 \sin(\frac{a^2 x}{l})$	$\lambda_{1,2} = a^2$
5	$a^2 < 0; b^4 = 0$	$y^{IV} - \left(\frac{a^2}{l}\right)^2 y'' = \text{const.}$	$y(x) = A_1 + A_2 x + A_3 \cosh(\frac{a^2 x}{l}) + A_4 \sinh(\frac{a^2 x}{l})$	$\lambda_{1,2} = a^2$
6	$b^4 + \frac{a^4}{4} > 0; a^2 < 0;$ $b^4 < 0$	$y^{IV} - \left(\frac{a^2}{l}\right)^2 y'' + \left(\frac{b^4}{l}\right)^4 y = \text{const.}$	$y(x) = A_1 \cdot \cosh(\lambda_1 \frac{x}{l}) + A_2 \cdot \sinh(\lambda_1 \frac{x}{l}) + A_3 \cdot \cos(\lambda_2 \frac{x}{l}) + A_4 \cdot \sin(\lambda_2 \frac{x}{l})$	$\lambda_1 = \sqrt{a^2/2 + \sqrt{a^4/4 - b^4}}$ $\lambda_2 = \sqrt{a^2/2 - \sqrt{a^4/4 - b^4}}$
7	$b^4 + \frac{a^4}{4} > 0; a^2 > 0;$ $b^4 < 0$	$y^{IV} + \left(\frac{a^2}{l}\right)^2 y'' + \left(\frac{b^4}{l}\right)^4 y = \text{const.}$	$y(x) = A_1 \cdot \cos(\lambda_1 \frac{x}{l}) + A_2 \cdot \sin(\lambda_1 \frac{x}{l}) + A_3 \cdot \cos(\lambda_2 \frac{x}{l}) + A_4 \cdot \sin(\lambda_2 \frac{x}{l})$	$\lambda_1 = \sqrt{a^2/2 + \sqrt{a^4/4 - b^4}}$ $\lambda_2 = \sqrt{a^2/2 - \sqrt{a^4/4 - b^4}}$
8	$b^4 + \frac{a^4}{4} < 0; a^2 \geq 0$	$y^{IV} \pm \left(\frac{a^2}{l}\right)^2 y'' + \left(\frac{b^4}{l}\right)^4 y = \text{const.}$	$y(x) = A_1 \cdot \cosh(\lambda_1 \frac{x}{l}) \cdot \cos(\lambda_2 \frac{x}{l}) + A_2 \cdot \sinh(\lambda_1 \frac{x}{l}) \cdot \cos(\lambda_2 \frac{x}{l}) + A_3 \cdot \sinh(\lambda_1 \frac{x}{l}) \cdot \sin(\lambda_2 \frac{x}{l}) + A_4 \cdot \cosh(\lambda_1 \frac{x}{l}) \cdot \sin(\lambda_2 \frac{x}{l})$	$\lambda_1 = \sqrt{b^4/2 \pm a^2/4}$ $\lambda_2 = \sqrt{b^4/2 \pm a^2/4}$

Tabelle 2.1

Zusammenstellung der neun Differentialgleichungstypen und ihrer Lösungen

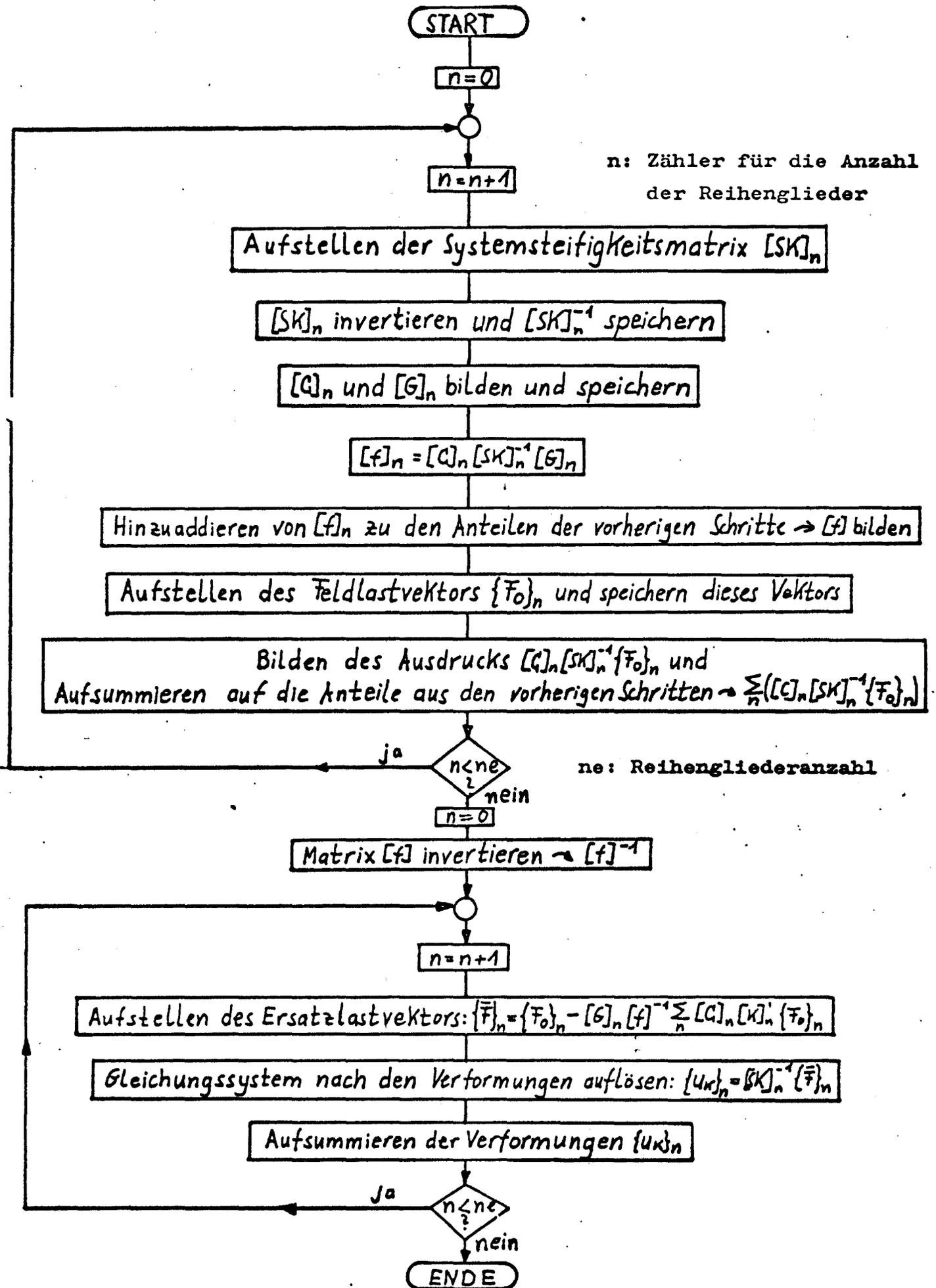


Tabelle 2.4

1092	-624	156	1541	-881	221	378	-216	54	-911	521	-131
	936	-624	-881	1321	-881	-216	324	-216	521	-781	521
		780	221	-881	1101	54	-216	270	-131	521	-651
			281^2	-161^2	41^2	911	-521	131	-211^2	121^2	-31^2
				241^2	-161^2	-521	781	-521	121^2	-181^2	121^2
					201^2	131	-521	651	-31^2	121^2	-151^2
						1092	-624	156	-1541	881^2	-221
							936	-624	881	-1321	881
								780	-221	881	-1101
									281^2	-161^2	41^2
										241^2	-161^2
											201^2

symmetrisch

Tabelle 2.7

3. Vergleiche mit in der Literatur angegebenen Elementen

Von Cheung/1/, /2/, /3/ sind Platten und Scheibenelemente mit halbanalytischen Ansätzen angegeben worden, praktische Berechnungen von Plattentragwerken sowie die Bestimmung der Eigenfrequenzen weisen diese Elemente als recht gut brauchbar aus.

Von Yoshida und Oka /4/ und von Yoshida /5/ werden weitere praktische Plattenprobleme sowie einige kritische Beulwerte für schiffbauliche Probleme angegeben. Schließlich werden ebenfalls für örtliche Beulprobleme halbanalytische Finite Elemente von Przemieniecki /6/ angegeben.

Diese Elemente sind mit Hilfe des Prinzips vom Minimum der potentiellen Energie abgeleitet. Die geometrischen und Massenmatrizen sind identisch mit denen aus der Taylorreihenentwicklung.

Die linearen Teilsteifigkeitsmatrizen unterscheiden sich in den Koeffizienten k_{12}^i und k_{34}^i . Für diese Koeffizienten gilt $k_{12}^i = -k_{34}^i$, außerdem sind diese Teilkoeffizienten unabhängig von der Elementlänge (Abb. 3.1 und Abb. 3.2).

Für aufgelegte Platten ergeben sich die gleichen Ergebnisse

für einen freien Rand ergeben sich Unterschiede.

Nur für $\nu=0$ gibt es übereinstimmende Ergebnisse. Für $\nu \neq 0$ können beide Lösungen nicht richtige Ergebnisse liefern, da die Randbedingungen am freien Rand nicht erfüllt werden.

$$\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \frac{b}{l} \frac{D}{30} \begin{bmatrix} 36 & (3+15\nu)l & -36 & 3l \\ & 4l^2 & -3l & -36 \\ & & 36 & -(3+15\nu)l \\ \text{symmetrisch} & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Teilsteifigkeitsmatrix nach Przemieniecki

$$\frac{2}{b} \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \frac{b}{l} \frac{D}{30} \begin{bmatrix} 36 & 3l & -36 & 3l \\ & 4l^2 & -3l & 36 \\ & & 36 & 3l \\ \text{symmetrisch} & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Teilsteifigkeitsmatrix aus Taylorreihenentwicklung

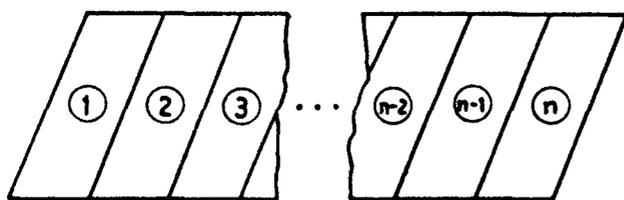


Abb. 3.1 Rechenmodell

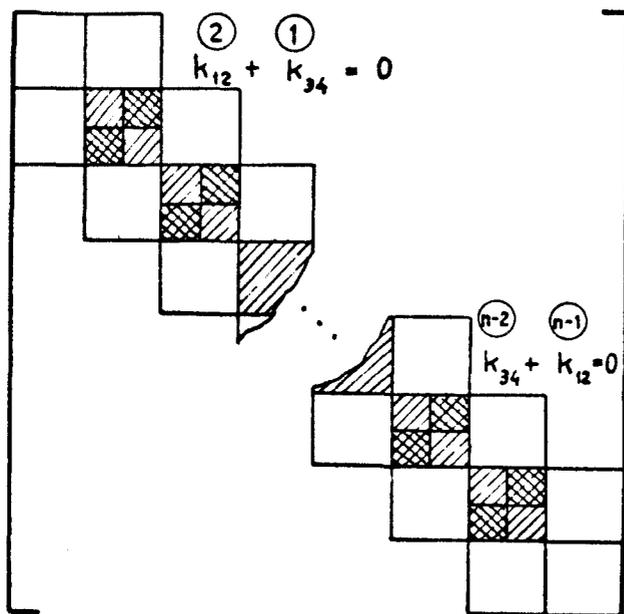


Abb. 3.2 Systemsteifigkeitsmatrix

Weiter wird von Kawai /11/ ein Finites Balkenelement unter Verwendung der gemischten St. Venant'schen und Wölbkraft-torsion angegeben.

Für den Verlauf der Verschiebungsfelder werden die Hermiteschen Polynome 2. bzw. 4. Ordnung verwendet. Auch dieses Element ist identisch mit der hier vorgestellten Taylorreihenentwicklung.

Auch die von Barsoum und Gallagher /7/ vorgeschlagenen Elemente zur Berechnung von Kipp- und Drillknicken sind unter Zuhilfenahme der Hermiteschen Polynome unter Verwendung des Prinzips vom Minimum der potentiellen Energie entwickelt und entsprechen den vom Autor mit Taylorreihen dargestellten Elementen.

Interessant ist es, daß man auch sog. nichtkonservatives Stabilitätsversagen mit Finiten Elementen behandeln kann, wie Barsoum gezeigt hat /9/. Bis auf die nichtkonservative geometrische Steifigkeitsmatrix entsprechen die Ausdrücke für die lineare, geometrische und Massenmatrix der Taylorreihendarstellung.

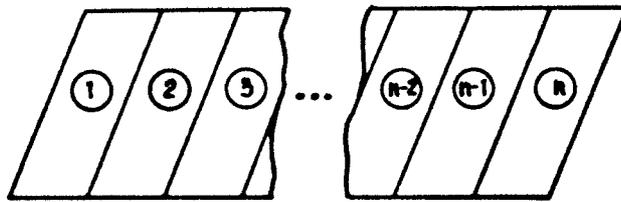


Abb.3.1 Rechenmodell

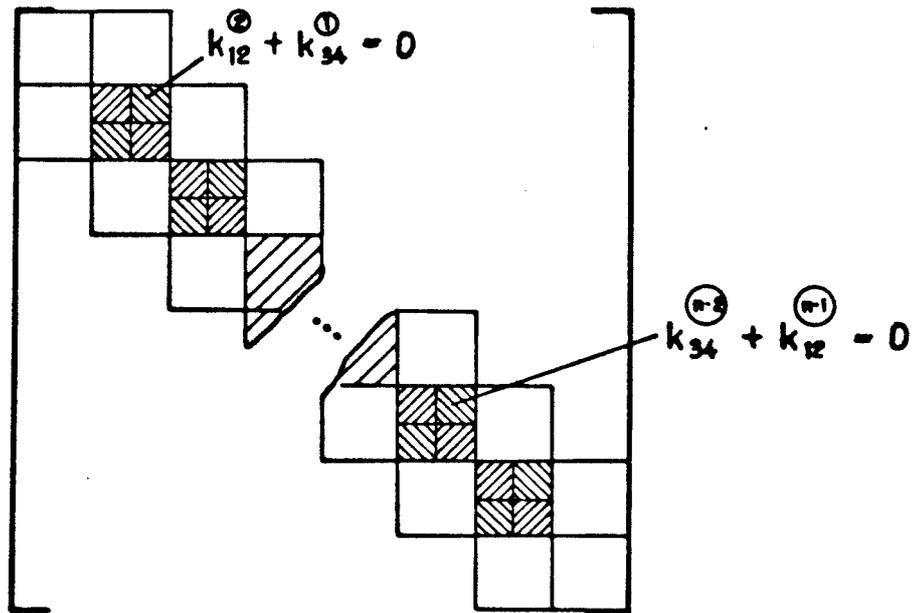
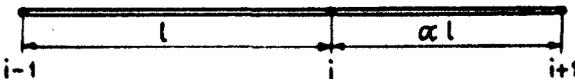


Abb. 3.2 Systemsteifigkeitsmatrix

4. Genauigkeit

Um die Güte der Taylorreihenentwicklungen zu überprüfen, wird für ein Zweielementmodell die Gleichgewichtsgleichungen für den mittigen Knoten entwickelt /2/. Die Freiwerte an den Knoten $i-1$ bzw. $i+1$ werden in Taylorreihen an der Stelle i entwickelt.

Mit Abb.4.1 erhält man für Probleme die mit der Dgl. 2. Ordnung bearbeitet werden

Abb. 4.1  $D = \text{const}$ (4.1)

$$-\frac{1}{l} \left(1 \mp \frac{a_n^2}{6}\right) y_{i-1} + \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{\alpha l}\right) \left(1 \pm \frac{a_n^2}{3}\right) y_i - \frac{1}{\alpha l} \left(1 \mp \frac{a_n^2}{6}\right) y_{i+1} = 0$$

Nach der Entwicklung von y_{i-1} bzw. y_{i+1} erhält man die Dgl. am Ort i mit

$$y_i'''' \mp \left(\frac{a_n}{l}\right)^2 \frac{1}{\alpha} y_i'' + \left(\frac{a_n}{l}\right)^4 \frac{l^2}{6\alpha} y_i' \dots - \frac{1}{3} \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha} y_i''' + \frac{l^2}{12} \frac{1+\alpha^3}{1+\alpha} y_i'' \dots = 0 \quad (4.2)$$

Führt man den Grenzübergang mit $\alpha \rightarrow 1$ bzw. $l \rightarrow 0$ durch, dann verbleibt die Dgl.

$$y_i'' \mp \left(\frac{a_n}{l}\right)^2 y_i = 0 \quad (4.3)$$

Eine schnelle Konvergenz mit l^2 ist zu erwarten, wenn $\alpha = 1$ ist. Ist $\alpha \neq 1$, so ist die Konvergenz nicht so schnell zu erwarten.

Numerische Überprüfung tut not. Bei genauer werdender Einteilung wird α vernünftigerweise allerdings auch gegen 1 streben, so daß die Konvergenz auch bei nicht äquidistanter Einteilung zu erwarten ist.

Für die Dgl. 4. Ordnung ergibt sich dann die Gleichung für die Verschiebung y_i (3. Gleichung Abb. 4.2).

$$k_{31}^{(1)} y_{i-1} + k_{32}^{(1)} y'_{i-1} + (k_{33}^{(1)} + k_{33}^{(2)}) y_i + (k_{34}^{(1)} + k_{12}^{(2)}) y'_i + k_{35}^{(2)} y_{i+1} + k_{36}^{(2)} y'_{i+1} = 0 \quad (4.3)$$

Die Steifigkeitskoeffizienten k_{ij} bzw. für das 2. Element k_{ij} erhält man aus der Taylorreihendarstellung. Entwickelt man nun die Funktionen y_{i-1} , y'_{i-1} bzw. y_{i+1} , y'_{i+1} am Ort i so erhält man nach längerer Zwischenrechnung

$$\begin{aligned} & -y_i \left(\frac{b_n}{l} \right)^4 - y'_i \left\{ \frac{3}{30l} \left(\frac{a_n}{\alpha l} \right)^2 (1-\alpha^2) + y_i'' \left[-\frac{6}{l} (1-\alpha) - \frac{6}{\alpha^3 l} (1-\alpha^2) + \frac{18}{30} \left(\frac{a_n}{\alpha l} \right)^2 \frac{l^2}{\alpha l} (1+\alpha^3) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{3}{30} \left(\frac{a_n}{\alpha l} \right)^2 \alpha l (1+\alpha^2) - \frac{54}{420} \left(\frac{b_n}{\alpha l} \right)^4 \frac{l^3}{2} \alpha (1+\alpha^3) + \frac{13}{420} \left(\frac{b_n}{\alpha l} \right)^4 \alpha^3 l^3 (1+\alpha^2) \right] \right\} \\ & + y_i''' \left\{ -\frac{2}{\alpha^3} (1-\alpha^3) + 3(1-\alpha^2) + \frac{1}{5} \left(\frac{a_n}{\alpha l} \right)^2 \frac{l^2}{\alpha} (1-\alpha^3) - \frac{1}{20} \left(\frac{a_n}{\alpha l} \right)^2 (\alpha l)^2 (1-\alpha^2) \right. \\ & \left. + \frac{9}{420} \left(\frac{b_n}{\alpha l} \right)^4 l^4 (1-\alpha) + \frac{13}{840} \left(\frac{b_n}{\alpha l} \right)^4 l^4 (1-\alpha^2) \right\} \\ & + y_i^{(iv)} \left\{ 2\alpha l - \frac{1}{2} \frac{1+\alpha}{\alpha} + \frac{1}{40} \left(\frac{a_n}{\alpha l} \right)^2 l^3 \frac{1+\alpha^3}{\alpha} - \frac{1}{60} \left(\frac{a_n}{\alpha l} \right)^2 l^3 \alpha^3 (1+\alpha^2) \right. \\ & \left. - \frac{54}{420} \left(\frac{b_n}{\alpha l} \right)^4 \frac{\alpha l^5}{24} (1+\alpha^3) + \frac{13}{420} \left(\frac{b_n}{\alpha l} \right)^4 \frac{(\alpha l)^5}{6} (1+\alpha) \right\} \\ & + y_i^{(v)} \left\{ -\frac{l^2}{10\alpha} (1+\alpha) + \frac{(\alpha l)^2}{4} (1-\alpha^2) + \frac{1}{100} \left(\frac{a_n}{\alpha l} \right)^2 \frac{l^4}{\alpha^3} (1-\alpha^3) - \frac{1}{240} \left(\frac{a_n}{\alpha l} \right)^2 (\alpha l)^4 (1-\alpha^2) \right. \\ & \left. - \frac{l^5}{120} \frac{54}{420} \left(\frac{b_n}{\alpha l} \right)^4 \alpha l (1-\alpha^3) + \frac{(\alpha l)^5}{24} \frac{13}{420} \left(\frac{b_n}{\alpha l} \right)^4 (1-\alpha^2) \right\} \\ & + y_i^{(vi)} \left\{ \frac{l^3}{60\alpha^3} (1+\alpha^3) + \frac{(\alpha l)^3}{20} (1+\alpha^2) + \frac{l^5}{600} \left(\frac{a_n}{\alpha l} \right)^2 \frac{1}{\alpha} (1-\alpha^3) + \frac{(\alpha l)^5}{1200} \left(\frac{a_n}{\alpha l} \right)^2 (1+\alpha^2) \right. \\ & \left. - \frac{l^2 \alpha}{5600} \left(\frac{b_n}{\alpha l} \right)^4 (1+\alpha^3) + \frac{(\alpha l)^7}{50400} \left(\frac{b_n}{\alpha l} \right)^4 (1+\alpha^2) \right\} \dots = 0 \quad (4.4) \end{aligned}$$

Setzt man $\alpha = 1$ und sortiert um, dann erhält man

$$y_i^{iv} + \left(\frac{a_n}{l}\right)^2 y_i'' - \left(\frac{b_n}{l}\right)^4 y \dots - \frac{28}{420} \left(\frac{b_n}{l}\right)^4 l^2 y''$$

$$y^{iv} \left(\frac{1}{60} \left(\frac{a_n}{l}\right)^2 l^2 + \frac{13}{1260} \left(\frac{b_n}{l}\right)^4 l^4 \right) + y^{vi} \left(\frac{2l^2}{15} + \left(\frac{a_n}{l}\right) \frac{2l^4}{100} - \left(\frac{b_n}{l}\right)^4 \frac{l^6}{6300} \right) + \dots = 0$$

(4.5)

das heißt, es ist mit einer Konvergenz von mindestens l^2 zu rechnen. In Abb. 4.3 und Abb. 4.4 ist eine Fehlerbeurteilung dargestellt /13/.

Die Konvergenz (Steigung der Geraden in doppellogarithmischer Darstellung) ist größer als l^2 . Absolut nehmen die Fehler sehr schnell ab. Es genügt im allgemeinen, bei Eigenwertuntersuchungen, wie Beulen, Knicken oder bestimmen von Eigenfrequenzen, die Eigenfrequenzen zwischen 2 Knoten durch 2 Elemente anzunähern. Zwischen 2 Wendepunkten sollten wenigstens 3 Elemente angeordnet werden.

Die Genauigkeit der halbanalytischen Scheiben- und Volumenelemente läßt sich mit geschlossenen Lösungen überprüfen. In Abb. 4.5 bis 4.8 sind die Fehleruntersuchungen für Scheiben zusammengestellt. Man kann sehr deutlich sehen, daß mit höherwertigem Ansatz nicht nur die absoluten Fehler kleiner werden, sondern auch die Konvergenz ganz wesentlich verbessert wird.

Da das Kraftgleichgewicht an den Elementrändern nicht erfüllt wird, kann man mit dem einfachen Ansatz SCHEI 2 nur ungenaue Ergebnisse erwarten. Abb. 4.9 zeigt den deutlichen Genauigkeitsanstieg bei Verwendung höherer Ansätze. In Abb. 4.10 ist noch einmal verdeutlicht, daß bei einem hohen Spannungsgradienten erst der Ansatz mit SCHEI 4 befriedigt.

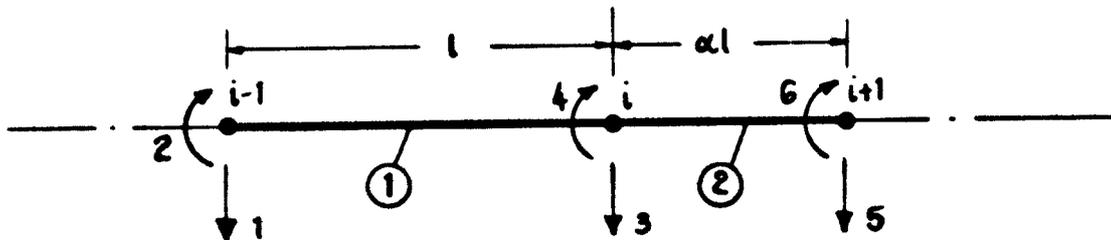


Abb. 4.1

$k_{11}^{\textcircled{1}}$	$k_{12}^{\textcircled{1}}$	$k_{13}^{\textcircled{1}}$	$k_{14}^{\textcircled{1}}$			}	y_{i-1}	}	0
$k_{21}^{\textcircled{1}}$	$k_{22}^{\textcircled{1}}$	$k_{23}^{\textcircled{1}}$	$k_{24}^{\textcircled{1}}$				y_{i-1}		0
$k_{31}^{\textcircled{1}}$	$k_{32}^{\textcircled{1}}$	$k_{33}^{\textcircled{1,2}}$	$k_{34}^{\textcircled{1,2}}$	$k_{35}^{\textcircled{2}}$	$k_{36}^{\textcircled{2}}$		y_i		0
$k_{41}^{\textcircled{1}}$	$k_{42}^{\textcircled{1}}$	$k_{43}^{\textcircled{1,2}}$	$k_{44}^{\textcircled{1,2}}$	$k_{45}^{\textcircled{2}}$	$k_{46}^{\textcircled{2}}$		y_i		0
		$k_{53}^{\textcircled{2}}$	$k_{54}^{\textcircled{2}}$	$k_{55}^{\textcircled{2}}$	$k_{56}^{\textcircled{2}}$		y_{i+1}		0
		$k_{63}^{\textcircled{2}}$	$k_{64}^{\textcircled{2}}$	$k_{65}^{\textcircled{2}}$	$k_{66}^{\textcircled{2}}$		y_{i+1}		0

Aufbau des Gleichungssystems

Abb 4.2

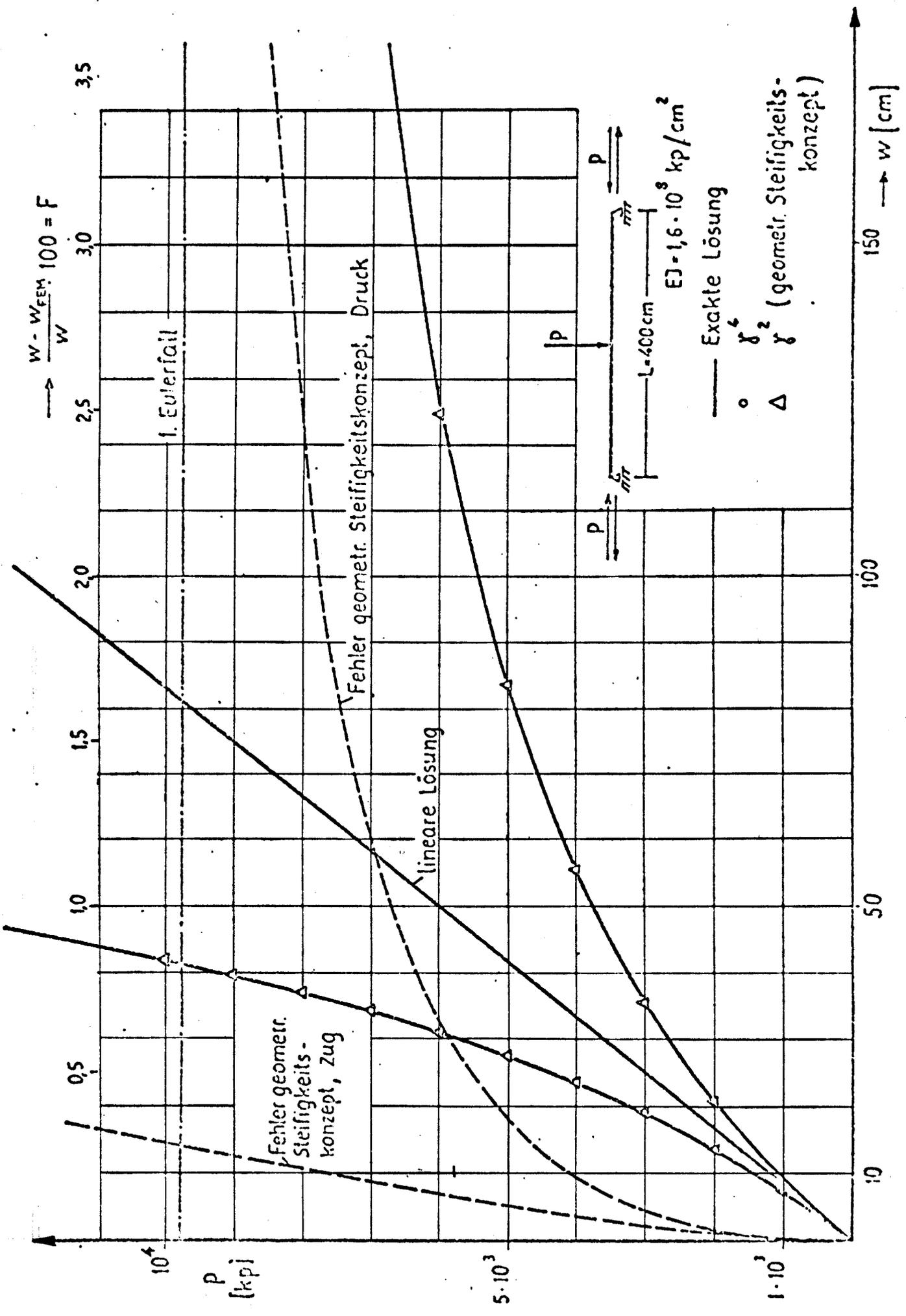


Abb. 4.3

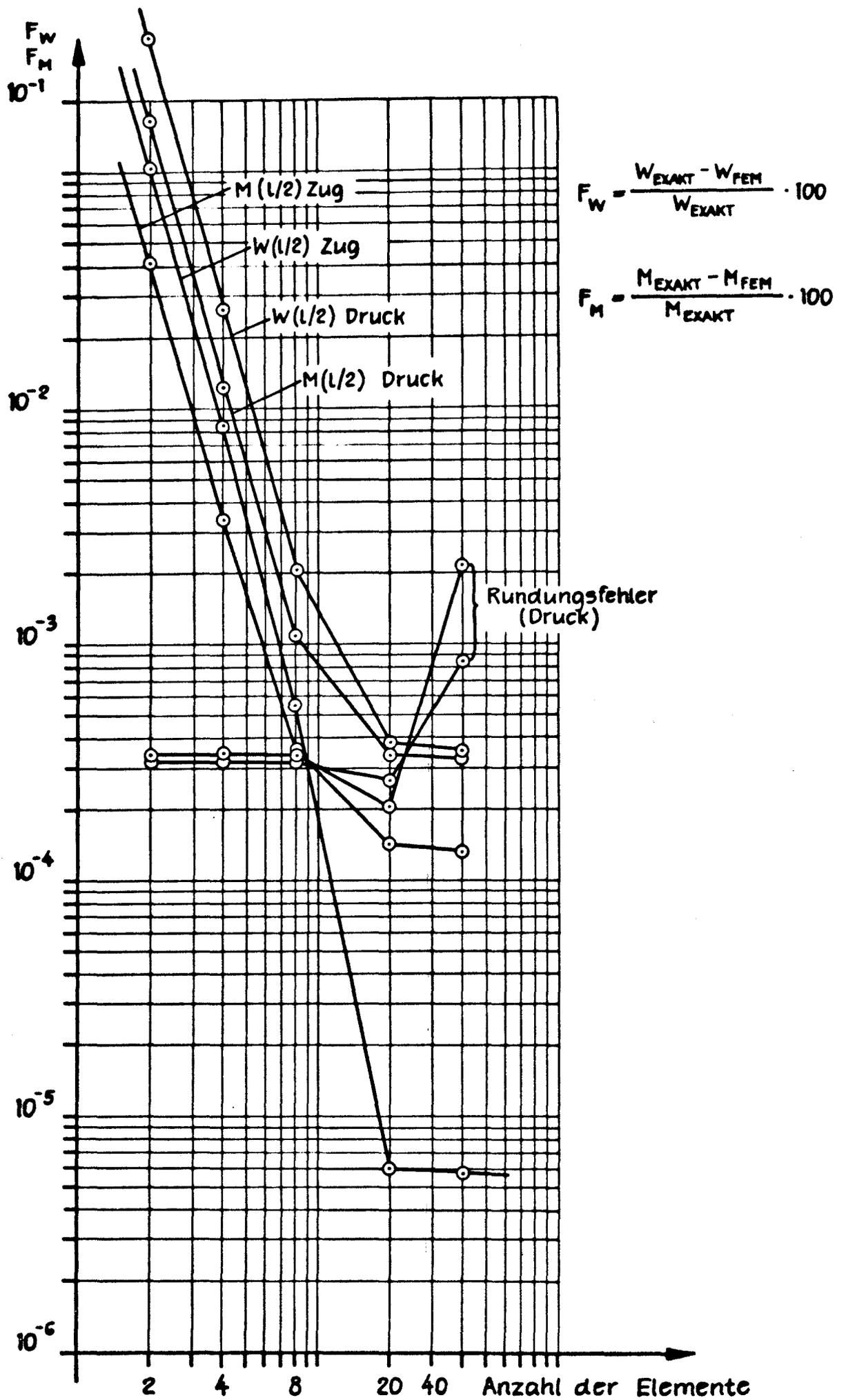


Abb. 4.4

Bezeichnungen in den Fehlerdiagrammen

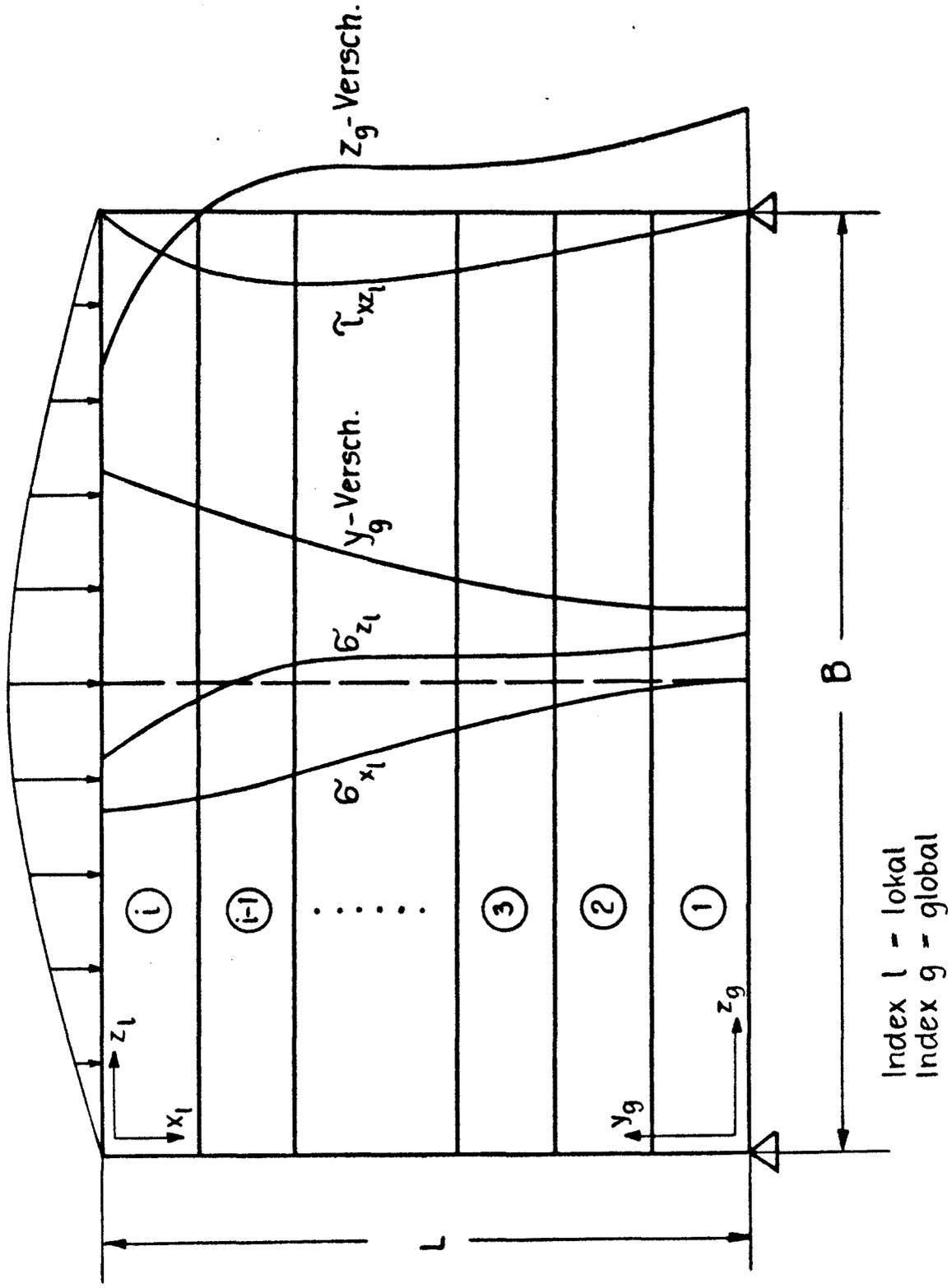


Abb. 4.5

Fehler der Verschiebungen in Z- und Y-Richtung

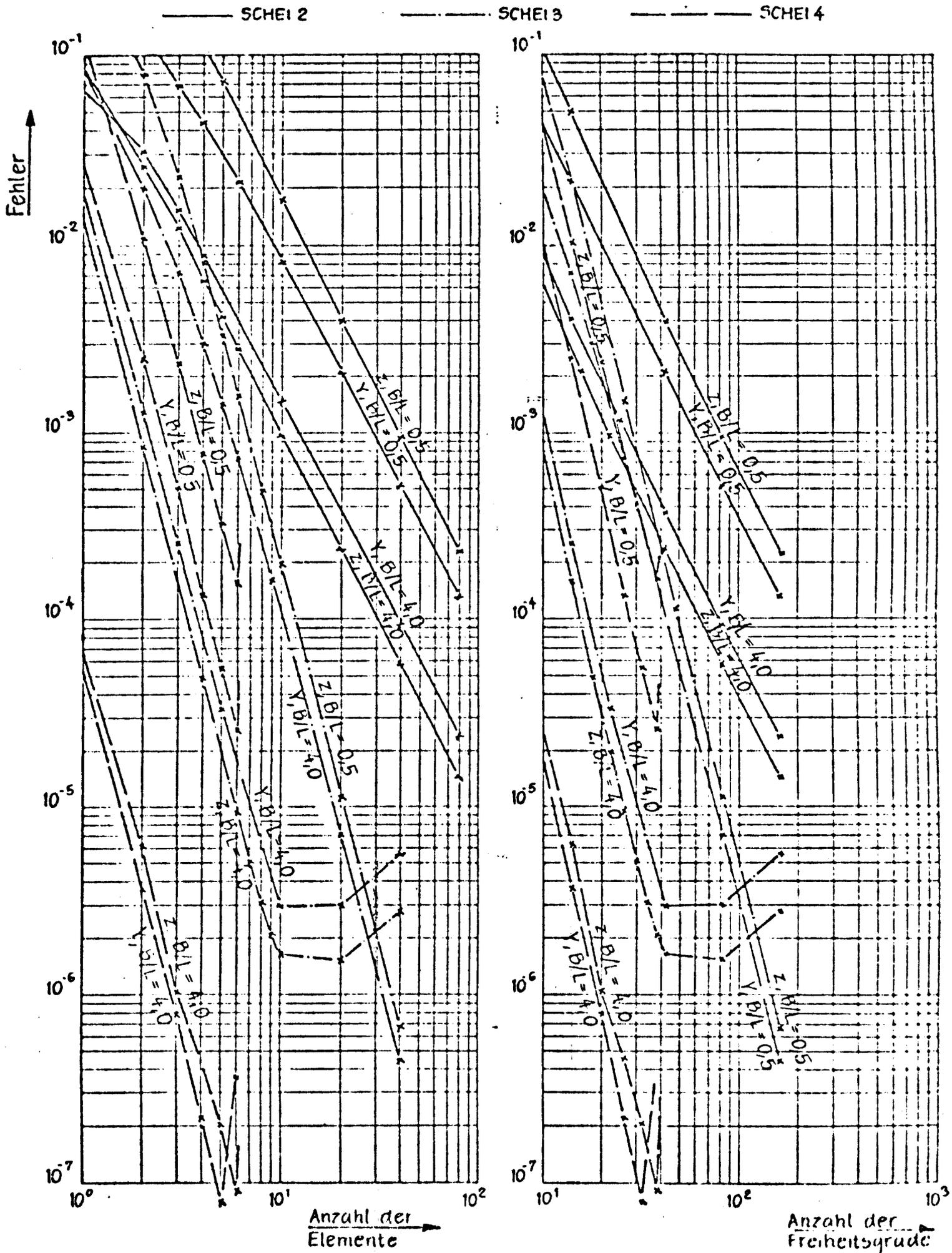


Abb. 4.5 a

Fehler der Spannungen σ_x

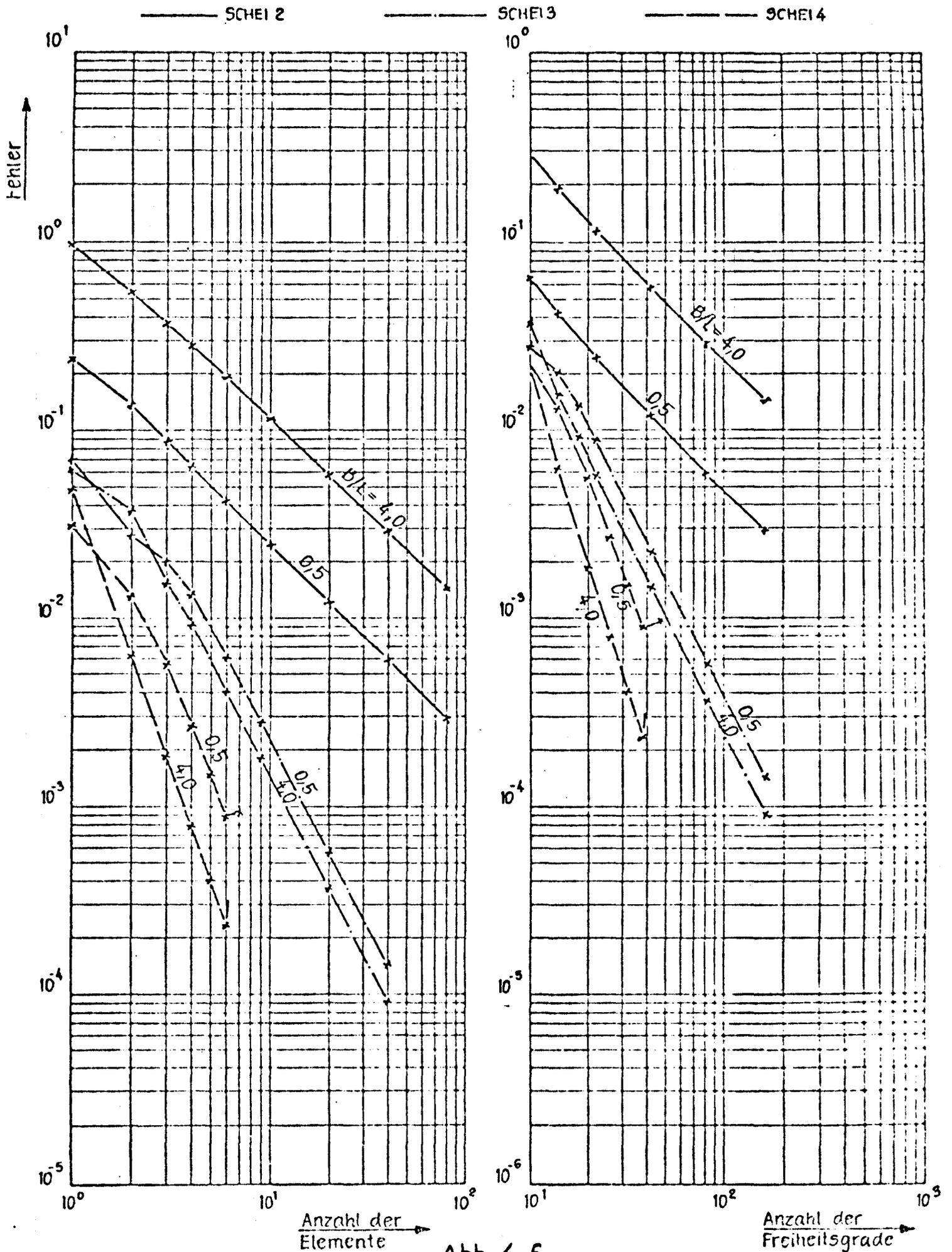


Abb. 4.6

Fehler der Spannungen σ_z

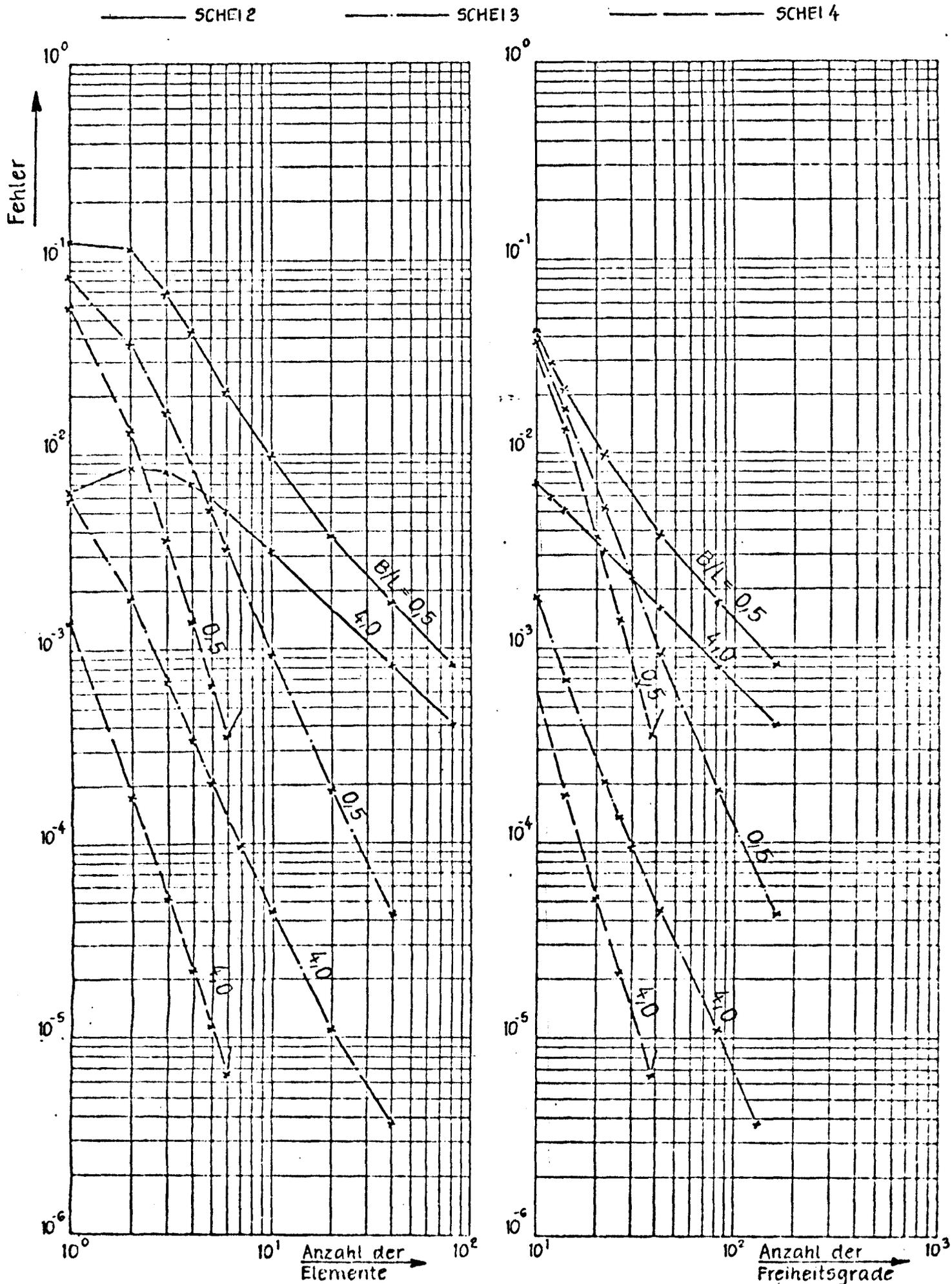
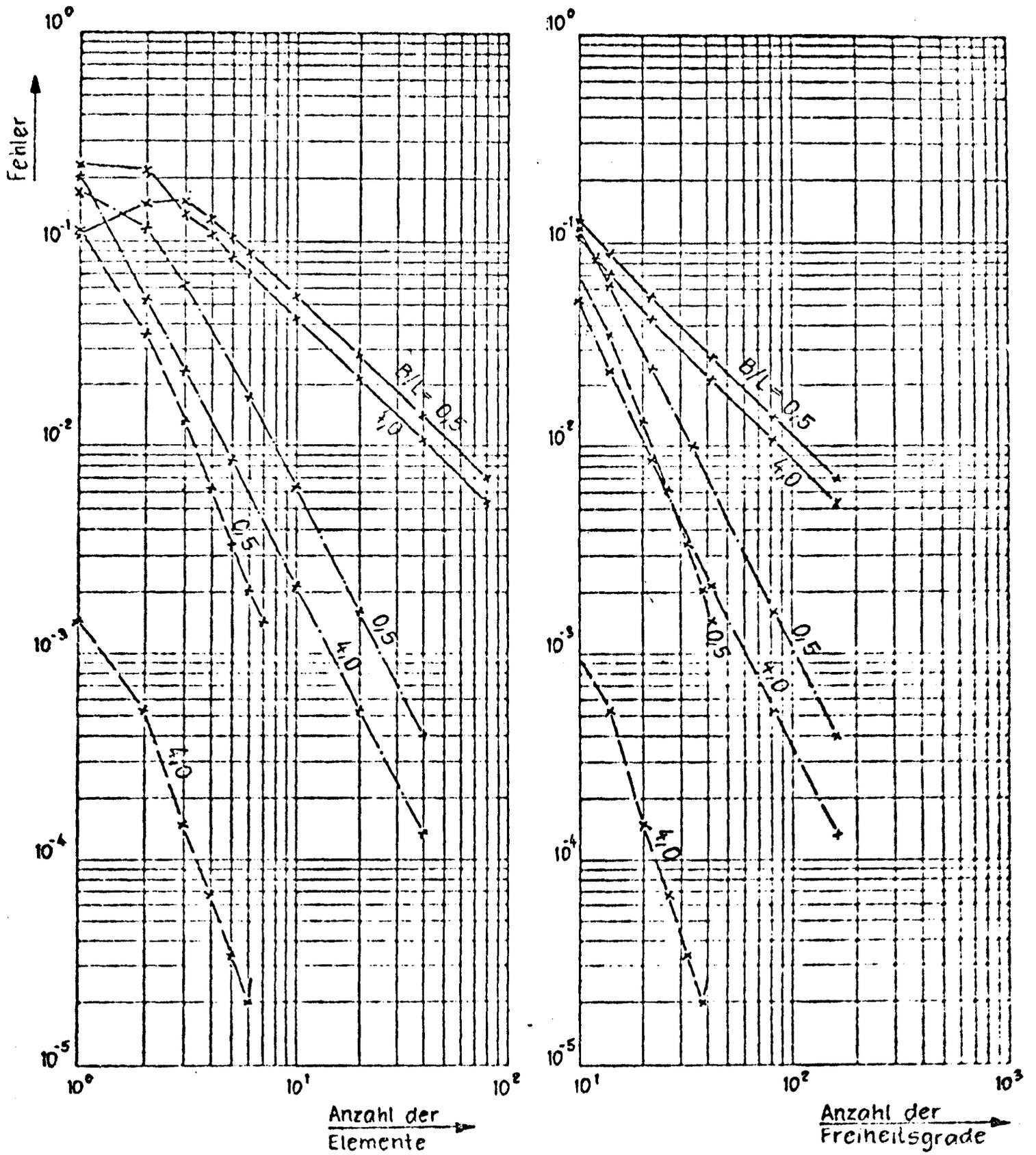


