670 | Oktober 2013

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Jochen Hundemer

Entwicklung eines Verfahrens zur Berechnung der instationären potenzialtheoretischen Propellerumströmung

TUHH
Technische Universität Hamburg-Harburg

Entwicklung eines Verfahrens zur Berechnung der instationären potenzialtheoretischen Propellerumströmung

Vom Promotionsausschuss der
Technischen Universität Hamburg-Harburg
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)
genehmigte Dissertation

von

Jochen Hundemer
aus Trier

2013

1. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Moustafa Abdel-Maksoud
2. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Stefan Krüger

Tag der mündlichen Prüfung: 8. August 2013

Bericht Nr. 670 der Schriftenreihe Schiffbau der
Technischen Universität Hamburg-Harburg
Schwarzenbergstraße 95c
D-21073 Hamburg
ISBN 978-3-89220-670-5

Kurzfassung

In der vorliegenden Arbeit werden instationäre Fluid-Struktur-Wechselwirkungen und Wirbelkavitationseffekte an Schiffspropellern potenzialtheoretisch untersucht. Zu diesem Zweck wurde ein Paneelverfahren erstellt, mit dessen Hilfe die instationäre Propellerumströmung im inhomogenen Schiffsnachstromfeld berechnet werden kann.

Im Schiffsbetrieb ist Kavitation auf Grund der damit verbundenen Schädigungsgefahr des Propellers und der Geräuschentwicklung zu vermeiden oder nur in engen Grenzen zulässig. Daher stellt die Bewertung der Kavitationseigenschaften eines Propellers einen wesentlichen Aspekt bei der Auslegung von Propellern dar. Während für die Entstehung von Schichtkavitation zuverlässige Prognoseverfahren existieren, müssen für die Auslegung hinsichtlich Wirbelkavitation empirische Abschätzungen oder Modellversuche herangezogen werden. Um den Wirbelkavitationseinsatz von Propellern zu bestimmen, wurde ein Modell entwickelt, das neben der Stärke die viskosen Eigenschaften des Spitzenwirbels auf Basis der Potenzialströmung ermittelt und daraus die Druckverteilung im Wirbel ableitet. Aus der Druckverteilung resultiert der Einsatzpunkt der Wirbelkavitation am Propeller. Aus dem Vergleich mit Messungen in homogener und inhomogener Strömung zeigt sich, dass das Verfahren geeignet ist bestimmte Eigenschaften der zu erwartenden Wirbelkavitation zu erfassen.

Ein zweiter Schwerpunkt der Arbeit ist die Untersuchung von Fluid-Struktur-Wechselwirkungen. Hierzu wird das Verfahren mit einem Finite-Elemente-Verfahren gekoppelt und die hydroelastischen Eigenschaften eines Propellers ermittelt. Zunächst werden verschiedene Kopplungseinstellungen analysiert, bevor stationäre und instationäre Wechselwirkungen zwischen Strömungs- und Strukturverhalten untersucht werden. So wird mit Hilfe des Verfahrens ermittelt welche Frequenzen in den Geschwindigkeitsschwankungen der ungleichförmigen Propellerzuströmung die Struktur zum Schwingen anregen und wie die Schwingungen durch das umgebende Fluid beeinflusst werden.

Die für diese speziellen Lösungsansätze benötigten und implementierten potenzialtheoretischen Methoden werden zunächst zusammengefasst, weiterhin wird detailliert auf deren mathematische Formulierung und Implementierung eingegangen. Anschließend erfolgt neben einer Gitterstudie eine umfangreiche Validierung des Verfahrens. Das Verfahren wurde so angelegt, dass es nicht nur auf die Berechnung von Propellerströmungen zugeschnitten ist. Vielmehr wurde bei der Implementierung darauf geachtet, dass keine besonderen Einschränkungen bei der Übertragung auf ähnliche potenzialtheoretisch untersuchbare Anwendungen bestehen. Durch eine allgemeingültige Formulierung können unstrukturierte Netze für beliebige Geometrien verwendet werden, deren potenzialtheoretischen Eigenschaften über Randbedingungen und eine aufgeprägte Körpergeschwindigkeit definiert werden. Ziel der Entwicklung war auch, ein modulares Verfahren zu gestalten, das leicht für andere schiffstechnische Anwendungsfälle erweitert werden kann.

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Abdel-Maksoud für die stets anregende wissenschaftliche Betreuung der Arbeit. Weiterhin möchte Herrn Prof. Dr.-Ing. Krüger für die Begutachtung sowie Herrn Prof. Dr.-Ing. Fricke für die Übernahme des Vorsitz der Prüfungskommission danken. Die Arbeit, die im Rahmen meiner Arbeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Universität Duisburg-Essen und an der Technischen Universität Hamburg Harburg entstand, wäre ohne die Unterstützung durch die Werft HDW nicht möglich gewesen. Hiermit möchte ich mich für die Unterstützung, das entgegen gebrachte Vertrauen sowie für den offenen und konstruktiven Austauch bedanken.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **8**

1.1 Motivation und Zielsetzung 8
1.2 Kapitelübersicht 9
1.3 Potenzialtheoretische Methoden für die Berechnung von Propellerumströmungen . 10
1.3.1 Entwicklung potenzialtheoretischer Methoden 11
1.3.2 Einsatzgebiete und praktische Anwendungen 13

2 Mathematischer Hintergrund **16**

2.1 Grundlagen 16
2.1.1 Beschreibung des Strömungsfeldes 16
2.1.2 Elementarlösungen der Laplace-Gleichung 17
2.1.3 Randbedingungen im Strömungsgebiet 20
2.1.4 Instationäre Strömungen im Zeitbereich 26
2.2 Numerische Bestimmung und Auswertung des Strömungspotenzials 27
2.2.1 Direkte Formulierung 28
2.2.2 Indirekte Formulierung 29
2.2.3 Bestimmung der freien Wirbel 32
2.2.4 3D-Kutta-Bedingung 36
2.2.5 Koordinatensysteme 40
2.2.6 Geschwindigkeiten auf der Körperoberfläche 41
2.2.7 Druckkräfte 44
2.2.8 Reibungskräfte 45
2.2.9 Bewegungsmodelle 46
2.2.10 Lösung des linearen Gleichungssystems 47
2.2.11 Periodische und spiegelnde Randbedingungen 48
2.2.12 Berücksichtigung von Nachstromfeldern 51
2.2.13 Behandlung effektiver Nachstromfelder 52

3 Verifizierung und Validierung **55**

3.1 Gitternetzstudie 55
3.2 Stationäre Strömungen 57
3.2.1 Propellerserie: Wageningen B-Serie 57
3.3 Instationäre Strömungen 60
3.3.1 Beschleunigte Kugel 63
3.3.2 Oszillierender Flügel 64
3.3.3 Berücksichtigung von Nachstromfeldern 67

4 Kavitationsmodellierung **69**

4.1 Mathematische Modellierung 69
4.1.1 Schichtkavitation 69
4.1.2 Modellierung der Spitzenwirbelkavitation 70
4.2 Anwendungsbeispiele 80

4.2.1 Elliptischer Tragflügel . . . 80
4.2.2 Berücksichtigung des Nachstromfeldes . . . 82
4.2.3 Vergleich zweier Propeller . . . 84
4.3 Bewertung der Kavitationsergebnisse . . . 85

5 Fluid–Struktur–Kopplung 86
5.1 Grundlagen der Fluid-Struktur-Interaktion . . . 86
5.1.1 Kopplungsverfahren . . . 86
5.2 Implementiertes Verfahren . . . 88
5.2.1 Stukturdynamik . . . 88
5.2.2 Erweiterungen im Potenzialverfahren . . . 89
5.3 Berechnungsablauf . . . 89
5.4 Anwendungsbeispiel . . . 90
5.5 Ergebnisse der Propellerumströmung . . . 93
5.5.1 Modellierung der Propellerströmung . . . 94
5.5.2 Konvergenzuntersuchung der Fluid-Struktur-Interaktion . . . 95
5.5.3 Eigenschaften des hydroelastischen Propellers . . . 98
5.6 Bewertung der Kopplungsergebnisse . . . 104

6 Zusammenfassung 105
6.1 Potenzialtheoretische Methoden . . . 105
6.2 Wirbelkavitation . . . 107
6.3 Fluid-Struktur-Interaktion . . . 108

7 Nomenklatur 112
7.1 Nomenklatur . . . 112
7.1.1 Operatoren, Potenzialfunktionen und Konventionen zur Beschreibung von Variablen . . . 112
7.1.2 Stoffgrößen . . . 112
7.1.3 Geometrische und strömungstechnische Größen . . . 112
7.1.4 Zähler und Indizes . . . 113

Abbildungsverzeichnis 114

Literaturverzeichnis 116

Einleitung

1.1 Motivation und Zielsetzung

Die Entwicklung numerischer potenzialtheoretischer Methoden zur Berechnung strömungstechnischer Fragestellungen geht mit dem Einzug von Computern in die Wissenschaft und später auch in die industrielle Nutzung einher. Obwohl inzwischen mehrheitlich Verfahren, die auf der Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen beruhen, in den Fokus der wissenschaftlichen Entwicklung gerückt sind und sich in der ingenieurtechnischen Praxis etabliert haben, sind die klassischen potenzialtheoretischen Methoden vielfach immernoch unverzichtbar bei der Entwicklung von Produkten. Der Grund für den Fortbestand dieser Verfahren ist der vergleichsweise geringe Vorbereitungs- und Berechnungsaufwand, der sie effizient und damit auch attraktiv macht.

In der etwa 50-jährigen Geschichte der potenzialtheoretischen Methoden sind eine ganze Reihe meist hoch spezialisierte Anwendungen entstanden, die auf bestimmte Anwendungsfälle zugeschnitten sind und auch nur für diese geeignet sind. Den Gegenentwurf zu diesen spezialisierten Verfahren bilden die aktuellen CFD-Verfahren, wie beispielsweise RANSE, LES und andere Feldmethoden, die jeweils eine große Bandbreite an Anwendungen abdecken. Den Programmen ist gemein, dass die Erstellung von Rechengittern und auch die Definition von Randbedingungen allgemeingültig und damit unabhängig von dem zu lösenden Strömungsproblem definiert werden, was eine enorme Flexibilität in der Anwendbarkeit ermöglicht. Mit ein Grund für die enge Verzahnung von Lösungsverfahren und Problemstellung in den potenzialtheoretischen Methoden mag auch in der Programmiertechnik der 90 er Jahren liegen, während derer diese Programme entwickelt wurden. Es war daher während der Erstellung ein Ziel dieser Arbeit die enge Verzahnung aufzuheben und mit Hilfe deutlich verallgemeinerter Methoden ein potenzialtheoretisches Verfahren zu erstellen, das einen großen Anwendungsbereich erschließt. Für diese Verallgemeinerung kommen moderne, objektorientierte Sprachen zum Einsatz, so dass eine hohe Wiederverwendbarkeit der implementierten Methoden erreicht werden kann. Dieses in der wissenschaftlichen Betrachtung zunächst nebensächliche Ziel wird interessant, wenn man die heutigen Nutzungsmöglichkeiten potenzialtheoretischer Methoden betrachtet. Durch die geringen Rechenzeiten und die gleichzeitig weiter steigenden Rechenkapzitäten bietet es sich an im frühen Entwurfsstadium einer Anlage umfangreichere und detailliertere Studien durchzuführen. Aufgrund der immer genaueren Maßschneiderung von technischen Anlagen sind flexible Entwurfswerkzeuge wichtig. Daher war es ein Ziel bei der Entwicklung des Verfahrens auf Flexibilität und Modularität in der Anwendbarkeit zu achten und eine Art Plattform für weitere Entwicklungen zu schaffen.

Da solche Plattformen für die potenzialtheoretische Strömungsberechnung nicht verfügbar sind, besteht ein erheblicher Teil der hier dokumentierten Arbeit in der Entwicklung eines Paneelverfahrens für die Berechnung der instationären Propellerumströmung. In diesem Verfahren sind zunächst die dem Stand der Technik entsprechenden Methoden zu implementieren und die erzielten Ergebnisse zu bewerten, bevor die eigentlichen wissenschaftlichen Ziele verfolgt werden können.

Propeller sind, wie die Schiffe, für die sie entworfen werden, meist prototypische Anlagen, und müssen individuell ausgelegt werden. Der Entwurf kann als Optimierungsaufgabe mit mehreren Nebenbedingungen aufgefasst werden, wodurch die Auslegung oftmals rechenintensiv wird. In der Regel stehen neben dem primären Entwurfsziel, dem Erreichen des vorgegebenen Schubs

bei gegebener Schiffsgeschwindigkeit, mehrere weitere Ziele im Mittelpunkt der Auslegung, von denen nun ein paar genannt werden sollen: Der Wirkungsgrad der Anlage ist zu maximieren, Kaviation ist so gering wie möglich zu halten, Druckimpulse auf die Schiffsaußenhaut sollen vermieden werden und auch Schub- und Drehmomentschwankungen infolge der inhomogenen Zuströmung sind im Betrieb unerwünscht. Einige der genannten Effekte haben ähnliche Ursachen und wechelwirken miteinander. Insbesondere die Kavitationseigenschaften haben starken Einfluss auf die Güte des Propellerentwurfs, wobei hier mitunter weiterhin Forschungsbedarf besteht. Zwar sind einige Verfahren entwickelt worden, die sich für die Berechnung von Schichtkavitation eignen, es bestehen jedoch kaum Ansätze, um die Spitzenwirbelkavitation eines Propellers rechnerisch zu bewerten. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit ein Ansatz entwickelt, mit dessen Hilfe der Einsatz von Wirbelkavitation prognostiziert werden soll. Dafür sind zunächst die physikalischen Zusammenhänge zusammenzutragen, um daraus ein Modell abzuleiten. Insbesondere sind von dem Modell die bei der Wirbelkavitation stark ausgeprägten Maßstabseffekte zu beachten.

Von diesem Thema unabhängig ist ein weiterer Effekt, der in dieser Arbeit näher betrachtet werden soll. Wie alle belasteten Körper ist auch der Propeller ein elastisches Bauteil. Somit resultiert aus der Belastung des Bauteils auch immer eine Verformung, die eine Auswirkung auf die vom Propeller erzeugten Kräfte haben kann. Es wird eine Methode vorgestellt, mit der in einer instationären Berechnung die dynamische Verformung des Propellers ermittelt wird. Kernpunkt dieser Entwicklung ist die implizite Kopplung des potenzialtheoretischen Paneelverfahrens zur Berechnung der Hydrodynamik mit einem Finite-Elemente-Verfahren, das das Strukturverhalten unter der hydrodynamisch erzeugten Last bestimmt. Mit diesem Verfahren wird der Einfluss der Fluid-Struktur-Wechselwirkung auf die hydrodynamischen Eigenschaften analysiert. Zudem wird untersucht, welchen Einfluss dynamische Anregungen auf die elastische Struktur haben.

Die Wettbewerbsfähigkeit von Unternehmen hängt heutzutage auch davon ab, für die immer umfangreicher werdenden Anforderungen an technische Anlagen kurzfristig Lösungen anbieten zu können. Dafür ist es zum einen erforderlich über flexible Entwurfswerkzeuge zu verfügen und zum anderen physikalisch komplexe Zusammenhänge abbilden zu können. Solche komplexen Zusammenhänge sind beispielsweise die Entstehung von Spitzenwirbelkavitation, aber auch die Fluid-Strukturwechselwirkung eines Propellers im Schiffsnachstrom. Da potenzialtheoretische Verfahren als sehr recheneffizient gelten, bieten sie sich im frühen Entwurfsstadium für umfangreiche Studien zur Auslegung einer Anlage an. In diesem Sinne ist es Ziel dieser Arbeit ein modernes, gut erweiterbares Paneelverfahren zu entwicklen, das leicht an aktuelle Fragestellungen angepasst werden kann. Weiterhin soll es sich als Plattform für weitere, vorwiegend schiffbauliche Anwendungsfälle eignen, um den hohen Programmieraufwand zu Beginn einer neuen Entwicklung gering zu halten.

1.2 Kapitelübersicht

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in sechs Abschnitte. Einleitend wird eine Übersicht über die im Schiffbau verwendeten potenzialtheoretischen Verfahren zur Berechnung der Propellerumströmung und deren Entwicklung gegeben. Dabei werden die wesentlichen Entwicklungsschritte kurz dargestellt, die zu den heutigen Paneelverfahren geführt haben.

Im zweiten Abschnitt wird der mathematische Hintergrund der instationären Potenzialströmung erläutert und die in Paneelverfahren zur Anwendung kommenden Randbedingungen hergeleitet. Dabei wird detailliert auf die Implementierung der numerischen Methoden eingegangen. Die im dritten Kapitel dokumentierte Validierung des Verfahrens umfasst eine Gitternetzstudie sowie eine umfassende Untersuchung zur Berechnung der Freifahrteigenschaften von Propellern.

Aufbauend auf diesen Grundlagen wird im vierten Abschnitt eine Methode zur Berechnung der Spitzenwirbelkavitation entwickelt. Hierzu werden die physikalischen Zusammenhänge wiedergegeben und das daraus abgeleitete Modell beschrieben. Anschließend erfolgt eine Bewertung des Modells anhand von Vergleichen mit gemessenen Kavitationseinsatzkurven mehrerer Propeller.

Der weitere Schwerpunkt dieser Arbeit, die Untersuchung der Fluid-Strukturwechselwirkung von Propellern in inhomogener Anströmung, ist das Thema des fünften Kapitels. Der Mechanismus zur Berechnung der Wechselwirkung und die spezifischen Erweiterungen zur Integration des Verfahrens werden vorgestellt. Die Methodik wird im Weiteren zunächst an einem parallel angestömten Tragflügel geprüft, bevor detaillierte Untersuchungen zum Einfluss der Fluid-Struktur-Interaktion auf die Strömungseigenschaften des Propellers durchgeführt werden.

Abschließend erfolgt im sechten Kapitel eine Zusammenfassung der in dieser Arbeit gewonnenen Ergebnisse. Angehängt an die Arbeit sind das Abbildungs- und das Literaturverzeichnis sowie eine Übersicht über die verwendete Nomenklatur.

1.3 Potenzialtheoretische Methoden für die Berechnung von Propellerumströmungen

Numerische Methoden zur Berechnung von Strömungen auf Grundlage der Potenzialtheorie gehen auf eine inzwischen gut 50-jährige Entwicklung zurück. Aufgrund der Annahmen in der mathematischen Formulierung kommen diese Methoden in Bereichen der Strömungstechnik zur Anwendung, in denen Reibungseffekte in der Strömung weitgehend vernachlässigt oder an Hand von semiempirisch ermittelten Zusammenhängen abgeschätzt werden können. Da diese Annahmen im Auslegungspunkt von Strömungsmaschinen meist gültig sind, werden auf der Potenzialtheorie basierende Methoden auch heute noch häufig im Entwurfsstadium eingesetzt. Typische Anwendungsfälle sind beispielsweise die Berechnung der Umströmung von Profilen, wie sie an Tragflächen von Flugzeugen, an Propellern und Rudern von Schiffen oder auch an Pumpen und Turbinen auftreten. Weitere Anwendungen befassen sich mit der Umströmung von Körpern, die sich in der Nähe von freien Oberflächen befinden und mit diesen wechselwirken. Hierbei können beispielsweise die Kräfte ermittelt werden, die für die Erzeugung von Wellen erforderlich sind oder die durch die Interaktion von schwimmenden Körpern im Seegang entstehen.

Eine der wichtigsten Annahmen bei der potenzialtheoretischen Untersuchung von Strömungsproblemen ist die Vernachlässigung viskos bedingter Effekte, aus der eine ganze Reihe von Einschränkungen in der Anwendbarkeit resultiert. Als wesentlicher Vorteil von potenzialtheoretischen Methoden ist der geringe Rechenaufwand zu nennen, der die Untersuchung einer Vielzahl von Geometrievarianten innerhalb kurzer Zeit zulässt. Heutzutage ist der Vorteil bei der Rechengeschwindigkeit immer noch der Hauptgrund für die Anwendung der Potenzialtheorie. Im Vergleich zu den konkurrierenden Feldmethoden, die meist auf der Lösung zeitgemittelter Navier-Stokes-Gleichungen basieren, sind kaum Aussagen über Reibungseffekte möglich, und in Fällen, in denen die potenzialtheoretischen Annahmen nicht mehr gültig sind, nimmt die Genauigkeit der Ergebnisse stark ab. Für viele Anwendungen liefern potenzialtheoretische Verfahren ausreichend genaue Ergebnisse oder bieten aufgrund ihrer mathematischen Formulierung Möglichkeiten, die so ohne Weiteres nicht mit den genannten Feldmethoden implementierbar sind, wie beispielsweise eine Betrachtung der Strömung im Frequenzbereich.

Die Ursache für die Recheneffizienz der Methoden liegt in einer Eigenschaft mathematischer Potenziale, nämlich der Superpositionierbarkeit, wonach die Summe zweier Potenzialfuntktionen wieder eine Potenzialfunktion ergibt. Aufgrund dieses linearen Zusammenhangs ist es möglich

bestimmte Strömungsrandbedingungen – beispielsweise entlang eines Körpers – durch die gezielte Superpositionierung von Potenzialfunktionen einzuhalten. Aus diesem in einer Rechnung zu ermittelnden Gesamtpotenzial können nicht nur in der Nähe der erfüllten Randbedingung Rückschlüsse auf die Zustandsgrößen der Strömung gezogen werden, sondern die Druck- und Geschwindigkeitsverteilung im gesamten Fluidraum kann berechnet werden. An dieser Stelle unterscheiden sich potenzialtheoretische Methoden wesentlich von den Feldmethoden. Feldmethoden erfordern die Diskretisierung des gesamten Strömungsraums, während bei einem potenzialtheoretischen Ansatz nur die Oberfläche des Körpers, beziehungsweise nur die Bereiche zu diskretisieren sind, an denen eine Randbedingung zu erfüllen ist. Aus diesem Grund werden die meisten potenzialtheoretischen Verfahren als Randelementeverfahren bezeichnet.

1.3.1 Entwicklung potenzialtheoretischer Methoden

Basierend auf der Prandtlschen Traglinientheorie wurden die ersten numerischen Verfahren entwickelt, mit deren Hilfe die potenzialtheoretische Umströmung von Tragflügeln untersucht wurde. Hier wird der gebundene Wirbel eines Tragflügels durch abschnittsweise konstante Wirbelsegmente repräsentiert. Entsprechend der Helmholtzschen Wirbelsätze erstrecken sich ausgehend von jedem Wirbelsegment Wirbelfäden in die Strömung hinter dem Tragflügel. Da die Gesamtwirbelstärke in der Strömung konstant bleibt, ändert sich die Wirbelstärke der Wirbelfäden in stationären Fällen nicht. Infolge dessen entstehen in der nachfolgenden Strömung endlos lange, hufeisenförmige Wirbelelemente. Diese Wirbelfäden, die zusammen eine Fläche bilden, werden auch als Nachlauf bzw. Nachlaufflächen bezeichnet. Die Zirkulationsverteilung des gebundenen Wirbels wird bei der Traglinientheorie vorgegeben, so dass im Anschluss die damit verbundenen Kräfte berechnet werden können. Alternativ zur Vorgabe der Zirkulationsverteilung, kann diese auch numerisch ermittelt werden. In diesem Fall wird der gebundene Wirbel im Inneren des Körpers entlang einer Kurve, die ein Viertel hinter der Eintrittskante liegt, modelliert und eine Normalenrandbedingung auf dreiviertel der Profiltiefe hinter der Eintrittskante erfüllt. In die Normalenrandbedingung gehen die induzierten Geschwindigkeiten der einzelnen hufeisenförmigen Wirbelelemente sowie die ungestörte Anströmungsgeschwindigkeit ein. Die Geschwindigkeiten werden für den Ort ermittelt, an dem die Normalenrandbedingung gelten soll. Die diskretisierte Zirkulationsverteilung ist ein linearer Anteil in der Randbedingung und wird über ein lineares Gleichungssystem berechnet.

Über die Traglinientheorie hinaus geht das Wirbelgitterverfahren, bei dem der tragende Wirbel nicht nur durch eine Wirbellinie repräsentiert wird, sondern durch eine Fläche mit veränderlicher Wirbelstärke zwischen Ein- und Austrittskante. Diese Fläche folgt der Wölbungsfläche des Tragflügels. Wie im Traglinienverfahren auch, erstrecken sich von der Hinterkante aus die freien Wirbel in den Nachlauf. Die Wölbungsfläche wird hierzu mit ringförmigen Wirbelelementen diskretisiert. Jedes der Wirbelelemente besitzt eine eigene Wirbelstärke, so dass in Kombination mit der Formulierung einer Normalenrandbedingung beispielsweise an den Elementmittelpunkten wiederum ein lineares Gleichungssystem aufgestellt werden kann, aus dem die Wirbelverteilung auf dem Tragflügel hervorgeht. Als Ergebnis liegt eine lokale Druckdifferenz zwischen Druck- und Saugseite vor. Durch weitere Annahmen kann auch die Druckverteilung auf der Flügeloberfläche ermittelt werden, so dass auch Aussagen über Kavitationserscheinungen möglich sind. Insbesondere an der Eintrittskante müssen jedoch empirisch ermittelte Annahmen getroffen werden, die starken Einfluss auf das Ergebnis haben. Da der erste Wirbel an der Eintrittskante liegt, ist hier die induzierte Geschwindigkeit und damit auch der hier erzeugte Unterdruck unendlich. Folglich muss hier eine Annahme über die Geschwindigkeitsverteilung an der Eintrittskante getroffen werden. Als Erweiterung des Wirbelgitterverfahrens ist es üblich auch eine Quellverteilung entlang der Profilmittelfläche vorzugeben, um

die Verdrängungswirkung des Tragflügels zu erfassen. Sie wird in der Regel an die Dickenänderung des Tragflügels gekoppelt.

Um ein umfangreicheres Bild über die Strömung zu erhalten und um die Genauigkeit der Ergebnisse zu erhöhen, wurden im nächsten Schritt die so genannten Paneelmethoden entwickelt. Hier wird eine Randbedingung auf der Oberfläche des Körpers selbst erfüllt, so dass folglich auch die Strömungsgrößen an der Oberfläche selbst ermittelt werden können. Die numerische Umsetzung der Paneelmethoden in der Strömungstechnik wurde maßgeblich durch die Arbeiten von Hess und Smith (1962) geprägt, siehe hierzu auch Hess (1972). Um die Umströmung von Körpern zu berechnen, wird die Oberfläche des Körpers durch eine beliebige Anzahl an ebenen Vierecken angenähert, wobei jedes dieser Vierecke mit einer Quelle als Potenzialansatzfunktion versehen wird. Die Grundfunktion ist für alle diese Vierecke gleich, wobei der Gewichtungsfaktor, nämlich die Quellstärke, für jedes diskretisierte Element unterschiedlich ist, so dass die Summe der Einzelfunktionen das Gesamtpotenzial ergibt. Der lineare Zusammenhang zwischen der Gewichtung der Einzelfunktion und der zu erfüllenden Randbedingung ermöglicht es wiederum ein lineares Gleichungssystem aufzustellen. In ihren ersten Arbeiten verwendeten Hess und Smith für jedes Oberflächenelement eine Normalenrandbedingung, die den Durchfluss am Mittelpunkt des Vierecks verhindert, so dass jedem zunächst unbekannten Gewichtungsfaktor eine Randbedingung entgegen steht und entsprechend das lineare Gleichungssystem lösbar ist. Wegen der zu Grunde gelegten Potenzialansatzfunktion kann mit dieser Methodik zunächst nur die Verdrängungswirkung von Körpern erfasst werden, was die Berechnung der Druckverteilung auf solche Körpern erlaubt, die in der Strömung keinen Auftrieb verursachen. Ein Beispiel hierfür ist Umströmung von Tragflächen bei Nullauftriebswinkel. Ganz ähnliche Vorgehensweisen werden auch heute noch bei der Berechnung der Druckverteilung auf Körpern in der Nähe der Wasseroberfläche verwendet, um den Druckwiderstand infolge der Wellenbildung zu bestimmen. Anzumerken ist jedoch, dass in diesen Fällen auch eine spezielle Randbedingung an der Wasseroberfläche angesetzt wird.

Im Folgenden wurde die Methodik von Hess (1972) erweitert, um den Auftrieb sowie den damit verbundenen induzierten Widerstand, der an Tragflächen entsteht, ermitteln zu können. Dies erfordert die Integration eines Wirbels als weitere zu Grunde gelegte Potenzialfunktion und erlaubt, sowohl den tragen Wirbel um die Tragfläche als auch die freien Wirbel in der Strömung abzubilden. Von Hess (1972) wird darauf verwiesen, dass einige Autoren die Paneelierung der Oberfläche mit einer Quellverteilung mit einem Wirbelgitterverfahren kombinieren, wobei als Unbekannte die Quellverteilung auf dem Flügel sowie die Wirbelstärke auf der Wölbungsfläche und in den freien Wirbeln ermittelt werden. Da für die mit Wirbelelementen belegte Wölbungsfläche keine eigene Randbedingung formuliert werden kann, wird eine lineare Zunahme der Wirbelstärke von der Eintrittskante zur Austrittskante angenommen. Für das letzte Wirbelelement an der Hinterkante gilt, wie bei dem Wirbelgitterverfahren auch, dass die hier vorliegende Wirbelstärke als freier Wirbel an die nachfolgende Strömung abgegeben wird. Als Randbedingung für die Stärke der freien Wirbel wird die Druckgleichheit an der Hinterkante auf Druck- und Saugseite gefordert, die so genannte Kutta-Randbedingung. Im Gegensatz zu diesem kombinierten Verfahren wird von Hess und Smith die separate Wirbelfläche in der Mitte des Profils eliminiert und anstatt dessen die Zirkulation auf die Paneele auf der Körperoberfläche verteilt. In ihrer Formulierung gehen sie davon aus, dass sich die Zirkulation von der Druck- zur Saugseite linear entlang der Oberfläche ändert.

Bei den zuletzt genannten Ansätzen ist es jedoch so, dass die Art die Quell- und Wirbelelemente zu kombinieren letzlich beliebig gewählt werden, ohne dass eine physikalische oder mathematische Begründung für die Vorgehensweise gegeben werden kann und einzig die Plausibilität der Ergebnisse für oder gegen eine Vorgehensweise spricht. Erst in einem weiteren Entwicklungsschritt wurde basierend auf der Integration der Normalenrandbedingung in den zweiten Greenschen Satz die heute übliche Formulierung der Paneelverfahren für auftriebbehaftete Strömungen erreicht. Wie

beispielsweise in Katz (2001) hergeleitet, entspricht an einem Ort auf der Körperoberfläche die dort herrschende Dipolstärke dem gesuchten Potenzial an diesem Ort, so dass aus der Lösung des Gleichungssystems unmittelbar das Potenzial auf der Körperoberfläche folgt. Aus der Herleitung folgt weiterhin, dass die Quellstärke allein aus dem lokalen Normalenvektor der Oberfläche und der lokal herrschenden Anströmgeschwindigkeit resultiert. Der Vorteil dieser Methode ist, dass über den Greenschen Satz ein potenzialtheoretischer Zusammenhang zwischen der gewählten Quell- und Wirbelverteilung hergestellt wird.

Das Paneelverfahren, das sich aus dieser Formulierung basierend auf dem 2. Greenschen Satz ergibt, bildet die Grundlage für die in dieser Arbeit durchgeführten Entwicklungen und Untersuchungen und wird daher im folgenden Kapitel *„Mathematischer Hintergrund“* detailliert erläutert.

Zwei weitere Punkte sind bei der Zusammenfassung der numerischen potenzialtheoretischen Methoden zu nennen. Zum einen bestehen grundsätzlich zwei unterschiedliche Herangehensweisen bei der Ermittlung des Potenzials. Die Randbedingungen, beispielsweise auch die Normalenrandbedingung, können so formuliert werden, dass sie in Form einer Dirichletschen Randbedingung für das Potenzial gelten. Alternativ besteht ebenso die Möglichkeit die Normalenrandbedingung als Neumannsche Randbedingung für die Geschwindigkeit an einem Ort zu formulieren. Beide Methoden sind prinzipiell weitgehend ähnlich, unterscheiden sich jedoch in ihrer numerischen Stabilität und in der Lösbarkeit der resultierenden Gleichungssysteme. Da in der Dirichletschen Variante die Randbedingung für das Potenzial an der Körperoberfläche formuliert wird und das Potenzial am Ort der Randbedingung die Lösung des Gleichungssystems ist, wird diese auch als direkte Methode bezeichnet. Im Gegensatz dazu verwendet die Neumansche Formulierung induzierte Geschwindigkeiten, um das Potenzial zu bestimmen. Daher ist sie als indirekte Methode bekannt. Als zweiter Punkt ist zu nennen, dass in allen Verfahren freie Wirbel in der Strömung modelliert werden müssen, wobei das Problem besteht, dass die Lage der Wirbel a priori nicht bekannt ist. Daher ist auch die Ermittlung der Lage der freien Wirbel Bestandteil der Lösung und wird meist in Form eines iterativen Prozess als Nebenbedingung gelöst. Alternativ hierzu besteht die Möglichkeit auf die iterative Bestimmung der Lage zu verzichten und anstatt dessen allein aus der Geometrie und der Anströmung eine ausreichend genaue Schätzung der Lage der freien Wirbel zu liefern.

Für alle genannten Verfahren bestehen stationär sowie instationär arbeitende Varianten. Bei den potenzialtheoretischen Verfahren hat sich neben der zeitschrittweisen Betrachtung der Strömung eine Betrachtung im Frequenzbereich etabliert. Dabei wird davon ausgegangen, dass eine periodische Anregung des Körpers besteht. Das Problem wird dabei weiter linearisiert, so dass auch die Antwort der Strömung periodisch ausfällt. Weiterhin wird die Quell- und Dipolverteilung mit Hilfe komplexer Zahlen formuliert, so dass mit vergleichsweise geringem Aufwand Übertragungsfunktionen berechnet werden können.

1.3.2 Einsatzgebiete und Anwendungen potenzialtheoretischer Rechenverfahren für Schiffspropeller

Die bisher diskutierten Verfahren, basierend auf der Potenzialtheorie, wurden für unterschiedliche strömungstechnische Anwendungen entwickelt. Ausgangspunkt im Bereich der auftriebbehafteten Strömungen waren Entwicklungen im Flugzeugbau. Die Anwendungen im Schiffbau wurden zunächst im Wesentlichen für die Berechnung der von Schiffen erzeugten Wellen und der Auslegung von Propellern vorangetrieben. Verbreitung finden die Verfahren in vielen technischen Bereichen beispielsweise auch im Pumpen- und Turbinenbau.

Da die Anwendungen stark unterschiedlich und auch die dafür entwickelten Methodiken hoch spezialisiert sind und oftmals nur für sehr eingeschränkte Szenarien anwendbar sind, wird im Folgenden hauptsächlich auf den Bereich der Propellerumströmung näher eingegangen. Im Allgemeinen

lässt sich feststellen, dass mit Hilfe der Potenzialtheorie die Druckverteilung an strömungstechnisch ausgelegten Bauteilen meist mit hinreichender Genauigkeit vorhergesagt werden kann, so dass diese Verfahren häufig bei der ingenieurmäßigen Auslegung von Bauteilen eingesetzt werden. Diese Aussage ist jedoch nur solange gültig, wie viskose Effekte vernachlässigbar sind oder wenigstens durch empirische Schätzungen approximiert werden können. In der Regel stehen bei der Auslegung strömungstechnischer Anlagen wie beispielsweise auch bei Propellern hohe Wirkungsgrade im Vordergrund, so dass Strömungsablösung und andere Reibungseffekte zumindest im Hauptbetriebspunkt vermieden werden. Folglich fallen die Einschränkungen, die in der potenzialtheoretischen Lösung getroffen werden, für schlanke Körper, wie die Flügel eines Propellers oder auch Schiffs- und Flugzeugrümpfe in den üblichen Betriebspunkten kaum ins Gewicht und wesentliche Größen, die aus der Hauptströmung um den Körper resultieren, können ausreichend genau prognostiziert werden. Die getroffenen Annahmen und die resultierenden Vereinfachungen werden weiter unten in Abschnitt *„Grundlagen“* erläutert.

Für die Nutzung beim Propellerentwurf lassen sich die oben aufgelisteten Verfahren mit unterschiedlicher Entwurfstiefe einsetzen. Einige Verfahren und die damit verbundenen Möglichkeiten und Einsatzbereiche sollen im Folgenden erläutert werden.

Mit Hilfe der Traglinientheorie ist es möglich eine ideale Zirkulationsverteilung auf dem Tragflügel, bzw. dem Propellerflügel zu ermitteln. Im Anschluss daran müssen Profile und eine passende Steigungs- und Profiltiefenverteilung ermittelt werden, die die zuvor angenommene Zirkulationsverteilung liefern. Da es hierfür keinen unmittelbaren Zusammenhang gibt, bzw. hierbei zahlreiche nichtlineare Abhängigkeiten bestehen, ist ein Bezug zwischen Geometrie und Zirkulationsverteilung nur bedingt herstellbar, auch wenn als Basis der Korrelation Profilkataloge und andere messtechnisch ermittelten Zusammenhänge dienlich sein können. Dennoch bietet das Verfahren einen Anhaltspunkt für die Gestaltung einer Propellergeometrie, sofern ausreichend Erfahrungen oder Vergleichsgeometrien vorliegen. Eine frei verfügbare Variante eines Traglinienverfahrens ist OpenProp und wird von Kimball und Epps (2010) dokumentiert.

Tragflächenverfahren waren die ersten Verfahren, mit denen die numerische Berechnung der Freifahrtdiagramme von Propellern möglich war. Da die Wirbelfläche bereits alle wesentlichen geometrischen Eigenschaften eines Propellers abbildet, können praxistaugliche Ergebnisse sehr recheneffizient erzielt werden, die jedoch im Allgemeinen einer umfangreichen Anpassung mit Hilfe empirisch ermittelter Größen bedürfen. Diese empirischen Korrekturen erfassen neben viskosen Effekten auch die Abbildung der Saugspitze an der Entrittskante und eine Korrelation der Kavitationseigenschaften auf Basis der berechneten Wirbelverteilung. Auf Grund der äußerst geringen Rechenzeit, die aus der geringen Zahl an Unbekannten resultiert, und der über die Jahre kalibrierten Rechenergebnisse und des damit gewachsenen Vertrauens in die Verfahren, haben die Programme auch heute noch ihren festen Platz in der ingenieurmäßigen Auslegung von Propellern. Berücksichtigung findet beispielsweise auch die inhomogene Anströmung durch vorgelagerte Schiffsnachstromfelder und auch eine – wenn auch begrenzte – Aussagefähigkeit zur Kavitationsgefährdung des Propellers ist möglich. Bekannte Verfahren dieser Art sind beispielsweise unter dem Namen QCM zu finden, wie beispielsweise von Lan (1974) und Streckwall (1997) beschrieben. Auf die Entwicklung aus den 70er Jahren geht ebenso das Programm MPUF-3A zurück, das auf den Arbeiten von Kerwin und Lee (1978) basiert.

Zusammengesetzte Varianten aus Paneelmethoden und Wirbelgitterverfahren bestehen heute ebenso, wie beispielsweise in Achkinadze et al. (2003) dokumentiert ist. In der genannten Arbeit wird neben Propeller–Ruder–Konfigurationen auch die Wechselwirkung zwischen einem Pod–Gehäue und dem arbeitenden Propeller untersucht.

Die wohl umfangreichsten Untersuchungen, die auf Paneelverfahren basieren, gehen auf die Arbeiten von Kerwin et al. (1987) zurück. In den ersten Arbeiten stand die Umströmung von freien Propellern und Düsenpropellern im Fokus des entwickelten Paneelverfahrens, siehe Kinnas und Hsin (1992) und Kinnas und Coney (1992). Darauf aufbauend wurden von Mueller und Kinnas (1999) sowie Young und Kinnas (2003c) Kavitationsmodelle für die Berechnung der Schicht- und Superkavitation an Propellern entwickelt. Untersuchungen zu der Modellierung des Aufrollvorgangs der freien Wirbel sind in Lee und Kinnas (2005) zu finden. Aufbauend auf diesen Arbeiten wurde von Young und Kinnas (2003a) ein Modell zur Berechnung teilgetauchter Propeller entwickelt, wobei in Young und Kinnas (2003b) auch der Einfluss der Strukturverformung Berücksichtigung findet. Die Entwicklung von Paneelverfahren besteht auch in den letzten Jahren trotz der großen Verbreitung von RANSE-Verfahren fort. So wurde von Baltazar et al. (2011) die Modellierung des Spalts zwischen Rotor und Düse untersucht oder in Greco et al. (2011) mit Hilfe eines Paneelverfahrens das Verhalten von Propellern mit einer selbstjustierenden Steigungsverstellung ermittelt.

Mathematischer Hintergrund

Die mathematischen Grundlagen, die für die Berechnung des Strömungspotenzials erforderlich sind, werden im Folgenden erläutert. Die Grundlagen umfassen neben der Beschreibung des Strömungspotenzials die verwendeten Randbedingungen. Im Anschluss folgt die Dokumentation der implementierten Methoden sowie Erläuterungen zu einigen Aspekten, die aus den Methodiken resultieren.

2.1 Grundlagen

Das potenzialtheoretische Strömungsfeld, das im Wesentlichen auf der Lösung der Laplace-Gleichung beruht, kann mit den in Abschnitt 2.1.1 erläuterten Annahmen aus den allgemeinen mechanischen Erhaltungsgleichungen hergeleitet werden. Spezielle Lösungen der Laplace-Gleichung, auf denen letztlich die Paneelmethoden basieren, werden in Abschnitt 2.1.2 vorgestellt. Die in Abschnitt 2.1.3 dargestellen Ansätze zur Implementierung der Randbedingungen zeigen, dass die Formulierungen zur Ermittlung des Potenzials weitgehend unabhängig von der zeitlichen Änderung der Strömung sind. Die speziellen Schritte, die nötig sind, um das instationäre Verhalten zu ermitteln, sind in Abschnitt 2.1.4 zusammengefasst.

2.1.1 Beschreibung des Strömungsfeldes

Technische Strömungen lassen sich im Allgemeinen durch Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie, den so genannten Navier-Stokes-Gleichungen, mathematisch beschreiben. Diese können in ihrer Differenzial- oder Integralform durch eine geeignete räumliche und zeitliche Diskretisierung numerisch gelöst werden. Sofern viskos bedingte Effekte und auch der Wärmetransport in der Strömung vernachlässigt werden, lassen sich die Erhaltungsgleichungen auf die Kontinuitätsgleichung und die Impulsgleichung, die auch Euler-Gleichung genannt wird, reduzieren.

Wird die Strömung mit dem Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}$ und den skalaren Größen für Druck und Dichte p und ρ beschrieben, ergibt sich:

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + (\nabla \cdot \vec{v})(\rho \vec{v}) + \nabla p = \vec{F} \tag{2.2}$$

Hierbei sind $\vec{F}$ äußere Kräfte, die auf die Strömung wirken, wie sie beispielsweise aus der Erdbeschleunigung resultieren.

Bei kleinen Machzahlen kann weiterhin die Kompressibiliät der Strömung vernachlässigt werden, so dass die Dichte ρ konstant ist. Da dies bei der Umströmung von Propellern der Fall ist, können entsprechend die Euler-Gleichungen vereinfacht werden:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \tag{2.3}$$

$$\vec{v}_t + (\nabla \vec{v})\, \vec{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{1}{\rho} \vec{F} \tag{2.4}$$

Setzt man zur Lösung dieser Gleichungen ein rotations- und quellfreies Vektorfeld an, so existiert zu diesem Feld eine Potenzialfunktion $\Phi = f(\vec{x}, t)$. Dies bedeutet, dass die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t an einem Ort $\vec{x}$ dem Gradienten des Potenzials entspricht:

$$\vec{v} = \nabla\Phi \tag{2.5}$$

Die Erfüllung der Kontinuitätsgleichung (2.3) resultiert in der so genannten Laplace-Gleichung.

$$\nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot \nabla\Phi = \Delta\Phi = 0 \tag{2.6}$$

Durch die Vernachlässigung der Dichteänderung entfallen in der Kontinuitätsgleichung die zeitlichen Ableitungen. Das zu einem Potenzial gehörige Druckfeld kann durch Integration der Impulsgleichung ermittelt werden, die dann als Bernoulligleichung bekannt ist. Unter der Annahme, dass als äußere Kraft die Erdbeschleunigung wirkt, gilt:

$$p(\vec{x}) + \rho\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\nabla\Phi^2}{2} + \vec{g} \cdot (\vec{x} - \vec{x_{ref}})\right) = const. \tag{2.7}$$

Aus Gleichung 2.6 geht hervor, dass die Laplace-Gleichung keine zeitlichen Abhängigkeiten beinhaltet. Diese können allenfalls über die implementierten Randbedingnung entstehen. Ebenso wenig hat das Druckfeld in der Strömung einen unmittelbaren Einfluss auf das Potenzial. Hingegen zeigt sich in Gleichung 2.7, dass der lokal herrschende Druck aus der räumlichen und zeitlichen Ableitung des Potenzials resultiert. Ist das Potenzial der Strömung für einen Zeitpunkt ermittet, so kann der Druck als Resultat aus diesem Potenzial abgeleitet werden. Dies hat zur Folge, dass sich instationäre Verfahren hauptsächlich bei der Berechnung der Drücke und bei den implementierten Randbedingnungen von stationären Verfahren unterscheiden.

2.1.2 Elementarlösungen der Laplace-Gleichung

Es gibt eine Reihe von Elementarlösungen, die die Laplace-Gleichung erfüllen. Von diesen werden hier nur einige wenige wiedergegeben werden. Die Superpositionierung der Elementarlösung, die wiederum eine Potenzialfunktion ergibt, bildet die Grundlage für die meisten potenzialtheoretischen Verfahren.

Parallelströmung Die wohl einfachste Elementarlösung stellt die Parallelströmung dar. Setzt man die Potenzialfunktion

$$\Phi = \vec{V}_\infty \vec{x} \tag{2.8}$$

an, resultiert daraus an jedem Ort $\vec{x}$ der Geschwindigkeitsvektor $\vec{V}_\infty$.

$$\begin{pmatrix} \Phi_x \\ \Phi_y \\ \Phi_z \end{pmatrix} = \vec{V}_\infty \tag{2.9}$$

Da die Geschwindigkeit V_∞ konstant ist, verschwinden die räumlichen Ableitung Φ_{xx}, Φ_{yy} und Φ_{zz}, so dass dieses Feld die Kontinuitätsgleichung (2.3) erfüllt.

Quelle Eine Quelle erzeugt an einem Ort einen bestimmten Fluss im Raum, der hier mit $1\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$ angenommen werden soll. Da der Raum unbeschränkt sein soll, verteilt sich der Fluss punktsymmetrisch um den Quellort. Folglich muss der Fluss durch eine gedachte Kugeloberfläche um den Quellort mit dem Durchmesser r wegen der Massenerhaltung ebenfalls $1\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$ betragen. Entsprechend beträgt die radiale Geschwindigkeit v_r mit der die Kugeloberfläche durchströmt wird:

$$v_r = \frac{1\ (\mathrm{m}^3/\mathrm{s})}{4\pi r^2} = \frac{d\Phi}{dr} \tag{2.10}$$

Im Falle der Quelle gibt es keine Geschwindigkeitskomponenten entlang der Kugeloberfläche, so dass das Potenzial durch Integration der Differenzialgleichung bestimmt werden kann:

$$\Phi = \int \frac{1\,(\mathrm{m}^3/\mathrm{s})}{4\pi r^2} dr = -\frac{1\,(\mathrm{m}^3/\mathrm{s})}{4\pi}\frac{1}{r} + C \tag{2.11}$$

Die Integrationskonstante ist nicht weiter relevant, so dass die Elementarfunktion einer Quelle am Ort $\vec{x}_0$ in kartesischen Koordinaten ausgedrückt lautet:

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}\right)\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_0|} \tag{2.12}$$

Das dazugehörige Geschwindigkeitsfeld in kartesischen Koordinaten ist:

$$\vec{v}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}\right)\frac{\vec{x}-\vec{x}_0}{|\vec{x}-\vec{x}_0|^3} = \nabla\Phi \tag{2.13}$$

Dabei ist $\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}_0$ und $r = |\vec{r}|$.

