Diskrete Mathematik

Karl-Heinz Zimmermann

Diskrete Mathematik

Books on Demand

Prof. Dr. Karl-Heinz Zimmermann
TU Hamburg-Harburg
21071 Hamburg
Germany

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet abrufbar über ⟨http://dnb.ddb.de⟩.

Herstellung und Verlag: Books on Demand GmbH, Norderstedt
Umschlaggestaltung: Wolfgang Brandt, TU Hamburg-Harburg
Gedruckt auf säure-, holz- und chlorfreiem Papier
Printed in Germany

ISBN 3-8334-5529-2

Für meinen Lehrer
Prof. Dr. Thomas Beth
16.11.1949 – 17.08.2005

Vorwort

Das Buch entstand aus einer viersemestrigen, jeweils zweistündigen Vorlesung über Diskrete Mathematik, die ich an der Technischen Universität Hamburg-Harburg für Studenden des Informatik-Ingenieurwesens in den letzten Jahren gehalten habe. Dieses Buch behandelt neben den Grundlagen der Diskreten Mathematik auch eine Reihe weiterführender Themen, deren Kenntnis heute von jedem Informatiker und Mathematiker erwartet wird. Es eignet sich für das Selbststudium und als Textbuch zum Gebrauch neben der Vorlesung.

Die Diskrete Mathematik ist die Mathematik der endlichen Mengen, besser gesagt, der endlichen Konfigurationen unter Nebenbedingungen. Dabei geht es u.a. um die Abzählung, Konstruktion und Existenz von Konfigurationen und das Rechnen mit Konfigurationen. Wichtige Teilgebiete der Diskreten Mathematik sind Kombinatorik, Graphentheorie, Verbandstheorie, Codierungstheorie, Kryptographie und kombinatorische Optimierung. Zudem stellt die Diskrete Mathematik Algorithmen und Datenstrukturen bereit und ist damit verknüpft mit der Theoretischen Informatik.

Im ersten Teil des Buches steht der Aufbau der modernen Mathematik im Vordergrund. Zunächst werden Grundbegriffe der mathematischen Logik und Mengenlehre darstellt, soweit sie als sprachliches Gerüst der modernen Mathematik dienen. Anschließend werden Relationen, insbesondere Abbildungen, Äquivalenzen und Ordnungen, untersucht. Der erste Teil schließt mit dem Aufbau der natürlichen Zahlen sowie der Abzählbarkeit von Mengen.

Der zweite Teil führt in die elementare Kombinatorik ein. Zuerst werden Zählprinzipien vorgestellt, die grundlegend für den Aufbau der Kombinatorik sind. Danach wird die Abzählungstheorie der klassischen Abbildungstypen mit Nebenbedingungen entwickelt.

Im dritten Teil werden die klassischen euklidischen Ringe, der Ring der ganzen Zahlen und die Polynomringe, sowie die Restklassenringe modulo n untersucht. Die multiplikative Struktur dieser Ringe wird eingehender beleuchtet.

Im vierten Teil werden zuerst die grundlegenden Eigenschaften linearer Codes skizziert. Anschließend wird die Theorie der endlichen Körper entwickelt und wichtige Klassen linearer Codes vorgestellt.

Im fünften Teil wird die Verbandstheorie anhand der Ordnungstheorie aufgebaut. Als wichtiges Beispiel werden Begriffsverbände umfänglicher behandelt. Danach werden boolesche Verbände dargestellt und eine wichtige Klasse boolescher Verbände, Schaltalgebren, untersucht, mit deren Hilfe kombinatorische Schaltkreise beschrieben werden.

Der sechste Teil beginnt mit einer Einführung in die Graphentheorie. Dann werden grundlegende Algorithmen für Netzwerke präsentiert und Methoden vorgestellt, um komplexe Optimierungsprobleme näherungsweise zu lösen. Schließlich werden die Grundlagen der linearen Optimierung behandelt. Insbesondere wird gezeigt, dass die adressierten Netzwerk-Probleme durch lineare Programme gelöst werden können.

Im letzten Teil wird die kombinatorische Abzählungstheorie nach Pólya entwickelt und das Schubfachprinzip zur Ramsey-Theorie erweitert. Letztere gehört zu den wichtigsten Werkzeugen der existenziellen Kombinatorik.

Jedes Kapitel schließt mit einem anwendungszogenen Beispiel und einer Reihe von Selbsttestaufgaben. Lösungshinweise zu diesen Aufgaben findet der interessierte Leser auf meiner Homepage.

Das vorliegende Buch kann als Textbuch für Vorlesungen über Diskrete Mathematik dienen. Die folgende Tabelle liefert eine mögliche Zuordnung zwischen Vorlesungen und Kapiteln des Buches:

Vorlesung (zweistündig)	Kapitel
Diskrete Mathematik I	1 bis 11
Diskrete Mathematik II	12 bis 15 (teilweise 15.4), 19 bis 21
Diskrete Mathematik III	22 bis 24, 26
Diskrete Mathematik IV	15.4, 16 bis 18, 25

Danken möchte ich Dr. Prashant Batra, Stefan Goltz, Dr. Andreas Popp, Markus Volkmer und Dr. Otto Wohlmuth, die teils frühere Versionen des Manuskripts durchgesehen haben. Mein Dank gilt auch den Hörern meiner Vorlesungen, die durch ihr großes Interesse und ihre hilfreichen Kommentare an der Entstehung dieses Buches mitgewirkt haben. Danken möchte ich auch Wolfgang Brandt für die Gestaltung der Umschlagseite. Schließlich möchte ich dem Verlag *Books on Demand* meinen Dank für die gute Zusammenarbeit aussprechen.

Hamburg, im Juli 2006 *Karl-Heinz Zimmermann*

Mathematische Notation

$\underline{n}$	$\{1, \ldots, n\}$
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$	Menge der natürlichen Zahlen inklusive 0
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Z}_n$	Menge der Restklassen modulo n
$\mathbb{Z}_n^*$	Menge der Einheiten in $\mathbb{Z}_n$
$\mathbb{Q}$	Menge der rationen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}_0^+$	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
$\emptyset$	leere Menge
$P(A)$	Potenzmenge von A
$\lvert A \rvert$	Mächtigkeit von A
$\lfloor x \rfloor$	größte ganze Zahl kleiner gleich x
$\lceil x \rceil$	kleinste ganze Zahl größer gleich x

Inhaltsverzeichnis

Teil III Arithmetik

Teil IV Codes