Abb. 4.7

Fehler der Spannungen τ_{xz}



— SCHEI 2

- - - SCHEI 3

- · - SCHEI 4

Abb. 4.8

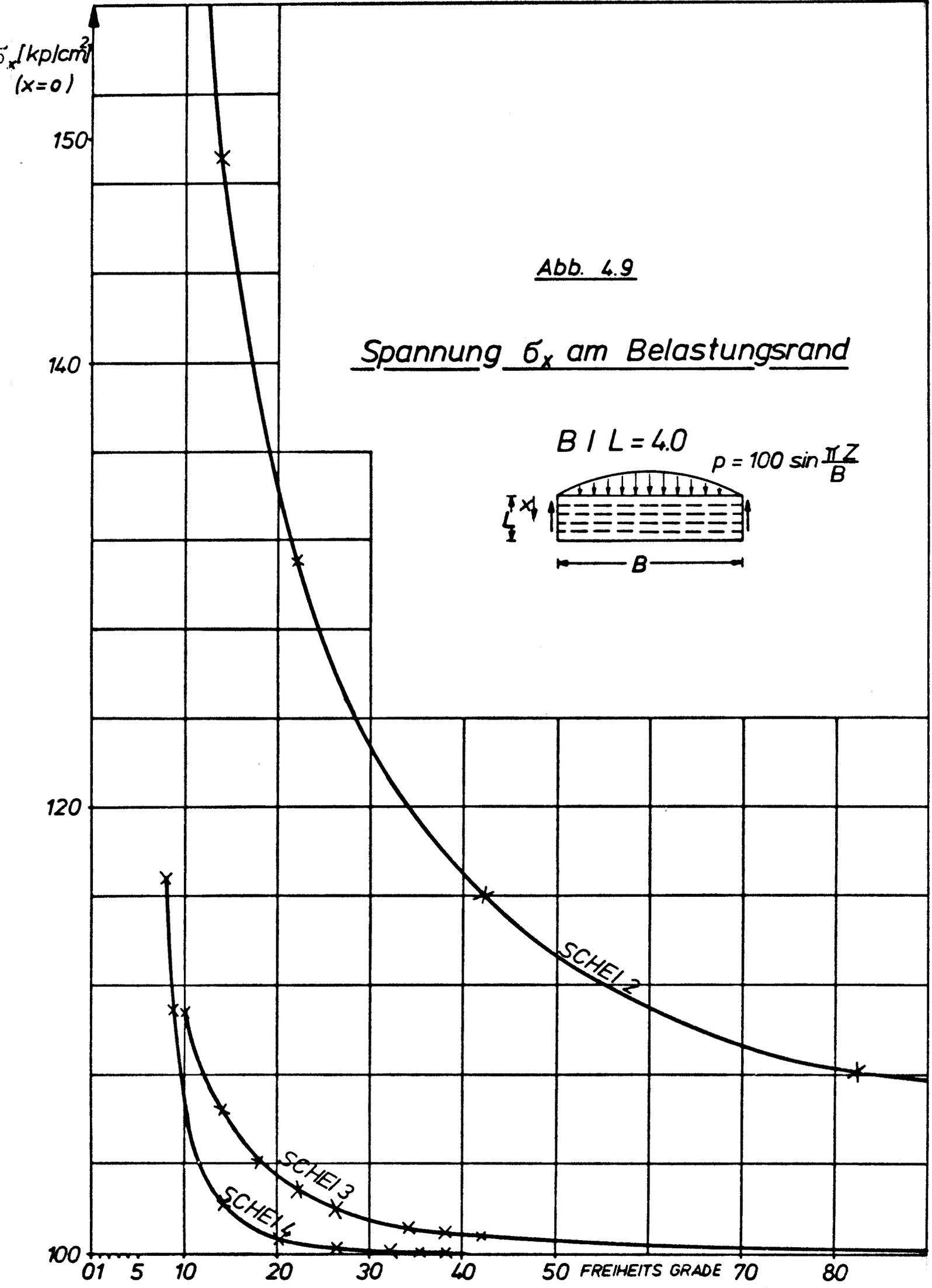
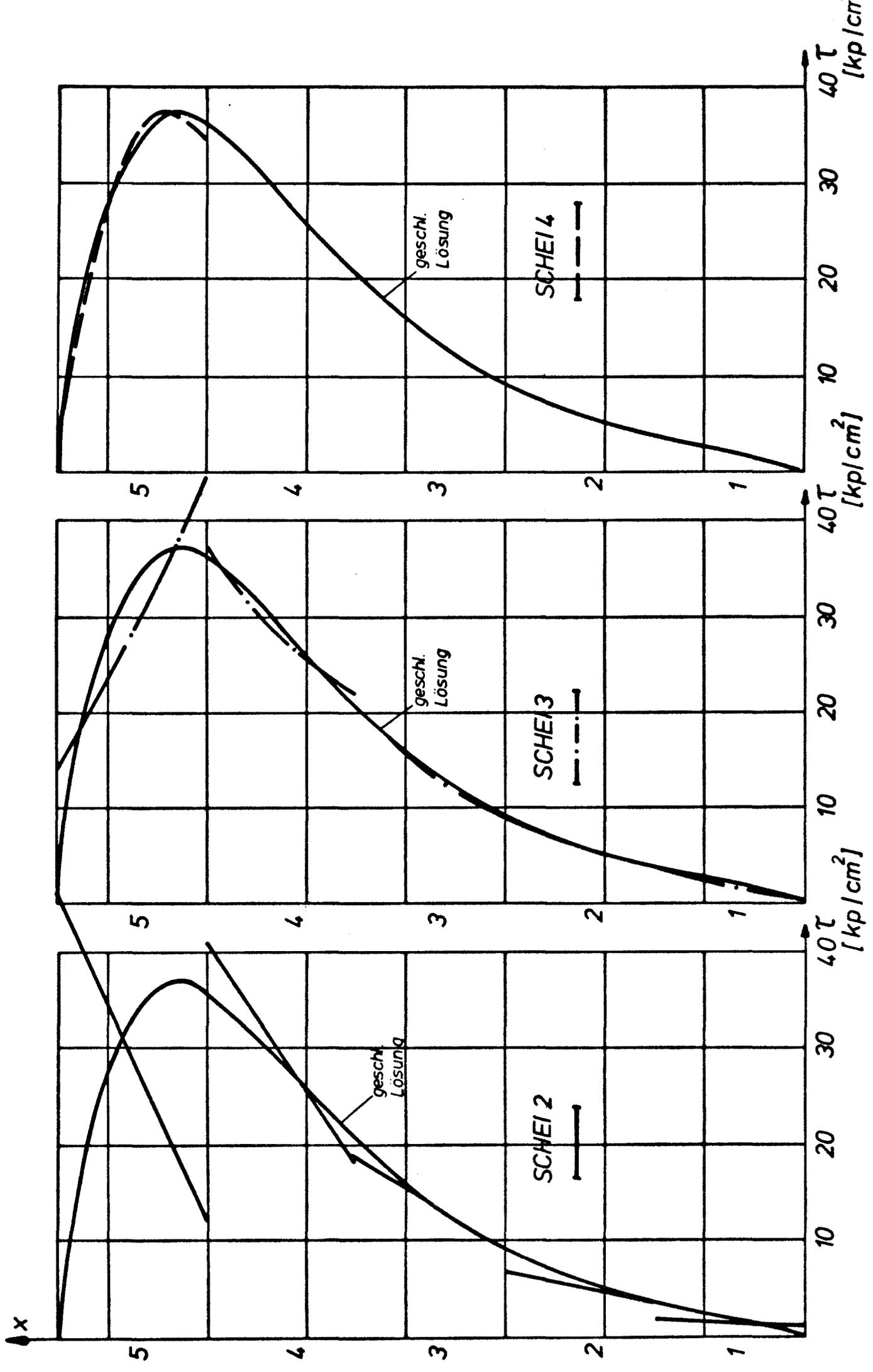


Abb. 4.10 Spannung τ_{xz} für $BI/L=0.5, Z/B=0.0$



5. Transformationen, Verknüpfungen

Die Eigenschaften der Elemente wurden der Zweckmäßigkeit halber in elementeigenen Koordinaten beschrieben. Für den Aufbau eines Rechenmodells für eine ganze Konstruktion sind Koordinaten notwendig, in denen man die Elemente ihrem wirklichen geometrischen Ort innerhalb des Rechenmodells entsprechend beschreiben kann. Bei Übertragungsmatrizen, die ihrer Natur entsprechend für Elementketten mit wenigen Zwischenbedingungen geeignet sind, führt man die Transformation an den jeweiligen Knoten mit Hilfe einer Punkttransformationsmatrix durch, d.h., man überträgt in elementfesten Koordinaten und paßt nur jeweils das elementeigene Koordinatensystem aneinander an. Die notwendigen Transformationen sind in der Literatur z.B. bei Pestel/Leckie /A8/ ausführlich angegeben. Bei der Verwendung der Steifigkeitsmatrizen ist man sehr viel freier in der Wahl der Anordnung. Vermaschungen in ebener und räumlicher Anordnung sind ohne Schwierigkeiten durchführbar.

Während bei Übertragungsmatrizen aufgrund der Kettenstruktur der Rechenmodelle die logische Zuordnung der Freiheitsgrade festgelegt ist, kann man bei Steifigkeitsmatrizen Transformation und logische Verknüpfung unabhängig voneinander organisieren.

Natürlich sind beide Methoden auch zusammen verwendbar, denn eine Übertragungsmatrix läßt sich durch einfaches Umsortieren unter Beachtung der bei beiden Methoden unterschiedlichen Vorzeichen-Regelung in eine Steifigkeitsmatrix und umgekehrt verwandeln. Abb. 5.1 zeigt ein typisches Beispiel, wie man unter Ausnutzung der Vorteile beider Methoden zu einem sehr schnellen Rechenmodell kommen kann. Der Rechenablauf läßt sich in folgenden Abschnitten darstellen.

1. Aufstellen der Übertragungsmatrizen für jedes Element.
2. Aufmultiplikation der Übertragungsmatrizen der einzelnen Regionen.
3. Umwandlung der aufmultiplizierten Übertragungsmatrizen in Regionalsteifigkeitsmatrizen.
4. Bestimmen der unbekanntenen Verformungen an den Verknüpfungsstellen.
5. Bestimmung der Schnittgrößen an jedem Elementknoten getrennt nach Region unter Verwendung der unter 4. bestimmten Randbedingungen.

Man erkennt deutlich, daß eine solche Methode für Optimierungszwecke geeignet ist, da man z.B. nur die Schnittgrößen für die jeweils interessierende Region zu berechnen braucht, für einen weiteren Berechnungsschritt mit regional veränderten Geometrien sind alle anderen Regionen direkt wiederverwendbar. In dem Beispiel braucht man nur Region 2 und 3 zu ändern. Die Regionen 1 und 3 sind mit Übertragungs/Steifigkeitsmatrizen zu idealisieren; Region 4 und 2 mit Steifigkeitsmatrizen zu berechnen.

Ein Element kann nun mehrere voneinander abhängige oder auch unabhängige Eigenschaften haben. Man transformiert zunächst in ein System von Koordinaten, das zwar noch elementeigen ist, aber nunmehr alle Eigenschaften des Elementes beschreibt. Anschließend wird die Transformation in ein für alle Elemente des Rechenmodells geeignetes Koordinatensystem durchgeführt. Zum Schluß wird die logische Verknüpfung der zugelassenen Freiheitsgrade mit den Elementfreiheitsgraden durchgeführt. Ein erläuterndes Beispiel ist z.B. die Erstellung eines finiten analytischen Elementes zur Berechnung dünnwandiger Stäbe auf Biegung und Torsion. Man benötigt also eine Steifigkeitsmatrix für die Biegung um 2 Achsen sowie je eine Steifigkeitsmatrix für die Ver-

drillung und Zusammendrückung des Elementes. Man wählt dann zweckmäßigerweise jeweils ein angepaßtes Koordinatensystem. Für die Biegesteifigkeiten die Schwerachsen, für die Verdrehsteifigkeit den Schubmittelpunkt. Man benötigt also folgende Elemente:

$$\left. \begin{aligned}
 EJ_x W_x'''' &= 0 & D &= EA \\
 EJ_y W_y'''' &= 0 & D_x &= EJ_x \\
 EA U'' &= 0 & D_y &= EJ_y \\
 \theta'''' + \frac{6J_D}{EJ_{\omega\omega}} \theta'' &= 0 & D_\theta &= EJ_{\omega\omega}
 \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Die Steifigkeitsmatrizen ergeben sich entkoppelt zu

$$\begin{Bmatrix} P_{W_x} \\ P_{W_y} \\ P_u \\ P_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{W_x} & 0 & 0 & 0 \\ & K_{W_y} & 0 & 0 \\ & & K_u & 0 \\ & & & K_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_x \\ W_y \\ u \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

$$\{ P \} = [K] \cdot \{ u \}$$

Man benötigt nunmehr eine Transformationsmatrix $[T]$, die die einzelnen Steifigkeitsmatrizen auf ein gemeinsames Koordinatensystem bringt. Man erhält diese durch geometrische Zuordnung der 12 Freiheitsgrade $\{u\}$ auf die 12 Freiheitsgrade $\{\bar{u}\}$ des neuen gemeinsamen Gleichungssystems. Die neue Steifigkeitsmatrix erhält man mit der Ähnlichkeitstransformation.

$$[\bar{K}] = [T]^T [K] [T] \quad (5.3)$$

Es liegt auf der Hand, für entsprechende Probleme des Drillknickens bzw. Biegedrillknickens die einzelnen Steifigkeitsmatrizen entsprechend zusammenzubauen. Auch ist die Berücksichtigung einer Schubdurchsenkung problemlos durchzuführen.

Kawai /11/ gibt ausführlich die Vorgehensweise bei der Berechnung von Containerschiffen in ähnlicher Art und Weise an, ohne die exakte Lösung für die gemischte Torsion zu verwenden.

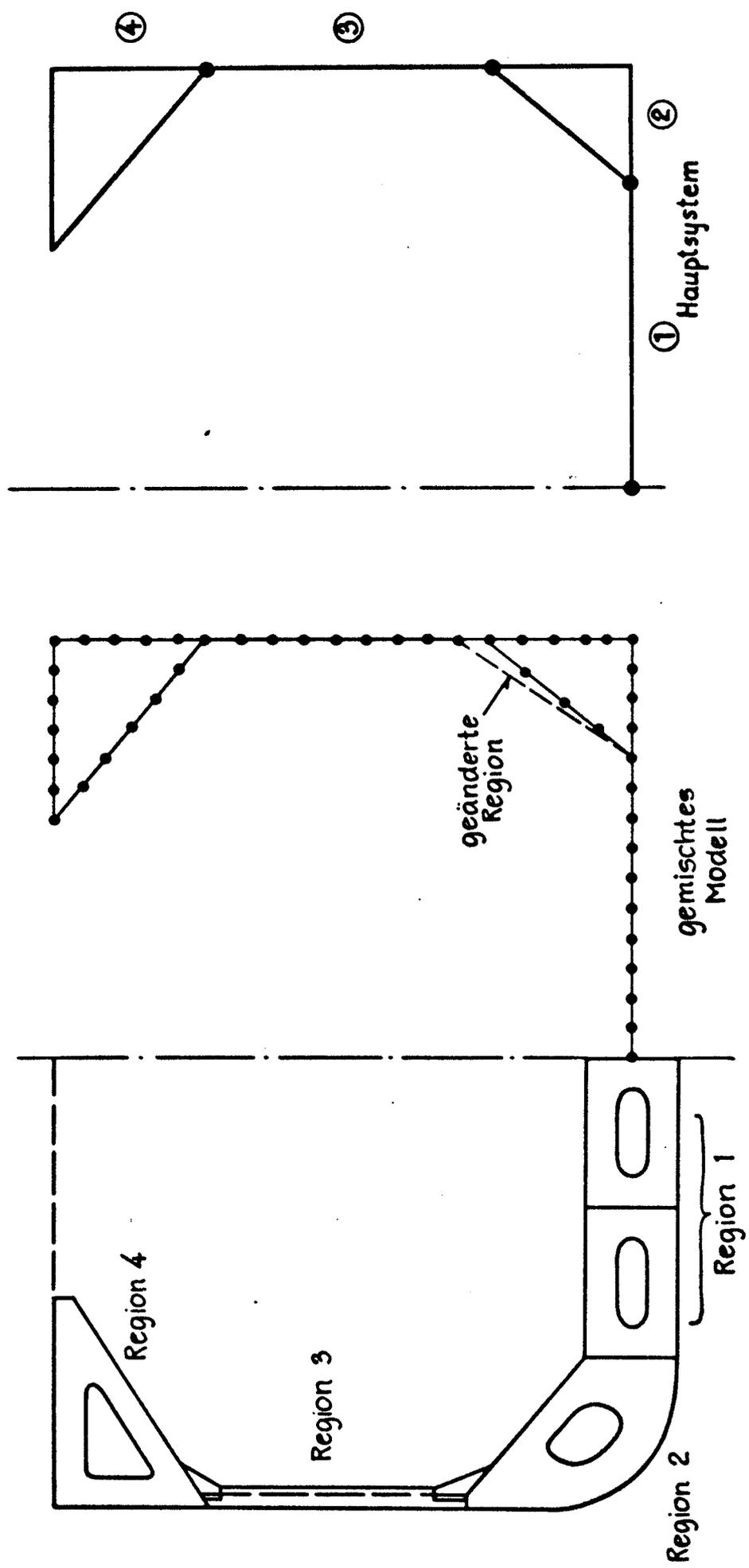
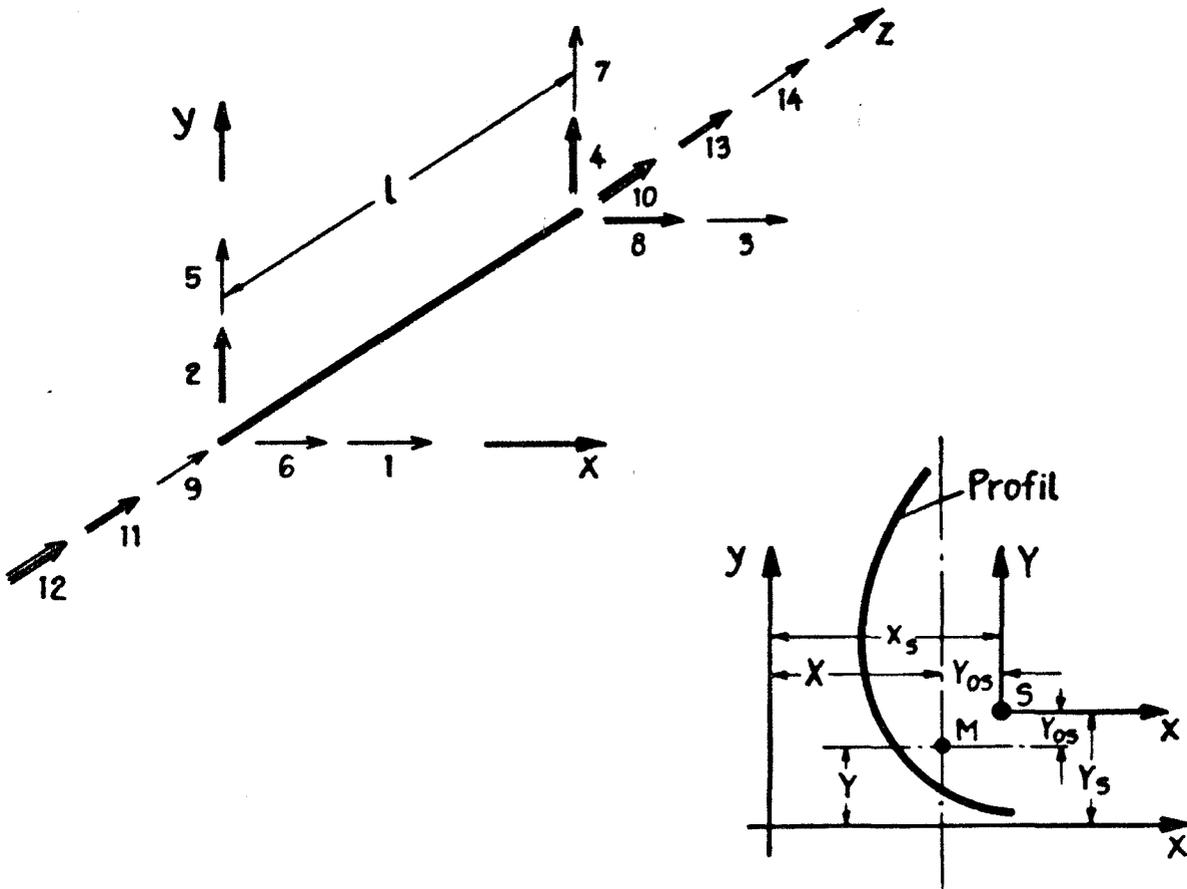


Abb. 5.1



$$\omega = \omega(x, y) - xy_s + x_s y$$

ω = sektorielle Koordinate

Abb. 5.2

$$\{u\} = [T]\{\bar{u}\}$$

$$\begin{Bmatrix} w_{xi} \\ w_{xi} \\ w_{xj} \\ w_{xj} \\ w_{yi} \\ w_{yi} \\ w_{yj} \\ w_{yj} \\ u_i \\ u_j \\ \theta_i \\ \theta_i \\ \theta_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & X & 0 & 0 & 0 & Y & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X & 0 & 0 & 0 & Y & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \\ u_{14} \end{Bmatrix}$$

(5.4)

6. Beispiele

Die folgenden Beispiele sind exemplarisch und sollen vor allen Dingen die Vielseitigkeit der vorgeschlagenen Elemente demonstrieren.

Neben allgemeinen Problemen sind auch eine Reihe schiffbaulicher Beispiele dargestellt. Es muß an dieser Stelle nochmals deutlich hervorgehoben werden, daß die analytischen bzw. halbanalytischen Elemente für Probleme gedacht sind, bei denen übliche Finite Elemente zu aufwendig sind. Das gilt sowohl für die Rechenzeiten, als auch für die Datenaufbereitung und Ergebnisverarbeitung. Die vorgeschlagenen Elemente eignen sich daher besonders für nichtlineare Probleme, Optimierungsaufgaben sowie für Parameteruntersuchungen.

6.1 Knickverhalten ideal-elastischer Biegebalken

6.1.1 Allgemeines

Bei Stabilitätsuntersuchungen von Balken und Platten, die nicht außermittig gedrückt werden, die nicht vorgebogen und auch nicht querbelastet sind, sucht man die sogenannten Verzweigungspunkte ihrer Gleichgewichtslagen. Bei Balken beispielsweise liegt dieser Verzweigungspunkt je nach Randbedingung bei einer der vier Euler-Knicklasten P_K . Wie Abb. 6.1 für einen Balken auf zwei Stützen darstellt, lassen sich für diese Knicklast beliebig viele Gleichgewichtslagen angeben. Weist der Balken jedoch von Beginn der Längsbelastung an ein Biegemoment auf, sei es durch außermittigen Lastangriff, Vorbiegung oder Streckenlast, dann existiert im allgemeinen kein Verzweigungspunkt, wie ebenfalls Abb. 6.1 für einen außermittig gedrückten Balken zeigt. Doch auch bei vorhandenem Biegemoment gibt es Fälle für das Auftreten eines Verzweigungs-

punktes, so beispielsweise den Balken in Abb. 6.2, der durch zwei außermittige Längskräfte belastet wird, die im Balken gegensinnige Biegemomente erzeugen. Genau bei der Knicklast P_{K1} springt der Balken in die erste Eigenform um. Klöppel und Lie /14/ haben ein Kriterium aufgestellt, das besagt, daß dann ein Verzweigungspunkt existiert, wenn die vorhandene Biegelinie nur den Verlauf der Eigenform höherer Ordnung aufweist.

Die Herleitung dieses Kriteriums begründet sich, wie in /14/ und in einer weiterführenden Arbeit von Cornelius /15/ angedeutet wird, auf der Voraussetzung kleiner Verformungen, bei denen die lineare Differentialgleichung noch ihre Gültigkeit hat. Im Folgenden soll das Kriterium von Klöppel-Lie anhand einiger Beispiele überprüft werden.

Hierzu wird mit den vorgeschlagenen Elementen eine schrittweise lineare Rechenmethode verwendet, wobei der Verformungszustand des vorhergehenden Schrittes in dem Folgenden Berücksichtigung findet. Zunächst soll dieses Vorgehen anhand verschiedener Beispiele erläutert werden.

6.1.2 Berechnung großer Durchbiegungen mit der Finite-Element-Methode

Die exakte Differentialgleichung eines einfachen, geraden Balkens bei der reinen Biegung lautet

$$\frac{d^2 w}{ds^2} = - \frac{M}{E \cdot I} \quad (6.1)$$

Dabei gilt

$$\frac{d^2 w}{ds^2} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\varrho} \quad (6.2)$$

mit dem Krümmradius ϱ , für den man setzen kann

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\frac{d^2 w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = - \frac{M}{E \cdot I} \quad (6.3)$$

Man erhält somit eine nichtlineare Differentialgleichung. Üblicherweise kann man die nichtlinearen Glieder vernachlässigen. In /6/ wird am Beispiel eines Kragträgers mit einem am freien Ende angreifenden Moment gezeigt, welchen Fehler man mit der Vereinfachung macht. Beträgt zum Beispiel die Durchsenkung w des freien Endes $1/500$ der Trägerlänge, so ist der Fehler $0,00013\%$. Der Fehler steigt jedoch quadratisch mit w , so daß dieser bei einer Durchsenkung von $1/5$ der Trägerlänge schon auf $1,33\%$ anwächst. Etwa bei diesen Verformungen kann man die lineare Differentialgleichung als nicht mehr gültig ansehen.

Am Beispiel von Kragträgern und geschlossenen Rahmen zeigt Yang in /17/, wie man trotzdem die lineare Differentialgleichung bzw. entsprechende Steifigkeitsmatrizen bei grossen Verformungen anwenden kann: Wie üblich teilt man das zu berechnende System in mehrere Finite Elemente ein. Dann bringt man die äußere Last nicht mehr als Ganzes, sondern in kleinen Lastschritten oder Lastinkrementen auf. Nach jedem Schritt muß man den Koordinaten der Elemente die Verschiebungen zuaddieren, was bedeutet, daß man im nächsten Schritt ein neues System berechnet, das in einem Polygonzug genau dem bis dahin erreichten Verformungsverlauf folgt, im übrigen aber vor dem Aufbringen des nächsten Lastinkrementes kräftefrei ist. Aus dem sonst üblichen Gleichungssystem nach der Deformationsmethode

$$[K] \cdot \{u_k\} = \{P_k\} \quad (6.5)$$

mit den Knotenlasten $\{P_k\}$, der Systemsteifigkeitsmatrix $[K]$ und den Verformungen $\{u_k\}$ wird also

$$[K]_{i-1} \cdot \{\Delta u_k\}_i = \{\Delta P_k\}_i \quad (6.6)$$

wobei $[K]_{i-1}$ die Steifigkeitsmatrix des Systems ist, dessen Koordinaten auf den Verformungszustand des Schrittes (i-1) transformiert wurden. Sind bei den einzelnen Schritten i die Verformungen $\{\Delta u_K\}_i$ klein bezüglich der Elementlängen, so ist der Fehler, den man mit der linearen Theorie macht, unbedeutend.

Nun sollen nicht nur quer-, sondern auch axial belastete Balken berechnet werden. Dabei treten die Axiallasten im Gleichungssystem nicht nur als äußere Lasten auf der rechten Seite, sondern ebenfalls in der Steifigkeitsmatrix $[K]$ auf. Man betrachte hierzu als Beispiel das Balkenelement in Abbildung 6.1 unter der Längskraft H. In der zugehörigen Steifigkeitsmatrix (Typ 4 oder Typ 5) ist in a^2 die Längskraft H enthalten.

Bei dem oben beschriebenen Verfahren, also dem schrittweisen Vergrößern der äußeren Lasten, hängt die Axiallast in den Elementen von deren Verformung ab. Man denke dabei nur an den beidseitig fest eingespannten und querbelasteten Balken, in dem sich eine Zugkraft ja überhaupt erst mit der Verformung einstellt. Die Axiallasten können erst nach der Lösung des Gleichungssystems bestimmt werden, indem an jedem Element durch Multiplikation der jeweiligen Knotenverformungen mit der Elementsteifigkeitsmatrix die Knotenkräfte berechnet werden. Es ergeben sich die inkrementalen Knotenkräfte ΔP_x und ΔP_z des i-ten Schrittes (Abb. 6.3). Den Winkel α erhält man aus den transformierten Elementkoordinaten, so daß man die Längskraft H in den einzelnen Elementen mit Hilfe der Gleichung

$$H_i = \cos \alpha \cdot \sum_{j=1}^i \frac{\Delta P_{xAj} - \Delta P_{xBj}}{2} + \sin \alpha \cdot \sum_{j=1}^i \frac{\Delta P_{zAj} - \Delta P_{zBj}}{2} \quad (6.7)$$

bestimmen kann. Die als Druckkraft positive Axiallast H_i wird also aus einem mittleren Wert der beiden Kräfte an den Knoten A und B jeweils in x- und z-Richtung gebildet. Im allgemeinen erfordert zwar das Kräftegleichgewicht am

Element, daß P_x und P_z an beiden Knoten betragsmäßig gleich sind, jedoch gilt dieses nicht mehr für elastisch gebettete Balkenelemente.

Die Axiallast H_i benötigt man nun im Schritt $(i+1)$ beim Aufstellen der Elementsteifigkeitsmatrix. Werden jedoch die äußeren Lasten P mit diesem Schritt um ΔP_{i+1} erhöht, setzt man jeweils eine zu kleine Axiallast H_i ein. Daher schlägt Yang in /17/ vor, die Verschiebungen und die Längskraft für den Schritt $(i+1)$ aus den Ergebnissen der beiden vorausgegangenen Schritte zu schätzen.

Der Unterschied der Spannungstheorie 2. Ordnung zur einfachen Theorie besteht darin, daß der Einfluß von Axialkräften auf die Schnittgrößen beachtet wird, der besonders bei größeren Axiallasten spürbar wird. Hier geht man jedoch noch weiter, denn durch das schrittweise Aufbringen der Last und die zugehörige Koordinatentransformation werden die Verformungen in jedem Schritt so klein gehalten, daß die lineare Differentialgleichung noch fast exakt gilt. Das heißt aber, daß die bei großen Verformungen auftretenden Nichtlinearitäten mitberücksichtigt werden. Daher wird im Folgenden diese Berechnungsmethode als Spannungstheorie 3. Ordnung bezeichnet.

Abb. 6.4 zeigt ein Testbeispiel /18/. Man erkennt deutlich, daß mit kleiner werdenden Schritten die FE-Lösung sich an die geschlossene Lösung auf der Basis der exakten Differentialgleichung 6.3 annähert. Die Wahl der Schrittweite muß besonders sorgfältig geschehen, wenn Längskräfte zu berücksichtigen sind. Abb. 6.5 zeigt einen einfachen Träger mit Einzellast. In Höhe der Eulerlast gehen bei der Berechnung nach der Spannungstheorie 2. Ordnung die Verformungen gegen ∞ , was nicht sehr realistisch ist. Wählt man nun bei Verwendung der Spannungstheorie 3. Ordnung eine zu große Schrittweite, dann approximiert man oberhalb der Eulerlast mit erheblichen Fehlern. Diese höhere

Theorie gibt bei sorgfältiger Anwendung das wirkliche Tragwerksverhalten im Bereich der Eulerlast wesentlich besser wieder. Bei allen durchgeführten Berechnungen ergaben sich gerade Wendepunkte der Kraft-Verformungskurve in Höhe der Eulerlasten.

Wieweit das theoretisch zwingend ist, konnte nicht nachgewiesen werden, wäre aber sicher einer genaueren Untersuchung wert. Der Unterschied zwischen der Theorie 2. Ordnung und 3. Ordnung läßt sich besonders anhand des bereits angedeuteten Kriteriums von Klöppel/Lie erläutern. Abb. 6.6 zeigt den Träger auf 2 Stützen mit 2 antimetrischen Einzelkräften.

Bei Erreichen der Eulerschen Knicklast, schlägt die Beulform durch und es verbleibt eine symmetrische Beulfigur. Man erkennt deutlich, daß man in Unkenntnis des Klöppel/Lie-Kriteriums leicht diesen Verzweigungspunkt übersehen kann, denn bei zu großer Schrittweise erfaßt man dieses Durchschlagen nicht. Eine weitere Laststeigerung führt dann zu dem bekannten Verformungsbild, im Bereich der vierfachen Eulerlast gehen bei der Spannungstheorie 2. Ordnung und bei der Theorie 3. Ordnung die Verformungen monoton gegen ∞ und ein Wendepunkt entsteht.

Man könnte sich nun bei diesem Sachverhalt verleiten lassen, oberhalb der Eulerlast zu dimensionieren. In der Realität sind beide Kräfte meist nicht ganz gleich, es ergibt sich dann bei sehr kleinen Unterschieden schon kein Verzweigungspunkt mehr wie Abb. 6.7 zeigt, denn in der Durchbiegungsform sind symmetrische und antimetrische Anteile vorhanden; es liegt somit ein Spannungsproblem vor. Es ist also unbedingt unterhalb der Eulerlast zu dimensionieren. Die Kraft-Verformungskurven zeigen wieder im Bereich der Eulerlast die typischen Unterschiede. Daß die hier vorgestellte Theorie 3. Ordnung außerordentlich leistungsfähig ist, zeigt Abb. 6.8. Bei diesem extrem geometrisch nicht linearen Problem ist diese Theorie noch gültig.

Ein mehr schiffbauliches Beispiel stellt die Stabilitätsuntersuchung des Außenhautbodens in Querspantenbauweise dar. Der Wasserdruck versucht, jedes Feld durchzubiegen, so daß man geneigt ist, das Problem als reines Spannungsproblem anzusehen, wobei man jeweils eine feste Einspannung an den Bodenwrangen annehmen könnte. Untersucht man den 2-Feldträger, Abb. 6.9, so erkennt man, daß es sich aber um ein Verzweigungsproblem handelt. Nach der Theorie 2. Ordnung erfolgt ein Durchschlagen bei der ersten Eulerlast. Auch hier gilt, wenn man zu große Schritte macht, daß man diese Tatsache übersehen könnte und ein viel zu günstigeres Tragverhalten ermittelt.

Bei Dreifeld-Träger, Abb. 6.10, erhält man keinen Verzweigungspunkt, denn in der Beulform sind auch Anteile einer Durchbiegungsform vorhanden, die sich der durch eine Streckenlast verursachten Durchbiegungsform gleichen. Das heißt, bei gerader Anzahl von Feldern erhält man einen Verzweigungspunkt nach Klöppel/Lie, bei ungerader Feldanzahl handelt es sich um ein Stabilitätsproblem.

In Wirklichkeit sind die Lasten aber nicht auf allen Feldern exakt gleich. Abb. 6.11 zeigt den Kraft-Verformungsverlauf bei geringfügig unterschiedlicher Last. Man erhält in Übereinstimmung mit dem Kriterium von Klöppel/Lie keinen Verzweigungspunkt.

Man kann daraus schließen, daß die Felder der Außenhaut nicht als Stabilitätsproblem behandelt werden dürfen, sondern als Spannungsproblem. Schwierig wird die Berücksichtigung der durch Schrumpfung der Kehlnähte an den Bodenwrangen verursachten Vorverformungen (hungry horse).

Sind solche Verformungen relativ groß, dann ist ein Durchschlagen nicht zu erwarten. Man könnte dann die Dimensionierung für einen an den beiden Rändern angespannten Plattenstreifen mit Vorverformung durchführen.

Es ist denkbar, daß eine solche Betrachtungsweise zu wesentlich günstigeren Dimensionierungen führen kann. Da diese Vorverformungen im allgemeinen unbekannt sind, empfiehlt der Autor die Untersuchung des Außenhautbodens unter Berücksichtigung einer Teilrandeinspannung als Spannungsproblem 2. Ordnung. Die gelegentlich beobachteten Wechsel zwischen tiefen und weniger tiefen Beulen lassen sich an Hand Abb. 6.11 phänomenologisch erklären. Die Beulen sind vor allen Dingen durch große Querbelastung gleichmäßig in jedem Feld entstanden. Durch geringe Lastunterschiede und der wirkenden Längsfestigkeitsbelastung sind diese Beulen in einem Feld verstärkt, im anderen verringert worden. Die Beulen selbst waren schon so tief, daß ein Durchschlagen der flachen Beulen nicht erfolgen konnte. Es entsteht eine Beulform wie in Abb. 6.10 ($P = 2409 \text{ kp} \hat{=} 1404 \text{ kp/cm}^2$ Längsfestigkeitsspannung) dargestellt.

Ähnliche Untersuchungen lassen sich an der Platte mit großem Seitenverhältnis (Längsspanntenkonstruktion) durchführen.

6.2 Nichtkonservatives Knicken

Die übliche Annahme, daß sich die Richtungen der Längskräfte während der Verformung nicht ändern, ist für eine Reihe von praktischen Beispielen nicht ausreichend, vielmehr ist gelegentlich eine von der Verformung abhängige Längskraft zu berücksichtigen. Solche Kräfte werden als nichtkonservativ bezeichnet, wenn ihre Arbeit, das Linienintegral $\int \vec{P} \cdot d\vec{s}$, integrationswegabhängig ist. Für sie läßt sich dann kein Potential angeben. Bekannte Beispiele sind hydrodynamische und aerodynamische Kräfte oder nichtrichtungstreue, also "mitgehende", z.B. tangentialtreue Kräfte /19/. So läßt sich die Stabilität bzw. das Kippen der Randgurte von Flächenträgern (Abb. 6.12 a), wie sie in großen Tankern

zu finden sind, als nichtkonservatives Problem behandeln, denn die bei Biegung des Trägers in den Gurt eingeleitete Druckkraft in Form von Schubkräften τ aus dem Steg (Abb. 6.12 b) ist nicht richtungstreu, sondern wirkt bei seitlicher Auslenkung w (Kippen) tangential zur verformten Achse (Abb. 6.12 c).

Im Folgenden wird gezeigt, daß man die Stabilität von Systemen unter nichtkonservativer Belastung mit Hilfe der analytischen Elemente recht einfach behandeln kann. Es werden beliebig gelagerte und gebettete Durchlaufträger, die durch richtungstreue oder tangentialtreue Längskräfte belastet werden, betrachtet.

Die Differentialgleichung eines massebehafteten Balkens auf elastischer Bettung K und unter Längskraft H , Abb.6.13, lautet

$$E \cdot I \cdot w'''' + H \cdot w'' + K \cdot w + \mu \cdot \ddot{w} = 0 \quad (6.8)$$

Die Durchsenkung w ist dabei von x und der Zeit t abhängig, um zur Lösung der Differentialgleichung macht man den Produktansatz

$$w(x, t) = w(x) \cdot e^{i\omega t} \quad (6.9)$$

Zu betrachten ist nun die Stabilität des Systems. Aus dem Ansatz läßt sich ersehen, daß das System genau dann instabil wird, also w mit der Zeit t anwächst, wenn ω komplex ist. Die Eigenkreisfrequenz ω wird komplex, wenn

1. ω^2 negativ und reell ist
2. ω^2 konjugiert komplex ist.

Ist ω^2 negativ und reell, verhält sich das System gemäß Gl. 6.9 auf eine kleine Störung $w(x)$ hin monoton instabil. Man spricht von sogenannter "Statischer Instabilität" (Abb. 6.14).

Die zweite Möglichkeit der Instabilität ist die, wenn ω^2 konjugiert komplex wird. Dann reagiert das System auf eine kleine Störung $w(x)$ mit anwachsender, oszillierender Bewegung. Solches sog. Flattern läßt sich mit Hilfe der von Ziegler definierten "dynamischen Instabilität" berechnen. Führt man die Eigenfrequenzanalyse unter Berücksichtigung der nach Art und Größe variierten Längskräfte durch, so wird der prinzipielle Unterschied dieser Stabilitätsarten deutlicher. Abb. 6.15 zeigt den klassischen Beck'schen Knickstab. Bleibt die Längskraft richtungstreu, dann erhält man Kurven jeweils mit Schnittpunkten bei $\omega^2 = 0$. Diese Schnittpunkte mit der P-Achse stellen die Instabilitätsgrenzen dar. Das bedeutet, daß man das auf Euler zurückzuführende "statische Stabilitätskriterium" (Auffinden des Belastungszustandes, bei dem beliebig viele Gleichgewichtslagen möglich sind) anwenden kann. Das in vielen Fällen einfachere "energetische Stabilitätskriterium" (Methode vom Minimum der potentiellen Energie) führt zu den gleichen Ergebnissen.

Läßt man dagegen die äußere Kraft P immer tangententreu wirken, dann brauchen keine Schnittpunkte mit der Lastachse zu existieren. Bei kleinen Kräften P existieren zwei positive ω^2 . Oberhalb des Scheitels der Eigenwertkurve existieren nur noch konjugiert komplexe ω^2 . Das System verliert seine Stabilität.

Für diesen Fall muß das "kinetische Stabilitätskriterium" herangezogen werden. D.h. man führt eine zweiparametrische Eigenwert-Analyse durch, wobei man je nach Verlauf der Eigenwertkurven entweder bei vorgegebener Längskraft die Eigenfrequenzen sucht (ω^2 -Suche) oder bei vorgegebener Eigenfrequenz die kritische Längskraft bestimmt (P-Suche). Der Scheitel dieser Eigenwertkurve gibt dann die kritische Knicklast an. Beim Beck'schen Stab ist diese wesentlich größer als bei richtungstreuer Belastung, was im allg. leider nicht gesichert ist.

Um verteilte Lasten berücksichtigen zu können, muß man diese in Knotenlasten nach dem bekannten Vorgehen umrechnen. Diese Knotenlasten haben eine vom Neigungswinkel φ abhängige Komponente, so daß noch eine nichtkonservative geometrische Steifigkeitsmatrix berücksichtigt werden muß (Abb. 6.16, Gl. 6.10).

$$[k] = [k_{\epsilon}] + [k_G] + [k_{GN}]$$

mit

$$[k_{GN}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -P \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

Es entsteht also eine unsymmetrische Gesamtsteifigkeit, was wie Barsoum /9/ bemerkt, der Nichtselbstadjungiertheit der Differentialgleichung eines nichtkonservativen Systems entspricht.

In Abb. 6.17 ist ein Kragträger mit veränderlicher Längskraft dargestellt. Die Konvergenz-Untersuchung zeigt, daß man schon bei Verwendung von 10 Elementen praktisch keine Erhöhung der Genauigkeit erzielt. Dieses Ergebnis weicht von den von Hauger /42/ gefundenen Ergebnissen etwas ab. Sieht man ein Auflager am Ende des Kragträgers vor, so erhält man einen Schnittpunkt der Eigenwertkurve mit der P-Achse, Abb. 6.18.

Ein solches Problem läßt sich also auch bei nichtkonservativer Belastung mit Hilfe des statischen Stabilitätskriteriums berechnen. Auch hier erscheint es, daß die FE-Lösung etwas genauere Ergebnisse liefert, als die Näherungslösung von Hauger. Das Beispiel läßt sich verallgemeinern, wenn man statt des festen Auflagers eine Feder vorsieht, Abb. 6.19 und Abb. 6.20. Je nach Größe der Feder ist das statische oder dynamische Stabilitätskriterium anzuwenden.

Wie schon angedeutet, kommen besonders Druckgurte von hochstegigen und seitlich nur wenig abgestützten Trägern für Untersuchungen des nichtkonservativen Knickens infrage. Im Bauingenieurwesen werden solche Untersuchungen an den Druckgurten von Trogbrücken durchgeführt. Diese Trogbrückensituation kann besonders im Tankerbau auftreten, wenn man die Bodenwrangen nicht ausreichend durch Längsträger seitlich abstützt (Abb. 6.21). In Abb. 6.22 bis 6.24 sind sowohl für den Fall der richtungstreuen Belastung als auch für tangententreue Belastung die Eigenwertkurven dargestellt. Die Längskraftverteilung ist so gewählt, daß diese auf halber Länge des Gurtes gerade verschwindet. Die Abmessungen des Beispiels sind etwas unglücklich gewählt, so daß die kritischen Beullasten weit über der Fließlast des Schiffbaustahls liegen. Trotzdem kann man deutlich erkennen, daß der Charakter der Eigenwertkurven ganz wesentlich von der Wahl der Randbedingungen abhängt. Das heißt, eine ausreichende seitliche Abstützung der Gurte an den Trägerenden ist sehr wichtig. Man erkennt auch deutlich, daß je nach Größe der Längskräfte sehr unterschiedliche Schwingungsformen auftreten können. Das heißt bei Eigenfrequenzuntersuchungen sind die in der Konstruktion vorhandenen Längskräfte von großem Einfluß. Diese Aussage gilt ganz allgemein auch für Platten und Roste.

Weiter kann man in Abb. 6.23 sehen, daß die kritische Knicklast bei nichtkonservativer Belastung kleiner ist als bei konservativer Belastung. Die derzeitigen Konstruktionen geben meist keinen Anlaß zu ausführlichen Stabilitätsuntersuchungen. Bodenkonstruktionen ohne oder mit sehr wenigen Längsträgern sollten dagegen sehr sorgfältig stabilitätstheoretisch untersucht werden. Mit Einschränkungen gilt dies auch für die Gurte von ankerlosen Rahmen.

6.3 Schiffbauliche Scheibenprobleme

Im modernen Massengutschiffbau verwendet man in überwiegendem Maße Konstruktionen mit sogenannten Wingtanks, Abb. 6.25. Um nun zu prüfen, ob die Tankschrägen voll mittragen, also im Sinne der Balkentheorie voll zu berücksichtigen sind, wurde ein Modell (Abb. 6.26) angefertigt /20/ und gemessen. Abb. 6.26 zeigt das Rechenmodell und Abb. 6.27 bis 6.29 die Ergebnisse. Man erkennt deutlich die enormen Einsparungen gegenüber einem üblichen Rechenmodell der FE-Methode.

Um solche Systeme zu optimieren, sind die vorgeschlagenen Elemente der einzig wirtschaftliche Weg. Die Untersuchung zeigt, daß solche Tankschrägen als voll mittragend anzusehen sind. Dabei sind die Schubspannungen nach St. Venant zu berücksichtigen.

Die vorgeschlagenen Scheibenelemente sind auch für Berechnungen von Faltschotten geeignet. In Abb. 6.30 bis 6.32 ist die Spannungsverteilung (mittragende Breite) für einen parallel zu den Falten verlaufenden Träger berechnet worden. Bei dieser nur bei Sonderkonstruktionen anzutreffenden Bauart stand die Frage im Vordergrund, ob es von Bedeutung ist, den Träger in oder auf einer Falte anzuordnen. Man erkennt, daß beide Konstruktionen zu praktisch gleichem Tragwerksverhalten führen. Die mittragende Breite ist wesentlich geringer als für einen ebenen Gurt in Ansatz zu bringen ist und außerdem praktisch von L/B-Verhältnissen unabhängig. Man liegt auf der sicheren Seite, wenn man nur den ebenen Gurtanteil voll berücksichtigt.

6.4 Berechnungen mit Volumenelementen Spannungsverteilung in "auf Schmiege" angeschweißten Profilen

In der schiffbaulichen Praxis werden häufig die plattenaussteifenden Profile "auf Schmiege", das heißt, nicht rechtwinklig zur angrenzenden Platte angebracht, Abb. 6.33. Während bei Querspantenschiffen für solche Konstruktion besonders Vor- und Hinterschiffsspanten infrage kommen, sind es z.B. bei ausfallenden Seiten die horizontal angeordneten Längsspanten (Abb. 6.34). Aus der Tradition der genieteten Spanten stammt die Auffassung, nach Möglichkeit sog. Außenschmiegen zu verwenden, was bei Querspantenschiffen auch heute noch eingehalten wird. Bei Längsspanten sind aus betrieblichen Gründen (Reinigung etc.) Innenschmiegen kaum zu vermeiden. Während im ersteren Fall überwiegend Hollandprofile verwendet werden, werden im zweiten Fall heute gerne winkelartige Profile verwendet (Abb. 6.34). Die vorgeschlagenen Volumenelemente sind nun vorzüglich geeignet, eine ausführliche Spannungsanalyse durchzuführen. Die Belastung, z.B. Wasserdruck, kann man bequem und wirklichkeitsnah aufbringen. Eine Trennung zwischen Scheibenspannungen und Plattenbiegespannungen ist nicht notwendig. Man erfaßt beide gleichzeitig. Rein örtliche Einflüsse, z.B. der Schweißnaht, lassen sich leicht erfassen.

Während bei kurzen Trägern die Biegespannungen aus der Plattenbiegung überwiegen (Abb. 6.35), erhält man bei langen Trägern eine überwiegende Scheibenspannung in der angrenzenden Beplattung. Ein solches Rechenmodell ist geeignet, Optimierungsrechnungen zum Zwecke der günstigsten Materialausnutzung durchzuführen. Man kann sich z.B. zum Ziel machen, die Geometrie des Trägers so zu bestimmen, daß sowohl am freien

Gurt als auch in der Beplattung gleich große Spannungen herrschen. Abb. 6.35 bis Abb. 6.37 zeigt eine Anzahl von untersuchten Trägern.

In Abb. 6.39 sind für eine einfache Sinuslast entlang der Trägerlänge die Durchbiegungen und seitlichen Ausweichbewegungen eines Winkelprofiles dargestellt. Man erkennt, daß bei einer Außenschmiege beachtliche Erhöhungen der Steifigkeiten zu erzielen sind. Innenschmiegen dagegen verursachen ein schnelles Absinken der Steifigkeit. Konstruktiv bedeutet dieses, daß man bei Innenschmiegen ein wesentlich größeres Profil benötigt, als bei winklig aufgeschweißten Winkeln. Beim Durchbiegen weicht das Profil meist nach der dem Flansch entgegengesetzten Richtung aus. Das führt dazu, daß dieses Ausweichen der Innenschmiegen wesentlich kleiner ist, als bei Außenschmiegen. Man kann also vermuten, daß eine mäßige Innenschmiege die Neigung zum Kippen nicht unterstützt.

Es handelt sich bei einem Kippen solcher Profile streng genommen nicht um ein Stabilitätsproblem, sondern um ein Spannungsproblem. Eine Erweiterung der vorgeschlagenen Methode auf solche nichtlinearen Probleme erscheint sehr vielversprechend. Es ist bekannt, daß es in den Flanschen von Winkelprofilen zu Spannungsabfällen kommt. In Abb. 6.38 sind die mittragenden Breiten des freien Flansches in Abhängigkeit des Längen-Breiten-Verhältnisses aufgetragen. Kurvenparameter ist der Schmiegenwinkel α . Man erkennt, daß Außenschmiegen zu wesentlich günstigeren mittragenden Breiten führen, als Innenschmiegen. Als Bezugsspannung ist die Spannung an der Mallekante des Profils gewählt worden. Der Fall ohne Schmiege ($\alpha = 0$) ist von Sandorff /21/ mit Hilfe der Airy'schen Differentialgleichung gelöst worden. Dabei geht der Autor davon aus, daß der freie Flansch gewissermaßen elastisch an den Steg bzw. die Beplattung gebettet ist. Es wird daher in /21/ ein

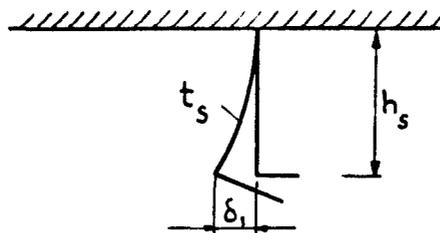
Diagramm für die mittragende Breite solcher Flansche
in Abhängigkeit eines Kurvenparameters

$$\frac{b_F}{\delta t_F E} \quad (6.11)$$

b_F = Flanschbreite
 δ = 1/k Bettungsziffer
 t_F = Flanschdicke
 E = Elastizitätsmodul

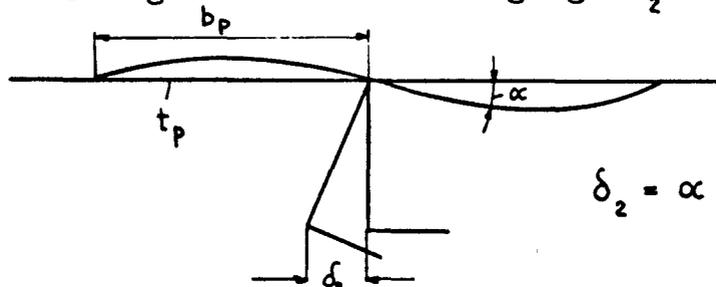
angegeben.

Die Bettungsziffer δ setzt sich zusammen aus der
Kragträgerflexibilität δ_1



$$\delta_1 = \frac{1-\nu^2}{E} 4 \left(\frac{h_s}{t_s} \right)^3$$

und der durch die Verdrehung des Profiles an der Plat-
te hervorgerufenen Durchbiegung δ_2



$$\delta_2 = \alpha \cdot h_s = \frac{1-\nu^2}{E} \frac{b_p h_s^2}{t_p^3}$$

Die Gesamtbettungsziffer ergibt sich mit

$$\delta = \delta_1 + \delta_2$$

Sandorff führt dabei aus, daß diese Bettungsziffer
nur überschlägig gilt. Insbesondere für δ_2 werden aus
Versuchen Abweichungen größeren Ausmaßes festgestellt.
Es fällt außerdem auf, daß die Bettungsziffer nicht
von der Länge abhängt. In Abb. 6.40 sind daher die von
Sandorff und die mit FE berechneten Bettungsziffern
aufgetragen.