Die Herleitung dieser Elementarfunktion basiert auf der Einhaltung der Massenerhaltung in der Strömung. Der Quellort selbst, an dem die Geschwindigkeit unendlich ist, erfüllt die Kontinuität hingegen nicht. Der Fluss, den die Punktquelle erzeugt, wird meist als deren Stärke bezeichnet und mit dem Symbol σ gekennzeichnet. Dabei ist zu beachten, dass die Quellstärke einheitenbehaftet ist. Die in Gl. 2.13 beschriebene Einheitsquelle hat die Stärke $\sigma = 1\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$. Ist der Fluss, den die Quelle erzeugt, negativ, wird sie auch als Senke bezeichnet. Allgemein ist für solche Elemente, die eine Geschwindigkeitsverteilung im Fluid erzeugen, auch der Begriff "Störung" gebräuchlich.

Dipol Durch Überlagerung einer Quelle mit einer Senke gleicher Stärke lässt sich eine weitere häufig verwendete Elementarlösung erzeugen, der Dipol. Um diesen zu erzeugen, wird der Abstand l der beiden Quellen kontinuierlich reduziert, wobei die Stärke σ zunimmt, so dass $\mu = \sigma l = const.$ gilt. Um einen Dipol bei $\vec{x}_0$ stellt sich das folgende Potenzial ein, die korrespondierende Senke ist um den Vektor $l\vec{e}$ gegenüber $\vec{x}_0$ verschoben:

$$\Phi = \lim_{\substack{l\to 0\\ \sigma l\to\mu}} \frac{\sigma}{4\pi}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_0|} - \frac{1}{|\vec{x}-(\vec{x}_0+l\vec{e})|}\right) = -\frac{\mu}{4\pi}\frac{\vec{e}\,(\vec{x}-\vec{x}_0)}{|\vec{x}-\vec{x}_0|^3} \tag{2.14}$$

Dabei zeigt der Einheitsvektor $\vec{e}$ die Richtung an aus der sich die Senke der Quelle annähert. Es fällt auf, dass das Potenzial des Dipols dem Skalarprodukt des Richtungsvektors $\vec{e}$ mit der Geschwindigkeitsverteilung einer Quelle (siehe Gl. 2.13) entspricht. Folglich kann das Potenzial des Dipols auch in der Form

$$\Phi = -\frac{\mu}{4\pi}\,\vec{e}\,\nabla\frac{1}{r} \tag{2.15}$$

ausgedrückt werden.

Wirbel Eine weitere grundlegende Elementarfunktion ist der Potenzialwirbel, der einer Außenströmung um einen rotierenden Zylinder nahe kommt. Für diesen zweidimensionalen Fall, bei dem an der Zylinderoberfläche als Strömungsgeschwindigkeit die Oberflächengeschwindigkeit des rotierenden Körpers angenommen wird, kann ebenfalls mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung die Geschwindigkeitsverteilung in der Strömung und das dazu gehörige Potenzial hergeleitet werden. Siehe hierzu Katz (2001). In einem Zylinderkoordinatensystem (r,θ) bedeutet dies:

$$\frac{d\Phi}{d\theta} = -\frac{\Gamma}{2\pi r}, \qquad \frac{d\Phi}{dr} = 0 \tag{2.16}$$

bzw.:

$$\Phi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\theta \tag{2.17}$$

Quellverteilung auf einem Paneel Wie bereits mehrfach erwähnt, erlauben Potenzialfunktionen verschiedene Elementarfunktionen zu superponieren, um neue Potenzialfunktionen zu erhalten. Anstatt einzelne Punktquellen zu addieren ist es auch möglich, kontinuierliche Punktquellen entlang einer Fläche zu positionieren und ihre Wirkung durch Integration über diese Fläche zu bestimmen. Für eine konstante Quellverteilung auf einer ebenen Fläche A bedeutet dies:

$$\Phi = -\frac{\sigma}{4\pi}\int_A \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_0|}\,dS \tag{2.18}$$

Dabei ist $\vec{x}$ ein Ort im Fluid und $\vec{x}_0$ ein Ort auf dem Flächenelement über das integriert wird. Die Potenzialfunktion für ein ebenes Viereck mit den Eckpunkten $(x_1, y_1, 0)^T$, $(x_2, y_2, 0)^T$, $(x_3, y_3, 0)^T$, $(x_4, y_4, 0)^T$ wurde von Hess und Smith (1962) erstmals beschrieben. Dabei entfallen die Singularitäten an den Quellorten in der Fläche, es bleiben jedoch Singularitäten an den Kanten bestehen. Der induzierte Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}_{ind}$ am Ort $\vec{x} = (x, y, z)^T$ kann wie folgt in Teilsummen abhängig von $\vec{x}$ und den Eckpunkten der Fläche zerlegt werden:

$$\vec{v}_{ind} = -\frac{\sigma}{4\pi}\sum_{k=1}^{4}\begin{pmatrix} V_{xk} \\ V_{yk} \\ atan\left(\frac{m_k e_k - h_k}{zr_k}\right) - atan\left(\frac{m_k e_{k+1} - h_{k+1}}{zr_{k+1}}\right)\end{pmatrix} \tag{2.19}$$

Das dazugehörige Potenzial ergibt sich wie folgt:

$$\Phi = -\frac{\sigma}{4\pi}\sum_{k=1}^{4}\left(\frac{(x-x_k)(y_{k+1}-y_k)-(y-y_k)(x_{k+1}-x_k)}{d_k}\,ln\frac{1}{R_k}\right) \tag{2.20}$$

Dabei sind:

$$\begin{aligned}
V_{xk} &= \frac{y_{k+1}-y_k}{d_k}ln\left(R_k\right) \\
V_{yk} &= -\frac{x_{k+1}-x_k}{d_k}ln\left(R_k\right) \\
R_k &= \frac{r_k + r_{k+1} - d_k}{r_k + r_{k+1} + d_k} \\
r_k &= \sqrt{(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2 + z^2} \\
d_k &= \sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2 + (y_{k+1}-y_k)^2} \\
e_k &= (x-x_k)^2 + z^2 \\
h_k &= (y-y_k)(x-x_k) \\
m_k &= \frac{y_{k+1}-y_k}{x_{k+1}-x_k}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Dipolverteilung auf einem Paneel Analog zur Quelleverteilung, kann auch die Integration einer Dipolverteilung auf einer Fläche vorgenommen werden. Es kann gezeigt werden, dass diese Verteilung eines Dipols konstanter Stärke auf einer ebenen Fläche, einem Wirbelfaden entlang der Randkurve entspricht (siehe hierzu Katz (2001)). Der Einfluss eines Liniensegments zwischen den Vektoren $\vec{r}_k$ und $\vec{r}_{k+1}$, das mit einem Wirbel konstanter Zirkulation belegt ist, wird wie folgt bestimmt:

$$\vec{v}_{ind,k} = \frac{\Gamma}{4\pi}\frac{\vec{r}_k \times \vec{r}_{k+1}}{\left|\vec{r}_k \times \vec{r}_{k+1}\right|^2}\left(\vec{r}_k - \vec{r}_{k+1}\right)\left(\frac{\vec{r}_k}{|\vec{r}_k|} - \frac{\vec{r}_{k+1}}{|\vec{r}_{k+1}|}\right) \tag{2.22}$$

Liegt das Wirbelsegment in der xy-Ebene, lautet das dazugehörige Potenzial:

$$\Phi_k = \frac{\mu}{4\pi}\left(atan\left(\frac{m_k e_k - h_k}{zr_k}\right) - atan\left(\frac{m_k e_{k+1} - h_{k+1}}{zr_{k+1}}\right)\right) \tag{2.23}$$

Häufig werden Drei- oder Vierecke als Dipolflächen verwendet. Bei einem Polygon mit N Kanten lauten die induzierten Größen:

$$v_{ind} = \sum_{k=0}^{N} v_{ind,k} \tag{2.24}$$

$$\Phi = \sum_{k=0}^{N} \Phi_k \tag{2.25}$$

Über die hier genannten Elementarlösungen hinaus gibt es einige weitere ähnliche Ansätze. So können beispielsweise auch Stärkenverteilungen gewählt werden, die nicht notwendiger Weise konstant über das Paneel sind, sondern linear oder quadratisch veränderlich sind. Gleiches gilt auch für die Anordnung der Fläche, auf der die Verteilungsfunktion angesetzt wird., Wie in den oben genannten Beispielen darkgestellt, kann die Verteilung punktförmig bzw. entlang eines ebenen Vierecks platziert werden. Von Johnson (1980) werden Ansatzfunktionen für Paneele höherer Ordnung genannt. Gao und Zou (2008) gehen auf ein Verfahren ein, das auf NURBS-Ansätzen basiert. Hier wird die Oberfläche des Körpers und auch die darauf beschrieben Quell- und Dipolverteilung mit Hilfe von rationalen Spline-Funktionen beschrieben. Neben der genauen geometrischen Abbildung des Körpers bietet dies den Vorteil, dass durch die glatte Beschreibung des Potenzials keine Singularitäten in der NURBS-Fläche vorhanden sind.

2.1.3 Randbedingungen im Strömungsgebiet

Potenzialfunktionen haben die Eigenschaft, dass sie linear sind und entsprechend superponiert werden können. Folglich lassen sich bestimmte Randbedingungen durch Superposition verschiedener Potenzialfunktionen einhalten, wobei das Ergebnis der Superposition auf Grund der Linearität ebenfalls die Laplace-Gleichung erfüllt. Infolge der beliebigen Kombinierbarkeit der Grundfunktionen können zur Erfüllung einer Randbedingung unterschiedliche Herangehensweisen verwendet werden. Dies bedeutet jedoch nicht, dass die Ergebnisse unabhängig von der Herangehensweise sind. Aus diesem Grund haben sich in der Vergangenheit bestimmte Ansätze herausgestellt, die sich gut für die Lösung bestimmter Problemstellungen eignen.

Definition des Strömungsgebiets

Das Strömungsgebiet Ω, für das das Potenzial Φ mit der Geschwindigkeitsverteilung $\vec{V}(\vec{x})$ gelöst wird, ist in Abbildung 2.1 dargestellt. Es wird in einem ortsfesten System betrachtet, das heißt die Körper mit der Oberfläche S_K bewegen sich mit einer Geschwindigkeit v_K. Diese Geschwindigkeit muss nicht notwendigerweise für alle Körper konstant sein, sondern kann auch an unterschiedlichen Orten eines Körpers variieren, beispielsweise, wenn der Körper rotiert oder im Falle der Fluid-Struktur-Kopplung einer zusätzlichen Verformungsbewegung unterliegt.

Greenscher Satz

Als Ausgangspunkt für die Beschreibung des Strömungspotenzials mit seinen Randbedingungen wird häufig der Greensche Satz verwendet. Dabei wird das Strömungsfeld im Gebiet Ω mit Hilfe des Potenzials $\Phi(\vec{x})$ ausgedrückt. Allgemein gilt der 2. Greensche Satz für das Strömungsgebiet, dessen äußere Berandung durch die Fläche $S = S_K + S_\infty + S_W$ gegeben ist:

$$\int_S (\Phi \nabla G_1 - G_1 \nabla \Phi)\, \vec{n}\, dS = \int_\Omega (\Phi \Delta G_1 - G_1 \Delta \Phi)\, d\Omega \tag{2.26}$$

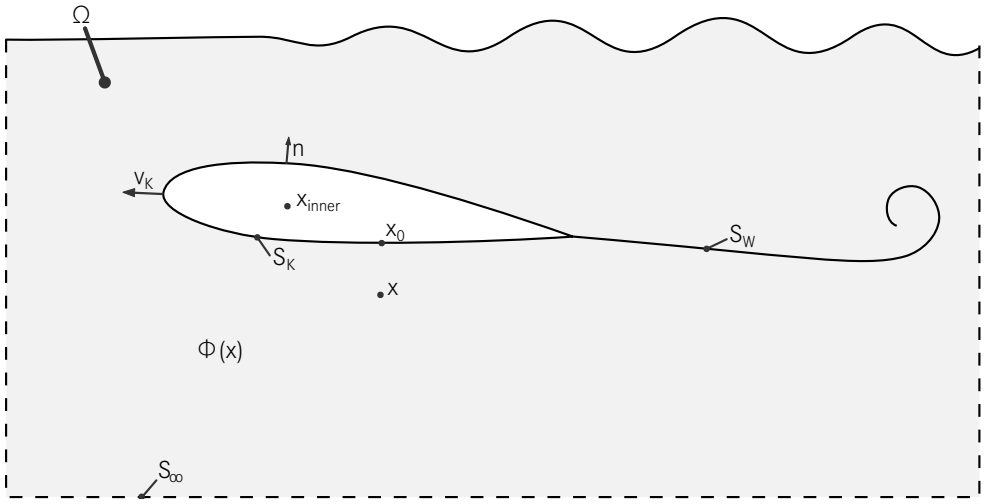


Abbildung 2.1: Größen und Randbedingungen im Strömungsgebiet.

Unter der Voraussetzung, dass G_1 und Φ Potenzialfunktionen sind, kann Gl. 2.26 zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned} \int_S (\Phi \nabla G_1 - G_1 \nabla \Phi)\, \vec{n}\, dS &= \int_\Omega (\Phi \underbrace{\Delta G_1}_{=0} - G_1 \underbrace{\Delta \Phi}_{=0}) d\Omega \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Die Größe Φ ist, wie in Abbildung 2.1 dargestellt, das Potenzial im Strömungsgebiet. Im Weiteren muss die Funktion G_1 so gewählt werden, dass Randbedingnungen in das System integriert werden können. Ein geeigneter Ansatz ist, entlang der Körperoberfläche eine Quellverteilung zu platzieren:

$$G_1(\vec{x}, \vec{x_0}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} \tag{2.28}$$

Für den Ort $\vec{x}$ kann der Greensche Satz ausgewertet werden, indem über die Berandungsfläche S integriert wird. Die Auswertung erfolgt für den Punkt $\vec{x}$, wobei $\vec{x_0}$ der Integrand ist.

In dem Fall, dass der Auswerteort $\vec{x}$ dem Integranden $\vec{x_0}$ sehr nahe kommt, wird die gewählte Ansatzfunktion G_1 singulär. Da die Quelle nur am Quellort $\vec{x} = \vec{x_0}$ die potenzialtheoretische Bedingung der Quellfreiheit nicht erfüllt, darf der Quellort $\vec{x_0}$ nicht Teil des Strömungsgebiets bzw. der Berandungsfläche S sein.

In einer Grenzwertbetrachtung wird der Fall untersucht, dass der Auswertepunkt $\vec{x}$ beliebig nahe an einem Quellort liegt. Hierfür wird das Integrationsgebiet S um eine infinitesimale Halbkugel mit der Oberfläche S_κ ergänzt. Durch die in Abbildung 2.2 skizzierte Maßnahme wird erreicht, dass die Funktion G_1 am Quellort selbst nicht ausgewertet wird.

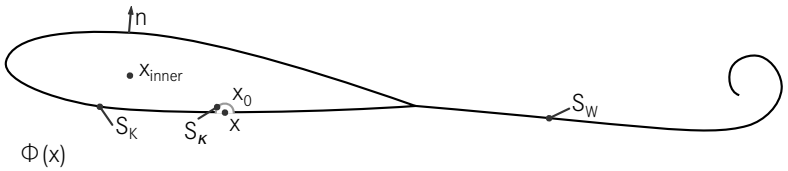


Abbildung 2.2: Trennung der Singularitäten vom Strömungsgebiet Ω.

Der Greensche Satz stellt sich nun wie folgt dar:

$$\int_S (\Phi \nabla G_1 - G_1 \nabla \Phi)\vec{n}\, dS + \int_{S_\kappa} (\Phi \nabla G_1 - G_1 \nabla \Phi)\vec{n}\, dS = 0 \tag{2.29}$$

Das Integral über die Halbkugel S_κ kann bestimmt werden, indem es in einem Kugelkoordinatensystem betrachtet wird. Dabei ist $r = |\vec{x} - \vec{x}_0|$ der Abstand zum Ort $\vec{x}_0$.

$$\begin{aligned}\int_{S_\kappa} \left(\Phi \nabla \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x_0}|} \nabla \Phi \right) \vec{n}\, dS \\ = \frac{1}{4\pi} \left[\int_{S_\kappa} \Phi \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r}\, dS - \int_{S_\kappa} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{1}{r}\, dS \right] \\ = -\frac{1}{4\pi} \left[\int_{S_\kappa} \Phi \frac{1}{r^2}\, dS + \int_{S_\kappa} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{1}{r}\, dS \right]\end{aligned} \tag{2.30}$$

Unter der Annahme, dass das Potenzial Φ im Strömungsgebiet eine stetige Funktion ist, nimmt es innerhalb der infinitesimal kleinen Kugel den Wert $\Phi(\vec{x})$ an und kann vor das Integral gezogen werden. Die Grenzwertbetrachtung des Integrals, mit einem Kugelradius $r_\kappa \to 0$ führt zu folgender Lösung, wobei zu berücksichtigen ist, dass das Oberflächenintegral $\int_{S_\kappa} dS = 4\pi r_\kappa^2$ beträgt:

$$\begin{aligned} & \lim_{r_\kappa \to 0} -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{\Phi(\vec{x})}{r_\kappa^2} \int_{S_\kappa} dS + \frac{\nabla \Phi(\vec{x})}{r_\kappa} \int_{S_\kappa} dS \right] \\ = & -\lim_{r_\kappa \to 0} \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\Phi(\vec{x})}{r_\kappa^2} 4\pi r_\kappa^2 + \frac{\nabla \Phi(\vec{x})}{r_\kappa} 4\pi r_\kappa^2 \right] \\ = & -\Phi(\vec{x}) - \lim_{r_\kappa \to 0} \nabla \Phi(\vec{x}) r_\kappa \\ = & -\Phi(\vec{x}) \end{aligned} \tag{2.31}$$

Dieses Ergebnis in Gl. 2.29 eingesetzt, führt zu folgendem Zusammenhang:

$$\Phi(\vec{x}) = \int_S (\Phi\, \vec{n} \nabla G_1 - G_1\, \vec{n} \nabla \Phi)\, dS \tag{2.32}$$

Ohne dass eine bestimmte Randbedingung angesetzt wurde, kann gefolgert werden, dass das Potenzial am Ort $\vec{x}$ mit Hilfe des Oberflächenintegrals über S berechnet werden kann.

Eine Einheitsquelle G_1, der zweite Term des Integranden, die an $\vec{x}_0$ positioniert ist, kann während der Integration über die Oberfläche S auch als Quellverteilung mit der räumlich veränderlichen Stärke $\sigma = -\vec{n} \nabla \Phi$ aufgefasst werden.

$$\Phi(\vec{x}) = \int_S (\Phi\, \vec{n} \nabla G_1 \underbrace{-\vec{n} \nabla \Phi}_{\sigma} G_1)\, dS \tag{2.33}$$

Die Stärke der Quellverteilung am Ort $\vec{x}_0$ wird nun mit σ bezeichnet. Der erste Term $(\vec{n} \nabla G_1)$ entspricht einem Einheitsdipol, wie er in Gl. 2.15 hergeleitet wurde. Die Ausrichtung $\vec{e}$ dieses Dipols entspricht hier dem lokalen Normalenvektor der Körperoberfläche. Analog zur Quelleverteilung kann dieser Term als Dipolverteilung auf dem Körper angesehen werden. Die Verteilung der Dipolstärke μ nimmt dann den Wert des Potenzials Φ an dem Ort $\vec{x}$ auf der Fläche S an.

Zusammenfassend kann Gleichung 2.32 in folgender Form beschrieben werden:

$$\Phi(\vec{x}) = \int_S \mu \underbrace{\vec{n} \nabla G_1}_{G_2}\, dS + \int_S \sigma\, G_1\, dS \tag{2.34}$$

mit:

$$\mu = \Phi \quad \text{und} \quad \sigma = -\vec{n}\,\nabla\Phi \tag{2.35}$$

Über geeignete Randbedingungen, die an Φ und $\nabla\Phi$, bzw. stellvertretend an μ und σ auf der Oberfläche S in Form einer Dirichletschen oder Neumannschen Randbedingung gestellt werden, kann das Potenzial $\Phi(\vec{x})$ im Raum ermittelt werden.

Das Strömungspotenzial Φ kann abschließend wie in Gl. 2.36 dargestellt, zusammengefasst werden. Dabei sind die Potenzialfunktionen σG_1 und μG_2 eine Quell- bzw. Dipolverteilung auf der Körperoberfläche. Die Funktionen hängen vom Auswerteort $\vec{x}$ und den Orten $\vec{x}_0$ auf der Berandungsfläche S, über die integriert wird, ab:

$$\Phi(\vec{x}) = \int_S \mu\, G_2\, dS + \int_S \sigma\, G_1\, dS \tag{2.36}$$

Die Schlussfolgerungen aus dem Greenschen Satz lassen eine weitere allgemeine Aussage zu. Erfolgt die Auswertung des Greenschen Satz aus Gl. 2.28 nicht an einem Ort in der Strömung, sondern außerhalb des Gebiets Ω, beispielsweise innerhalb eines Körpers, so besteht nicht mehr die Notwendigkeit den Punkt $\vec{x}_{inner}$ aus dem Strömungsgebiet zu entfernen, da er ohnehin nicht Teil des Gebiets ist. Entsprechend wird Gl. 2.29 vereinfacht zu:

$$\int_S \left(\mu\, G_2(\vec{x}_{inner}, \vec{x}_0) + \sigma\, G_1(\vec{x}_{inner}, \vec{x}_0)\right) dS = 0 \tag{2.37}$$

Bezeichnet man die skalare Größe, die sich aus dem Integral ergibt, ebenfalls als Potenzial Φ, so nimmt dies für alle Punkte $\vec{x}_{inner}$, die innerhalb eines Körpers und damit außerhalb des Strömungsgebiets liegen, den Wert Null an.

In der obigen Herleitung wurde bisher eine Bedingung, die so genannte Abklingbedingung, nicht berücksichtigt. Das Strömungsgebiet Ω muss nicht nur durch eine Körperoberfläche begrenzt werden. Vielmehr muss die Begrenzung des Gebiets auch im Unendlichen stattfinden. Da diese Fläche unendlich groß ist, müssen alle Störungen im Unendlichen abklingen, um Gl. 2.29 zu erfüllen. Diese Bedingung wird von der Quelle G_1 und auch von deren Ableitung, der Dipolverteilung $G_2 = \vec{n}\nabla\Phi$ erfüllt. Weiterhin muss auch der Beitrag des Integrals $\int_{S_\infty} (\mu\, G_2 + \sigma\, G_1)\, dS$ über die unendliche Begrenzungsfläche null sein. Dies ist gegeben, wenn die Quellstärke σ und die Dipolstärke μ auf S_∞ Null sind.

Normalenrandbedingung

Auf der Körperoberfläche wird in der Regel eine Normalenrandbedingung angesetzt, die dazu führt, dass der Normalenanteil der Strömungsgeschwindigkeit dem Normalenanteil der Körpergeschwindigkeit entspricht.

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = \vec{n} \cdot \vec{V}_K \tag{2.38}$$

Die Geschwindigkeit $\vec{v}$ ist gleich $\nabla\Phi$, so dass der folgende Zusammenhang für die Quellstärke zur Einhaltung der Normalenrandbedingung hergestellt werden kann:

$$\sigma = -\vec{n} \cdot \nabla\Phi = -\vec{n} \cdot \vec{V}_K \tag{2.39}$$

Folglich muss der zweite Teil in Gl. 2.37 ($\vec{n}\nabla\Phi$), der der Quellstärke σ entspricht, an die Geschwindigkeit $\vec{V}_K$ der Oberfläche gekoppelt sein. Dies in Gl. 2.37 eingesetzt, führt zu:

$$\Phi(\vec{x}_{inner}) = \int_S \mu\, G_2\, dS + \int_S \sigma\, G_1\, dS = 0 \quad \text{mit} \quad \sigma = -n\,\vec{V}_K \tag{2.40}$$

Die Randbedingung kann auf zwei Wegen gelöst werden, wobei jeweils als Unbekannte die Verteilung von μ auf der Oberfläche zu bestimmen ist. Zum einen kann die unbekannte Größe μ so gewählt werden, dass das Potenzial entsprechend dem Greenschen Satz (Gl. 2.37) im Körperinneren null ist. Diese Vorgehensweise wird als direkte Methode bezeichnet, da die unbekannte Größe, also das Strömungspotenzial Φ unmittelbar bestimmt wird. Zum anderen besteht die Möglichkeit die Geschwindigkeitsverteilung, die sich aus der kombinierten Quell- und Dipolverteilung in Gleichung 2.34 ergibt, zunächst abzuleiten, und die Randbedingung auf die Geschwindigkeit anzuwenden. In diesem Fall ist es nun nicht mehr das Ziel, dass das Potenzial im Innern des Körpers den Wert 0 annimmt, sondern dass die Geschwindigkeit die Normalenrandbedingung (Gl. 2.38) erfüllt. Zu diesem Zweck wird – wie in der direkten Methode auch – die Quellstärke mit Hilfe von Gl. 2.39 bestimmt, so dass die folgende Gleichung zu diskretisieren ist:

$$\vec{n}\left(\int_S \mu\,\nabla G_2\,dS + \int_S \sigma\,\nabla G_1\,dS\right) = \vec{n}\,\vec{V}_K \quad \text{mit} \quad \sigma = -\vec{n}\vec{V}_K \tag{2.41}$$

Hierbei wird das Potenzial nicht direkt über eine entsprechende Randbedingung ermittelt, sondern es ergibt sich indirekt, indem die Durchflussgeschwindigkeit durch die Körperoberfläche zu Null gebracht wird. Aus diesem Grund werden Formulierungen, die sich auf die induzierten Geschwindigkeiten beziehen, als indirekte Methoden bezeichnet.

Kutta–Bedingung

An der Hinterkante eines Tragflügels muss neben der Normalenrandbedingung eine zusätzliche Bedingung aufgestellt werden, die die Umströmung der Hinterkante verhindert, da der Körper ansonsten – entsprechend dem d'Alembertschen Paradoxon – weder eine Auftriebskraft, noch einen Widerstand erfährt. Aus diesem Grund muss der tragende Wirbel um die Tragfläche, der auch als gebundener Wirbel bezeichnet wird, simuliert werden. Da einem Wirbel, der in der Strömung entsteht, immer auch ein entgegengesetzt gerichteter Wirbel gegenüber stehen muss, damit die Gesamtzirkulation zeitlich konstant bleibt, wird an der Hinterkante kontinuierlich ein Wirbel an die folgende Strömung abgegeben. Diese Wirbel werden im Gegensatz zum gebunden Wirbel freie Wirbel genannt und erstrecken sich in einer Fläche ausgehend von der Hinterkante.

In der Beschreibung des Strömungsfeldes mit Hilfe des Greenschen Satzes wird gefordert, dass das Gebiet rotationsfrei und quellfrei ist. Folglich sind auch die freien Wirbel aus dem Integrationsgebiet Ω zu entfernen, so dass die Fläche S, die das Strömungsgebiet begrenzt, nicht nur die Oberfläche des Körpers S_K sondern auch die Wirbelschicht S_W umfasst:

$$\Phi(\vec{x}_{inner}) = \int_{S_K+S_W} \mu\,G_2\,dS + \int_{S_K+S_W} \sigma\,G_1\,dS = 0 \tag{2.42}$$

Diese Wirbelschicht ist kraftfrei und wird daher mit der Strömung transportiert. Demnach gilt auch hier eine Normalenrandbedingung, so dass dieser Schicht ebenfalls eine Quellstärke zuzuweisen ist, die sich aus der Normalenrandbedingung ergibt (siehe hierzu Gl. 2.39). Die Schicht besitzt keine Dicke, so dass sich der Normalenvektor auf beiden Seiten der Wirbelschicht nur im Vorzeichen unterscheidet. Entsprechend ist die auf beiden Seiten anzusetzende Quellstärke bis auf das Vorzeichen identisch, so dass sich die Einflüsse der Quellen auf Ober- und Unterseite der Schicht kompensieren. Alternativ kann die Wirbelschicht auch als quellfrei angesehen werden, so dass sich hier lediglich eine Dipolverteilung ausbildet. Die zu lösende Funktion kann demnach wie folgt zusammengefasst werden:

$$\Phi(\vec{x}_{inner}) = \int_{S_K} \mu\,G_2\,dS + \int_{S_W} \mu\,G_2\,dS + \int_{S_K} \sigma\,G_1\,dS = 0 \tag{2.43}$$

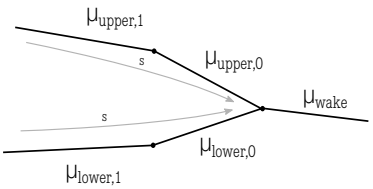


Abbildung 2.3: Paneele und deren Dipolstärke an der Hinterkante zur Bestimmung der Kutta–Bedingung.

In stationären Fällen nimmt der tragende Wirbel an einem Profil einen konstanten Wert an. Entsprechend ist auch die Dipolverteilung in den freien Wirbeln stationär. Dies bedeutet, dass die Wirbelverteilung, die von der Hinterkante ausgeht, ihre Stärke nicht mehr ändert, sondern lediglich mit der Strömung abtransportiert wird. In instationären Fällen hingegen, kann sich die gebundene Zirkulation um einen Tragflügel durchaus ändern. In diesem Fall bleibt die Wirbelstärke, die zu einem Zeitpunkt an die Strömung abgegeben wird, in dieser erhalten und wird mit der Strömung transportiert. Die Lage der Fläche S_W ist zunächst nicht bekannt und kann stationär nur iterativ oder durch ein Zeitschrittverfahren in einer instationären Rechnung ermittelt werden. Da diese Fläche kraftfrei bleiben muss, bewegt sie sich entlang der Bahnlinie ausgehend von der Hinterkante des Profils. Über die iterative Vorgehensweise hinaus bestehen einige Ansätze bei denen die Wirbelschicht durch eine geeignete Funktion im Vorhinein approximiert wird. Dabei wird angenommen, dass die Lage der Wirbelschicht sich aus einer Kombination der Richtung der Wölbungsfläche und der ungestörten Anströmgeschwindigkeit an der Hinterkante ergibt.

Aus physikalischer Sicht ist an einer scharfen Hinterkante die Druckgleichheit auf beiden Seiten des Körpers zu fordern. Die Einhaltung der Druckgleichheit ist aufgrund des quadratischen Zusammenhangs zwischen Druck und Geschwindigkeit in der Bernoulligleichung ein nicht–lineares Problem. In stationären 2D–Fällen folgt aus der Druckgleichheit, dass die Strömungsgeschwindigkeiten auf beiden Seiten der Hinterkante ebenfalls identisch sind, da keine Strömungsanteile parallel zur Hinterkante vorhanden sind. Da an der Körperoberfläche die Normalenrandbedingung gilt und die lokale Dipolstärke μ wie in Gleichung 2.40 gezeigt dem Potenzial an diesem Ort entspricht, kann die tangentiale Geschwindigkeit entlang der Oberfläche durch Ableitung der Größe μ in die entsprechende Richtung bestimmt werden. Folglich kann als Kutta–Bedingung der folgende Zusammenhang verwendet werden:

$$\frac{\Delta\mu}{\Delta s}\Big|_{upper} = \frac{\Delta\mu}{\Delta s}\Big|_{lower} \tag{2.44}$$

Dabei ist s eine Koordinate entlang der Körperoberfläche, die in Richtung der Hinterkante zeigt. Die Bezeichnungen *upper* und *lower* geben dabei an, ob sich der Ort, an dem die Ableitung gebildet wird, auf der Ober- oder Unterseite des Profils befindet.

Diesem Ansatz steht eine gleichwertige Formulierung gegenüber, die jedoch ohne die Bildung eines Differenzenquotienten auskommt. Die Dipolverteilung auf der Körperoberfläche kann in eine äquivalente Wirbelverteilung auf dem Körper überführt werden. In einem solchen Fall entstehen an der Hinterkante auf Ober- und Unterseite zwei Wirbel mit den Stärken μ_{upper} und μ_{lower}. Um wiederum eine Umströmung der Hinterkante zu vermeiden und auch um dem gebundenen Wirbel einen gleich starken freien Wirbel entgegenzusetzen, muss der freie Wirbel der Differenz der Stärken auf Ober- und Unterseite entsprechen. Folglich gilt auch:

$$\mu_{Wake} = \mu_{upper} - \mu_{lower} \tag{2.45}$$

Diese Art der Formulierung geht auf Morino und Kuo (1974) zurück und ist äquivalent zu Gl. 2.44 verwendbar.

Auch wenn die Herleitung der Randbedingung zweidimensionale stationäre Strömungsverhältnisse bedingt, wird sie häufig auch für dreidimensionale instationäre Strömungen verwendet. Die Beiträge von Strömungskomponenten, die quer zur Hinterkante verlaufen, werden in den bisher genannten Formulierungen der Kutta-Bedingung nicht berücksichtigt, obwohl sie die Druckdifferenz an der Hinterkante beeinflussen. Aus diesem Grund existieren im Wesentlichen zwei weitere Formulierungen.

Eine Möglichkeit besteht darin, an einem Ort kurz hinter der Austrittskante die Richtung der Strömung über eine Normalenrandbedingung vorzugeben. Die Normale wird dabei meist so gewählt, dass sie senkrecht zur Winkelhalbierenden der Oberflächen an der Hinterkante steht. Folglich hängt hier die Stärke des abgehenden Wirbels auch von der geometrischen Interpretation der Strömung ab, wie sie beispielsweise bei der Wahl des Abstandes als auch bei der Richtungsdefinition des Normalenvektors nötig ist. Ein Verfahren, dass sich hierauf stützt, wird beispielsweise in Achkinadze und Krasilnikov (2001) beschrieben. Die andere weit verbreitete Vorgehensweise besteht darin, die Druckgleichheit an der Hinterkante durch iterative Anpassung der Stärke der freien Wirbel zu bestimmen. Hierfür wird von Kinnas und Hsin (1992) eine Vorgehensweise vorgeschlagen, die mit Hilfe einer Newton-Raphson-Methode die Nullstelle der Funktion $p_{upper} - p_{lower}$ in Abhängigkeit von der abgehenden Wirbelstärke unter Einhaltung der Normalenrandbedingung auf dem Körper bestimmt. In den beiden letzt genannten Verfahren ist jedoch nicht sichergestellt, dass die Zirkulation, die um den Tragflügel aufgebaut wird, der Zirkulation in den freien Wirbeln entspricht.

2.1.4 Instationäre Strömungen im Zeitbereich

Wie eingangs angedeutet, sind in der mathematischen Formulierung die Unterschiede in der potenzialtheoretischen Beschreibung stationärer und instationärer Strömungen gering. Dies liegt vor allem daran, dass eine inkompressible Strömung vorausgesetzt wird, wodurch die Kontinuitätsgleichung zur Laplace-Gleichung wird (siehe hierzu Abschnitt 2.1.1). Sofern die einzuhaltenden Normalenrandbedingungen keine weiteren zeitabhängigen Terme beinhalten, kann die gleiche Methode zur Bestimmung des Potenzials verwendet werden, unabhängig davon, ob ein instationäres oder ein stationäres Problem untersucht wird. Unterschiede ergeben sich lediglich bei der Auswertung der Bernoulligleichung zur Druckbestimmung im Fluid, in die auch die zeitliche Änderung des Potenzials eingeht, siehe Gl. 2.7. Weiterhin muss der konvektive Transport der Wirbel mit der Strömung simuliert werden.

Kutta–Randbedingung und freie Wirbel

Ein wesentlicher Unterschied zwischen stationären und instationären Strömungen besteht jedoch in der Formulierung der freien Wirbel. In stationären Fällen muss lediglich die Lage der freien Wirbel bestimmt werden. Die Stärke ist für alle Wirbelelemente, die sich von einem Punkt an der Hinterkante aus in die Strömung erstrecken, identisch. In instationären Fällen hingegen kann sich die Wirbelstärke zeitlich ändern. Ein einmal in einem Zeitschritt erzeugtes Element ändert seine Stärke nicht mehr, sondern wird mit der Konvektion der Strömung abtransportiert. Durch diesen Vorgang, der beispielsweise Folge einer Änderung der Körpergeschwindigkeit ist, stellt sich zu jedem Zeitpunkt eine andere Wirbelverteilung in der Strömung ein, so dass für die Laplace-Gleichung bzw. für das Potenzial, das die Randbedingnung am Körper erfüllt, zu jedem Zeitpunkt eine neue Lösung zu bestimmen ist.

Dieser Vorgang kann beispielsweise in einem Zeitschrittverfahren simuliert werden. Dabei wird der Abtransport der Wirbel zeitlich diskretisiert betrachtet. Nach dem konvektiven Transport der Wirbel kann eine neue Lösung der Laplace-Gleichung bestimmt werden, wobei neben der

Normalenrandbedingung auf dem Körper auch beispielsweise die Kutta-Bedingung einzuhalten ist. Die Kutta-Bedingung wird in instationären Fällen nicht immer einheitlich beschrieben. Dies liegt unter anderem daran, dass das Ziel der Vermeidung einer umströmten Hinterkante nicht unbedingt eindeutig interpretierbar ist. Es stehen, wie in der stationären Formulierung auch, die Möglichkeiten zur Verfügung, zum einen Geschwindigkeiten an der Hinterkante zu bewerten oder aber zum anderen die Druckgleichheit an der Hinterkante zu fordern. Bei Kinnas et al. (1991) werden beide Verfahren diskutiert. In einem ersten Schritt wird unverändert die lineare Bedingung (Gl. 2.45) verwendet. In einem zweiten Schritt, der auch in Liu et al. (2002) erläutert wird, wird die Druckgleichheit gefordert, die auf Grund des nichtlinearen Zusammenhangs zwischen Dipolstärke und Druck nur in einem iterativen Prozess zu erreichen ist. Eine Vorgehensweise, um die Druckgleichheit zu erreichen, ist im Folgenden in Abschnitt 2.2.4 beschrieben. Im Falle der Propellerumströmung sind die zeitlichen Änderungen des Potenzials verhältnismäßig klein gegenüber der permanenten Zirkulation um den Tragflügel und haben damit nur sekundären Einfluss auf die Ausbildung der freien Wirbel. Über die hier genannten Veröffentlichungen hinaus, wird in der Literatur deutlich häufiger die lineare Bedingung (Gl. 2.45)genannt, so dass diese auch in instationären Fällen ausreichend erscheint.

2.2 Numerische Bestimmung und Auswertung des Strömungspotenzials

Das Strömungspotenzial wird durch den Greenschen Satz sowie die Randbedingungen, die darin verankert werden, beschrieben. Dies führt beispielsweise im Falle der Normalenrandbedingung zu den Gleichungen 2.40 und 2.41, die gegebenenfalls um weitere Randbedingungen, wie eine Kutta-Bedingung (Gl. 2.45) erweitert werden können.

Um eine Lösung für ein solches Strömungsproblem zu ermitteln, werden die Integrale diskretisiert, die die Quell- und Wirbelverteilung auf dem Körper beinhalten und deren Einfluss auf die Strömung wiedergeben. Das bedeutet, dass die kontinuierliche Verteilung der Dipole und der Quellen in eine diskretisierte Verteilung übergeht. Hierzu wird die Geometrie des Körpers, der freien Wirbel in einzelne Elemente, den so genannten Paneelen zerlegt. Für jedes Paneel wird eine Ansatzfunktion verwendet, welche die Dipol- und Quellverteilung als Funktion der Paneelgeomtrie beschreibt. Im Falle eines auftriebbehafteten Körpers wird der in Gl. 2.34 beschriebene Ansatz wie folgt diskretisiert:

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{x}) &= \int_S \mu\, G_2\, dS + \int_S \sigma\, G_1\, dS \\ &= \sum_{i=1}^{N} \int_{S_i} \mu\, G_2\, dS + \sum_{i=1}^{N} \int_{S_i} \sigma\, G_1\, dS\end{aligned} \tag{2.46}$$

Dabei bestehen unterschiedliche Möglichkeiten, welche Ansatzfunktionen für die Quell- und Dipolverteilungen $\sigma\, G_1$ und $\mu\, G_2$ verwendet werden. Hier wird in der Regel der Ansatz verwendet, die Quellstärke σ und die Dipolstärke μ für ein Paneel konstant zu halten, so dass für G_1 und G_2 die Funktionen aus Gl. 2.20 und Gl. 2.25 gelten. Ein solcher Ansatz ist aufgrund der konstanten Quellstärke von erster Ordnung. Wie in Katz (2001) diskutiert, ist es in der Regel nicht erforderlich Ansatzfunktionen höherer Ordnung zu implementieren, da die Berechnungsdauer im Vergleich zu einer feineren Diskretisierung erheblich steigt. Darüber hinaus steigt die Komplexität des Programms deutlich, so dass im Folgenden eine Diskretisierung 1. Ordnung verwendet wird.

Mit Hilfe der diskretisierten Integrale für das Potenzial Φ können nun an unterschiedlichen Orten $\vec{x}$ Randbedingungen aufgestellt werden. Da sich das Potenzial aus Linearkombinationen von

G_1 und G_2 zusammensetzt, kann ein lineares Gleichungssystem aufgestellt werden, in denen die Größen σ und μ die unbekannten Koeffizienten der Linearkombination darstellen. Es werden nun ebenso viele Orte, an denen eine Randbedingung zu erfüllen ist, benötigt, wie Unbekannte in der Gleichung 2.46 vorhanden sind. Im Falle der Normalenrandbedingung ist die Quellstärke bereits aus der Interpretation des Greenschen Satzes (Gl. 2.40) bekannt, so dass bei einer Diskretisierung des Körpers in N_K Paneele genauso viele unbekannte Dipolstärken vorhanden sind. Entsprechend werden N_K Orte benötigt, für die Gl. 2.40 zu erfüllen ist. Werden zur Diskretisierung des Körpers Paneele mit konstanter Quell- und Dipolstärke verwendet (Gl. 2.20 und Gl. refeq:constDoubletPhi), können die Mittelpunkte der Paneele als Kontrollpunkte verwendet werden. Diese Orte, an denen die Randbedingung zu erfüllen ist, werden Kollokationspunkte genannt, da im Programmablauf für diese Orte die Einflüsse der einzelnen Paneele aufsummiert werden.

2.2.1 Direkte Formulierung

Die Umströmung einer Tragfläche ist durch die Randbedingung 2.43 auf der Oberfläche sowie der Kutta-Randbedingung 2.45 hinreichend definiert, sofern die Lage der freien Wirbel bekannt ist. Beide Randbedingungen werten die Potenzialfunktion direkt aus, und greifen nicht auf die davon abgeleiteten Geschwindigkeiten zurück.

Bei einer Diskretisierung in N_K Paneele auf dem Körper sowie N_W Paneele für die die Kutta-Bedingung, kann das Gleichungssystem aufgestellt werden. Die Kollokationspunkte $\vec{x}_j$ liegen entsprechend der Randbedingung an den Paneelmittelpunkten. Es ist dabei zu beachten, dass bei der numerischen Auswertung der Gl. 2.25 der Kollokationspunkt im Innern des Körpers liegt:

$$\Phi(\vec{x}_j) = \sum_{i=1}^{N_K} \mu_i \underbrace{\int_{S_i} G_{2,i}(\vec{x}_j)\, dS}_{g_{2,i,j}} + \sum_{i=N_K+1}^{N_K+N_W} \mu_i \underbrace{\int_{S_i} G_{2,i}(\vec{x}_j)\, dS}_{g_{2,i,j}} + \sum_{i=1}^{N_K} \sigma_i \underbrace{\int_{S_i} G_{1,i}(\vec{x}_j)\, dS}_{g_{1,i,j}} = 0 \quad (2.47)$$

Zur kürzeren Schreibweise werden die Integrale $\int_{S_i} G_{2,i}(\vec{x}_j)\, dS$ und $\int_{S_i} G_{1,i}(\vec{x}_j)\, dS$ mit den Namen $g_{2,i,j}$ und $g_{1,i,j}$ abgekürzt:

$$\sum_{i=1}^{N_K} \mu_i\, g_{2,i,j} + \sum_{i=N_K+1}^{N_K+N_W} \mu_i\, g_{2,i,j} + \sum_{i=1}^{N_K} \sigma_i\, g_{1,i,j} = 0 \quad (2.48)$$

Weiterhin muss die Kutta-Bedingung für die Stärke der freien Wirbel (μ_i mit $N_K < i <= N_K + N_W$) berücksichtigt werden.

$$\mu_{i,upper} - \mu_{i,lower} - \mu_i = 0 \quad (2.49)$$

wobei $\mu_{i,upper}$ bzw. $\mu_{i,lower}$ für $(N_K < i <= N_K + N_W)$ die Dipolstärken der davor liegenden Körperpaneele an der Hinterkante sind. Folglich kann i, *upper* genau einer Paneelnummer zwischen *1* und N_K zugeordnet werden.

Da die Quellstärke a priori bekannt ist (Gl. 2.38), können die mit ihr verbunden Einflussterme auf die rechte Seite des Gleichungssystems übertragen werden. Das Gleichungssystem ist voll besetzt und diagonal dominant und kann daher mit einem Gauss-Eliminations-Verfahren oder auch einem Gauss-Seidel-Verfahren gelöst werden. Die iterative Lösung mit Hilfe des Gauss-Seidel-Verfahrens ist insbesondere dann von Vorteil, wenn eine Näherungslösung bekannt ist. Dies ist in der Regel nach dem ersten Iterationsschritt der Fall, unabhängig davon, ob es sich um eine stationäre oder instationäre Berechnung handelt.

2.2.2 Indirekte Formulierung

Im Gegensatz zur direkten Methode wird die Randbedingung nicht über das Potenzial definiert, sondern mit Hilfe der Geschwindigkeitsverteilung, die aus dem Potenzial resultiert. Wie in Gl. 2.41 gezeigt, kann die Normalenrandbedingung auch über $\vec{n}(\vec{x}_j)\,\nabla\Phi(\vec{x}_j)$ beschrieben werden. Ein weiterer Unterschied ist, dass der Kollokationspunkt $\vec{x}_j$ nun nicht im Körper zu positionieren ist, sondern Teil des Strömungsgebiets Ω ist. Die diskretisierte Form setzt sich dann wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned}
\vec{n}\vec{V}_K &= \vec{n}(\vec{x}_j)\,\nabla\Phi(\vec{x}_j) \\
&= \vec{n}(\vec{x}_j) \sum_{i=0}^{i<N_K} \mu_i \int_{S_i} \nabla G_{2,i}(\vec{x}_j)\,dS \\
&\quad + \vec{n}(\vec{x}_j) \sum_{i=N_K}^{i<N_K+N_W} \mu_i \int_{S_i} \nabla G_{2,i}(\vec{x}_j)\,dS \\
&\quad + \vec{n}(\vec{x}_j) \sum_{i=0}^{i<N_K} \sigma_i \int_{S_i} \nabla G_{1,i}(\vec{x}_j)\,dS
\end{aligned} \tag{2.50}$$

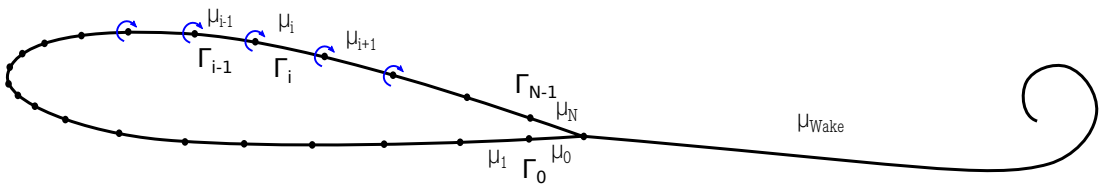
Für die Integrale $\int_{S_i} \nabla G_{2,i}(\vec{x}_j)\,dS$ und $\int_{S_i} \nabla G_{1,i}(\vec{x}_j)\,dS$ werden die Abkürzungen $\vec{f}_{2,i,j}$ und $\vec{f}_{1,i,j}$ eingeführt und der Normalenvektor $\vec{n}(\vec{x}_j)$ durch $\vec{n}_j$ ersetzt, so dass die Randbedingung umgeschrieben werden kann:

$$\sum_{i=0}^{i<N_K} \mu_i\,\vec{n}_j\vec{f}_{2,i,j} + \sum_{i=N_K}^{i<N_K+N_W} \mu_i\,\vec{n}_j\vec{f}_{2,i,j} = \vec{n}_j\vec{V}_K - \sum_{i=0}^{i<N_K} \sigma_i\,\vec{n}_j\vec{f}_{1,i,j} \tag{2.51}$$

Die Kutta-Randbedingung bleibt von dieser Vorgehensweise unbetroffen und kann wie in Gl. 2.49 verwendet werden.

Aus dieser Betrachtungsweise ergeben sich jedoch einige numerische Fragestellungen, die zusammenfassend dazu führen, dass die Genauigkeit der Methode nicht so hoch ist wie eine vergleichbare direkte Formulierung. Die Unterschiede sollen im Folgenden diskutiert werden.

Problematik geschlossener Körper Eine konstante Dipolverteilung auf einem Paneel kann in einen äquivalenten Wirbelfaden überführt werden, der entlang der Paneelkante verläuft. Aus diesem Zusammenhang resultiert, dass sich die Stärke eines Wirbelsegments zweier benachbarter Paneele aus der Differenz der angrenzenden Dipolstärken ergibt. Betrachtet man unter dieser Voraussetzung ein 2D-Tragflügel der in N Paneele diskretisiert wurde, so wird die Umströmung des Körpers letztlich durch N Wirbelsegmente repräsentiert. Hinzu kommt ein weiteres Paneel, das die freien Wirbel repräsentiert. Dies kann wiederum in zwei Wirbel zerlegt werden, einen an der Hinterkante selbst und ein weiterer der in stationären Fällen unendlich weit vom Körper weg transportiert wurde. Der zweite beeinflusst somit nicht weiter die Strömung. Durch die Randbedingung aus Gl. 2.51 stehen inklusive der Kutta-Bedingung $N + 1$ Gleichungen zur Verfügung, mit denen jedoch nur die Stärken von $N - 1$ Wirbeln auf dem Körper und die Dipolstärke in den freien Wirbeln festgelegt werden können. Die Kutta-Bedingung sorgt dafür, dass die Wirbelstärke an der Hinterkante zu Null wird, während den



weiteren N-Gleichungen, die linear unabhängig sind, zu wenige Freiheitsgrade zur Verfügung stehen. Es ist weiterhin so, dass die Stärke der Wirbelsegmente nur von der Differenz der Dipolstärken abhängt, nicht jedoch von dem Absolutwert der Dipolstärke. Somit ist das Niveau bzw. der Mittelwert der Lösung nicht durch eine Randbedingung im Gleichungssystem festgelegt. Entsprechend gibt es keine eindeutige Lösung für das Gleichungssystem. Durch numerische Ungenauigkeiten wird bei der Anwendung eines Gauss-Eliminations-Verfahren auf ein solches Problem schließlich doch eine numerische Lösung gefunden.
In dieser Lösung werden die Differenzen der Dipolstärken durchaus korrekt wiedergegeben, jedoch ist der Mittelwert der Dipolstärke nicht mehr sinnvoll interpretierbar und kann stark von Iterationsschritt zu Iterationsschritt abweichen, da er lediglich von dem numerischen Fehler des Gleichungslösers abhängt. Iterative Löser konvergieren für solche Fälle in der Regel nicht. Die Schwankung des Potenzialniveaus ist in solchen Fällen nicht mehr hinnehmbar, da die Änderung des Potenzials in den instationären Teil der Bernoulligleichung und damit in die berechneten Drücke eingeht.
Diese zweidimensionale Überlegung kann analog auch auf dreidimensionale Körper übertragen werden, die geschlossen sind. Ist der Körper hingegen offen, besteht das numerische Problem nicht mehr. In diesem Fall entstehen Paneelkanten, die keinen Nachbarn haben. Hier ist die Stärke des Wirbelsegments einzig von der Stärke des Paneels selbst abhängig. Damit ist auch das Potenzialniveau eindeutig festgelegt. Über diesen Umweg kann die Methode angepasst werden, so dass auch für geschlossene oder zweidimensionale Körper solche Fragestellung analysiert werden können. Es kann beispielsweise die Randbedingung auf einem Paneel ausgelassen werden, so dass ein offener Körper entsteht. Eine solche Vergehensweise ist jedoch keinesfalls ideal. In der direkten Methode hingegen ist das Potenzialniveau sehr wohl definiert, nämlich dadurch, dass das Potenzial im Körperinneren Null sein muss.

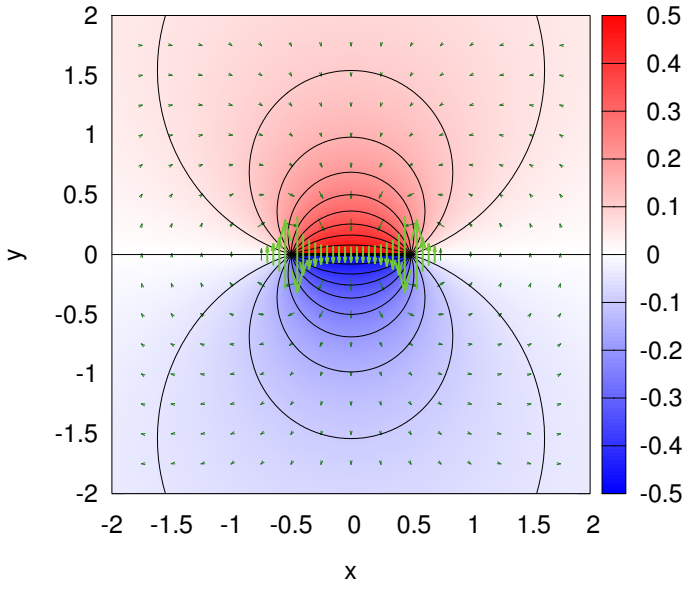


Abbildung 2.4: Potenzial- und Geschwindigkeitsverteilung um ein Wirbelpaar.

Einfluss dünner Hinterkanten Bei der Untersuchung der Umströmung von Tragflächen mit extrem dünnen Hinterkanten besteht eine sehr starke Abhängigkeit der resultierenden Kräfte von der Dicke der Hinterkante. Dies ist auf numerische Ungenauigkeiten zurückzuführen, die sich in der indirekten Methodik stärker auswirken.
Die induzierten Geschwindigkeiten am letzten Paneel an der Hinterkante werden von der Stärke der beiden gegenüberliegenden Paneele an der Hinterkante dominiert. Da deren beiden

Kollokationspunkte wegen der dünnen Hinterkante dicht beieinander liegen, sind die Einflüsse aller anderen Paneele auf die beiden Kollokationspunkte sehr ähnlich. Infolge dessen fallen die beiden Zeilen im Gleichungssystem fast identisch aus und unterscheiden sich nur an den Stellen der beiden Paneele.

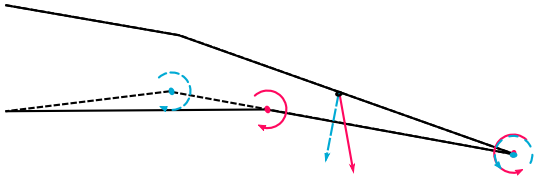


Abbildung 2.5: Wirkung zweier unterschiedlich großer Paneele auf den gegenüberliegenden Kollokationspunkt an der Hinterkante.

Das Problem besteht darin, dass die Ungenauigkeiten aus der Approximation der Dipolverteilung mit diskreten Wirbelelementen bei der indirekten Methode eine stärkere Auswirkung haben als bei der direkten Methode. Im Bereich zwischen den beiden entgegengesetzten Wirbelelementen ändern sich die induzierten Geschwindigkeiten kaum mit dem Abstand normal zum Paneel. Auf der Strecke zwischen den beiden Wirbelpunkten des Dipolelements hängt die induzierte Geschwindigkeit jedoch stark von der genauen Position des Auswertepunkts zwischen den beiden Wirbelelementen ab. An den Wibelorten selbt wird die induzierte Geschwindigkeit unendlich, in der Mitte nimmt sie ein Minimum an, wie in Abbildung 2.4 dargestellt. In dem Fall, dass ein Paneel an der Hinterkante in der Diskretisierung etwas größer ist als der gegenüberliegende Partner, entsteht ein Ungleichgewicht in der Gewichtung der Paneelstärke auf den jeweils anderen Kolloktationspunkt. Der Kollokationspunkt, der dem gegenüber liegenden Wirbelelement näher ist, wird durch das gegenüber liegende Paneel der Stärke *1* stärker beeinflusst als die umgekehrt der Fall ist. Folglich haben beide Elemente einen unterschiedlich starken Einfluss auf einander. Je weiter die Paneele entfernt sind, um so geringer wird der störende Einfluss der Singularitäten. Die induzierte Wirkung zweier unterschiedlich großer Paneele auf einen Kollokationspunkt ist in Abbildung 2.5 gezeigt.
In der direkten Methode hingegen geht das Potenzial in das Gleichungssystem ein. Im Falle des verwendeten Dipolelements nimmt das Potenzial auf der Paneeloberfläche einen konstanten Wert an. Da die Geschwindigkeit normal zum Paneel in etwa konstant ist und die Geschwindigkeit die Ableitung des Potenzial ist, ändert sich das Potenzial linear mit dem Normalenabstand zum Paneel. Daher hängt der Einfluss eines Paneels auf den gegenüberliegenden Kollokationspunkt hautsächlich vom Normalenabstand zum Paneel ab und nur kaum von dem seitlichen Abstand zum näher liegenden Kollokationspunkt. Folglich haben kleine Größenunterschiede bei den gegenüberliegenden Paneelen einen geringeren Einfluss auf die Lösung.
Als Konsequenz aus den getroffenen Überlegungen ist zu folgern, dass der Einfluss der Diskretisierung der Körperoberfläche und die damit verbundenen störenden Einflüsse der Singularitäten in der indirekten Methode stärker zum Tragen kommen.
Dieser Abhängigkeit kann entgegengewirkt werden, indem die Kollokationspunkte künstlich voneinander separiert werden. Streng genommen ist in unmittelbarer Nähe des Körpers die Anwendung der Potenzialtheorie nicht korrekt, da hier viskose Effekte die Strömung innerhalb der Grenzschicht dominieren. Eine Alternative ist die Berücksichtigung der Grenzschicht, außerhalb derer die Potenzialtheorie angewendet werden darf. Durch Abschätzung der Grenzschichtdicke mit Hilfe von semiempirischen Ansätzen oder auch durch die Anwendung geeigneter Grenzschichttheorien ist es möglich, die Kollokationspunkte und auch die Paneele selbst in die Strömung zu verlagern, so dass das Problem der dünnen Hinterkante eliminiert

wird. Auf der einen Seite ist von Vorteil, dass die Grenzschicht im Bereich der Hinterkante eine hohe Dicke erreicht. Auf der anderen Seite muss das Profil an der Hinterkante nun mit einem verhältnismäßig stumpfen Ende geschlossen werden, um die Kutta–Bedingung anwenden zu können. Alternativ besteht die Möglichkeit die Fortsetzung der Grenzschicht in der Wirbelschicht zu berücksichtigen, was den Rechenaufwand und die Komplexität des Programms deutlich erhöht. Mit einer solchen Methode lässt sich die Problematik der dünnen Hinterkante zwar möglicherweise lösen, jedoch entstehen mit der Berechnung der Grenzschichtdicke neue numerische Probleme und Inkonsistenzen, beispielsweise bei der Berechnung und Integration der Drücke, die nun entweder der ursprünglichen Geometrie oder aber der um die Grenzschicht verschobenen Geometrie zugeordnet werden können.

Aufgrund der hier beschriebenen Problematik liefert die indirekte Methode nicht immer eine zuverlässige Genauigkeit. Dennoch werden solche indirekten Verfahren vorgeschlagen (siehe hierzu Katz (2001)). Ein Grund hierfür ist vermutlich die intuitivere Betrachtung des Problems, bei der die strömungstechnische Lösung als Superposition von induzierten Geschwindigkeiten betrachtet werden kann, die in ihrer Summe die Normalenrandbedingung erfüllen.

In dem Fall, dass der Körper nicht geschlossen modelliert ist, ist zu prüfen, ob die direkte Methode belastbare Ergebnisse liefert oder ob die indirekte Methode vorzuziehen ist. Die indirekte Methodik wird des öfteren bei Potenzialkombinationen angewendet, die nicht mit Hilfe des Greenschen Satz begründet werden. Beispielsweise können vielfach Strömungen, die nicht auftriebbehaftet sind, mit einer reinen Quellverteilung abgebildet werden. So kann für eine Kugel in paralleler Anströmung eine Konvergenz mit zunehmender Diskretisierungsgenauigkeit gegen die analytische Lösung gezeigt werden. Aus numerischer Sicht können beide Methoden ohne Weiteres kombiniert werden, so dass beispielsweise für bestimmte Teile einer Geometrie die indirekte Methode angewendet wird und für den Rest ein direkte Vorgehensweise gewählt wird.

2.2.3 Bestimmung der freien Wirbel

Die Stärke und die Lage der freien Wirbel sind a priori nicht bekannt, so dass daraus ein nichtlineares Problem entsteht. In der numerischen Implementierung eines entsprechenden Modells ist daher auf beide Aspekte einzugehen

Substitution der Kutta–Bedingung

Die Kutta–Bedingung aus Gleichung 2.49 kann in das Gleichungssystem substituiert werden, so dass sich die Anzahl der Gleichungen reduziert. Die Normalenrandbedingung lautet in der direkten Formulierung:

$$\sum_{i=1}^{N_K} \mu_i \, g_{2,i,j} + \sum_{k=N_K+1}^{N_K+N_W} \mu_k \, g_{2,k,j} + \sum_{i=1}^{N_K} \sigma_i \, g_{1,i,j} = 0 \tag{2.52}$$

wobei die Stärke der freien Wirbel μ_k mit $(N_K \leq k < N_K + N_W)$ durch die Kutta–Bedingung $\mu_k = \mu_{k,upper} - \mu_{k,lower}$ festgelegt ist. Die Zähler k_{upper} und k_{lower} entsprechen dabei den Paneelnummern der angrenzenden Körperpaneele an der Hinterkante, wie in Abbildung 2.6 gezeigt. Die Einflusskoeffizienten der Paneele auf dem Körper $g_{2,i,j}$ können dann wie folgt umgeschrieben werden:

$$g'_{2,i,j} \begin{cases} g_{2,i,j} + g_{2,k,j}, & \text{falls } i = k_{upper} \\ g_{2,i,j} - g_{2,k,j}, & \text{falls } i = k_{lower} \\ g_{2,i,j} & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2.53}$$

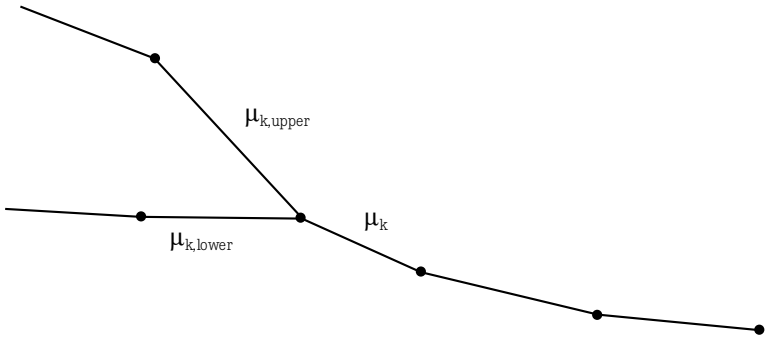


Abbildung 2.6: Indizierung der Paneele an der Hinterkante zur Substitution der Kutta–Randbedingung.

Es ändern sich im Gleichungssystem nur Einträge von Paneelen, die an die Hinterkante stoßen. Die Komponente $g_{2,k,j}$ ist dabei der Einfluss des angrenzenden Wirbelstreifens mit dem Index k an der Hinterkante auf den Kollokationspunkt $\vec{x}_j$.

Verschiebung der freien Wirbel

Stationäre und instationäre Prozesse unterscheiden sich in potenzialtheoretischen Verfahren zur Berechnung von wirbelbehafteten Strömungen hauptsächlich in der Modellierung der freien Wirbel. Da in stationären Prozessen die Wirbelstärke am Körper zeitlich konstant ist, hat ein Wirbelstreifen, der von einem Element an der Hinterkante ausgeht, eine konstante Stärke. In instationären Prozessen kann sich die Wirbelstärke zeitlich ändern, so dass an der Hinterkante stets neue Wirbelelemente erzeugt werden, die an die Strömung abgegeben werden und mit der Strömung abtreiben, wobei sie ihre ursprüngliche Stärke behalten. Aus diesem Ansatz resultieren zwei Wirbelmodelle.

stationäres Wirbelmodell Im ersten Iterationsschritt wird davon ausgegangen, dass sich die Wirbelflächen ausgehend von der Hinterkante in Richtung der ungestörten Anströmung ausbreiten. Dazu wird in stationären Fällen ein virtueller Zeitschritt Δt eingeführt, der die Diskretisierung der Wirbelfläche vorgibt. Die ungestörte Anströmung $\vec{v}_\infty$ ergibt sich aus dem Bewegungsmodell, das für den Körper angesetzt wird, von dem die Wirbelfläche ausgeht. Besitzt der Körper eine Drehgeschwindigkeit, so ist die Anströmgeschwindigkeit von der Koordinate im Raum abhängig. Entsprechend kann ausgehend von den Paneelen an der Hinterkante eine Stromlinie ermittelt werden, auf der die Kanten der Paneele des Wirbelstreifens angeordnet werden. Dabei kann ein maximales Wirbelalter angegeben werden, das die Länge des Stromfadens vorgibt. In den darauf folgenden Iterationsschritten muss die Wirbelschicht angepasst werden, damit sie kraftfrei wird. Dazu wird sie dem lokalen Strömungsverlauf angepasst. Dies bedeutet, dass die Eckpunkte der Paneele verschoben werden müssen. Da an den Paneelkanten die Potenziale singulär sind, können die induzierten Geschwindigkeiten nicht auf der Kante selbst ausgewertet werden. Aus diesem Grund erfolgt die Bestimmung der induzierten Geschwindigkeiten $\vec{v}_k$ an der Mitte des Paneels k. Die Strömung entlang der Paneelkante $\vec{C}_2$ nach $\vec{C}_3$ (siehe Abbildung 2.7) kann nun näherungsweise durch Interpolation der Geschwindigkeiten an den benachbarten Paneelmittelpunkten bestimmt werden. Dabei ist in der stationären Betrachtung die Starrkörperbewegung $\vec{v}_\infty = -\vec{v}_K$ zu berücksichtigen. Der neue Paneeleckpunkt $\vec{C}_3'$ wird dann wie folgt bestimmt:

$$\vec{C}_3' = \vec{C}_2 + ((\vec{v}_k + \vec{v}_{k+1})\tfrac{1}{2} + \vec{v}_\infty)\Delta t \tag{2.54}$$

Die Abarbeitung der Verschiebung der Wirbelfläche erfolgt entgegengesetzt der Hauptströmungsrichtung, um ein Überschwingen der Fläche zu vermeiden. Es werden zunächst alle

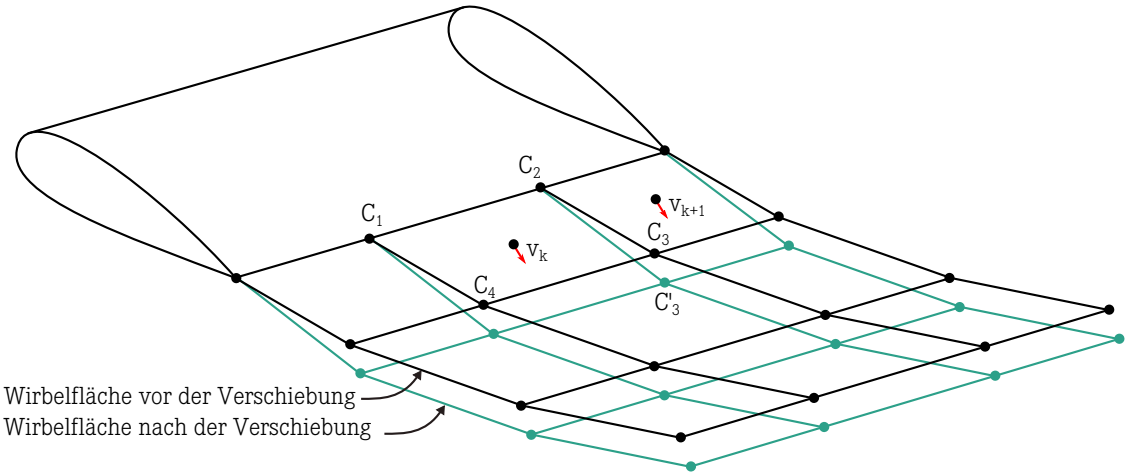


Abbildung 2.7: Verschiebung der Paneele in den freien Wirbeln.

induzierten Geschwindigkeiten an den Paneelmittelpunkten der freien Wirbel bestimmt, bevor die Verschiebung der freien Wirbelfläche vom hinteren Ende an stromaufwärts abgearbeitet wird. Nach einem stationären Iterationsschritt wird dieses Vorgehen vier mal durchgeführt, bevor das Gleichungssystem neu besetzt wird. Dies führt zu einer schnelleren Konvergenz des Prozesses.

instationäres Wirbelmodell In instationären Fällen behält ein einmal erzeugtes Wirbelelement seine Stärke und wird mit der Strömung abtransportiert. Mit jedem Zeitschritt entstehen neue Paneele an der Hinterkante, deren Stärke über die Kutta-Bedingung ermittelt wird. Über den Abtransport der Wirbel entsteht eine Lücke zwischen der Hinterkante und dem ersten Wirbelelement, die durch ein neues Paneel zunächst unbekannter Stärke geschlossen wird. Die Transportgeschwindigkeit des Eckpunktes wird ebenfalls durch Interpolation der Geschwindigkeiten an den Mittelpunkten der beiden benachbarten Paneele bestimmt. Die Lage des neuen Eckpunkts ergibt sich nun aus:

$$\vec{C}_2' = \vec{C}_2 + (\vec{v}_k + \vec{v}_{k+1})\frac{\Delta t}{2} \tag{2.55}$$

Die hierbei verwendete Schrittweite Δt ist nun die tatsächliche Zeitschrittweite mit der der Strömungsprozess aufgelöst wird. Die Geschwindigkeit des Körpers ist in dieser Betrachtung nicht weiter relevant, da durch das Bewegungsmodell alle körperbezogenen Paneele in jedem Zeitschritt entsprechend der Zeitschrittweite um die Starrkörperbewegung verschoben werden.

Da die räumliche Auflösung der freien Wirbel in instationären Rechnungen vom Zeitschritt abhängt, steigt bei einer bei feineren zeitlichen Auflösung die Paneelanzahl in den freien Wirbeln an. Folglich wächst auch der Rechenaufwand für die Auswertung einer Strömungsgröße an einem Kollokationspunkt. Demnach ist bei der Wahl des Zeitschritts auch der höhere Rechenbedarf für die Auswertung eines Zeitschritts zu berücksichtigen.

Spitzenwirbel Die Verschiebung der freien Wirbel führt unter anderem zu dem Aufrollvorgang wie er an der Blattspitze eines endlichen Tragflügels entsteht. Bei der Bestimmung der Verschiebevektoren besteht jedoch das Problem, dass keine geeigneten Interpolationspartner für das äußerste Paneel an der Blattspitze zur Verfügung stehen. Eine Möglichkeit besteht darin, einen Interpolationspartner zu erzeugen, indem aus dem Gebiet der freien Wirbel heraus Orte extrapoliert werden, an denen die Induzierte bestimmt wird, so dass ausreichend Interpolationspartner vorhanden sind. Bei der Extrapolation des Ortes können nun verschiedene Probleme entstehen, wie beispielsweise, dass der Ort in einem anderen Körper oder in der Nähe einer anderen Singularität liegt. In beiden Fällen wäre die resultierende Induzierte

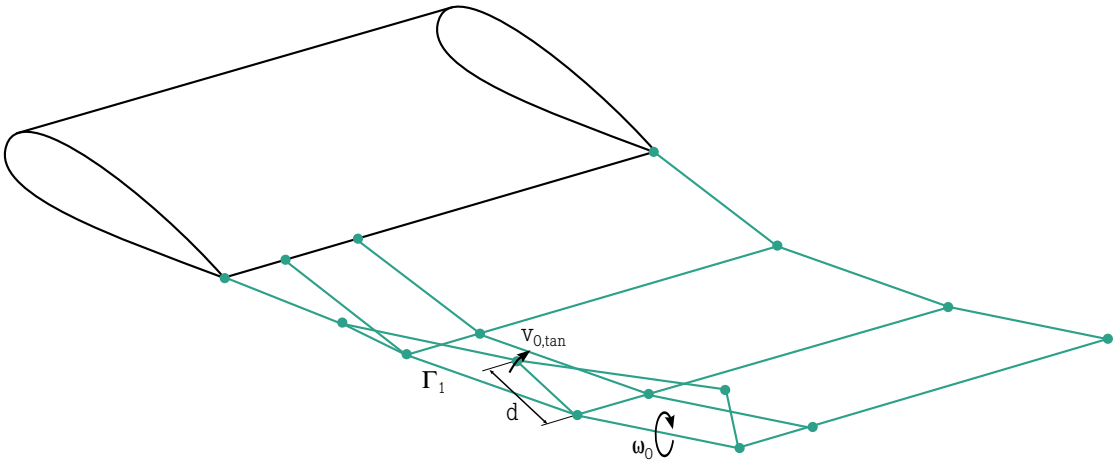


Abbildung 2.8: Verschiebung der Paneele in den freien Wirbeln.

stark fehlerbehaftet. In einem solchen Fall bietet es sich an, die Verzerrung des äußersten Wirbelfadens über einen vereinfachten analytischen Zusammenhang zu beschreiben. Durch die äquivalente Umformung eines Dipols in einen Wirbelfaden, können die Dipolpaneele in den freien Wirbeln auch als einzelne Wirbelfäden aufgefasst werden. Diese näherungsweise parallel verlaufenden Wirbelfäden erstrecken sich entlang der Paneelkanten. In einer zweidimensionalen Betrachtung induzieren zwei Wirbel jeweils wechselseitig eine Geschwindigkeit aufeinander, so dass letztlich diese umeinander rotieren wie in Abbildung 2.8 zu sehen ist. Dieser Zusammenhang wird beispielsweise in Truckenbrodt (1999) als Wirbelsystem ebener Potenzialwirbel beschrieben. Beide Wirbel rotieren um einen gemeinsamen Schwerpunkt, der aus Wirbelstärke und dem Abstand untereinander gebildet werden kann. Zu der Rotation kommt die beiden Wirbeln gemeinsame Verschiebung des Schwerpunktes. Da dies in der Verschiebung des inneren Wirbels bereits berücksichtigt ist, bleibt für den Wirbel an der Spitze (Index: 0) nur die Drehgeschwindigkeit um den benachbarten Wirbelfaden (Index: 1). Diese ergibt sich in erster Näherung aus der Induktion um die Stärke Γ_1, sofern man die Einflüsse der weiter entfernten Wirbel vernachlässigt:

$$\omega_0 = \frac{v_{0,tan}}{d} = \frac{\Gamma_1}{2\pi d^2} \tag{2.56}$$

Hierbei ist d der radiale Abstand zwischen den beiden Wirbelfäden. Mit Hilfe der Zeitschrittweite Δt kann nun ein Drehwinkel bestimmt werden um den der äußerste Wirbelfaden um seinen Nachbarn rotieren wird. Dieses Verfahren ist robust und kann sowohl in stationären als auch instationären Fällen verwendet werden.

Unterdrückung der Singularitäten Bei der Auswertung der induzierten Geschwindigkeit kann es dazu kommen, dass in unmittelbarer Nähe einer Singularität ausgewertet wird. Die Geschwindigkeit, die in einem solchen Fall extrem hoch werden kann, ist nicht durch physikalische Effekte bedingt, sondern vielmehr dadurch, dass die kontinuierliche Zirkulationsverteilung um den Tragflügel durch diskrete Wirbel angenähert wird. Solche extrem hohen Geschwindigkeiten, führen bei der Verschiebung der freien Wirbel zu sehr großen Verschiebungen, die ebenso nicht physikalisch begründet sind. Um diesem numerisch bedingten Fehler in Folge der Diskretisierung entgegen zu wirken, werden die Singularitäten ausgeblendet, wenn der Auswertepunkt zu nah bei der Singularität liegt. In diesem Fall wird der Beitrag eines Quell- oder Wirbelsegments in der Auswertung nicht berücksichtigt. Streng genommen entsteht hierdurch zwar ein Fehler in der Potenzialfunktion jedoch sind diese Auswirkungen vernachlässigbar gegenüber den Fehlern, die aus falsch verschobenen freien Wirbeln entstehen.

Der induzierte Beitrag einer Paneelkante zur Induzierten aller Paneele wird unterdrückt, falls der Abstand zwischen Auswertepunkt und Kante einen vorgegebenen Mindestwert unterschreitet. Numerische Versuche haben gezeigt, dass diese Mindestlänge etwa 7.5 % der kleinsten Kantenlänge eines an die Kante angrenzenden Paneels betragen sollte. Da eine Kante in der Regel an zwei Paneele stößt, wird der größere der beiden Werte verwendet. Auf der einen Seite sollte dieser Werte möglichst klein sein, um das Potenzial nicht zu sehr zu verfälschen. Auf der anderen Seite verbessert ein größerer Wert die numerische Robustheit des Programms.
In vergleichbaren Verfahren sind ähnliche Methoden implementiert, um die Wirkung der Singularitäten zu unterdrücken. Eine mögliche Variante ist beispielsweise, immer nur in einem Mindestabstand von der Paneelkante auszuwerten. Ein Auswertepunkt, der näher an der Kante liegt als der Mindestabstand vorgibt, wird bei der Auswertung der entsprechenden Kante radial von dieser weg verschoben. Ein anderer Weg ist, einen modifizierten Ansatz für die Singularität zu verwenden. Beispielsweise kann die Geschwindigkeitsverteilung um einen Wirbel verändert werden, indem der Wirbel als Rankine-Wirbel betrachtet wird. Das heißt, dass dieser innerhalb eines vorzugebeneden Radius als drehender Starrkörper betrachtet wird und ausserhalb dieses Radius als Potenzialwirbel. Dies führt zwar zu einer stetigen Geschwindigkeit um den Wirbel, die Potenzialfunktion für diesen Wirbel ist jedoch nicht definiert. Letztlich haben die gewählten Ansätze nur geringen Einfluss auf die integralen Werte der untersuchten Geometrie, sie verbessern die numerische Stabilität des Verfahrens jedoch deutlich. Eine physikalischer Analogie kann für keinen dieser stabilisierenden Ansätze herangezogen werden.

2.2.4 3D-Kutta-Bedingung

Die Kutta-Randbedingung wird, wie eingangs erläutert, als lineare Bedingung in das Gleichungssystem substituiert. Sie führt dazu, dass der Wirbel, der an einem Segment der Hinterkante entsteht, die Dipoldifferenz an Saug- und Druckseite ausgleicht. Daraus resultiert noch keine Druckgleichheit an der Hinterkante, da der Druck auch von Strömungskomponenten quer zur Hinterkante beeinflusst werden kann, die durch das Kriterium nicht erfasst werden. In Folge dessen sind häufig leichte Fehler bei den berechneten Druckbeiwerten an der Hinterkante zu beobachten, die oftmals zu einem leicht höheren Druck auf der Saugseite als auf der Druckseite führen, wie in Abbildung 2.9 dokumentiert ist.

Aus diesem Grund wurde von Kerwin et al. (1987) ein nichtlineares Verfahren vorgeschlagen, mit dem die Druckgleichheit an der Hinterkante erreicht wird. Dieses Verfahren wurde von Kinnas und Hsin (1992) weiterentwickelt. Im Wesentlichen basiert es auf einer Newton-Raphson-Methode, mit der eine Änderung des Potenzials ausgehend von der linearen Lösung iterativ bestimmt wird, so dass die Druckdifferenz an der Hinterkante null wird. Darüber hinaus sind in der Literatur ähnliche Ansätze zu finden (beispielsweise in Liu et al. (2002)), die sich hauptsächlich in der Methode zur Bestimmung der Nullstelle unterscheiden und damit die Robustheit des Verfahrens verbessern sollen.

Ausgehend von der Lösung der linearen Kutta-Randbedingung ($\boldsymbol{\mu}_{K,lin}$ ist ein Vektor mit der Dipolverteilung auf dem Körper und $\boldsymbol{\mu}_{W,lin}$ ein Vektor mit der Dipolverteilung in den freien Wirbeln), wird eine geänderte Zirkulationsverteilung gesucht, die die Druckrandbedingung an der Hinterkante erfüllt. Dabei ist zu berücksichtigen, dass parallel zu der geänderten Zirkulationsverteilung in den freien Wirbeln eine Dipolverteilung auf dem Körper gefunden wird, die die Normalenrandbedingung erfüllt. Daher wird nacheinander jedem Wirbelstreifen eine Einheitsdipolstärke als Störung zugewiesen und eine neue Dipolverteilung auf dem Körper bestimmt, die bei dieser Störung die

Normalenrandbedingung erfüllt. In Folge dessen stehen neben der Lösung aus der linearen Kutta-Bedingung, bei N_W Wirbelstreifen, N_W weitere Dipolverteilungen auf dem Körper zur Verfügung, die jeweils die Normalenrandbedingung im Falle einer Störung durch einen einzelnen Wirbelstreifen erfüllen. Diese Lösungen können nun linear kombiniert werden, wobei die Normalenrandbedingung auf dem Körper immer als Nebenbedingung erhalten bleibt. Diese N_W Verteilungen werden in einer Matrix $\mathbf{M}$ der Größe $N_K \times N_W$abgelegt.

$$\mathbf{M} = \{\mu_{K1},\, \mu_{K2},\, \mu_{K3},\quad \ldots,\, \mu_{KN_W}\} \tag{2.57}$$

Das Potenzial, das die nichtlineare Druckrandbedingung erfüllt, setzt sich dann aus der linear ermittelten Lösung und einer Linearkombination der Einzellösungen zusammen. Sofern das Verfahren nach n Iterationsschritten konvergiert, lautet die Dipolverteilung:

$$\boldsymbol{\mu}_K = \boldsymbol{\mu}_{K,lin} + \mathbf{M}(\boldsymbol{\mu}_W^n - \boldsymbol{\mu}_{W,lin}) \tag{2.58}$$

Die Aufgabe des Newton-Raphson-Verfahrens ist nun, eine geeignete Zirkulationsverteilung $\boldsymbol{\mu}_W^n$ zu bestimmen, die für jedes Paneel an der Hinterkante zu einer Druckdifferenz von Null führt. Dabei ist die Druckdifferenz eine nichtlineare Funktion der Zirkulationsverteilung.

$$\Delta p_j^n = f(\boldsymbol{\mu}_W^n) \to 0 \qquad \text{für alle Paneele } j \text{ an der Hinterkante} \tag{2.59}$$

Das Newton-Raphson-Verfahren ist ein Gradientenverfahren, zu dessen Lösung die Jacobi-Matrix $\mathbf{J}(\boldsymbol{\mu}_W^n)$, also die Matrix der partiellen Ableitungen, benötigt wird.

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\mu}_W^n) \cdot \Delta\boldsymbol{\mu}_W^n = -\Delta\mathbf{p}^n \tag{2.60}$$

Da es ebenso viele Wirbelstreifen wie Paneele an der Hinterkante gibt, ist das Gleichungssystem 2.60 hinreichend definiert. Durch den nichtlinearen Zusammenhang zwischen p und μ, muss das System mehrmals gelöst werden, wobei sich die Matrix $\mathbf{J}$ aufgrund der Nichtlinearität in jedem Schritt ändert. Die gesuchte Wirbelverteilung wird nun iterativ bestimmt, wobei sich die Zirkulationsverteilung im neuen Iterationsschritt $^{n+1}$ gegenüber dem vorherigen Schritt ^{n} wie folgt ändert:

$$\boldsymbol{\mu}_W^{n+1} = \boldsymbol{\mu}_W^n + \Delta\boldsymbol{\mu}_W^n \tag{2.61}$$

Als Startlösung $\boldsymbol{\mu}_W^0$ wird die Lösung aus der linearen Randbedingung $\boldsymbol{\mu}_{W,lin}$ verwendet.

Die Matrix $\mathbf{J}$ setzt sich aus den partiellen Ableitungen zusammen, die numerisch approximiert werden:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_0}{\partial \mu_{W,0}} & \frac{\partial p_0}{\partial \mu_{W,1}} & \cdots & \frac{\partial p_0}{\partial \mu_{W,i}} & \cdots & \frac{\partial p_0}{\partial \mu_{W,N_W}} \\ \frac{\partial p_1}{\partial \mu_{W,0}} & \frac{\partial p_1}{\partial \mu_{W,1}} & \cdots & \frac{\partial p_1}{\partial \mu_{W,i}} & \cdots & \frac{\partial p_1}{\partial \mu_{W,N_W}} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \frac{\partial p_{N_W}}{\partial \mu_{W,0}} & \frac{\partial p_{N_W}}{\partial \mu_{W,1}} & \cdots & \frac{\partial p_{N_W}}{\partial \mu_{W,i}} & \cdots & \frac{\partial p_{N_W 0}}{\partial \mu_{W,N_W}} \end{pmatrix} \tag{2.62}$$

Das Element $\frac{\partial p_j}{\partial \mu_{W,i}}$ beschreibt die Druckänderung am Paneel j, die aus einer kleinen Änderung der Wirbelstärke i resultiert. Zu diesem Zweck wird die partielle Ableitung durch einen Differenzenquotient ersetzt. Es werden die Wirbelstärken nacheinander variiert und die daraus resultierende Druckänderung an dem Paneel j auf die kleine Änderung der Wirbelstärke bezogen. Dabei ist zu beachten, dass mit der Änderung der Wirbelstärke auch die entsprechend veränderte Dipolverteilung auf dem Körper zu verändern ist, so dass die Normalenrandbedingung erfüllt bleibt. Hierfür werden die zu Anfang ermittelten N_W Dipolverteilungen auf dem Körper herangezogen, die entsprechend der Änderung der Wirbelstärke linear kombiniert werden (siehe Gl. 2.58).

Das Verfahren konvergiert in der Regel innerhalb weniger Iterationsschritte, meist sind 5 oder 6 Schritte ausreichend. Bis auf die Bestimmung der Matrix **M** ist der Rechenaufwand gering. Die Gleichungssysteme, die für die Bestimmung der Matrix **M** benötigt werden, unterscheiden sich nur in der rechten Seite, so dass effiziente Gleichungslöser hierfür verwendet werden. Die Lösung der nichtlinearen Kutta-Randbedingung ist daher ähnlich zeitaufwändig wie das Lösen des Gleichungssystems, das für die lineare Randbedingung benötigt wird. Da die lineare Lösung als Startlösung des nichtlinearen Problems verwendet wird, verdoppelt sich etwa die Dauer, die für das Lösen der linearen Gleichungssysteme benötigt wird. Die Matrixeinträge in beiden Systemen sind fast identisch, lediglich die substituierte lineare Kutta-Randbedingung entfällt im zweiten Fall, so dass das Aufstellen des zweiten Systems so gut wie keinen zusätzlichen Rechenaufwand bedeutet.

Konvergenzprobleme können entstehen, wenn die Paneele an der Hinterkante oder die Paneele in den freien Wirbeln stark verzerrt sind. In diesem Fall ist die Linearisierung der Jacobi-Matrix, die durch die numerische Approximation entsteht, zu ungenau. Solchen Fällen kann entgegengewirkt werden, indem die kleine Änderung $\Delta\mu$, mit deren Hilfe die partielle Ableitung bestimmt wird, verkleinert wird. Weiterhin kann in solchen Fällen eine Unterrelaxation der Gl. 2.61 die Konvergenz verbessern.

Einfluss der nichtlinearen Kutta–Bedingung

Die nichtlineare Kutta-Bedingung führte in den hier untersuchten Fällen zu einer leichten Erhöhung des Schubs verglichen mit den Ergebnissen der linearen Bedingung. Dies ist vor allem darauf zurückzuführen, dass bei Verwendung der linearen Bedingung die Druckgleichheit oftmals etwa 5 % vor der Hinterkante erreicht wurde, wie in Abbildung 2.9 dargestellt ist. Die Einhaltung der Druckrandbedingung führt dann zu einer Absenkung des Drucks auf der Saugseite und einer Anhebung des Drucks auf der Druckseite, so dass die Druckgleichheit erst an der Hinterkante erreicht wird. Im Bereich der Nabe kann sich dieser Effekt auch umkehren, jedoch tragen die inneren Radien erheblich weniger zum Gesamtschub bei. Diese Aussage lässt sich vermutlich nicht ohne weiteres verallgemeinern, da das Verhalten im Detail vom Propeller, dessen Betriebspunkt und gegebenenfalls auch von der Paneelierung der Geometrie abhängt. Auch wenn in Liu et al. (2002) von einem gegenteiligen Effekt berichtet wird, wiesen alle hier untersuchten Propeller das oben beschriebene Verhalten auf.

Der Einfluss dieser nichtlinearen Formulierung auf die integralen Größen scheint im Hauptbetriebspunkt eines Propellers gering zu sein, so dass kein erheblicher Vorteil durch die Verwendung dieser Randbedingung entsteht. Da mit der iterativen Formulierung bei unzureichender Konvergenz erhebliche numerische Probleme entstehen können, kann die Robustheit des Verfahren deutlich eingeschränkt werden.

Bemerkungen zu der nichtlinearen Kutta–Bedingung

Die hier dargestellte numerische Methode mit der die Druckgleichheit an einer Hinterkante eines Tragflügels erreichen werden soll, weist im Detail mehrere Schwächen auf. Ein wesentliches Problem besteht darin, dass das Ergebnis stark von der Startlösung abhängt. So wird eine völlig andere Druckverteilung erreicht, wenn als Startlösung des iterativen Prozess nicht die lineare Kutta-Bedingung, sondern beispielsweise $\boldsymbol{\mu}_W^0 = 0$ gewählt wird. In einem solchen Fall wird nur ein Bruchteil des Schubs erreicht. Daraus folgt, dass die Randbedingung das Problem nicht eindeutig beschreibt. Dies gilt zumindest für den dreidimensionalen Fall, in 2D-Fällen hingegen kann ein beliebiger Startpunkt gewählt werden. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Druckrandbedingung

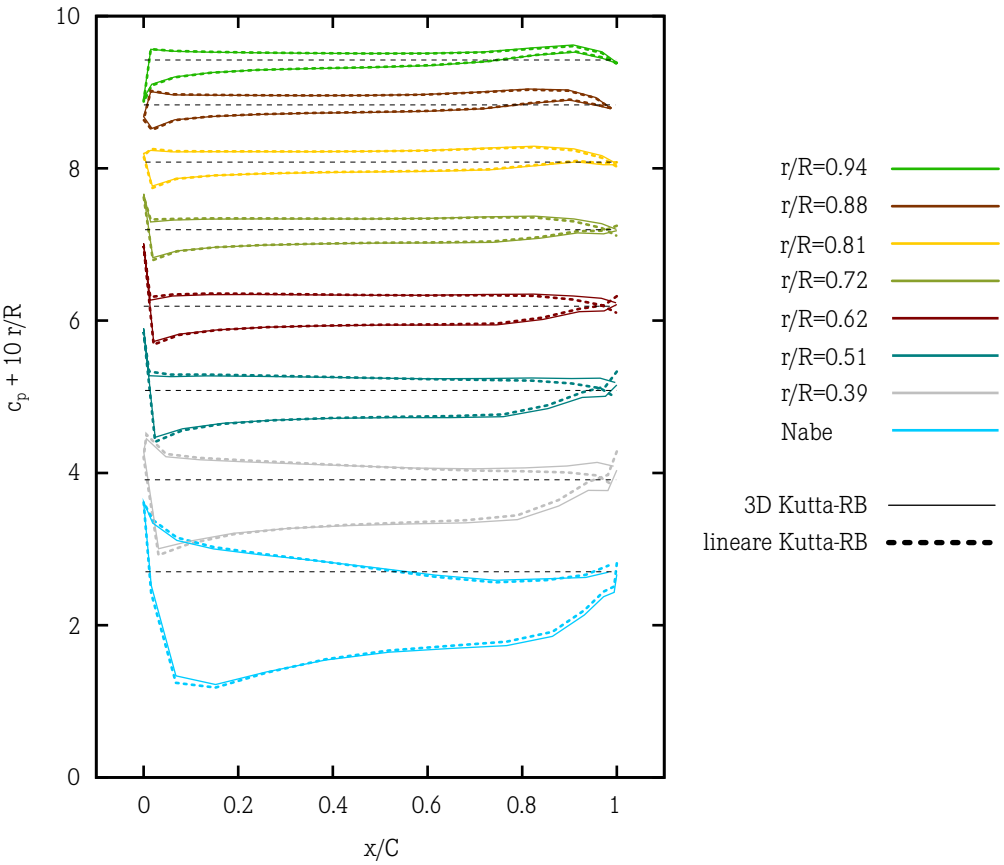


Abbildung 2.9: Einfluss der nicht-linearen Kutta-Randbedingung auf die Druckverteilung.

im zweidimensionalen Fall äquivalent zur linearen Bedingung ist, wie in der Herleitung (Abschnitt 2.1.3) gezeigt wurde. Entsprechend wird auch nur ein Iterationsschritt benötigt, um die Bedingung zu lösen.

An dem Beispiel eines zweidimensionalen Tragflügels wird ein weiteres Problem ersichtlich. In Abbildung 2.10 ist die Druckverteilung auf einem NACA-Flügel bei unterschiedlicher Diskretisierung dargestellt. Trotz der stark unterschiedlichen Paneelierung (99 Paneele zu 9), werden über weiter Bereiche des Flügels ähnliche Druckdifferenzen zwischen Druck- und Saugseite berechnet. Durch die Tatsache, dass der letzte Kollokationspunkt immer ein Stück weit von der Hinterkante entfernt ist, darf die nichtlineare Druckbedingung, streng genommen, nicht am Kollokationspunkt des letzten Paneels erfolgen. Dieser Fehler kann in der numerischen Umsetzung korrigiert werden, indem der Druck an der Hinterkante mit Hilfe der Druckänderung zwischen dem letzten und vorletzten Paneel extrapoliert wird. Durch den Druckgradienten in diesem Bereich ist diese Vorgehensweise jedoch stark von der Netzauflösung abhängig. Problematisch kann ebenfalls die geometrische Beschreibung der Hinterkante eines Profils sein. In vielen Fällen bleibt aus fertigungstechnischen Gründen ein bestimmter Radius an der Hinterkante bestehen, der häufig als stumpfes Ende in den geometrischen Daten modelliert ist. Eine solch stumpfe Hinterkante kann in der potenzialtheoretischen Betrachtung zu extrem niedrigen Drücken führen, da die Kante lokal umströmt wird und hier sehr große Druckgradienten auftreten können. Da die hier die berechneten Drücke nicht mehr physikalisch korrekt sind, ist das Ergebnis, das in einem solchen Fall mit Hilfe der nicht-linearen Randbedingung gewonnen wird, in Frage zu stellen. Zusammenfassend kann die Problematik auf den Öffnungswinkel zwischen den Paneelen an der Hinterkante zurückgeführt werden. Je größer dieser Öffnungswinkel ist, umso stärker sind die berechneten Drücke von der Diskretisierung der Hinterkante abhängig.