Man erkennt, daß die Drehbettungsziffer (2. Term in den
Formeln Abb. 6.40), wie auch Sandorff angibt, je nach

Randbedingung schwankt. Meßergebnisse von Sandorff zeigen ein erhebliches Abweichen in Richtung kleinerer Bettungsziffern ($0,2 < c < 1$ schraffierter Bereich Abb. 6.40). Die FE-Rechnung zeigt eine starke Abhängigkeit der Bettungsziffer von L . Die Annahmen nach Sandorff stellen also eine Abschätzung in Richtung einer geringeren mittragenden Breite dar. In Abb. 6.41 sind für verschiedene Annahmen die Lösungen gegenübergestellt. Man erkennt, daß man mit Hilfe einer genaueren (aus FE-Rechnung) bestimmten Bettungsziffer die Scheibenlösung und die FE-Lösung in leidliche Übereinstimmung bringen kann.

Die Volumenelemente lassen sich auch zur Berechnung von dickwandigen Rohren oder Zylinderschalen verwenden. Zur Demonstration sei die Berechnung der Spannungen eines Rohres mit Linienlast gezeigt Abb. 6.42 bis Abb. 6.45. Die Erzeugung der Daten läßt sich bei so regelmäßiger Geometrie automatisch generieren. Es muß nochmals darauf hingewiesen werden, daß es praktisch erst durch halbanalytische Elemente ermöglicht wird, solche Bauteile einer wirtschaftlichen Berechnung zugänglich zu machen.

6.5 Optimierungsmodell einer Bodenkonstruktion eines VLCC

Um die Anwendung der propagierten Elemente auf Optimierungsaufgaben zu demonstrieren, soll ein Finites Rechenmodell der in Abb. 6.46 dargestellten Bodenkonstruktion beschrieben werden. Die gezeigte Konstruktion besteht aus einem nur durch Bodenwrangen ausgesteiften Rost. Die Längsträger, die aufgrund ihrer Länge nur wenig tragen, sind fertigungstechnisch unerwünscht. Da die Bodenwrangen seitlich nicht abgestützt sind, muß man die Gurte sorgfältig berechnen, um ein Stabilitätsversagen zu verhindern. Die Bodenwrangen sind sehr unsymmetrische Träger, d.h. die Biegespannung im Gurt ist wesentlich höher als im Boden.

Man kann sich nun die Optimierungsaufgabe stellen, wie die günstigsten Trägerproportionen aussehen müssen. Durch einen starken Gurt verschiebt man die neutrale Achse der Bodenwrangen nach oben, so daß im Boden eine größere Spannung und im Gurt eine geringere Spannung entsteht. Die günstigsten Bedingungen hat man geschaffen, wenn die zusammengesetzte Spannung im Boden Längsfestigkeitsspannung und örtliche Biegung gleich der Gurtspannung ist und gerade die zulässige Spannung erreicht. Den Boden ersetzt man durch ein Scheiben- und Plattenelement, wobei die Längsbänder orthotrop verschmiert werden.

Die Bodenwrangen werden durch Scheibenelemente (SCHEI 3) und der Gurt durch ein SCHEI 2-Element idealisiert, denn aufgrund der Symmetrie des Gurtes kann man den Verschiebungs-Freiheitsgrad in x-Richtung unterdrücken (Eigenbiegung des Gurtes vernachlässigt). Im Prinzip kommt man also mit 8 bis 10 Freiheitsgraden pro Bodenwrange aus. Das gesamte Rechenmodell kann man also mit etwa 30 bis 50 Freiheitsgraden modellieren. Solche Gleichungssysteme lassen sich heute außerordentlich schnell lösen und sind damit geeignet für Optimierungszwecke.

Ein solches Rechenmodell wird man in seiner Güte überprüfen können, wenn man Berechnungen mit komfortableren Finiten Rechenmodellen vergleicht. Solche Vergleiche zeigen gelegentlich, daß man unter Verwendung plausibler Annahmen mit sehr einfachen Rechenmodellen auskommen kann, Abb. 4.47 bis Abb. 4.49 zeigen eine Doppelbodenberechnung mit den drei vorgeschlagenen Scheibenelementen. Interessant sind die Rechenzeiten. Die Berechnung für den ganzen Boden beträgt weniger als 60 sec auf der TR 440 der Universität Hamburg. Die Programmierung dieses Beispiels erfolgte nicht unter dem Gesichtspunkt einer extrem zeitgünstigen Darstellung, so daß bei Ausnutzung aller zeiteinsparenden

Möglichkeiten diese Rechenzeit noch um eine Größenordnung gesenkt werden kann und somit für Optimierungsrechnungen geeignet ist.

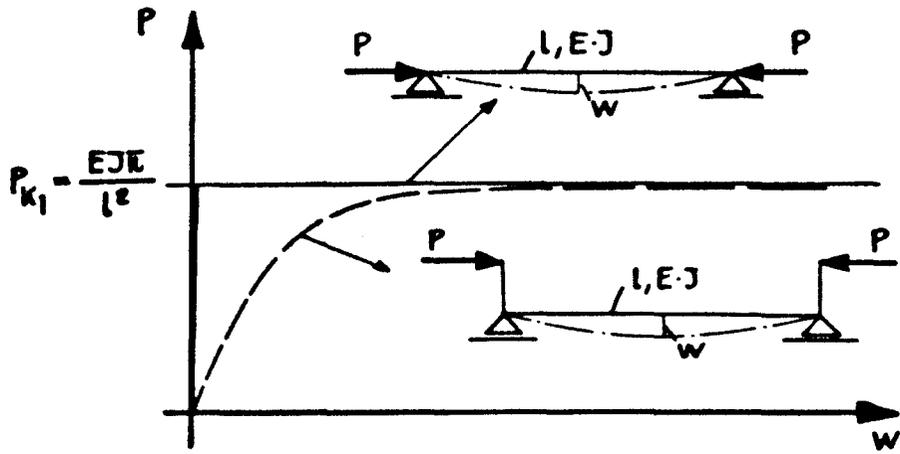


Abb. 6.1

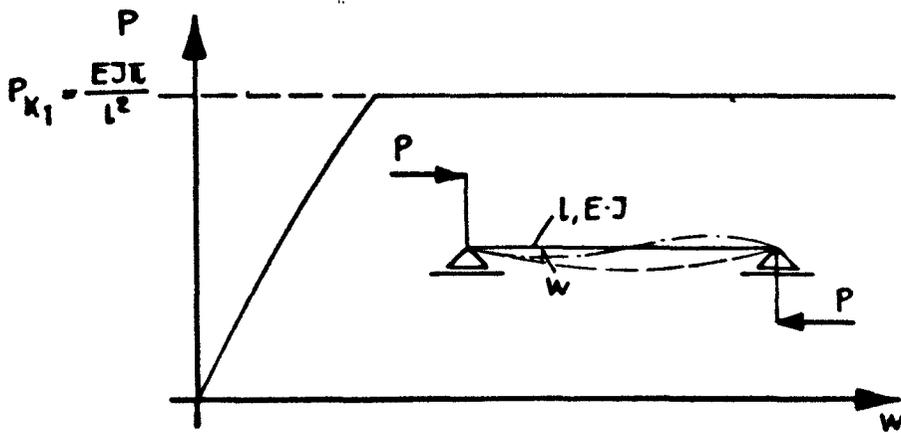


Abb. 6.2

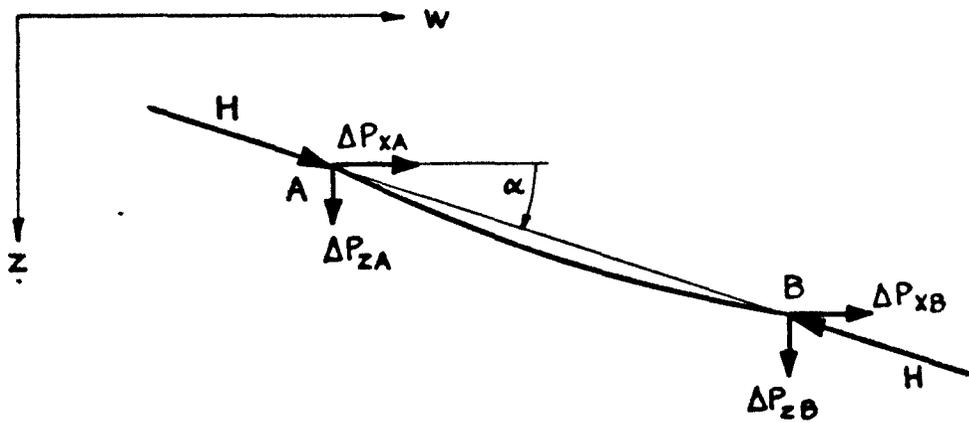


Abb. 6.3

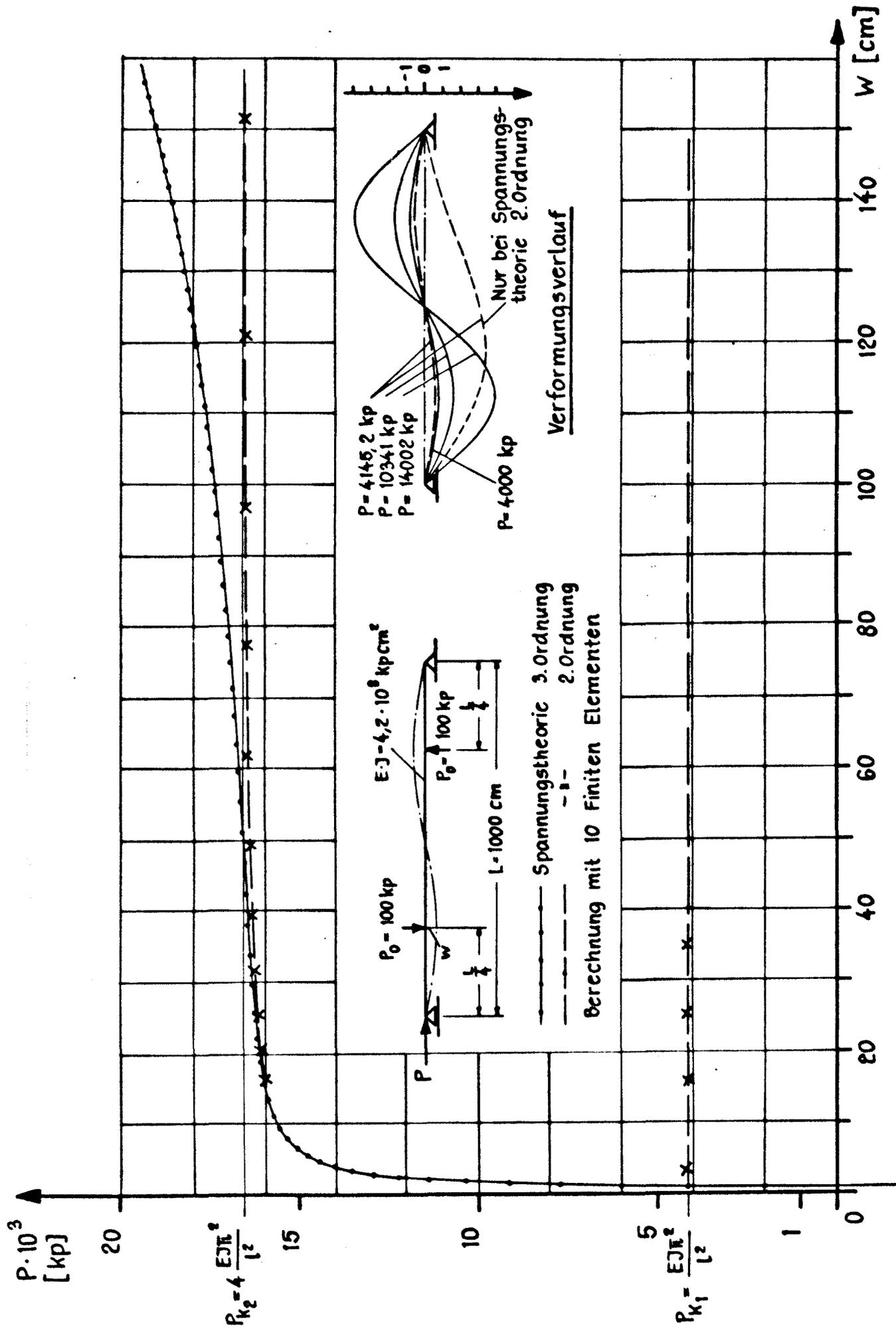


Abb. 6.6 Last-Verformungskurve für einen Träger auf zwei Stützen unter ansteigender Längsbelastung und zwei konstant bleibenden, quergerichteten Einzelkräften

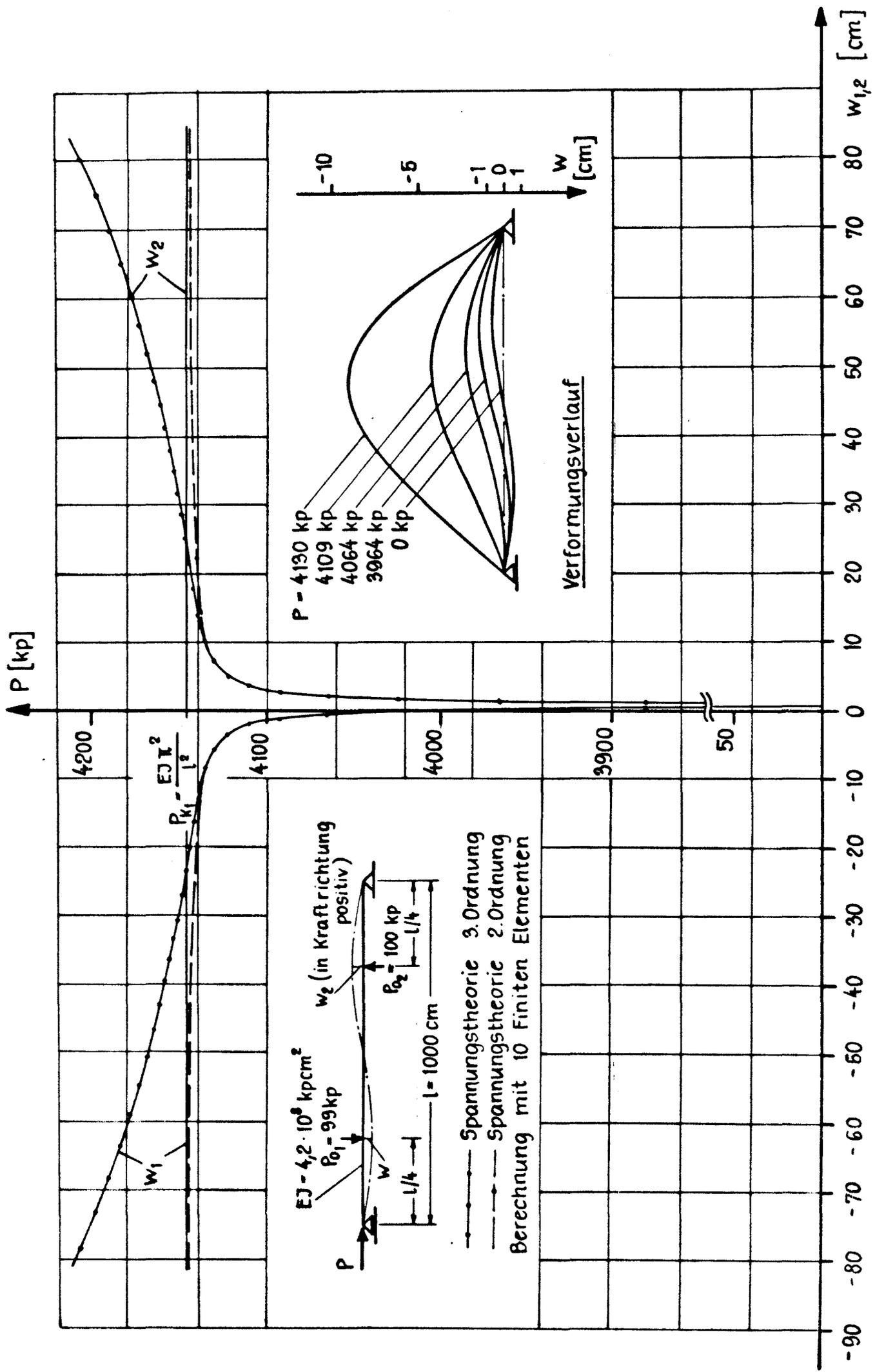


Abb. 6.7 Last-Verformungskurve mit zwei verschiedenen großen quergerichteten Einzelkräften

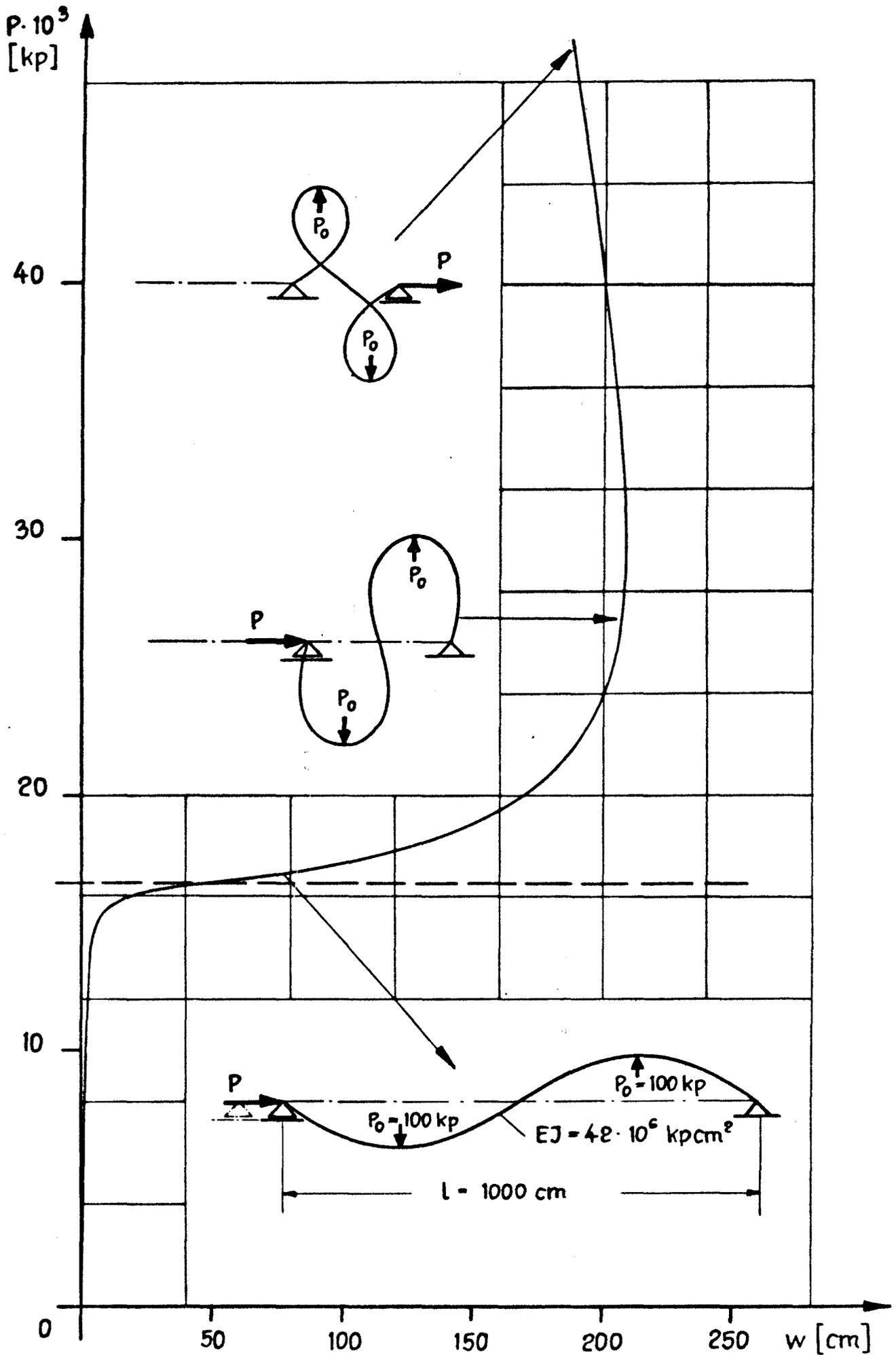


Abb. 6.8 Last-Verformungskurve bei sehr großen Längskräften P

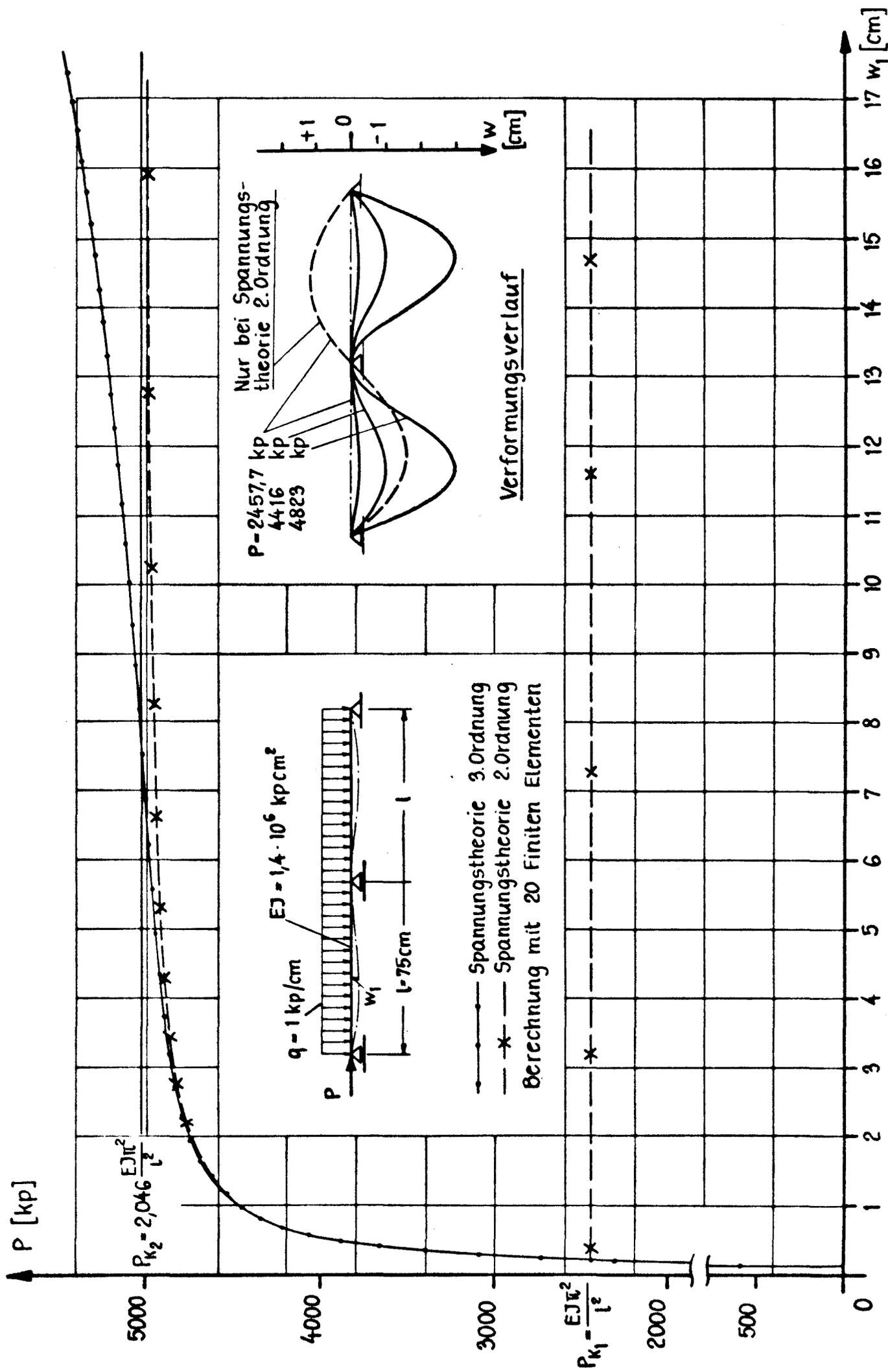


Abb. 6.9 Last-Verformungskurve für einen Träger auf drei Stützen unter anwachsender Längskraft und konstant bleibender Streckenlast

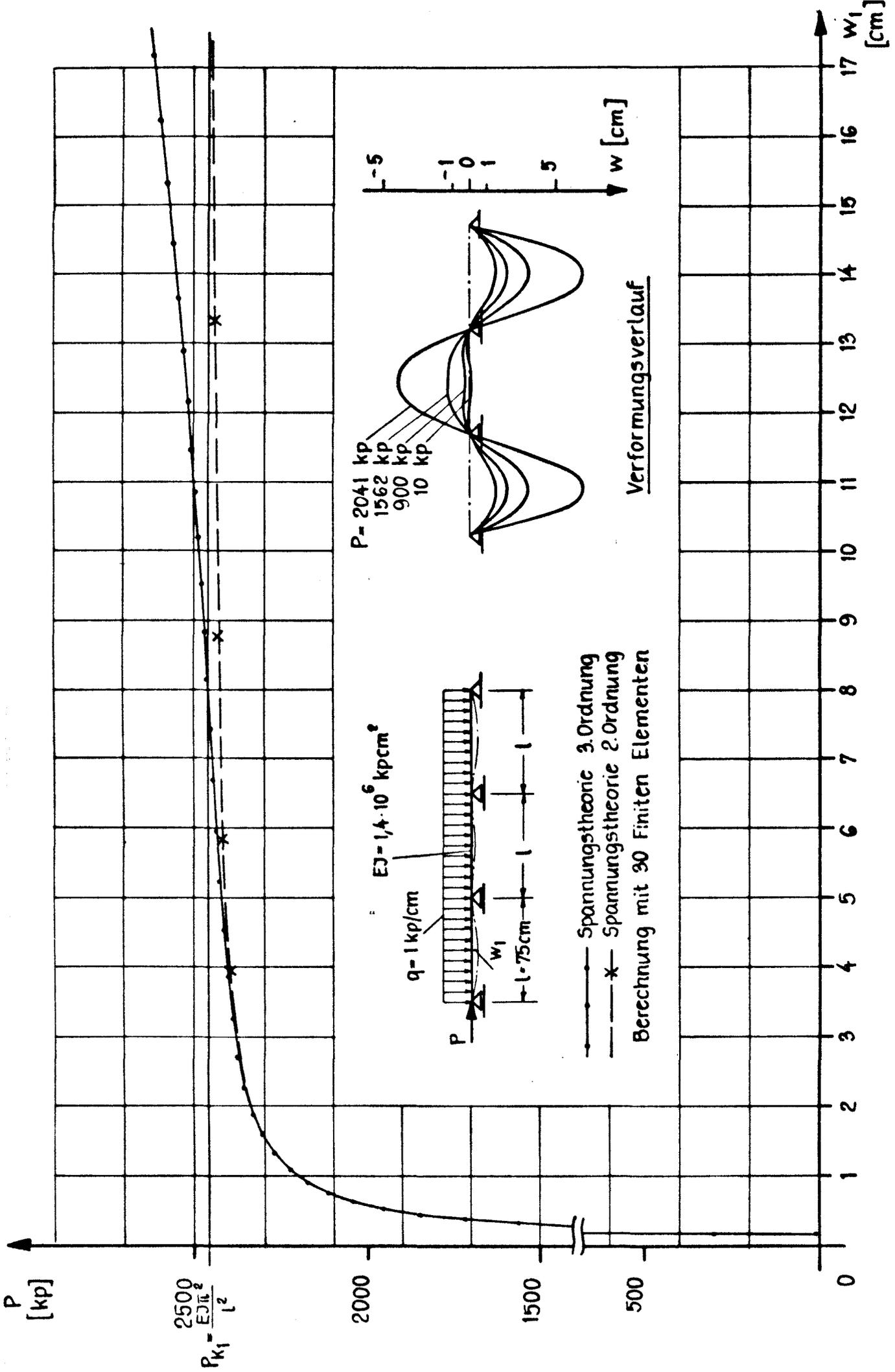


Abb. 6.10 Last-Verformungskurve für einen Träger auf vier Stützen unter anwachsender Längskraft und konstant bleibender Streckenlast

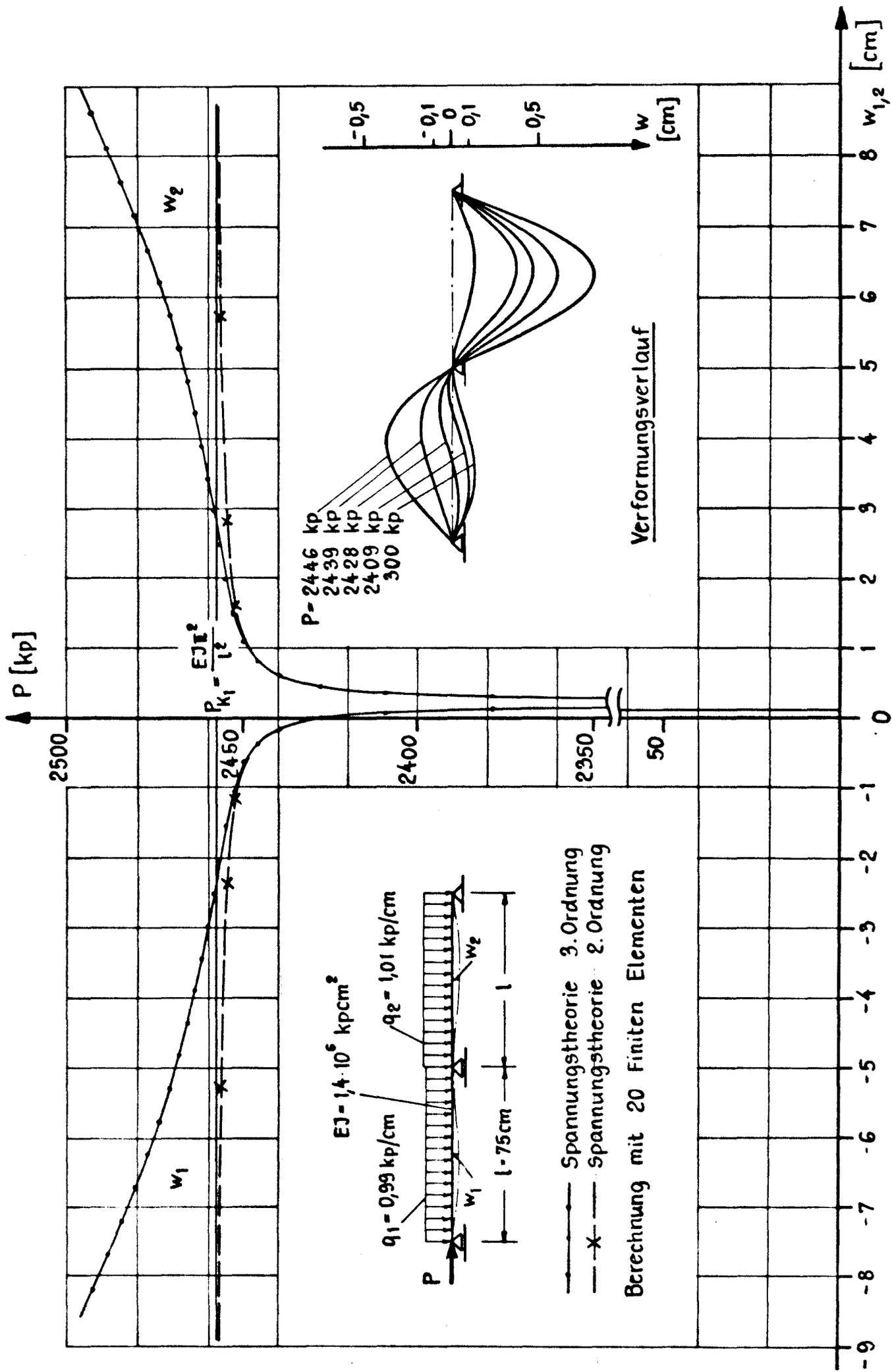


Abb. 6.11 Last-Verformungskurve für das Beispiel aus Anhang 56, jedoch mit zwei verschieden großen Streckenlasten

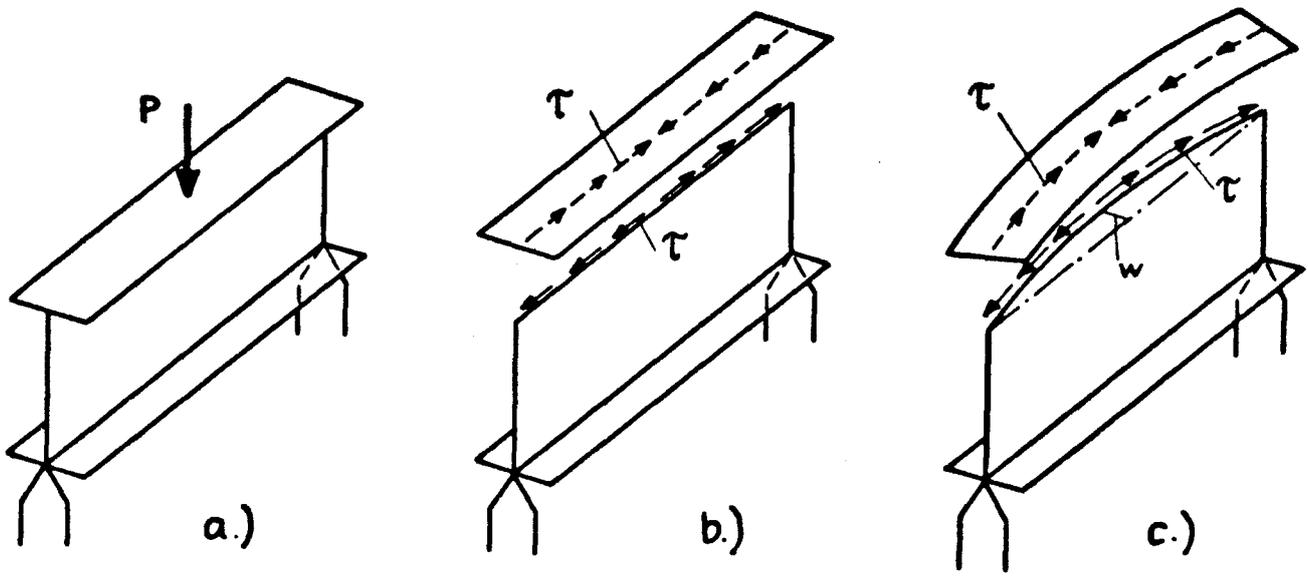


Abb. 6.12

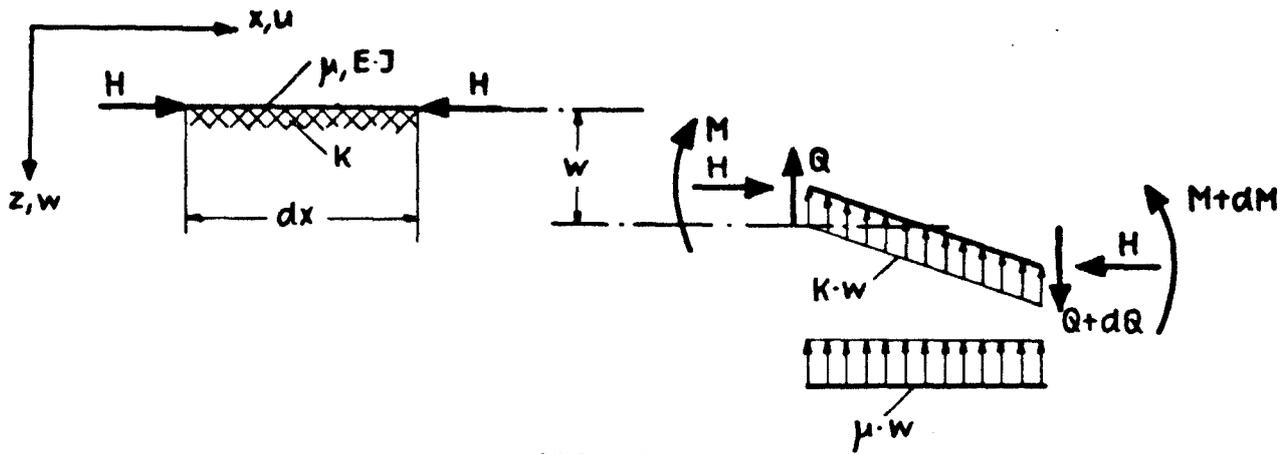


Abb. 6.13

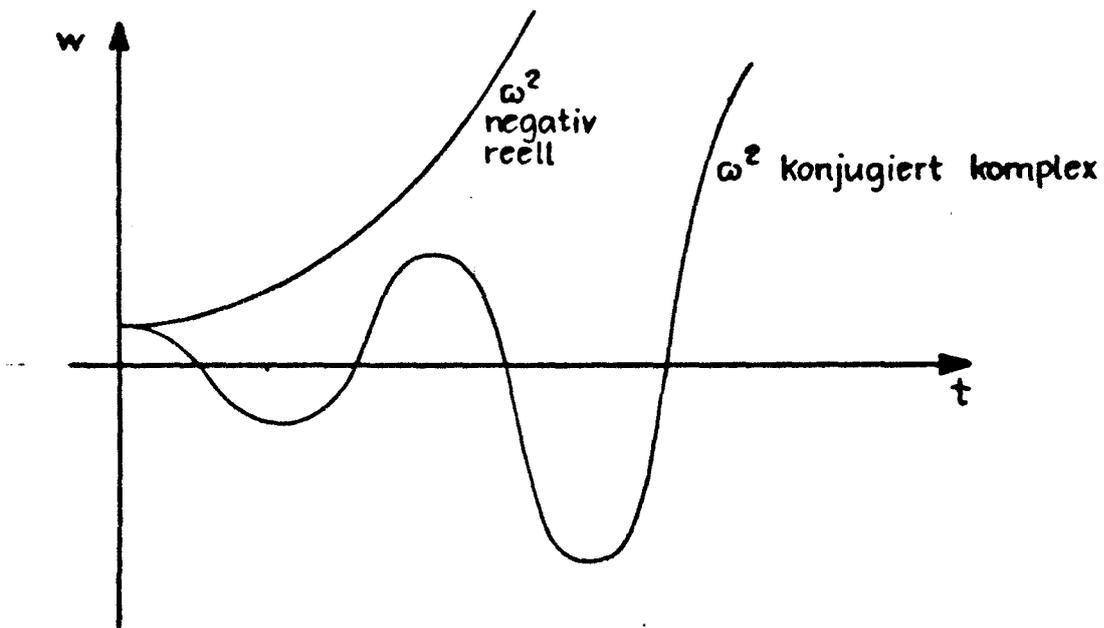


Abb. 6.14

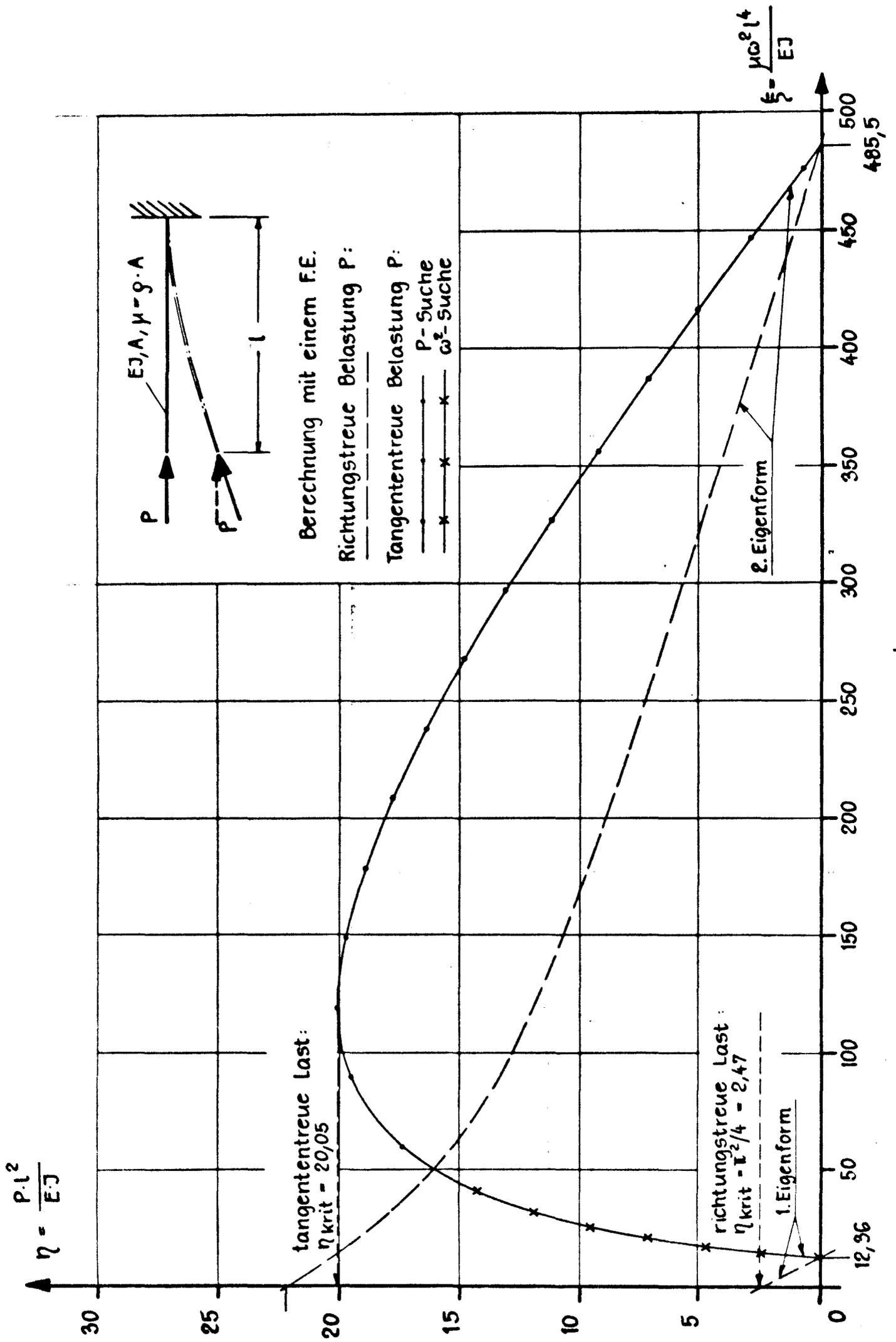


Abb. 6.15 Eigenwertkurven des Bech'schen Knickstabes

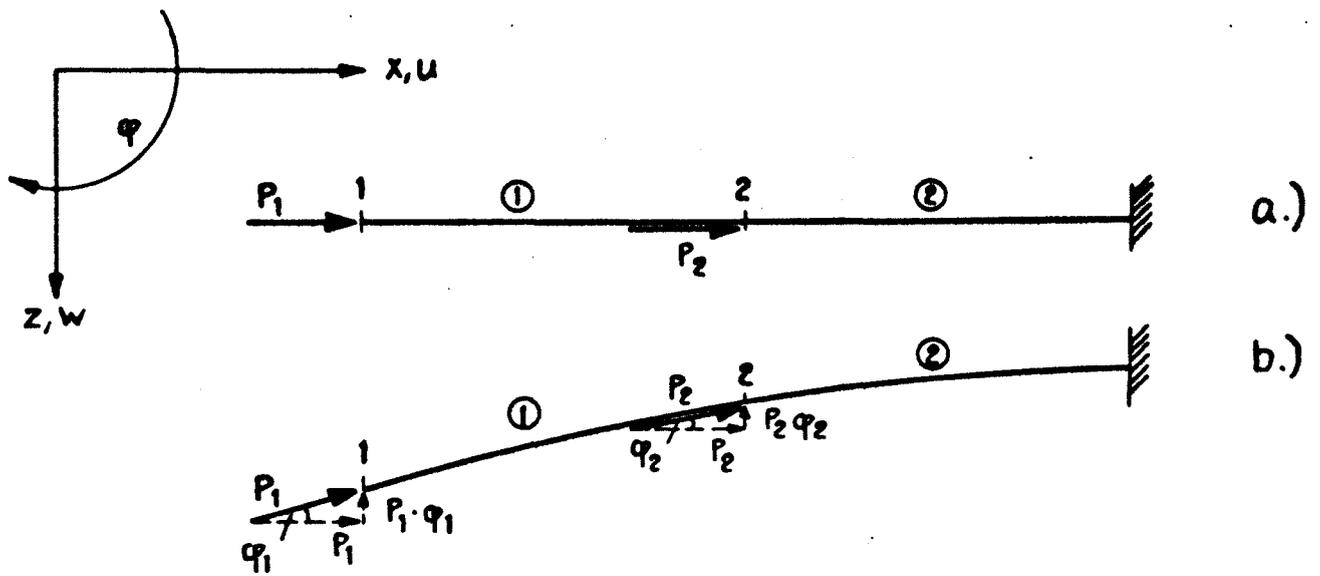


Abb. 6.16

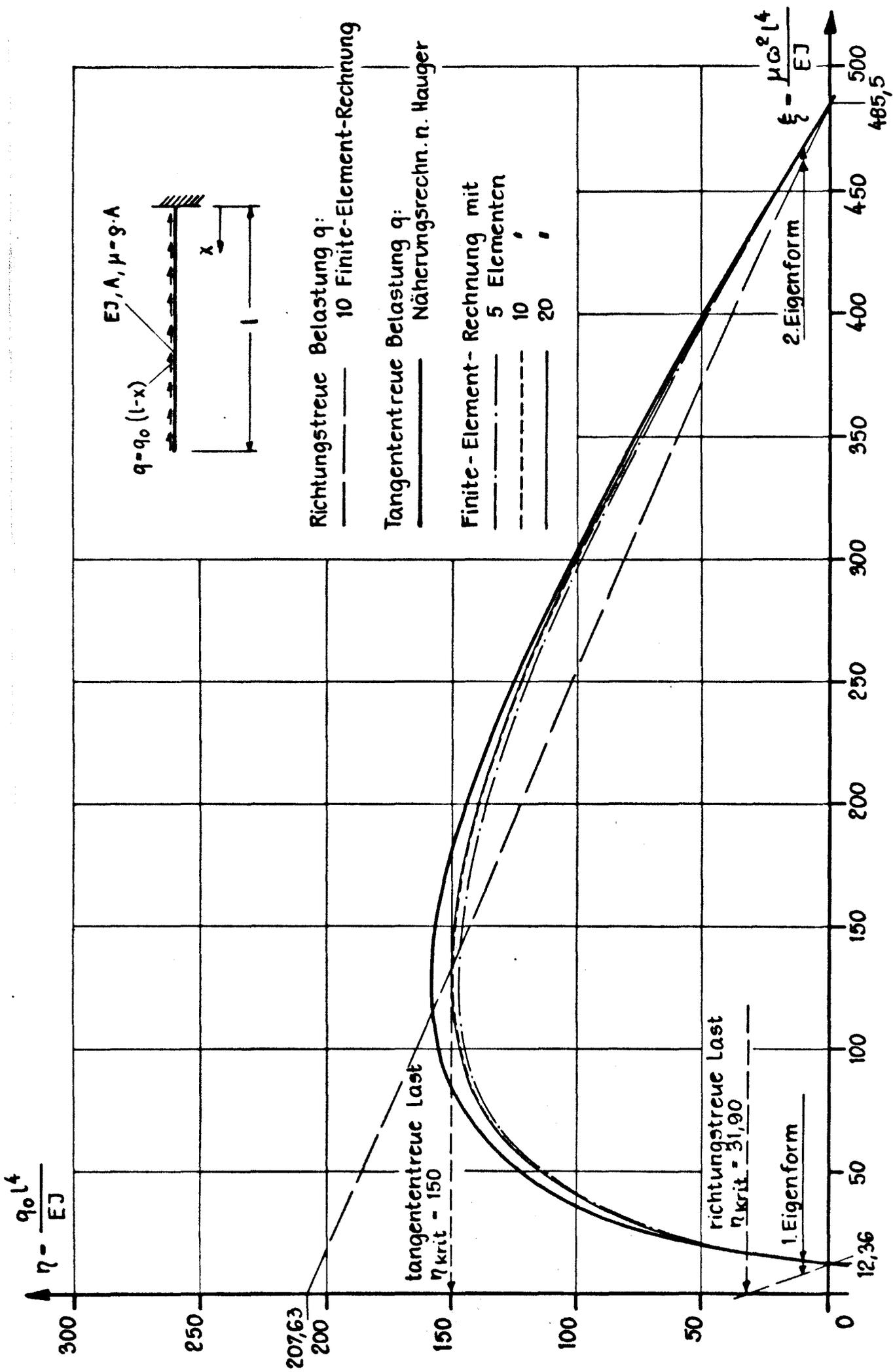


Abb. 6.17 Eigenwertkurven eines Kragträgers unter verteilter, linear veränderter Langskraft

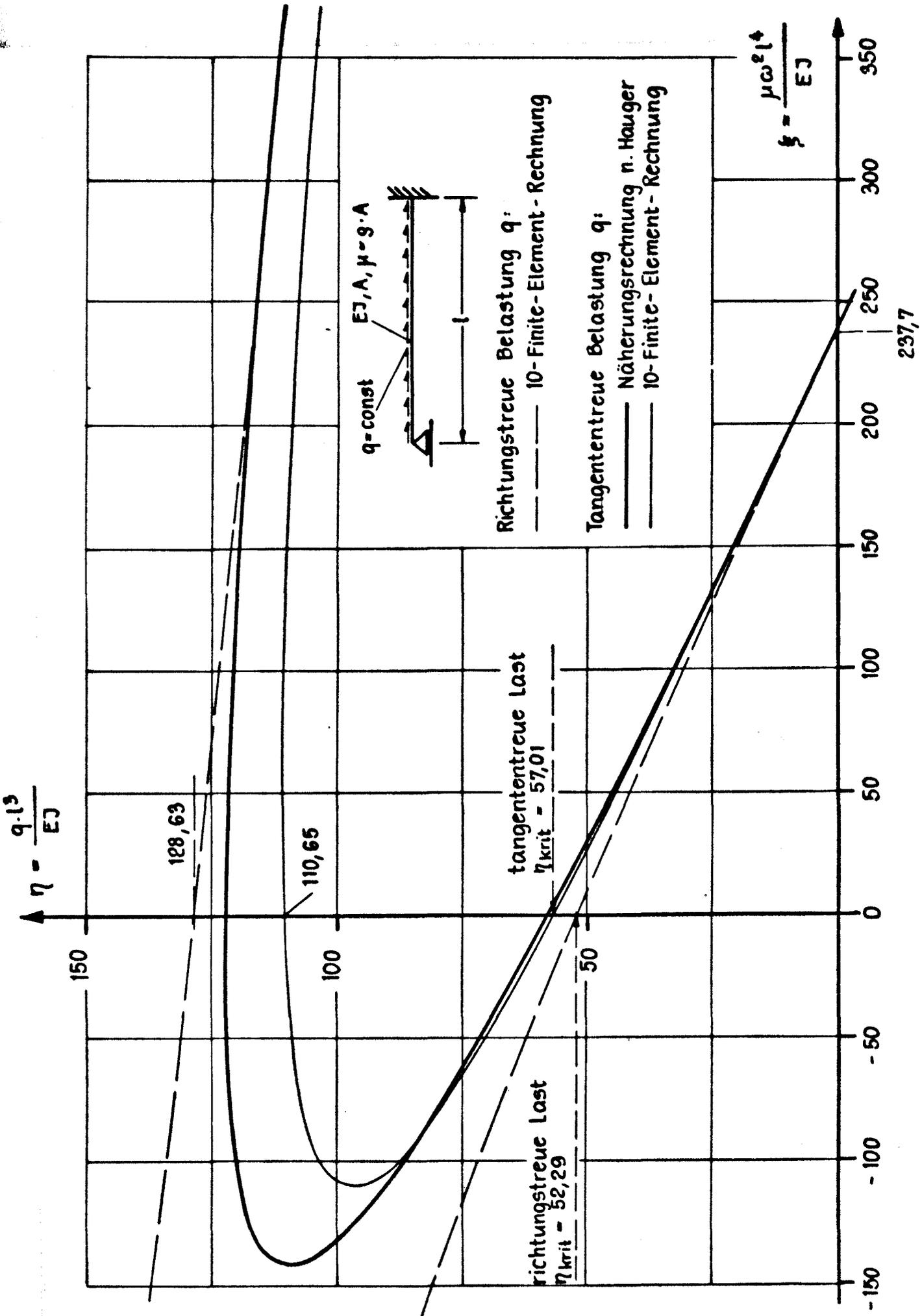


Abb. 6.18 Eigenwertkurven eines eingespannten - gelenkig gelagerten Trägers unter konstant verteilter Längsbelastung