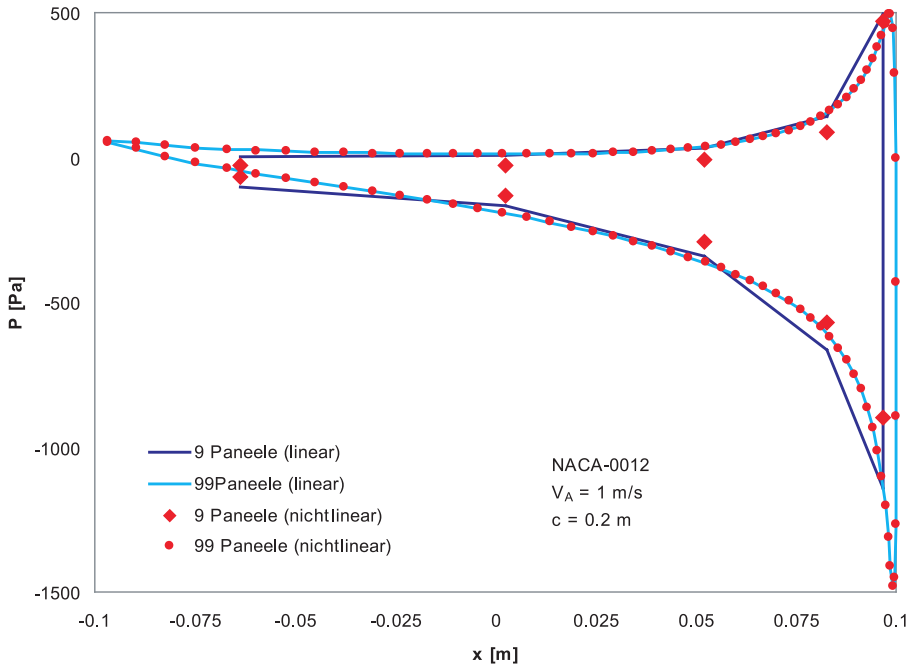


Abbildung 2.10: Einfluss der Diskretisierung auf den Druckverlauf bei Verwendung der nichtlinearen Kutta-Bedingung.

Mit der Problematik der Diskretisierung gehen auch Probleme bei der Konvergenz des iterativen Prozess einher. Es besteht die Möglichkeit, dass das Residuum nicht unter eine gegebenen Grenze sinkt. Dieses Problem kann in der Regel ausreichend durch sukzessive Unterrelaxation behoben werden. Als Residuum wurde hier das Fehlerquadrat der Druckdifferenzen aller Paneele an der Hinterkante herangezogen. Problematischer sind solche Fälle, bei denen das Residuum stetig kleiner wird, aber die Lösung offensichtlich nicht sinnvoll ist, da sie ausgehend von einer glatten Zirkulationsverteilung in der linearen Lösung zu einer Lösung mit Sprüngen in der Zirkulationsverteilung konvergiert. Solche Fehler sind im Programmablauf nur schwer zu abzufangen und haben starken Einfluss auf die integralen Werte. Dieses Konvergenzproblem ist vermutlich auch auf die Mehrdeutigkeit der Randbedingung zurück zu führen, wie es beispielsweise auch bei dem Einfluss der Startlösung auf das Ergebnis ersichtlich wird.

Ein weiterer Aspekt ist, dass die nichtlineare Formulierung im Wesentlichen die Strömung nur im Bereich der Hinterkante verändert. Während die Druckverteilung der Eintrittkante so gut wie unverändert bleibt, ändert sich der Verlauf im letzten Drittel der Profiltiefe. Es ist hingegen die Frage zu stellen, ob sich nicht vielmehr eine geänderte globale Umströmung einstellt, die die Druckrandbedingung erfüllt.

Aus den genannten Gründen kann die nichtlineare Erweiterung der linearen Kutta-Bedingung nicht als der Schlüssel zu einer vollständigen Beschreibung der Kutta-Bedingung angesehen werden. Zwar mag in speziellen Fällen das Ergebnis besser der physikalischen Wirklichkeit entsprechen, jedoch erscheinen die beobachteten numerischen Schwierigkeiten oftmals größer als der Nutzen zumal in den beobachteten Fällen nur geringe Auswirkungen auf die integralen Kräfte und Momente beobachtet wurden.

2.2.5 Koordinatensysteme

Die Strömung wird in einem ortsfesten Koordinatensystem betrachtet. Randbedingungen, wie sie beispielsweise auf der Körperoberfläche gelten, werden auch in diesen ruhenden Koordinaten ausgedrückt. In dieser Formulierung ist es unerheblich ob ein Körper eine translatorische oder

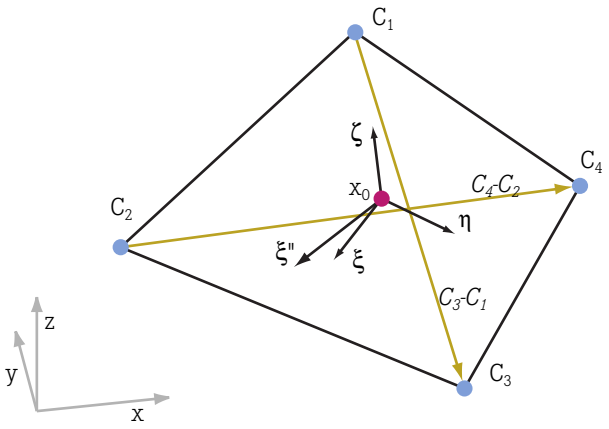


Abbildung 2.11: Ausrichtung des Paneelkoordinatensystems.

rotatorische Bewegung durchführt. An jedem Ort, an dem eine Randbedingung gilt, ist der entsprechende lokale Geschwindigkeitsvektor der Körperoberfläche anzusetzen. In dieser Betrachtung ist es auch ohne weitere Modifikationen möglich nicht nur eine Starrkörperbewegung zu anzusetzen, sondern ebenfalls eine dynamische Verformung des Körpers zuzulassen.

Neben diesem globalen, ruhenden Koordinatensystem ist es hilfreich einige Zusammenhänge in geeigneten lokalen Koordinaten zu betrachten. Die Auswertung der induzierten Größen eines Paneels ist in Gleichung 2.20 und 2.25 in paneeleigenen Koordinaten beschrieben. Da die Ausdrücke zwar in globale Koordinaten transformiert werden können, dann aber deutlich umfangreicher werden, erscheint es aus programmiertechnischer Sicht einfacher, für jedes Paneel ein lokales Koordinatensystem einzuführen. Folglich muss jeder Kollokationspunkt zunächst in das lokale Paneelkoordinatensystem transformiert werden. Wird die induzierte Geschwindigkeit ausgewertet, muss diese wiederum zurück transformiert werden. Da das Potenzial selbst eine skalare Größe ist, entfällt hier die Rücktransformation.

Beide Koordinatensysteme sind kartesische Systeme. Die Ausrichtung eines Paneelkoordinatensystem hängt von den Eckpunkten $(\vec{C}_1, \vec{C}_2, \vec{C}_3, \vec{C}_4)$ des Paneels ab und entspricht der von Hess und Smith (1962) eingeführten Konvention. Die lokalen Koordinaten werden als ξ, η und ζ bezeichnet, ihre Ausrichtung im globalen Koordinatensystem ergibt sich aus dem Paneelmittelpunkt $\vec{x}_0$ und den Richtungsvektoren $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$ und $\vec{\zeta}$. $\vec{\zeta}$ entspricht dem Normalenvektor des Paneels (siehe Abb. 2.11).

$$
\begin{aligned}
\vec{x}_0 &= \tfrac{1}{4}(\vec{C}_1 + \vec{C}_2 + \vec{C}_3 + \vec{C}_4) \\
\vec{\zeta}' &= (\vec{C}_3 - \vec{C}_1) \times (\vec{C}_4 - \vec{C}_2) \\
\vec{\xi}'' &= (\vec{C}_2 + \vec{C}_3) - (\vec{C}_1 + \vec{C}_4) \\
\vec{\eta}' &= \vec{\zeta}' \times \vec{\xi}'' \\
\vec{\xi}' &= \vec{\eta}' \times \vec{\zeta}' \\
\vec{\xi} = \frac{\vec{\xi}'}{|\vec{\xi}'|}, \quad \vec{\eta} &= \frac{\vec{\eta}'}{|\vec{\eta}'|}, \quad \vec{\zeta} = \frac{\vec{\zeta}'}{|\vec{\zeta}'|}
\end{aligned}
\tag{2.63}
$$

2.2.6 Geschwindigkeiten auf der Körperoberfläche

Die Lösung des linearen Gleichungssystems, das sich beispielsweise aus der Normalenrandbedingung (Gl. 2.48) ergibt, führt zu der Quell- und Dipolverteilung auf dem Körper, aus der sich das Potenzial im Raum ergibt. Die Geschwindigkeit der Strömung auf der Körperoberfläche wird durch Ableiten des Potenzials ermittelt. Dies kann beispielsweise auf Basis der durch die Paneele induzierten Geschwindigkeiten erfolgen. In diesem Fall werden die Ansatzfunktionen für die Paneele

abgeleitet und die Geschwindigkeitsbeiträge entsprechend der Quell- und Dipolstärken aufsummiert. Da das Auswerten der induzierten Geschwindigkeiten ähnlich aufwändig ist wie das Besetzen der Matrix, ist diese Vorgehensweise wenig effizient und darüber hinaus auch verhältnismäßig ungenau, da die ermittelte Geschwindigkeit stark von der genauen Wahl des Kollokationspunkts abhängt. Als Referenzpunkt für die Bestimmung der Geschwindigkeit ist bei stark verzerrten Paneelen der Schwerpunkt der Paneeleckpunkte nicht immer die beste Wahl.

Bei Anwendung der Normalenrandbedingung folgt aus dem Greenschen Satz (Gl. 2.40), dass das Potenzial an der Körperoberfläche den Wert der Dipolverteilung auf dem Körper annimmt. Folglich entspricht die Ableitung der Dipolverteilung auf dem Körper der Ableitung des Potenzials in Richtung der Körperkoordinaten. Durch die Definition der Quellstärke $\sigma = -\vec{n}\nabla\Phi$ ist diese direkt mit der Strömungsgeschwindigkeit normal zur Oberfläche verbunden. Im Falle der Normalenrandbedingung muss sie der Körpergeschwindigkeit in dieser Richtung entsprechen. Die Ausnutzung der Normalenrandbedingung ist deutlich robuster, da sie direkt an den Wert des Potenzials auf der Körperoberfläche gekoppelt ist. Die Möglichkeit der Geschwindigkeitsbestimmung ist jedoch ausschließlich auf die Geschwindigkeitsverteilung auf dem Körper beschränkt, die Geschwindigkeit an allen anderen Orten im Raum muss über die Summierung der Einzelpotenziale erfolgen.

Die Ableitung der Dipolverteilung entlang der Körperoberfläche kann numerisch durchgeführt werden. Zur Beschreibung der Ableitung bietet sich das lokale Koordinatensystem des Paneels an. Die Änderung der Dipolstärke wird mit Hilfe der umliegenden Paneele über eine biquadratische Ansatzfunktion von ξ und η erfasst:

$$\mu(\xi,\eta) = A\xi + B\eta + C\xi^2 + D\eta^2 + E \tag{2.64}$$

Die partiellen Ableitungen des Potenzials in $\vec{\xi}$- und $\vec{\eta}$-Richtung am Ort $\xi = 0$ und $\eta = 0$ sind die gesuchten Geschwindigkeiten entlang der Körperoberfläche am Paneelmittelpunkt.

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mu}{\partial\xi}|_{(0,0)} &= A \\ \frac{\partial\mu}{\partial\eta}|_{(0,0)} &= B \end{aligned} \tag{2.65}$$

Die Unbekannten A, B, C, D, E werden mit Hilfe der Koordinaten der benachbarten Paneele und der dazugehörigen Dipolstärken über ein lineares Gleichungssystem bestimmt. Um eine Transformation der umliegenden Paneelmittelpunkte $\vec{S}_i$ in das Koordinatensystem des Paneels zu vermeiden, wird anstatt dessen der Mittelpunkt $\vec{S}'_i$ der gemeinsamen Kante als Referenzort gewählt und die Dipolstärke μ'_i durch lineare Interpolation angepasst. Dies hat den Vorteil, dass kein krummliniges Koordinatensystem eingeführt werden muss, um den Ort $\vec{S}_i$ zu transformieren. Die Interpolation erfolgt an Hand der Längen l_1 und l_2, die in Abbildung 2.12 skizziert sind.

Die Geschwindigkeit normal zum Körper ist aus der Normalenrandbedingung bekannt und folgt direkt aus dem Greenschen Satz. Sie entspricht der lokalen Quellstärke σ. Nach der Transformation in das globale Koordinatensystem erhält man die induzierten Geschwindigkeiten im ruhenden System. Um die Relativgeschwindigkeit zwischen Körper und Strömung zu ermitteln, ist die Bewegungsgeschwindigkeit des Körpers gegebenenfalls abzuziehen.

Die Methode erweist sich als ungenau, wenn das Paneel stark verzerrt ist. In einem solchen Fall, können die Koordinaten der Nachbarpaneele den orthogonalen Ableitungsrichtungen nicht mehr eindeutig zugeordnet werden. So können an der Blattspitze eines Propellers durch die reduzierte Profiltiefe extrem schlanke Paneele mit einem Streckungsverhältnis von über 1:100 entstehen. Diese sind oftmals zusätzlich wie ein Parallelogramm verzerrt, wobei der spitze Winkel des Parallelogramm kleiner als 10 ° werden kann. Dies hat zur Folge, dass die Kollokationspunkte der Nachbarpaneele S_1 und S_2, vom Paneelmittelpunkt aus fast in der gleichen Richtung liegen, so dass nur noch mit

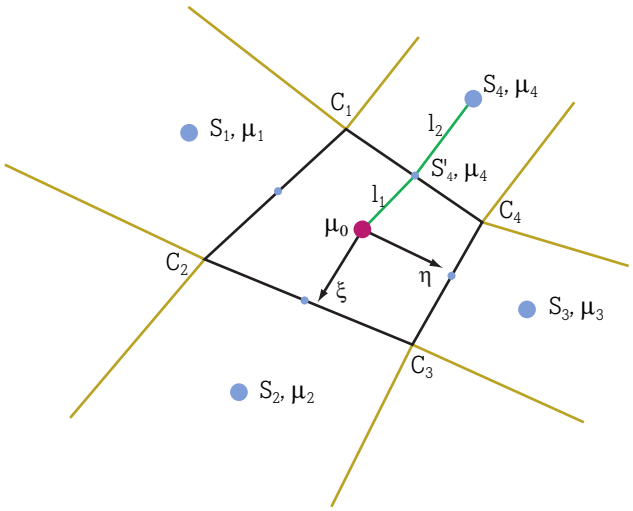


Abbildung 2.12: Biquadratische Interpolation der Dipolstärke μ.

extrem großen Gradienten A und B der biquadratische Ansatz 2.64 erfüllt werden kann. Dies führt zu extrem hohen Geschwindigkeiten und theoretischen Unterdrücken von mehreren tausend bar. In solchen Fällen ist die Ansatzfunktion unzureichend.

Bei der Verwendung eines nicht orthogonalen lokalen Koordinatensystems kann der biquadratische Ansatz durch zwei richtungsunabhängige quadratische Ansätze ersetzt werden, bei der die partielle Ableitung der Dipolverteilung in jeder Richtung getrennt betrachtet wird. Das nicht orthogonale System wird durch die Verbindung der gegenüberliegenden Kantenmittelpunkte ($\vec{s}$ und $\vec{t}$) aufgespannt. Die Ansatzfunktionen für die Bestimmung der partiellen Ableitungen in diese beiden Richtungen lauten nun:

$$\begin{aligned} \mu(\xi) - \mu_0 &= A\, s + C\, s^2 \\ \mu(\eta) - \mu_0 &= B\, t + D\, t^2 \end{aligned} \tag{2.66}$$

Dabei sind die Koordinaten s und t Polygonenzüge und verlaufen über den Mittelpunkt der gemeinsamen Kante zum Mittelpunkt des benachbarten Paneels. Der Punkt S_4 liegt entsprechend Abbildung 2.13 bei $s = -l_1 - l_2$.

Wie zuvor auch, werden A und B durch Lösen des Gleichungssystem bestimmt. Die Rücktransformation des Geschwindigkeitsvektors $(A, B, \sigma)^T$ aus den Komponenten der $\vec{s}$-, $\vec{t}$- und ζ-Richtung in ein orthogonales Koordinatensystem erfolgt über:

$$\begin{pmatrix} v_\xi \\ v_\eta \\ v_\zeta \end{pmatrix} = ((A - c_1 B)\vec{s} + (B - c_1 A)\vec{t})c_2 + \sigma\vec{\zeta} \tag{2.67}$$

mit:

$$c_1 = \vec{s} \cdot \vec{t} \tag{2.68}$$

$$c_2 = \frac{1}{|\vec{s} \times \vec{t}|} \tag{2.69}$$

Die Vektoren $\vec{s}$ und $\vec{t}$ sind Einheitsvektoren.

Dieser Ansatz allein führt noch nicht zu einer Verbesserung der berechneten Drücke, da das Kreuzprodukt in c_2 zu kleinen Werten führen kann, wenn die Paneele extrem verzerrt sind. In

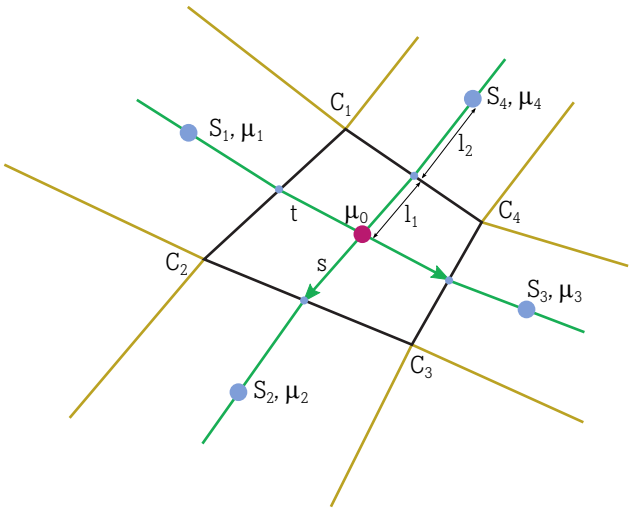


Abbildung 2.13: Beschreibung des nicht orthogonalen Paneelkoordinatensystems.

solchen Fällen ist es sinnvoll die Vektoren $\vec{s}$ und $\vec{t}$ anzupassen und so das System künstlich zu orthogonalisieren. Zu diesem Zweck wird das Streckungsverhältnis c_3 eingeführt:

$$c_3 = \frac{1}{\cosh^{0.3}(0.02\frac{d^2}{A_{Paneel}})} \tag{2.70}$$

mit der gemittelten Paneeldiagonale d und der Paneelfläche A_{Paneel}. Die Ausrichtung des Grundvektors, der in Richtung der längeren Paneelkante zeigt wird beibehalten und der Kürzere so angepasst, dass wieder ein orthogonaleres System erreicht wird. Hierzu wird der Normalenvektor des Paneels $\vec{\zeta}$ herangezogen:

$$\vec{s}_{13} = c_3\vec{s} + (1 - c_3)(\vec{t} \times \vec{\zeta}) \text{ oder} \tag{2.71}$$

$$\vec{s}_{24} = c_3\vec{t} + (1 - c_3)(\vec{s} \times \vec{\zeta}) \tag{2.72}$$

Dieser Schritt wird für Paneele relevant, die ein Streckungsverhältnis d^2/A_{Paneel} von mehr als 50 aufweisen, alle anderen Paneele bleiben unbeeinflusst. Die Korrektur des Richtungsvektors verbessert die Auswertung der Druckverteilung in Bereichen der Blattspitze deutlich und minimiert numerische Fehler. Beispielsweise können im unkorrigierten Fall so hohe Geschwindigkeiten und damit hohe Unterdrücke entstehen, die auf einem Paneel mit einer Fläche von weniger als 0.1 % der Gesamtfläche ca. 3 % der Gesamtkraft auf dem Körper ausmachen. Diese hier beschriebene Methode korrigiert die unter Umständen unzureichende Approximation der partiellen Ableitung und verbessert die Robustheit des Verfahrens bei extrem verzerrten Paneelen deutlich.

2.2.7 Druckkräfte

In der Potenzialtheorie werden die Drücke in der Strömung über die Bernoulli-Gleichung bestimmt. Ist auf der Körperoberfläche die Geschwindigkeit bekannt, so kann in stationären Fällen unmittelbar der Druck aus dieser Größe ermittelt werden. In instationären fällen kommt die zeitliche Änderung des Potenzials hinzu. Die zeitliche Änderung des Potenzials wird mit einer Zentraldifferenz über den Zeitschritt angenähert.

Der Druck auf einem Paneel j wird wie folgt berechnet:

$$p_j = \rho(-\frac{|\vec{v}_j|^2}{2} + \vec{V}_K \cdot \vec{v}_j + \frac{\mu_j^n - \mu_j^{n-1}}{\Delta t} + \vec{g}(\vec{x}_j - \vec{x}_{ref}) + p_{ref}) \tag{2.73}$$

Dabei ist $\vec{v}_j = \nabla\Phi$ die induzierte Geschwindigkeit am Mittelpunkt $\vec{x}_j$ Paneels. Der hydrostatische Anteil wird über die Erdbeschleunigung $\vec{g}$ und den Druck p_{ref} an einem Referenzort $\vec{x}_{ref}$ berücksichtigt.

Der Druck und auch die Richtung, mit der er wirkt, werden für ein Paneel konstant angenommen, so dass die Druckkraft lautet:

$$\Delta\vec{F}_{p,j} = p_j A_j \vec{n}_j \tag{2.74}$$

2.2.8 Reibungskräfte

Neben den Druckkräften wirken auf einen umströmten Körper auch Reibungskräfte, die mit Hilfe der Potenzialtheorie nur auf Basis halb empirisch ermittelter Zusammenhänge aus der Grenzschichttheorie berechnet werden können. Die Reibungskräfte entlang eines Körpers lassen sich durch messtechnisch und rechnerisch abgeglichene Beiwerte abschätzen:

$$c_f = \frac{|\Delta\vec{F}_{f,j}|}{\frac{\rho}{2}\vec{v}_j^{\,2}} \tag{2.75}$$

In dem implementierten Modell wird angenommen, dass die Kraft $\Delta\vec{F_{f,j}}$ in Richtung der Geschwindigkeit $\vec{v}_j$ wirkt. Für c_f können unterschiedliche Annahmen getroffen werden. Die einfachste Vorgehensweise besteht darin, einen konstanten mittleren Reibungsbeiwert anzusetzen und diesen durch Korrelation an Messergebnisse anzupassen.

Eine genauere Prognose der Reibungskräfte kann erreicht werden, wenn der Reibungsbeiwert über eine semiempirische Formel für die Plattenreibung bestimmt wird. So wurde beispielsweise von Prandtl und Kármán für turbulent umströmte Platten der Zusammenhang aus Gl. 2.76 ermittelt, siehe hierzu auch Hoerner (1965). Hierbei wird jedoch der Einfluss von Druckgradienten entlang der Oberfläche auf die Grenzschicht ausser Acht gelassen.

$$c_f = 0.059 Re^{-0.2} \tag{2.76}$$

Die angegebene Reynoldszahl ist eine lokal ermittelte Größe, die sich aus der Viskosität ν und der Reibungslänge d_{LE} zusammensetzt.

$$Re = \frac{v\, d_{LE}}{\nu} \tag{2.77}$$

Als Reibungslänge d_{LE} wird hier der Abstand eines Paneels zur Eintrittskante angenommen. Die Berücksichtigung der Reynoldszahl bietet vor allem den Vorteil, dass in gewissem Rahmen auch Maßstabseffekte berücksichtigt werden.

Um die Reibungslänge zu bestimmen, muss zunächst die Eintrittskante des Tragflügels bestimmt werden. In den meisten Verfahren wird bei der Berechnung der Propellerumströmung ein strukturiertes Netz verwendet, so dass die Aufteilung zwischen Druck- und Saugseite bereits vor Beginn der Rechnung fest steht und aus dieser die lokale Reibungslänge ermittelt werden kann. Da diese Vorraussetzung die Allgemeingültigkeit des Verfahrens einschränkt, wird eine unabhängigere Methode bevorzugt. Die Eintrittskante ist dadurch definiert, dass die ankommende Strömung hier eine Art Staupunkt erzeugt, wobei sie sich aufteilt in einen Teil, der über die Saugseite verläuft und einen der der Druckseite folgt. Dies bedeutet für eine Paneelkante, dass die Geschwindigkeiten, die an den benachbarten Paneelmittelpunkten vorzufinden sind, von dieser Kante weg gerichtet sind. An allen anderen Kanten besteht ein Fluss über die Kante, der von den beiden Geschwindigkeiten in etwa bestätigt wird. Aus dieser Betrachtung heraus können bestimmte Paneele auf dem Körper als an der Eintrittskante liegend bezeichnet werden. Von diesen ausgehend wird über die im Programm hinterlegten nachbarschaftlichen Beziehungen unter den Paneelen rekursiv der Abstand zur Eintrittskante bestimmt. Dabei wird der Abstand d_{LE} an den Paneelen, an denen eine Eintrittskante detektiert

wurde, zu null gesetzt. Anschließend ergibt sich aus der Addition der Strecke zum benachbarten Kollokationspunkt zum eigenen d_{LE}-Wert ein neuer Eintrittskantenabstand für das Nachbarpaneel. Dies wird iterativ durchgeführt, bis alle Paneele die kleinstmögliche Strecke zu einem Paneel an der Eintrittskante gefunden haben.

In dieser Vorgehensweise können entweder die Relativgeschwindigkeiten zwischen Körper und Strömung oder die lokalen Geschwindigkeiten aus der Starrkörperbewegung verwendet. Letztere Methode ist robuster, wenn auch weniger Strömungsdetails Berücksichtigung finden.

2.2.9 Bewegungsmodelle

Die Strömung, die sich um einen Körper einstellt, hängt letztlich von der Differenzgeschwindigkeit zwischen dem Körper und dem ihn umgebenden Fluid ab. Hierzu wird in vielen Verfahren ein körperfestes Koordinatensystem betrachtet, in dem der Körper ruht und sich die Strömung bewegt, da dies beispielsweise in der Bernoulligleichung zu übersichtlicheren Formulierungen führt. Da die Körper in der Simulation auch unterschiedliche Referenzgeschwindigkeiten aufweisen können, ist die Formulierung in einem körperfesten Koordinatensystem umständlich. Aus diesem Grund werden hier alle Strömungsgrößen in einem ruhenden Koordinatensystem betrachtet.

Die Paneele können daher zu verschiedenen Komponenten gruppiert werden, wobei jeder Komponente ein eigenes Bewegungsmodell zugewiesen wird, das die Bewegung des Körpers beschreibt. Sie setzt sich aus der translatorischen Geschwindigkeit $\vec{v}_{Parallel}$ und der Drehgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ um den Drehpunkt $\vec{x}_{noRot}$ zusammen.

$$\vec{V}_K = \vec{V}_{Parallel} + \vec{\omega} \times (\vec{x} - \vec{x}_{noRot}) \tag{2.78}$$

Durch diese Beschreibung können instationäre Interaktionen zwischen Körpern analysiert werden. Beispiele hierfür sind Düsenpropeller, die über eine stehende Düse und einen darin rotierenden Propeller verfügen. Diese können auch Rotor-Stator Konfigurationen beinhalten. Ein weiteres Beispiel ist die Ruder-Propeller Interaktion, bei der eine solche Formulierung hilfreich ist.

Verformung von Körpern

Die Verformungsgeschwindigkeit des Körpers kann zu der Geschwindigkeit des Starrkörpers hinzu addiert werden. In einem solchen Fall ist die Verformungsgeschwindigkeit für jedes Paneel in einer bestimmten Weise vorzugeben. In den Randbedingungen sind keine Änderungen erforderlich, da die Verformungsgeschwindigkeit in der Größe $\vec{v}_K$ berücksichtigt ist. Anwendung findet diese Vorgehensweise vor allem bei der Berechnung der Fluid-Struktur-Interaktion. Hier wird die dynamische Verformung des Körpers in der strömungstechnischen Untersuchung berücksichtigt. Alternativ kann aber auch eine Starrkörperbewegung als spezielle Art der Verformung aufgefasst werden und entsprechend vorgegeben werden.

Grundlage für die Verformungsgeschwindigkeit sind die Mittelpunkte der Paneele zu Beginn eines Zeitschritts sowie deren Lage zum Ende des Zeitschritts. Die Randbedingung gilt zum Ende des Zeitschritts, so dass die Bestimmung der Verformungsgeschwindigkeit mit Hilfe einer Zentraldifferenz ein Verfahren 1. Ordnung ist, mit:

$$\vec{v}_{j,def} = (\vec{x}_j^{\,n} - \vec{x}_j^{\,n-1})/\Delta t = const \tag{2.79}$$

Bei einem Ansatz 2. Ordnung wird hingegen angenommen, dass die Verformungsbeschleunigung über den Zeitschritt konstant ist. Infolge dessen gilt:

$$\vec{v}_{j,def} = \int \vec{a}\, dt = \vec{a}t + \vec{c}_0 \tag{2.80}$$

$$\vec{x}_{j,def} = \int \vec{v}\, dt = \int at + \vec{c}_0\, dt = {}^1/_2\vec{a}t^2 + \vec{c}_0 t + \vec{c}_1 \tag{2.81}$$

Die Randbedingungen $\vec{x}(t{=}0) = x^{n-1}$, $\vec{v}(t{=}0) = \vec{v}^{n-1}$ und $\vec{x}(t{=}\Delta t) = \vec{x}^n$ eingesetzt, führt zu:

$$\vec{v}^n_{j,def} = \vec{a}\Delta t + \vec{v}^{n-1}_{j,def} \tag{2.82}$$

$$\vec{x}^n_{j,def} = {}^1/_2\vec{a}\Delta t^2 + \vec{v}^{n-1}_{j,def}\Delta t + \vec{x}^{n-1} \tag{2.83}$$

Wobei die konstante Beschleunigung lautet:

$$\vec{a} = 2\frac{\vec{x}^n - \vec{x}^{n-1}}{\Delta t^2} - 2\frac{\vec{v}^{n-1}_{j,def}}{\Delta t}, \tag{2.84}$$

und anschließend die Verformungsgeschwindigkeit zum Ende des Zeitschritts nach

$$\vec{v}^n_{j,def} = 2\frac{\vec{x}^{\,n}_j - \vec{x}^{\,n-1}_j}{\Delta t} - \vec{v}^{\,n-1}_{j,def} \tag{2.85}$$

berechnet werden kann. Hierfür muss nicht nur der Ort des Paneels zu Beginn des Zeitschritts gespeichert werden, sondern auch die zu Beginn des Zeitschritte gültige Verformungsgeschwindigkeit.

Bewegte Koordinatensysteme

Vielfach ist bei der Auswertung von Simulationen die körperfeste Betrachtung hilfreich. Um dies zu ermöglichen, ohne dabei auf die Formulierung in einem ruhenden Koordinatensystem verzichten zu müssen, kann das Koordinatensystem des Betrachters nachgeführt werden. In diesem Fall bleibt die mathematische Formulierung erhalten, lediglich die betrachteten Koordinaten werden nach einem Zeitschritt angepasst.

2.2.10 Lösung des linearen Gleichungssystems

Quadrat der Anzahl an Unbekannten wächst. Entsprechend ist eine direkte Lösung ab einer bestimmten Paneelzahl mit dem Gauss-Eliminations-Verfahren nicht mehr praktikabel. Bei der Untersuchung von Propellern werden selten mehr als 5000 Paneele benötigt. Bei komplexeren Geometrien, die Rotor, Düse und Stator umfassen, können gegebenenfalls mehr Paneele erforderlich werden.

Die Dauer zur Lösung des Gleichungssystems ist meist geringer als die Zeit, die für das Besetzen des Systems benötigt wird. Auch das Verschieben der freien Wirbel, genauer die Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten in den freien Wirbeln, ist deutlich zeitaufwändiger, so dass auf das Lösen des Systems nur etwa 10-20 % der gesamt Rechendauer entfällt.

Einen speziellen Fall stellen die Gleichungssysteme dar, die für die nicht-lineare Kutta-Bedingung benötigt werden (siehe hierzu: 2.2.4). Hier sind mehrfach ähnliche Systeme zu lösen, die sich lediglich in der rechten Seite unterscheiden. Das Gauss-Elimination-Verfahren kann so erweitert werden, dass die Lösungsdauer aller Systeme bezogen auf die Dauer, die für ein einzelnes System verwendet wird, nur proportional mit der Anzahl an rechten Seiten zunimmt, wobei der Proportionalitätsfaktor klein ist. Eine ganz ähnlicher Ansatz ergibt sich aus der LU-Zerlegung, die ebenfalls sehr effizient für unterschiedliche rechte Seiten angewendet werden kann. Eine solch effiziente Abarbeitung lässt das Gauss-Seidel-Verfahren nicht zu. Hier dauert die Lösung jedes Systems etwa gleich lang.

2.2.11 Periodische und spiegelnde Randbedingungen

Bei der Untersuchung eines Propellers in homogener und auch in umfangsgemittelter Anströmung kann die Rechenzeit erheblich reduziert werden, wenn man berücksichtigt, dass sich auf jedem Propellerblatt das gleiche Potenzial einstellt.

Wird ein Propellerblatt mit N_K Paneelen und die freien Wirbel mit N_W Paneelen diskretisiert (mit $N = N_K + N_W$), so sind bei einer Flügelzahl Z insgesamt $Z \cdot N$ Dipolstärken zu bestimmen. Das Potenzial in der Strömung setzt sich dann folgendermaßen zusammen (siehe Gl. 2.46)

$$\Phi(\vec{x}_j) = \sum_{i=1}^{Z \cdot N} \mu_i \, g_{2,i,j} + \sum_{i=1}^{Z \cdot N_K} \sigma_i \, g_{1,i,j} \tag{2.86}$$

Auf Grund der Periodizität ist $\mu_{i+N} = \mu_i$ und $\sigma_{i+N} = \sigma_i$, so dass das Intergral über die Körperoberfläche auch durch die folgende Summierung aufgefasst werden kann:

$$\Phi(\vec{x}_j) = \sum_{i=1}^{N} \mu_i \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{Z} g_{2,i+kN,j} \right)}_{g'_{2,i,j}} + \sum_{i=1}^{N_K} \sigma_i \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{Z} g_{1,i+kN,j} \right)}_{g'_{1,i,j}} \tag{2.87}$$

Da die Ansatzfunktion, die die Induzierte durch ein Paneel beschreibt, wird um die Einflüsse der periodischen Kopien ergänzt, so dass anstatt der Auswertung der Funktion $g_{2,i,j} = \int_{S_i} G_2(\vec{x}_j) \, dS$, die nur den Einfluss des Paneels selbst berücksichtigt, die in g' enthaltene Integration auch die periodischen Kopien beinhaltet:

$$\Phi(\vec{x}_j) = \sum_{i=1}^{N} \mu_i \, g'_{2,i,j} + \sum_{i=1}^{N_K} \sigma_i \, g'_{1,i,j} \tag{2.88}$$

Die Integration über die rotationssymmetrischen Teilflächen S_{i+kN} ist aus programmiertechnischer Sicht leichter zu beschreiben, wenn nicht die Teilfläche rotiert wird, sondern der Kollokationspunkt. Anschließend ist die resultierende induzierte Geschwindigkeit entsprechend rück zu transformieren. Das induzierte Potenzial hingegen muss nicht transformiert werden, da es eine skalare Größe ist.

Auf ganz ähnliche Weise kann eine spiegelnde Randbedingung implementiert werden, die beispielsweise an einer ebenen Wand oder bei einer Doppelkörperströmung auftritt. In einem solchen Fall ist nicht die Rotationsachse sowie die Anzahl der rotationssymmetrischen Kopien anzugeben, sondern die Spiegelebene durch einen Aufpunkt und ihren Normalenvektor zu beschreiben.

Durch die Reduktion der Unbekannten fällt das Gleichungssystem kleiner aus. Dies reduziert die Rechendauer, die für das Besetzen und das Lösen des Gleichungssystems aufgebracht werden muss. Da bei dieser Vorgehensweise auch die Anzahl der Paneele in den freien Wirbeln sinkt, verringert sich gleichfalls der Rechenaufwand bei deren Verschiebung.

Key–Blade–Technik

Bei der Berücksichtigung eines inhomogenen Nachstromfeldes ist es nicht mehr möglich, die Potenziale gleicher Paneele mehrerer Flügel zusammenzufassen, da deren Quell- und Dipolstärken nicht identisch sind, sondern sich zeitlich verändern. Die Idee der Key–Blade–Technik ist, ähnlich wie bei der Anwendung der periodischen Randbedingung, das zu lösende Gleichungssystem verkleinern, um so die Rechenzeit für die instationäre Simulation zu verkürzen. Diese Technik geht auf eine

Entwicklung von Lee und Kinnas (2001) zurück. Die Idee ist für einen Teil der in Gl. 2.46) vorhandenen Quell- und Dipolstärken bereits bekannte Lösungen aus früheren Zeitschritten einzusetzen. Der Index $k = 1$ in Gl. 2.89 bezeichnet den Propellerflügel, der als Key–Blade von den Z-Flügeln des Propellers ausgewählt wurde.

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{x}_j) = & \sum_{i=1}^{Z\cdot N} \mu_i \, g_{2,i,j} + \sum_{i=1}^{Z\cdot N_K} \sigma_i \, g_{1,i,j} \\
= & \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\mu_i}_{\substack{\text{Unbekannte} \\ \text{im} \\ \text{Gleichungssystem}}} g_{2,i,j} + \sum_{i=1}^{N_K} \underbrace{\sigma_i}_{\sigma_i = -\vec{n}_i \, \vec{V}_K} g_{1,i,j} \\
& + \underbrace{\sum_{k=2}^{Z} \sum_{i=1}^{N} \mu_{i+kN} \; g_{2,i+kN,j} + \sum_{k=2}^{Z} \sum_{i=1}^{N_K} \sigma_{i+kN} \; g_{1,i+kN,j}}_{\mu_{i+kN} \text{ und } \sigma_{i+kN} \text{ bekannt aus vorherigen Iterationsschritten}}
\end{aligned} \tag{2.89}$$

Geht man davon aus, dass sich nach einer Propellerumdrehung wieder das gleiche Potenzial einstellt, ist es ausreichend nur ein Propellerblatt exakt auszuwerten und für die Paneele der anderen Propellerblätter Stärken vorzugeben, die der exakt ausgewertete Propellerflügel während der entsprechenden Winkelstellung hatte. Somit sind von den $(N_K + N_W) \cdot Z$ Dipolstärken des Propellers nur noch $N_K + N_W$ unbekannt. Dadurch wird nicht nur die Lösungsdauer des Gleichungssystems erheblich kürzer, sondern auch die Zeit, die für die Berechnung der Matrix benötigt wird. Auf der anderen Seite wird die Berechnung der rechten Seite des Gleichungssystems aufwändiger, da diese die Einflüsse der bereits bekannten Paneele enthält. Da die Berechnungsdauer der rechten Seite nur linear von der Gesamtanzahl der Paneele abhängt, die Besetzung der Matrix indes quadratisch von der Anzahl der Unbekannten, bleibt in der Summe eine deutliche Zeitersparnis. Eine weitere deutliche Einsparung bei der Rechenzeit liegt in der Verformung der freien Wirbel hinter dem Propeller, die nach einem Zeitschritt nur noch für einen Flügel durchgeführt werden muss.

Zu Beginn der Rechnung sind keine Lösungen für die Winkelstellungen der Propellerflügel bekannt, so dass zunächst eine Näherungslösung verwendet werden muss. Um dieses Problem zu lösen, wird zunächst eine stationäre Untersuchung im umfangsgemittelten Nachstrom durchgeführt. Anschließend werden diese stationär berechneten Potenzialstärken für alle Winkelstellungen der Propellerflügel als Startlösung verwendet, so lange keine neueren instationären Ergebnisse verfügbar sind.

Im Verfahren ist die Wiederverwendbarkeit der früheren Rechenergebnisse so realisiert, dass nach einem Iterationsschritt die Paneelgeometrie mitsamt der Quell- und Dipolstärke in einer Datei abgespeichert wird, so dass sie zu einem späteren Zeitschritt neu geladen werden kann. Das Skript, das diese Art von Berechnung steuert, ist in der folgenden Weise ausgebaut:

1. Stationäre Berechnung des Propellers in umfangsgemittelter Zuströmung unter Berücksichtigung periodischer Randbedingungen
2. Speichern des Ergebnisses dieses Flügels
3. Rotation der Geometrie um den Winkel, entsprechend dem Zeitschritt der folgenden instationären Rechnung
4. Speichern des Ergebnisses dieses Flügels für den aktuellen Drehwinkel
5. Wiederholung der Schritte 3. und 4. bis der Propeller mehr als eine Umdrehung zurückgelegt hat
6. Entfernen der periodischen Randbedingung und Berücksichtigung des inhomogenen Nachstromfelds

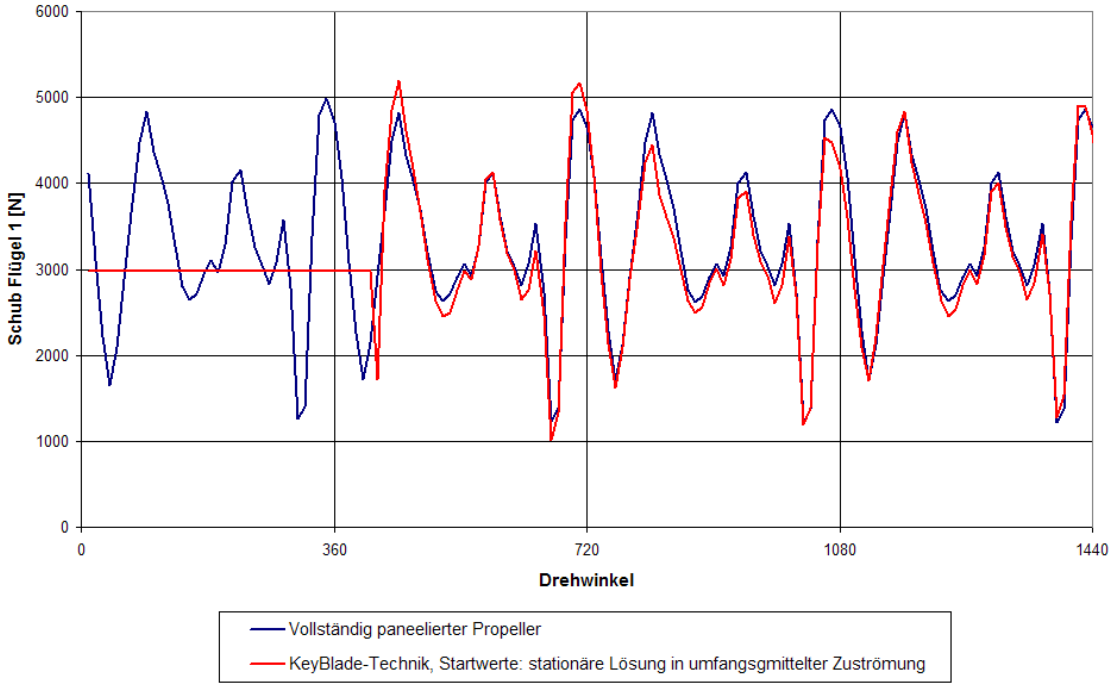


Abbildung 2.14: Vergleich der Schubkräfte am Einzelflügel bei vollständig paneeliertem Propeller und bei Einsatz der Key-Blade-Technik.

7. Start der instationären Rechnung
8. Laden der gespeicherten Ergebnisse, die zu den Winkelstellungen der übrigen Propellerblätter passen
9. Drehung des Körpers, Verformung der freien Wirbel, anschließendes Aufstellen und Lösen des Gleichungssystems
10. Löschen der geladenen Paneele der übrigen Propellerblätter
11. Speichern des Ergebnisses für das Key-Blade
12. Fortfahren bei Schritt 8.

Eine Voraussetzung für die Anwendung der Key-Blade-Technik ist, dass die Flügel des Propellers immer wieder die gleichen Winkelstellungen erreichen. Folglich muss der Zeitschritt der Berechnung an die Drehgeschwindigkeit n und die Flügelzahl Z gekoppelt sein. Beispielsweise kann der Zeitschritt wie folgt festgelegt werden:

$$\Delta t = \frac{1}{n\, Z\, I_{Res}} \tag{2.90}$$

Hierbei muss I_{Res} ganzzahlig, positiv sein; es beschreibt die Anzahl an untersuchten Winkelstellungen zwischen zwei benachbarten Flügeln.

In Abb. 2.14 sind die Schubverläufe eines Einzelflügels im inhomogenen Nachstromfeld für einen vollständig modellierten Propeller und für einen Propeller mit angewendeter Key-Blade-Technik dargestellt. Beiden Rechnungen wurde eine stationäre Lösung im umfangsgemittelten Nachstrom vorgeschaltet. Bei der Anwendung der Key-Blade-Technik ist in der ersten Umdrehung ein konstanter Schub zu sehen. Dies ist auf die oben beschriebenen Schritte 3. und 4. zurückzuführen, in denen der stationär berechnete Propeller nur gedreht und die entsprechende Winkelstellung gespeichert wird. In den darauf folgenden Umdrehungen ist ein leichtes abwechselndes Über- und Unterschwingen bei den berechneten Kraftspitzen zu erkennen. In der letzten Umdrehung besteht eine gute Übereinstimmung zwischen den Kraftverläufen, die mittels der beiden Verfahren bestimmt wurden. Es kann gezeigt werden, dass eine frühere Konvergenz der Kräfte bei dem Einsatz der

Key-Blade-Technik erreicht werden kann, wenn der erste instationäre Iterationsschritt auf eine Winkelstellung gelegt wird, in der der Flügel nur eine geringe Kraftschwankung erfährt und der aktuelle Schub dem mittleren Schub entspricht. Diese Winkelstellung hängt im Wesentlichen von dem verwendeten Nachstromfeld ab und weniger von dem untersuchten Propeller.

Die Rechenzeiten, der in Abb. 2.14 Berechnungen sind stark unterschiedlich. Während für den vollständig modellierten siebenflügligen Propeller eine Rechenzeit von etwa *380* s pro Iterationsschritt benötigt wurden, stehen dem etwa *50* s pro Iteration bei der Verwendung der Key-Blade-Technik gegenüber. An dieser Stelle ist jedoch zu berücksichtigen, dass auf Grund der periodischen Ergebnisse für den vollständig modellierten Propeller keine ganze Umdrehung erforderlich ist, da der Kräfteverlauf phasenverschoben aus den Kräften der Einzelblätter zusammengesetzt werden kann. So sollte es für eine Bewertung des Kraftverlaufs ausreichend sein bei einem Siebenflügler etwa eine halbe Umdrehung zu berechnen, während bei der Key-Blade-Technik etwas mehr als eine Umdrehung empfehlenswert ist. Dennoch bleibt bei der Key-Blade-Technik ein Geschwindigkeitsvorteil bestehen.

2.2.12 Berücksichtigung von Nachstromfeldern

Bisher wurde davon ausgegangen, dass das Zustromfeld homogen ist. Da ein Propeller in der Regel im Nachstromfeld eines Schiffes arbeitet, muss dessen Effekt berücksichtigt werden. Dabei ist zu beachten, dass das Nachstromfeld stark von viskosen Effekten am Schiff beeinflusst ist. Folglich ist das Strömungsfeld nicht unbedingt rotationsfrei und erfüllt streng genommen nicht mehr die Anforderungen der Potenzialtheorie. Aus praktischen Gründen und auch wegen meist fehlender besserer Informationen wird das Nachstromfeld als axial konstant angenommen. In diesem Fall führen die radialen Komponenten auch zu einer Verletzung der Quellfreiheit, die üblicherweise nicht kompensiert wird.

Wie alle anderen Geschwindigkeiten sind die Komponenten des Nachstromfeldes in einem ruhenden Koordinatensystem zu betrachten. Es ist also nicht das Nachstromfeld selbst, wie es in aller Regel in Messungen oder RANSE-Rechnungen ermittelt wird, sondern der so genannte Mitstrom zu verwenden. In den Messungen und auch in den Rechnungen wird die Strömung üblicherweise in einem schiffsfesten Koordinatensystem bestimmt. Zur Umrechnung in das ruhende System ist die Schiffsgeschwindigkeit abzuziehen, um den so genannten Mitstrom zu erhalten, der im Folgenden als $\vec{V}_N(\vec{x})$ bezeichnet wird.

Prinzipiell bestehen zwei mögliche Ansätze den Einfluss des Mitstroms zu berücksichtigen. Zum einen kann das Strömungsfeld als Induzierte eines anderen Körpers, nämlich der des Schiffsrumpfs, aufgefasst werden. Im Falle einer indirekten Formulierung der Randbedingung ist Gleichung 2.51 um den Term $\vec{n}\,\vec{V}_N(\vec{x}_j)$ zu ergänzen.

$$\begin{aligned}
\vec{n}\,\vec{V}_K &= \vec{n}(\vec{x}_j)\,\nabla\Phi(\vec{x}_j) \\
&= \vec{n}(\vec{x}_j)\left(\sum_{i=0}^{i<N_K}\mu_i\,\vec{g}_{2,i,j} + \sum_{i=N_K}^{i<N_K+N_W}\mu_i\,\vec{g}_{2,i,j} + \sum_{i=0}^{i<N_K}\sigma_i\,\vec{g}_{1,i,j}\right) \\
&\quad + \vec{n}(\vec{x}_j)\,\vec{V}_N(\vec{x}_j)
\end{aligned} \tag{2.91}$$

Da dieser Beitrag bekannt ist, ist er Bestandteil der rechten Seite des Gleichungssystems, das wie folgt aufgestellt werden kann:

$$\sum_{i=0}^{i<N_K} \mu_i \, \vec{n}_j \, \vec{g}_{2,i,j} \quad + \quad \sum_{i=N_K}^{i<N_K+N_W} \mu_i \, \vec{n}_j \, \vec{g}_{2,i,j}$$

$$= \quad \vec{n}_j \, \vec{V}_K - \vec{n}_j \, \vec{V}_N(\vec{x}_j) - \sum_{i=0}^{i<N_K} \sigma_i \, \vec{n}_j \, \vec{g}_{1,i,j} \tag{2.92}$$

wobei die Quellstärke weiterhin durch die Körpergeschwindigkeit gegeben ist ($\sigma_i = -\vec{n}_i \vec{V}_K$). Diese Art der Formulierung entspricht dem Fall, dass das Mitstromfeld nicht über eine vorgegebene Geschwindigkeitsverteilung modelliert wird, sondern der Körper tatsächlich Teil der Simulation ist. Vorausgesetzt, dass sich die Umströmung des ersetzten Rumpfes potenzialtheoretisch beschreiben ließe und sich dessen Abbild $\vec{n}_j \vec{V}_N(\vec{x}_j)$ hinreichend genau angeben ließe, wäre die Vorgehensweise äquivalent zu einer Simulation, in der beide Körper berücksichtigt werden.

In der Regel ist die Umströmung des ersetzten Körpers nicht wie oben beschrieben mit einer Potenzialfunktion abbildbar, so dass zu dem genannten indirekten Ansatz keine vergleichbare direkte Formulierung besteht. Aus diesem Grund wird eine andere Betrachtung gewählt. Die Induzierte des Rumpfes wird zu der ungestörten Anströmung aus der Starrkörperbewegung hinzu gezählt, so dass die Quellstärke die Mitstromkomponente berücksichtigt.

$$\sigma_i = -\vec{n}_i(\vec{V}_K - \vec{V}_N(\vec{x}_j)) \tag{2.93}$$

Die Anströmung, die die Nachstromkomponente enthält, geht, wie in der direkten Methode üblich, zunächst nur in die Quellverteilung ein. In dem Fall, dass nun ein homogenes und rein axiales Mitstromfeld verwendet wird, ist die Lösung identisch mit dem Fall einer entsprechend angepassten Fortschrittsgeschwindigkeit des Körpers, was auch strömungstechnisch zu erwarten ist.

Diese etwas widersprüchliche Betrachtung der beiden erläuterten Ansätze für das Nachstromfeld kann wegen der fehlenden Beschreibung des Mitstroms als Potenzial nicht ganz aufgelöst werden. Aufgrund der Analogie und der Konsistenz des Modells bei homogenen, axial konstanten Nachstromfeldern wird der zweite Weg zur Modellierung des Mitstroms empfohlen.

Eine weitere Inkonsistenz bei der Betrachtung des Nachstromfeldes in potenzialtheoretischen Rechnungen ist das in der Regel unbekannte Druckfeld im Zustrom. Da das Strömungsfeld nicht mehr die potenzialtheoretischen Anforderungen erfüllt, ist auch die Bernoulligleichung nicht mehr gültig. Es ist jedoch anzunehmen, dass die Druckgradienten im Nachstromfeld klein gegenüber den Druckänderungen sind, die durch den untersuchten Körper erzeugt werden. Aus diesem Grund wird angenommen, dass der Druck im Bereich des Mitstromfeldes konstant ist und dass das Feld den Verlauf des Drucks nicht weiter beeinflusst.

2.2.13 Behandlung effektiver Nachstromfelder

Bei der Abbildung eines Propellers im inhomogenen Schiffsnachstrom mit Hilfe der Potenzialtheorie müssen Annahmen bei der Schiff-Propeller-Interaktion getroffen werden. Da die Geschwindigkeitsverteilung im Schiffsnachstrom sowohl von Verdrängungseffekten als auch von Reibungseffekten dominiert wird, kann das Schiffsnachstromfeld nicht mit Hilfe der Potenzialtheorie ermittelt werden, sondern kann nur als externe Größe in Form modifizierter Randbedingungen vorgegeben werden. Die einfachste Methode ist die Vorgabe eines nominellen Nachstromfeldes, wie es beispielsweise in Modellversuchen ermittelt wird. Dabei ist zu beachten, dass folgende Abweichungen zum tatsächlichen Propellerzustrom bestehen:

- In Versuchen aufgemessene Nachstromfelder weisen, bezogen auf die Schiffsabmessungen, eine dickere Grenzschicht auf, da die Messungen bei kleineren Reynoldszahlen durchgeführt werden.
- Durch den Sog des Propellers können Ablösungen am Hinterschiff, die sich im nominellen Nachstrom einstellen, verhindert werden. Das effektive Nachstromfeld ist somit unbekannt.
- Lokale, instationäre Wechselwirkungen zwischen Propeller und Schiff können nicht berücksichtigt werden.

Häufig werden geeignete Korrekturverfahren angewandt, um die genannten Probleme zu umgehen. Die Verfahren sind oftmals empirisch gestützte Verzerrungsfunktionen, mit deren Hilfe der nominelle Nachstroms modifiziert wird. Um das effektive Nachstromfeld in die potenzialtheoretische Analyse einbeziehen zu können, müssen mehr Informationen über die Interaktion zwischen Propeller und Schiff berücksichtigt werden. Ein Weg ist beispielsweise den Schiffsnachstrom im Grossausführungsmaßstab über ein RANSE-Verfahren zu berechnen, wobei der Propeller als einfache Druckscheibe modelliert wird. Das so ermittelte stationäre Nachstromfeld enthält nun die durch die Druckscheibe induzierten Geschwindkeiten. Da der Geschwindigkeitsanteil, der durch die Druckscheibe induziert wird, in der RANSE-Untersuchung nicht separat ermittelt werden kann, ist es nicht möglich das effektive Nachstromfeld aus der RANSE-Berechnung zu extrahieren. Somit muss das effektive Nachstromfeld in der potenzialtheoretischen Berechnung ermittelt werden, da hier die induzierten Anteile des Propellers getrennt ausgewertet werden können. Konkret bedeutet dies, dass zu jedem Zeitschritt die im potenzialtheoretischen Verfahren ermittelten propellerinduzierten Größen von dem vorgegebenen Gesamtnachstrom zu subtrahieren sind. Diese Vorgehensweise bietet folgende Vorteile:

- Abweichungen in der Nachstromziffer in Folge zu kleiner Reynoldszahlen werden vermieden.
- Der Einfluss des Propellersogs auf die Hinterschiffsumströmung kann berücksichtigt werden.

Um diese Vorgehensweise umzusetzten, muss das vorgegebene Nachstromfeld ein Stück stromauf vor dem Propeller aufgenommen und in der Rechnung positioniert werden. An den diskreten Orten $\vec{x}_w$, an denen dieses Nachstromfeld aufgenommen worden ist, muss die propellerinduzierte Geschwindigkeit $\vec{v}_{p,ind}(\vec{x}_w)$ ermittelt werden, damit sie von der vorgegebenen Geschwindigkeit $\vec{v}_{w,total}(\vec{x}_w)$ subtrahiert werden kann. Da nun der Propeller seine eigne Zuströmung modifiziert, ist eine iterative Ermittlung der induzierten Geschwindigkeit erforderlich.

Liegt der Ort $\vec{x}_w$ nur knapp vor dem Propeller, ändert sich die vom Propeller induzierte Geschwindigkeit $\vec{v}_{p,ind}$ stark, da das lokale Geschwindigkeitsfeld um den Tragflügel auf diesen Ort wirkt. Dieser Effekt wird bei der Ermittlung des stationären Gesamtnachstromfelds durch eine Druckscheibe im RANSE-Feld nicht berücksichtigt. Aus diesem Grund muss die induzierte Geschwindigkeit $\vec{v}_{p,ind}$ zeitlich gemittelt werden. Hierdurch ensteht ein räumlich variables, aber zeitlich konstantes effektives Nachstromfeld. Soll die Vorgehensweise für quasistationäre Untersuchungen verwendet werden, kann die Induzierte nicht mehr zeitlich gemittelt werden, sondern muss über den Umfang räumlich gemittelt werden, so dass der induzierte Mittelwert für eine Propellerumdrehung gilt.

Wird anstatt eines Propellermodells ein räumlich aufgelöster Propeller in der RANSE-Untersuchung berücksichtigt, sind auch die Induzierten des Tragflügels im Gesamtnachstromfeld enthalten, so dass letztlich das instationäre Nachstromfeld an das Potenzialverfahren gegeben werden könnte. Aufgrund der Unterschiedlichkeit beider Verfahren sind die lokal um den Flügel induzierten Geschwindigkeiten nicht identisch. Daher ist es auch in einer solchen Rechnung zielführend nur gemittelte Größen zu übergeben.

Beispielhaft ist in Abbildung 2.15 der nominelle, der Gesamtnachstrom und der berechnete effektive Nachstrom eines Schiffes dargestellt. Das nominelle und das Gesamtnachstromfeld sind in einer RANSE-Untersuchung ermittelt worden, wobei der Propeller als Druckscheibe modelliert

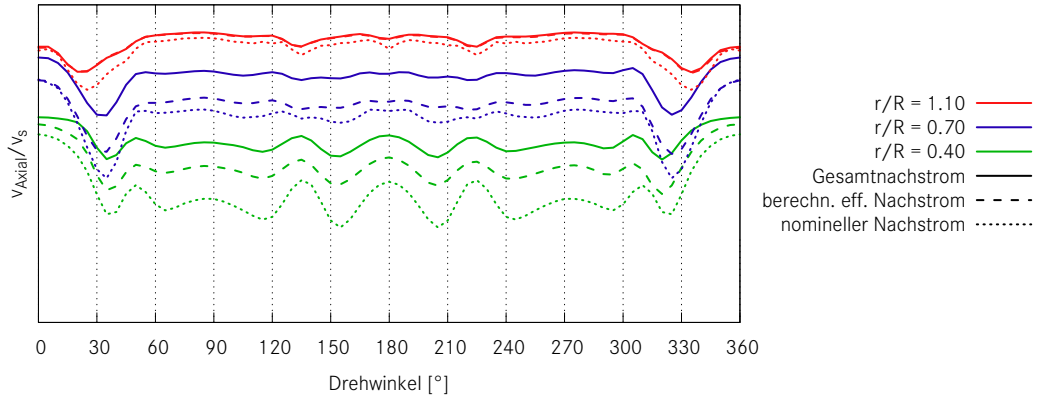


Abbildung 2.15: Nominelles, effektives und Gesamtnachstromfeld im Vergleich.

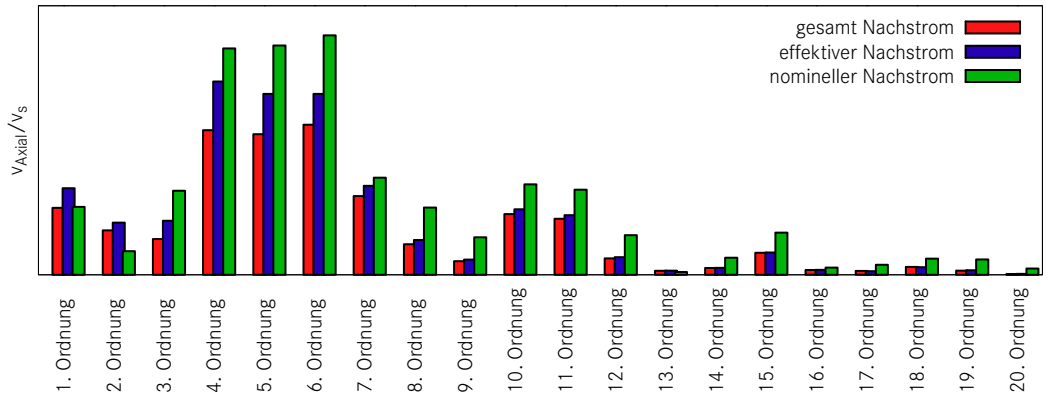


Abbildung 2.16: Amplituden im nominellen, effektiven und Gesamtnachstromfeld.

wurde, siehe hierzu auch Steden et al. (2006). Das Nachstromfeld zeichnet sich vor allem durch die beiden starken Verzögerungen in der *30°* und *330°* Stellung aus. Im Bereich um *0.7* R fallen die durch den Propeller induzierten Geschwindigkeiten am höchsten aus. Im Bereich ausserhalb des Propellers (r/R = 1.15) ist hingegen kaum eine Veränderung der axialen Anströmgeschwindigkeit zu beobachten. Zum Vergleich ist darüberhinaus auch das nominelle Nachstromfeld dargestellt. Auch nach Abzug der Propellerinduzierten liegen die Geschwindigkeiten über den nominell ermittelten Werten. Insbesondere auf den inneren Radienschnitten ist der Einfluss des Propellers auf die Ausbildung des Nachstromfeldes sichtbar. Die Frequenzanalyse in Abbildung 2.16 zeigt, dass die größten Amplituden zwischen der vierten und siebten Ordnung liegen. Das nominelle Nachstromfeld weist nach dem effektiven Nachstromfeld hier die größten Amplituden auf. Dies deutet darauf hin, dass durch den stärkeren Propellersog in verzögerten Bereichen das Nachstromfeld vergleichmäßigt wird.

Auf dieser Vorgehensweise aufbauend, wurde mit dem in dieser Arbeit entwickelten Verfahren von Greve et al. (2012) eine Kopplung mit einem RANSE-Verfahren erstellt, um die dynamischen Propellerkräfte auf ein Schiff im Seegang zu ermitteln. Dabei werden die Zuströmgeschwindigkeiten und die erzeugten Kräfte zeitschrittweise zwischen beiden Verfahren ausgetauscht. Hier ist ebenfalls eine vergleichende Untersuchung zu den induzierten Geschwindigkeiten für den Fall des freifahrenden Propellers zu finden.

Verifizierung und Validierung

Das Ziel der folgenden Untersuchungen ist, die Eignung des beschriebenen Verfahrens für die Berechnung von Propellerumströmungen zu dokumentieren. Hierzu gehören zum einen Verifizierungsstudien zum Nachweis der Konsistenz der implementierten Methoden. Zum anderen liegt bei der Validierung der Fokus auf der Untersuchung der Robustheit und Zuverlässigkeit für praxisnahe Fälle.

Die im Folgenden exemplarisch zusammengestellten Fälle beinhalten neben einer Gitternetzstudie spezielle Rechenfälle für stationäre sowie instationäre Strömungen.

Die Diskretisierung von Propellergeometrien hat einen deutlichen Einfluss auf die ermittelten Freifahrtkennwerte. Insbesondere sind die Einflüsse stark vom Betriebspunkt des Propellers abhängig, wie in Abschnitt 3.1 gezeigt wird. Das Ziel ist eine Mindestdiskretisierung für die Berechnung von Propellern zu ermitteln, um darauf aufbauend verschiedene potenzialtheoretische Modellierungsmöglichkeiten zu untersuchen. Hierbei werden die Ergebnisse der direkten denen der indirekten Methode gegenübergestellt, wobei sich die direkte Formulierung als die geeignetere für die Berechnung von Propellerkennwerten herausstellt. Das Ziel der zum Abschluss der stationären Referenzfälle durchgeführten Parameterstudie ist, Abhängigkeiten der Prognosegeauigkeit von Geometrieparametern zu ermitteln. Hierfür werden Propeller der Wageningen B-Serie herangezogen, da die Serie einen weiten Bereich an Propellersteigungen und Flächenverhältnissen abdeckt.

Das instationäre Verfahren wird in einem ersten Schritt anhand analytischer Lösungen für die Kugelumströmung validiert. Dabei wird das Ziel verfolgt den Gittereinfluss zu ermitteln, verschiedene Formulierungen der Normalenrandbedingung zu testen sowie das Verfahren zur Verzerrung der Körpergeometrie zu verifizieren. Um auch die Berechnung auftriebsbehafteter instationärer Strömungen zu validieren, wird ein oszillierender Tragflügel mit veröffentlichten Werten aus der Literatur verglichen. Abschließend werden die Auswirkungen der instationären Propellerumströmung im Schiffsnachstrom untersucht.

3.1 Gitternetzstudie

Der Schwerpunkt des entwickelten Verfahrens liegt auf der Berechnung der Propulsionseigenschaften von Festpropellern. Aus diesem Grund wird hier exemplarisch das Konvergenzverhalten, das sich bei unterschiedlichen Netzverfeinerungen einstellt, an einem typischen Containerschiffspropeller untersucht (siehe hierzu: Gothenburg 2000 – A workshop on CFD in Ship Hydrodynamics (2000)).

Um den Einfluss der Diskretisierungweite auf die integralen Werte zu ermitteln, wurden alle Untersuchungen bei identischem Wirbelschleppenverlauf durchgeführt. Das heißt der Verlauf der freien Wirbel wurde nicht iterativ ermittelt, sondern a priori festgelegt. Dabei wurden die freien Wirbel für 1.6 Umdrehungen mit 26 Paneelen pro Umdrehung modelliert.

Das Netz auf der Propelleroberfläche wurde in dieser Anwendung auf Radienschnitten erzeugt. Dabei wurden unterschiedliche radiale Auflösungen des Gitters sowie unterschiedliche Diskretisierungen in Profiltiefenrichtung untersucht (siehe Tabelle 3.1). Die in der Tabelle angegebenen

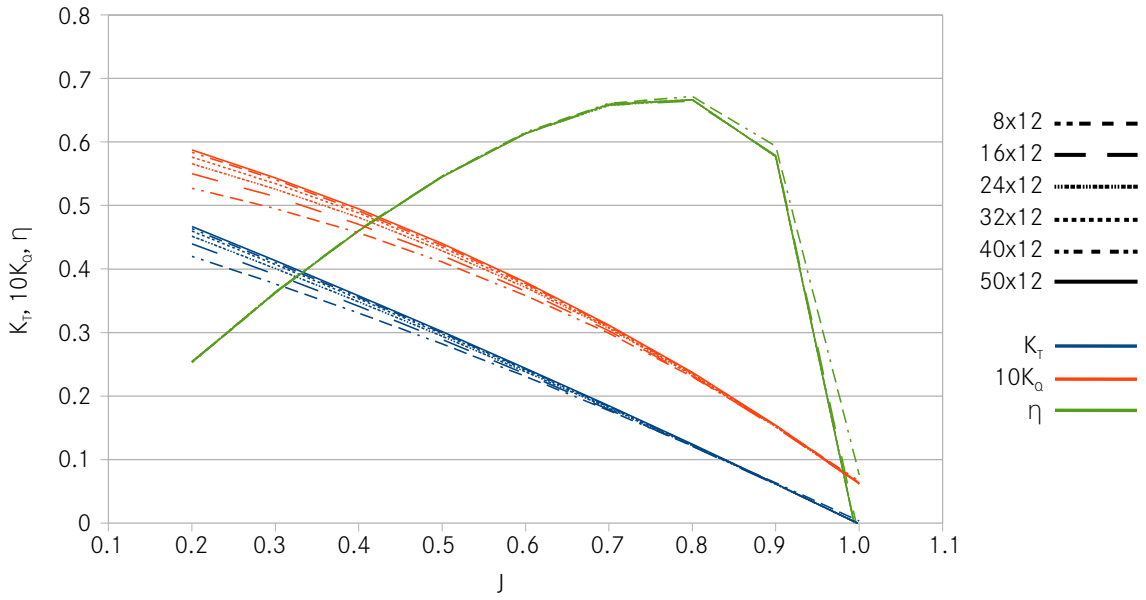


Abbildung 3.1: Konvergenz der Freifahrteigenschaften bei Erhöhung der radialen Paneelverteilung.

Werte für die periphere Auflösung beziehen sich dabei nur auf eine Seite des Propellers. Für die Gesamtanzahl der Paneele sind folglich Saug- und Druckseite zusammenzunehmen, so dass in der maximalen Auflösung das Blatt mit $32 \times 36 \times 2 = 2304$ Paneelen diskretisiert wurde. Hinzu kommt die Modellierung eines Propellernabenkörpers, dessen Diskretisierung mit 90 Paneelen in den Untersuchungen nicht verändert wurde.

Tabelle 3.1: Übersicht über die untersuchte Netzverfeinerung am KCS–Propeller.

Periphere Auflösung \ Radiale Auflösung	8	12	16	24	32	40	50
12	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
18					✓		
24					✓		
30					✓		
36					✓		

Die sukzessive Erhöhung radialen der Auflösung führt bei kleineren Fortschrittsgrad zu höheren Schub- und Drehmomentbeiwerten. Der Wirkungsgrad ist, wie in Abb. 3.1 dargestellt, kaum von der gewählten Auflösung abhängig. Ab etwa *30* Paneelen in radialer Richtung ist kaum noch eine Änderung festzustellen.

Ausgehend von *32* Paneelen in radialer Richtung, verringern sich bei einer Erhöhung der peripheren Auflösung Schub und Drehmoment bei kleiner werdenden Fortschrittsgraden wie in Abbildung 3.2 gezeigt ist. Im Vergleich zur radialen Auflösung ist der Einfluss der peripheren Diskretierungsweite auf die integralen Werte für den hier untersuchten Propeller deutlich geringer.

Ein weiterer numerischer Faktor, der die Genauigkeit der berechneten Ergebnisse beeinflusst, ist die Beschreibung der freien Wirbel. In stationären Fällen erstrecken sich die Wirbel bis ins Unendliche, was in numerischen Untersuchungen aus praktikablen Gründen auf wenige Umdrehungen hinter den Propeller beschränkt wird. Aus den zuvor durchgeführten Untersuchungen zur Diskretisierung der Blattfläche geht hervor, dass eine Verfeinerung des Gitters ab einer Auflösung von 32×18 nur einen vernachlässigbaren Genauigkeitsgewinn bringt. Dieses Gitter wurde als Basis für die Bestimmung der erforderlichen Auflösung der freien Wirbel verwendet. Im ersten

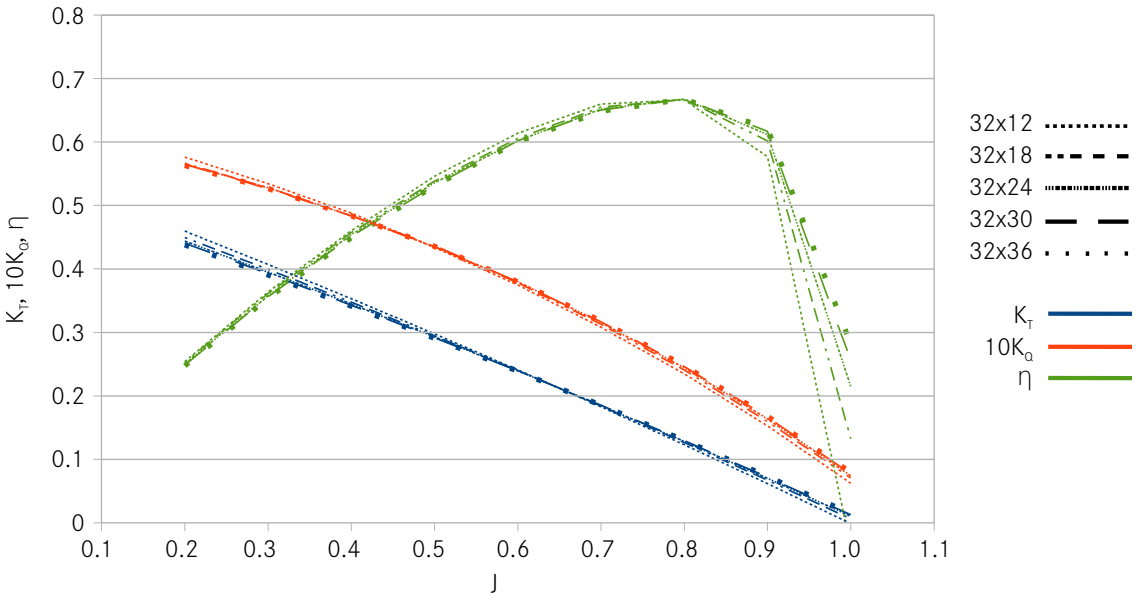


Abbildung 3.2: Konvergenz der Freifahrteigenschaften bei Erhöhung der peripheren Paneelverteilung.

Schritt wurde die Erstreckung der freien Wirbel in axialer Richtung variiert. In Abb. 3.3 sind die Einflüsse auf K_T und $10K_Q$ beginnend bei einer Wirbellänge, die 0.2 Propellerumdrehungen entspricht bis zu einer Länge die 10 Umdrehungen entspricht, dargestellt. Es stellt sich heraus, dass die Wirbelelemente, die älter sind als zwei Propellerumdrehungen, soweit vom Propeller entfernt sind, dass ihr Einfluss auf die Paneele des Körpers vernachlässigbar erscheint. Bei einer Verringerung der Wirbelausdehnung auf weniger als eine Umdrehung nimmt der Fehler stark zu. Es zeigt sich weiterhin, dass der Fehler etwa proportional zum Auftrieb ist. So liegt der Nulldurchgang des Schubbeiwerts bei allen Rechnungen bei dem gleichen Fortschrittsgrad. Je höher der erzeugte Schub ist, umso größer ist auch der numerische Fehler bei zu keiner Ausdehnung der simulierten Wirbel. Er beträgt bei $J = 0.2$ und einer modellierten Wirbelschleppe von einer Umdrehung kanpp 10%. Dies ist darauf zurückzuführen, dass im Nulldurchgang des Schubes die Zirkulation am Flügel im Mittel null ist, so dass auch die Wirbelverteilung und damit die Paneelstärke null sind wodurch deren Einfluss verschwindet.

Neben der Länge der freien Wirbel hat auch die Diskretisierungsweite der freien Wirbel Einfluss auf die berechneten Ergebnisse. Wie in Abb. 3.4 gezeigt, ist bereits mit 10 Paneelen pro Umdrehung eine ausreichende Diskretiersierung erreicht. Diese Betrachtung ist zunächst nur für stationäre Vorgänge gültig. In instationären Fällen ist eine allgemeine Aussage ohne Weiteres nicht möglich, da hier vor allem die zeitliche Änderung der Zuströmung eine Rolle spielt.

3.2 Stationäre Strömungen

3.2.1 Propellerserie: Wageningen B–Serie

Die Wageningen B-Serie, dokumentiert in Oosterveld und Oossanen (1975), eignet sich aus mehreren Gründen für die Validierung eines potenzialtheoretischen Verfahrens. Zum einen ist in der Serie eine große Bandbreite geometrisch ähnlicher Propeller dokumentiert, die den typischen Einsatzbereich von Propellern im Schiffbau abdeckt. Zum anderen weist sie eine über den Radius weitgehend konstante Steigungsverteilung auf, die für potenzialtheoretische Verfahren eine Herausforderung darstellen können. Im Gegensatz zu modernen Propellergeometrien, die im Spitzenbereich

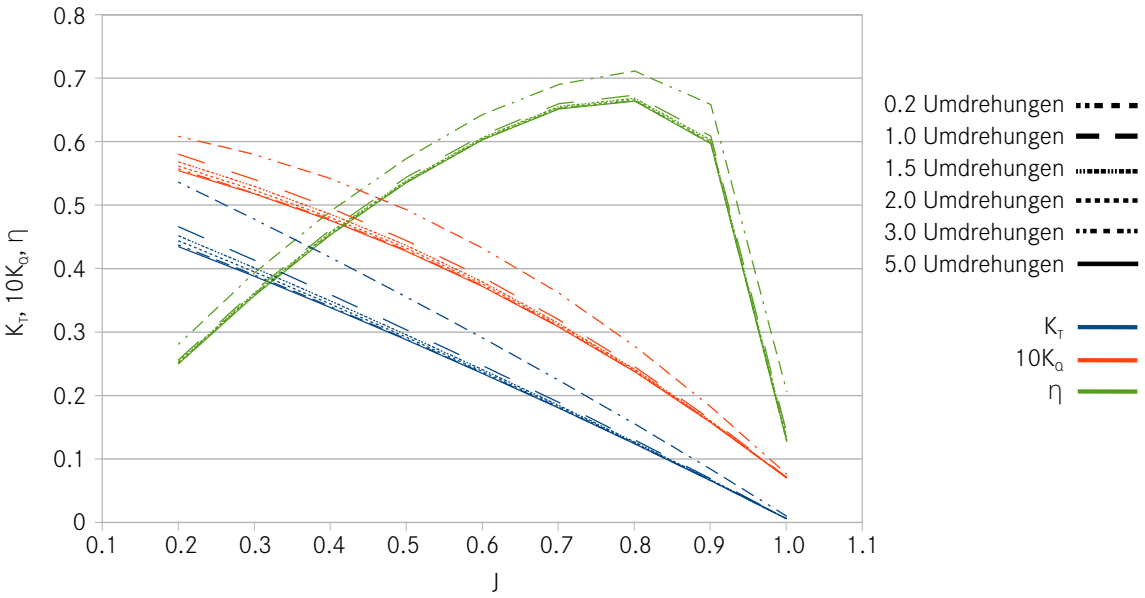


Abbildung 3.3: Konvergenz der Freifahrteigenschaften bei Verlängerung der freien Wirbel.

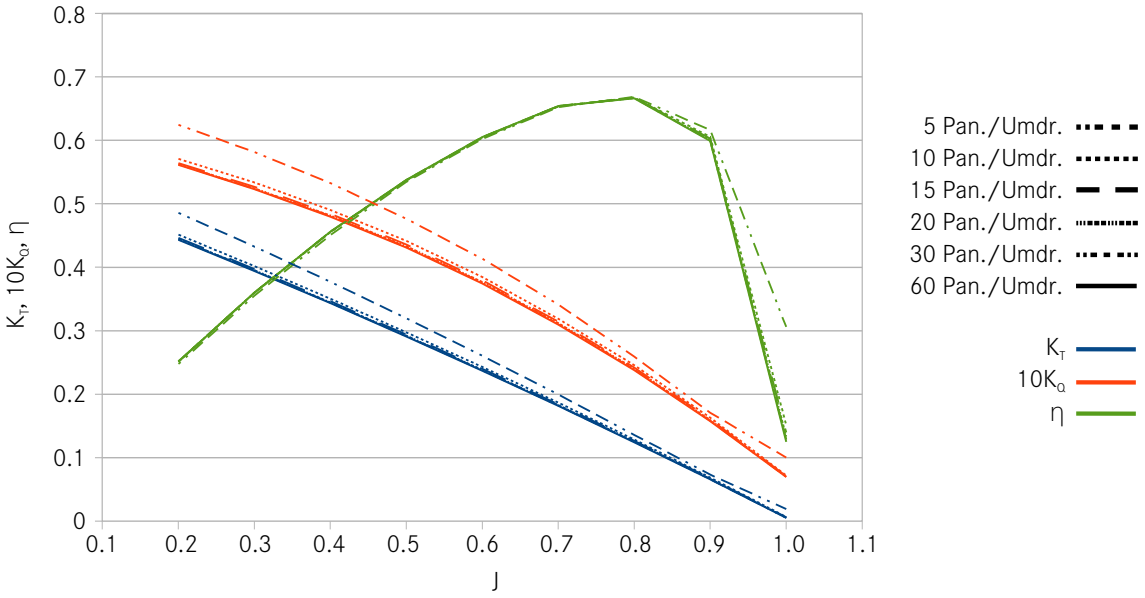


Abbildung 3.4: Konvergenz der Freifahrteigenschaften bei Erhöhung der Auflösung der freien Wirbel.

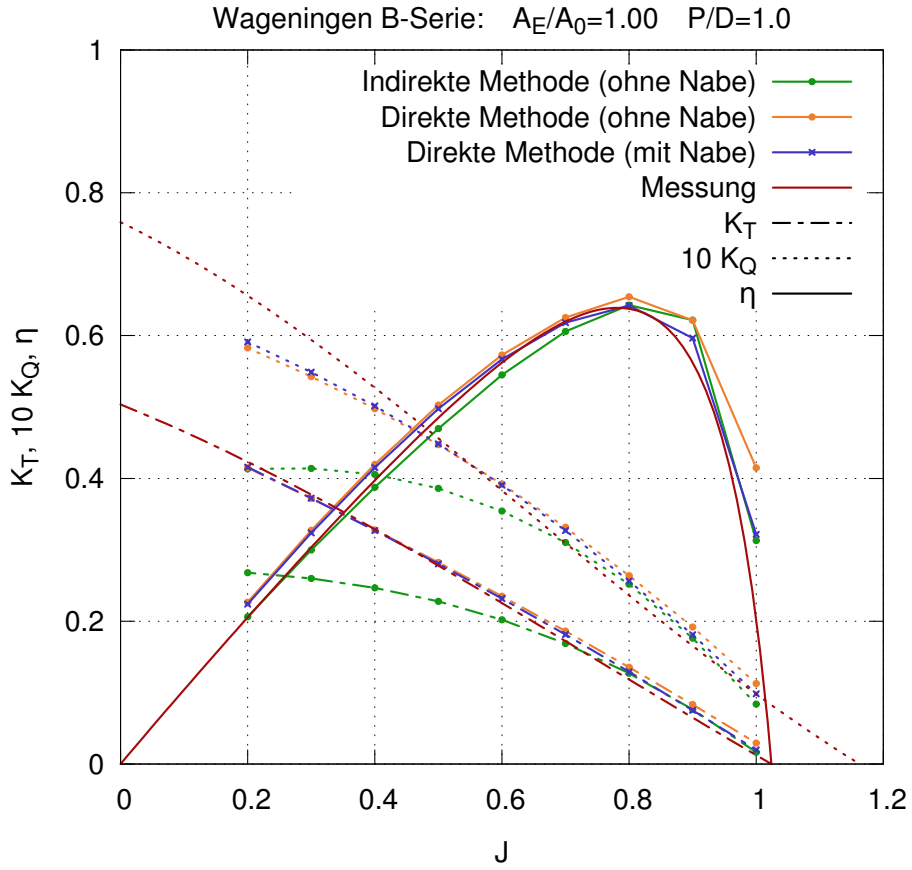


Abbildung 3.5: Vergleich der direkten und indirekten Methode bei der Berechnung von Freifahrtdiagrammen.

aus Kavitationsgründen meist stark entlastet werden, steigt durch die konstante Steigungsverteilung der Anstellwinkel an den äußeren Radienschnitten stark an, wodurch viskose Effekte einen stärkeren Einfluss erhalten können.

Vergleich direkte/ indirekte Modellierung

Zur Bestimmung des Potenzials sind zuvor die direkte und die indirekte Methoden beschrieben worden (siehe Abschnitt 2.2.1 und 2.2.2). Während in der direkten Methode ein Gleichungssystem mit einer Dirichletschen Randbedingug für das Potenzial gelöst wird, wird bei der indirekten Methode die Dipolverteilung auf dem umströmten Körper ermittelt, in dem eine Normalenrandbedingung für die vom Potenzial induzierten Geschwindigkeiten formuliert wird. Da die Geschwindigkeit auf dem Körper der Ableitung des Potenzials entspricht, ist das Niveau des Potenzials bei Verwendung der indirekten Methode nicht ausreichend definiert. Insbesondere bei geschlossen Körpern entstehen hierdurch schlecht konditionierte Gleichungssysteme. Um die Auswirkung der unterschiedlichen numerischen Approxmationen zu erfassen, wurde zunächst beispielhaft ein Propeller der Wageningen B-Serie mit beiden Methoden untersucht. Die Berechnungen wurden mit der gleichen geometrischen Wirbelschleppe durchgeführt, um eine Vermischung der Auswirkungen resultierend aus Wirbelmodell und Methodik zu vermeiden.

Die Untersuchung zeigt, dass bei hohen Fortschrittsgraden im Bereich des maximalen Wirkungsgrads beide Methoden ähnliche Werte liefern. Bei kleinen Fortschrittsziffern weichen die mit der indirekten Methode ermittelten Kräfte und Momente deutlich nach unten von den gemessenen Werten ab. Da in der indirekten Modellierung der Körper nicht geschlossen sein darf, wurde hier keine Nabe berücksichtigt. Um zu zeigen, dass nicht die Nabe ausschlaggebend für die abweichenden

Ergebnisse ist, wurde bei der direkten Formulierung eine Rechnung mit und ohne Nabe durchgeführt. Die Berücksichtigung der Nabe hat kaum Einfluss auf die Ergebnisse. Es hat sich jedoch herausgestellt, dass der Wirkungsgrad bei der Berücksichtigung der Nabe etwas geringer ausfällt und dabei gleichzeitig näher bei dem gemessen Wert liegt.

Parameterstudie

Ziel der Parameteruntersuchung ist, die Güte der berechneten Freifahrtkennwerte zu bestimmen. Dabei werden für einen vierflügligen Propeller der Wageningen B-Serie verschiedene Steigungen und Flächenverhältnisse untersucht. Aus dem Vergleich der direkten und der indirekten Methode ist hervorgegangen, dass der Verlauf der K_T- und K_Q-Werte durch die direkte Methode vor allem bei kleineren Fortschrittsgraden deutlich realistischer wieder gegeben wird. Aus diesem Grund wird bei der Nachrechnung der Wageningen B-Serie die direkte Methode unter Berücksichtigung einer Nabe verwendet. Für den Verlauf der Wirbelschleppe wird zu Beginn der Rechnung eine Schätzung vorgenommen, die im weiteren Rechnungsverlauf iterativ an die tatsächlichen Strömungsverhältnisse angepasst wird. Die Schätzung resultiert aus einer Mischung der ungestörten Anströmgeschwindigkeit mit dem Steigungsverlauf des Propellers. Die Steigungs des Propellers wird radienweise aus dem hinteren Drittel des Wölbungsverlaufs eines Radienschnitts ermittelt.

Die Ergebnisse, die auf den geschätzten Wirbelverläufen basieren, (siehe Abb. 3.6) zeigen, dass mit dieser Methode eine gute Übereinstimmung der Freifahrtkennwerte zu erreichen ist. Die Wirkungsgrade werden mit einer sehr guten Übereinstimmung, auch hinsichtlich der Lage des Maximums wiedergegeben. Die Rechenergebnisse tendieren bei kleinen Flächenverhältnissen zu leicht überhöhten Schub- und Drehmomentenbeiwerten. Bei großen Steigungsverhältnissen und gleichzeitig kleinen Fortschrittgraden werden die Kennwerte unterschätzt. Dieser Effekt ist vermutlich auf die großen Anstellwinkel der Profile im Bereich der Blattspitze bei diesen Betriebspunkten zurückzuführen. Bei diesen Anstellwinkeln treten viskose Effekte in den Vordergrund, die beispielsweise dreidimensionale Effekte verursachen, die potenzialtheoretisch nicht ohne Weiteres erfasst werden können.

Um zu zeigen, dass die Abweichungen nicht auf Ungenauigkeiten durch die initial geschätzte Lage der freien Wirbel zurückzuführen sind, wurde der Verlauf der Wirbel iterativ bestimmt. Die Ergebnisse (Abb. 3.7) zeigen keine deutlichen Veränderungen, sondern weisen die gleichen Verhältnismäßigkeiten wie oben erläutert auf. Bei dem iterativen Verfahren können hingegen numerische Probleme bei der Verschiebung der Paneele entstehen, die - wie in der Abbildung bei den Varianten (A_E/A_0=0.55; P/D=0.6) und (A_E/A_0=1.0; P/D=1.4) für $J = 0.2$ zu sehen - zu Unstetigkeiten in der Freifahrtkurve führen können. Dies ist insbesondere bei kleinen Fortschrittsgraden der Fall.

3.3 Instationäre Strömungen

Mit Hilfe instationärer Simulationen können neben den trägheitsbedingten Lasten auf Körper, die beispielsweise zu der hydrodynamischen Masse führen, auch Effekte untersucht werden, die auf belastungsbedingte Verformungen zurückzuführen sind. Für instationäre Probleme steigt die Komplexität des erforderlichen Versuchaufbaus auch bei einfachen Konfigurationen schnell an, so dass kaum geeignete Vergleichsfälle veröffentlicht sind. Auch potenzialtheoretische analytische Lösungen sind rar, ein häufig genanntes Beispiel ist die potenzialtheoretische Bestimmung der so genannten hydrodynamischen Masse einer Kugel.

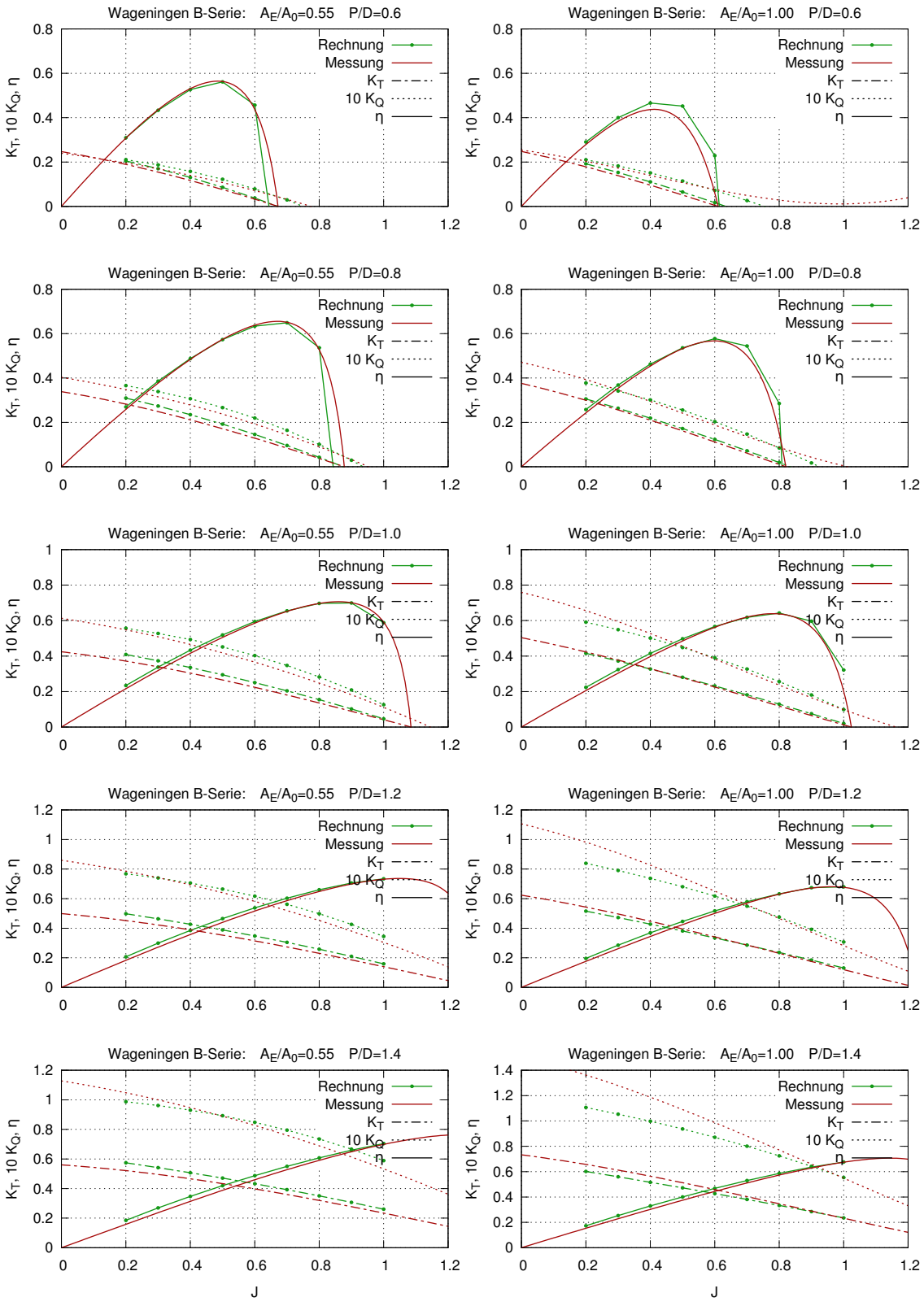


Abbildung 3.6: Nachrechnung der Wageningen B–Serie mit prognostizierter Wirbelgeometrie.