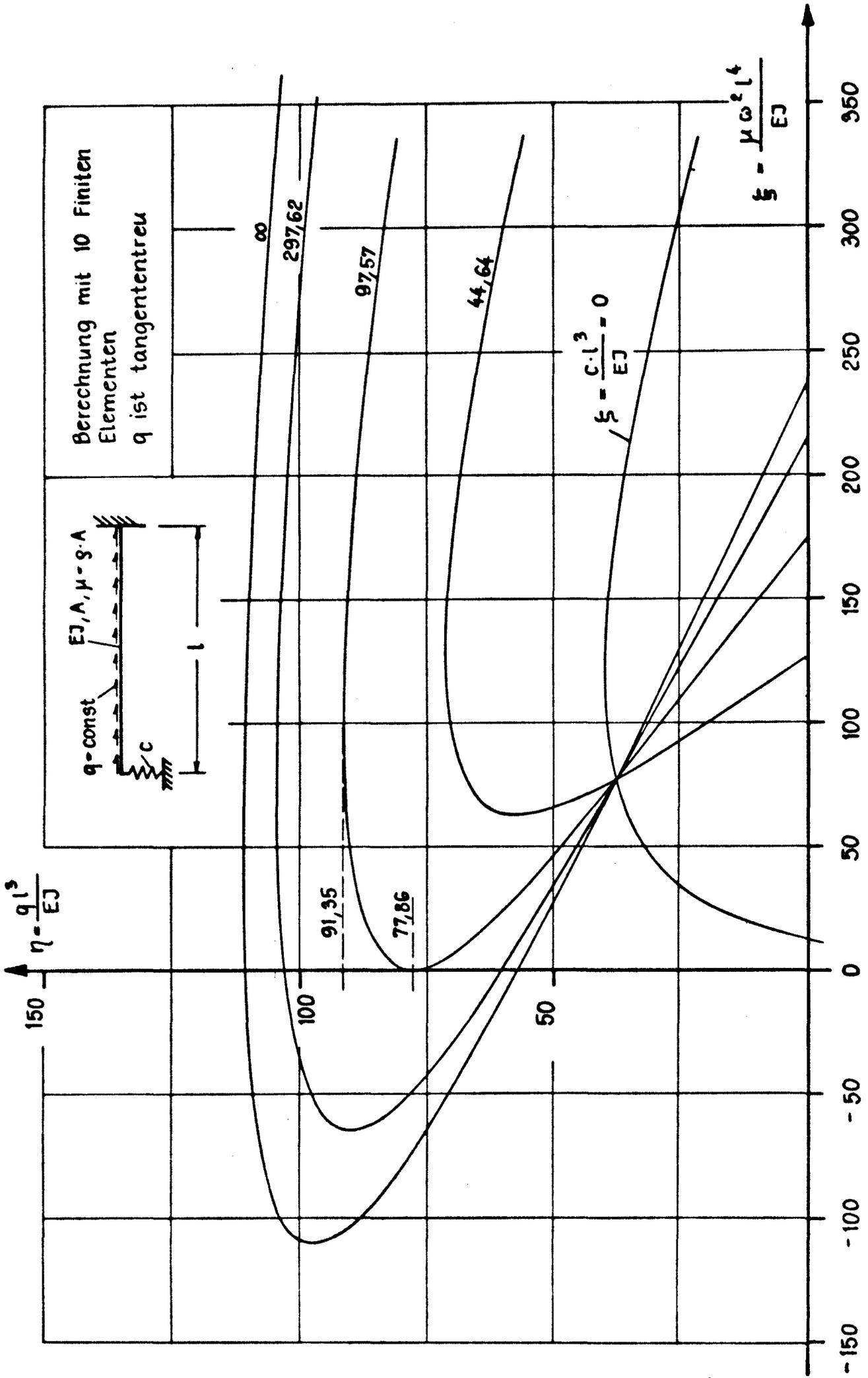


Abb. 6.19 Eigenwertkurven des am freien Ende gefederten Kragträgers unter konstant verteilter, tangentialtreuer Längsbelastung

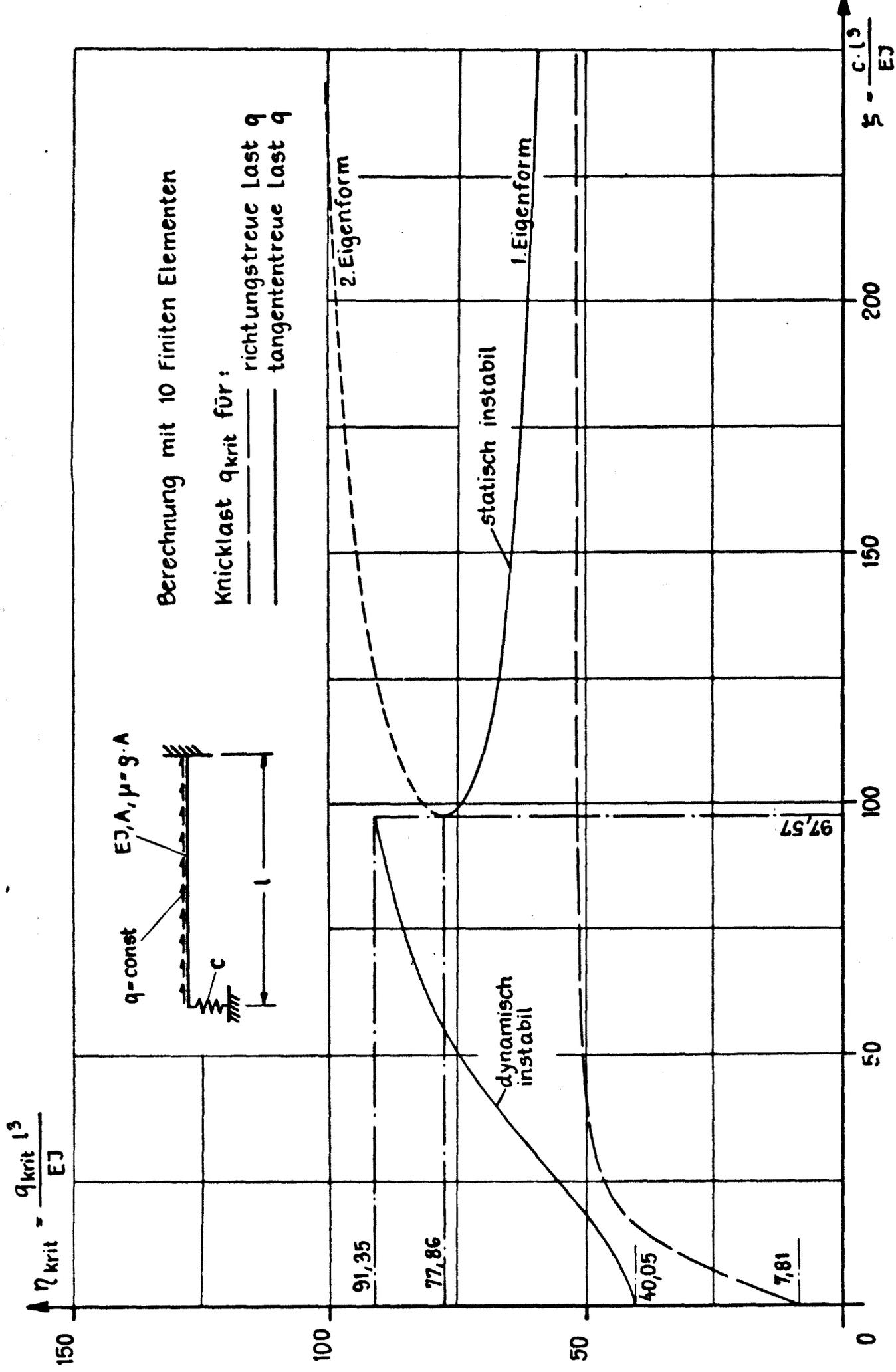


Abb. 6.20 Knicklast des am freien Ende gefederten Kragträgers unter konstant verteilter Längsbelastung

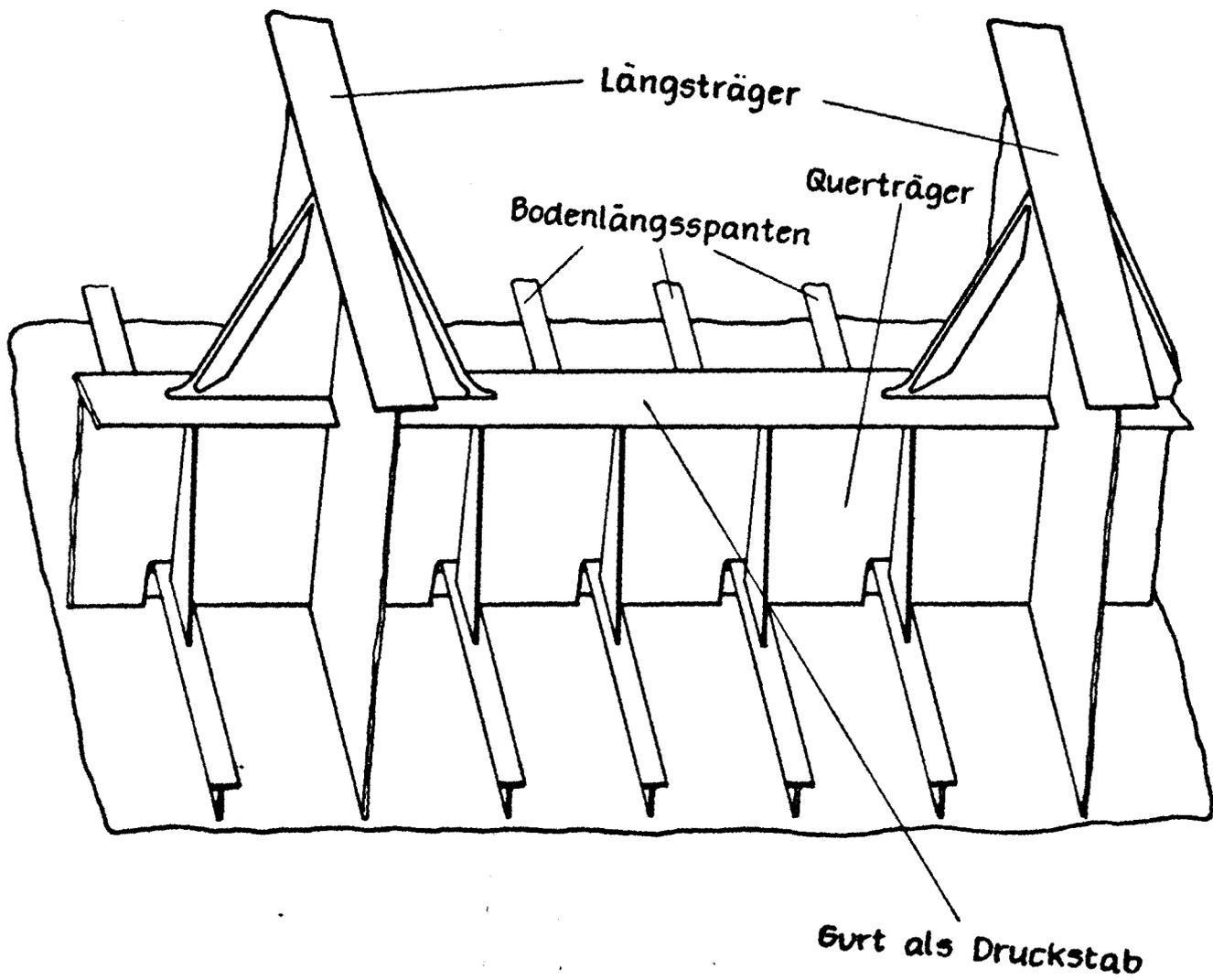


Abb. 6.21

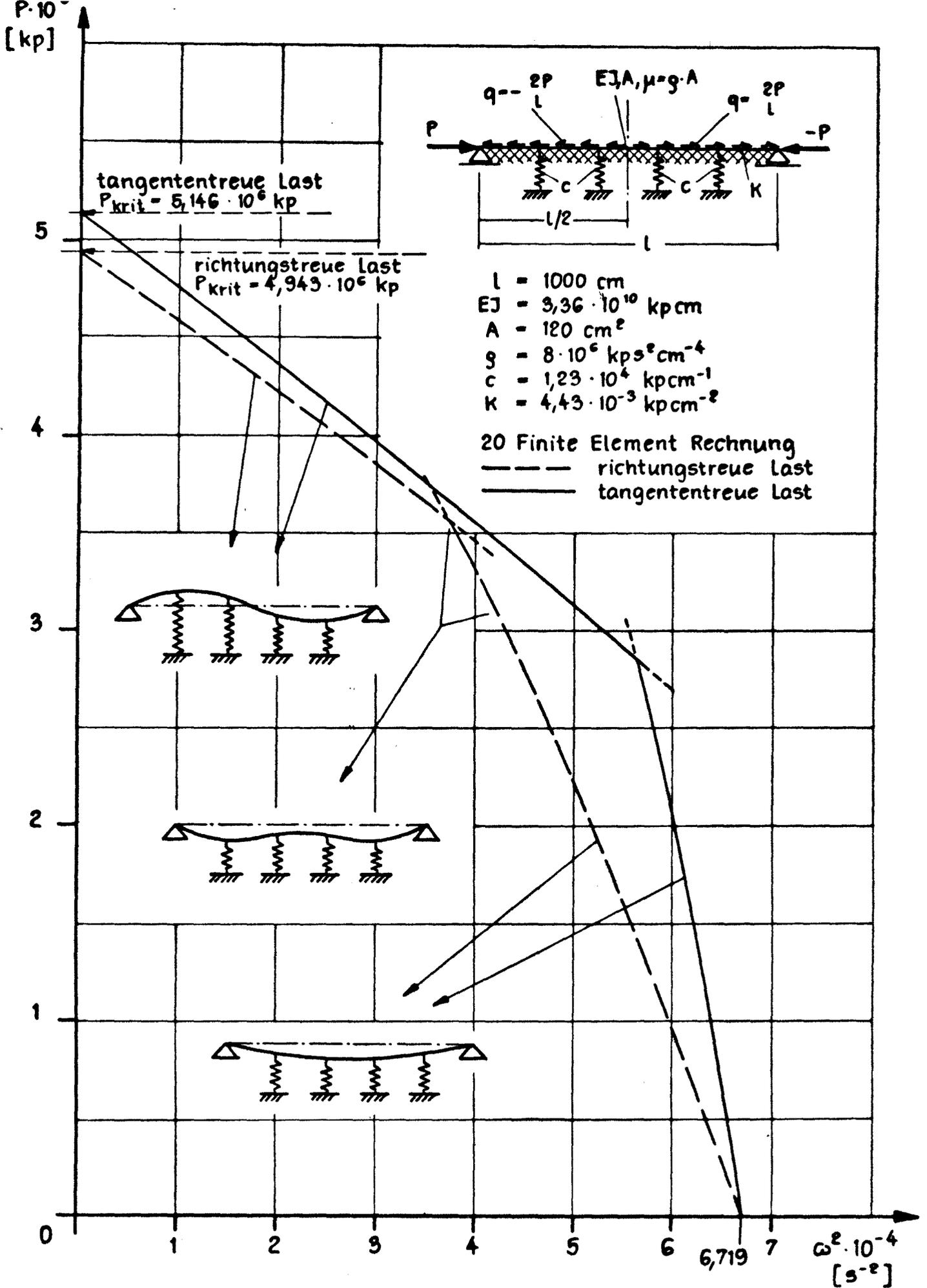


Abb. 6.22 Eigenwertkurven für den Gurt eines hochstegigen Rahmens. Fall: Gelenkige Lagerung

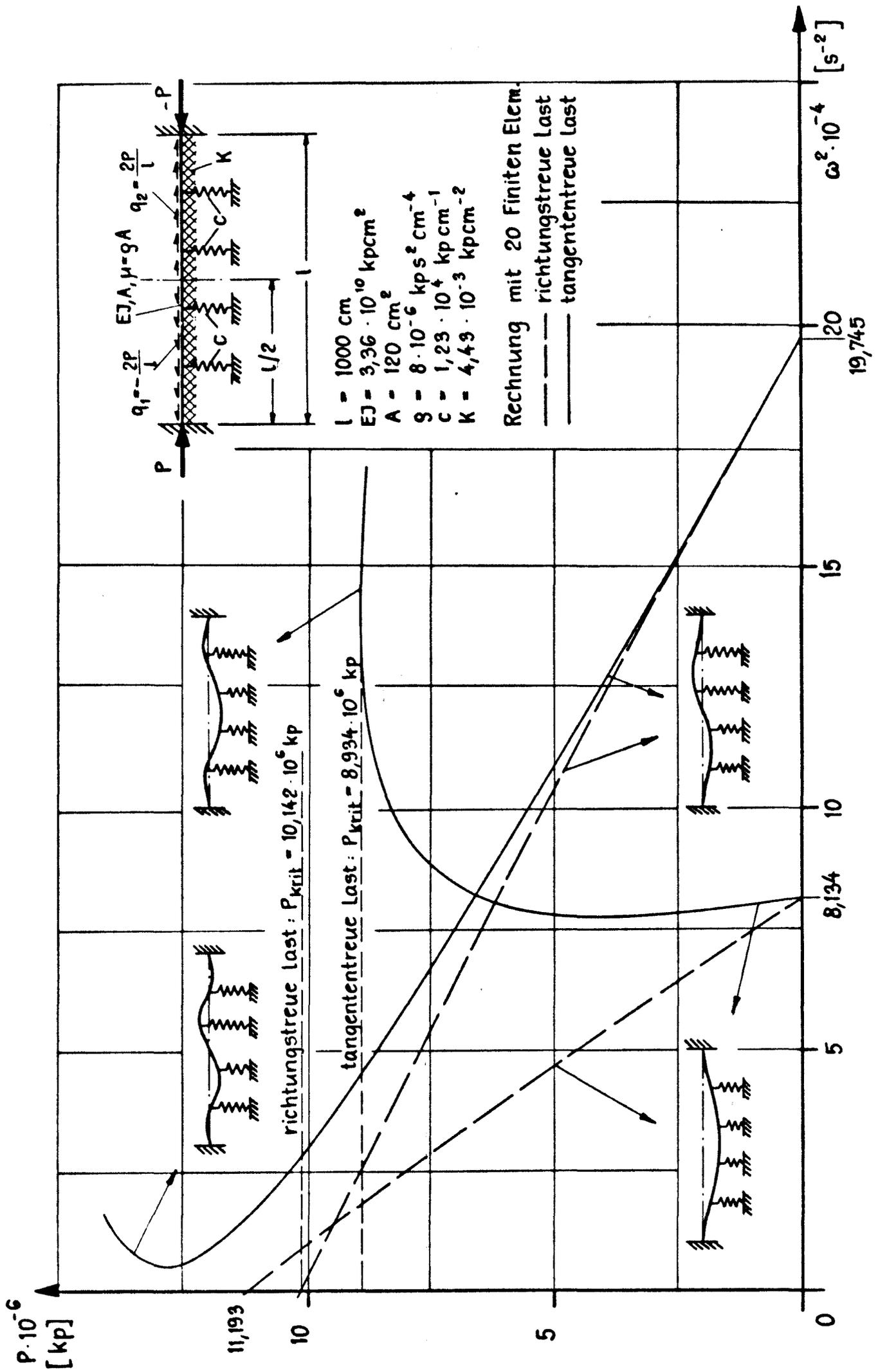


Abb. G. 23 Eigenwertkurven für den Gurt eines hochstegigen Rahmens
Fall: Feste Einspannung

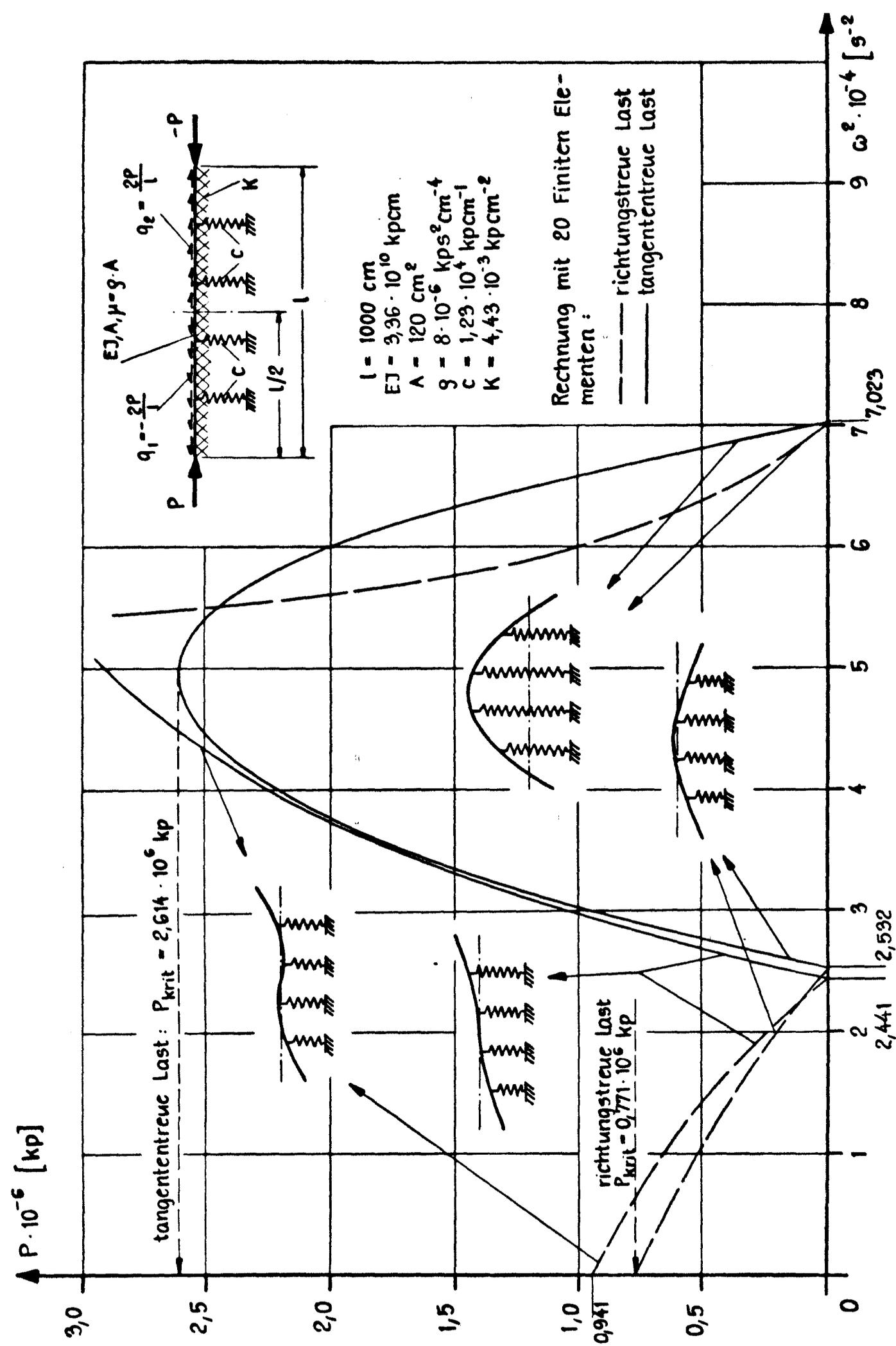


Abb. 6.24 Eigenwertkurven für den Gurt eines hochstegigen Rahmens. Fall: Keine Randlagerung

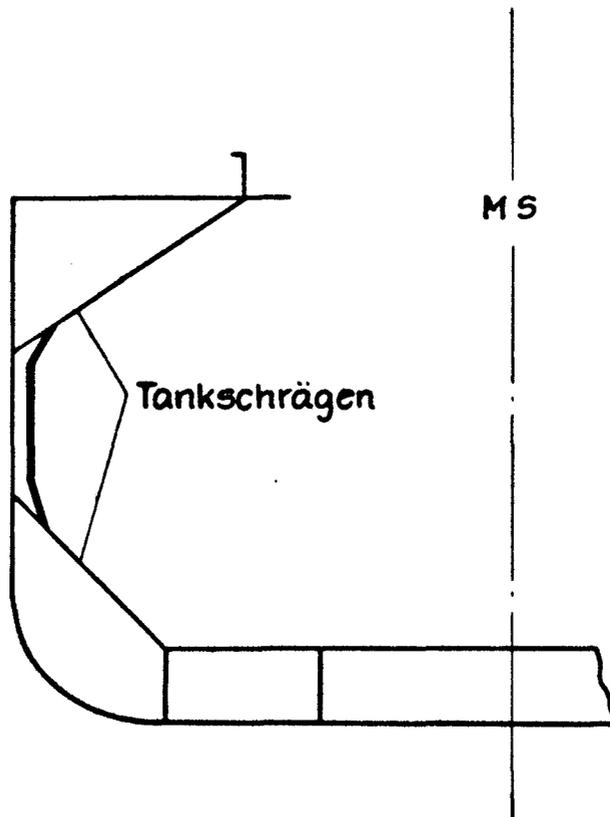
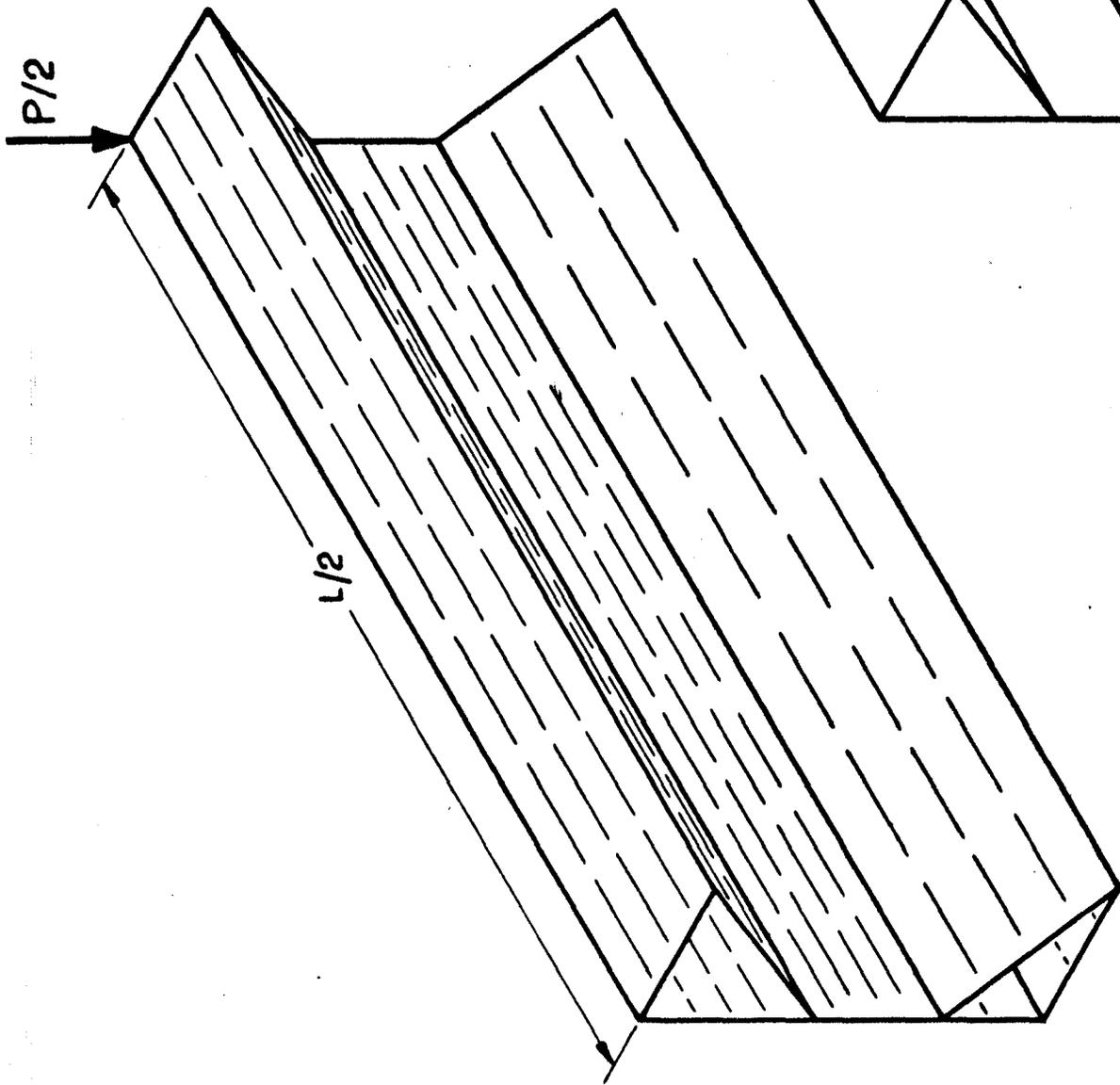
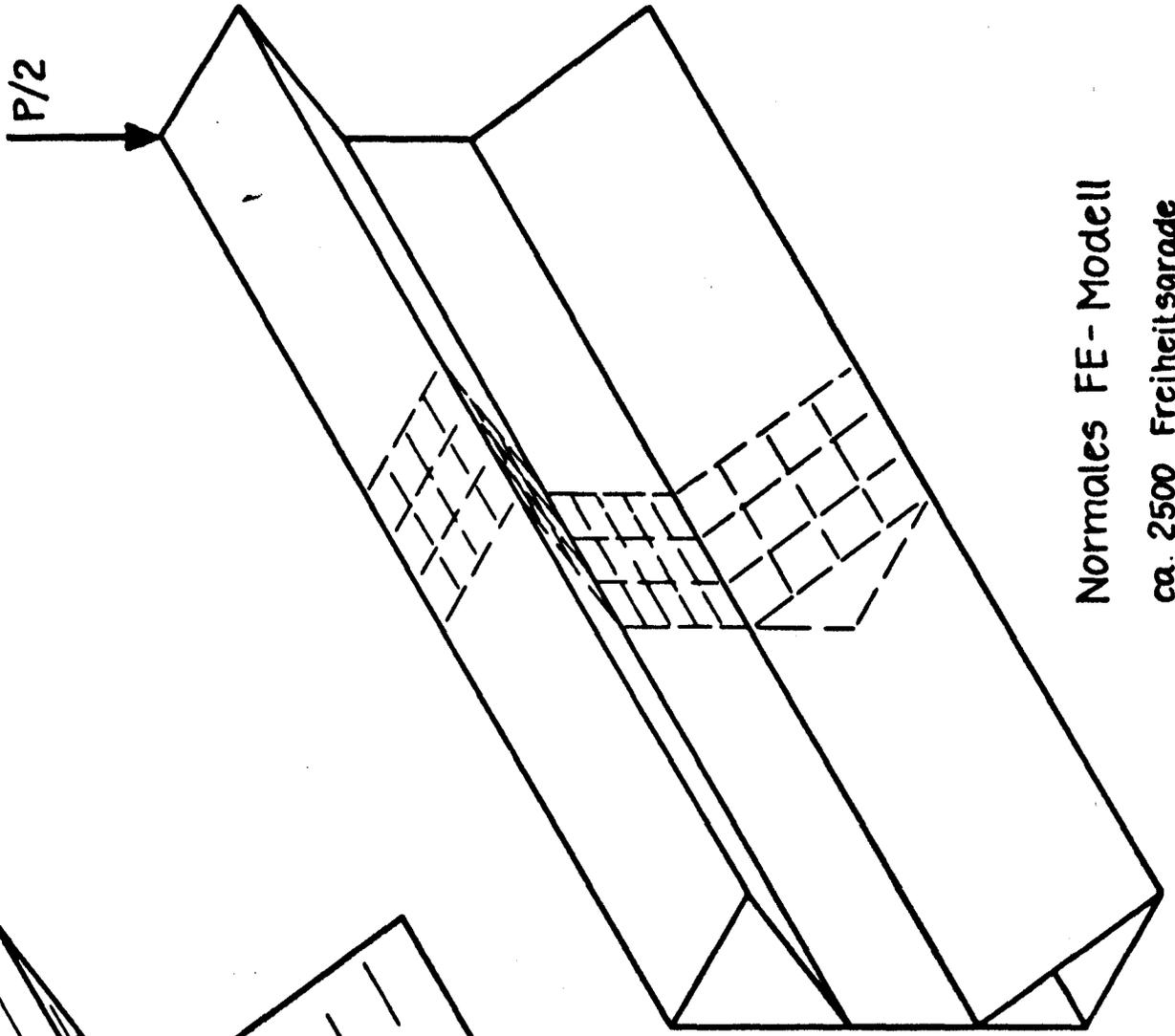


Abb. 6.25



Streifenmodell

64 Freiheitsgrade
9 Fourierkoeffizienten



Normales FE - Modell

ca. 2500 Freiheitsgrade

Abb. 6.26

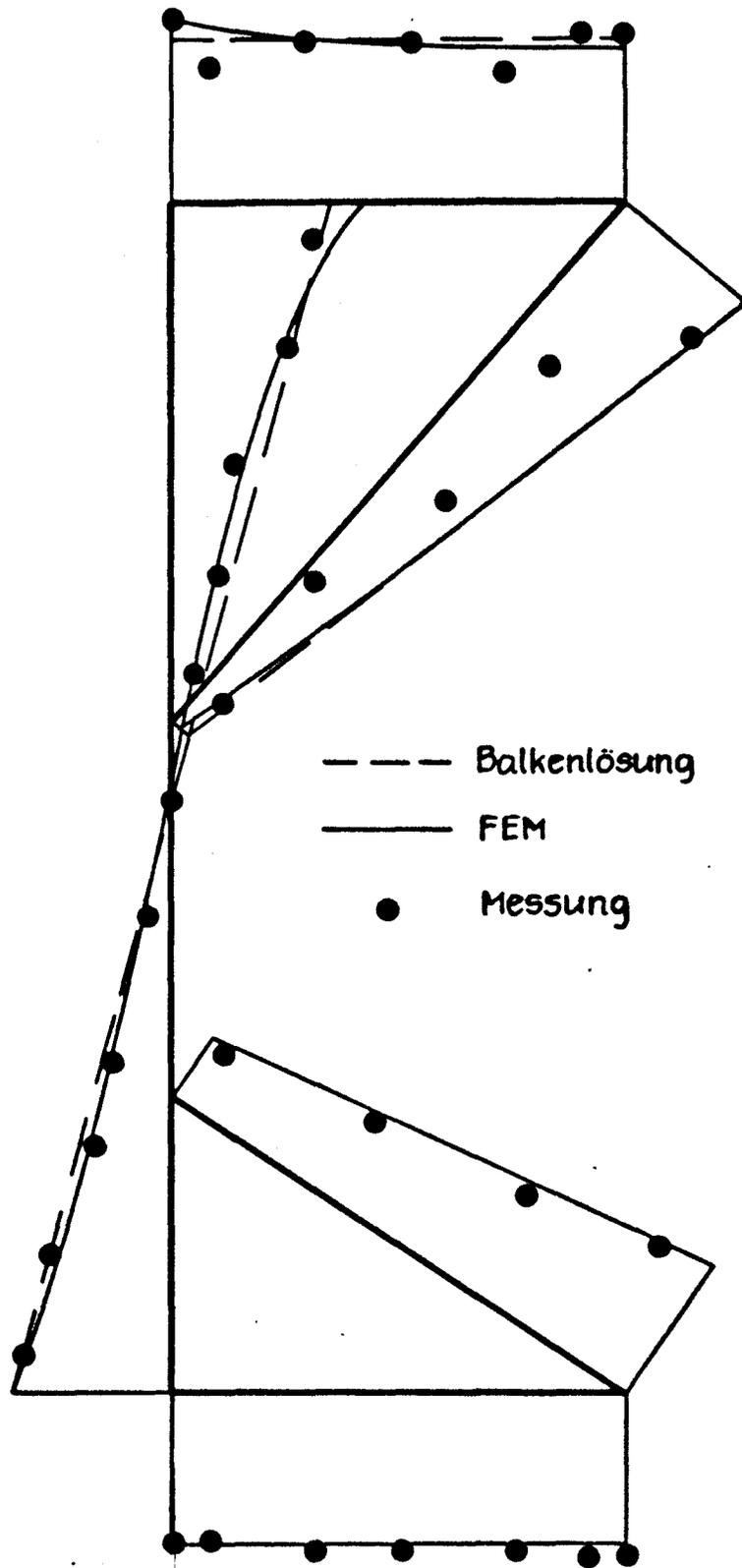


Abb. 6.27 Normalspannungen

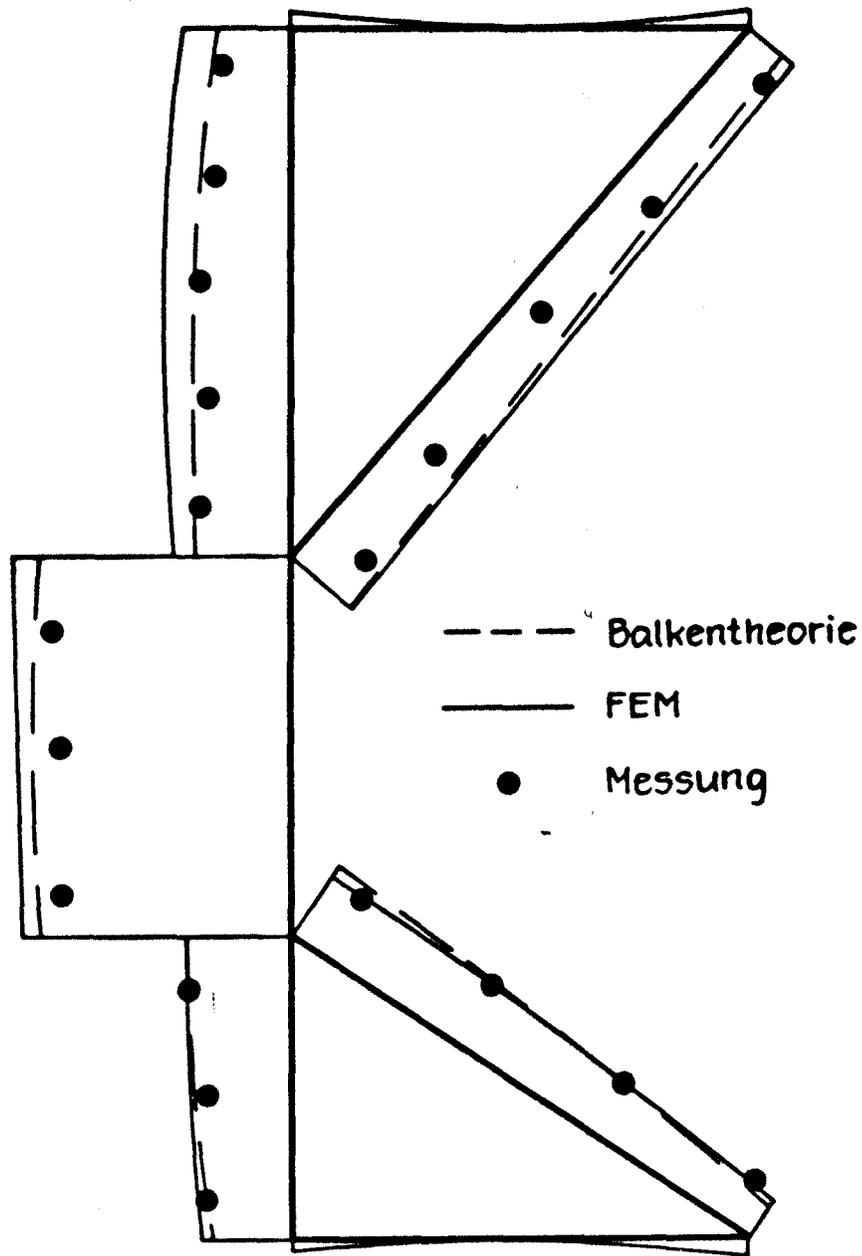


Abb. 6.28 Schubspannungsverteilung

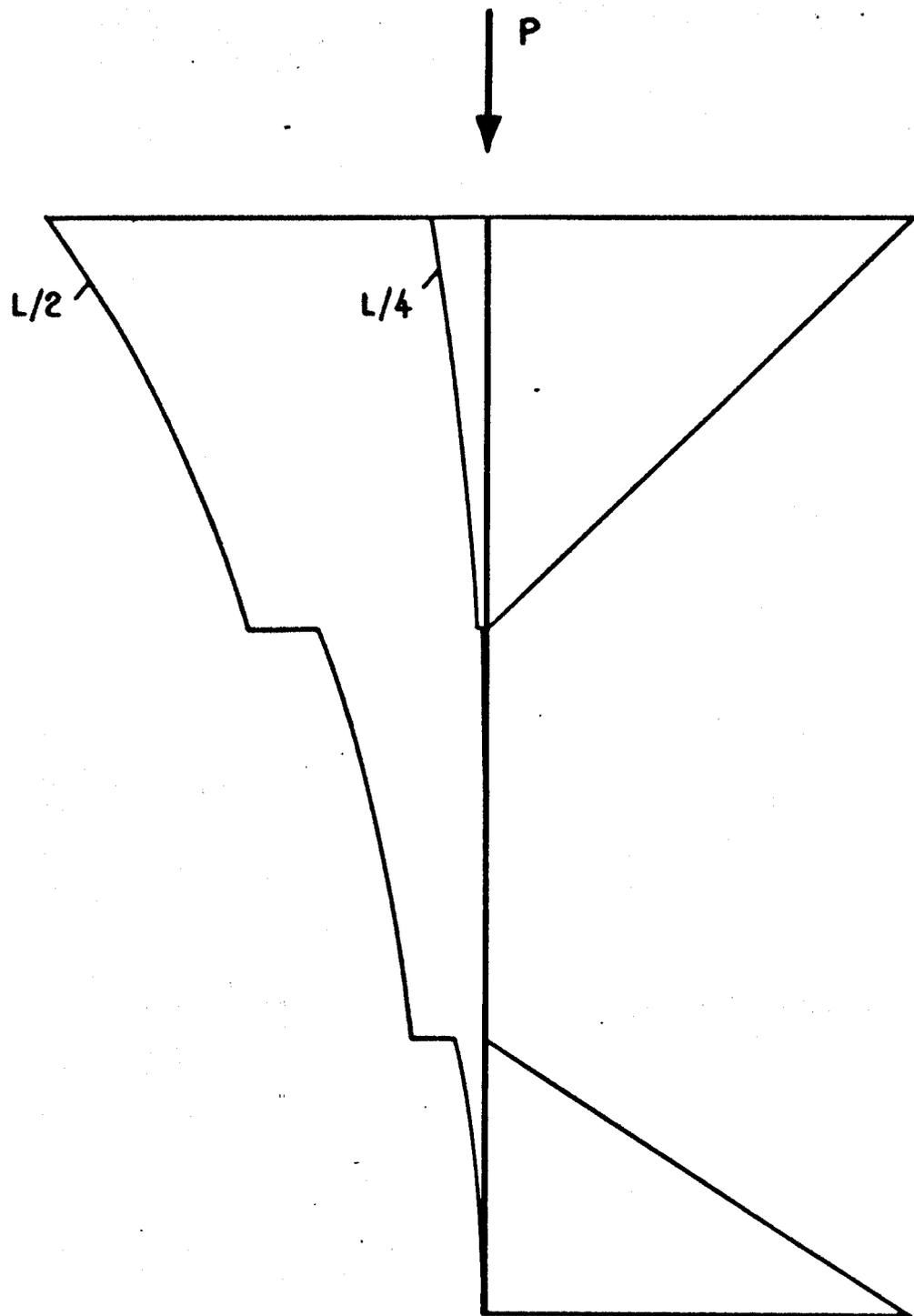
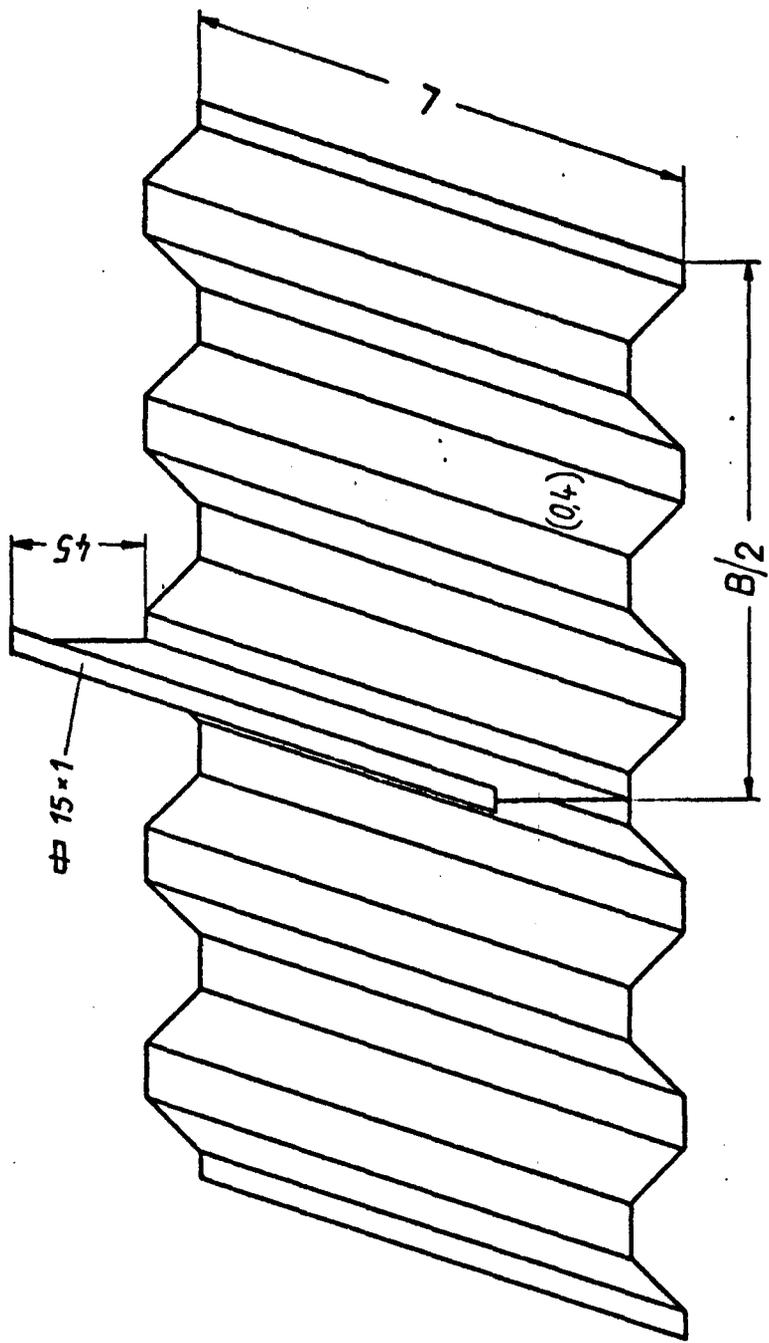


Abb. 6.29 Druckspannungen in der Außenhaut



$L/B = 0,5$
 $L/B^* = 0,4$
 $B^* = \text{abgewickelte Länge}$
 $B_m/B \approx 0,07$
 $L = 200 \text{ cm}$

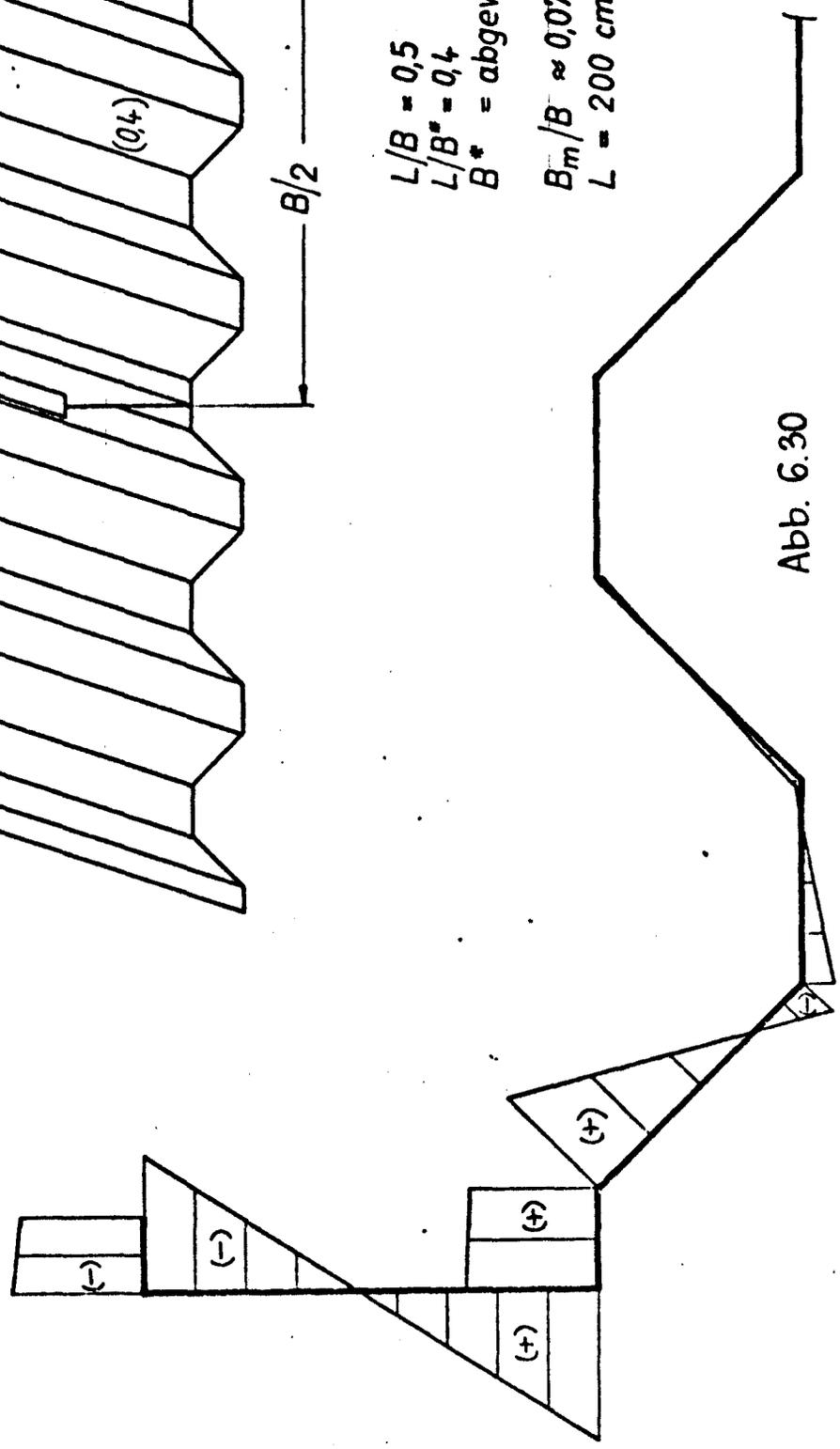


Abb. 6.30

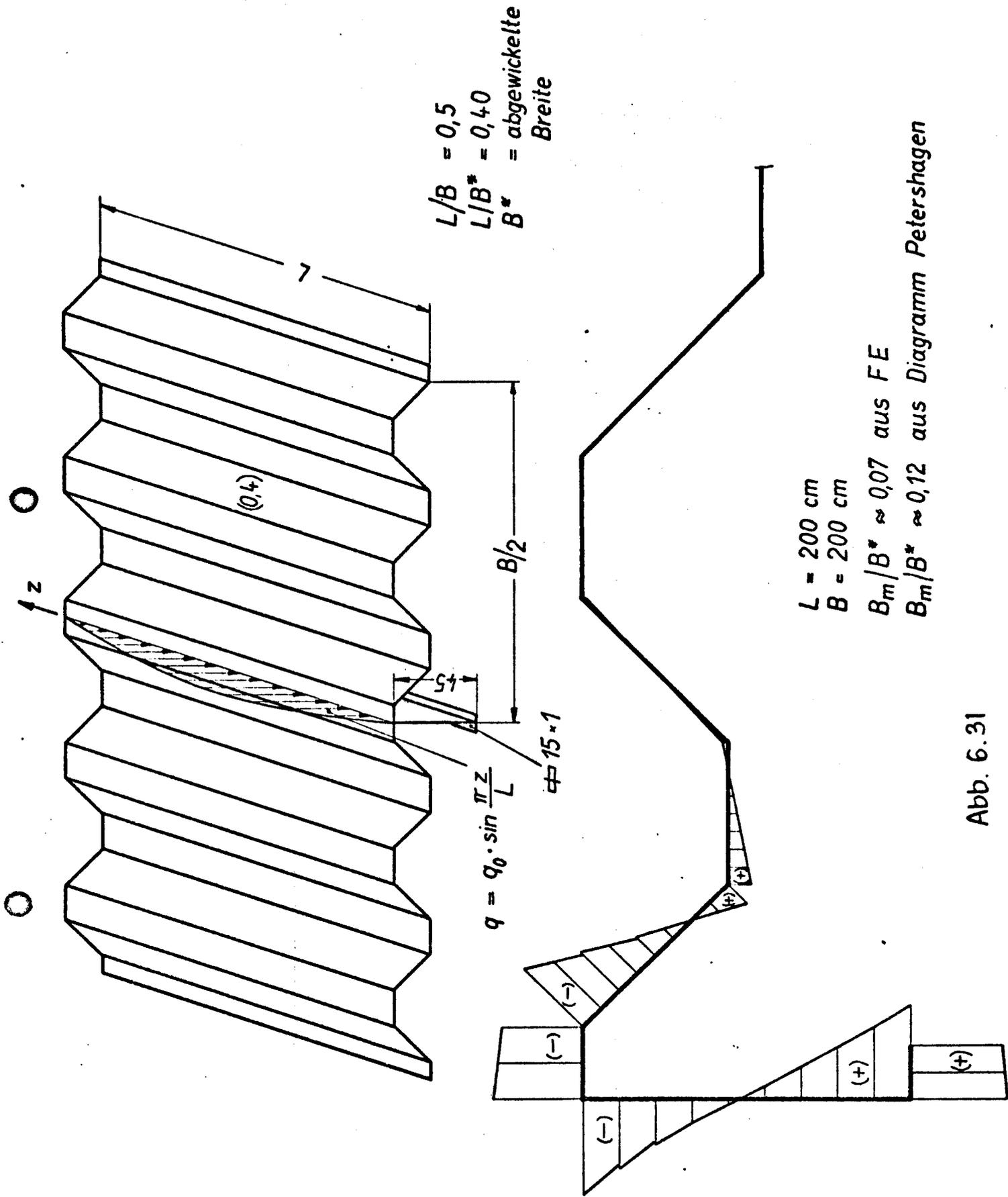


Abb. 6.31

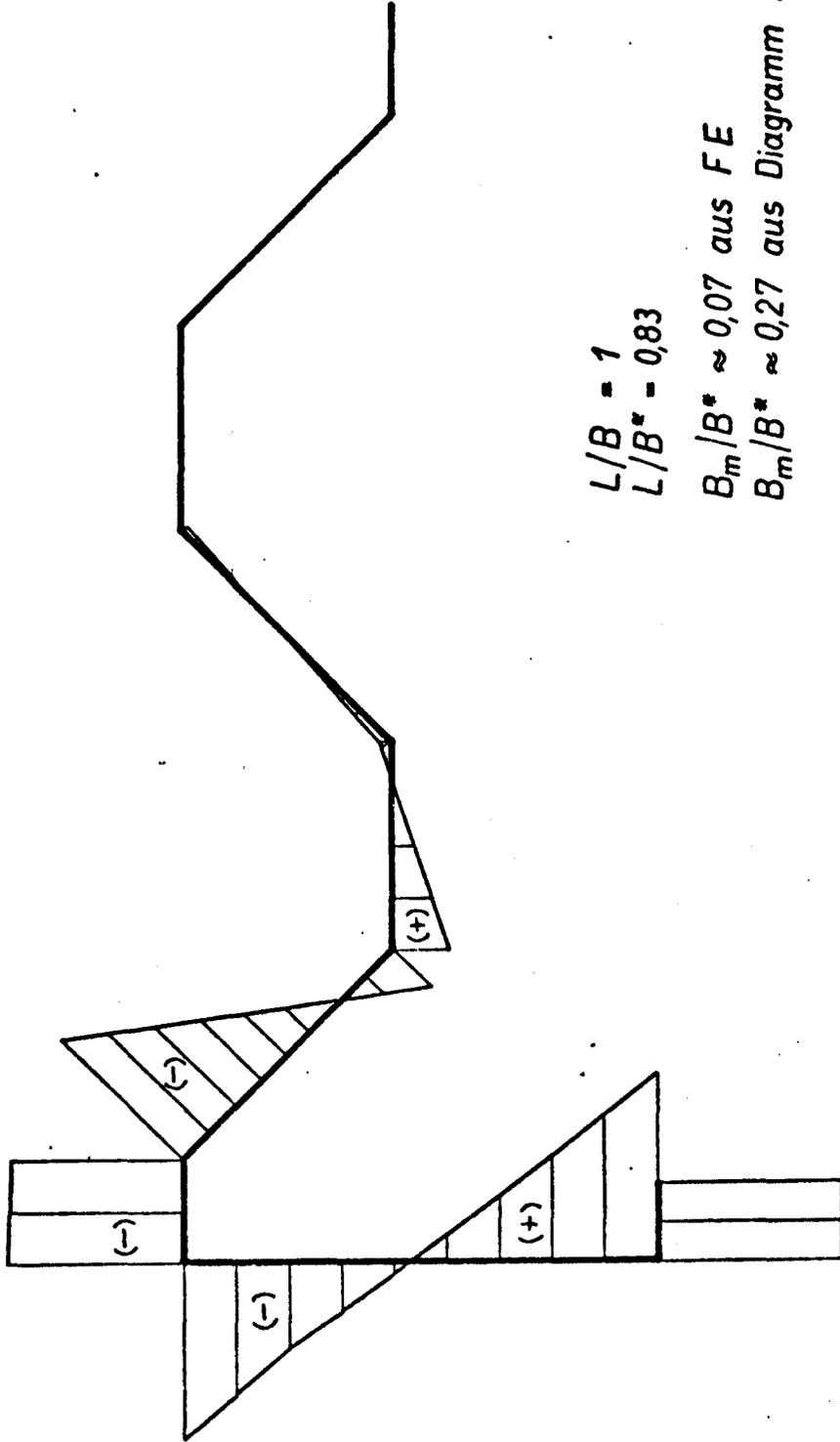


Abb. 6.32

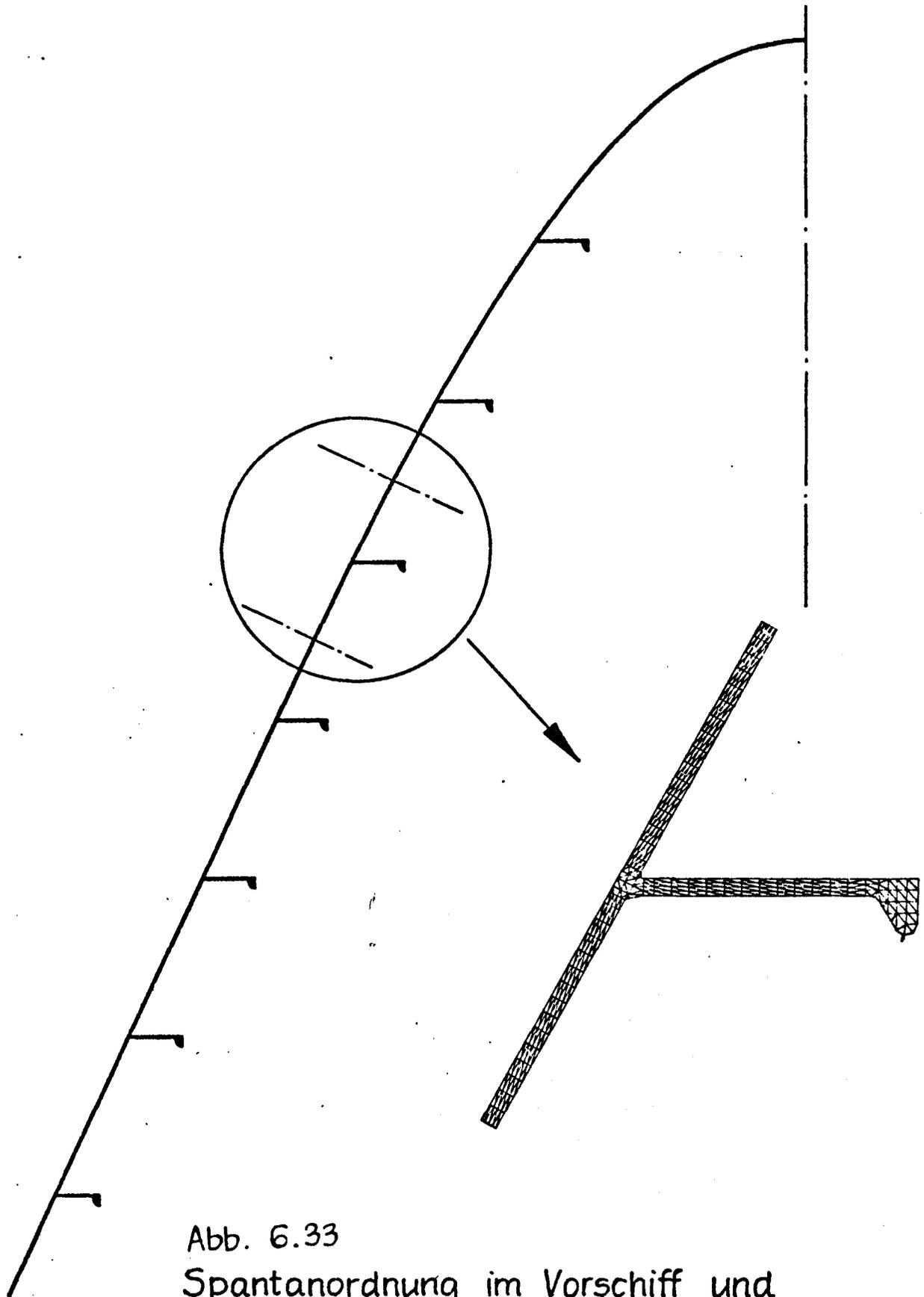


Abb. 6.33
Spantanordnung im Vorschiff und
FE - Rechenmodell

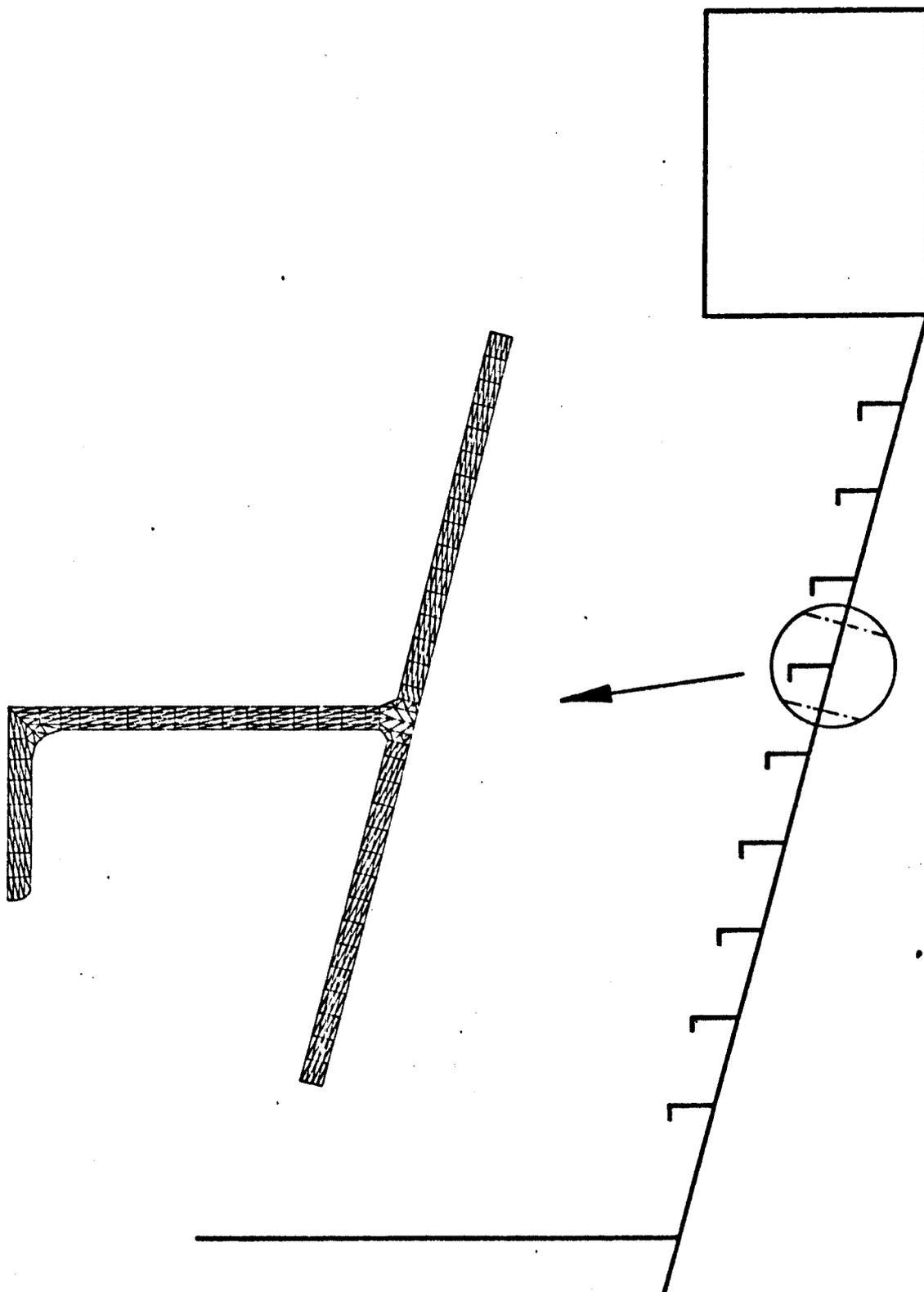


Abb. 6.34

Längsspantanordnung und FE-Rechenmodell

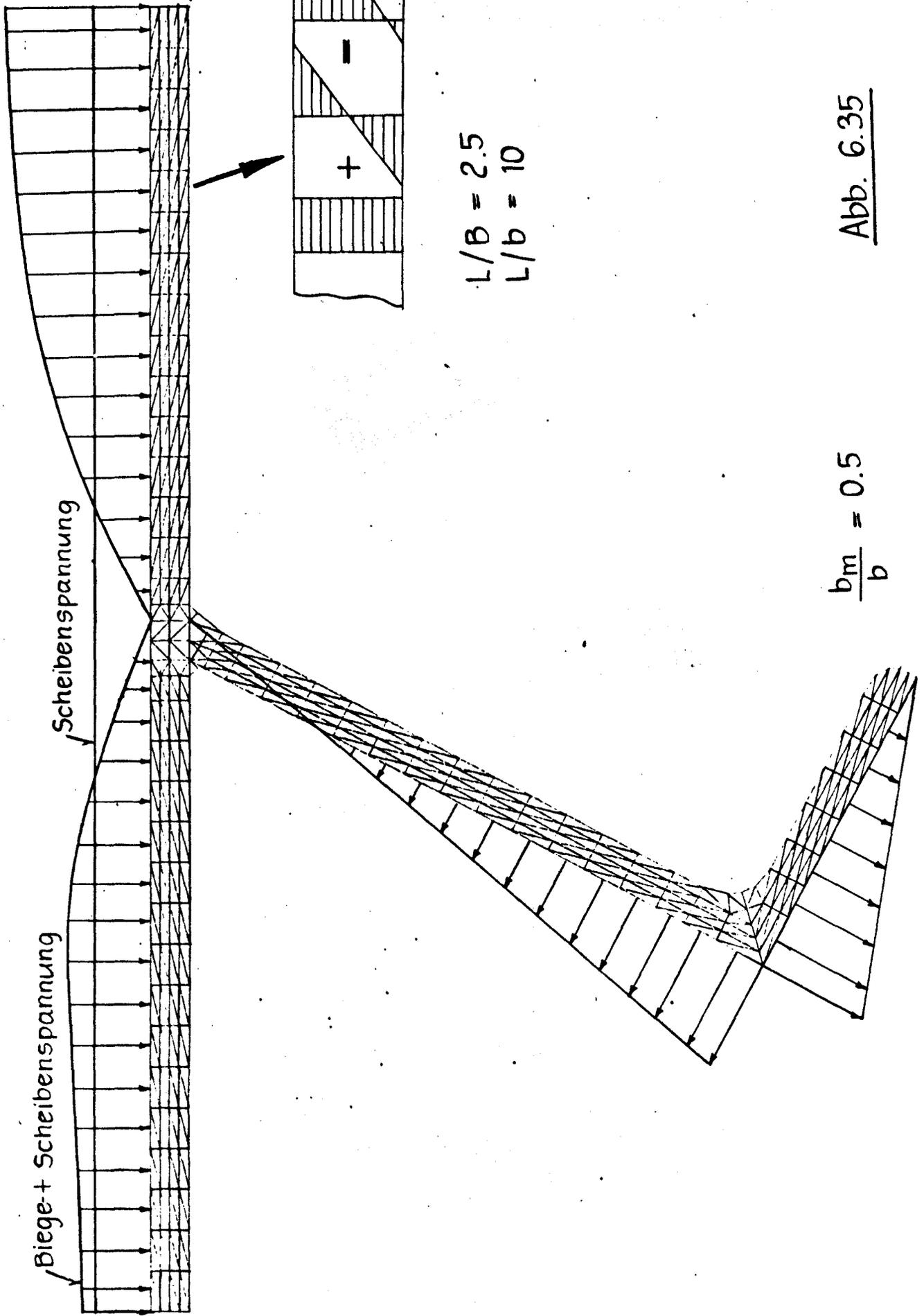
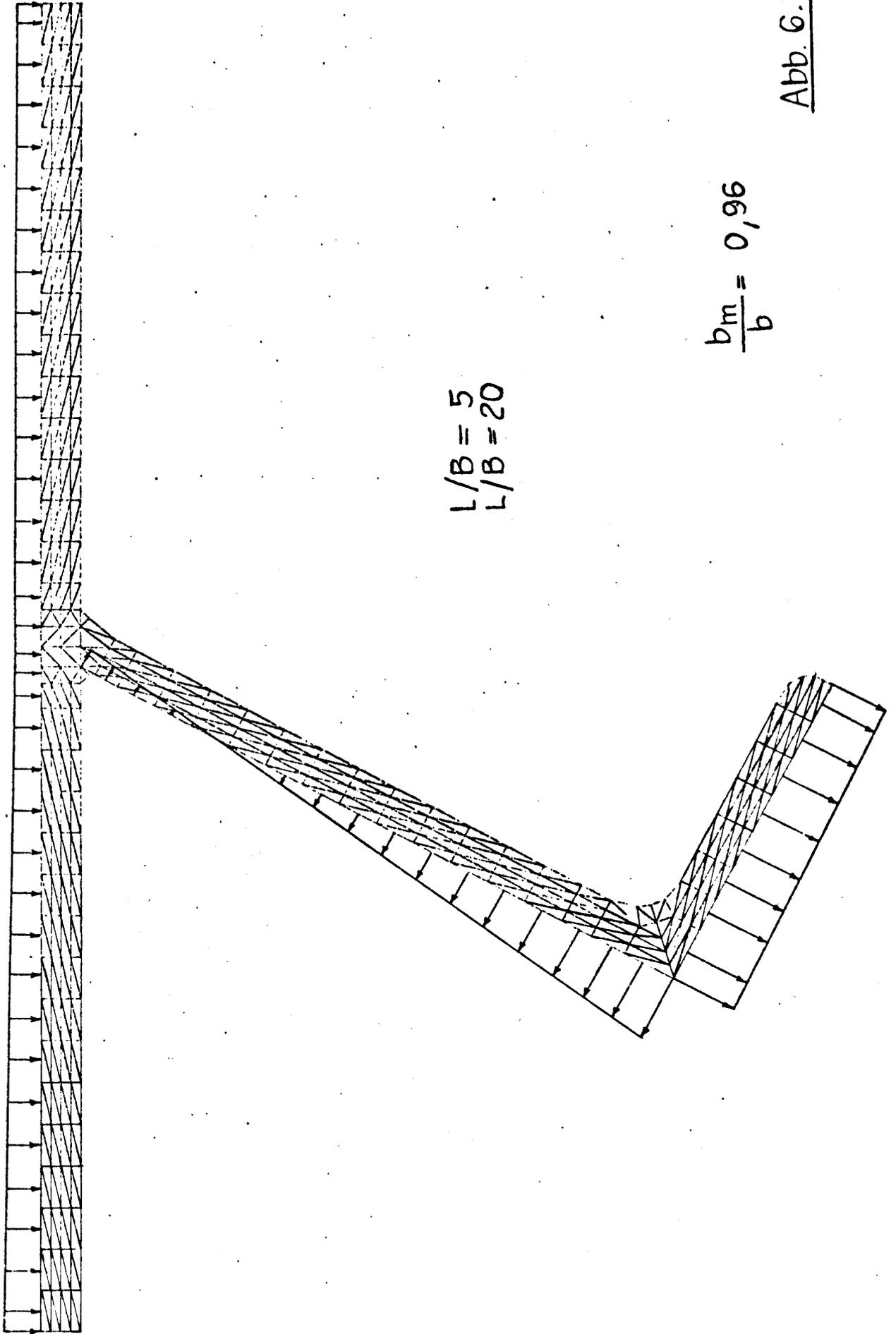


Abb. 6.35

$$\frac{b_m}{b} = 0.5$$



$$\begin{aligned} L/B &= 5 \\ L/B &= 20 \end{aligned}$$

$$\frac{b_m}{b} = 0,96$$

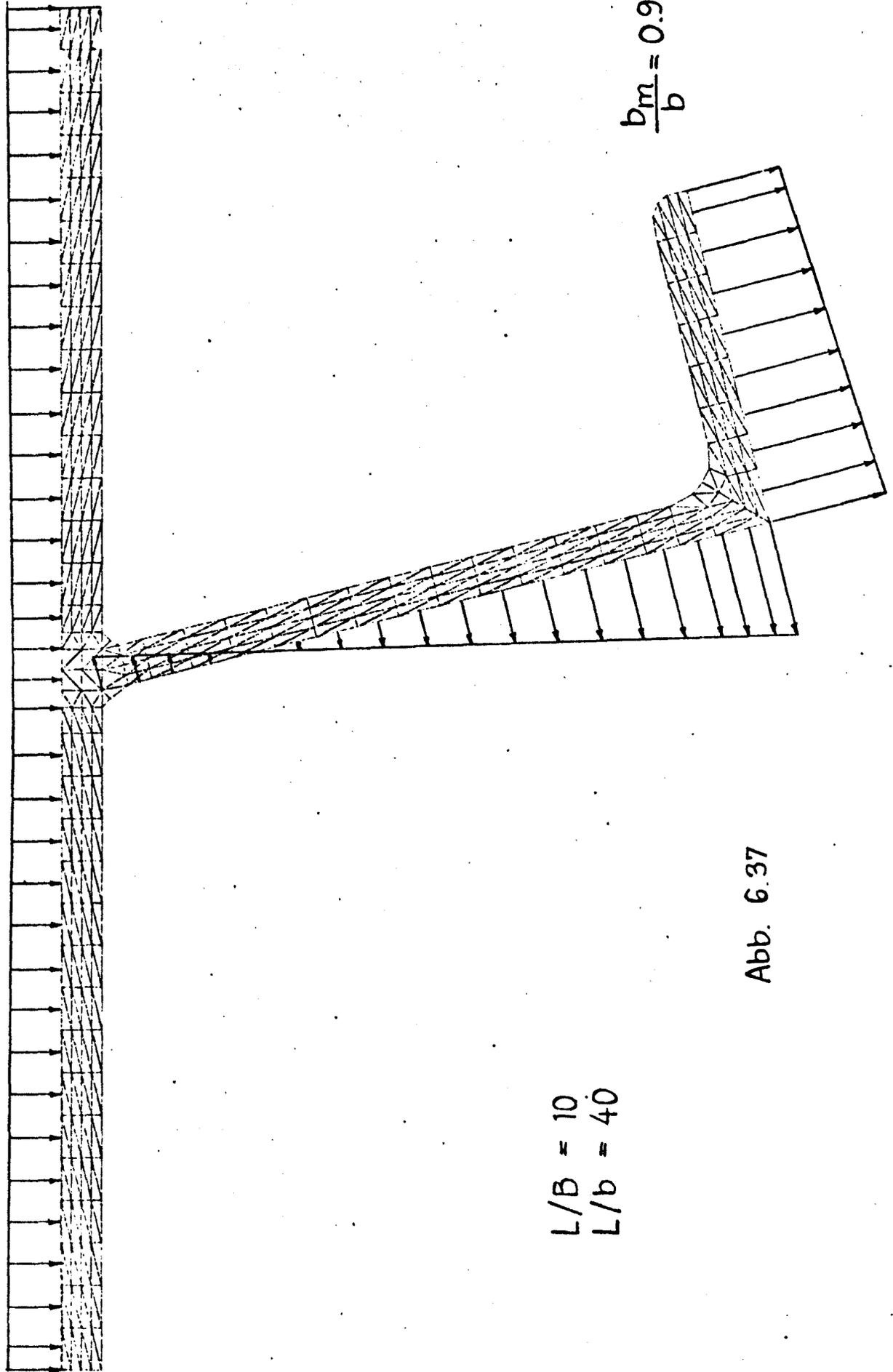
Abb. 6.36

α

0

$$\frac{B_m}{B} = 1.087$$

$$\frac{B_m}{B} = 1.045$$



$$\frac{b_m}{b} = 0.90$$

$$\begin{aligned} L/B &= 10 \\ L/b &= 40 \end{aligned}$$

Abb. 6.37

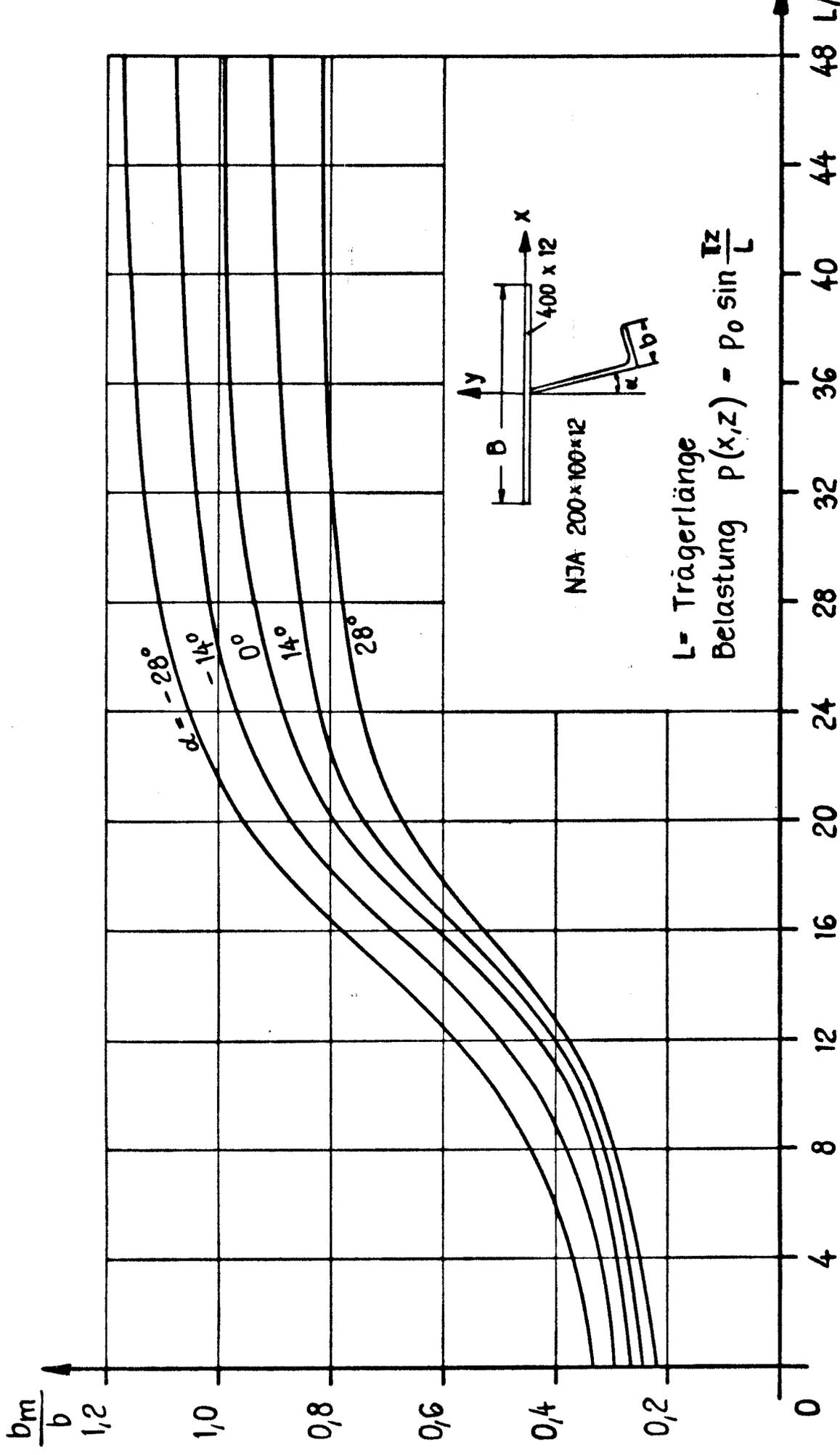


Abb. 6.38 Mittragende Breiten des Gurtes für auf ein Schmiege stehendes Winkelprofil

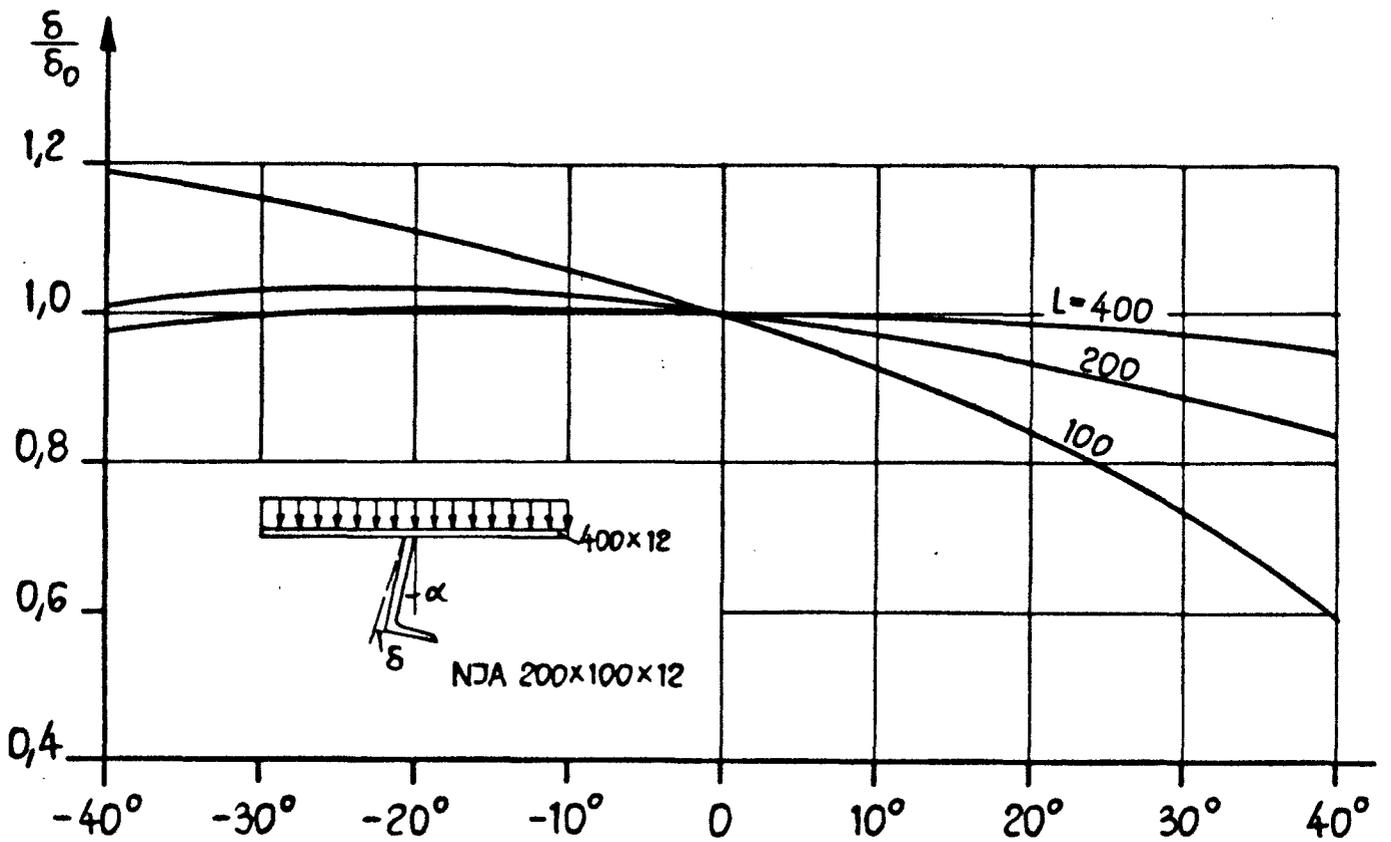
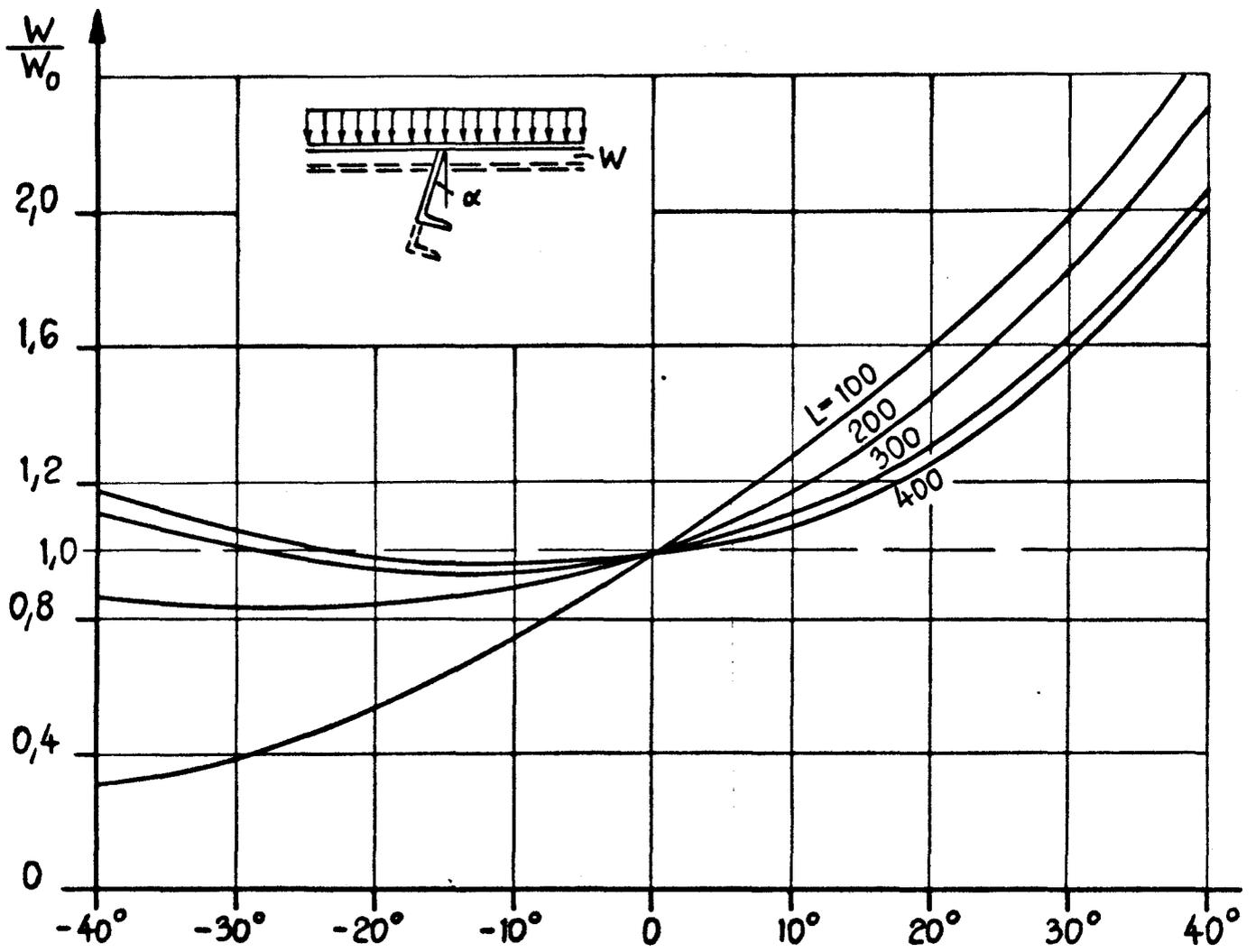


Abb.639

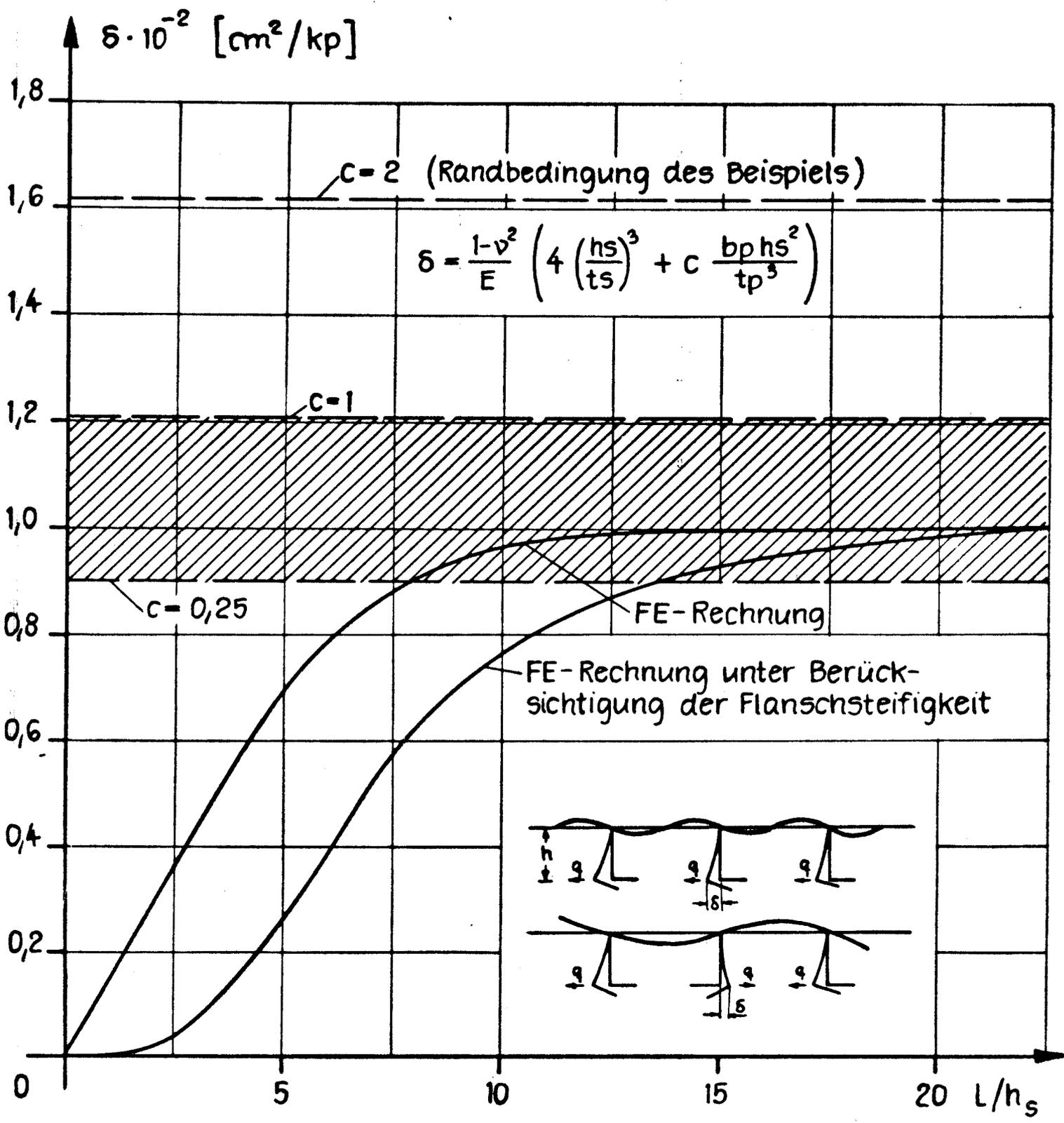


Abb. 6.40

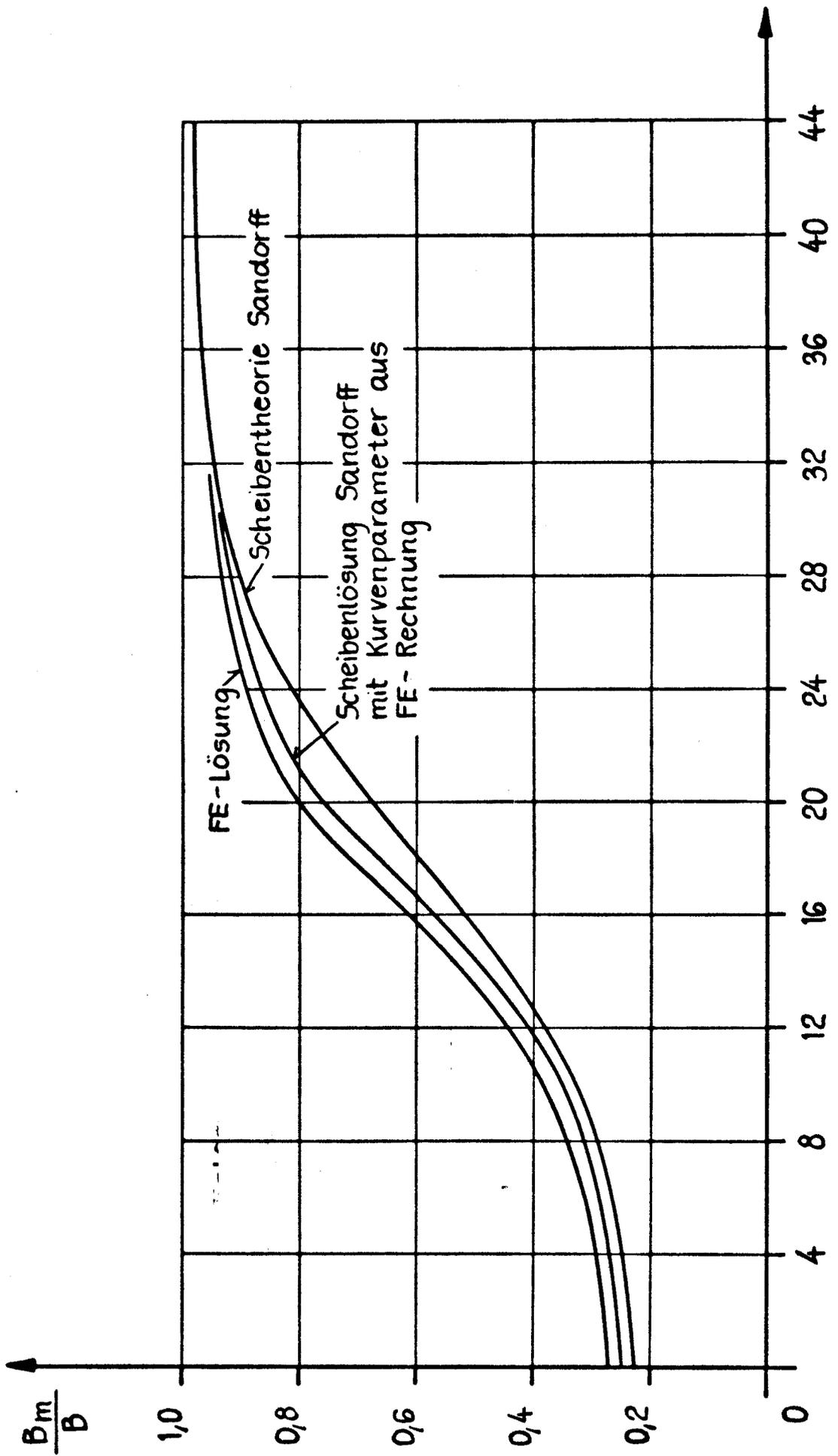


Abb. 6.41

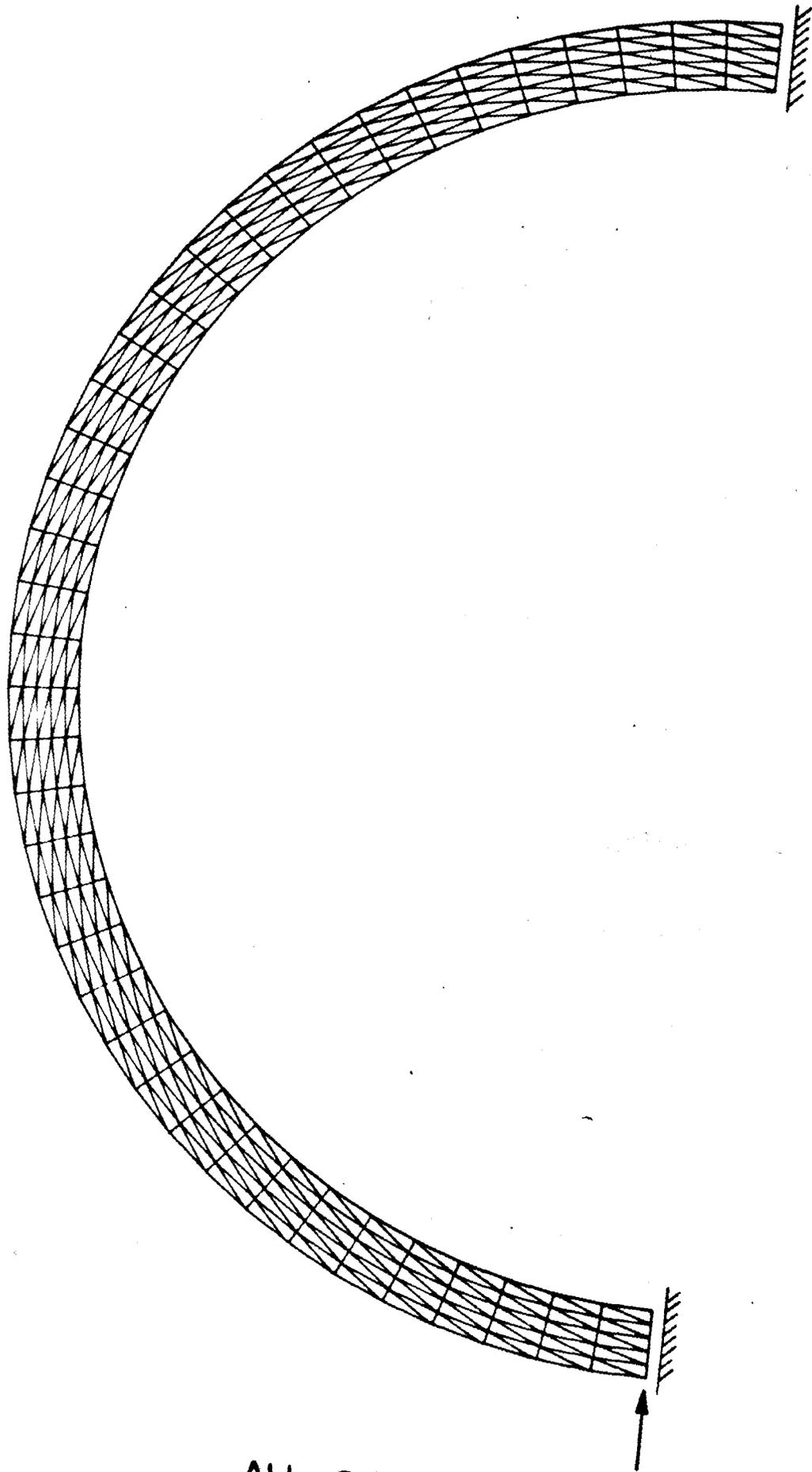
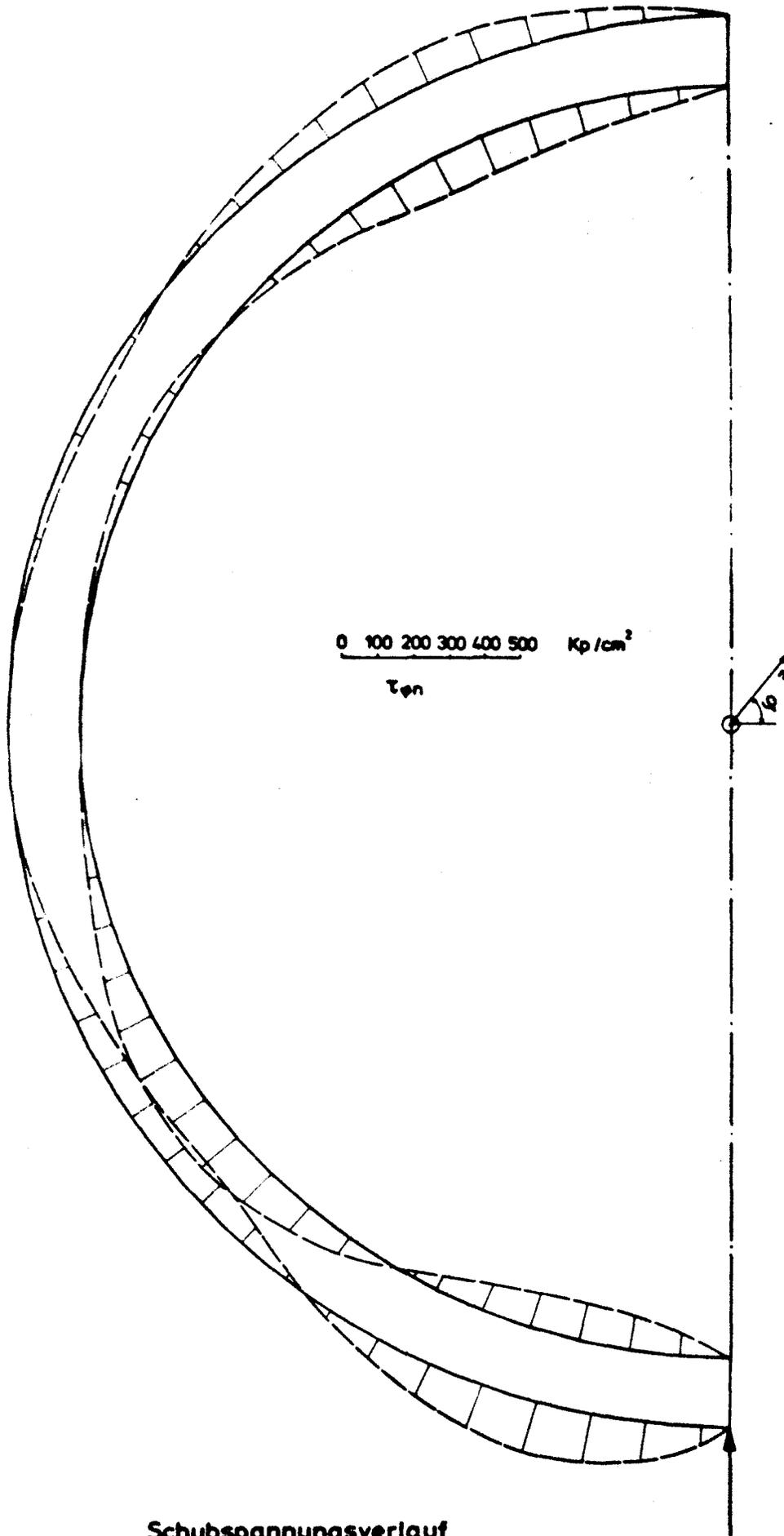