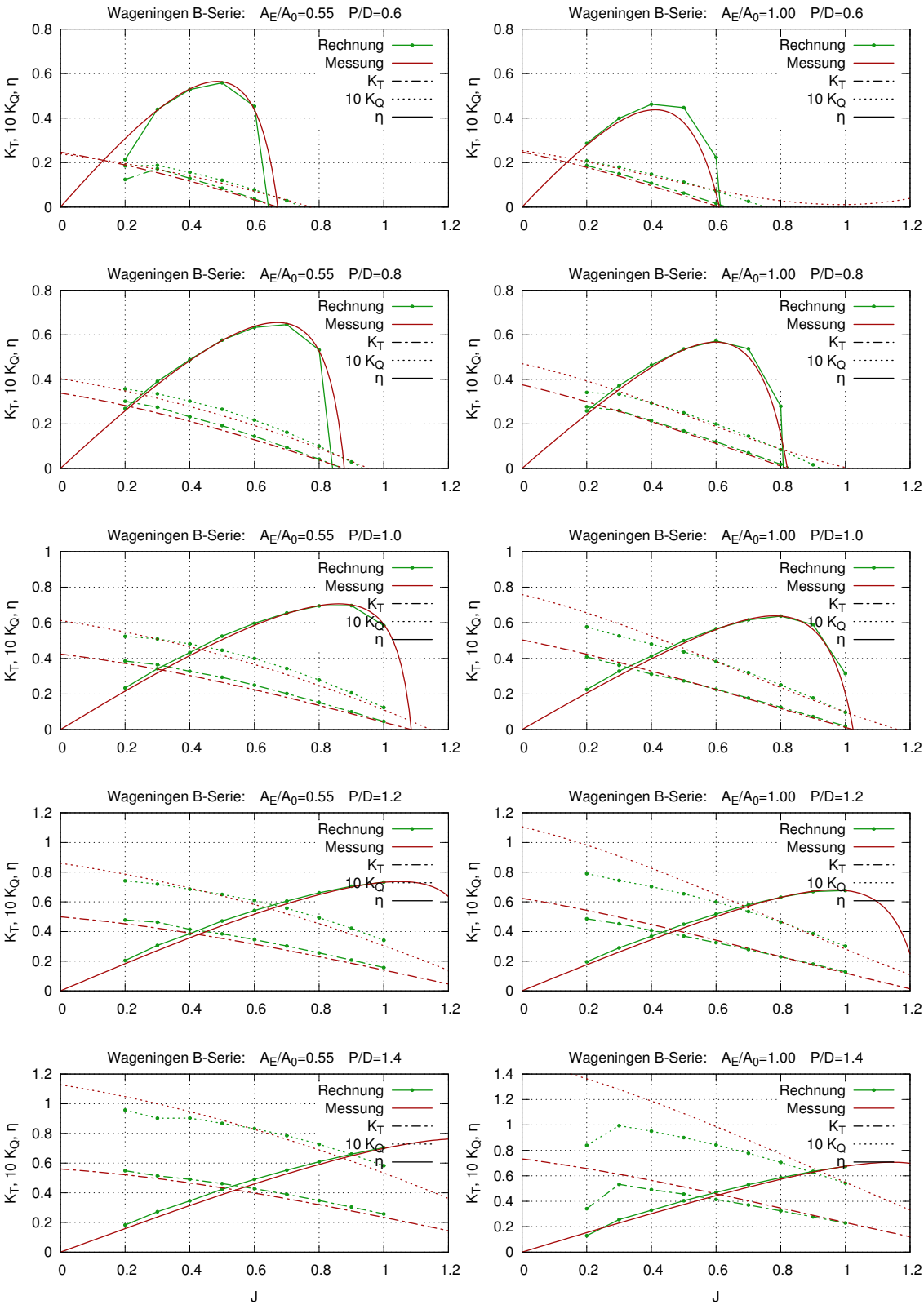


Abbildung 3.7: Nachrechnung der Wageningen B-Serie mit iterierter Wirbelgeometrie.

3.3.1 Beschleunigte Kugel

Eine Kugel erfährt in der stationären Potenzialströmung entsprechend dem D'Alamaberteschen Paradoxon keinen Widerstand, nur durch die Beschleunigung des Körpers in der Strömung und die damit verbundene zeitliche Änderung des Potenzials resultiert aus der Druckverteilung eine Kraft, die dessen hydrodynamischer Masse entspricht. Auch wenn bei der beschleunigten Kugel keine Zirkulation in der Strömung verursacht wird und somit das Beispiel nicht repräsentativ für Propellerumströmungen ist, eignet es sich gut, um verschiedene Verfahren zu testen und zu verifizieren.

In der numerischen Simulation können unterschiedliche Herangehensweisen gewählt werden, um die hydrodynamische Masse einer Kugel zu ermitteln. Da keine Zirkulation in der Strömung vorhanden ist, reicht es aus die Kugel ausschließlich mit Hilfe einer Quellverteilung zu belegen. Alternativ kann wie bei auftriebsbehafteten Strömungen auch eine Kombination aus Quell- und Dipolverteilung gewählt werden, die mit Hilfe der direkten Methode ermittelt wird. Weiterhin können unterschiedliche Bewegungsmodelle getestet werden. Zum einen kann die Kugel in einem körperfesten Koordinatensystem betrachtet werden, bei der die Anströmgeschwindigkeit sich kontinuierlich erhöht. Zum anderen kann in einem ortsfesten System zu jedem Zeitschritt für jedes Paneel eine diskrete Verschiebung vorgegeben werden, aus der letztlich die Beschleunigung resultiert. Während im ersten Fall die aktuell gültige Geschwindigkeit auf dem Körper explizit bekannt ist, muss sie im zweiten Fall aus der gegebenen Verschiebung mit einer numerischen Differenziation ermittelt werden. Diese Vorgehensweise ist beispielsweise erforderlich, wenn die Verformung eines Körpers in Folge einer Fluid-Struktur-Wechselwirkung untersucht wird.

Die Kraft, die bei einer beschleunigten massenlosen Kugel in der Potenzialströmung aufzuwenden ist, beträgt:

$$F_M = c_M V \rho a = \frac{1}{2}\frac{4\pi}{3} r^3 \rho a \tag{3.1}$$

wobei a die Beschleunigung der Kugel und r deren Durchmesser ist. Alternativ kann die Kraft auch mit Hilfe eines Beiwerts c_M ausgedrückt werden, wobei das verdrängte Kugelvolumen V zur Normierung herangezogen wird. Für die Kugel beträgt der Beiwert dann $c_M = \frac{1}{2}$.

Tabelle 3.2: Beiwert der hydrodynamischen Masse einer Kugel.

a)	Theoretischer Wert	0.5
b)	Reine Quellverteilung (Beschl. in x-Richtung)	0.5206
c)	Reine Quellverteilung (Beschl. in y-Richtung)	0.5156
d)	komb. Quell-/Dipolvert. (Beschl. in x-Richtung)	0.4975
e)	komb. Quell-/Dipolvert. (Beschl. in y-Richtung)	0.4983
f)	komb. Quell-/Dipolvert. (Bewegung extern vorgegeben, wie in d))	0.4975

Der numerische Fehler beträgt bei einer Paneelierung mit 800 Paneelen auf der Kugeloberfläche 4 % bzw. 3 % im Falle, dass das Potenzial nur mit einer Quellverteilung modelliert wird. Die Unterschiede bei Bewegung in x- bzw. y-Richtung ergeben sich aus der Anordnung der Paneele gegenüber Anströmung (siehe Abb. 3.8). Der Fehler beträgt nur noch 0.5 %, wenn die Berechnung des Potenzials über die direkte Formulierung also mit einer Kombination aus Quellen und Dipolen erfolgt.

Im Hinblick auf die Besonderheiten der Fluid-Struktur-Kopplung wurde eine weitere Methode zur Implementierung einer Beschleunigung getestet. Im Falle der Fluid-Sturktur-Kopplung findet neben der aufgeprägten Bewegung des Starrkörpers eine zusätzliche Beschleunigung der Paneele durch die dynamische Verformung des Bauteils statt. Während bei der Starrkörperbewegung die

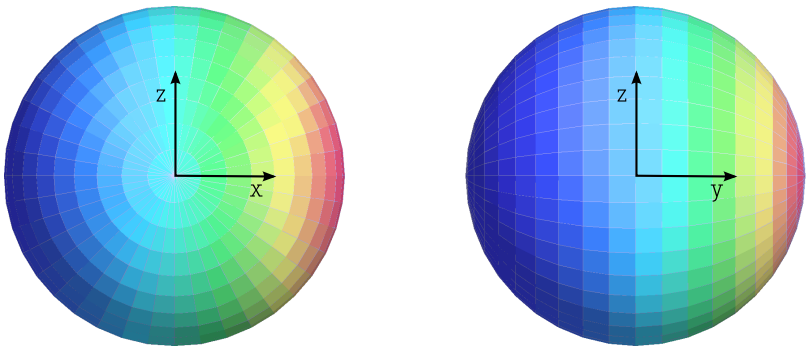


Abbildung 3.8: Druckverteilung auf der beschleunigten Kugel. links: Beschleunigung in Richtung x–Richtung. rechts: Beschleunigung in y–Richtung.

Bewegungsgeschwindigkeit an jedem Ort des Körpers explizit bekannt ist, wird die dynamische Verformung als diskrete Verschiebung der Paneeleckpunkte vorgegeben. Die Zusatzgeschwindigkeit, die sich daraus ergibt, muss zur Erfüllung der Normalenrandbedingung zunächst ermittelt werden. Um die Vorgehensweise und die implementierten numerischen Verfahren zu verifizieren, wurde die Bewegung der Kugel mit Hilfe einer für jeden Zeitschritt definierten Verschiebung der Paneeleckpunkte beschrieben. Nachdem für jeden Zeitschritt die Verschiebung eingelesen wurde, muss zunächst für jedes Paneel eine Verformungsgeschwindigkeit ermittelt werden. Da die sich Kugel mit einer konstanten Beschleunigung bewegen soll, wird für die Ermittling der Paneelgeschwindigkeit das in Abschnitt 2.2.9 beschriebene Verfahren 2. Ordnung verwendet. Nach Gl. 2.85 wird die zum Ende des Zeitschritt geltende Geschwindigkeit wie folgt berechnet:

$$\vec{v}_{j,def}^{\,n} = 2\frac{\vec{x}_j^{\,n} - \vec{x}_j^{\,n-1}}{\Delta t} - \vec{v}_{j,def}^{\,n-1} \tag{3.2}$$

Wird eine solche Formulierung zweiter Ordnung verwendet, kann der Fall einer konstanten Beschleunigung exakt abgebildet werden, so dass sich für die Werte f) und d) identische numerische Werte ergeben. Wird hingegen die Zentraldifferenz (Gl. 2.79) zur Bestimmung der Verschiebegeschwindigkeit eines Paneels verwendet, gilt die berechnete Kraft zur Mitte des Zeitschritts und nicht wie die sonst im Verfahren ermittelten Werte zum Ende des Zeitschritts. Entsprechend eilt bei einer Zentraldifferenz die berechnete Kraft der analytischen Kraft um einen halben Zeitschritt hinterher.

3.3.2 Oszillierender Flügel

Eine Vorstufe zur inhomogenen Propelleranströmung ist ein oszillierender Flügel mit überlagerter paralleler Anströmung. In Tuncer und Cebeci (2005) sind rechnerische Ergebnisse dargestellt, die mit einem 2D–Potenzialverfahren ermittelt wurden. Dieses 2D–Verfahren enthält eine Grenzschichtanalyse, mit dessen Hilfe der Einfluss der Reibung auf die auftretenden Strömungsverhältnisse berücksichtigt wird.

Die dargestellten Ergebnisse beinhalten harmonisch oszillierende Flügel, sowie rampenförmig beschleunigte Tragflächen, von denen hier das Beispiel einer harmonischen Drehschwingung verglichen werden soll. Als Tragflügel dient ein NACA0012 Profil, mit einer Profiltiefe von $C = 1\ m$ in einer parallelen Strömung von $1\ \frac{m}{s}$. Der Flügel führt eine Drehbewegung um eine Achse $0.25\ m$ hinter der Eintrittskante aus. Der aus der Drehbewegung resultierende Anstellwinkel beträgt:

$$\alpha = 5^\circ + 11^\circ sin(\omega_e t) \tag{3.3}$$

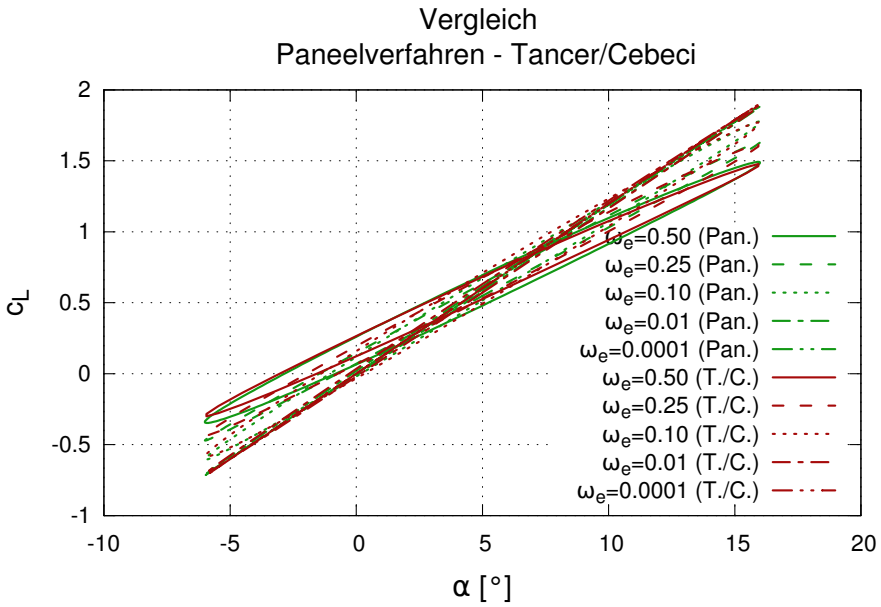


Abbildung 3.9: Abhängigkeit des Auftriebsbeiwerts vom Anstellwinkel.

Die Beiwerte des oszillierenden Flügels, hängen von dem Verhältnis der Anströmgeschwindigkeit zur Schwingfrequenz des Flügels ab. Bei einer Anströmgeschwindigkeit von $1\ \frac{m}{s}$ wurden die Erregerfrequenzen $\omega_e = [0.5, 0.25, 0.1, 0.01, 0.0001]$ untersucht.

In Abb. 3.9 ist die Abhängigkeit des Auftriebsbeiwerts während des Umlaufs in Abhängigkeit vom Anstellwinkel dargestellt. Beide Verfahren geben das Verhalten des Tragflügels ähnlich wieder. Bei $\omega_e = 0.0001$ sind die Geschwindigkeiten, die aus der Schwingbewegung resultieren, klein gegenüber der Anströmgeschwindigkeit, so dass die Ergebnisse in stationäre Werte, abhängig vom aktuellen Anstellwinkel übergehen. Je schneller die Schwingung gegenüber der Anströmgeschwindigkeit ist, desto geringer fällt das Verhältnis von Auftrieb zu Anstellwinkel aus. Gleichzeitig stellt sich bei hohen Schwinggeschwindigkeiten eine Art Hysterese ein, die mit höherer Frequenz zunimmt.

Bei näherer Betrachtung (siehe Abb. 3.10) ist zu sehen, dass die Hysterese in dem hier beschriebenen Verfahren etwas stärker ausfällt als bei Tuncer und Cebeci (2005). Als Zacken ist zudem der Beginn der oszillierenden Bewegung zu sehen. Da die Beschleunigung des Flügels ruckartig einsetzt, sind die Ergebnisse im ersten Iterationsschritt nicht physikalisch bewertbar, vielmehr hängt der erste Wert von der Größe der Zeitschrittweite ab. Während in dem hier beschriebenen Verfahren mit einer Auflösung von 240 Iteration/Periode gerechnet wurde, sind in Tuncer und Cebeci (2005) nur 30 Zeitschritte pro Periode verwendet worden. Im Anschluss an die ersten beiden Zeitschritte ergibt sich bei beiden Verfahren der gleiche Verlauf.

Da in beiden Verfahren unterschiedliche Ansätze zur Approximation der viskosen Effekte verfolgt werden, beruhen die hier dargestellten Ergebnisse ausschließlich auf den Werten der potenzialtheoretisch ermittelten Druckverteilung. Folglich pendeln die Widerstandsbeiwerte um null. Zur Bewertung der auf die Drehachse bezogenen Momentenbeiwerte sind in Abb. 3.10 zudem stationäre Ergebnisse des Programms JavaFoil (siehe Hepperle (2006)) dargestellt. Sowohl die mit dem hier beschriebenen Verfahren ermittelten Werte als auch die von Tuncer veröffentlichen Werte pendeln um die stationären Ergebnisse. Da bei JavaFoil in die potenzialtheoretischen Ergebnisse eine Grenzschichtbewertung einfließt, bestehen ab einem Anstellwinkel von mehr als $12°$ Unterschiede beim Momentenbeiwert. Ebenso wie bei der Auftriebsermittlung fällt die Hysterese bei den Ergebnissen von Tuncer etwas kleiner aus.

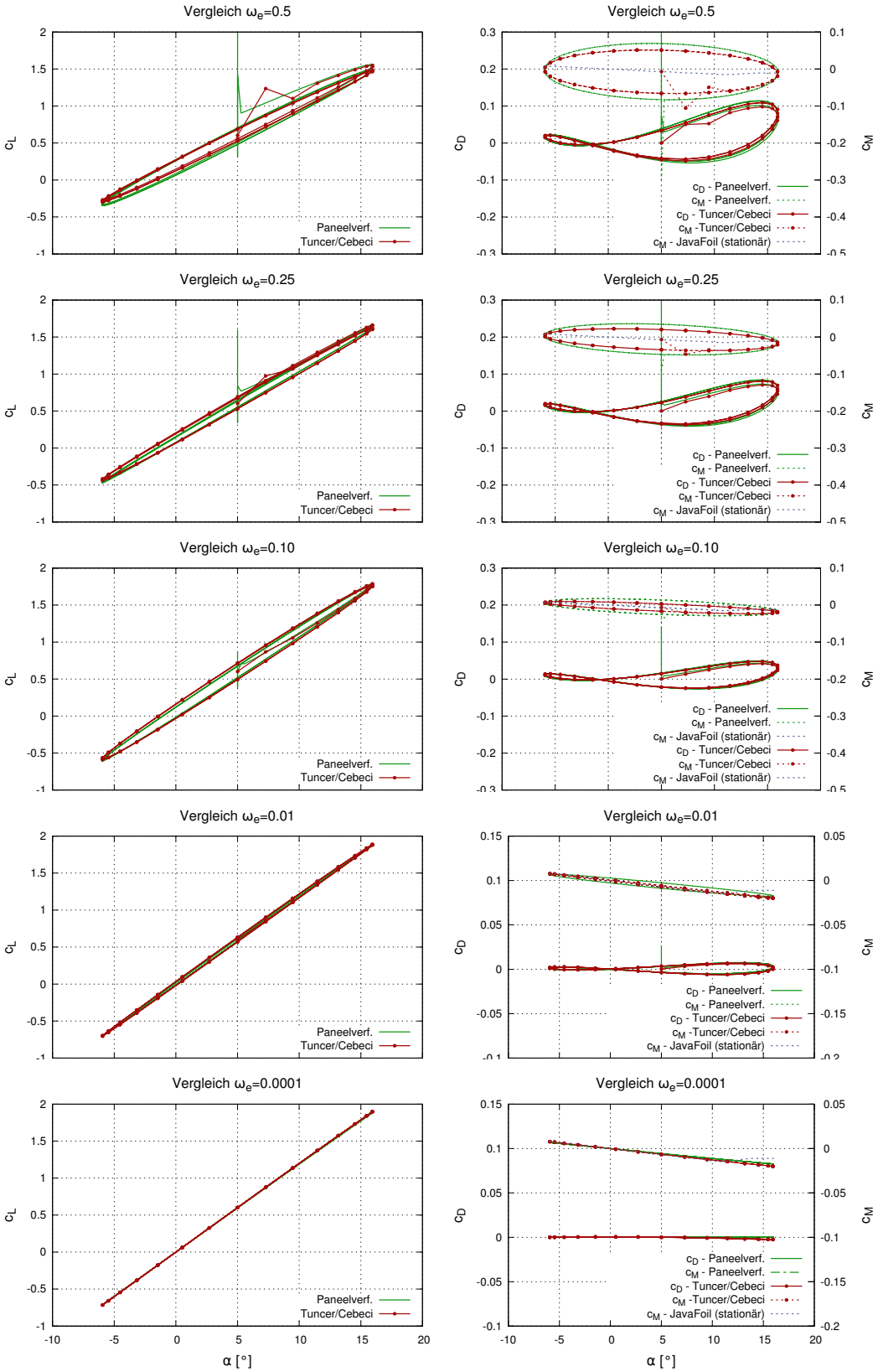


Abbildung 3.10: Abhängigkeit des Auftriebs-, Widerstands und Drehmomentbeiwerts vom Anstellwinkel.

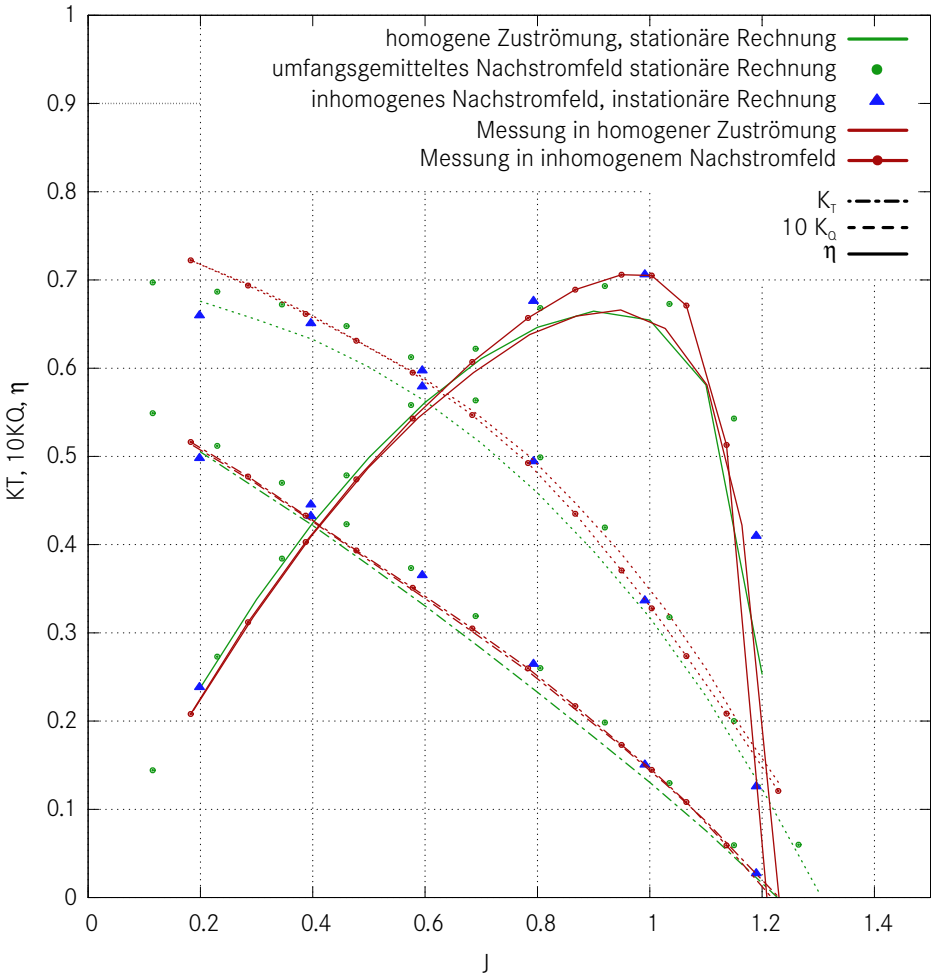


Abbildung 3.11: Berechnete und gemessene Freifahrteigenschaften eines Propellers in freier Anströmung und im Nachstrom.

3.3.3 Berücksichtigung von Nachstromfeldern

Nachstromfelder können auf verschiedene Weisen in der potenzialtheoretischen Untersuchung berücksichtigt werden. Die einfachste Methode besteht darin, eine mittlere Nachstromziffer vorzugeben, wodurch die Anströmgeschwindigkeit im gesamten Gebiet auf einen konstanten Wert herab gesetzt wird. Dieser Fall führt letztlich nur zu einer Umrechnung des Fortschrittsgrads gegenüber der ungestörten Anströmung, da ein Fall mit konstanter Nachstromziffer zu dem selben Gleichungsystem führt wie eine homogene Anströmung mit entsprechend angepasster Anströmgeschwindigkeit.

In der Regel ist die Nachstromziffer jedoch nicht konstant, so dass bei der nächst genaueren Näherung ein umfangsgemitteltes Nachstromfeld verwendet werden kann. Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, dass zum einen die geänderte Zirkulationsverteilung entlang des Propellerflügels erfasst werden kann. Zum anderen führt das Problem weiterhin zu einer stätionären Lösung, für die nur wenige Iterationsschritte benötigt werden.

Bei der vollständigen Berücksichtigung des Nachstromfeldes ist das Problem instationär und die Schub- und Drehmomentwerte müssen über eine zeitliche Mittelung der berechneten Werte bestimmt werden. Alternativ besteht auch die Möglichkeit quasistationäre Untersuchungen in unterschiedlichen Drehwinkeln durchzuführen. Die Aussagekraft quasistationärer Ergebnisse ist jedoch ungewiss.

Ein Vergleich der ermittelten Freifahrteigenschaften für einen Propeller im Nachstromfeld ist in Abbildung 3.11 dargestellt. Die stationär in homogener Anströmung berechneten Werte für

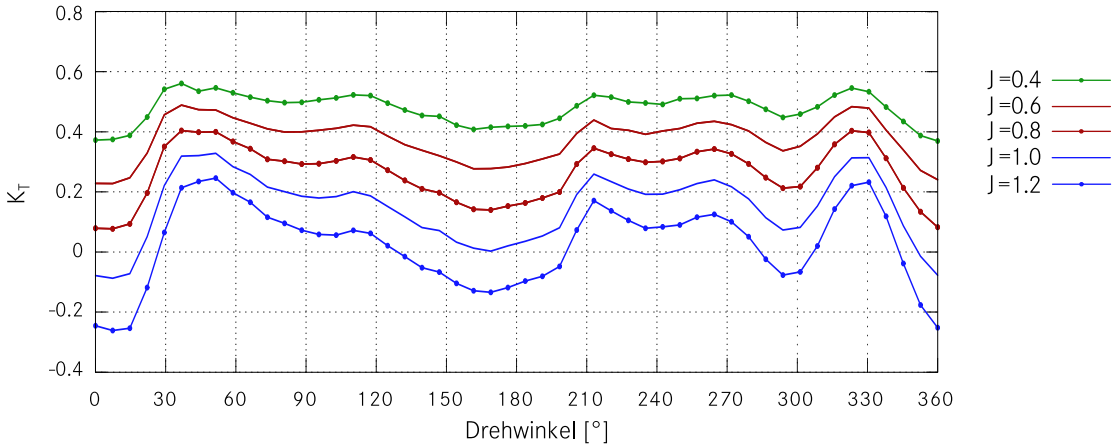


Abbildung 3.12: Kraftverlauf während einer Umdrehung im inhomogenen Nachstromfeld.

Schub und Drehmoment liegen leicht unter den gemessenen Werten, wobei der Wirkungsgrad den gemessenen Werten entspricht.

Da im Versuch die effektive Nachstromziffer des Modells nicht genau bekannt ist, wird der Fortschrittsgrad für die hinterm Schiff gemessene Kurve so angepasst, dass die gemessen Schubwerte denen aus dem Freifahrtdiagramm in der homogenen Strömung über einen möglichst weiten Bereich entsprechen. Für den hier untersuchten Propeller stellt sich dabei im Nachstrom ein etwas höheres Wirkungsgradmaximum ein. Diese Vorgehensweise ist auch in der potenzialtheoretischen Analyse erforderlich. Dabei stellt sich ebenso in der stationären umfangsgemittelten Untersuchung als auch in der vollständig instationären Rechnung mit inhomogenem Nachstromfeld ein höherer Wirkungsgrad ein. Die instationär berechneten Werte sind für die Darstellung im Freifahrtdiagramm zeitlich gemittelt.

Die instationäre Rechnung für das vollständige Nachstromfeld wurde mit Hilfe der Key-Blade-Technik durchgeführt. Die zeitlich gemittelten Schubwerte stimmen sehr gut mit den stationären Ergebnissen der umfangsgemittelten Nachstromanalyse überein, die instationär ermittelten Drehmomente fallen etwas geringer aus. Folglich fällt der instationär berechnete Wirkungsgrad bei dem untersuchten Beispiel leicht höher aus.

Die axialen Flügelkräfte während eines Umlaufs sind in Abb. 3.12 dargestellt. Die Amplituden nehmen mit zunehmender Belastung des Propellers ab. Dies ist auf die induzierten Geschwindigkeiten zurückzuführen, die bei höheren Schüben gegenüber den Geschwindigkeitsunterschieden im Nachstromfeld dominieren.

Kavitationsmodellierung

Wesentlicher Bestandteil einer Propellerauslegung ist die Vermeidung von Kavitation, um die Schädigung des Propellers durch Kavitationserrosion zu verhindern und um die Druckimpulse auf das Hinterschiff, die aus der Bildung und dem Zerfall der Dampfblase entstehen, klein zu halten. Während in einigen industriellen Anwendungen die Wasserdampfbildung eingeschränkt zugelassen wird, werden im Spezialschiffbau mitunter vollständig kavitationsfreie Entwürfe gefordert. Um diese strengere Forderung, die unter anderem aus akkustischen Gründen aufgestellt wird, zu erfüllen, wird vielfach die Steigung an der Blattspitze zurückgenommen. Diese Entlastung führt zu einer veränderten Zirkulationsverteilung, was in der Regel mit einer Verringerung des Wirkungsgrades einhergeht. Um diese konträren Entwurfsziele gegeneinander abwägen zu können, ist die Erfassung der Kavitationsbilung möglichst im frühen Entwurfsstadium erforderlich.

Zahlreiche potenzialtheoretische Verfahren beinhalten Rechenmodelle mit denen Prognosen über die Ausbreitung der Schichtkavitation getroffen werden können. Im Fokus dieser Arbeit ist die Entwicklung einer Methode mit der auch der Kavitationseinsatz im Spitzenwirbel erfasst werden kann. Im Folgenden wird zunächst die mathematische Formulierung zur Modellierung der Kavitation vorgestellt. Hierfür wird der Spitzenwirbel als diskreter Wirbel in der Strömung aufgefasst, dessen Verhalten mit Hilfe semiempirischer Zusammenhänge abgebildet wird. Die semiempirischen Werte werden an Hand einiger Beispiele bestimmt bevor im Weiteren das Kavitationsmodell hinsichtlich seiner Eigenschaften analysiert wird. Abschließend erfolgt eine Validierung der Ergebnisse an Hand von Messergebnissen.

4.1 Mathematische Modellierung

Da die Entstehung und Ausbreitung von Kavitation und der anschließende Zusammenfall der Dampfblase hochkomplexe physikalische Vorgänge sind, die im Detail nicht vollständig potenzialtheoretisch abgebildet werden können. Deshalb werden semiempirische Verfahren verwendet, um eine entsprechende Bewertung eines Propellers vornehmen zu können. Um den Einsatzpunkt der Kavitation zu ermitteln, müssen die Kavitationserscheinungen in verschiedene Arten aufgeteilt werden, die getrennt von einander bewertet werden. Im Wesentlichen sind hier zwei Arten zu untersuchen. Zum einen kann der Druck auf der Flügeloberfläche den Dampfdruck unterschreiten, so dass in Folge Schichtkavitation, Wolkenkavitation oder Streifenkavitation entstehen kann. Zum anderen kann der Druckabfall sowohl im Spitzen- als auch im Nabenwirbel zu so genannter Wirbelkavitation führen. Da die Mechanismen für die Kavitationsarten unterschiedlich sind, müssen jeweils eigene Modelle implementiert werden.

4.1.1 Schichtkavitation

Bei der Schichtkavitation wird davon ausgegangen, dass sich die Kavitation an der oder in der Nähe der Flügeloberfläche bildet, da hier die geringsten Drücke auftreten. Es existieren zahlreiche Modelle mit deren Hilfe die Ausdehnung der Schichtkavitation berechnet werden kann (siehe hierzu u.a.: Lee und Kinnas (2001); Young und Kinnas (2003c); Salvatore et al. (2006)). Da in dieser

Arbeit lediglich der Kavitationseinsatzpunkt ermittelt werden soll und nicht deren Ausdehnung von Interesse ist, genügt ein relativ einfaches Modell.

Unter der Annahme, dass die Kavitation am Ort des niedrigsten Drucks einsetzt, kann die kritische Kavitationszahl σ_i aus dem minimalen dynamischen Druckanteil (hier: Δp_{ind}) hergeleitet werden. Der Kavitationseinsatzpunkt ist dann durch die Bedingung definiert, dass der minimale Druck dem Dampfdruck entspricht.

$$p = \rho g H + p_L - \frac{\rho}{2} v^2 \tag{4.1}$$

$$= \rho g H + p_L + \Delta p_{ind} \tag{4.2}$$

$$= p_v \tag{4.3}$$

Dabei sind H die Tauchtiefe des Referenzortes am Propeller, g die Erdbeschleunigung, p_v der Dampfdruck des Fluid und p_L der Umgebungsdruck bei $H = 0$. Aus der Definition der Kavitationszahl

$$\sigma_i = \frac{\rho g H + p_L - p_v}{\frac{\rho}{2} n^2 D^2} \tag{4.4}$$

folgt mit Gl. 4.2 und 4.3:

$$\sigma_i = -\frac{\Delta p_{ind}}{\frac{\rho}{2} n^2 D^2} \tag{4.5}$$

4.1.2 Modellierung der Spitzenwirbelkavitation

Im Vergleich zu den Kavitationserscheinungen, die durch großflächige Unterdrücke auf dem Blatt selbst erzeugt werden, stehen bei einer potenzialtheoretischen Analyse der Spitzenwirbelkavitation deutlich weniger belastbare Informationen für die Bestimmung des Einsatzpunktes zur Verfügung. Die Spitzenwirbelkavitation wird im Allgemeinen durch den Unterdruck im Wirbelkern hervorgerufen. Hierbei spielen neben der Stärke des Wirbels viskose Effekte im Wirbelkern eine Rolle, welche in einen Zusammenhang mit der lokalen Gestaltung der Flügelspitze stehen. Eine umfassende Diskussion über die Entstehung von Wirbelkavitation sowie eine Zusammenfassung wesentlicher messtechnischer Untersuchungen ist in Arndt (2002) zu finden. Die ersten umfangreichen Untersuchungen zu Wirbelkavitation wurden von Mc Cormick (1962) durchgeführt. Mc Cormick erkannte, dass der Kavitationseinsatzpunkt eines Spitzenwirbels an einer Tragfläche nicht nur von dem Auftriebsbeiwert der Tragfläche c_l, sondern auch von der Reynoldszahl Re abhängt und stellte dies in dem folgenden über K proportionalen Zusammenhang dar:

$$\sigma_i = K c_l^{\alpha} Re^m \tag{4.6}$$

mit $\alpha = 2$ und m im Intervall $0.3 ... 0.4$, wobei die Werte in der Praxis vom Anwendungsfall und der speziellen Geometrie abhängen. Die Beobachtungen lassen sich auf zwei Grundlagen zurückführen. Die Abhängigkeit vom Auftriebsbeiwert resultiert aus der Tatsache, dass dieser bei einem endlichen Tragflügel stark mit dem Spitzenwirbel korreliert. Über unterschiedliche Oberflächenrauheiten an der Druckseite des Flügels konnte der Einfluss der Grenzschichtdicke auf die gemessenen Kavitationseinsatzpunkte des Spitzenwirbels nachgewiesen werden (siehe hierzu Mc Cormick (1962)). Die Grenzschichtdicke hängt unter anderem von der Rauheit und der Reynoldszahl ab, wodurch auch der Maßstab der Geometrie Einfluss auf den Kavitationseinsatz nimmt.

Diese Beobachtungen legen den Schluss nahe, die wirbelähnliche Strömung im Bereich Blattspitze durch einen äquivalenten Wirbel zu approximieren. Die Ausbreitung eines Wirbelfadens in der Strömung ist durch eine Zirkulation und einen viskosen Wirbelkern gekennzeichnet, wie weiter unten

noch gezeigt wird. Die Wirbelstärke des äquivalenten Wirbels kann mit der Zirkulationsverteilung am Rotor in Verbindung gebracht werden, über den viskosen Kern kann eine Verbindung mit der Reynoldszahl hergestellt werden. Entsprechend ist zu anzunehmen, dass sich im Spitzenwirbel eine ähnliche Druckverteilung wie im äquivalenten Wirbel einstellen wird.

Diese Idee wird beispielsweise von Isay (1970, 1991) angewendet, mit dem Ziel auf Basis einiger analytischer Ergebnisse und empirisch ermittelter Zusammenhänge das Verhalten des Spitzenwirbels an Tragflügeln und Propellern zu analysieren. Eine ähnliche Vorgehensweise wurde auch von Latorre et al. (1984) für Tragflügel mit elliptischem Grundriss entwickelt. Ein Wirbel entsteht nicht nur an der Blattspitze, sondern auch an der Nabe. Ein ähnlich analytischer Ansatz wird von Yuanpei (1984) zur Untersuchung von Nabenwirbelkavitation verwendet. Ein Aspekt, der bei der Prognose der Spitzenwirbelkavitation stark ins Gewicht fällt, ist ein Maßstabseffekt, der auf der unterschiedlichen Reynoldszahl zwischen Modell und Großausführung beruht. Hierauf wird von Hsu (1989) näher eingegangen. Gemeinsam ist den genannten Vorgehensweisen, dass lediglich geometrische Eigenschaften wie Profiltiefe und Steigung sowie integrale Kraftwerte in die Auswertung einfließen, lokale Strömungseffekte wurden auf Grund fehlender Verfahren so gut wie nicht beachtet.

Eine Kombination der analytischen Zusammenhänge mit potenzialtheoretischen Ergebnissen ist beispielsweise bei Koronowicz und Szantyr (1995) erarbeitet, um die Druckverteilung im Spitzenwirbel hinter einem Delta-Flügel zu bestimmen. Von Lee und Kinnas (2001) sowie Szantyr (2006) wurden in potenzialtheoretischen Methoden zur Berechnung der Propellerumströmung Verfahren implementiert, um die Auswirkung vollständig entwickelter Wirbelkavitation zu untersuchen. Dabei stand die Ausbreitung des Wirbels bzw. in Szantyr (2006) die Druckschwankung am Rumpf auf Grund der Interaktion der Wirbelkavitation mit dem Druckfeld eines Ruders im Vordergrund.

Das in dieser Arbeit implementierte Verfahren wurde im Gegensatz zu den zuvor genannten Verfahren mit dem Ziel entwickelt, nicht die Auswirkung des kavitierenden Wirbels auf die Strömung zu ermitteln, sondern den Kavitationseinsatzpunkt zu bestimmen. Hierfür wird der Spitzenwirbel durch ein Wirbelmodell für Wirbel in freier Strömung repräsentiert. Dieser analoge Wirbel wird im Wesentlichen durch seine Stärke und seinen viskosen Kerndurchmesser charakterisiert. Anhand dieser beiden Parameter, die an potenzialtheoretisch berechnete Größen gekoppelt sind, wird der minimale Druck im Wirbelzentrum und damit auch der Kavitationseinsatzpunkt festgemacht. Die Stärke des Spitzenwirbels wird durch die Bewertung der Zirkulation in den freien Wirbeln berechnet. Der Kerndurchmesser korreliert mit der Grenzschichtdicke an dem Tragflügel im Bereich der Blattspitze.

Im Folgenden werden zunächst verschiedene Wirbelmodelle erläutert und die numerischen Verfahren vorgestellt mit denen die Sträke und auch der Kerndurchmesser des Spitzenwirbels approximiert wird. Anschließend werden die vorhandenen semiempirischen Modellparameter anhand geeigneter Referenzmessungen ermittelt. Nach der Analyse der Maßstabseffekte, die aus dem entwickelten Kavitationsmodell resultieren, erfolgt eine Validierung des Modells anhand von Messergebnissen an einem Tragflügel mit elliptischem Grundriss. Abschließend erfolgt eine exemplarische instationäre Auswertung eines Propellers in homogener und inhomogener Anströmung.

Wirbelmodelle

Der potenzialtheoretische Wirbel wird durch eine Art Drehung des Fluids um eine Achse beschrieben. Die tangentiale Geschwindigkeit ist dabei umgekehrt proportional zum Abstand zur Wirbelachse. Daraus folgt, dass im Ursprung des potenzialtheoretischen Wirbels die Geschwindigkeit unendlich

groß ist. Somit ist der Druck im Wirbelkern unendlich klein. Aufgrund der Viskosität ist dies nicht möglich, so dass sich ein anderes Strömungsverhalten einstellen muss.

Messungen zeigen, dass ein Wirbel in zwei Regionen aufgeteilt werden kann. Im äußeren Bereich verhält sich die Strömung wie der beschriebene potenzialtheoretische Wirbel, im Innern dagegen wie ein starr rotierender Körper. In diesem starr rotierenden inneren Kernbereich ist die tangentiale Geschwindigkeit näherungsweise proportional zum Abstand vom Wirbelursprung. Dieser so genannte Rankine-Wirbel besitzt einen endlichen Druck im Wirbelkern. Die Größe des Wirbelkerns korreliert nicht mit der Stärke des Wirbels, sondern hängt von dessen Entstehung ab. Bei den Spitzenwirbeln, die an den Enden von Tragflügeln ansetzen, geht man von einem Zusammenhang zwischen Kerndurchmesser R_C und Grenzschichtdicke δ aus. Ein solches Modell wird von Szantyr (2006) zur Bestimmung des Drucks im Wirbelkern verwendet.

Der Rankine-Wirbel weist an der Übergangsstelle zwischen Wirbelkern und dem äußeren Bereich eine Unstetigkeit der Geschwindigkeit auf, die so nicht in der Strömung existieren kann. Weiterhin zeigen Messungen, dass der Unterdruck im Wirbel nicht den Wert des Rankine-Wirbels annimmt. Von Hamel und Oseen wurde eine Lösung der Navier-Stokes-Gleichung für die Strömung in Wirbeln entwickelt, die eine bessere Übereinstimmung mit den Geschwindigkeitsfeldern von gemessenen Wirbeln aufweist. Die tangentiale Geschwindigkeitsverteilung v_t im Wirbel kann wie folgt als Funktion des Radius r und der Wirbelstärke Γ bestimmt werden:

$$v_t(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r}(1 - e^{-\frac{r^2}{R_C^2}}) \tag{4.7}$$

Der Druck im Wirbel kann wie folgt bestimmt werden:

$$p_{Wirbel}(r) = p_\infty - \left[(1 - e^{-\frac{r^2}{R_C^2}})^2 \frac{R_C^2}{r^2} + 2\left(E_i(-\frac{r^2}{R_C^2}) - E_i(-2\frac{r^2}{R_C^2})\right)\right] \frac{\rho}{2} \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 R_C^2} \tag{4.8}$$

Dabei ist E_i das Exponentialintegral $E_i(-x) = \int_\infty^x \frac{1}{\xi} exp(-\xi) d\xi$.

Weiterhin wird von Oseen eine Funktion zur Alterung des Wirbels angegeben. Die Zähigkeit in der Strömung führt zu einem kontinuierlichen Wachstum des Wirbelkerns. Mit dem Alter Δt bezogen auf den Zeitpunkt t_0 wächst der Kern entsprechend:

$$R_C^2 = 4\nu(t_0 + \Delta t) \tag{4.9}$$

Zur weiteren Beschreibung des Wirbels sei an dieser Stelle auf Truckenbrodt (1999) verwiesen.

Ermittlung der Wirbelstärke

Der erzeugte Auftrieb eines Tragflügels ist proportional zur Zirkulation, die sich um den Flügel aufbaut. Die vorhandene Zirkulation setzt sich entweder in einer angrenzenden Wand oder einem Spitzenwirbel fort. Der Spitzenwirbel erreicht seine vollständige Zirkulation erst ein Stück weit hinter dem Tragflügel. Der viskose Kern wächst ebenfalls mit dem Alter der Strömung bzw. mit dem Abstand zum Tragflügels. Ein größerer Kerndurchmesser führt zu geringeren Unterdrücken im Wirbelkern und wirkt somit der wachsenden Zirkulation entgegen. Infolge dessen kann der Druck im Wirbelkern schon deutlich vor dem abgeschlossenen Aufrollvorgang des Wirbels sein Minimum erreichen.

Bei der potenzialtheoretischen Analyse ist wichtig festzustellen, wie weit sich der Wirbel bereits ausgebildet hat. Zu diesem Zweck werden in der Arbeit verschiedene Herangehensweisen untersucht. In der ersten Methode wird die Entwicklung des Aufrollvorgangs der freien Wirbel analysiert. Da

die Simulation des Aufrollvorgangs in einigen Fällen nicht immer numerisch stabil ist und dessen Bewertung in instationären Fällen ebenfalls deutlich komplizierter wird, ist eine zweite Methode entwickelt worden, die zwar weniger Strömungsdetails abbildet, aber deutlich robuster ist.

Bei der Bewertung des Aufrollvorgangs werden, beginnend am Rand der freien Wirbel, alle Paneele im Nachlauf zusammengefasst, die um ein gemeinsames Zentrum angeordnet sind. An Hand der so gruppierten Paneele kann ein äquivalenter Wirbel ermittelt werden. Dazu werden die Einzelwirbel der gruppierten Paneele aufsummiert und als ein einziger Wirbel an dem gemeinsamen Zentrum aufgefasst.

Zur Bestimmung des Zentrums werden zwei benachbarte Paneele untersucht und der Schnittpunkt der Flächennormalen bestimmt. Der Abstand zu der gemeinsamen Paneelkante wird als lokaler Radius l_i des aufgrollten Spitzenwirbels bezeichnet. In der in Abbildung 4.1 dargestellten Spirale des aufgerollten Wirbels wächst der Radius kontinuierlich an. Es wird angenommen, dass der Radius l_i von Paneel zu Paneel maximal um das 1.6-fache wachsen darf. Die Summe der Zirkulation der einzelenen Wirbelelemente Γ_i, die dieses Kriterium erfüllen, ist die Stärke Γ des äquivalenten Spitzenwirbels. Da die Stärke des Spitzenwirbels kontinuierlich wächst, wird die Stärke des letzten Paneels, also das, welches einen Radius von mehr als dem 1.6-fachen des benachbarten hat, nur anteilig zu der Stärke des Spitzenwirbels hinzugerechnet. Eine solche diskrete Betrachtung der Paneele kann dazu führen, dass die Wirbelstärke mit dem Abstand zur Hinterkante sprunghaft steigt, wenn in dem Folgeschnitt die dem Spitzenwirbel zugerechneten Paneele um weiteres Elemeent zunimmt. Um solche Sprünge zu dämpfen, wird die Stärke des Wirbels mit den Stärken der vier davor liegenden Wirbelabschnitte gemittelt.

Eine Konsequenz der geometrischen Bewertung des Aufrollvorgangs ist die Gitterabhängigkeit des Verfahrens. Es besteht eine Abhängigkeit von der radialen Gitterauflösung im Bereich der Blattspitze, die den Aufrollvorgang beeinflusst. Auch die zeitliche Diskretisierung hat einen gewissen Einfluss auf die ermittelte Wirbelstärke, da wie zuvor erwähnt, die Wirbelstärke mit den Werten der davor liegenden Paneele gemittelt, bzw. in der instationären Betrachtung unterrelaxiert wird.

In dem implementierten Schema wurde zwar darauf geachtet eine Gitterunabhängigkeit zu erreichen. Dennoch konnte nicht gezeigt werden, dass beispielsweise durch eine Gitterverfeinerung eine Konvergenz der Ergebnisse erreicht wird. Somit bleibt das Verfahren letztlich von den verwendeten Parameteren und Gittereinstellungen abhängig. Zwar kann in der Regel eine passende Korrelation der Kavitationseigenschaften für die getroffenen Einstellungen gefunden werden, aber eine Gitterunabhängigkeit kann nicht sichergestellt werden.