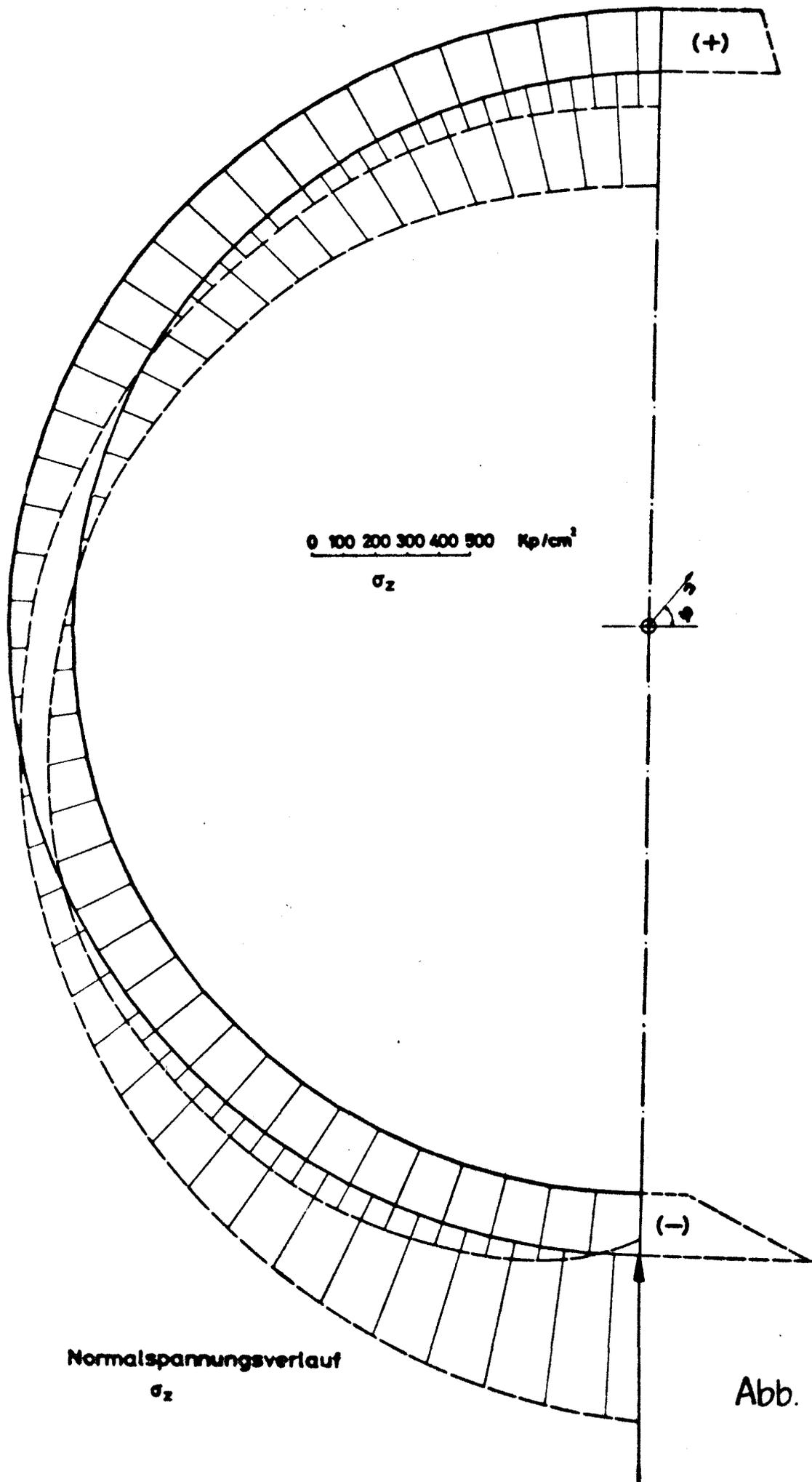
Abb. 6.42



Schubspannungsverlauf

$\tau_{\varphi n}$

Abb. 6.43



Normalspannungsverlauf
 σ_z

Abb. 6.44

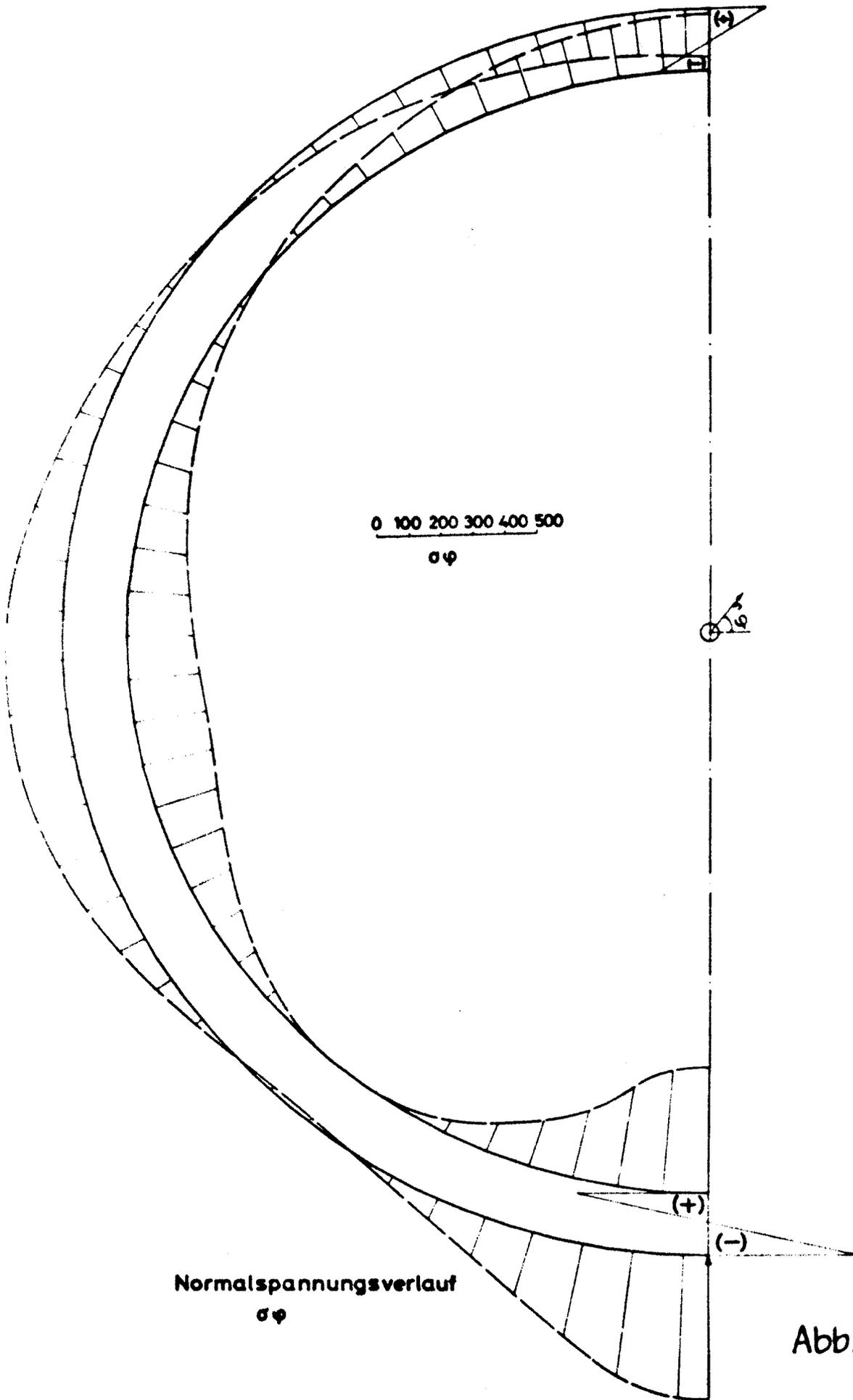


Abb. 6.45

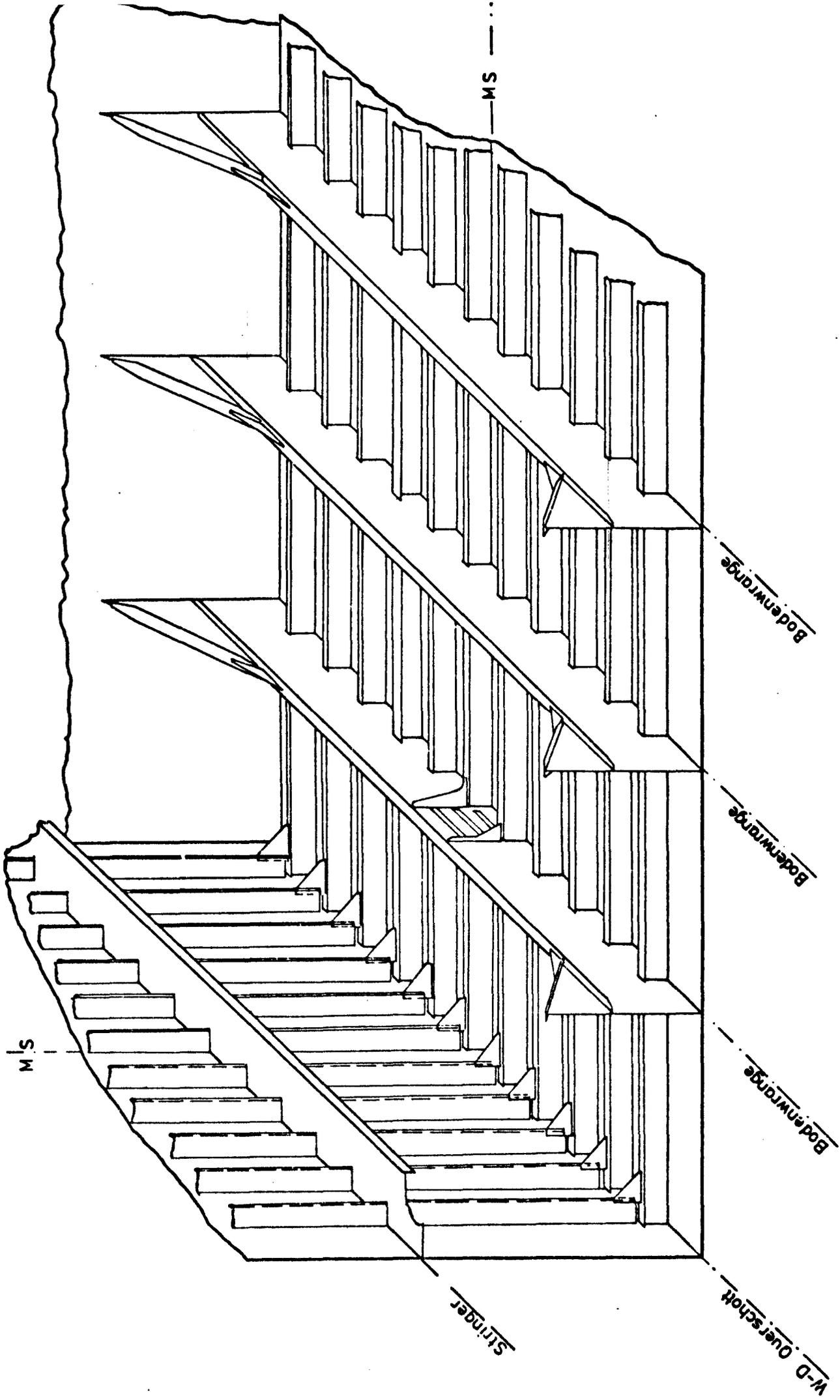


Abb. 6.46
BODENKONSTRUKTION EINES VLCC SCHIFFES

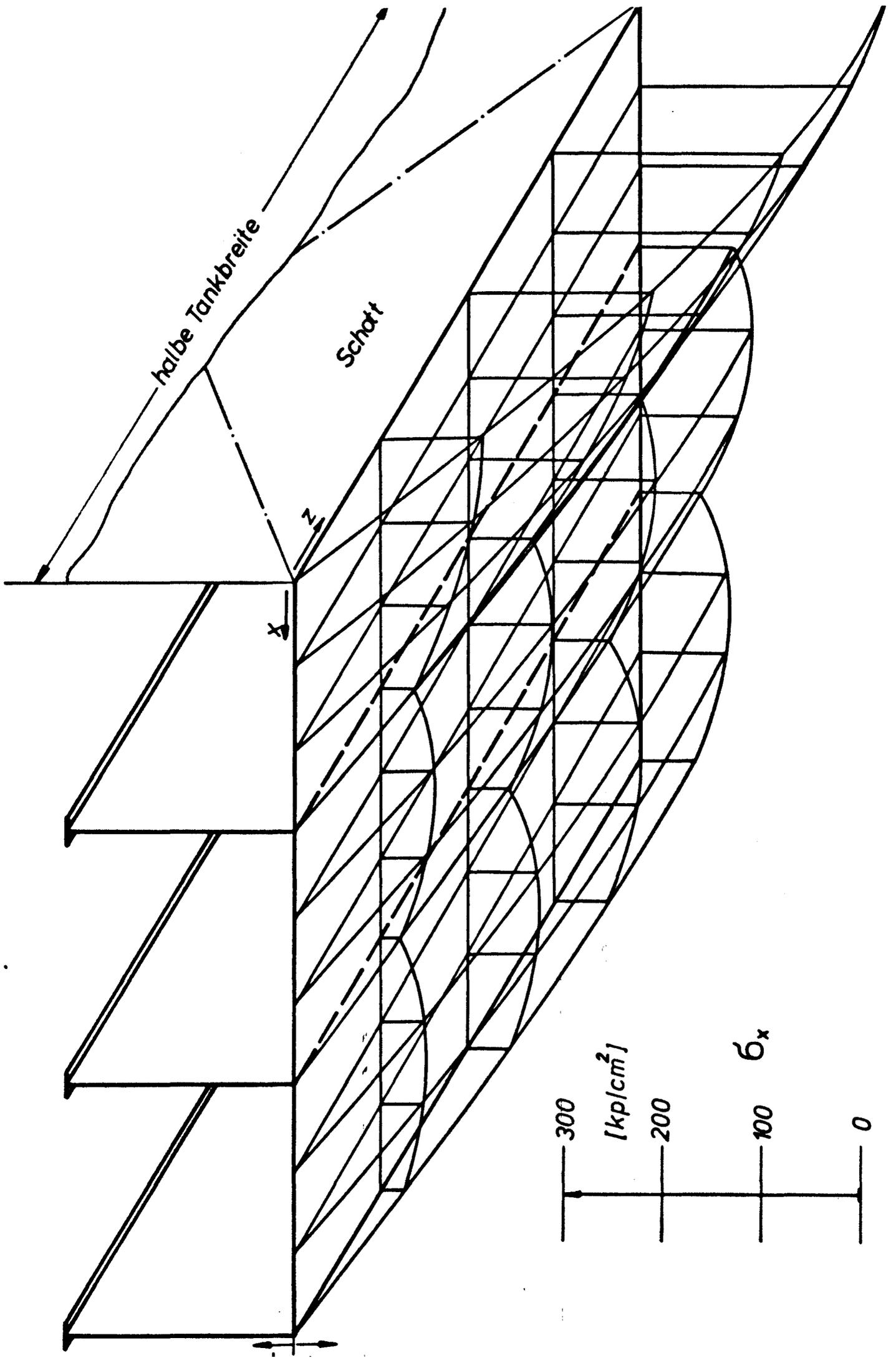


Abb. 6.47

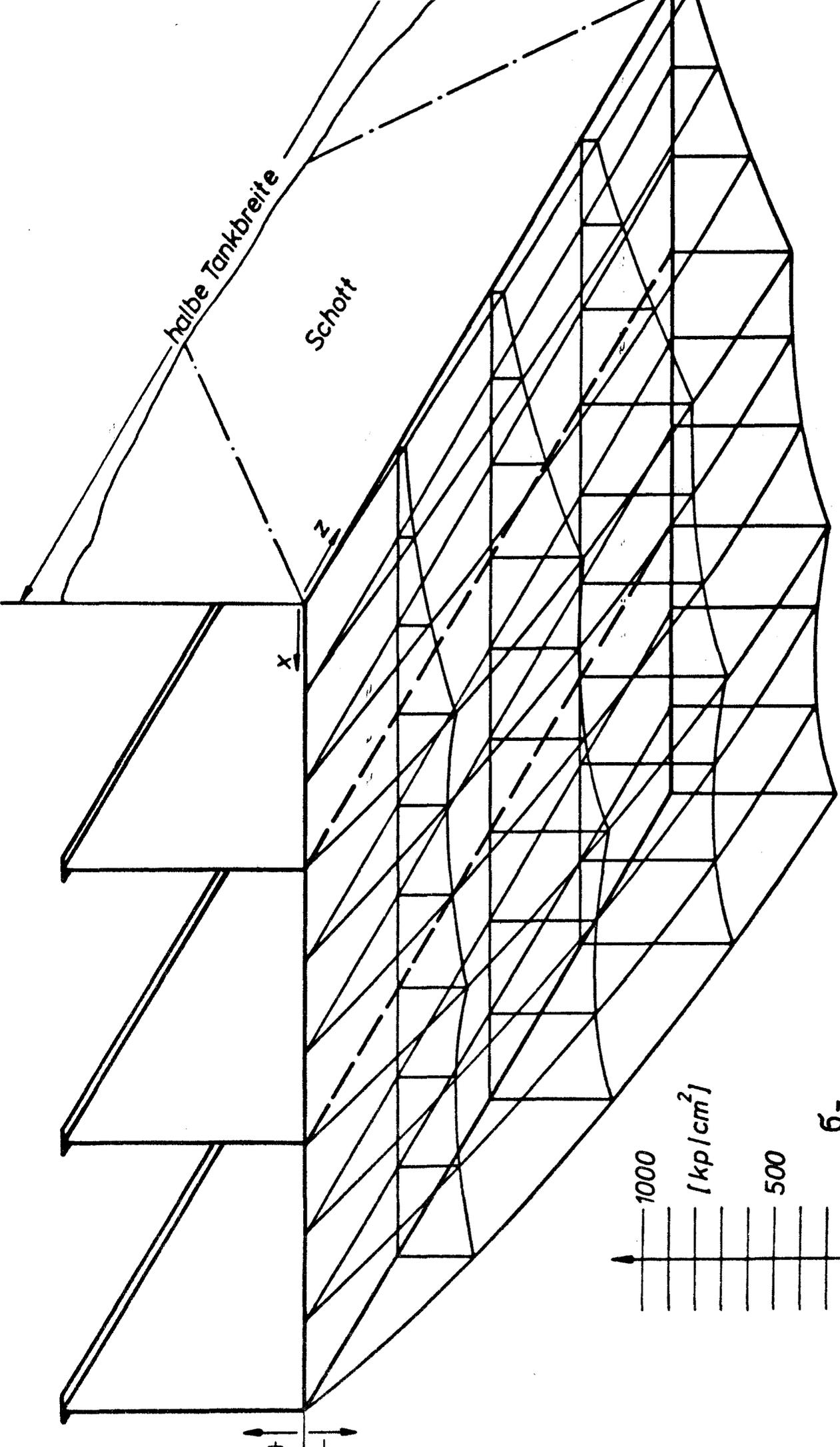


Abb. 6.48

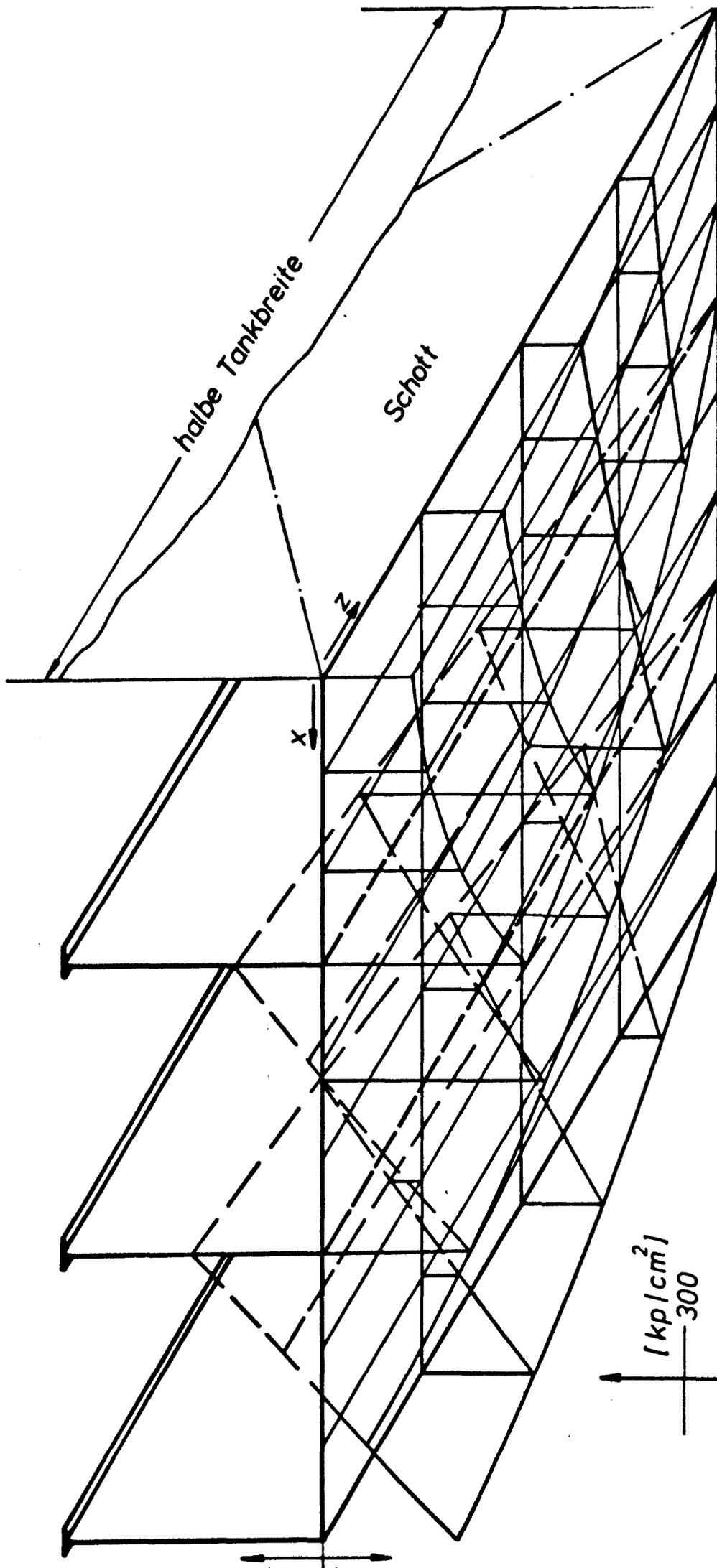


Abb. 6.49

ANHANG 1

Analytische Übertragungs- und
Steifigkeitsmatrizen für Balken
Platten

Übertragungsmatrix Typ 0 $y^N + \left(\frac{a}{l}\right)^2 y' - \left(\frac{b}{l}\right)^4 y = \text{const}$ mit $a^2 = 0$ und $b^4 = 0$

1	1	$\frac{l^2}{2D}$	$\frac{l^3}{6D}$
0	1	$\frac{l}{D}$	$\frac{l^2}{2D}$
0	0	1	1
0	0	0	1

Übertragungsmatrix für Typ 1 $y^V + \left(\frac{a}{l}\right)^2 y^IV - \left(\frac{b}{l}\right)^4 y = \text{const}$ mit $b^4 > 0$ und $a^2 \geq 0$

c_0	$l(c_1 - a^2 c_3)$	$\frac{l^2 c_2}{D}$	$\frac{l^3 c_3}{D}$
$\left(\frac{b}{l}\right)^4 l^3 c_3$	$c_0 - a^2 c_2$	$\frac{l}{D}(c_1 - a^2 c_3)$	
$D \left(\frac{b}{l}\right)^4 l^2 c_2$	$\frac{D}{l}(-a^2 c_1 + (b^4 + a^4) c_3)$		
$D \left(\frac{b}{l}\right)^4 l c_1$			

symmetrisch

$$c_0 = \Lambda (\lambda_2^2 \cosh \lambda_1 + \lambda_1 \cos \lambda_2)$$

$$c_1 = \Lambda \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1} \sinh \lambda_1 + \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2} \sin \lambda_2 \right)$$

$$c_2 = \Lambda (\cosh \lambda_1 - \cos \lambda_2)$$

$$c_3 = \Lambda \left(\frac{1}{\lambda_1} \sinh \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_2} \sin \lambda_2 \right)$$

$$\Lambda = 1 / (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\sqrt{b^4 + a^4} / 4 - a^2} / 2$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\sqrt{b^4 + a^4} / 4 + a^2} / 2$$

Übertragungsmatrix für Typ 2 $y^{IV} + \left(\frac{a}{l}\right)^4 y'' - \left(\frac{b}{l}\right)^4 y = \text{const}$ mit $b^4 + \frac{a^4}{4} = 0$ und $a^2 < 0$

$\cosh \alpha l - \frac{\alpha l}{2} \sinh \alpha l$	$1 - \frac{\sinh \alpha l + \alpha l \cosh \alpha l}{2 \alpha l}$	$\frac{l^2}{2D} \frac{\sinh \alpha l}{\alpha l}$	$\frac{l^3}{2D} \frac{\alpha l \cosh \alpha l - \sinh \alpha l}{(\alpha l)^3}$
$\frac{\alpha l}{2} \frac{\sinh \alpha l - \alpha l \cosh \alpha l}{1}$	$\cosh \alpha l + \frac{\alpha l}{2} \sinh \alpha l$	$\frac{1}{D} \frac{\alpha l \cosh \alpha l + \sinh \alpha l}{2 \alpha l}$	
$-\frac{(\alpha l)^2}{2} D \frac{\sinh \alpha l}{l^2}$	$\frac{\alpha l D}{2} \frac{\alpha l \cosh \alpha l + 3 \sinh \alpha l}{1}$		
$\frac{(\alpha l)^3 D}{2} \frac{\alpha l \cosh \alpha l - 3 \sinh \alpha l}{l^3}$			

symmetrisch

$$(\alpha l)^2 = \left| \frac{a^2}{2} \right|$$

Übertragungsmatrix für Typ 3 $y^{IV} + \left(\frac{a}{l}\right)^2 y'' - \left(\frac{b}{l}\right)^4 y = \text{const}$ $b^4 + \frac{a^4}{4} = 0$ und $a^2 > 0$

$\cos \alpha l + \frac{\alpha l}{2} \sin \alpha l$	1	$\frac{\alpha l \cos \alpha l + \sin \alpha l}{2 \alpha l}$	$\frac{l^2}{2D}$	$-\frac{l^3}{2D} \frac{\sin \alpha l - \alpha l \cos \alpha l}{(\alpha l)^3}$
$\frac{\alpha l}{2} \frac{\alpha l \cos \alpha l - \sin \alpha l}{l}$	$\cos \alpha l - \frac{\alpha l}{2} \sin \alpha l$	$\frac{\alpha l \cos \alpha l + \sin \alpha l}{2 \alpha l}$	$\frac{1}{D}$	
$-\frac{(\alpha l)^3}{2} D \frac{\sin \alpha l}{l^2}$	$-\frac{\alpha l}{2} D \frac{\alpha l \cos \alpha l + 3 \sin \alpha l}{l}$			
$-\frac{(\alpha l)^3}{2} D \frac{-\alpha l \cos \alpha l + 3 \sin \alpha l}{l^3}$				

symmetrisch

$$(\alpha l)^2 = -\frac{a^2}{2}$$

Übertragungsmatrix für Typ 4 $y^{IV} + \left(\frac{a}{l}\right)^2 y'' - \left(\frac{b}{l}\right)^4 y = \text{const}$ mit $a^2 > 0$; $b^4 = 0$

1	$\frac{1}{a} \sin a$	$\left(\frac{1}{a}\right)^2 \frac{1}{D} (1 - \cos a)$	$\left(\frac{1}{a}\right)^2 \frac{1}{D} (\sin a - a)$
0	$\cos a$	$\frac{1}{a D} \sin a$	
0	$-\frac{a}{1} D \sin a$		
0			

symmetrisch

Übertragungsmatrix Typ 5 $y^{IV} + \left(\frac{a}{l}\right)^2 y'' - \left(\frac{b}{l}\right)^4 y = \text{const}$ mit $a^2 < 0$; $b^4 = 0$

1	$\frac{1}{a^*} \sinh a^*$	$\left(\frac{1}{a^*}\right)^2 \frac{1}{D} (\cosh a^* - 1)$	$\left(\frac{1}{a^*}\right) \frac{1}{D} (\sinh a^* - a^*)$
0	$\cosh a^*$	$\frac{1}{D a^*} \sinh a^*$	
0	$\frac{a^*}{l} D \sinh a^*$		
0			

symmetrisch

$$a^{*2} = |a^2|$$

Übertragungsmatrix Typ 6 $y^{IV} + \left(\frac{a}{l}\right)^2 y'' - \left(\frac{b}{l}\right)^4 y = \text{const}$ mit $b^4 + \frac{a^4}{4} > 0$ und $a^2 < 0$

V_0	$l(V_1 + a^{*2} V_3)$	$\frac{l^2}{D} V_2$	$\frac{l^3}{D} V_3$
$-\left(\frac{b^*}{l}\right)^4 l^3 V_3$	$V_0 + a^{*2} V_2$	$\frac{1}{D} (V_1 + a^{*2} V_3)$	
$-D \left(\frac{b^*}{l}\right)^4 l^2 V_2$	$\frac{D}{l} (-a^{*2} V_1 + (b^{*4} - a^{*4}) V_3)$		
$-D \left(\frac{b^*}{l}\right)^4 l V_1$			

symmetrisch

$$V_0 = \Lambda (\lambda_2^2 \cosh \lambda_1 - \lambda_1^2 \cosh \lambda_2)$$

$$V_1 = \Lambda \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1} \sinh \lambda_1 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2} \sinh \lambda_2 \right)$$

$$V_2 = \Lambda (\cosh \lambda_2 - \cosh \lambda_1)$$

$$V_3 = \Lambda \left(\frac{1}{\lambda_2} \sinh \lambda_2 - \frac{1}{\lambda_1} \sinh \lambda_1 \right)$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{a^{*2}}{2} + \sqrt{\frac{a^{*4}}{4} - b^{*4}}}$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{a^{*2}}{2} - \sqrt{\frac{a^{*4}}{4} - b^{*4}}}$$

$$\Lambda = \frac{1}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}$$

$$a^{*2} = |a^2|$$

$$b^{*4} = |b^4|$$

Übertragungsmatrix für Typ 7 $y^w + \left(\frac{a}{l}\right)^2 y - \left(\frac{b}{l}\right)^4 y = \text{const}$ mit $b^4 + \frac{a^4}{4} > 0$ und $a^2 > 0$

Z_0	$l(Z_1 - a^2 Z_3)$	$\frac{l^2}{D} Z_2$	$\frac{l^3}{D} Z_3$
$-\left(\frac{b}{l}\right)^4 l^3 Z_3$	$Z_0 - a^2 Z_2$	$\frac{l}{D}(Z_1 - a^2 Z_3)$	
$-\left(\frac{b}{l}\right)^4 l^2 D Z_2$	$\frac{D}{l} \left\{ a^2 Z_1 + (a^4 - b^4) Z_3 \right\}$		
$-D \left(\frac{b}{l}\right)^4 l Z_1$			

symmetrisch

$$Z_0 = \Lambda (\lambda_2^2 \cos \lambda_1 - \lambda_1^2 \cos \lambda_2)$$

$$Z_1 = \Lambda \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1} \sin \lambda_1 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2} \sin \lambda_2 \right)$$

$$Z_2 = \Lambda (\cos \lambda_1 - \cos \lambda_2)$$

$$Z_3 = \Lambda \left(\frac{1}{\lambda_1} \sin \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_2} \sin \lambda_2 \right)$$

$$\lambda_1 = \sqrt{a^2/2 - \sqrt{a^4/4 - b^4}}$$

$$\lambda_2 = \sqrt{a^2/2 + \sqrt{a^4/4 - b^4}}$$

$$\Lambda = 1/(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)$$

$$b^4 = |\Lambda|$$

Übertragungsmatrix Typ 8 $y^IV + \left(\frac{a}{l}\right)^2 y'' - \left(\frac{b}{l}\right)^4 = \text{const}$ mit $b^4 + \frac{a^4}{4} < 0$; $b^4 < 0$ und $a^2 \geq 0$

$W_2 - \frac{a^2}{4\lambda_1\lambda_2} W_1$	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda_1} W_0 + \frac{1}{\lambda_2} W_3 \right)$	$\frac{l^2}{2D} \frac{1}{\lambda_1\lambda_2} W_1$	$-\left(\frac{l}{b^*}\right) \frac{1}{2D} \left(\frac{1}{\lambda_1} W_0 - \frac{1}{\lambda_2} W_3 \right)$
$\left(\frac{b^*}{l}\right)^2 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda_1} W_0 - \frac{1}{\lambda_2} W_3 \right)$	$W_2 + \frac{a^2}{4\lambda_1\lambda_2} W_1$	$\frac{1}{2D} \left(\frac{1}{\lambda_1} W_0 + \frac{1}{\lambda_2} W_3 \right)$	
$-\left(\frac{b^*}{l}\right)^4 D \frac{l^3}{2} \frac{1}{\lambda_1\lambda_2} W_1$	$\left(\frac{b^*}{l}\right)^2 \frac{1}{2} D \left(\frac{1}{\lambda_1} W_0 - \frac{1}{\lambda_2} W_3 \right)$ $-\frac{2}{l} D (\lambda_1 W_0 - \lambda_2 W_3)$		
$\left(\frac{b^*}{l}\right)^4 \frac{1}{2} D \left(\frac{1}{\lambda_1} W_0 - \frac{1}{\lambda_2} W_3 \right)$			

symmetrisch

$$W_0 = \sinh \lambda_1 \cos \lambda_2$$

$$W_1 = \sinh \lambda_1 \sin \lambda_2$$

$$W_2 = \cosh \lambda_1 \cos \lambda_2$$

$$W_3 = \cosh \lambda_1 \sin \lambda_2$$

$$\lambda_1 = \sqrt{b^{*2}/2 - a^2/2}$$

$$\lambda_2 = \sqrt{b^{*2}/2 + a^2/2}$$

$$b^{*4} = |b^4|$$

Steifigkeitsmatrix für Typ 0 bis 8 : $y^m + \left(\frac{a}{l}\right)^2 \cdot y'' - \left(\frac{b}{l}\right)^4 \cdot y = \text{const.}$ a^2 und b^4 beliebig

Gekürzte Potenzreihenentwicklung

$$\frac{D}{l^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6 \cdot l & -12 & 6 \cdot l \\ & 4 \cdot l^2 & -6 \cdot l & 2 \cdot l^2 \\ & & 12 & -6 \cdot l \\ & & & 4 \cdot l^2 \end{bmatrix}$$

$$- \frac{D \cdot a^2}{30 \cdot l^3}$$

$$\begin{bmatrix} 36 & 3 \cdot l & -36 & 3 \cdot l \\ & 4 \cdot l^2 & -3 \cdot l & -l^2 \\ & & 36 & -3 \cdot l \\ & & & 4 \cdot l^2 \end{bmatrix}$$

$$- \frac{D \cdot b^4}{420 \cdot l^3}$$

$$\begin{bmatrix} 156 & 22 \cdot l & 54 & -13 \cdot l \\ & 4 \cdot l^2 & 13 \cdot l & -3 \cdot l^2 \\ & & 156 & -22 \cdot l \\ & & & 4 \cdot l^2 \end{bmatrix}$$

Steifigkeitsmatrix für Typ 0: $y''' + \left(\frac{a}{l}\right)^2 \cdot y'' - \left(\frac{b}{l}\right)^4 \cdot y = \text{const.}$ mit $a^2 = 0$ und $b^4 = 0$

f.

12	6 · l	- 12	6 · l
4 · l ²	- 6 · l	12	- 6 · l
symmetrisch			
			4 · l ²

$$f = \frac{D}{l^3}$$

Steifigkeitsmatrix für Typ 1: $y'' + \left(\frac{a}{l}\right)^2 y'' - \left(\frac{b}{l}\right)^4 y = \text{const.}$ mit $b^4 > 0$ und $a^2 \geq 0$

$c_1 \cdot c_0 - a^2 \cdot c_0 \cdot c_3 - b^4 \cdot c_2 \cdot c_3$	$l \cdot (c_0 \cdot c_2 - b^4 \cdot c_3^2)$	$-c_1 + a^2 \cdot c_3$	$l \cdot c_2$
	$l^2 \cdot (c_1 \cdot c_2 - c_0 \cdot c_3)$	$-l \cdot c_2$	$l^2 \cdot c_3$
		$c_1 \cdot c_0 - a^2 \cdot c_0 \cdot c_3 - b^4 \cdot c_2 \cdot c_3$	$-l \cdot (c_0 \cdot c_2 - b^4 \cdot c_3^2)$
			$l^2 \cdot (c_1 \cdot c_2 - c_0 \cdot c_3)$

f.

symmetrisch

$$f = \frac{D}{l^3 \cdot (c_2^2 - c_1 \cdot c_3 + a^2 \cdot c_3^2)}$$

$$c_0 = \Lambda \cdot (\lambda_2^2 \cdot \cosh \lambda_1 + \lambda_1^2 \cdot \cos \lambda_2)$$

$$c_1 = \Lambda \cdot \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1} \cdot \sinh \lambda_1 + \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2} \cdot \sin \lambda_2 \right)$$

$$c_2 = \Lambda \cdot (\cosh \lambda_1 - \cos \lambda_2)$$

$$c_3 = \Lambda \cdot \left(\frac{1}{\lambda_1} \cdot \sinh \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_2} \cdot \sin \lambda_2 \right)$$

$$\Lambda = \frac{1}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$$

$$\lambda_1 = \sqrt{b^4 + \frac{a^4}{4} - \frac{a^2}{2}}$$

$$\lambda_2 = \sqrt{b^4 + \frac{a^4}{4} + \frac{a^2}{2}}$$

Steifigkeitsmatrix für Typ 2: $y^{\text{IV}} + \left(\frac{\alpha}{l}\right)^2 \cdot y'' - \left(\frac{b}{l}\right)^4 \cdot y = \text{const.}$ mit $b^4 + \frac{\alpha^4}{4} = 0$ und $\alpha^2 < 0$

$-\frac{\sinh \alpha l \cdot \cosh \alpha l + \alpha l}{\alpha l}$	$-\frac{l}{2} \cdot \frac{\sinh^2 \alpha l + (\alpha l)^2}{(\alpha l)^2}$	$\frac{\sinh \alpha l + \alpha l \cdot \cosh \alpha l}{\alpha l}$	$-l \cdot \frac{\sinh \alpha l}{\alpha l}$
	$l^2 \cdot \frac{\alpha l - \cosh \alpha l \cdot \sinh \alpha l}{(\alpha l)^3}$	$l \cdot \frac{\sinh \alpha l}{\alpha l}$	$l^2 \cdot \frac{\sinh \alpha l - \alpha l \cdot \cosh \alpha l}{(\alpha l)^3}$
		$-\frac{\sinh \alpha l \cdot \cosh \alpha l + \alpha l}{\alpha l}$	$\frac{l}{2} \cdot \frac{\sinh^2 \alpha l + (\alpha l)^2}{(\alpha l)^2}$
			$l^2 \cdot \frac{\alpha l - \cosh \alpha l \cdot \sinh \alpha l}{(\alpha l)^3}$

f.

symmetrisch

$$f = \frac{2 \cdot D \cdot (\alpha l)^4}{l^3 \cdot [(\alpha l)^2 - \sinh^2 \alpha l]}$$

$$(\alpha l)^2 = \left| \frac{\alpha^2}{2} \right|$$

Steifigkeitsmatrix für Typ 3: $y''' + \left(\frac{a}{l}\right)^2 y'' - \left(\frac{b}{l}\right)^4 y = \text{const.}$ mit $b^4 + \frac{a^4}{4} = 0$ und $a^2 > 0$

$\frac{\sin \alpha l \cdot \cos \alpha l + \alpha l}{\alpha l}$	$\frac{l \cdot \sin^2 \alpha l + (\alpha l)^2}{(\alpha l)^2}$	$-\frac{\sin \alpha l + \alpha l \cdot \cos \alpha l}{\alpha l}$	$l \cdot \frac{\sin \alpha l}{\alpha l}$
	$l^2 \cdot \frac{\alpha l - \cos \alpha l \cdot \sin \alpha l}{(\alpha l)^3}$	$-l \cdot \frac{\sin \alpha l}{\alpha l}$	$l^2 \cdot \frac{\sin \alpha l - \alpha l \cdot \cos \alpha l}{(\alpha l)^3}$
		$\frac{\sin \alpha l \cdot \cos \alpha l + \alpha l}{\alpha l}$	$-\frac{l}{2} \cdot \frac{\sin^2 \alpha l + (\alpha l)^2}{(\alpha l)^2}$
			$l^2 \cdot \frac{\alpha l - \cos \alpha l \cdot \sin \alpha l}{(\alpha l)^3}$

f.

symmetrisch

$$f = \frac{2 \cdot D \cdot (\alpha l)^4}{l^3 \cdot [(\alpha l)^2 - \sin^2 \alpha l]}$$

$$(\alpha l)^2 = \frac{a^2}{2}$$

Steifigkeitsmatrix für Typ 4: $y^v + \left(\frac{a}{l}\right)^2 \cdot y'' - \left(\frac{b}{l}\right)^4 \cdot y = \text{const.}$ mit $a^2 > 0$ und $b^4 = 0$

$a^2 \cdot \sin a$	$a \cdot l \cdot (1 - \cos a)$	$-a^2 \cdot \sin a$	$a \cdot l \cdot (1 - \cos a)$
	$l^2 \cdot (\sin a - a \cdot \cos a)$	$-a \cdot l \cdot (1 - \cos a)$	$l^2 \cdot (a - \sin a)$
f.		$a^2 \cdot \sin a$	$-a \cdot l \cdot (1 - \cos a)$
		symmetrisch	
$l^2 \cdot (\sin a - a \cdot \cos a)$			

$$f = \frac{D \cdot a}{l^3 \cdot (2 - 2 \cdot \cos a - a \cdot \sin a)}$$

Steifigkeitsmatrix für Typ 5: $y^{IV} + \left(\frac{a}{l}\right)^2 y'' - \left(\frac{b}{l}\right)^4 y = \text{const.}$ mit $a^2 < 0$ und $b^4 = 0$

$\alpha^* \cdot \sinh \alpha^*$	$\alpha^* \cdot l \cdot (\cosh \alpha^* - 1)$	$-\alpha^{*2} \cdot \sinh \alpha^*$	$\alpha^* \cdot l \cdot (\cosh \alpha^* - 1)$
	$l^2 (\alpha^* \cosh \alpha^* - \sinh \alpha^*)$	$-\alpha^* \cdot l \cdot (\cosh \alpha^* - 1)$	$l^2 (\sinh \alpha^* - \alpha^*)$
		$\alpha^{*2} \cdot \sinh \alpha^*$	$-\alpha^* \cdot l \cdot (\cosh \alpha^* - 1)$
			$l^2 (\alpha^* \cosh \alpha^* - \sinh \alpha^*)$

f.

symmetrisch

$$f = \frac{D \cdot \alpha^*}{l^3 (2 - 2 \cosh \alpha^* + \alpha^* \sinh \alpha^*)}$$

mit $\alpha^{*2} = |a^2|$

Steifigkeitsmatrix für Typ 6: $y^{\text{IV}} + \left(\frac{a}{l}\right)^2 \cdot y'' - \left(\frac{b}{l}\right)^4 \cdot y = \text{const.}$ mit $b^4 + \frac{a^4}{4} > 0$, $b^4 < 0$ und $a^2 < 0$

$C_1 \cdot C_0 + a^2 \cdot C_0 \cdot C_3 + b^4 \cdot C_2 \cdot C_3$	$l \cdot (C_0 \cdot C_2 + b^4 \cdot C_3^2)$	$-(C_1 + a^2 \cdot C_3)$	$l \cdot C_2$
	$l^2 \cdot (C_1 \cdot C_2 - C_0 \cdot C_3)$	$-l \cdot C_2$	$l^2 \cdot C_3$
		$C_1 \cdot C_0 + a^2 \cdot C_0 \cdot C_3 + b^4 \cdot C_2 \cdot C_3$	$-l \cdot (C_0 \cdot C_2 + b^4 \cdot C_3^2)$
			$l^2 \cdot (C_1 \cdot C_2 - C_0 \cdot C_3)$

symmetrisch

$$f = \frac{D}{l^3 \cdot (C_2^2 - C_1 \cdot C_3 - a^2 \cdot C_3^2)}$$

$$C_0 = \Lambda \cdot (\lambda_2^2 \cdot \cosh \lambda_1 - \lambda_1^2 \cdot \cosh \lambda_2)$$

$$C_1 = \Lambda \cdot \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1} \cdot \sinh \lambda_1 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2} \cdot \sinh \lambda_2 \right)$$

$$C_2 = \Lambda \cdot (\cosh \lambda_2 - \cosh \lambda_1)$$

$$C_3 = \Lambda \cdot \left(\frac{1}{\lambda_2} \cdot \sinh \lambda_2 - \frac{1}{\lambda_1} \cdot \sinh \lambda_1 \right)$$

$$\Lambda = \frac{1}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \sqrt{\frac{a^4}{4} - b^4}}$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \sqrt{\frac{a^4}{4} - b^4}}$$

$$a^2 = |a^4| \quad b^4 = |b^4|$$

Steifigkeitsmatrix für Typ 7: $y^m + \left(\frac{a}{l}\right)^2 \cdot y'' - \left(\frac{b}{l}\right)^2 \cdot y = \text{const.}$ mit $b^4 + \frac{a^4}{4} > 0$, $b^4 < 0$ und $a^2 > 0$

$c_1 \cdot c_0 - a^2 \cdot c_0 \cdot c_3 + b^{*4} \cdot c_2 \cdot c_3$	$l \cdot (c_0 \cdot c_2 + b^{*4} \cdot c_3^2)$	$-c_1 + a^2 \cdot c_3$	$l \cdot c_2$
	$l^2 \cdot (c_1 \cdot c_2 - c_0 \cdot c_3)$	$-l \cdot c_2$	$l^2 \cdot c_3$
		$c_1 \cdot c_0 - a^2 \cdot c_0 \cdot c_3 + b^{*4} \cdot c_2 \cdot c_3$	$-l \cdot (c_0 \cdot c_2 + b^{*4} \cdot c_3^2)$
			$l^2 \cdot (c_1 \cdot c_2 - c_0 \cdot c_3)$

f.

symmetrisch

$$f = \frac{D}{l^3 \cdot (c_2^2 - c_1 \cdot c_3 + a^2 \cdot c_3^2)}$$

$$c_0 = \Delta \cdot (\lambda_2^2 \cdot \cos \lambda_1 - \lambda_1^2 \cdot \cos \lambda_2)$$

$$c_1 = \Delta \cdot \left(\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1} \cdot \sin \lambda_1 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2} \cdot \sin \lambda_2 \right)$$

$$c_2 = \Delta \cdot (\cos \lambda_1 - \cos \lambda_2)$$

$$c_3 = \Delta \cdot \left(\frac{1}{\lambda_1} \cdot \sin \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_2} \cdot \sin \lambda_2 \right)$$

$$\Delta = \frac{1}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \sqrt{\frac{a^4}{4} - b^{*4}}}$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \sqrt{\frac{a^4}{4} - b^{*4}}}$$

$$b^{*4} = |b^4|$$

Steifigkeitsmatrix für Typ 8: $y'' + \left(\frac{a}{l}\right)^2 y'' - \left(\frac{b}{l}\right)^4 y = \text{const.}$ mit $b^4 + \frac{a^4}{4} < 0$, $b^4 < 0$ und $a^2 \geq 0$

$\frac{c_2}{2} \left(\frac{c_0}{\lambda_1} + \frac{c_3}{\lambda_2} \right) + \frac{c_1}{2} \left(\frac{c_3}{\lambda_1} - \frac{c_0}{\lambda_2} \right)$	$\frac{1}{4} \left(\frac{c_0^2}{\lambda_1^2} + \frac{c_3^2}{\lambda_2^2} - \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{\lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2} \cdot c_1^2 \right)$	$-\frac{1}{2} \left(\frac{c_0}{\lambda_1} + \frac{c_3}{\lambda_2} \right)$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{c_1}{\lambda_1 \cdot \lambda_2}$
	$\frac{l^2}{4} \cdot \frac{c_1}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} \cdot \left(\frac{c_0}{\lambda_1} + \frac{c_3}{\lambda_2} \right) +$ $\frac{l^2}{2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)} \cdot \left(c_2 + \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{2 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2} \cdot c_1 \right) \cdot \left(\frac{c_0}{\lambda_1} - \frac{c_3}{\lambda_2} \right)$	$-\frac{1}{2} \cdot \frac{c_1}{\lambda_1 \cdot \lambda_2}$	$-\frac{l^2}{2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)} \cdot \left(\frac{c_0}{\lambda_1} - \frac{c_3}{\lambda_2} \right)$
		$\frac{c_2}{2} \left(\frac{c_0}{\lambda_1} + \frac{c_3}{\lambda_2} \right) + \frac{c_1}{2} \left(\frac{c_3}{\lambda_1} - \frac{c_0}{\lambda_2} \right)$	$-\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{c_0^2}{\lambda_1^2} + \frac{c_3^2}{\lambda_2^2} - \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{\lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2} \cdot c_1^2 \right)$
			$\frac{l^2}{4} \cdot \frac{c_1}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} \cdot \left(\frac{c_0}{\lambda_1} + \frac{c_3}{\lambda_2} \right) +$ $\frac{l^2}{2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)} \cdot \left(c_2 + \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{2 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2} \cdot c_1 \right) \cdot \left(\frac{c_0}{\lambda_1} - \frac{c_3}{\lambda_2} \right)$

symmetrisch

$$f = \frac{4 \cdot D \cdot \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2}{l^3 \left[c_1^2 + \left(\frac{\lambda_2}{b} \right)^2 \cdot c_0^2 - \left(\frac{\lambda_1}{b} \right)^2 \cdot c_3^2 \right]}$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{b^{*2}}{2} - \frac{a^2}{4}}$$

$$c_0 = \sinh \lambda_1 \cdot \cos \lambda_2$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{b^{*2}}{2} + \frac{a^2}{4}}$$

$$c_1 = \sinh \lambda_1 \cdot \sin \lambda_2$$

$$b^{*4} = |b^4|$$

$$c_2 = \cosh \lambda_1 \cdot \cos \lambda_2$$

$$c_3 = \cosh \lambda_1 \cdot \sin \lambda_2$$

ANHANG 2

Lastspalten und Lastmatrizen
für analytische Übertragungs-
und Steifigkeitsmatrizen für
Balken und Platten

Matrizen $\{Z\}$ und $[B]$ zur Bestimmung der äquivalenten Knotenlasten $\{P_K\}$ für eine konstante Feldlast q :

$$\{P_K\} = q \cdot [B]^{-T} \cdot \{Z\}$$

Typ 0:

$$\{Z\} = \begin{bmatrix} l \\ \frac{l^2}{2} \\ \frac{l^3}{3} \\ \frac{l^4}{4} \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2 \cdot l & 3 \cdot l^2 \end{bmatrix}$$

Typ 1:

$$\{Z\} = \begin{bmatrix} \frac{l}{\lambda_1} \cdot \sinh \lambda_1 \\ \frac{l}{\lambda_1} \cdot (\cosh \lambda_1 - 1) \\ \frac{l}{\lambda_2} \cdot \sin \lambda_2 \\ -\frac{l}{\lambda_2} \cdot (\cos \lambda_2 - 1) \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_1}{l} & 0 & \frac{\lambda_2}{l} \\ \cosh \lambda_1 & \sinh \lambda_1 & \cos \lambda_2 & \sin \lambda_2 \\ \frac{\lambda_1}{l} \cdot \sinh \lambda_1 & \frac{\lambda_1}{l} \cdot \cosh \lambda_1 & -\frac{\lambda_2}{l} \cdot \sin \lambda_2 & -\frac{\lambda_2}{l} \cdot \cos \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Typ 2:

$$\{Z\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} \cdot \sinh \alpha l \\ \frac{1}{\alpha} \cdot (\cosh \alpha l - 1) \\ -\frac{1}{\alpha^2} \cdot (\sinh \alpha l - \alpha l \cdot \cosh \alpha l) \\ -\frac{1}{\alpha^2} \cdot (\cosh \alpha l - \alpha l \cdot \sinh \alpha l - 1) \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \alpha & 0 & 1 \\ \hline \cosh \alpha l & \sinh \alpha l & l \cdot \sinh \alpha l & l \cdot \cosh \alpha l \\ \hline \alpha \cdot \sinh \alpha l & \alpha \cdot \cosh \alpha l & \alpha l \cdot \cosh \alpha l + \sinh \alpha l & \alpha l \cdot \sinh \alpha l + \cosh \alpha l \\ \hline \end{array}$$

Typ 3:

$$\{Z\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} \cdot \sin \alpha l \\ -\frac{1}{\alpha} \cdot (\cos \alpha l - 1) \\ \frac{1}{\alpha^2} \cdot (\sin \alpha l - \alpha l \cdot \cos \alpha l) \\ \frac{1}{\alpha^2} \cdot (\cos \alpha l + \alpha l \cdot \sin \alpha l - 1) \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \alpha & 0 & 1 \\ \hline \cos \alpha l & \sin \alpha l & l \cdot \sin \alpha l & l \cdot \cos \alpha l \\ \hline -\alpha \cdot \sin \alpha l & \alpha \cdot \cos \alpha l & \alpha l \cdot \cos \alpha l + \sin \alpha l & -\alpha l \cdot \sin \alpha l + \cos \alpha l \\ \hline \end{array}$$

Typ 4:

$$\{Z\} = \begin{bmatrix} l \\ \frac{l^2}{2} \\ \frac{l}{a} \cdot \sin a \\ -\frac{l}{a} \cdot (\cos a - 1) \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a}{l} \\ 1 & l & \cos a & \sin a \\ 0 & 1 & -\frac{a}{l} \sin a & \frac{a}{l} \cos a \end{bmatrix}$$

Typ 5:

$$\{Z\} = \begin{bmatrix} l \\ \frac{l^2}{2} \\ \frac{l}{a^*} \cdot \sinh a^* \\ \frac{l}{a^*} \cdot (\cosh a^* - 1) \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a^*}{l} \\ 1 & l & \cosh a^* & \sinh a^* \\ 0 & 1 & \frac{a^*}{l} \sinh a^* & \frac{a^*}{l} \cosh a^* \end{bmatrix}$$

Typ 6:

$$\{Z\} = \begin{bmatrix} \frac{l}{\lambda_1} \cdot \sinh \lambda_1 \\ \frac{l}{\lambda_1} \cdot (\cosh \lambda_1 - 1) \\ \frac{l}{\lambda_2} \cdot \sinh \lambda_2 \\ \frac{l}{\lambda_2} \cdot (\cosh \lambda_2 - 1) \end{bmatrix}$$

[B] =

1	0	1	0
0	$\frac{\lambda_1}{l}$	0	$\frac{\lambda_2}{l}$
$\cosh \lambda_1$	$\sinh \lambda_1$	$\cosh \lambda_2$	$\sinh \lambda_2$
$\frac{\lambda_1}{l} \cdot \sinh \lambda_1$	$\frac{\lambda_1}{l} \cdot \cosh \lambda_1$	$\frac{\lambda_2}{l} \cdot \sinh \lambda_2$	$\frac{\lambda_2}{l} \cdot \cosh \lambda_2$

Typ 7:

$$\{Z\} = \begin{bmatrix} \frac{l}{\lambda_1} \cdot \sin \lambda_1 \\ -\frac{l}{\lambda_1} \cdot (\cos \lambda_1 - 1) \\ \frac{l}{\lambda_2} \cdot \sin \lambda_2 \\ -\frac{l}{\lambda_2} \cdot (\cos \lambda_2 - 1) \end{bmatrix}$$

[B] =

1	0	1	0
0	$\frac{\lambda_1}{l}$	0	$\frac{\lambda_2}{l}$
$\cos \lambda_1$	$\sin \lambda_1$	$\cos \lambda_2$	$\sin \lambda_2$
$-\frac{\lambda_1}{l} \cdot \sin \lambda_1$	$\frac{\lambda_1}{l} \cdot \cos \lambda_1$	$-\frac{\lambda_2}{l} \cdot \sin \lambda_2$	$\frac{\lambda_2}{l} \cdot \cos \lambda_2$