Hinzu kommen auch strömungstechnische Aspekte, die mit der gewählten Betrachtungsweise nicht erfasst werden. Ein Aspekt ist beispielsweise die Stärke des Spitzenwirbels im Falle einer stark entlasteten Blattspitze. Während in der Strömung hier zwei entgegen gesetzte Wirbel entstehen können, die sich teilweise gegenseitig kompensieren, wird bei der Bewertung des Aufrollvorgangs

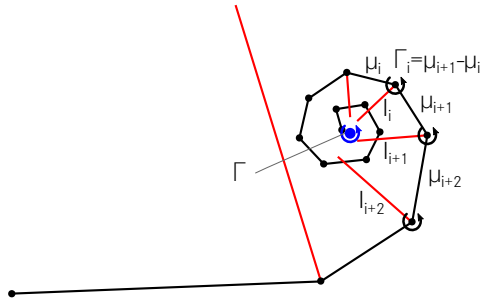


Abbildung 4.1: Skizze zur Ermittlung des Ersatzwirbels anhand der Bewertung des Aufrollvorgangs.

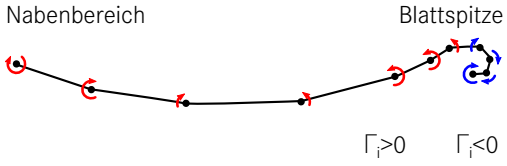


Abbildung 4.2: Aufrollvorgang hinter einem Propeller mit stark entlasteter Spitze.

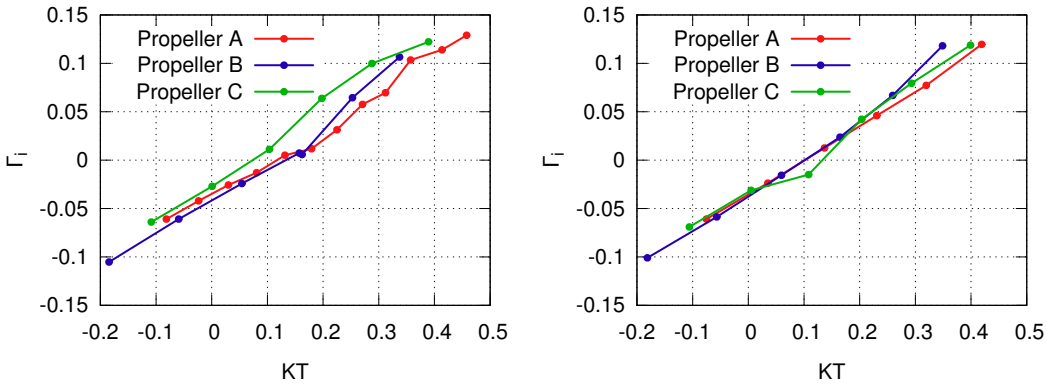


Abbildung 4.3: Berechnete Wirbelstärken (links: Bewertung über Aufrollvorgang am ersten Nachlaufpaneel, rechts: Bewertung an 8% der Blattspitze).

nur der „negative“ Wirbel der entlasteten Spitze bewertet. In Abbildung 4.2 ist ein Schnitt durch eine Wirbelfläche skizziert, wie er bei einer stark entlasteten Spitze entsteht. Dabei ist der Wirbel an der Spitze dem Hauptwirbel, der aus dem Auftrieb an den inneren Radien resultiert, entgegengesetzt. Aufgrund der Analyse des Radius des Aufrollvorgangs ergibt sich ein Einzugsbereich für den Spitzenwirbel, der nur den ersten, kleineren Wirbelbereich erfasst.

Um die oben genannten Nachteile zu vermeiden, wurde die zweite Methode entwickelt, die den Spitzenwirbel pauschaler bewertet und aus diesem Grund eine höhere Robustheit aufweist. In diesem Fall wird die gesamte Zirkulation, die sich im Bereich der Blattspitze einstellt, zusammengefasst. Als Kriterium für den Einzugsbereich, der den Spitzenwirbel speist, wird ein Bereich an der Blattspitze gewählt, der beispielsweise 8% der radialen Ausdehnung des Flügels umfasst. Dieser Prozentsatz ist zunächst willkürlich wählbar, wird jedoch durch Korrelation mit Messergebnissen so angepasst, dass sich eine möglichst gute Wiedergabe der Messergebnisse einstellt. Das Modell umfasst nicht mehr die zeitliche Entwicklung des Wirbels, da zumindest in stationären Fällen für die gesamte Wirbelschleppe die gleiche Stärke gilt. Da die Bewertung des Aufrollvorgangs nun entfällt, ist es robuster und von Diskretisierungseinflüssen deutlich unabhängiger. In der Regel setzt die Spitzenwirbelkavitation kurz hinter der Austrittskante ein. In diesem Bereich ist der Aufrollvorgang zwar noch nicht abgeschlossen, aber der Wirbelkerndurchmesser ist noch sehr klein, so dass hier die geringsten Drücke zu erwarten sind. Dies lässt den Schluss zu, den Einflussbereich, der bei der Bestimmung der Wirbelstärke vorgegeben wird, auf einen relativ kleinen Bereich (hier 8%) zu beschränken. Der oben angesprochene Fall, dass gegenläufige Wirbel im Bereich der Blattspitze entstehen, führt durch die Aufsummierung Zirkulation in diesem Bereich zu einer teilweisen Auslöschung der Wirbelstärke.

In Abb. 4.3 sind die mit beiden Methoden berechneten Wirbelstärken für drei unterschiedliche Propeller verglichen. Dabei ist die Zirkulation des äquivalenten Wirbels in Abhängigkeit vom Schubbeiwert des Propellers dargestellt. Beide Methoden liefern ähnliche Ergebnisse, so dass mit beiden Methoden ähnliche Bewertungen vorgenommen werden können.

Ermittlung des Kerndurchmessers

Um den Druck im Wirbel zu bestimmen, muss der Wirbelkerndurchmesser abgeschätzt werden, so dass eines der zuvor beschriebenen Wirbelmodelle angesetzt werden kann. Wie eingangs genannt, haben Untersuchungen Mc Cormick (1962) gezeigt, dass der Durchmesser des Wirbelkerns mit der Grenzschichtdicke δ korreliert. In den Messungen für einen elliptischen Tragflügel wird von

Franc und Michel (2004) die Dicke des Kerndurchmessers auf die Dicke der Grenzschicht an der maximalen Profiltiefe c bezogen. Die Dicke wird nach einer Formel von Schlichting abgeschätzt:

$$\delta = 0.37 Re^{-0.2} c \tag{4.10}$$

In Szantyr (2006) erfolgt die Abschätzung der Dicke anhand der Reynoldszahl und der Profiltiefe c am Radius $0.95D/2$. Es bestehen verschiedene, ähnliche Ansätze, die im Wesentlichen auf die Form:

$$\delta = C_1 Re^{-C_2} c \tag{4.11}$$

zurückgeführt werden können (Re: lokale Reynoldszahl, c: Profiltiefe, C_1,C_2 Modellkonstanten).

Die Korrelation des Kerndurchmessers mit der Grenzschichtdicke geht auf Untersuchungen und Überlegungen von Mc Cormick zurück. In zahlreichen anschließenden Versuchen wurde dieser Zusammenhang von mehreren wissenschaftlichen Instituten eingehender untersucht, siehe hierzu Arndt (2002). Jedoch muss festgehalten werden, dass es auf Grund der zahlreichen Einflussparameter bisher nicht gelungen ist, einen allgemeingültigen Zusammenhang zwischen der Grenzschichtdicke und der Größe des Wirbelkerns abschließend herzustellen. Aus diesem Grund liegt die größte Unsicherheit des Verfahrens bei der Bestimmung des Wirbelkerndurchmessers. Die Folgen dieser Unsicherheit sind mögliche Ungenauigkeiten bei der Abschätzung des Kavitationseinsatzes, da der minimale Druck im Wirbel stark von dem bestimmten Durchmesser abhängt.

Analyse der Modellparameter anhand von Versuchsergebnissen

Die Bestimmung der Modellparameter wurde mit Hilfe von drei Referenzpropellern durchgeführt. Um weitere Einflussfaktoren auszuschließen, wurden drei Propeller gewählt für die Messungen im homogenen und inhomogenen Zustrom vorlagen.

Korrelation der Wirbelstärke Aus der Druckänderung Δp_{ind} (siehe Gl. 4.5), die der Wirbel induziert, lässt sich die Kavitationszahl ermitteln, bei der die Wirbelkavitation einsetzt. Unter Vernachlässigung der hydrostatischen Druckdifferenz bezüglich Mitte Propellerwelle ist die Kavitationszahl für diesen Wirbel:

$$\sigma_i = -\frac{\Delta p_{ind}}{\frac{\rho}{2} n^2 D^2} \tag{4.12}$$

Die vom Wirbel induzierte Druckänderung kann nach Gl. 4.8 letztlich auf das Verhältnis der Wirbelstärke zum Kerndurchmesser zurückgeführt werden:

$$\Delta p_{ind} = c_p(\frac{r}{R})\frac{\rho}{2}\frac{1}{4\pi^2}\frac{\Gamma^2}{R_c^2} \tag{4.13}$$

Dabei ist r der Abstand vom Wirbelzentrum, $2R_c$ der viskose Kerndurchmesser des Wirbels und Γ dessen Wirbelstärke. Der Beiwert c_p ist vom verwendeten Wirbelmodell und dem Radius r abhängig. Das Druckminimum befindet sich immer im Zentrum des Wirbels, so dass bei dem hier verwendeten Wirbelmodell (Hamel-Oseen) $c_{p0} = -2\ ln2$ ist. Die gemessene Kavitationszahl lässt sich mit diesem Ansatz in ein Verhältnis X von Zirkulation zu Kerndurchmesser überführen:

$$\sigma_i = -\frac{c_{p0}\frac{\rho}{2}\frac{1}{4\pi^2}}{\frac{\rho}{2} n^2 D^2}\frac{\Gamma^2}{R_c^2} \tag{4.14}$$

bzw.:

$$\frac{\Gamma^2}{R_c^2} = \frac{\sigma_i}{c_{p0}} 4\pi^2 n^2 D^2 \tag{4.15}$$

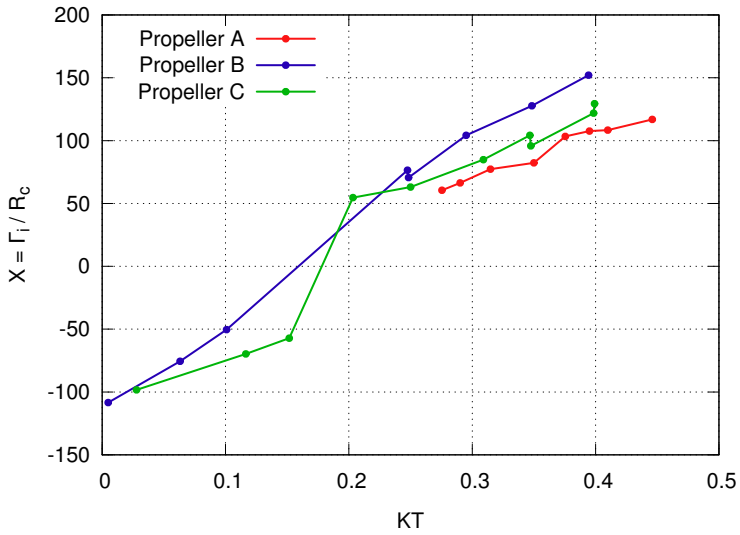


Abbildung 4.4: Messtechnisch ermittelter Zusammenhang zwischen dem Schubbeiwert und dem Verhältnis Wirbeldurchmesser zu Wirbelstärke.

oder

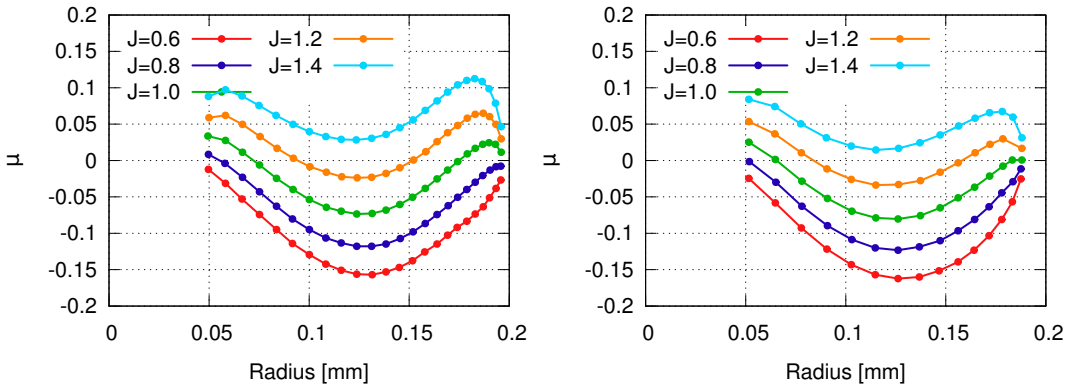
$$X = \frac{\Gamma}{R_c} = \sqrt{\frac{\sigma_i}{c_{p0}}} 2\pi n D \tag{4.16}$$

Der Vorteil dieser Darstellung ist, dass die wesentlichen Größen für das Wribelmodell Γ und R_c in einen vergleichsweise einfachen Zusammenhang mit den messtechnischen Kavitationsuntersuchungen gebracht werden können. Werden die Kavitationseinsatzdiagramme der drei gewählten Propeller entsprechend umgeformt, ergibt sich der in Abbildung 4.4 gezeigte Zusammenhang. Da die Sträke des Spitzenwirbels mit dem Auftrieb des Tragflügels korreliert, ist das Verhältnis X als Funktion vom Schubbeiwert aufgetragen. Die betrachteten Propeller weisen alle eine stark entlastete Blattspitze auf, so dass die Flügelspitze im Hauptbetriebspunkt nur einen kleinen Anteil am Auftrieb liefert und damit nur einen schwachen Spitzenwirbel erzeugt, während am Propeller ein signifikanter Schub entsteht. Aus diesem Grund liegt der Nulldurchgang des Verhältnisses X bei $0.15 <= K_T <= 0.2$. Im Wesentlichen scheint ein lineares Verhältnis zwischen Schub und der Größe X zu bestehen. Die Steigung und auch der Nulldurchgang sind dann propellerspezifisch.

Da die Propeller bei konstanter Drehzahl untersucht wurden, ist die lokale Reynoldszahl an der Blattspitze für einen Propeller über alle Betriebspunkte in etwa konstant. Unter der Annahme, dass bei Änderung des Anstellwinkels die Änderung der Zirkulation an der Flügelspitze stärker ist als die Änderung der Grenzschichtdicke, wird das Verhältnis X hauptsächlich von der Stärke des Spitzenwirbels bestimmt. Daher sollte im Bereich des Nulldurchgangs ($X = 0$) die an der Spitze entstehende Zirkulation minimal sein.

Für Propeller B und C resultieren daraus Schub und auch Fortschrittsgrad bei dem die Zirkulation an der Blattspitze minimal sein sollte. Für Propeller A kann der Nulldurchgang nicht ermittelt werden, da der druckseitige Kavitationseinsatz nicht von den anderen Kavitationsarten getrennt werden konnte. Die Werte für J sind den Freifahrtdiagrammen entnommen:

Propeller	X	K_T	J
B	0	0.16	0.8
C	0	0.18	0.85



(a) Propeller B.

(b) Propeller C.

Abbildung 4.5: Radiale Zirkulationsverteilung für Propeller B und Propeller C.

In den beiden Abbildungen 4.5a und 4.5b ist die radiale Zirkulationsverteilung der ausgewählten Propeller für verschiedene Fortschrittsgrade dargestellt. Während für den Propeller B bei $J = 0.8$ die Blattspitze fast vollständig entlastet ist, besteht für den Propeller C bei $J = 0.85$ noch eine Restzirkulation. Eine Entlastung der Blattspitze findet erst im Bereich $0.9 \leq J \leq 1.0$ statt.

Daraus folgt, dass leichte Abweichungen zwischen Rechnung und Messung bei der Prognose des Kavitationsminimums bestehen können. Gründe hierfür könnte beispielsweise eine abweichende Zirkulationsverteilung in Rechnung und Messung sein. Eine weitere Möglichkeit wäre, dass der Wirbelkerndurchmesser sich bei diesem schwachen Wirbel stark ändert. Hinzu kommt, dass unterschiedliche Kavitationsarten bei ähnlichen Betriebspunkten auftreten können. In dem Fall, dass zunächst Schichtkavitation auftritt, kann es sein, dass die beobachtete Wirbelkavitation nicht allein auf die Stärke der Zirkulation zurückzuführen ist, sondern dass sich die Kavitationsblase auf der Oberfläche in den Wirbel erstreckt. In diesem Fall kann der Einsatz der Wirbelkavitation nicht mehr exakt bestimmt werden. Um dennoch eine Korrelation zwischen den Rechen- und den Messergebnissen herzustellen, wurde Hauptaugenmerk auf den saugseitigen Kavitationseinsatz gelegt, da dieser für den Entwurf als kritischer erscheint.

Korrelation des Kernduchmessers In dem in dieser Arbeit entwickelten Modell ist der Kerndurchmesser linear an die Grenzschichtdicke an der Blattspitze gekoppelt. Das Modell basiert auf der Bestimmung der lokalen Reynoldszahl an der Blattspitze, in die vor allem die dortige Reibungslänge eingeht. Es ist weitgehend unabhängig vom Fortschrittsgrad, da bei der verwendeten Anströmgeschwindigkeit die Rotationsgeschwindigkeit der Blattspitze dominiert. Der Kernduchmesser wird durch folgenden Zusammenhang mit der Grenzschichtdicke ermittelt:

$$R_c = a \left(\frac{v \, c_{tip}}{\nu} \right)^{-\frac{m}{2}} c_{tip} \tag{4.17}$$

Dabei ist R_c der Kerndurchmesser des Wirbels, c_{tip} die Reibungslänge an der Blattspitze, v die lokale Anströmgeschwindigkeit an der Spitze des Tragflügels, die ggf. auch die Rotationsgeschwindigkeit beinhaltet und ν die Viskosität des Fluids. Der Faktor a dient als Proportionalitätsfaktor zur Korrelation des Modells. Der Exponent $\frac{m}{2}$ bietet eine weitere Möglichkeit zur Einstellung des Modells, jedoch ist zu beachten, dass m dem für die Maßstabseffekte verantwortlichem Mc Cormick-Exponenten entspricht.

Für die Analyse wurde der von den Versuchanstalten empfohlene Mc Cormick-Exponent $m = 0.35$ verwendet. Als Reibungslänge c_{tip} wird ein Wert angesetzt, der nicht nur für das letzte Paneel an der Blattspitze gilt, sondern ein Mittelwert der Profiltiefe an den äußeren $15\,\%$ des Blattes ist. Wie

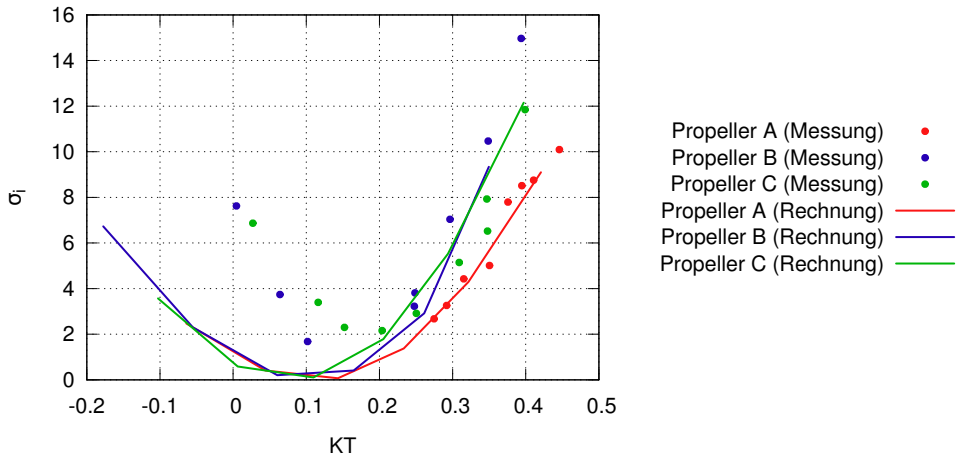


Abbildung 4.6: Berechneter Kavitationseinsatz des Spitzenwirbels im Vergleich zu Messergebnissen.

oben erwähnt, hängt die Reynoldszahl an der Blattspitze zunächst von der Umfangsgeschwindigkeit ab, so dass der axiale Anteil vernachlässigt wird. Wie in Abb. 4.3 gezeigt, ist der Zusammenhang zwischen der Stärke des Spitzenwirbels und dem Schubbeiwert für die drei herangezogenen Propeller identisch, so dass ein unterschiedlicher Kavitationseinsatz bei gleichem Schubbeiwert nicht auf die Wirbelstärke, sondern auf den Durchmesser des viskosen Kerns zurückzuführen ist.

Für die Drehzahl $n = 13/s$ ergeben sich folgende Werte:

Propeller	c_{tip}	R_c/a
A	*0.0206*	*0.00228*
B	*0.0336*	*0.00339*
C	*0.0204*	*0.00226*

Aus dem ermittelten Kerndurchmesserverhältnis R_c/a resultiert, dass der Propeller B für alle Betriebspunkte die kleinste Kavitationszahl aufweisen sollte, da die Wirbelstärke bei gleichen K_T Wert zwischen den Propellern nur kaum variiert. Die Messungen, in Abb. 4.6 zusammengefasst, geben dies jedoch nicht wieder. Da die zu Verfügung stehenden Parameter a und m unabhängig von dem gewählten Propeller sein sollen und somit keinen Spielraum zulassen, muss eine andere Vorgehensweise bei der Bestimmung des Kerndurchmessers verfolgt werden.

Damit die deutlich größere Profiltiefe an der Blattspitze von Propeller B gegenüber den anderen beiden Propellern das Ergebnis nicht dominiert, ist es sinnvoll hier eine weitere geometrische Größe heranzuziehen. Aus diesem Grund wurde eine Größe $c_{tip,2}$ eingeführt, die die mittlere Profiltiefe wiedergibt. Dazu wird die Oberfläche des betrachteten Propellerflügels auf die Länge seiner Hinterkante bezogen. Die daraus resultierende Länge ist die doppelte mittlere Profiltiefe $c_{tip,2}$. Die Formel für die Bestimmung des Wirbelkerns wird daher wie folgt abgewandelt:

$$R_c' = a' \left(\frac{v\, c_{tip}}{\nu} \right)^{-\frac{m}{2}} c_{tip,2} \tag{4.18}$$

Folglich ergeben sich dann für die Propeller:

Propeller	c_{tip}	$c_{tip,2}$	R_c'/a'
A	*0.0206*	*0.0615*	*0.00682*
B	*0.0336*	*0.0622*	*0.00627*
C	*0.0204*	*0.0533*	*0.00682*

Bei der Wahl der vorgeschlagenen Parameter ergibt sich ein kleinerer Kerndurchmesser für Propeller B, so dass das Verhältnis X eher den in Abb. 4.4 dargestellten Messwerten entspricht, das entsprechende Diagramm ist in Abb. 4.6 dargestellt.

Wie hier dargestellt, kann die Reibungslänge an der Blattspitze nicht allein ausschlaggebend für die Größe des viskosen Wirbelkerns sein. Aus diesem Grunde ist eine Mischung der lokalen Reibungslänge an der Blattspitze und einer gemittelten Länge für den gesamten Propeller sinnvoll. Weitere Parameter wie Rake oder Skew haben in diesem Ansatz keinen unmittelbaren Einfluss auf das Ergebnis. Um hier eine sicherere Aussage treffen zu können, ist die Erweiterung der Datenbasis erforderlich, um eine geeignete physikalische Interpretation durchführen zu können.

Sensibilität und Maßstabseinflüsse

Zur Analyse des Prognoseverfahrens werden im Folgenden die Einflüsse verschiedener Fehlerquellen diskutiert. Der Kavitationseinsatz wird durch den Druck im Spitzenwirbel bestimmt. Dieser hängt im Wesentlichen von dessen Wirbelstärke und dem Wirbelkerndurchmesser ab. Bei der Bestimmung der Wirbelstärke werden zwei Größen verwendet, deren Bestimmung mit Ungenauigkeiten behaftet sind. Zum einen ist die Approximation, welche Paneele im Nachlauf zu dem Wirbel beitragen, nur eine Schätzung, zum anderen kann die Stärke der Paneele selbst, durch die zugrunde gelegte Potenzialtheorie, von der reellen Zirkulationsverteilung abweichen. Da die Zirkulation quadratisch sowohl in den Schub des Propellers als auch in den Druck im Wirbel eingeht, ist bei einer Darstellung von σ_i über K_T mit einer Kompensation der Fehler zu rechnen.

Ungenauigkeiten bei der Abschätzung des Wirbelkerndurchmessers führen wegen der quadratischen Abhängigkeit des Drucks vom Wirbelkerndurchmesser (siehe Gl. 4.8) unausweichlich zu deutlichen Fehlern bei der Bestimmung der Kavitationszahl. Dies ist insbesondere vor dem Hintergrund der ungeklärten Entstehung des Wirbelkerns von Bedeutung.

Auf Mc Cormick geht ein Verfahren zur Skalierung des Kavitationseinsatzes von Spitzenwirbeln zurück. Demnach bildet sich hinter einem Tragflügel eine Kavitation bei $\sigma_i = \alpha^n Re^m$, wobei α der Anstellwinkel des Profils und Re die Reynoldszahl am Flügel ist. Für n und m werden in der Literatur unterschiedliche Werte angegeben, die von der Geometrie oder von der Strömung (laminar, turbulent) abhängig sind. Die n Werte sind in der Größenordnung von 2, für m wird ein Bereich zwischen 0.3 und 0.4 angegeben. Da bei der Skalierung von Propellern bei gleich bleibendem Betriebspunkt der Anstellwinkel in guter Näherung konstant bleibt, ist der Spitzenwirbeleinsatz mit Re^m zu skalieren.

Die Druckänderung im Spitzenwirbel überwiegt alle anderen Druckgradienten in diesem Bereich, so dass die Kavitationszahl aus den Kenngrößen des Wirbels ermittelt werden kann:

$$\sigma_i = \frac{p_{min}}{\frac{\rho}{2} n^2 D^2} = \frac{c_{p,min} \frac{\rho \Gamma^2}{8\pi^2 R_c^2}}{\frac{\rho}{2} n^2 D^2} \tag{4.19}$$

Der Wirbelkerndurchmesser ist durch Gl. 4.11 gegeben. Durch Zusammenfassen der Konstanten kann die Kavitationszahl vereinfacht werden.

$$\sigma_i = \frac{c_{p,min} \rho \Gamma^2}{8\pi^2 \ (1.7 \ C_1 \ Re^{-C_2} C_{0.95R})^2 \ \frac{\rho}{2} n^2 D^2} = K \left[\frac{\Gamma}{Re^{-C_2} \ C_{0.95R} \ n \ D} \right]^2 \tag{4.20}$$

Eine Dimensionsanalyse zeigt, dass die am Propeller abgehenden Wirbel proportional zu $D^2 n$ sind:

$$\Gamma \sim D^2 n \tag{4.21}$$

Setzt man dies in Gl. 4.20 ein und berücksichtigt, dass die Profiltiefe $C_{0.95R}$ immer in einem festen Zusammenhang mit dem Durchmesser steht, können die Einflussfaktoren auf die Kavitationszahl weiter reduziert werden.

$$\sigma_i \sim \left[\frac{D^2 n}{Re^{-C_2}\ D\ n\ D}\right]^2 = Re^{2C_2} \tag{4.22}$$

Daraus folgt, dass die Maßstabsänderung des Propellers innerhalb des Verfahrens über den Exponenten erfasst werden kann. Da hierzu von den Schiffbauversuchanstalten durch Vergleich von Modell- und Großausführungsmessungen Empfehlungen gemacht werden und die Rechenergebnisse mit den Versuchsergebnissen korreliert wurden, wurde hier der in der Regel übliche Exponent $m = 0.35$ als Mc Cormick-Exponenten verwendet.

Zwar existieren mehrere analytische Ansätze, die zu einem m Wert führen, und in Arndt (2002) wird auf die Bestimmung des Exponenten näher eingegangen, aber zusammenfassend muss festgehalten werden, dass der exakte Zusammenhang zwischen Grenzschicht und Wirbelkern nicht geklärt werden konnte. Erschwerend kommt hinzu, dass der Exponent in laminaren und turbulenten Strömungen unterschiedlich ausfällt. So sind die für Propeller angegebenen Werte zwischen 0.3 und 0.4 für Versuchsanlagen entwickelt worden, bei denen der Modellpropeller im teilturbulenten Bereich arbeitet, um für die voll turbulente Großausführung Aussagen treffen zu können. Die in diesem Verfahren angesetzte Funktion für den Wirbelkern ist jedoch für turbulente Grenzschichten gültig und wird sowohl für die Großausführung als auch für das Modell angewandt. Aus den genannten Gründen ist die Prognose des Kavitationseinsatzes mit dem hier beschriebenen Verfahren, ebenso wie bei der Durchführung von Versuchen, immer mit einer gewissen Unsicherheit verbunden. Dennoch sollte das Verfahren in der Lage sein, beispielsweise den Einfluss unterschiedlicher Profiltiefen auf die Entwicklung der Grenzschicht an der Blattspitze zu erfassen und daher eine Vergleichbarkeit von Rechenergebnissen untereinander, trotz aller Fehlerquellen, zulassen.

4.2 Anwendungsbeispiele

4.2.1 Elliptischer Tragflügel

Als erstes Rechenbeispiel wird ein Tragflügel mit elliptischem Grundriss in paralleler Anströmung untersucht. Für den Tragflügel werden von Boulon et al. (1999) umfangreiche Messungen vorgestellt. Es wurde nicht nur der Kavitationseinsatz in den Versuchen gemessen, sondern auch die Geschwindigkeitsverteilung im Wirbel. Die Messungen wurden bei verschiedenen Anstellwinkeln durchgeführt, weiterhin wurde auch der Abstand der Flügelspitze zu einer verschiebbaren Wand in den Versuchen systematisch variiert.

Der Kavitationseinsatz wird über den Druck im Wirbelkern berechnet und mit den veröffentlichen Kavitationszahlen verglichen. Die Kavitationszahl σ_i, die den Einsatzpunkt beschreibt, wird im Versuch über einen veränderlichen Umgebungsdruck p_∞ ermittelt:

$$\sigma_i = \frac{p_\infty - p_v}{\frac{\rho}{2} v_\infty^2} \tag{4.23}$$

Im Kavitationseinsatzpunkt entspricht der absolute Druck im Wirbel dem Dampfdruck, der mit Gl. 4.8 bestimmt wird:

$$p = p_v = \rho\, g\, h + p_{Wirbel}(r = 0) = p_\infty + p_{Wirbel}(r = 0) \tag{4.24}$$

Daraus folgt, dass der Umgebungsdruck im Kavitationseinsatz bei

$$p_\infty = p_v - p_{Wirbel}(r = 0) \tag{4.25}$$

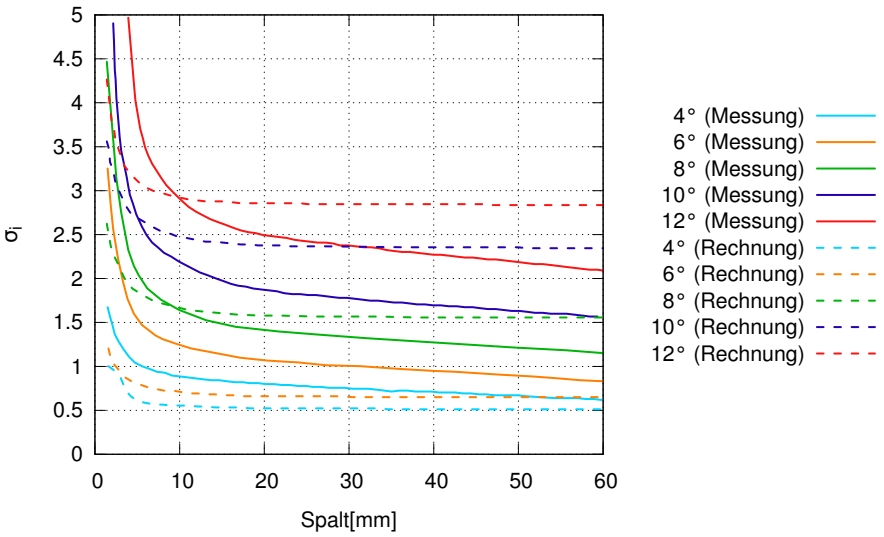


Abbildung 4.7: Kavitationseinsatz an einem elliptischen Profil. Der Spalt gibt den Abstand der Blattspitze zu einer Wand an.

liegt und demnach die entsprechende Kavitationszahl direkt aus dem Druck im Wirbelkern hergeleitet werden kann.

$$\sigma_i = \frac{p_\infty - p_v}{\frac{\rho}{2} v_\infty^2} = \frac{-p_{Wirbel}(r=0)}{\frac{\rho}{2} v_\infty^2} \tag{4.26}$$

Abbildung 4.7 zeigt den berechneten Kavitationseinsatz des Spitzenwirbels im Vergleich zu den gemessenen Werten im Kavitationstank. Die gemessenen Punkte beziehen sich auf den Zustand, an dem der Spitzenwirbel an die Hinterkante des Profils anschließt. Der tatsächliche Kavitationseinsatz erfolgt deutlich früher. Bei kleinen Anstellwinkeln wird die Kavitationszahl etwas unterschätzt, bei größeren Winkeln (ab 8°) wird eine zu hohe Kavitationszahl bestimmt. Bei der Reduzierung des Spaltmaßes zwischen Flügel und Wand steigt sowohl in der Rechnung als auch in der Messung die Kavitationszahl an, in der Rechnung jedoch nicht so stark wie in den vergleichbaren Messungen. Ursachen für die Abweichung können zum einen in den getroffenen Vereinfachungen bzw. Annahmen bei der Entwicklung des Kavitationsmodells liegen, zum anderen aber auch in der nicht ausreichenden Berücksichtigung aller relevanten Randbedingungen in der numerischen Simulation. In den Versuchen wurde der Betriebszustand festgehalten, bei dem der kavitierende Spitzenwirbel an die Hinterkante anschließt. Die beurteilte Blase an der Blattspitze setzt sich, wie aus Bildern in der Veröffentlichung hervorgeht, aus der Spitzenwirbelkavitation, aber teilweise auch aus einer Schichtkavitation auf dem Tragflügel selbst zusammen, die sich im Wirbel fortsetzt. Die Rechnungen zeigen ebenfalls, dass bei den angegebenen Kavitationszahlen der Dampfdruck auch auf dem Tragflügel selbst unterschritten wird, so dass die Kurven für den Schichtkavitationseinsatz ganz ähnliche Verläufe wie die gemessenen Spitzenwirbelkavitationswerte aufweisen.

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass trotz des verhältnismäßig einfach gehaltenen Versuchsaufbaus die Interpretation der Messungen einen gewissen Raum bei der Interpretation offen lassen. Weiterhin ist eine Wechselwirkung zwischen verschiedenen Kavitationsursachen nicht auszuschließen ist. In Anbetracht des Interpretationsfreiraums der Messdaten zeigen die berechneten Werte eine zufrieden stellende Übereinstimmung.

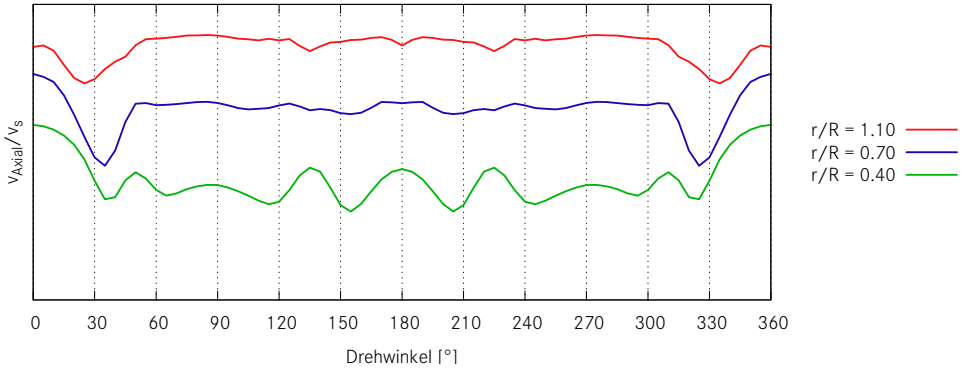


Abbildung 4.8: Axiale Komponente des verwendeten Nachstromfeldes für die Ermittlung des Einsatzpunktes der Spitzenkavitation von Propeller Variante A.

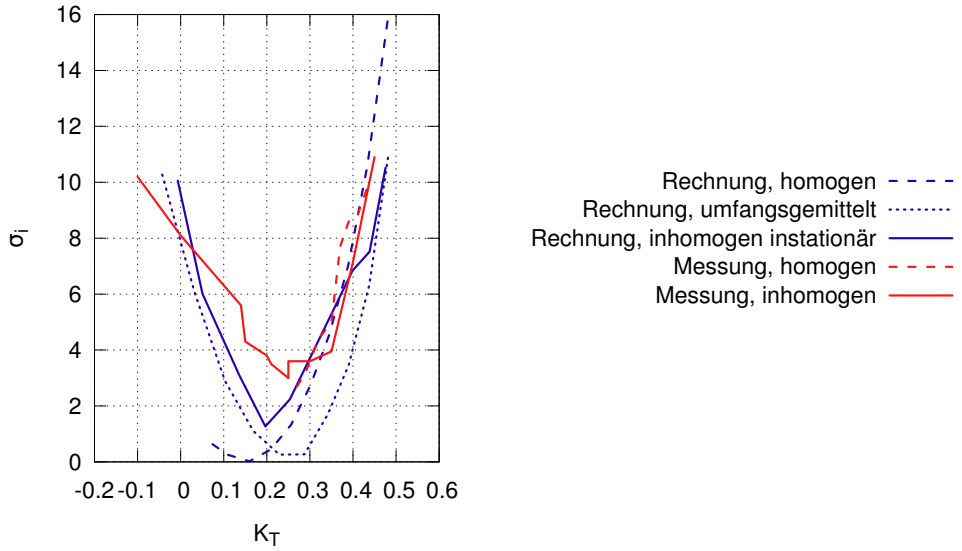


Abbildung 4.9: Berechneter Kavitationseinsatz für Propeller A.

4.2.2 Berücksichtigung des Nachstromfeldes

Am Beispiel der bereits oben verwendeten Propeller-Variante A wird das Verfahren überprüft. Um einen Überblick über das Verhalten des Verfahrens zu erhalten, wurde der Propeller sowohl in homogener Zuströmung als auch in umfangsgemittelter Zuströmung analysiert. Weiterhin wurde der Einfluss der instationären Zuströmung auf den Kavitationseinsatz untersucht. In der Rechnung wird die Key-Blade-Technik angewandt, um die Rechenzeit zu reduzieren. Das verwendete Nachstromfeld ist in Abbildung 4.8 gezeigt. In den hier gezeigten Kavitationsergebnissen wurde zur Bestimmung der Zirkulation im Spitzenwirbel die Methode mit der Bewertung des Aufrollvorgangs verwendet.

Die Ergebnisse der Untersuchung sind in Diagramm 4.9 dargestellt. Die Rechnungen wurden im Modellmaßstab bei der gleichen Drehrate wie im Versuch durchgeführt.

Die vorliegenden Messungen wurden in Versuchen mit ungestörter Zuströmung als auch mit einem modellierten Schiffsnachstrom gewonnen. Die im Nachstromfeld gemessenen Werte zeigen ein Minimum an Kavitation im Intervall $0.2 < K_T < 0.3$. Im Bereich $K_T < 0.2$ besteht die Gefahr druckseitiger Kavitatation, das heißt, dass die Blattspitze so weit entlastet wird, dass sie nicht mehr zum Vortrieb beiträgt, sondern Widerstand verursacht. Folglich ist der Spitzenwirbel dem Hauptwirbel im Flügel entgegengerichtet. Bei Werten $K_T > 0.3$ entsteht die Kavitation saugseitig.

In homogener Zuströmung, also ohne jegliche Berücksichtigung eines Nachstromfeldes oder einer Nachstromziffer, stellt sich das Kavitationsminimum bei $K_T = 0.1$ ein. Der Propeller wurde

für das in Abbildung 4.8 gezeigte Nachstromfeld ausgelegt, so dass er im Hauptbetriebspunkt das Kavitationsminimum aufweist. Folglich liegt bei homogener Zuströmung der Betriebszustand, bei dem die Blattspitze weitgehend entlastet ist bei kleineren Schubwerten, da durch das fehlende Nachstromfeld, das vor allem Verzögerungen auf den inneren Radien aufweist, geringere Anströmwinkel auf den inneren Radien erreicht werden. Entsprechend verschiebt sich das Kavitationsminimum bei Berücksichtigung eines umfangsgemittelten Nachstromfeldes zu höheren K_T-Werten, so dass die Lage des Minimums mit den gemessenen Werten übereinstimmt.

Wird ein homogenes oder auch ein umfangsgemitteltes Nachstromfeld verwendet, gibt es immer einen Betriebspunkt bei dem die Stärke des berechneten Spitzenwirbels zu null wird. Bei diesem Zustand der vollständig entlasteten Spitze ist dann auch immer die Kavitationszahl, die für den Spitzenwirbel bestimmt wird, null. Dies trifft im Versuch hinter dem Dummymodell aus zwei Gründen nicht zu. Zum einen setzen bei kleinen Kavitationszahlen weitere Kavitationsarten auf dem Blatt ein, so dass sich die Blase in den Spitzenwirbel erstreckt und die beobachtete Kavitation nicht mehr allein auf den Spitzenwirbel selbst zurückzuführen ist. Zum anderen ist das Nachstromfeld während eines Umlaufs nicht konstant, so dass in der Messung diejenige Winkelstellung ausschlaggebend ist, bei der die Belastung der Blattspitze maximal ist. Die im verwendeten Nachstromfeld recht stark ausfallenden Verzögerungen in der 30°- und 330°-Stellung verursachen kurzfristig eine Erhöhung der Propellerbelastung und führen somit auch zu einem starken Spitzenwirbel. Dieser Effekt kann in einer instationären Rechnung erfasst werden, wie in Abb. 4.9 zu sehen ist. Das Minimum der Kavitationseinsatzkurve wird im gleichen K_T-Bereich wie in der umfangsgemittelten Untersuchung prognostiziert, die Kavitationszahlen liegen jedoch erwartungsgemäß ein Stück höher als in der umfangsgemittelten Berechnung.

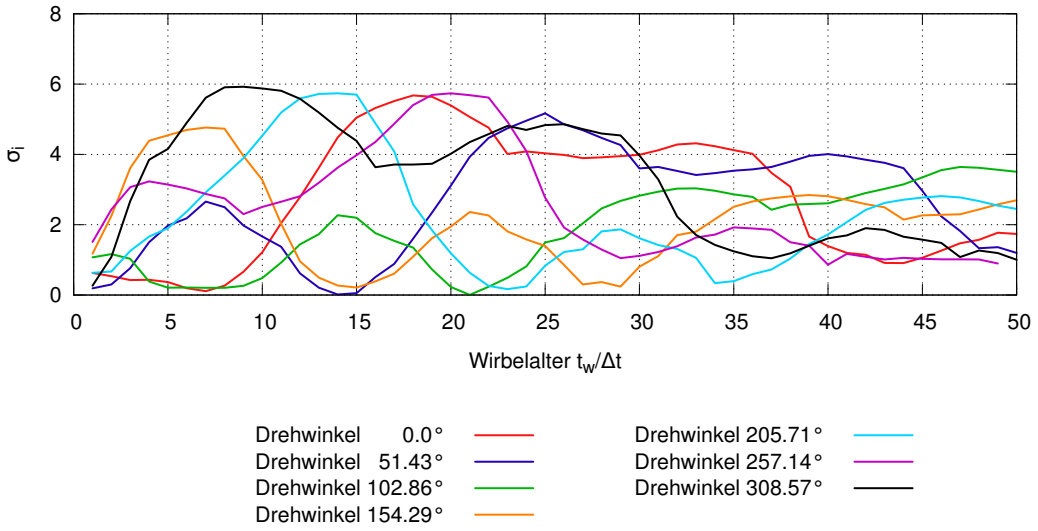


Abbildung 4.10: Kavitationszahl im Spitzenwirbel für verschiedene Winkelstellungen des Key-Blades ($J = 0.5$).

In der Spitzenwirbelkavitationsuntersuchung ist auf Grund der Alterung des Wirbels nicht nur der Bereich an der Hinterkante zu analysieren, sondern der gesamte Wirbelfaden, der von der Blattspitze ausgeht. In Abbildung 4.10 ist die Kavitationszahl im Wirbelzentrum für mehrere Winkelstellungen des instationär untersuchten Flügels im Nachstromfeld dargestellt. Dabei ist auf der x-Achse das Alter des Wirbels in Zeitschritten dargestellt, so dass der Wirbelfaden nach 49 Iterationen das Alter einer Umdrehungsperiode erreicht hat. Im Falle des hier dargestellten Fortschrittsgrads $J = 0.5$ entstehen mit dem Durchlaufen des Flügels durch eine verzögerte Region höhere Belastungen am Flügel, wobei auch die Wirbelstärke im freien Wirbel kurzzeitig ansteigt. Das dabei entstehenden Unterdruckgebiet wird mit der Stömung abtransportiert. Das Druckminimum,

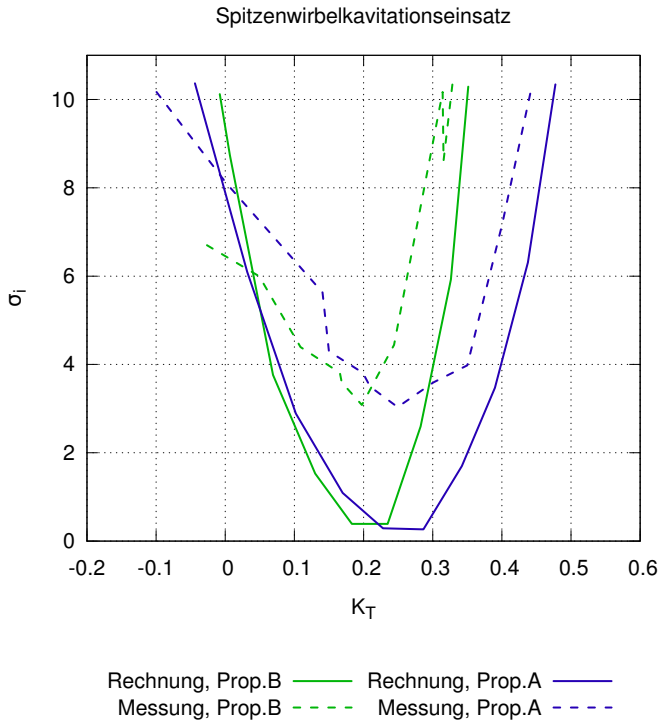


Abbildung 4.11: Vergleich der berechneten Wirbelkavitationseigenschaften von Propeller A und B mit den gemessenen Kavitationseinsatzkurven des Spitzenwirbels.

das für den Kavitationseinsatz ausschlaggebend ist, wird erst ein Stück weit hinter dem Tragflügel erreicht, nachdem der Aufrollvorgang eingesetzt hat. Durch den stetig wachsenden Kerndurchmesser des Wirbels nimmt das Unterdruckgebiet ab und auch die Kavitationszahl fällt langsam ab.

4.2.3 Vergleich zweier Propeller

Als letztes Beispiel sind die berechneten Kavitationseinsatzkurven zweier Propeller verglichen. Für beide Propeller stehen Messungen im gleichen Nachstromfeld zur Verfügung. Propeller A weist ein breiter gestaltetes Minimum auf als Propeller B. Zudem liegt das Kavitationsminimum bei Propeller A bei höheren K_T-Werten. Beide Effekte werden auch durch die Berechnung wiedergegeben, die in einem vergleichbaren umfangsgemittelten Nachstromfeld ermittelt wurden. Auf Grund der umfangsgemittelten Zuströmung liegen die berechneten Werte bei kleineren Kavitationszahlen als die gemessenen. Während der saugseitige Kavitationseinsatz etwa parallel zu den gemessenen Werten verläuft, wird der druckseitige Einsatz in der Rechnung steiler als die gemessenen Werte wiedergegeben. Dies kann evtl. auf eine ungenaue Berechnung der Zirkulationsverteilung entlang des Flügels zurückzuführen sein.