Typ 8:

$$\begin{bmatrix} \frac{\lambda_1}{l} \cdot \cos \lambda_2 \cdot \sinh \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{l} \cdot \sin \lambda_2 \cdot \cosh \lambda_1 \\ \frac{\lambda_1}{l} \cdot \cos \lambda_2 \cdot \cosh \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{l} \cdot \sin \lambda_2 \cdot \sinh \lambda_1 - \frac{\lambda_1}{l} \\ \frac{\lambda_1}{l} \cdot \sin \lambda_2 \cdot \cosh \lambda_1 - \frac{\lambda_2}{l} \cdot \cos \lambda_2 \cdot \sinh \lambda_1 \\ \frac{\lambda_1}{l} \cdot \sin \lambda_2 \cdot \sinh \lambda_1 - \frac{\lambda_2}{l} \cdot \cos \lambda_2 \cdot \cosh \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{l} \end{bmatrix}$$

$$\{Z\} = \frac{l^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_1}{l} & \frac{\lambda_2}{l} & 0 \\ \cos \lambda_2 \cdot \cosh \lambda_1 & \cos \lambda_2 \cdot \sinh \lambda_1 & \sin \lambda_2 \cdot \sinh \lambda_1 & \sin \lambda_2 \cdot \cosh \lambda_1 \\ -\frac{\lambda_2}{l} \cdot \sin \lambda_2 \cdot \cosh \lambda_1 + \frac{\lambda_1}{l} \cdot \cos \lambda_2 \cdot \sinh \lambda_1 - \frac{\lambda_2}{l} \cdot \sin \lambda_2 \cdot \sinh \lambda_1 + \frac{\lambda_1}{l} \cdot \cos \lambda_2 \cdot \cosh \lambda_1 & -\frac{\lambda_2}{l} \cdot \sin \lambda_2 \cdot \sinh \lambda_1 + \frac{\lambda_1}{l} \cdot \cos \lambda_2 \cdot \sinh \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{l} \cdot \cos \lambda_2 \cdot \cosh \lambda_1 & \frac{\lambda_2}{l} \cdot \cos \lambda_2 \cdot \sinh \lambda_1 + \frac{\lambda_1}{l} \cdot \sin \lambda_2 \cdot \sinh \lambda_1 & \frac{\lambda_2}{l} \cdot \cos \lambda_2 \cdot \cosh \lambda_1 + \frac{\lambda_1}{l} \cdot \sin \lambda_2 \cdot \sinh \lambda_1 \end{bmatrix}$$

TYP 0	TYP 1	TYP 2	TYP 3	TYP 4	TYP 5	TYP 6	TYP 7	TYP 8
$\frac{l^4}{24}$	$\frac{1}{b} (C_0 - 1)$	$-\frac{4}{l^4} \frac{\cosh \alpha l - \frac{\alpha l}{2} \sinh \alpha l - 1}{(\alpha l)^4}$	$-\frac{4}{l^4} \frac{\cos \alpha l + \frac{\alpha l}{2} \sin \alpha l - 1}{(\alpha l)^4}$	$-\frac{4}{l^4} \frac{1 - \cos \alpha - \frac{\alpha^2}{2}}{\alpha^4}$	$-\frac{4}{l^4} \frac{1 - \cosh \alpha + \frac{\alpha^2}{2}}{\alpha^4}$	$-\left(\frac{l}{b}\right)^4 (V_0 - 1)$	$-\left(\frac{l}{b}\right)^4 (Z_0 - 1)$	$-\left(\frac{l}{b}\right)^4 \frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{2 \lambda_1 \lambda_2} W_1 + W_1 - 1$
$\frac{l^3}{6}$	$l^3 C_3$	$-\frac{3}{l^3} \frac{\sinh \alpha l - \alpha l \cosh \alpha l}{(\alpha l)^3}$	$-\frac{3}{l^3} \frac{\sin \alpha l - \alpha l \cos \alpha l}{(\alpha l)^3}$	$-\frac{3}{l^3} \frac{\sin \alpha - \alpha}{\alpha^3}$	$-\frac{3}{l^3} \frac{\alpha - \sinh \alpha}{\alpha^3}$	$l^3 V_3$	$l^3 Z_3$	$-\frac{l^3}{b^2} \frac{1}{\lambda_1} W_0 - \frac{1}{\lambda_2} W_3$
$\frac{l^2}{2} D$	$l^2 D C_2$	$\frac{l^2}{2} D \frac{\sinh \alpha l}{\alpha l}$	$\frac{l^2}{2} D \frac{\sin \alpha l}{\alpha l}$	$-\frac{l^2}{2} D \frac{\cos \alpha - 1}{\alpha^2}$	$-\frac{l^2}{2} D \frac{1 - \cosh \alpha}{\alpha^2}$	$l^2 D V_2$	$l^2 D Z_2$	$l^2 D \frac{W_1}{2 \lambda_1 \lambda_2}$
ID	ID l_1	$\frac{l}{2} D \frac{3 \sinh \alpha l - \alpha l \cosh \alpha l}{\alpha l}$	$\frac{l}{2} D \frac{3 \sin \alpha l - \alpha l \cos \alpha l}{\alpha l}$	ID	ID	ID V_1	ID Z_1	$-\frac{l}{2} D \frac{1}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \left(\frac{\lambda_2^2 - 3 \lambda_1^2}{\lambda_1} W_0 + \frac{\lambda_1^2 - 3 \lambda_2^2}{\lambda_1} W_1 \right)$

Lastspalten für Übertragungsmatrizen

ANHANG 3

Steifigkeits- und Spannungsmatrizen für Scheibenelemente

$\frac{1}{2} \frac{B}{l} + \frac{(n\pi)^2}{12} \frac{l}{B} (1-\nu)$	$-\frac{1}{2} \frac{B}{l} + \frac{(n\pi)^2}{24} \left(\frac{l}{B}\right) (1-\nu)$	$\frac{1+\nu}{8}$	$n\pi \frac{1+\nu}{8}$
$\frac{(n\pi)^2}{6} \frac{l}{B} + \frac{B}{l} \frac{1-\nu}{4}$	$-\frac{(n\pi)^2}{12} \frac{l}{B} - \frac{B}{l} \frac{1-\nu}{4}$	$-\frac{n\pi}{8} \frac{1+\nu}{8}$	$\frac{(n\pi)^2}{12} \frac{l}{B} - \frac{B}{l} \frac{1-\nu}{4}$
$\frac{1}{2} \frac{B}{l} + \frac{(n\pi)^2}{12} \frac{l}{B} (1-\nu)$	$\frac{1-3\nu}{8}$	$n\pi \frac{1-3\nu}{8}$	$\frac{(n\pi)^2}{6} \frac{l}{B} + \frac{B}{l} \frac{1-\nu}{4}$

symmetrisch

$\frac{Et}{1-\nu^2}$

Steifigkeitsmatrix $[k]_n$ für SCHEI 2

$-\frac{1}{l} \sin \frac{n\pi}{B} z$	$-\frac{n\pi}{B} \nu \left(1 - \frac{x}{l}\right) \sin \frac{n\pi}{B} z$	$\frac{1}{l} \sin \frac{n\pi}{B} z$	$-\frac{n\pi}{B} \nu \frac{x}{l} \sin \frac{n\pi}{B} z$
$-\frac{1}{l} \nu \sin \frac{n\pi}{B} z$	$-\frac{n\pi}{B} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \sin \frac{n\pi}{B} z$	$\frac{1}{l} \nu \sin \frac{n\pi}{B} z$	$-\frac{n\pi}{B} \frac{x}{l} \sin \frac{n\pi}{B} z$
$\frac{1-\nu}{2} \frac{n\pi}{B} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cos \frac{n\pi}{B} z$	$-\frac{1-\nu}{2} \frac{1}{l} \cos \frac{n\pi}{B} z$	$\frac{1-\nu}{2} \frac{n\pi}{B} \frac{x}{l} \cos \frac{n\pi}{B} z$	$\frac{1-\nu}{2} \frac{1}{l} \cos \frac{n\pi}{B} z$

Spannungsmatrix $[s]_n$ für SCHEI 2

$\frac{7}{6} \frac{\beta}{l}$	$+\frac{1}{4} \nu n\bar{\epsilon}$	$-\frac{4}{3} \frac{\beta}{l}$	$\frac{1}{3} \nu n\bar{\epsilon}$	$\frac{1}{6} \frac{\beta}{l}$	$-\frac{1}{12} \nu n\bar{\epsilon}$
$\frac{1}{15} (n\bar{\epsilon})^2 \frac{l}{\beta}$	$-\frac{1}{3} \nu n\bar{\epsilon}$	$\frac{1}{30} (n\bar{\epsilon})^2 \frac{l}{\beta}$	$\frac{1}{12} \nu n\bar{\epsilon}$	$-\frac{1}{60} (n\bar{\epsilon})^2 \frac{l}{\beta}$	
$\frac{8}{3} \frac{\beta}{l}$	0	$\frac{1}{3} \nu n\bar{\epsilon}$	$-\frac{4}{3} \frac{\beta}{l}$	$\frac{1}{3} \nu n\bar{\epsilon}$	
	$\frac{4}{15} (n\bar{\epsilon})^2 \frac{l}{\beta}$	$-\frac{1}{3} \nu n\bar{\epsilon}$	$\frac{1}{30} (n\bar{\epsilon})^2 \frac{l}{\beta}$	$-\frac{1}{4} \nu n\bar{\epsilon}$	
		$\frac{7}{6} \frac{\beta}{l}$	$\frac{1}{15} (n\bar{\epsilon})^2 \frac{l}{\beta}$		

$$\frac{Et}{1-\nu^2}$$

symmetrisch

Steifigkeitsmatrix $[\bar{k}]_n$ für SCHEI 3

$\frac{1}{15} (n\pi)^2 \frac{l}{B}$	$-\frac{1}{4} n\pi$	$\frac{1}{30} (n\pi)^2 \frac{l}{B}$	$\frac{1}{3} n\pi$	$-\frac{1}{60} (n\pi)^2 \frac{l}{B}$	$-\frac{1}{12} n\pi$
	$\frac{7}{6} \frac{B}{l}$	$-\frac{1}{3} n\pi$	$-\frac{4}{3} \frac{B}{l}$	$\frac{1}{12} n\pi$	$\frac{1}{6} \frac{B}{l}$
		$\frac{4}{15} (n\pi)^2 \frac{l}{B}$	0	$\frac{1}{30} (n\pi)^2 \frac{l}{B}$	$+\frac{1}{3} n\pi$
			$\frac{8}{3} \frac{B}{l}$	$-\frac{1}{3} n\pi$	$-\frac{4}{3} \frac{B}{l}$
				$\frac{1}{15} (n\pi)^2 \frac{l}{B}$	$\frac{1}{4} n\pi$
					$\frac{7}{6} \frac{B}{l}$

· Gt

symmetrisch

Steifigkeitsmatrix $[\bar{k}]$ für SCHEI 3

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{l}(-3+4\frac{x}{l}) & -\frac{\nu nE}{B}(1-3\frac{x}{l}+2(\frac{x}{l})^2) & \frac{4}{l}(1-2\frac{x}{l}) & -\frac{\nu nE}{B}(\frac{x}{l}-\frac{x^2}{l^2}) & -\frac{1}{l}(1-4\frac{x}{l}) & -\frac{\nu nE}{B}(-\frac{x}{l}+2(\frac{x}{l})^2) \\ \frac{\nu}{l}(-3+4\frac{x}{l}) & -\frac{nE}{B}(1-3\frac{x}{l}+2(\frac{x}{l})^2) & \frac{4\nu}{l}(1-2\frac{x}{l}) & -\frac{nE}{B}(\frac{x}{l}-\frac{x^2}{l^2}) & -\frac{\nu}{l}(1-4\frac{x}{l}) & -\frac{nE}{B}(-\frac{x}{l}+2(\frac{x}{l})^2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{E}{1-\nu^2} \sin \frac{nE}{B} z$$

Spannungsmatrix $[\bar{5}]$ für SCHEI 3

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{nE}{B}(1-3\frac{x}{l}+2(\frac{x}{l})^2) & \frac{1}{l}(-3+4\frac{x}{l}) & \frac{4nE}{B}(\frac{x}{l}-\frac{x^2}{l^2}) & \frac{4}{l}(1-2\frac{x}{l}) & \frac{nE}{B}(-\frac{x}{l}+2(\frac{x}{l})^2) & -\frac{1}{l}(1-4(\frac{x}{l})) \end{bmatrix}$$

$$6 \cos \frac{nE}{B} z$$

Spannungsmatrix $[\bar{5}]$ für SCHEI 3

$\frac{27}{10l^2}$	$\frac{\nu nE}{B} \frac{1}{2l}$	$-\frac{189}{40l^2}$	$+\frac{\nu nE}{B} \frac{57}{80l}$	$\frac{27}{20l^2}$	$-\frac{\nu nE}{B} \frac{3}{10l}$	$-\frac{13}{40l^2}$	$\frac{\nu nE}{B} \frac{7}{80l}$
	$\left(\frac{nE}{B}\right)^2 \frac{8}{105}$	$-\frac{\nu nE}{B} \frac{57}{80l}$	$\left(\frac{nE}{B}\right)^2 \frac{33}{560}$	$\frac{\nu nE}{B} \frac{3}{10l}$	$-\left(\frac{nE}{B}\right)^2 \frac{3}{140}$	$-\frac{\nu nE}{B} \frac{7}{80l}$	$\left(\frac{nE}{B}\right)^2 \frac{19}{1680}$
		$\frac{54}{5l^2}$	0	$-\frac{297}{40l^2}$	$\frac{\nu nE}{B} \frac{81}{80l}$	$\frac{27}{20l^2}$	$-\frac{\nu nE}{B} \frac{3}{10l}$
			$\left(\frac{nE}{B}\right)^2 \frac{27}{70}$	$-\frac{\nu nE}{B} \frac{81}{80l}$	$-\left(\frac{nE}{B}\right)^2 \frac{27}{560}$	$+\frac{\nu nE}{B} \frac{3}{10l}$	$-\left(\frac{nE}{B}\right)^2 \frac{9}{140}$
				$\frac{54}{5l^2}$	0	$-\frac{189}{40l^2}$	$\frac{\nu nE}{B} \frac{57}{80l}$
					$\left(\frac{nE}{B}\right)^2 \frac{27}{70}$	$-\frac{\nu nE}{B} \frac{57}{80l}$	$\left(\frac{nE}{B}\right)^2 \frac{33}{560}$
						$\frac{97}{10l^2}$	$-\frac{nEv}{B} \frac{1}{2l}$
							$\left(\frac{nE}{B}\right)^2 \frac{8}{105}$

$$\frac{Bt}{2} \frac{E}{1-\nu^2} \cdot l$$

symmetrisch

Steifigkeitsmatrix $[\bar{K}]_n$ für SCHEI 4

$\left(\frac{n\bar{u}}{B}\right)^2 \frac{8}{105}$	$-\frac{n\bar{u}}{B} \frac{1}{21}$	$\left(\frac{n\bar{u}}{B}\right)^2 \frac{33}{560}$	$\frac{n\bar{u}}{B} \frac{57}{801}$	$-\left(\frac{n\bar{u}}{B}\right)^2 \frac{3}{140}$	$-\frac{n\bar{u}}{B} \frac{3}{101}$	$\left(\frac{n\bar{u}}{B}\right)^2 \frac{19}{1680}$	$\frac{n\bar{u}}{B} \frac{7}{801}$
	$\frac{37}{101^2}$	$-\frac{n\bar{u}}{B} \frac{57}{801}$	$-\frac{189}{401^2}$	$\frac{n\bar{u}}{B} \frac{3}{101}$	$\frac{27}{201^2}$	$-\frac{n\bar{u}}{B} \frac{7}{801}$	$-\frac{19}{401^2}$
		$\left(\frac{n\bar{u}}{B}\right)^2 \frac{27}{70}$	0	$-\left(\frac{n\bar{u}}{B}\right)^2 \frac{27}{560}$	$\frac{n\bar{u}}{B} \frac{81}{801}$	$-\left(\frac{n\bar{u}}{B}\right)^2 \frac{3}{140}$	$-\frac{n\bar{u}}{B} \frac{3}{101}$
			$\frac{54}{51^2}$	$-\frac{n\bar{u}}{B} \frac{81}{801}$	$-\frac{297}{401^2}$	$\frac{n\bar{u}}{B} \frac{3}{101}$	$\frac{27}{201^2}$
				$\left(\frac{n\bar{u}}{B}\right)^2 \frac{27}{70}$	0	$\left(\frac{n\bar{u}}{B}\right)^2 \frac{33}{560}$	$\frac{n\bar{u}}{B} \frac{57}{801}$
					$\frac{54}{51^2}$	$-\frac{n\bar{u}}{B} \frac{57}{801}$	$-\frac{189}{401^2}$
						$\left(\frac{n\bar{u}}{B}\right)^2 \frac{8}{105}$	$\frac{n\bar{u}}{B} \frac{1}{21}$
							$\frac{37}{101^2}$

symmetrisch

Steifigkeitsmatrix $[\bar{k}]_n$ für SCHEI 4

$$\begin{bmatrix}
 F_1' & -\frac{\nu n \bar{E}}{B} F_1 & F_2' & -\frac{\nu n \bar{E}}{B} F_2 & F_3' & -\frac{\nu n \bar{E}}{B} F_3 & F_4' & -\frac{\nu n \bar{E}}{B} F_4 \\
 \nu F_1' & -\frac{n \bar{E}}{B} F_1 & \nu F_2' & -\frac{n \bar{E}}{B} F_2 & \nu F_3' & -\frac{n \bar{E}}{B} F_3 & \nu F_4' & -\frac{n \bar{E}}{B} F_4 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

$$\frac{E}{1-\nu^2} \sin \frac{n\pi}{B}$$

Spannungsmatrix $[\bar{S}]_n$ für SCHEI 4

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{n \bar{E}}{B} F_1 & F_1' & \frac{n \bar{E}}{B} F_2 & F_2' & \frac{n \bar{E}}{B} F_3 & F_3' & \frac{n \bar{E}}{B} F_4 & F_4'
 \end{bmatrix}$$

$$6 \cos \frac{n\pi}{B}$$

Spannungsmatrix $[\bar{S}]_n$ für SCHEI 4

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \frac{1}{2} (2 - 11 \frac{x}{l} + 18 (\frac{x}{l})^2 - 9 (\frac{x}{l})^3) \\
 F_2 &= \frac{1}{2} (18 \frac{x}{l} - 45 (\frac{x}{l})^2 + 27 (\frac{x}{l})^3) \\
 F_3 &= \frac{1}{2} (-9 \frac{x}{l} + 36 (\frac{x}{l})^2 - 27 (\frac{x}{l})^3) \\
 F_4 &= \frac{1}{2} (2 \frac{x}{l} - 9 (\frac{x}{l})^2 + 9 (\frac{x}{l})^3) \\
 F_1' &= \frac{1}{2l} (-11 + 36 \frac{x}{l} - 27 (\frac{x}{l})^2) \\
 F_2' &= \frac{9}{2l} (2 - 10 \frac{x}{l} + 9 (\frac{x}{l})^2) \\
 F_3' &= \frac{9}{2l} (-1 + 8 \frac{x}{l} - 9 (\frac{x}{l})^2) \\
 F_4' &= \frac{1}{2l} (2 - 18 \frac{x}{l} + 27 (\frac{x}{l})^2)
 \end{aligned}$$

ANHANG 4

Spannungs- und Steifigkeits-
matrizen für Volumenelemente

$$[S_i] = \frac{E(1-\nu)}{2\Delta(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$b_i \sin \frac{n\bar{L}}{B}$	$c_i \frac{\nu}{1-\nu} \sin \frac{n\bar{L}}{B}$	$-(a_i + b_i x + c_i y) \frac{n\bar{L}}{B}$	$\frac{\nu}{1-\nu} \sin \frac{n\bar{L}}{B}$
$b_i \frac{\nu}{1-\nu} \sin \frac{n\bar{L}}{B}$	$c_i \sin \frac{n\bar{L}}{B}$	$-(a_i + b_i x + c_i y) \frac{n\bar{L}}{B}$	$\frac{\nu}{1-\nu} \sin \frac{n\bar{L}}{B}$
$b_i \frac{\nu}{1-\nu} \sin \frac{n\bar{L}}{B}$	$c_i \frac{\nu}{1-\nu} \sin \frac{n\bar{L}}{B}$	$-(a_i + b_i x + c_i y) \frac{n\bar{L}}{B}$	$\frac{\nu}{1-\nu} \sin \frac{n\bar{L}}{B}$
$c_i \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \sin \frac{n\bar{L}}{B}$	$b_i \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \sin \frac{n\bar{L}}{B}$	0	0
0	$(a_i + b_i x + c_i y) \frac{n\bar{L}}{B} \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \cos \frac{n\bar{L}}{B}$	$c_i \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \cos \frac{n\bar{L}}{B}$	$\cos \frac{n\bar{L}}{B}$
$(a_i + b_i x + c_i y) \frac{n\bar{L}}{B} \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \cos \frac{n\bar{L}}{B}$	0	$b_i \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \cos \frac{n\bar{L}}{B}$	$\cos \frac{n\bar{L}}{B}$

Spannungsmatrix für dreieckiges Volumenelement

$$[\bar{k}_{ij}] = \begin{bmatrix} \left(\frac{n\bar{\kappa}}{B}\right)^2 \frac{\Delta}{3} & 0 & \frac{n\bar{\kappa}}{B} \frac{2}{3} b_j \\ 0 & \left(\frac{n\bar{\kappa}}{B}\right) \frac{\Delta}{3} & \frac{n\bar{\kappa}}{B} \frac{2}{3} c_j \\ \frac{n\bar{\kappa}}{B} \frac{3}{2} b_i & \frac{n\bar{\kappa}}{B} \frac{3}{2} c_i & (c_j c_i + b_j b_i) \frac{1}{\Delta} \end{bmatrix} \quad \text{für } i \neq j$$

$$[\bar{k}_{ii}] = \begin{bmatrix} \left(\frac{n\bar{\kappa}}{B}\right)^2 \frac{2\Delta}{3} & 0 & \frac{2}{3} b_i \frac{n\bar{\kappa}}{B} \\ \text{Sym.} & \left(\frac{n\bar{\kappa}}{B}\right)^2 \frac{2}{3} \Delta & \frac{2}{3} c_i \frac{n\bar{\kappa}}{B} \\ & & (c_i^2 + c_j^2) \frac{1}{\Delta} \end{bmatrix} \quad \text{für } i = j$$

$$[\bar{k}_{ij}] = \begin{bmatrix} (1-\nu) b_j b_i + \frac{1-2\nu}{2} c_j c_i & \nu c_j b_i + \frac{1-2\nu}{2} b_j c_i & -\nu b_i \frac{2}{3} \Delta \frac{n\bar{\kappa}}{B} \\ \nu b_j b_i + \frac{1-2\nu}{2} c_j b_i & (1-\nu) c_i c_j + \frac{1-2\nu}{2} b_i b_j & -\nu c_i \frac{2}{3} \Delta \frac{n\bar{\kappa}}{B} \\ -\nu b_j \frac{2}{3} \Delta \frac{n\bar{\kappa}}{B} & -\nu c_j \frac{2}{3} \Delta \frac{n\bar{\kappa}}{B} & (1-\nu) \frac{\Delta^2}{9} \left(\frac{n\bar{\kappa}}{B}\right)^2 \end{bmatrix}$$

für $i \neq j$

$$\text{wenn } i = j \text{ dann } \bar{k}_{ij}(3,3) = (1-\nu) \frac{2}{3} \Delta^2 \left(\frac{n\bar{\kappa}}{B}\right)^2$$

$$[\bar{k}_{ii}] = \begin{bmatrix} (1-\nu) b_i b_j + \frac{1-2\nu}{2} c_j c_i & \nu c_j b_i + \frac{1-2\nu}{2} b_j c_i & -\nu b_i \frac{2}{3} \Delta \frac{n\bar{\kappa}}{B} \\ \nu b_j b_i + \frac{1-\nu}{2} c_j b_i & (1-\nu) c_i c_j + \frac{1-2\nu}{2} b_i b_j & -\nu c_i \frac{2}{3} \Delta \frac{n\bar{\kappa}}{B} \\ -\nu b_j \frac{2}{3} \Delta \frac{n\bar{\kappa}}{B} & -\nu c_j \frac{2}{3} \Delta \frac{n\bar{\kappa}}{B} & (1-\nu) \frac{2}{3} \Delta^2 \frac{n\bar{\kappa}}{B} \end{bmatrix}$$

für $i = j$

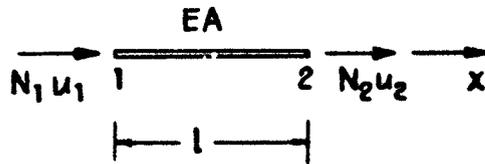
Steifigkeitsmatrizen für dreieckiges
Volumenelement

ANHANG 5

Elementkatalog

STÄBE

STA 1

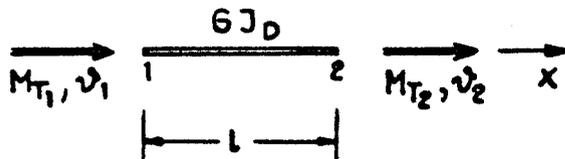


$$EA u'' = 0$$

$$a^2 = 0 ; D = EA$$

A = Querschnittsfläche
E = Elastizitätsmodul

STA 2



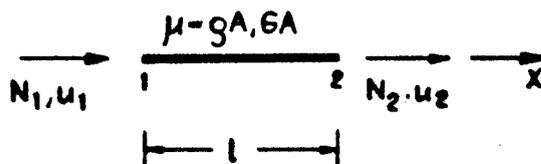
$$6J_D v'' = 0$$

$$a^2 = 0$$

$$D = 6J_D$$

J_D = Drillträgheitsmoment
6 = Schubmodul

STA 3

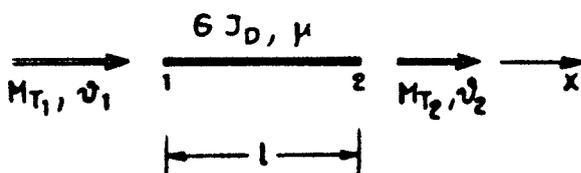


$$u'' + \omega^2 \frac{\mu}{EA} u = 0$$

$$a^2 = \omega^2 \frac{\mu l^2}{EA} ; D = EA$$

μ = Massenbelegung

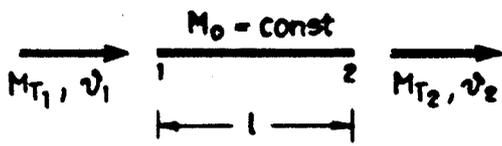
STA 4



$$v'' + \omega^2 \frac{\mu i_z^2}{6J_D} v = 0$$

$$a^2 = \omega^2 \frac{\mu i_z^2}{6J_D} l^2 ; D = 6J_D$$

STA 5

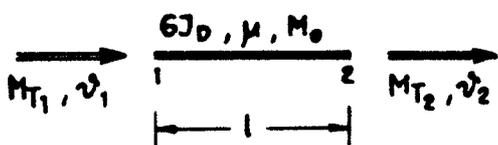


$$\vartheta'' + \frac{M_0^2}{EJ_z 6J_D} \vartheta = 0$$

$$a^2 = \frac{M_0^2}{EJ_z 6J_D} l^2$$

$$D = 6J_D$$

STA 6

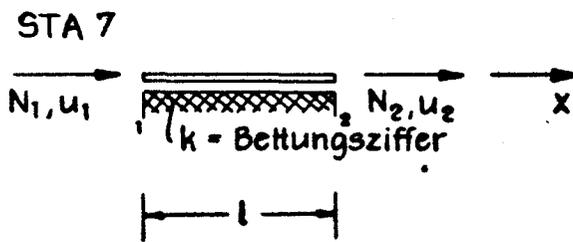


$$\vartheta'' + \frac{M_0^2 + \omega^2 \mu i_z^2 EJ_z}{EJ_z 6J_D} \vartheta = 0$$

$$a^2 = \frac{M_0^2 + \omega^2 \mu i_z^2 EJ_z}{EJ_z 6J_D} l^2$$

$$D = 6J_D$$

- J_z = Biegeträgheitsmoment
- J_D = Drillträgheitsmoment
- i_z^2 = Trägheitsradius
- μ = Massenbelegung
- M_0 = äußeres, constantes Moment



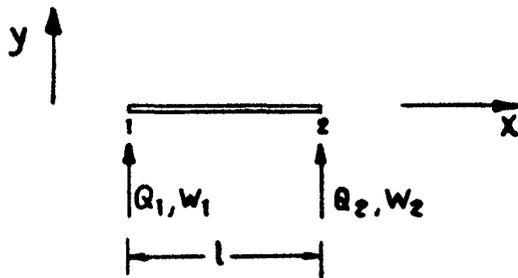
$$u'' + \frac{k}{EA} u = 0$$

$$a^2 = \frac{kl^2}{EA}$$

$$D = EA$$

BALKEN

BAL 1



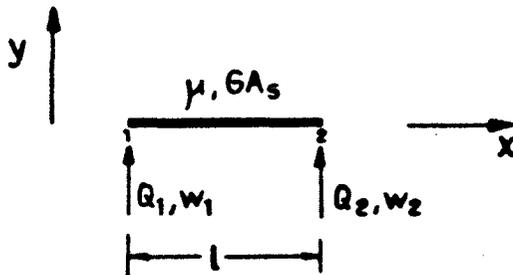
$$GA_S w' = 0$$

$$a^2 = 0$$

$$D = GA_S$$

$A_S = \text{wirksame Schubfläche}$

BAL 2

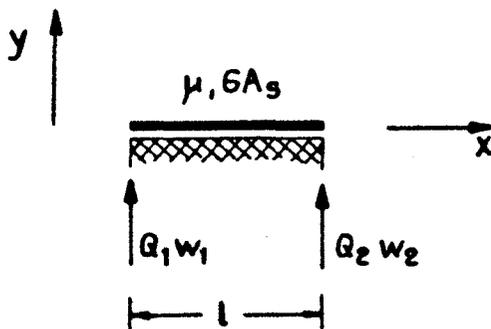


$$w'' + \frac{\mu \omega^2}{GA_S} w = 0$$

$$a^2 = \frac{\mu \omega^2 l^2}{GA_S}$$

$$D = GA_S$$

BAL 3

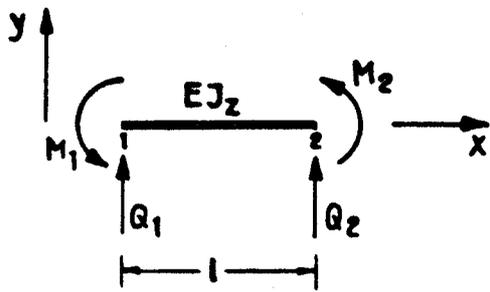


$$w'' + \frac{\mu \omega^2 l - k}{GA_S} w = 0$$

$$a^2 = \frac{\mu \omega^2 l - k}{GA_S}$$

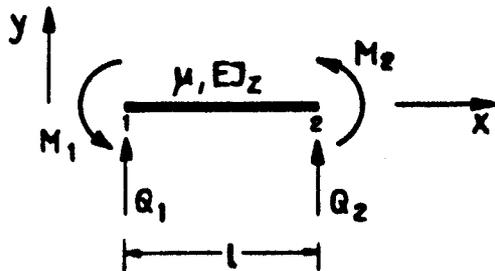
$$D = GA_S$$

BAL 4



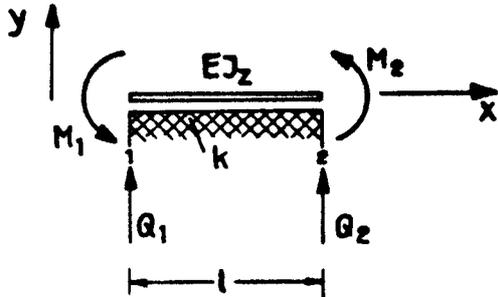
$$\begin{aligned}
 EJz w'''' &= 0 \\
 a^2 &= 0 \\
 b^4 &= 0 \\
 D &= EJz
 \end{aligned}$$

BAL 5



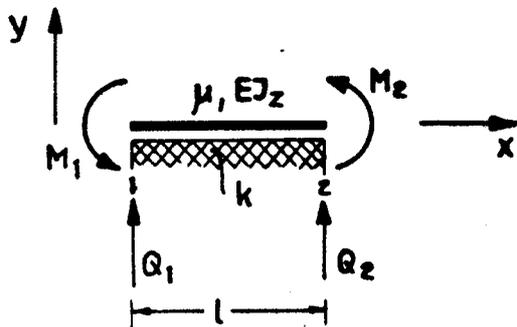
$$\begin{aligned}
 w'''' - \frac{\mu \omega^2}{EJz} w &= 0 \\
 a^2 &= 0 \\
 b^4 &= (\mu \omega^2 / EJz) l^4 \\
 D &= EJz
 \end{aligned}$$

BAL 6



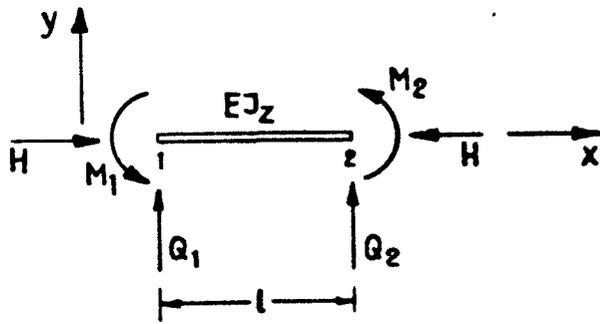
$$\begin{aligned}
 w'''' + \frac{k}{EJz} w &= 0 \\
 a^2 &= 0 \\
 b^4 &= (k / EJz) l^4 \\
 D &= EJz
 \end{aligned}$$

BAL 7



$$\begin{aligned}
 w'''' - \frac{\mu \omega^2 - k}{EJz} w &= 0 \\
 a^2 &= 0 \\
 b^4 &= \frac{\mu \omega^2 - k}{EJz} l^4 \\
 D &= EJz
 \end{aligned}$$

BAL 8



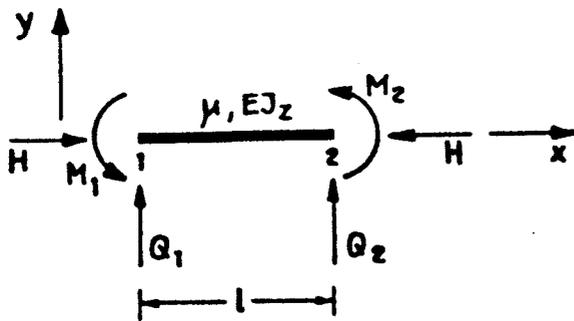
$$w'''' + \frac{H}{EJ_z} w'' = 0$$

$$a^2 = \frac{Hl^2}{EJ_z}$$

$$b^4 = 0$$

$$D = EJ_z$$

BAL 9



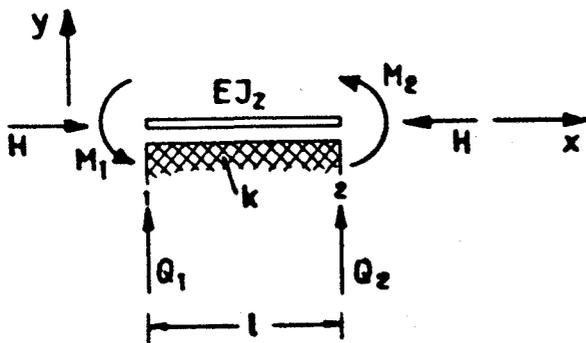
$$w'''' + \frac{H}{EJ_z} w'' - \frac{\mu\omega^2}{EJ_z} w = 0$$

$$a^2 = \frac{Hl^2}{EJ_z}$$

$$b^4 = \frac{\mu\omega^2 l^4}{EJ_z}$$

$$D = EJ_z$$

BAL 10



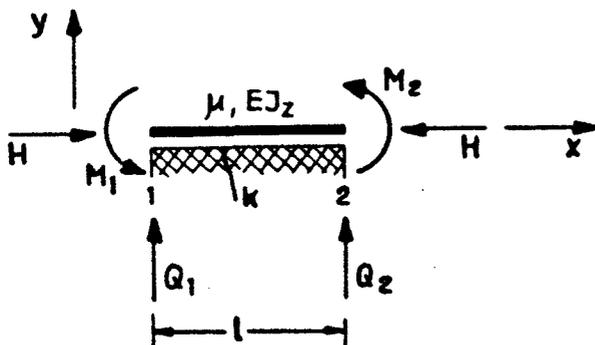
$$w'''' + \frac{H}{EJ_z} w'' + \frac{k}{EJ_z} w = 0$$

$$a^2 = \frac{Hl^2}{EJ_z}$$

$$b^4 = -\frac{kl^4}{EJ_z}$$

$$D = EJ_z$$

BAL 11



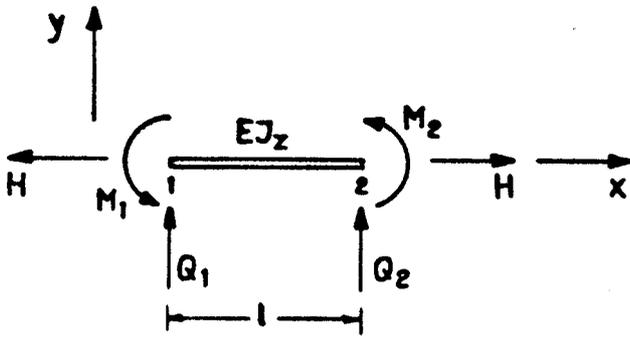
$$w'''' + \frac{H}{EJ_z} w'' - \frac{\mu\omega - k}{EJ_z} w = 0$$

$$a^2 = \frac{Hl^2}{EJ_z}$$

$$b^4 = \frac{\mu\omega - k}{EJ_z} l^4$$

$$D = EJ_z$$

BAL 12

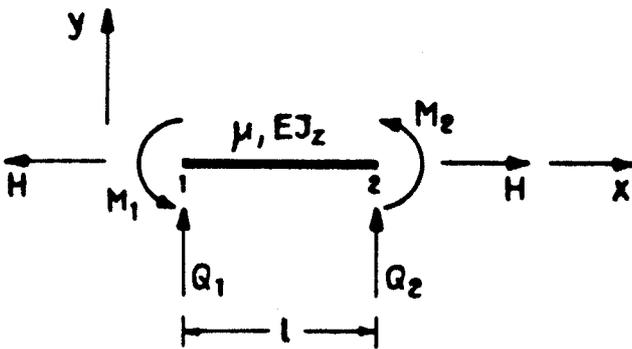


$$w'''' - \frac{H}{EJ_z} w'' = 0$$

$$a^2 = -\frac{Hl^2}{EJ_z}$$

$$b^4 = 0 \quad D = EJ_z$$

BAL 13

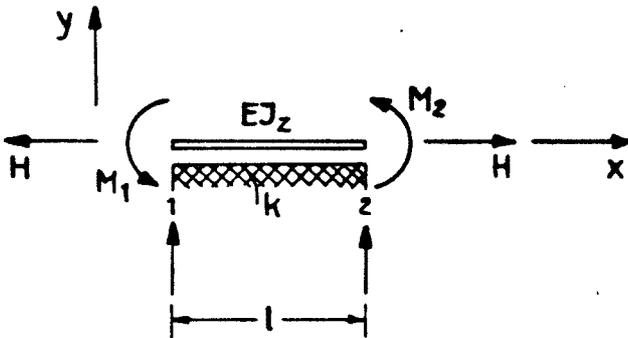


$$w'''' - \frac{H}{EJ_z} w'' - \frac{\mu\omega^2}{EJ_z} w = 0$$

$$a^2 = -\frac{Hl^2}{EJ_z}$$

$$b^4 = \frac{\mu\omega^2}{EJ_z} l^4 \quad D = EJ_z$$

BAL 14

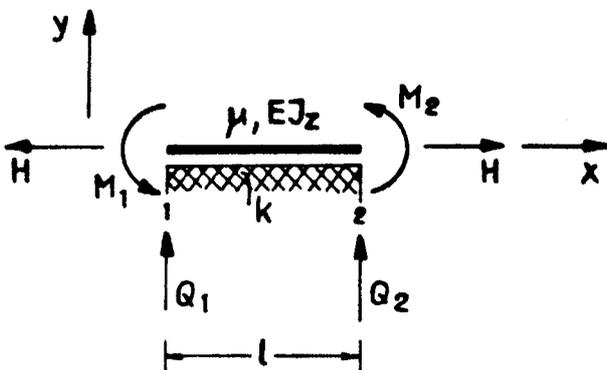


$$w'''' - \frac{H}{EJ_z} w'' + \frac{k}{EJ_z} w = 0$$

$$a^2 = -\frac{H}{EJ_z}$$

$$b^4 = -\frac{kl^4}{EJ_z} \quad D = EJ_z$$

BAL 15

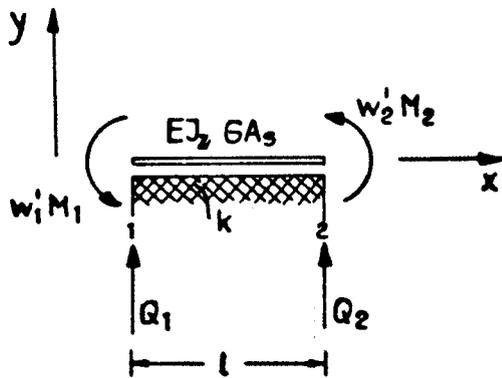


$$w'''' - \frac{H}{EJ_z} w'' - \frac{\mu\omega^2 - k}{EJ_z} w = 0$$

$$a^2 = -\frac{Hl^2}{EJ_z}$$

$$b^4 = \frac{\mu\omega^2 - k}{EJ_z} l^4 \quad D = EJ_z$$

BAL 16



$$w \bar{w} - \frac{k}{GA_s} w'' + \frac{k}{EJ_z} w = 0$$

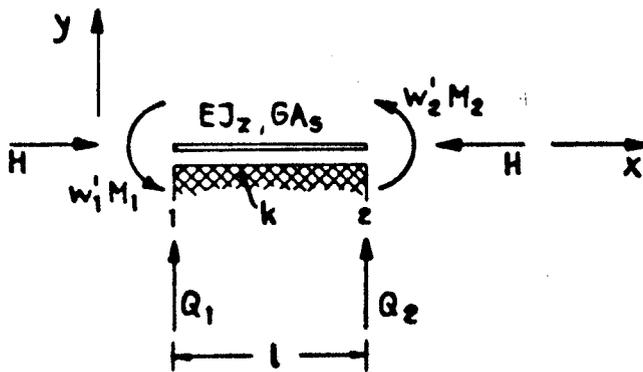
$$a^2 = -\frac{k}{GA_s} l^2$$

$$b^4 = -\frac{k}{EJ_z} l^4$$

$$D = EJ_z$$

A_s = Schubfläche

BAL 17



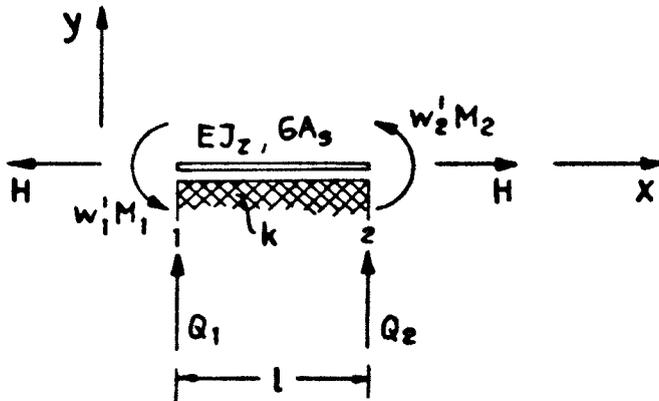
$$w \bar{w} + \left(\frac{H}{EJ_z} - \frac{k}{GA_s} \right) w'' + \frac{k}{EJ_z} w = 0$$

$$a^2 = \left(\frac{H}{EJ_z} - \frac{k}{GA_s} \right) l^2$$

$$b^4 = -\frac{k}{EJ_z} l^4$$

$$D = EJ_z$$

BAL 18



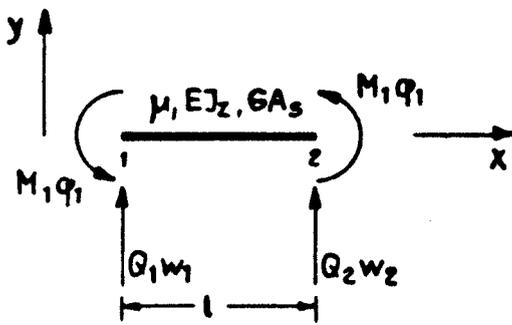
$$w \bar{w} - \left(\frac{H}{EJ_z} + \frac{k}{GA_s} \right) w'' + \frac{k}{EJ_z} w = 0$$

$$a^2 = -\left(\frac{H}{EJ_z} + \frac{k}{GA_s} \right) l^2$$

$$b^4 = -\frac{k}{EJ_z}$$

$$D = EJ_z$$

BAL 19



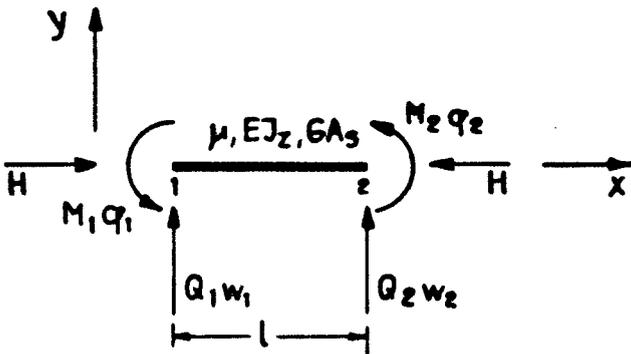
$$w'''' + \frac{\mu\omega^2}{GA_s} w'' - \frac{\mu\omega^2}{EJ_z} w = 0$$

$$a^2 = \frac{\mu\omega^2}{GA_s} l^2$$

$$b^4 = \frac{\mu\omega^2}{EJ_z} l^2$$

$$D = EJ_z$$

BAL 20



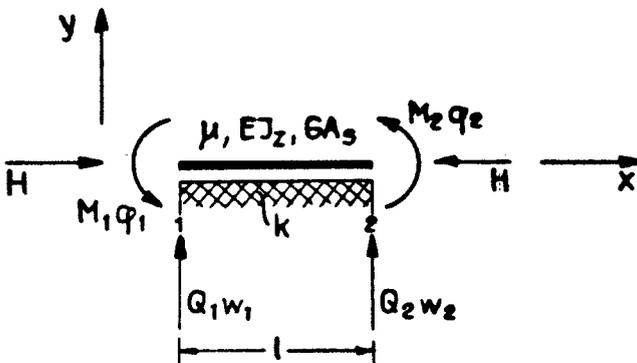
$$w'''' + \left(\frac{\mu\omega^2}{GA_s} + \frac{H}{EJ_z} \right) w'' - \frac{\mu\omega^2}{EJ_z} w = 0$$

$$a^2 = \left(\frac{\mu\omega^2}{GA_s} + \frac{H}{EJ_z} \right) l^2$$

$$b^4 = \frac{\mu\omega^2}{EJ_z} l^4$$

$$D = EJ_z$$

BAL 21



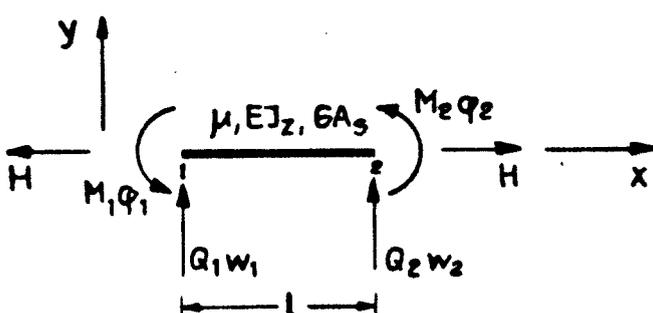
$$w'''' + \left(\frac{\mu\omega^2 - k}{GA_s} + \frac{H}{EJ_z} \right) w'' - \frac{\mu\omega^2 - k}{EJ_z} w = 0$$

$$a^2 = \left(\frac{\mu\omega^2 - k}{GA_s} + \frac{H}{EJ_z} \right) l^2$$

$$b^4 = \frac{\mu\omega^2 - k}{EJ_z} l^2$$

$$D = EJ_z$$

BAL 22



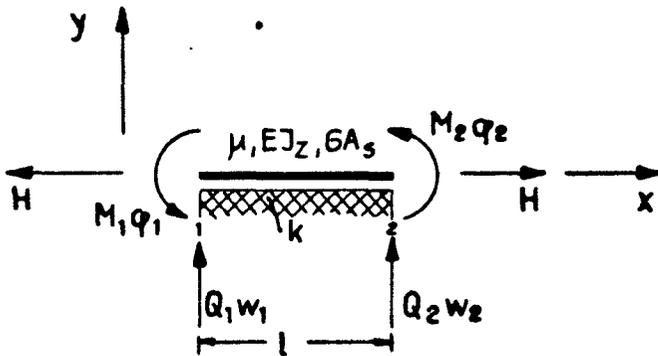
$$w'''' + \left(\frac{\mu\omega^2}{GA_s} - \frac{H}{EJ_z} \right) w'' - \frac{\mu\omega^2}{EJ_z} w = 0$$

$$a^2 = \left(\frac{\mu\omega^2}{GA_s} - \frac{H}{EJ_z} \right) l^2$$

$$b^4 = \frac{\mu\omega^2}{EJ_z} l^4$$

$$D = EJ_z$$

BAL 23



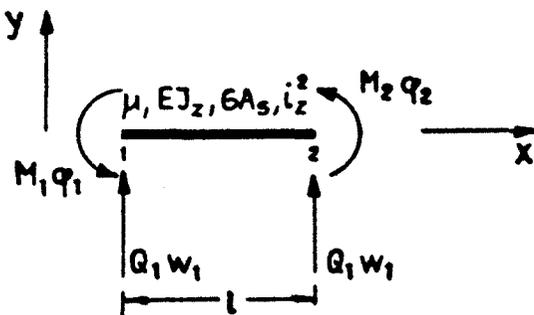
$$w'''' + \left(\frac{\mu\omega^2 - k}{GA_s} - \frac{H}{EJ_z} \right) w'' - \frac{\mu\omega^2 - k}{EJ_z} w = 0$$

$$a^2 = \left(\frac{\mu\omega^2 - k}{GA_s} - \frac{H}{EJ_z} \right) l^2$$

$$b^4 = \frac{\mu\omega^2 - k}{EJ_z} l^4$$

$$D = EJ_z$$

BAL 24



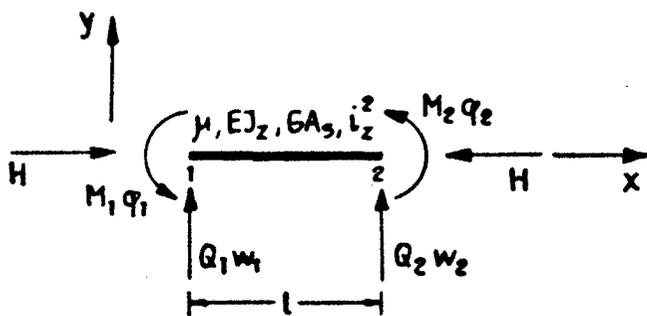
$$w'''' + \frac{\mu\omega^2}{EJ_z} \left(\frac{EJ_z}{GA_s} + i_z^2 \right) w'' - \frac{\mu\omega^2}{EJ_z} \left(1 - \frac{\mu i_z^2 \omega^2}{GA_s} \right) w = 0$$

$$a^2 = \frac{\mu\omega^2}{EJ_z} \left(\frac{EJ_z}{GA_s} + i_z^2 \right) l^2$$

$$b^4 = \frac{\mu\omega^2}{EJ_z} \left(1 - \frac{\mu i_z^2 \omega^2}{GA_s} \right) l^4$$

$$D = EJ_z$$

BAL 25



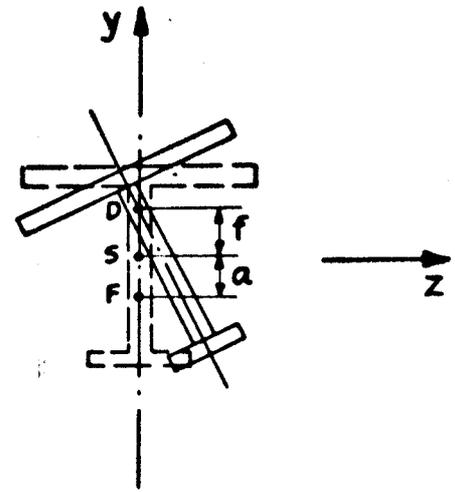
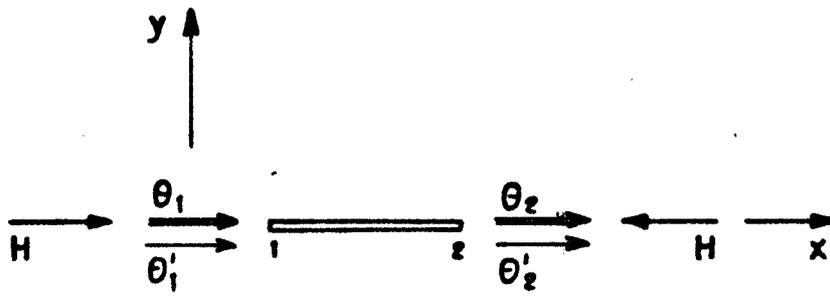
$$w'''' + \frac{\mu\omega^2}{EJ_z} \left(\frac{EJ_z}{GA_s} + i_z^2 + \frac{H}{\mu\omega^2} \right) w'' - \frac{\mu\omega^2}{EJ_z} \left(1 - \frac{\mu i_z^2 \omega^2}{GA_s} \right) w = 0$$

$$a^2 = \frac{\mu\omega^2}{EJ_z} l^2 \left(\frac{EJ_z}{GA_s} + i_z^2 + \frac{H}{\mu\omega^2} \right)$$

$$b^4 = \frac{\mu\omega^2}{EJ_z} l^4 \left(1 - \frac{\mu i_z^2 \omega^2}{GA_s} \right)$$

$$D = EJ_z$$

BAL 26



D - Drillruhepunkt
 S - Schwerpunkt
 F - Angriffspunkt der Last F

$$\theta_2 + \frac{H i_p^2 - 2 H a f - 6 J_D + H a r_z + H f^2}{E (J_{\omega\omega} - J_y f^2 + J_{\omega y} f)} \theta_1' = 0$$

$$a^2 = \frac{H i_p^2 - 2 H a f - 6 J_D + H a r_z + H f^2}{E (J_{\omega\omega} - J_y f^2 + J_{\omega y} f)}$$

$$b^4 = 0$$

$$D = E (J_{\omega\omega} - J_y f^2 + J_{\omega y} f)$$

$$i_p^2 = \frac{\int y^2 dF + \int x^2 dF}{F} \quad \text{Trägheitsradius}$$

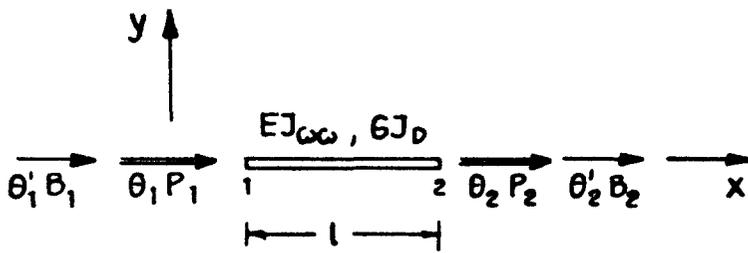
$$J_{\omega\omega} = \int_F \omega^2 dF \quad \text{Wölbungsträgheitsmoment}$$

$$J_{\omega y} = \int_F \omega z dF \quad \text{Sektorielles Trägheitsmoment}$$

$$J_y = \int_F z^2 dF \quad \text{Flächenträgheitsmoment}$$

$$r_z = \int \frac{y (z^2 + y^2)}{J_z} dF$$

BAL 27



Koordinatensystem liegt im Schubmittelpunkt

$$\theta'' + \frac{GJ_D}{EJ\omega\omega} \theta' = 0$$

$$a^2 = \frac{GJ_D}{EJ\omega\omega}$$

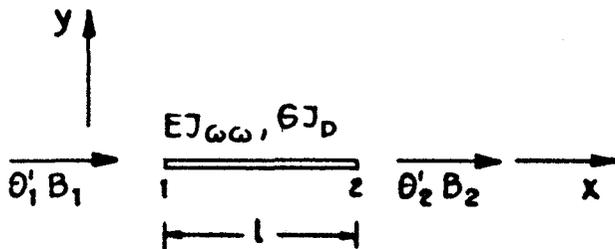
$$D = EJ\omega\omega$$

B = Biegemoment

P = Drillmoment

θ = Drillwinkel

BAL 28

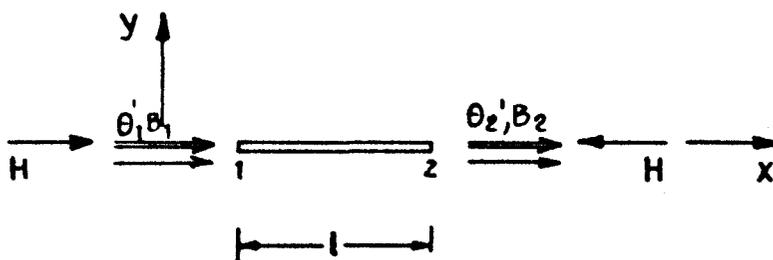


$$B' - \frac{GJ_D}{EJ\omega\omega} B = 0$$

$$a^2 = - \frac{GJ_D}{EJ\omega\omega} l^2$$

$$D = EJ\omega\omega$$

BAL 29



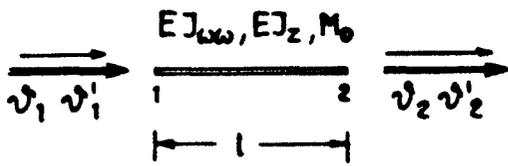
$$\theta'' + \frac{GJ_P - GJ_D}{EJ\omega\omega} \theta' = 0$$

$$a^2 = \frac{GJ_P - GJ_D}{EJ\omega\omega}$$

$$D = EJ\omega\omega$$

$$G = HA$$

BAL 30



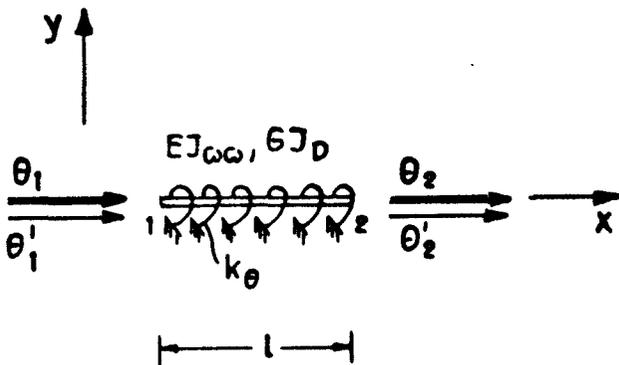
$$v'''' - \frac{6J_D}{EJ_{\omega\omega}} v'' - \frac{M_0^2}{EJ_z EJ_{\omega\omega}} v = 0$$

$$a^2 = -\frac{6J_D}{EJ_{\omega\omega}} l^2$$

$$b^4 = \frac{M_0^2}{EJ_z EJ_{\omega\omega}}$$

$$D = EJ_{\omega\omega}$$

BAL 31



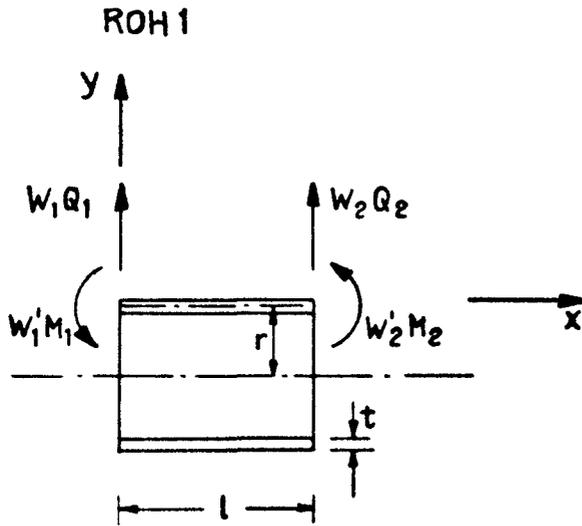
$$\theta'''' - \frac{6J_D}{EJ_{\omega\omega}} \theta'' + \frac{k_\theta}{EJ_{\omega\omega}} \theta = 0$$

$$a^2 = -\frac{6J_D}{EJ_{\omega\omega}} l^2$$

$$b^4 = -\frac{k_\theta}{EJ_{\omega\omega}}$$

$$D = EJ_{\omega\omega}$$

ROHRE

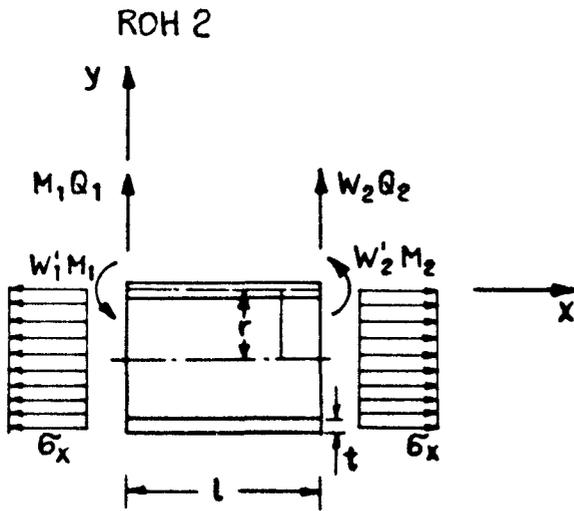


$$W \bar{w} + \frac{Et}{Dr^2} W = 0$$

$$a^2 = 0$$

$$b^4 = -\frac{Et}{Dr^2} l^4$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

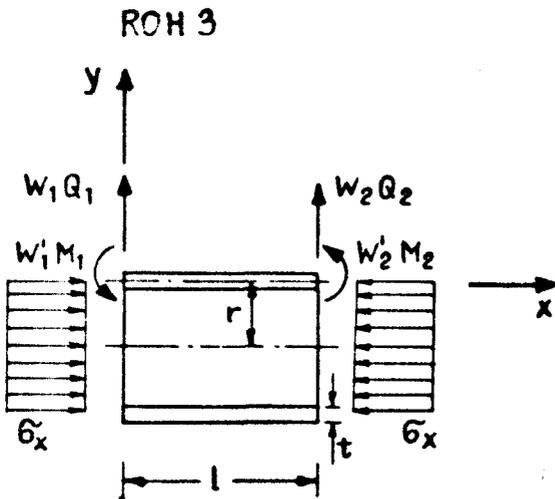


$$W \bar{w} - \frac{G_x t}{D} W' + \frac{Et}{Dr^2} W = 0$$

$$a^2 = -\frac{G_x t}{D}$$

$$b^4 = -\frac{Et}{Dr^2} l^4$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$



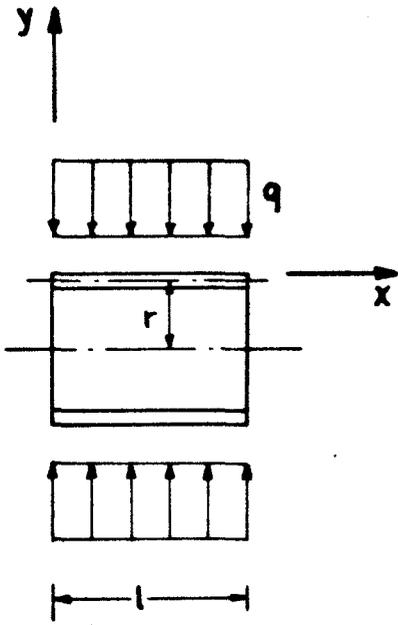
$$W \bar{w} + \frac{G_x t}{D} W' + \frac{Et}{Dr^2} W = 0$$

$$a^2 = \frac{G_x t}{D}$$

$$b^4 = -\frac{Et}{Dr^2} l^4$$

$$D = \frac{Et}{12(1-\nu^2)}$$

ROH 4



$$\frac{1}{12} \left(\frac{t}{r}\right)^2 \frac{\partial^8 \bar{w}}{\partial \varphi^8} + (1-\nu^2) \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial (\frac{x}{r})^4} + q \frac{\partial^6 \bar{w}}{\partial \varphi^6} = 0$$

$$\bar{w} = W \cos m\varphi$$

$$W \bar{w} + \frac{Et^2 m^4}{D 12 (1-\nu^2) r^4} \left(1 - \frac{q}{q_0}\right) W = 0$$

$$a^2 = 0$$

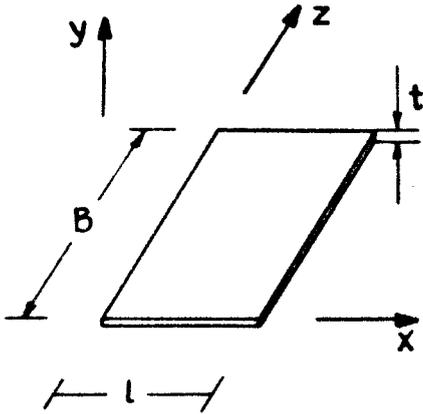
$$b^4 = \frac{-Et^3}{D 12 (1-\nu^2) r^4} \left(1 - \frac{q}{q_0}\right) l^4$$

$$D = \frac{Etr^2}{m^4}$$

$$q_0 = \frac{m^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{r}\right)^3$$

PLATTEN

PLA 1



$$\Delta \Delta W = 0$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial z^4} = 0$$

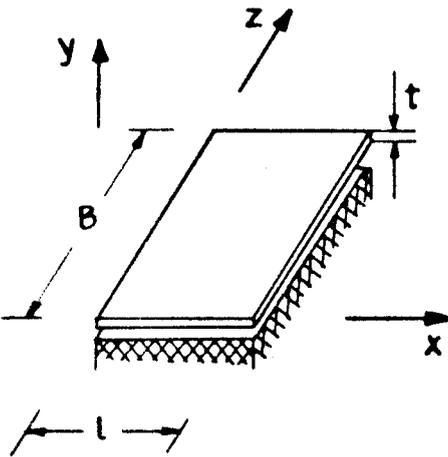
$$W(x, y) = \sum_n W_n(x) \sin \frac{n\pi}{B} z$$

$$W_n''''(x) - 2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 W_n''(x) + \left(\frac{n\pi}{B} \right)^4 W_n(x) = 0$$

$$a_n^2 = -2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 l^2 ; \quad b_n^4 = - \left(\frac{n\pi}{B} \right)^4 l^4$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

PLA 2



$$\Delta \Delta W + \frac{k}{D} W = 0$$

$$W(x, y) = \sum_n W_n(x) \sin \frac{n\pi}{B} z$$

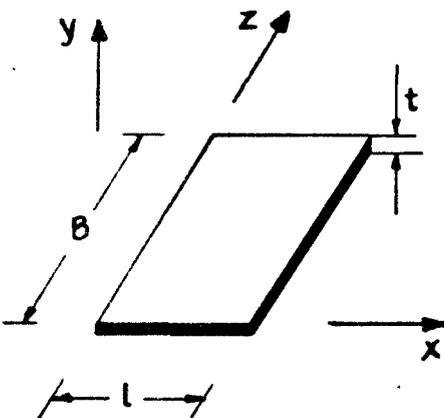
$$W_n''''(x) - 2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 W_n''(x) + \left(\left(\frac{n\pi}{B} \right)^4 + \frac{k}{D} \right) W_n(x) = 0$$

$$a_n^2 = -2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 l^2$$

$$b_n^4 = - \left(\left(\frac{n\pi}{B} \right)^4 + \frac{k}{D} \right) l^4$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

PLA 3



$$\Delta \Delta W - \frac{\mu}{D} \omega^2 W = 0$$

$$W(x, y) = \sum_n W_n(x) \sin \frac{n\pi}{B} z$$

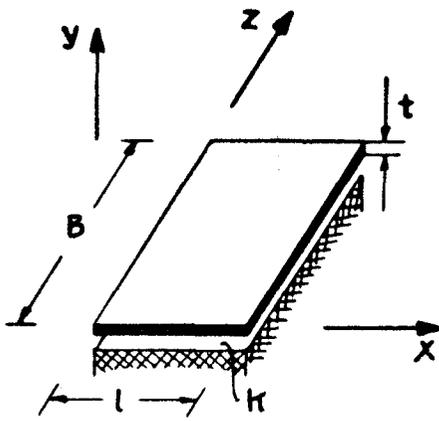
$$W_n''''(x) - 2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 W_n''(x) - \left(\frac{\mu}{D} \omega^2 - \left(\frac{n\pi}{B} \right)^4 \right) W_n(x) = 0$$

$$a_n^2 = -2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 l^2$$

$$b_n^4 = \left(\frac{\mu \omega^2}{D} - \left(\frac{n\pi}{B} \right)^4 \right) l^4$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

PLA 4



$$\Delta \Delta W - \frac{\mu \omega^2 - k}{D} W = 0$$

$$W(x, y) = \sum_n W_n(x) \sin \frac{n\pi}{B} z$$

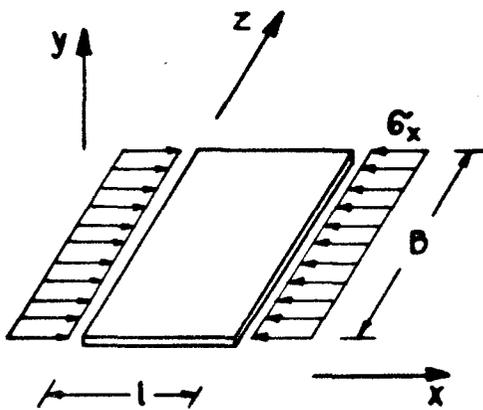
$$W_n''(x) - 2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 W_n'(x) - \left(\frac{\mu \omega^2 - k}{D} - \left(\frac{n\pi}{B} \right)^4 \right) W_n(x) = 0$$

$$a_n^2 = -2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 l^2$$

$$b_n^4 = \left(\frac{\mu \omega^2 - k}{D} - \left(\frac{n\pi}{B} \right)^4 \right) l^4$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

PLA 5



$$\Delta \Delta W + \frac{\sigma_x t}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0$$

$$W(x, y) = \sum_n W_n(x) \sin \frac{n\pi}{B} z$$

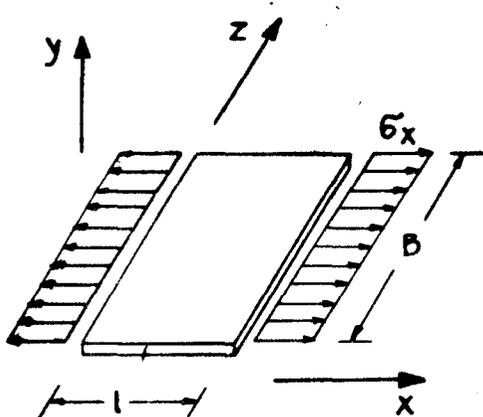
$$W_n''(x) - \left(2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 - \frac{\sigma_x t}{D} \right) W_n'(x) + \left(\frac{n\pi}{B} \right)^4 W_n(x) = 0$$

$$a_n^2 = - \left(2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 - \frac{\sigma_x t}{D} \right) l^2$$

$$b_n^4 = - \left(\frac{n\pi}{B} \right)^4 l^4$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

PLA 6



$$\Delta \Delta W - \frac{\sigma_x t}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0$$

$$W(x, y) = \sum_n W_n(x) \sin \frac{n\pi}{B} z$$

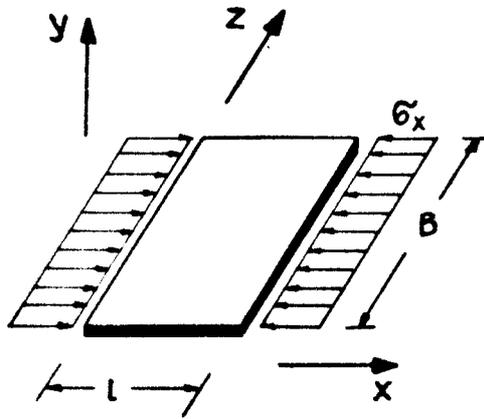
$$W_n''(x) - \left(2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 + \frac{\sigma_x t}{D} \right) W_n'(x) + \left(\frac{n\pi}{B} \right)^4 W_n(x) = 0$$

$$a_n^2 = - \left(2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 + \frac{\sigma_x t}{D} \right) l^2$$

$$b_n^4 = - \left(\frac{n\pi}{B} \right)^4 l^4$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

PLA 7



$$\Delta \Delta W + \frac{\sigma_x t}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\mu \omega^2}{D} W = 0$$

$$W(x, y) = \sum_n W_n(x) \sin \frac{n\pi}{B} z$$

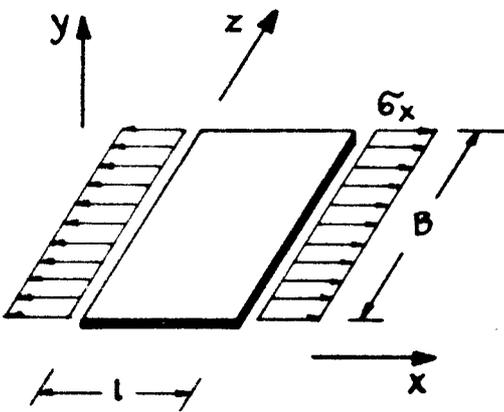
$$W_n''(x) - \left(2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 - \frac{\sigma_x t}{D} \right) W_n'(x) - \left(\frac{\mu \omega^2}{D} - \left(\frac{n\pi}{B} \right)^4 \right) W_n(x) = 0$$

$$a_n^2 = - \left(2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 - \frac{\sigma_x t}{D} \right) l^2$$

$$b_n^4 = \left(\frac{\mu \omega^2}{D} - \left(\frac{n\pi}{B} \right)^4 \right) l^4$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

PLA 8



$$\Delta \Delta W - \frac{\sigma_x t}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\mu \omega^2}{D} W = 0$$

$$W(x, y) = \sum_n W_n(x) \sin \frac{n\pi}{B} z$$

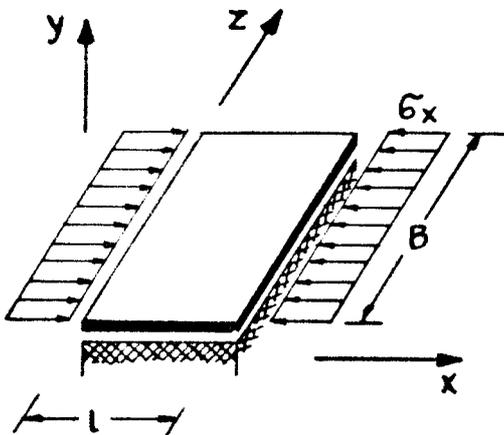
$$W_n''(x) - \left(2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 + \frac{\sigma_x t}{D} \right) W_n'(x) - \left(\frac{\mu \omega^2}{D} - \left(\frac{n\pi}{B} \right)^4 \right) W_n(x) = 0$$

$$a_n^2 = - \left(2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 + \frac{\sigma_x t}{D} \right) l^2$$

$$b_n^4 = \left(\frac{\mu \omega^2}{D} - \left(\frac{n\pi}{B} \right)^4 \right) l^4$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

PLA 9



$$\Delta \Delta W + \frac{\sigma_x t}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\mu \omega^2 - k}{D} W = 0$$

$$W(x, y) = \sum_n W_n(x) \sin \frac{n\pi}{B} z$$

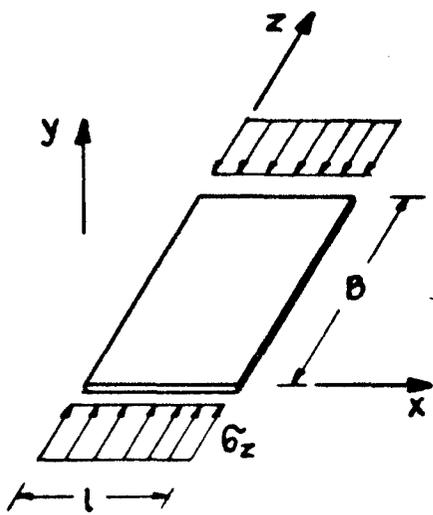
$$W_n''(x) - \left(2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 - \frac{\sigma_x t}{D} \right) W_n'(x) - \left(\frac{\mu \omega^2 - k}{D} - \left(\frac{n\pi}{B} \right)^4 \right) W_n(x) = 0$$

$$a_n^2 = - \left(2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 - \frac{\sigma_x t}{D} \right) l^2$$

$$b_n^4 = \left(\frac{\mu \omega^2 - k}{D} - \left(\frac{n\pi}{B} \right)^4 \right) l^4$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

PLA 10



$$\Delta \Delta W + \frac{G_z t}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0$$

$$W(x, y) = \sum_n W_n(x) \sin \frac{n\pi}{B} z$$

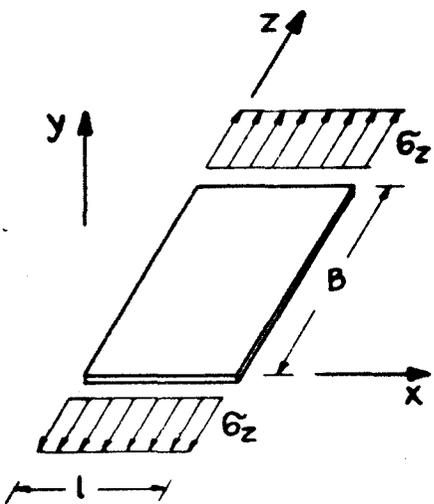
$$W_n''(x) - 2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 W_n'(x) - \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 \left(\frac{G_z t}{D} - \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 \right) W_n(x) = 0$$

$$a_n^2 = -2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 l^2$$

$$b_n^4 = \left(\frac{G_z t}{D} \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{B} \right)^4 \right) l^4$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

PLA 11



$$\Delta \Delta W - \frac{G_z t}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0$$

$$W(x, y) = \sum_n W_n(x) \sin \frac{n\pi}{B} z$$

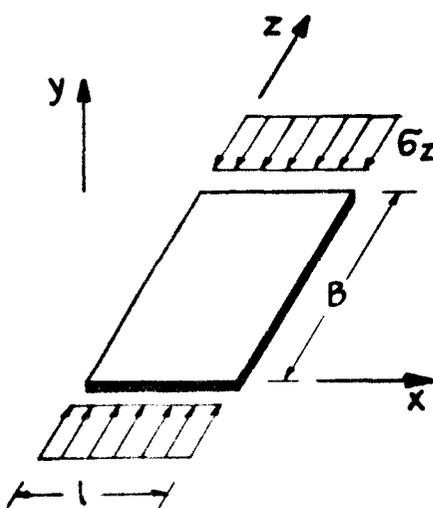
$$W_n''(x) - 2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 W_n'(x) + \left(\frac{G_z t}{D} \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 \right) W_n(x) = 0$$

$$a_n^2 = -2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 l^2$$

$$b_n^4 = - \left(\frac{G_z t}{D} \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{B} \right)^4 \right) l^4$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

PLA 12



$$\Delta \Delta W + \frac{G_z t}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\mu \omega^2}{D} W = 0$$

$$W(x, y) = \sum_n W_n(x) \sin \frac{n\pi}{B} z$$

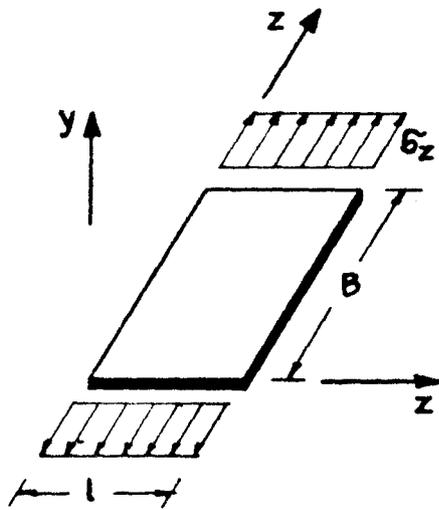
$$W_n''(x) - 2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 W_n'(x) - \left(\frac{G_z t}{D} \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 + \frac{\mu \omega^2}{D} - \left(\frac{n\pi}{B} \right)^4 \right) W_n(x) = 0$$

$$a_n^2 = -2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 l^2$$

$$b_n^4 = \left(\frac{G_z t}{D} \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 + \frac{\mu \omega^2}{D} - \left(\frac{n\pi}{B} \right)^4 \right) l^4$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

PLA 13



$$\Delta \Delta W + \frac{\sigma_z t}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{\mu \omega^2}{D} W = 0$$

$$W(x, y) = \sum W_n(x) \sin \frac{n\pi}{l} z$$

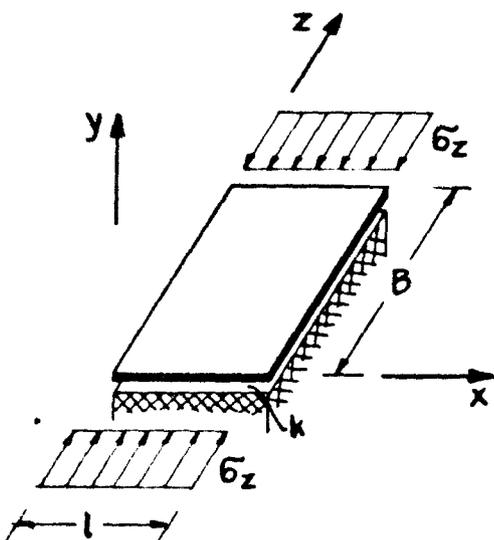
$$W_n''(x) - 2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 W_n'(x) + \left(\frac{\sigma_z t (n\pi)^2}{D (B)^2} - \frac{\mu \omega^2}{D} + \left(\frac{n\pi}{B} \right)^4 \right) W_n(x) = 0$$

$$a_n^2 = - 2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 l^2$$

$$b_n^4 = - \left(\frac{\sigma_z t (n\pi)^2}{D (B)^2} - \frac{\mu \omega^2}{D} \right) l^4$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

PLA 14



$$\Delta \Delta W + \frac{\sigma_z t}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{\mu \omega^2 - k}{D} W = 0$$

$$W(x, y) = \sum W_n(x) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

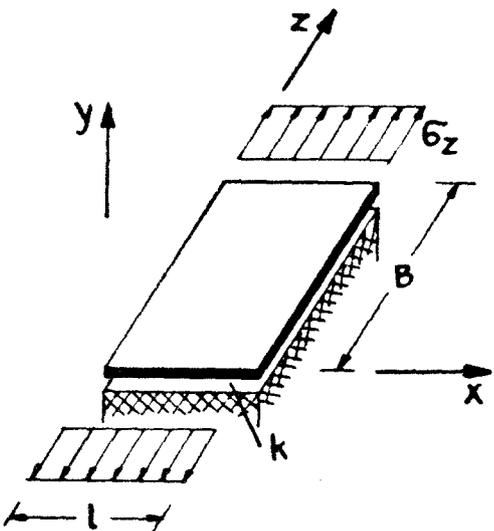
$$W_n''(x) - 2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 W_n'(x) - \left(\frac{\sigma_z t (n\pi)^2}{D (B)^2} + \frac{\mu \omega^2 - k}{D} - \left(\frac{n\pi}{B} \right)^4 \right) W_n(x) = 0$$

$$a_n^2 = - 2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 l^2$$

$$b_n^4 = + \left(\frac{\sigma_z t (n\pi)^2}{D (B)^2} + \frac{\mu \omega^2 - k}{D} \left(\frac{n\pi}{B} \right) \right) l^4$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

PLA 15



$$\Delta \Delta W - \frac{\sigma_z t}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\mu \omega^2 - k}{D} W = 0$$

$$W(x, y) = \sum W_n(x) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

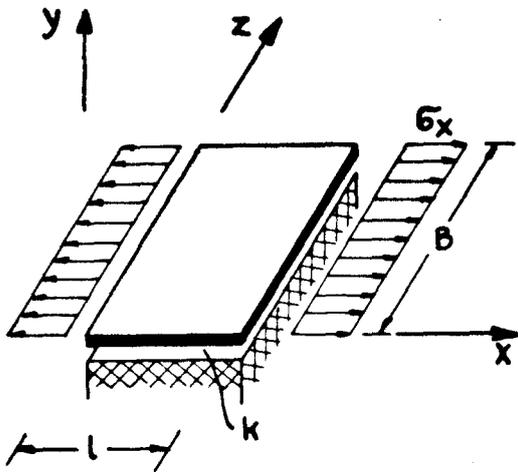
$$W_n''(x) - 2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 W_n'(x) + \left(\frac{\sigma_z t (n\pi)^2}{D (B)^2} - \frac{\mu \omega^2 - k}{D} + \left(\frac{n\pi}{B} \right)^4 \right) W_n(x) = 0$$

$$a_n^2 = - 2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 l^2$$

$$b_n^4 = - \left(\frac{\sigma_z t (n\pi)^2}{D (B)^2} - \frac{\mu \omega^2 - k}{D} + \left(\frac{n\pi}{B} \right)^4 \right) l^4$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

PLA 16



$$\Delta \Delta W - \frac{\sigma_x t}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\mu \omega^2 - k}{D} W = 0$$

$$W(x, y) = \sum_n W_n(x) \sin \frac{n\pi}{B} z$$

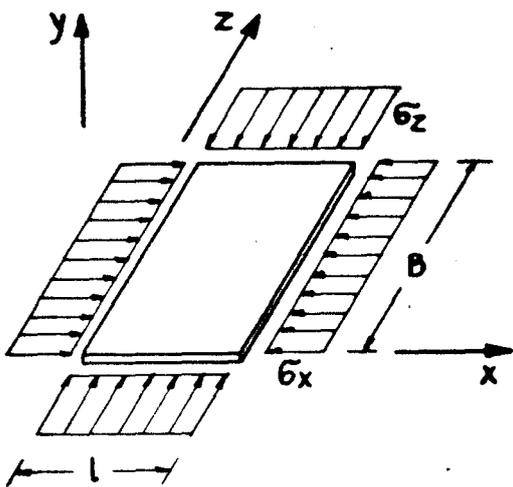
$$W_n''(x) - \left(2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 + \frac{\sigma_x t}{D} \right) W_n'(x) - \left(\frac{\mu \omega^2 - k}{D} - \left(\frac{n\pi}{B} \right)^4 \right) W_n(x) = 0$$

$$a_n^2 = - \left(2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 + \frac{\sigma_x t}{D} \right) l^2$$

$$b_n^4 = \left(\frac{\mu \omega^2 - k}{D} - \left(\frac{n\pi}{B} \right)^4 \right) l^4$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

PLA 17



$$\Delta \Delta W + \frac{\sigma_x t}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\sigma_z t}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0$$

$$W(x, y) = \sum_n W_n(x) \sin \frac{n\pi}{B} z$$

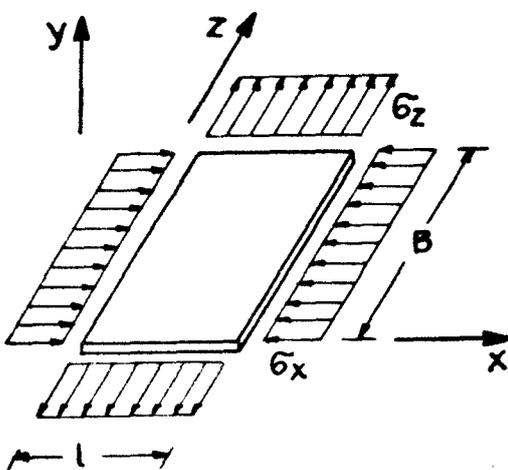
$$W_n''(x) - \left(2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 - \frac{\sigma_x t}{D} \right) W_n'(x) - \left(\frac{\sigma_z t}{D} \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{B} \right)^4 \right) W_n(x) = 0$$

$$a_n^2 = - \left(2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 - \frac{\sigma_x t}{D} \right) l^2$$

$$b_n^4 = \left(\frac{\sigma_z t}{D} \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{B} \right)^4 \right) l^4$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

PLA 18



$$\Delta \Delta W + \frac{\sigma_x t}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\sigma_z t}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0$$

$$W(x, y) = \sum_n W_n(x) \sin \frac{n\pi}{B} z$$

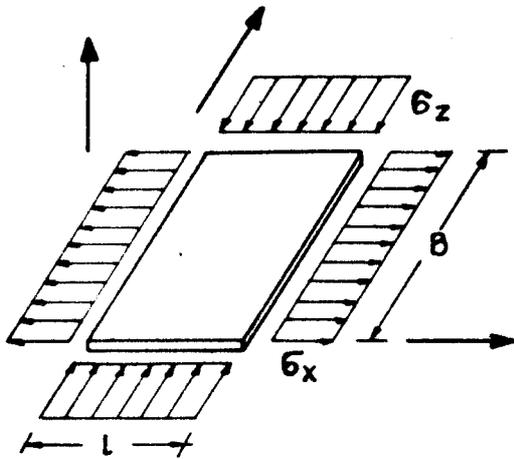
$$W_n''(x) - \left(2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 - \frac{\sigma_x t}{D} \right) W_n'(x) + \left(\frac{\sigma_z t}{D} \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{B} \right)^4 \right) W_n(x) = 0$$

$$a_n^2 = - \left(2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 - \frac{\sigma_x t}{D} \right) l^2$$

$$b_n^4 = - \left(\frac{\sigma_z t}{D} \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{B} \right)^4 \right) l^4$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

PLA 19



$$\Delta \Delta W - \frac{\sigma_{xt}}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\sigma_{zt}}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0$$

$$W(x, y) = \sum_n W_n(x) \sin \frac{n\pi}{B} z$$

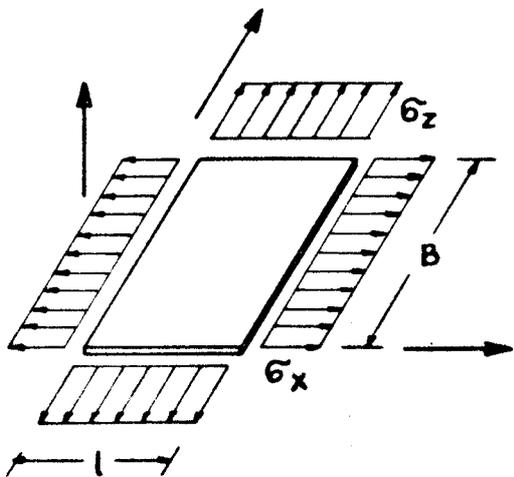
$$W_n''(x) - \left(2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 + \frac{\sigma_{xt}}{D} \right) W_n'(x) - \left(\frac{\sigma_{zt}}{D} \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{B} \right)^4 \right) W_n(x) = 0$$

$$a_n^2 = - \left(2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 + \frac{\sigma_{xt}}{D} \right) l^2$$

$$b_n^4 = \left(\frac{\sigma_{zt}}{D} \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{B} \right)^4 \right) l^4$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

PLA 20



$$\Delta \Delta W - \frac{\sigma_{xt}}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\sigma_{zt}}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0$$

$$W(x, y) = \sum_n W_n(x) \sin \frac{n\pi}{B} z$$

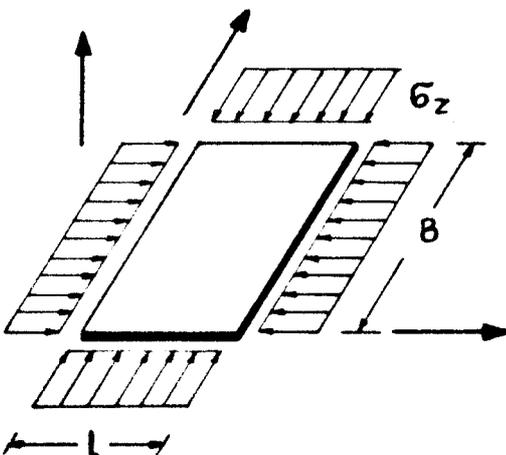
$$W_n''(x) - \left(2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 + \frac{\sigma_{xt}}{D} \right) W_n'(x) + \left(\frac{\sigma_{zt}}{D} \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{B} \right)^4 \right) W_n(x) = 0$$

$$a_n^2 = - \left(2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 + \frac{\sigma_{xt}}{D} \right) l^2$$

$$b_n^4 = \left(\frac{\sigma_{zt}}{D} \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{B} \right)^4 \right) l^4$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

PLA 21



$$\Delta \Delta W + \frac{\sigma_{xt}}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\sigma_{zt}}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{\mu \omega^2}{D} W = 0$$

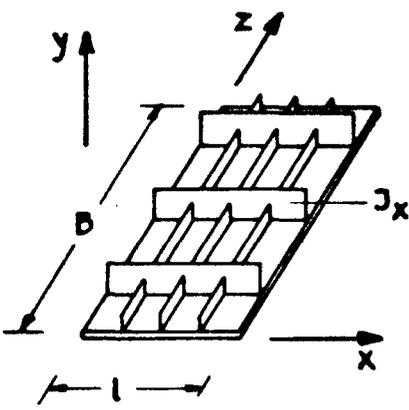
$$W_n''(x) - \left(2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 - \frac{\sigma_{xt}}{D} \right) W_n'(x) - \left(\frac{\sigma_{zt}}{D} \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 + \frac{\mu \omega^2}{D} - \left(\frac{n\pi}{B} \right)^4 \right) W_n(x) = 0$$

$$a_n^2 = - \left(2 \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 - \frac{\sigma_{xt}}{D} \right) l^2$$

$$b_n^4 = \left(\frac{\sigma_{zt}}{D} \left(\frac{n\pi}{B} \right)^2 + \frac{\mu \omega^2}{D} - \left(\frac{n\pi}{B} \right)^4 \right) l^4$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

PLA 22



$$N_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 N_{xz} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial z^2} + N_y \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} = 0$$

$$W(x,y) = \sum_n W_n(x) \sin \frac{n\pi}{B} z$$

$$W_n''(x) - 2 \left(\frac{n\pi}{B}\right)^2 \frac{N_{xz}}{N_x} W_n'(x) + \left(\frac{n\pi}{B}\right)^4 \frac{N_z}{N_y} W_n = 0$$

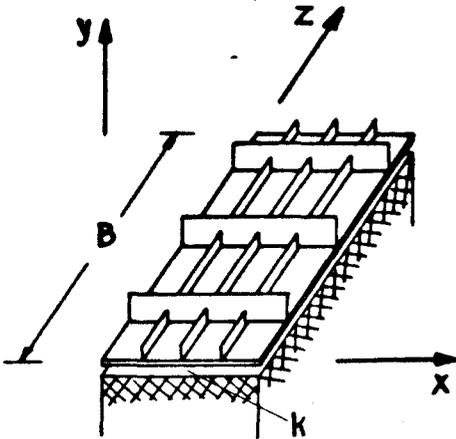
$$a^2 = -2 \left(\frac{n\pi}{B}\right)^2 \frac{N_{xz}}{N_x} l^2 ; b^4 = -\left(\frac{n\pi}{B}\right)^4 \frac{N_z}{N_y} l^4$$

$$N_x = \frac{E J_x}{1 - \nu_x \nu_z} ; N_z = \frac{E J_z}{1 - \nu_x \nu_z} ; 2 N_{xz} = N_x \nu_z + N_z \nu_x + 4 C$$

2C = Drillsteifigkeit

D = N_x

PLA 23



$$N_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 N_{xz} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + N_y \frac{\partial^4 w}{\partial z^2} + k w = 0$$

$$W(x,y) = \sum_n W_n(x) \sin \frac{n\pi}{B} z$$

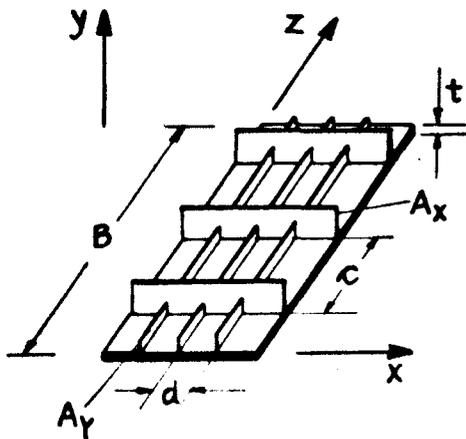
$$W_n''(x) - 2 \left(\frac{n\pi}{B}\right)^2 \frac{N_{xz}}{N_x} W_n'(x) + \left(\left(\frac{n\pi}{B}\right)^4 + k\right) \frac{N_y}{N_x} W_n(x) = 0$$

$$a^2 = -2 \left(\frac{n\pi}{B}\right)^2 \frac{N_{xz}}{N_x} l^2$$

$$b^4 = -\left(\left(\frac{n\pi}{B}\right)^4 + k\right) \frac{N_y}{N_x} l^4$$

$$D = N_x$$

PLA 24



$$N_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 N_{xz} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + N_y \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} - \mu \omega^2 w = 0$$

$$W(x,y) = \sum_n W_n(x) \sin \frac{n\pi}{B} z$$

$$W_n''(x) - 2 \left(\frac{n\pi}{B}\right)^2 \frac{N_{xz}}{N_x} W_n'(x) + \left(\left(\frac{n\pi}{B}\right)^4 - \mu \omega^2\right) \frac{N_y}{N_x} W_n(x) = 0$$

$$a^2 = -2 \left(\frac{n\pi}{B}\right)^2 \frac{N_{xz}}{N_x} l^2$$

$$b^4 = -\left(\left(\frac{n\pi}{B}\right)^4 - \mu \omega^2\right) \frac{N_y}{N_x} l^4$$

$$\mu = \rho \left(t + \frac{A_x}{c} + \frac{A_y}{d}\right)$$

A_x A_y Querschnitte ohne Platte

Literaturverzeichnis

- /1/ Cheung, Y.K.:
Finite Strip Method Analysis of Elastic Slabs
Journal of the Engineering Mechanics Division
Proceedings of the American Society of Civil
Engineers (ASCE) Proc.Pap. No. 6267 Dez. 68
- /2/ Cheung, X.K.:
Folded Plate Structures by Finite Strip Method
ASCE Proc.Pap. No. 6985, Dez. 1969
- /3/ Cheung, Y.K.; Cheung, M.S.:
Flexural Vibrations of Rectangular and other
Polygonal Plates ASCE Proc. Pap. No. 8038 April 71
- /4/ Yoshida, K.; Oka, N.:
Bending Analysis of Plate Structures
by Strip Elements (in japanisch)
Journal of the Society of Naval Architects
of Japan, 1972 H. 12, S. 289-298
- /5/ Yoshida, K.:
Buckling Analysis of Plate Structures by
the Strip Elements
Journal of the Society of Naval Architects
of Japan, 1971, S. 161-171
Deutsche Übersetzung T/B Hannover 800/4706
- /6/ Przemienicki, I.S.:
Finite Element Structural Analysis
of Lokal Instability
AIAA Journal Jan. 1973

- /7/ Barsoum R.S.; Gallagher, R.H.:
Finite Element Analysis of Torsion and
Torsion-Flexural Stability Problems
Internal Journal for Numerical Methods in
Engineering
Vol. 2 1970, Page 335-352
- /8/ Argyris, I.H.; RadaJ, D.:
Steifigkeitsmatrizen dünnwandiger Stäbe
und Stabsysteme
Ing.-Archiv 1971, S. 198-210
- /9/ Barsoum, R.Y.:
Finite Element Method applied to the Problem
of Stability of a nonconservative System
Internal Journal of Numerical Methods of
Engineering
Vol. 3 1971, Vol. 3 page 63-87
- /10/ Chang, A.:
Über die Stabilität elastisch gestützter
Träger unter nichtkonservativer Belastung
Stahlbau 10/1968, S. 308-314
- /11/ Kawai, T.:
The Application of Finite Element
Methods to Ship Structures
Computer & Structures, Vol. 3, page 1175-1194

- /12/ Walz, I.E.; Fulton, R.E.; Cyrus, N.J.; Eppink, R.T.:
Accuracy of Finite Element Approximations
to Structural Problems
Nasa Technical Note, NASA TN D-5728
- /13/ Ghali, A.; Tadros G.S.:
On Finite Analysis of Continuous Plates
Abhandlungen der Internationalen Vereinigung
für Brückenbau und Hochbau 1974, 34-1
- /14/ Lehmann, E.:
Berücksichtigung nichtlinearer Effekte unter
Verwendung linearelastischer Finite-Element-
Rechenprogramme
Finite-Element-Congress, 11/1972, Baden-Baden
- /15/ Klöppel, K.; Lie, K.:
Das hinreichende Kriterium für den Verzwei-
gungspunkt des elastischen Gleichgewichts
Der Stahlbau 1943, S. 17
- /16/ Cornelius, W.:
Der elastisch gebettete Druckstab als
Spannungsproblem
Der Stahlbau 1944, S. 91
- /17/ Filonenko-Boroditsch, M.M.:
Festigkeitslehre, Band II, Kap. 1.1
VEB Verlag Technik, 2. Auflage, Berlin 1954

- /18/ Yang, T.Y.:
Matrix Displacement Solution to Elastic
Problems of Beams and Frames
Int. J. Solids Structures, 1973, S. 829
- /19/ Fricke, W.:
Diplomarbeit am Lehrstuhl für Konstruktion
und Statik der Schiffe (Prof. Petershagen)
Institut für Schiffbau, 1974
- /20/ Pflüger, A.:
Stabilitätsprobleme der Elastostatik
Springer Verlag 1964
- /21/ Lehmann, E.:
Rechnung und Messungen an einem Wing-
tankmodell
IfS-Schrift 1970
- /22/ Sandorff, P.E.:
Bending Rigidity and Column Strength of
Thin Sections
ASME-Transactions 1947, Nov.
- /23/ Buck, K.E.: Rotationskörper unter belie-
biger Belastung
in Finite Elemente in der Statik
Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1973

- /24/ Waller, H.; Krings, W.:
Matrizenmethoden in der Maschinen-
und Bauwerksdynamik
BI-Wissenschaftsverlag 1974
- /25/ Hütte I.
Verlag Wilhelm & Sohn
28. Auflage, Berlin 1955
- /26/ Bisshopp, K.E.; Drucker, D.C.:
Large Deflection of Cantilever Beams
Quarterly Applied Mathematics, Vol.
III (1945), No. 3, S. 272
- /27/ Scordelis, M:
Matrix Formulation of Folded Plates
Equations
ASCE Transactions, Paper No. 3209
- /28/ Smith, C.S.:
Buckling Problems in the Design of Fiberglass-
Reinforced Plastic Ships
Journal of Ship Research 1972, S. 174
- /29/ Smith, C.S.:
Buckling and Vibration of a Ship's
Vee-Bottom Structure
RINA 1973, Seite 261

- /30/ Smith, C.S.:
Bending, Buckling and Vibration of
Orthotropic Plate-Beam Structures
Journal of Ship Research, Dec. 1968
- /31/ Glück, J.; Gellert, M.:
Generalization of the Finite Strip
Method for Solid Continua
Abhandlungen der Internationalen Verei-
nigung für Brückenbau und Hochbau 1974, 34-1
- /32/ Plank, R.J.; Wittrick, W.H.:
Buckling under Combined Loading of thin,
Flat-walled Structures by a Complex Finite Strips
Method
International Journal for Numerical Methods in
Engineering, Vol. 8, S. 323
- /33/ Suhara, J.; Fukuchi, N.:
Finite Element Analysis with improved
Accuracy for Rectangular Plate Bending
Element
Report of Research Institut for Applied Mechanics
Vol. XX, No. 66, 1973
- /34/ Shimizu, S.:
On the Dynamical Stress Distribution of Stiffened
Plate During Vibration/Report of Research
Institut for Applied Mechanics, Vol. XVI, No. 54, 1968

- /35/ Shimizu, S.; Sato, M:
The Dynamical Stress Distributions
of Stiffened Plate Containing Web
Frames during Vibration
Report of Research Institut for Applied
Mechanics, Vol. XIX, 1971
- /36/ Shimizu, S.:
Analysis of the Stiffened Plate Containing
Web Frames
Report of Research Institut for Applied
Mechanics Vol. XV, 1967
- /37/ Schardt, R.:
Eine Erweiterung der technischen Biegelehre
für die Berechnung biegesteifer prismati-
scher Faltwerke
Stahlbau 1966, S. 161
- /38/ Schardt, R.; Steingäß, I.:
Eine Erweiterung der technischen Biegelehre
für die Berechnung dünnwandiger geschlosse-
ner Kreiszyinderschalen
Stahlbau 1970, S. 65
- /39/ Klöppel, K.; Schiedel, E.:
Beulwerte der dreiseitig gelenkig gelagerten,
am freien Rand versteiften Rechteckplatte
mit beliebig versteifter Randspannung
Stahlbau 1968, S. 372

- /40/ Kröger, H.:
Diplomarbeit am Lehrstuhl für Konstruktion
und Statik der Schiffe (Prof. Petershagen)
Institut für Schiffbau 1975
- /41/ Ghali, A.; Tadros, G.S.:
On Finite Strip Analysis for Continuous Plates
Abhandlung der Internationalen Vereinigung
für Brückenbau und Hochbau 1974
- /42/ Hauger, W.:
Die Knicklasten elastischer Stäbe unter
gleichmäßig verteilten und linear veränder-
ten tangentialen Druckkräften
Ing.-Arch. 1966, S. 221

Literatur zu den Elementen des Elementkatalogs

- /A1/ Timoshenko, S.; Woinowsky-Krieger, S.:
Theory of Plates and Shells
McGraw-Hill Book Comp. 1959
- /A2/ Timoshenko, S.; Gere, I.M.:
Theory of Elastic Stability
McGraw-Hill Book Comp. 1961
- /A3/ Ebner, H.; Schnell, W.:
Einbeulen von Kreiszylinderschalen mit
abgestufter Wandstärke unter Außendruck
2. Flugwiss. 9 (1951), Heft 6/7
- Resinger, F.; Gremer, R.:
Zum Beulverhalten von Kreiszylinderschalen
mit abgestufter Wanddicke unter Manteldruck
Der Stahlbau 6/1974
- /A4/ Schnell, W.; Czerwenka, G.:
Einführung in die Rechenmethoden
des Leichtbaus I/II
BI-Hochschultaschenbücher 124/125
- /A5/ Bürgermeister/Steup:
Stabilitätstheorie
Akademie-Verlag Berlin 1959

- /A6/ Schardt, R.; Okur, H.:
Hilfswerte für die Lösung der
Differentialgleichung usw.
Der Stahlbau 1/1971
- /A7/ Schulz, H.G.:
Zum Stabilitätsproblem elastisch einge-
spannter orthotroper Platten
Schiff & Hafen, 14. Jg., 1962, H. 6 u. 7
- /A8/ Pestel, E.; Leckie, F.A.:
Matrixmethods in Elastomechanics
McGraw-Hill Book Comp. 1963
- /A9/ Przemieniecki, I.S.:
Theory of Matrix Structural Analysis
McGraw-Hill Book Comp. 1968
- /A10/ Uhrig, R.:
Elastostatik und Elastokinetik in
Matrizenschreibweise
Springer Verlag 1973
- /A11/ Zienkiewicz, O.C.:
The Finite Element Method in Structural and
Continuum Mechanics
McGraw-Hill Book Comp., London 1972

/A12/ Vlasov, V. Z.:
Thin Walled Elastic Beams
Israel Program for Scientific Translations
Jerusalem 1961

/A13/ Girkmann, K.:
Flächentragwerke
Springer Verlag, Wien, 3. Auflage