Die Rechenergebnisse zeigen, dass Unterschiede zwischen Propellern bei der Vorgabe eines umfangsgemittelten Nachstromfeldes durch die Methode wiedergegeben können. Um das Niveau des Kavitationseinsatz besser wiedergeben zu können, ist es erforderlich instationäre Betrachtungen durchzuführen. Der Vorteil von stationären Rechnungen mit umfangsgemitteltem Nachstromfeld ist, dass deutlich weniger Rechenaufwand erforderlich ist.

4.3 Bewertung der Kavitationsergebnisse

Das entwickelte Kavitationsmodell eignet sich, um den Wirbelkavitationseinsatz eines Propellers abzuschätzen und darauf aufbauend Vergleiche zwischen den Kavitationseigenschaften mehrerer Propeller ziehen zu können. So kann mit Hilfe des Verfahrens der Betriebspunkt mit minimaler Wirbelkavitation ermittelt werden. Der Einfluss des Nachstromfeldes auf die Kavitationsentwicklung kann dabei sowohl instationär als auch stationär über ein umfangsgemitteltes Nachstromfeld ausgewertet werden.

Bei der Anwendung des Verfahrens ist jedoch zu beachten, dass die ermittelte Kavitationszahl mitunter deutlich von den gemessenen Werten abweichen kann. Dies ist darauf zurückzuführen, dass nicht alle physikalischen Zusammenhänge eindeutig geklärt sind, bzw. sich nicht durch vereinfachte Zusammenhänge darstellen lassen und folglich nich in der Simulation einbezogen werden können. So bestehen Wechselwirkungen zwischen diversen Kavitationsarten, die das Einsetzen einer anderen Kavitationsart beschleunigen können. Weiterhin kann es in Versuchen mitunter schwierig sein die Ursache für die beobachtete Kavitationserscheinung eindeutig zuzuordnen. Folglich besteht bei der Analyse der Entstehung von Spitzenwirbelkavitation weiterer wissenschaftlicher Untersuchungsbedarf. Beispielsweise sind in der Literatur durchaus exemplarische Messungen für den Aufrollvorgang des Spitzenwirbels mit dem dazugehörigen Geschwindigkeitsfeld hinter einem Tragflügel oder einem Propellerblatt zu finden. Dennoch ist es bisher nicht gelungen geeignete Kenngrößen oder Modelle abzuleiten, mit deren Hilfe detaillierte Aussagen über den entstehenden Spitzenwirbel getroffen werden können.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass das Verfahren geeignet ist, um bei einer vergleichenden Untersuchung die Neigung eines Propellers zur Spitzenwirbelkavitation zu bewerten. Mit dem entwickelten Verfahren bietet es sich an bereits im frühen Entwurfsstadium eines Propellers die Wirbelkavitation zu berücksichtigen. Da die Wirbelkavitation maßgeblich vom Steigungsverlauf und der Profiltiefe an der Blattspitze abhängt, die wiederum ausschlaggebend für den entwickelten Schub des Propellers sind, sind spätere Modifikationen in diesem Bereich nur in begrenztem Maße möglich. Begleitend zu dieser Arbeit wurde das Verfahren in einem Optimierungsprozes zur Auslegung eines Propellers angewandt. Dabei bildete der Wirbelkavitationseinsatz neben Wirkungsgrad, Soll-Schub und möglichst geringen Schubschwankungen während eines Umlaufs ein Kriterium in der zu optimierenden Zielfunktion.

Fluid–Struktur–Kopplung

Das Ziel der Untersuchung der Fluid Struktur Wechselwirkung ist die dynamische Verformung von auftriebsbehafteten Tragflächen zu ermitteln. Insbesondere steht in dieser Arbeit die Fragestellung im Vordergrund, wie groß der Einfluss der Wechselwirkung zwischen strukturdynamischen und strömungstechnischen Eigenschaften eines Propellerflügels im inhomogenen Schiffsnachstrom ist.

Im Folgenden werden zunächst Ansätze für die Berechnung der Fluid-Struktur-Kopplung diskutiert und die hier verwendete Vorgehensweise dargestellt. Anschließend werden die Erweiterungen und Betrachtungsweisen in der potenziatheoretischen Methode beschrieben, die benötigt werden, um eine gekoppelte Fluid-Struktur-Berechnung durchzuführen. Das implementierte Verfahren basiert darauf, zwei instationäre Rechenverfahren - die potenzialtheoretische Strömungsberechnung auf der einen Seite und eine Finite-Elemente-Methode auf der anderen Seite - implizit zu koppeln, so dass am Ende des jeweiligen Zeitschritts ein konsistenter Zustand bei den beschreibenden Strömnungs- und Verformungsgrößen entsteht. Der implizite Kopplungsvorgang bedeutet letztlich, dass Druckverteilung und Körperverformung mehrmals in einem Zeitschritt zwischen den beiden Programmen iterativ bestimmt werden.

Das Verfahren wird auf seine Konsistenz geprüft und für einen oszillierenden Tragflügel sowie einen Propeller in inhomogener Anströmung angewendet. Dabei werden die Ergebnisse hinsichtlich spezieller Effekte, die aus der Kopplung resultieren, wie beispielsweise Resonanzen, analysiert.

5.1 Grundlagen der Fluid–Struktur–Interaktion

Grundlage der in der Arbeit verwendeten Fluid-Struktur-Interaktion ist die Rückkopplung der Ergebnisse eines FEM-Verfahrens mit denen der potenzialtheoretischen Strömungsberechnung. Während durch den Finite-Element-Ansatz das strukturdynamische Verhalten untersucht wird, wird mit dem potenzialtheoretischen Verfahren das stömungstechnische Verhalten unter Berücksichtigung der zusätzlichen Randbedingung einer zeitlichen Verformung des Körpers ermittelt. Die Rückkopplung kann dabei auf unterschiedlichste Weise erfolgen. So ist es möglich beide physikalischen Ansätze in einem Verfahren zu implementieren und die Randbedingungen entsprechend zu erweitern. Dieser direkte Kopplungsansatz wird aufgrund des komplexen Rechen- und Programmieraufwands nur selten durchgeführt. Gängiger ist es, zwei bestehende Verfahren zu koppeln. Im Folgenden wird ein vergleichbares potenzialtheoretisches Verfahren erläutert und der eigene Ansatz dargestellt.

5.1.1 Kopplungsverfahren

Von Young und Kinnas (2003b) wurde ein Verfahren vorgestellt, mit dem Ziel das dynamische Verhalten teilgetauchter Propeller zu berechnen und dabei die dynamische Verformung des Körpers zu berücksichtigen. In dem genannten Verfahren wird bei der Ermittlung der Strömungsgrößen das Geschwindigkeitspotenzial um den Körper in zwei Anteile zerlegt.

$$\nabla\Phi = \nabla\Phi_{starr}(\vec{x}) + \nabla\Phi_{flex}(\vec{x}, t) \tag{5.1}$$

Hierzu wird das Strömungspotenzial Φ_{starr} des starren Propellers in inhomogener Strömung mit einem zweiten Potenzial ϕ_{flex} überlagert, das aus der linearisierten sinusförmigen Verformung des Propellerflügels resultiert. Dabei wird angenommen, dass die Verformungen klein sind und folglich die Oberflächenrandbedingung am Ort des unverformten Propellers angesetzt wird. Um die Bewegung zu erfassen, wird in die Normalenrandbedingung, die auf der Körperoberfläche gilt, die Verformungsgeschwindigkeit $\partial\vec{x}/\partial t$ des Körpers eingearbeitet.

$$\frac{\partial\phi_{flex}}{\partial\vec{n}} = \frac{\partial\vec{x}}{\partial t}\cdot\vec{n} \tag{5.2}$$

Dies bedeutet, dass am Ort des unverformten Propellers eine Durchströmung des Paneels angenommen wird, die der Bewegungsgeschwindigkeit normal zum Paneel entspricht.

Das strukturdynamische Problem wird von Young und Kinnas (2003b) mit Hilfe der Differenzialgleichung 5.3 beschrieben, wobei die zeitliche Integration mit Hilfe des Newmark-Integrationsschemas gelöst wird.

$$[M]\ddot{\vec{x}} + [D]\dot{\vec{x}} + [K]\vec{x} = \vec{F} \tag{5.3}$$

Dabei ist $[M]$ die Trägheitsmatrix $[D]$ die Dämpfungsmatrix und $[K]$ die Steifigkeitsmatrix einer elastischen FE-Struktur. Der Kraftvektor $\vec{F}$ wird wie das Strömungspotenzial in zwei Anteile zerlegt. Die aus der Starrkörperbewegung ermittelte Druckverteilung wird zu der unbekannten instationären Verteilung addiert. Hierfür wird die instationäre Druckverteilung als lineare Funktion von $\ddot{\vec{x}}$ umformuliert.

Bei der Anwendung der Linearisierung ist es ausreichend, die Koeffizientenmatrix, die die Einflüsse der Paneele aufeinander beinhaltet, einmal vorab zu berechnen, da sich die geometrischen Beziehungen zwischen den Paneelen im Verlauf der Rechnung nicht mehr ändern. Des Weiteren wird die Strömungsrandbedingung unmittelbar in die Differenzialgleichung des Strukturverhaltens Gl. 5.3 eingesetzt, so dass in einem Schritt Verformung und instationäre Druckverteilung bestimmt werden.

Eine Folge der Zerlegung des Potenzials in einen stationären und einen instationären Anteil ist, dass die mittlere Verformung des Körpers nicht in dem Ergebniss berücksichtigt wird. Die Normalenrandbedingung wird nur von dem Potenzial des Starrkörpers $\Phi_{starr}(\vec{x})$ erfüllt. In die linearisierte Randbedingung, die für das instationäre Potenzial $\Phi_{flex}(\vec{x}, t)$ aufgestellt wird, geht hingegen nur die Paneelgeschwindigkeit ein, so dass eine mittlere Verformung des Körpers keinen Einfluss mehr hat. Dem kann nur entegegen gewirkt werden, in dem das Potenzial des Starrkörpers für eine vorverformte Geometrie ermittelt wird, es ist dann aber kein Bestandteil der Rechnung mehr, sondern muss zuvor separat mit Hilfe weiterer Annahmen ermittelt werden.

In dem hier angesetzten Verfahren soll auf die linearisierte Abbildung der Körperverformung verzichtet werden. In diesem Fall kann die potenzialtheoretische Lösung nicht mehr als Randbedingung in Gleichung 5.3 integriert werden, sondern es müssen Verformung und Druckverteilung in getrennten Verfahren ermittelt werden. Da die Verformung zu Beginn eines Schritts in der Strömungsberechnung nicht oder nur näherungsweise bekannt ist und ebenso die Druckverteilung zu Begin der FE-Untersuchung nicht oder nur näherungsweise bekannt ist, müssen beide Lösungen schrittweise aneinander angepasst werden. Dies wird in einem iterativen Prozess errreicht, bei dem ein Zeitschritt so lange wiederholt wird, bis sich ein konvergiertes Gleichgewicht aus Verformung und übertragener Last einstellt. Dabei werden die Verformungen und Drücke aus dem letzten Iterationsschritt jeweils als Startbedingung für den aktuellen Iterationsschritt verwendet.

Auf Seiten der Strömungsberechnung ist es erforderlich, dass die Normalenrandbedingung die zeitliche Verformung des Körpers berücksichtigt. Auf Grund des iterativen Abgleichs der Kopplungsergebnisse eignet sich ein potenzialtheoretisches Verfahren, da als Rechengitter nur das Netz auf der Körperoberfläche an die neue Lage der Geometrie angepasst werden muss. Im Gegensatz

zu RANSE-Verfahren entfällt der Schritt der Verzerrung eines Volumengitters, der die Rechendauer wesentlich bestimmt.

Auf Seiten der Strukturanalyse eignen sich Finite-Element-Ansätze. Diese sind Standard bei der Berechnung strukturdynamischer Probleme linear-elastischer Körper und sollen hier nicht weiter im Einzelnen erläutert werden. Einschlägige Literatur ist beispielsweise unter Müller und Groth (2007) und Stelzmann et al. (2008) zu finden.

5.2 Implementiertes Verfahren

Das hier verwendete Vorgehen besteht im Wesentlichen aus einer zeitlich aufgelösten Berechnung der Strömung und der Strukturverformung mit Hilfe zweier unabhängiger Verfahren.

5.2.1 Stukturdynamik

Für die strukturdynamische Berechnung kamen zwei Verfahren zum Einsatz. Für die ersten Untersuchungen wurde der kommerzielle FE-Code ANSYS-FEM genutzt, der über eine skriptähnliche Programmiersprache gesteuert werden kann. Da im weiteren Verlauf der Arbeit das kommerzielle Verfahren nicht mehr zu Verfügung stand, wurde für die weiteren Untersuchungen das quelloffene Programm CaluliX (siehe Dhondt (2011)) verwendet, das klassisch über eine Eingabedatei angesprochen wird. Zwar bestehen kleinere Unterschiede bei der Modellierung der ausgetauschten Kopplungsgrößen, aber im Wesentlichen sind sich beide Programme bei den verwendeten Ansätzen ähnlich.

In beiden Fällen wurde in einem ersten Schritt das unverformte FE-Gitter modelliert, von diesem wurde das Oberflächengitter für die potenzialtheoretische Analyse abgeleitet. Da die Rechennetze, die bei der FEM zum Einsatz kommen, ähnliche Größen haben wie die, die in den hier untersuchten potenzialtheoretischen Strömungsberechnungen verwendet werden, wird zur Kopplung der beiden Verfahren ein identisches Oberflächengitter verwendet. Die in der Strömungssimulation notwendige Verfeinerung der Eintrittskante, wird aus diesem Grund auch bei der FEM-Analyse übernommen, auch wenn dies aus netztechnischen Gesichtspunkten in der FEM-Berechnung nicht erforderlich ist. Durch diese Vorgehensweise kann die Kopplung sehr effizient gestaltet werden, da Interpolationsfehler bei der Übertragung von Last und Verschiebung weitgehend vermieden werden können.

In der Implementierung wird von dem FEM-Volumennetz das Oberflächengitter mit einem Skript extrahiert und in eine Eingabedatei für das potenzialtheoretische Verfahren geschrieben, so dass beiden Lösern die gleiche Oberflächendiskretisierung des Körpers zur Verfügung steht. Die Randbedingungen werden in der FEM immer an den Elementknoten aufgebracht. Als Randbedingung werden bei dieser Analyse folgende Bedingungen gesetzt:

Knotenverschiebung An dem Übergang des Flügels in die Nabe/Einspannung wird die Knotenverschiebung zu Null gesetzt.

Kräfte An den Knoten auf der Oberfläche des Propellerflügels werden die Kräfte, die sich aus den hydrodynamischen Drücken und Schubspannungen auf der Propelleroberfläche ergeben, aufgebracht. Hierzu wird in ANSYS ein spezielles Oberflächeneffektelement verwendet (SURF154), mit dessen Hilfe die gerichteten Kräfte, die an einem Paneel wirken, auf die entsprechenden Elementknoten übertragen werden.
In CalculiX werden für einen Knoten an der Oberläche die Kräfte der angrenzenden Paneele aufsummiert und anteilig auf den Knoten aufgebracht.

Elementtyp Das Gitter besteht aus Volumenelementen höherer Ordnung. In ANSYS ist dieses würfelförmige Element mit Mittenknoten auf den Kanten das SOLID95. In CalculiX wird es mit dem Namen C3D20 bezeichnet.

Das Problem wird in einem rotierenden Koordinatensystem behandelt, so dass zusätzlich Zentrifugalkräfte an allen Knotenelementen des FE-Modells wirken.

Die Kräfte werden innerhalb eines Zeitschritts rampenförmig aufgebracht, so dass durch die lineare Änderung der Kräfte zum Ende des Zeitschritts die gleichen Kräfte gelten wie in der potenzialtheoretischen Strömung. Da die Kräfte iterativ ermittelt werden, müssen zu Beginn eines Iterationsschritts die zuletzt gültigen Kraft-, Verformungs-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustände erneut geladen werden.

Um den Einschwingvorgang, der sich aus einer einsetztenden Last ergibt, zu verkürzen, ist es sinnvoll, zunächst eine stationäre Vorverformung zu ermitteln, die sich bei einer mittleren Anströmgeschwindigkeit einstellt. Dies bedeutet, dass die Kopplung zunächst ohne zeitlich veränderliche Größen durchgeführt wird. Wird mit einer vorverformten Geometrie gestartet, stellt sich bei einer periodischen Anregung ein periodischer Verlauf der Kräfte und Verformungen deutlich früher ein. Ansonsten kann es aufgrund der zunächst sehr starken Verschiebungen zu Beginn der Rechnung notwendig sein, die Verschiebungen unter zu relaxieren, damit das Verfahren stabil bleibt.

5.2.2 Erweiterungen im Potenzialverfahren

Aus der Verformung des Körpers ergibt sich eine Verschiebung der Paneeleckpunkte während des Iterationsschritts. Die Paneelgeschwindigkeit, die über den in Abschnitt 2.2.9 beschriebenen Weg berechnet wird, geht nun in die Normalenrandbedingung ein. In der instationären Rechnung ist nun neben der Stärke des Paneels zum Ende des letzten Zeitschritts auch die Lage des Paneels zu speichern, damit die Paneelgeschwindigkeit ermittelt werden kann.

Wie zuvor erwähnt, wird die Fluid-Struktur-Kopplung in einem rotierenden Koordinatensystem behandelt, wodurch die Verschiebungen der Paneeleckpunkte deutlich kleiner ausfallen, als wenn auch die Rotation des Körpers über eine Verschiebung der Einspannung behandelt wird. Dies trägt insbesondere auf Seiten der strukturdynamischen Lösung zur Stabilität während des Einschwingvorgangs bei. Die im Verfahren implementierten Randbedingungen gehen von einem ortsfesten Koordinatensystem aus, bei dem sich der Körper im Fluid bewegt. Dies widerspricht den körperfesten Koordinaten auf Seiten der Strukturanalyse. Folglich müssten die Gitterkoordinaten und Kraftvektoren zwischen den beiden Lösern konvertiert werden. Um den Vorteil der Gittergleichheit beider Verfahren nicht zu verlieren ist es praktisch auch auf die Konvertierung von Koordinatensystemen zu verzichten. Zu diesem Zweck wird die Strömung weiterhin in einem ortsfesten Koordinatensystem beschrieben, jedoch wird das Koordinatensystem des Betrachters, das auch für den Austausch der Kräfte und Koordinaten verwendet wird, mit einer entsprechenden Rotations- und Translationsbewegung nachgeführt. Die veränderliche Anströmung des Nachstromfeldes wird durch eine Drehung des Feldes gegenüber dem Koordinatensystems des Betrachters mit jedem Zeitschritt realisiert.

5.3 Berechnungsablauf

Um die zeitliche Änderung des Potenzials zu ermitteln, werden die Ergebnisse des jeweils letzten Iterationsschritts zwischengespeichert. Da ein Zeitschritt wegen der Kopplungsiterationen mehrfach durchgeführt werden muss, werden nur nach der Konvergenz des Zeitschritts die zwischengespeicherten Ergebnisse überschrieben, wodurch ein neuer Zeitschritt beginnt. Um die Rechenzeiten des

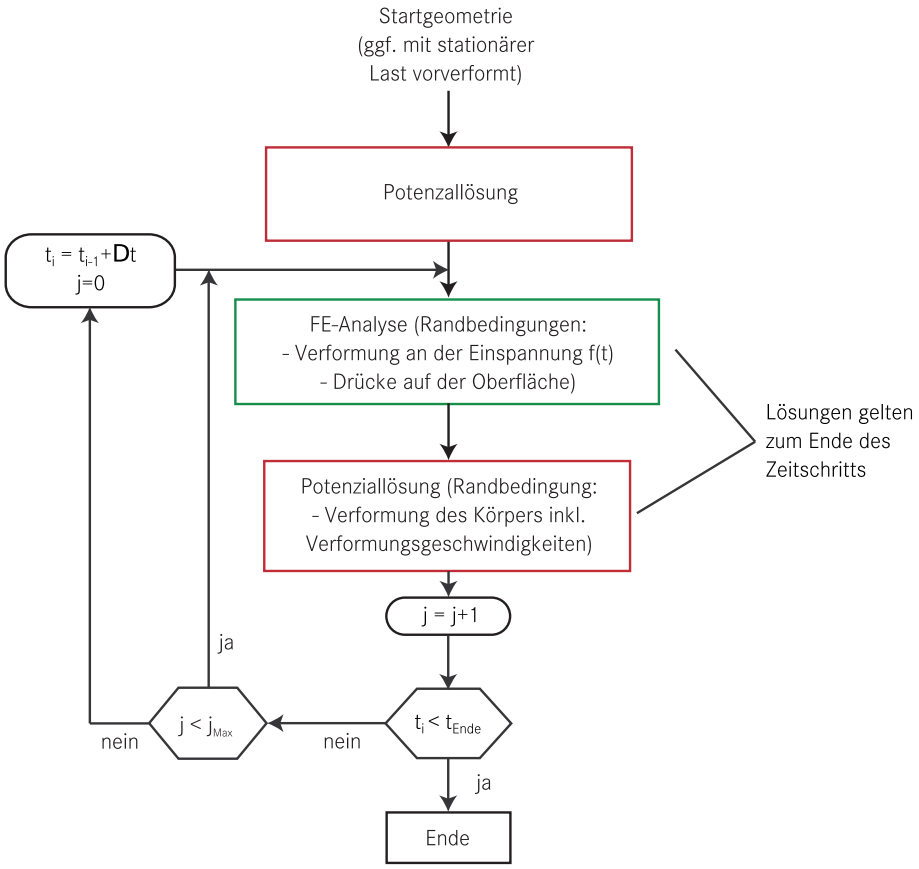


Abbildung 5.1: Programmablaufplan der Fluid–Struktur–Kopplung.

Verfahrens akzeptabel zu halten, wird die Verschiebung der Paneele in den freien Wirbeln nur im ersten Iterationsschritt eines Zeitschritts durchgeführt.

5.4 Beispiel: Oszillierender Tragflügel

Anhand einer Voruntersuchung wird das Verfahrens an einem oszillierenden Tragflügel in paralleler Anströmung dargestellt.

Der in Abschnitt 3.3.2 verwendete Flügel kommt in dieser Untersuchung in leicht abgewandelter Form zum Einsatz, siehe Tabelle 5.1 und Abbildung 5.2. Die rotatorische Schwingungsanregung des Tragflügels wird dabei über eine Vorgabe der Knotenverschiebung an der Einspannung des Tragflügels während der FE–Berechnung modelliert. Da die konstante Vorausgeschwindigkeit des Tragflügels allein keinen unmittelbaren Einfuss auf die Strukturantwort hat, wird diese ausschließlich in Form einer parallelen Anströmung auf Seiten des potenzialtheoretischen Verfahrens berücksichtigt.

Der Körper bewegt sich hierbei in x–Richtung, die Drehachse, um die der Flügel oszilliert, ist die y–Achse. Folglich wirkt die Auftriebskraft in z–Richtung.

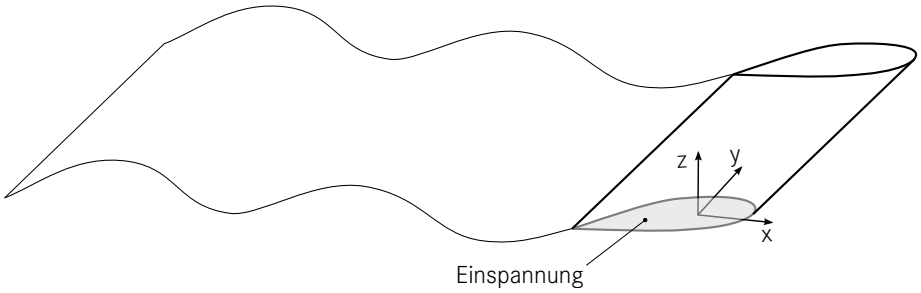


Abbildung 5.2: Skizze des um die x–Achse oszillierenden Tragflügels in paralleler Anströmung.

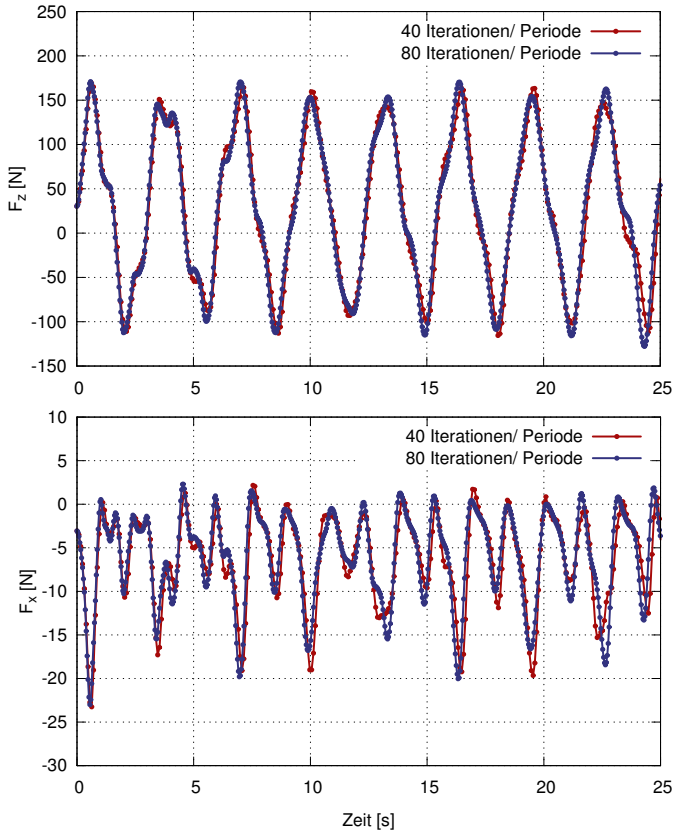


Abbildung 5.3: Kräfte am flexiblen, oszillierenden Flügel im Zeitbereich.

Tabelle 5.1: Eigenschaften des oszillierenden flexiblen Flügels.

Profiltiefe:	0.2 m
Spannweite:	1 m
Profiltyp:	NACA0012
Dichte:	7900 kg/m^3
E-Modul:	21.000 N/mm^2
Anstellwinkel:	$\alpha = 3° + 10° sin(\omega_e\, t)$
Erregerfrequenz:	$\omega_e = 2\ rad/s = 2\,\pi\ 0.3183\ Hz$
Anströmgeschwindigkeit:	1 m/s
Simulationsdauer:	9 Perioden

In Abbildung 5.3 sind die Auftriebs- und Widerstandskräfte dargestellt, die sich während des Einschwingvorgangs des oszillierenden Flügels einstellen. Dabei wurde die zeitliche Auflösungen der Bewegung mit 40 Zeitschritten bzw. 80 Zeitschritten pro Periode variiert. Im Zeitschrieb zeigt

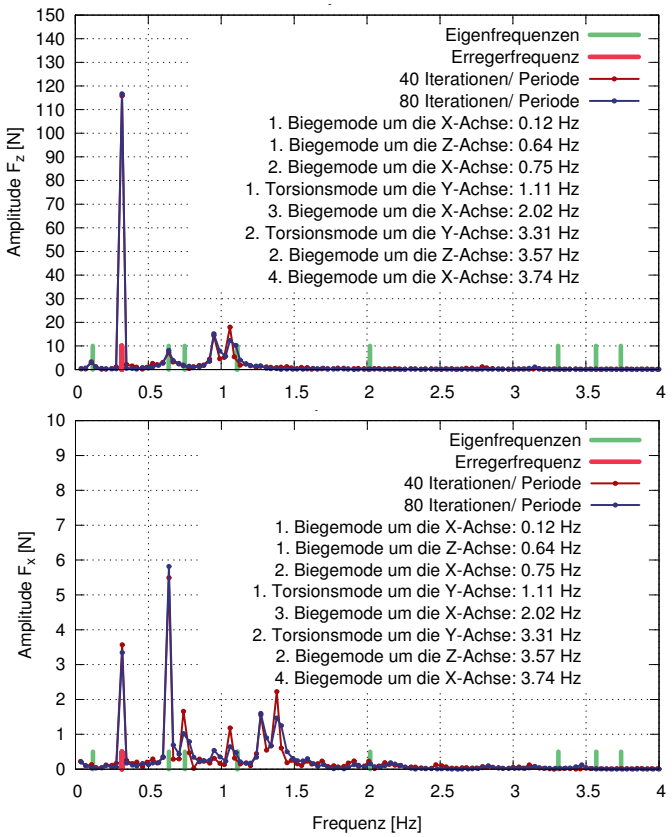


Abbildung 5.4: Kraftamplituden am felxiblen, oszillierenden Flügel im Frequenzbereich.

sich eine hohe Übereinstimmung beider Verläufe zu Beginn der Rechnung, mit fortschreitender Simulationszeit summieren sich die Unterschiede in der Verformung, so dass auch Abweichungen bei den Reaktionskräften in der Einspannung resultieren. Um die Verformungen zu bewerten, ist das fouriertransformierte Signal in Abbildung 5.4 aufgetragen. Hier sind zusätzlich die Erregerfrequenz von *0.32* Hz sowie die Eigenfrequenzen des Tragflügels eingetragen. Als deutlicher Maximalwert ist erwartungsgemäß eine Strukturantwort bei der Erregerfrequenz zu beobachten. Die erste Eigenfrequenz wird nicht angeregt, da sie unterhalb der Erregerfrequenz liegt. Eine Übersicht über die Eigenmoden ist in Abbildung 5.5 aufgelistet. Es ist zu sehen, dass durch die Erregung im Einschwingvorgang die Eigenfrequenzen bei *0.64* Hz, *0.75* Hz und *1.11* Hz angeregt werden. Insbesondere die Anregung des ersten Biegemodes um die z-Achse bei *0.64* Hz führt zu einer deutlichen Sturkturantwort. Der Eigenmode wird durch die Widerstandsänderung des oszillierenden Tragflügels angeregt. Da der Flügel während einer Periode zweimal das Widerstandsminimum durchläuft, verdoppelt sich die Erregerfrequenz dieses Modes gegenüber der in Tabelle 5.1 angegebenen Frequenz $\omega_e = 0.32$. Dieses Phänomen ist nur bei der Widerstandskraft jedoch nicht bei der Auftriebskraft vorhanden, so dass die Anregung des Modes nur eine sehr geringe Auswirkungen auf die Vertikalkraft hat. Ähnliches kann für den ersten Torsionsmode um die y-Achse beobachtet werden (bei 1.11 Hz). Da durch Torsion des Flügels sowohl Widerstand als Auftrieb des Tragflügels beeinflusst werden, ist im Bereich des ersten Torsionsmodes ebenfalls eine verstärkte Strukturantwort zu beobachten. Zudem erfolgt die Anregung des Flügels mit einer Drehbewegung um die y-Achse genau in der Bewegungsform des Modes.

In den dargestellten Vergleichen sind die Eigenfrequenzen des Flügels ohne umgebendes Fluid eingetragen. Im Allgemeinen setzt die hydrodynamische Masse des umgebenden Fluids die Eigenfrequenzen des Körpers herab. Das Maß dieser Eigenfrequenzverringerung hängt jedoch von der Bewegungsform und von der umgebenden Strömung ab. Da bei dem oszillierenden Flügel eine stark

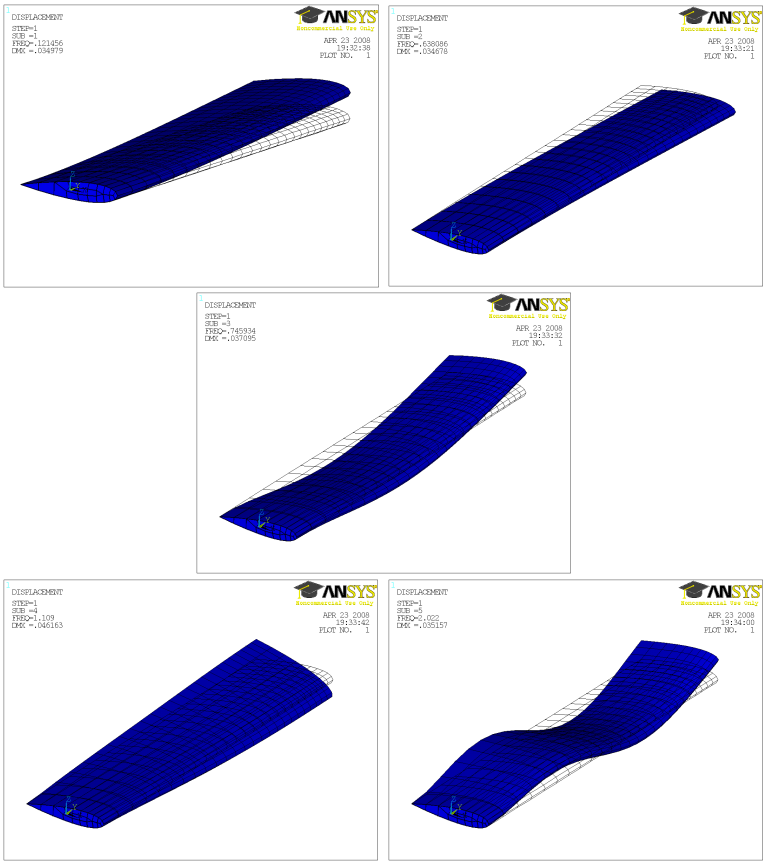


Abbildung 5.5: Darstellung der ersten vier Eigenmoden der untersuchten Flügels (ohne umgebendes Fluid).

überhöhte Strukturantwort bei der Frequenz 0.64 Hz auftritt, bei der auch ein Eigenmode vorliegt, ist zu folgern, dass in dem betrachteten Fall der Trägheitseinfluss des Fluids, bzw. die mitschwingende hydrodynamische Masse gering ist. Etwas anders fällt dies für den eben angesprochenen 1. Torsionsmode um die y-Achse aus. Hier liegt die überhöhte Strukturantwort bei einer etwas geringeren Frequenz. Diese Frequenzverschiebung ist auf die hydrodynamische Masse der mitbeschleunigten Strömung zurückzuführen.

Weiterhin ist bei 1.3 Hz und 1.4 Hz eine Änderung der Widerstandskraft zu beobachten, obwohl hier keine Eigenfrequenzen vorliegen. Vermutlich ist dies auf das Abklingen unregelmäßiger Schwingungen während des Einschwingvorgangs zurückzuführen. Bei den Eigenmoden über 2 Hz sind keine besonderen Strukturantworten zu sehen. Dies ist auf den hohen Frequenzabstand zur Erregerfrequenz zurückzuführen aber auch auf die zeitliche Auflösung der Rechnung. So würde beispielsweise eine Schwingung bei 2 Hz nur noch durch einen oder zwei Zeitschritte abgebildet, so dass der Schwingvorgang nicht mehr erfasst werden kann.

5.5 Ergebnisse der Propellerumströmung

Durch die inhomogene Anströmung des Propellers entstehen während des Propellerumlaufs ungleichförmige Lasten auf den Propellerflügel, die neben der statischen Verformung zu einer dynamischen Anregung des Flügels führen. Im Folgenden wird die Modellierung der Fluid-Strukturkopplung für einen inhomogen angeströmten Propeller dargestellt und die Ergebnisse hinsichtlich ihrer Konvergenz- und hydrodynamischen Eigenschaften untersucht. Das Ziel der Untersuchung ist die

Besonderheiten, die aus der impliziten Kopplung resultieren, herauszustellen und einen Vergleich zu einer unidirektionalen Kopplung zu ziehen.

5.5.1 Modellierung der Propellerströmung

Die Anregung des Propellers erfolgt durch ein inhomogenes Nachstromfeld, dessen Modellierung und Eigenschaften im Folgenden erläutert sind. Im Anschluss wird die Modellierung der Bewegung elastischen Propellers in der Strömung dargestellt.

Anregung durch inhomogenes Nachstromfeld Wie in Kapiteln 2.2.12 dargestellt, können zur Abbildung des Nachstroms sowohl nominelle als auch Gesamtnachstromfelder verwendet werden. Um eine möglichst gute Annäherung an die tatsächlichen Verhältnisse zu erreichen, wurde ein zeitlich gemitteltes Nachstromfeld verwendet, das aus einer vorliegenden RANSE-Untersuchung übernommen wurde, in die ein unverformter Propeller eingebunden wurde. Von diesem zeitlich gemittelten aber örtlich veränderlichen Gesamtnachstromfeld sind wie oben beschrieben die propellerinduzierten Geschwindigkeiten in jedem Zeitschritt zu subtrahieren, um das effektive Nachstromfeld zu erhalten. Das in die Berechnung eingehende Nachstromfeld weist auf dem Radius $r/R = 0.7$, wie bereits in Abbildung 2.16 dargestellt, die größten Amplituden zwischen der vierten und siebten Ordnung der Propellerdrehfrequenz auf:

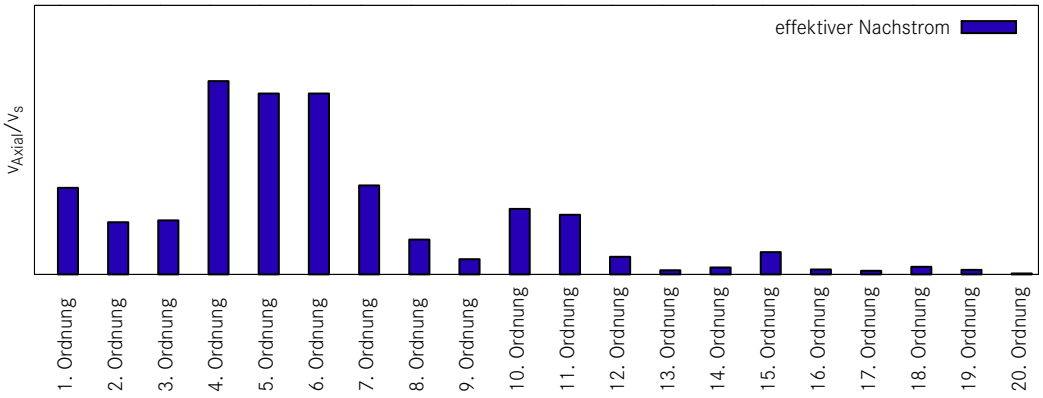


Abbildung 5.6: Amplituden im effektiven Nachstromfeld auf dem Radius $r/R = 0.7$.

Abbildung der Körperbewegung Analog zu dem oszillierenden Tragflügel hat die translatorische Bewegung, hier die Fortschrittsgeschwindigkeit, keinen unmittelbaren Einfluss auf die Verformung des Propellers, so dass diese ausschließlich auf Seiten der Strömungslösung Berücksichtigung finden muss. Aus der rotatorischen Bewegung resultieren Zentrifugalkräfte auf den Körper, so dass die Drehbewegung, wie im Falle des oszillierenden Tragflügels, in Form einer vorgegebenen Bewegung an der Einspannung simuliert werden könnte. In der Folge ergäbe sich die Lage eines Propellerflügels im Schiffsnachstrom aus der in der FE-Analyse berechneten Strukturantwort. Diese Vorgehensweise würde zu unnötigen numerischen Schwierigkeiten führen, wie im Folgenden gezeigt wird.

Die Verschiebungen der Knoten setzen sich nun aus einer Drehbewegung des Starrkörpers und einer belastungsabhängigen Flügelverformung zusammen. Innerhalb eines Zeitschritts ist im Allgemeinen der Anteil der Knotenverschiebung, der aus der Starrkörperdrehung resultiert, groß gegenüber dem elastisch bedingten Verformungsanteil. Inbesondere an der Blattspitze führt dies zu relativ großen Verschiebungen während eines Zeitschritts der FE-Strukturanalyse. Dies beeinträchtigt die Robustheit des Verfahrens und erfordert vor allem eine geeignete Initialisierung der Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustände des Körpers zu Beginn der Rechnung. Auf Seiten

der Strömungsberechnung geht die Verschiebungsgeschwindigkeit der Paneele in die Normalenrandbedingung ein. Während eines Zeitschritts wird die Verschiebung als lineare Bewegung mit einer mittleren, über den Zeitschritt konstanten Geschwindigkeit interpretiert. Diese Annahme ist für eine Drehbewegung vergleichsweise ungenau.

Aus diesem Grund wird eine andere Herangehensweise für die Abbildung der Drehbewegung als bei dem oszillierenden Tragflügel gewählt. Bei der zweiten Variante, die in den folgenden Rechnungen verwendet wurde, wird der Propeller als rotierender Körper modelliert, so dass lediglich die elastische Verformung als Paneelverschiebung modelliert wird. Das Koordinatensystem des Betrachters wird der Drehbewegung des Körpers in jedem Zeitschritt nachgeführt. Auf Seite der Strukturanalyse werden neben den Kräften aus der Druckverteilung auf der Körperoberfläche auch Zentrifugalkräfte auf die Zellen im Körper aufgebracht. Infolge dessen bleibt der Flügel während der Simulation abgesehen von der ermittelten Verformung an Ort und Stelle, so dass zur inhomogenen Anregung des Flügels das Nachstromfeld gedreht wird. Auf diese Art und Weise kann in diesem Verfahren beispielsweise auch eine stationäre Vorverformung ermittelt werden, indem zunächst ein umfangsgemitteltes Nachstromfeld verwendet wird und beide Programme im stationären Modus rechnen.

5.5.2 Konvergenzuntersuchung der Fluid–Struktur–Interaktion

Die Ziele der impliziten Fluid-Struktur-Kopplung sind, für jeden Zeitschritt die auftretenden Drücke und die damit verbundene Verformungen zur Konvergenz zu bringen. Hierfür werden Kräfte und Verformungen innerhalb eines Zeitschritts mehrmals zwischen beiden Lösern ausgetauscht und der Iterationsschritt unter den um die Verformung geänderten Randbedingungen wiederholt. In dem Rechenverfahren wurde kein Konvergenzkriterium hinterlegt, das bei Erreichen eines Limits den Iterationsschritt beendet, sondern es wurde eine konstante Anzahl an Kopplungsschritten vorgegeben.

Im folgenden Beispiel, siehe Abb. 5.7 und 5.8, ist der Konvergenzverlauf für einen Propellerflügel in dem oben erläuterten effektiven Nachstromfeld dargestellt, der mit einer Schrittweite von 15° und sechs Kopplungiterationen pro Zeitschritt untersucht wurde. Dargestellt sind die Änderungen der Verformung sowie des Schubes gegenüber dem vorhergehenden Iterationsschritt, die auf einen mittleren Verformungs- bzw. Schubwert normiert sind.

Zu Beginn eines Kopplungsschritts wird zuächst die Last aus dem letzten Zeitschritt erneut aufgebracht, mit deren Hilfe eine erste Verformung ermittelt wird, die zum Ende des neuen Zeitschritts erreicht werden soll. Basierend auf dieser initialen Verformung werden die ersten hydrodynamischen Lasten für den neuen Zeitschritt bestimmt, so dass sich für die Verformung 6 und für den Schub 5 Änderungsverläufe ergeben.

Die Änderung wird mit jeder Iteration etwa auf ein Viertel des Anfangswerts reduziert und daher für die letzte Umdrehung mit einer vergrößerten Skala gezeigt. Der relative Fehler liegt nach der zweiten Iteration bereits unter zwei Prozent und berägt zum Abschluss eines Zeitschritts weit weniger als 0.1%.

Bei geringer Propellerdrehzahl verringern sich die Lasten und ebenso die Verformung, so dass hier weniger Iterationsschritte nötig sind, um Konvergenz zu errreichen. Ähnliches gilt auch für eine Verringerung der Zeitschrittweite. Da hier die Verformung zwischen zwei Zeitschritten geringer wird, ist auch hier mit einer schnelleren Konvergenz zu rechnen.

In die Normalenrandbedingung geht die Lage des Paneels zum Ende des Zeitschritts und seine Verformungsgeschwindigkeit ein. Diese wird über eine Zentraldifferenz nach Gl. 2.79 aus der Lage des Mittelpunktes zu Beginn und zu Ende des Zeitschritts und der Zeitschrittweite bestimmt. Wird

hier anstatt der konstanten Verformungsgeschwindigkeit während eines Zeitschritts ein Schema höherer Ordnung verwendet (z. B. Gl. 2.85), wie es in Abschnitt 3.3.1 zur konstanten Beschleunigung einer Kugel zur Anwendung kommmt, beeinflusst dies die Konvergenz des Verfahrens erheblich und führt bei größeren Verformungen bzw. Belastungen während des Einschwingvorgangs zu Divergenz. Für das Aufbringen der Kräfte auf den elastischen Propellerflügel, wird auf Seiten der Strukturanalyse ein Ansatz 1. Ordnung verwendet, so dass innerhalb eines Zeitschritts die Kräfte linear anwachsen.

Neben der Konvergenz innerhalb eines Zeitschritts ist bei einer periodischen Anregung durch das Nachstromfeld auch eine periodische Antwort bei den entstehenden Kräften und Verformungen zu erwarten, falls kein Eigenmode des Körpers angeregt wird. In Abbildung 5.9 und 5.10 sind der normierte Verlauf des Schubes und der Verformung dargestellt. Nach etwa einer halben Umdrehung sind kaum noch Abweichungen gegenüber den nachfolgenden Umdrehungen zu beobachten. Um die Abweichung genauer zu quantifizieren, sind in Abb. 5.11 und 5.12 die relativen Änderungen gegenüber der letzten Umdrehung über dem Drehwinkel aufgetragen. Aus den Abbildungen folgt, dass bereits nach einer halben Umdrehung die Abweichungen zu den Ergebnissen der Folgeumdre-

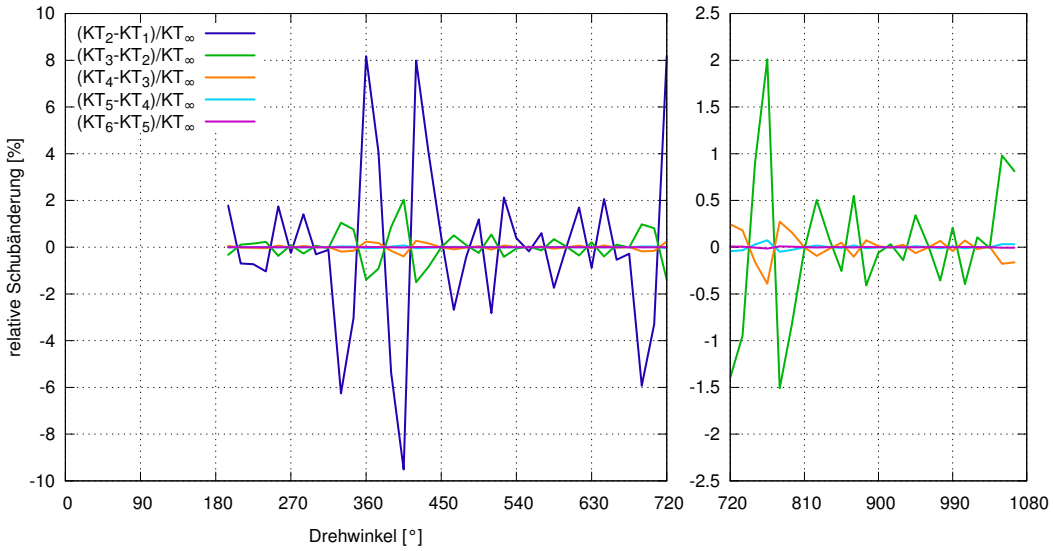


Abbildung 5.7: Relative Änderung des Schubes gegenüber der vorhergehenden Kopplungsiteration.

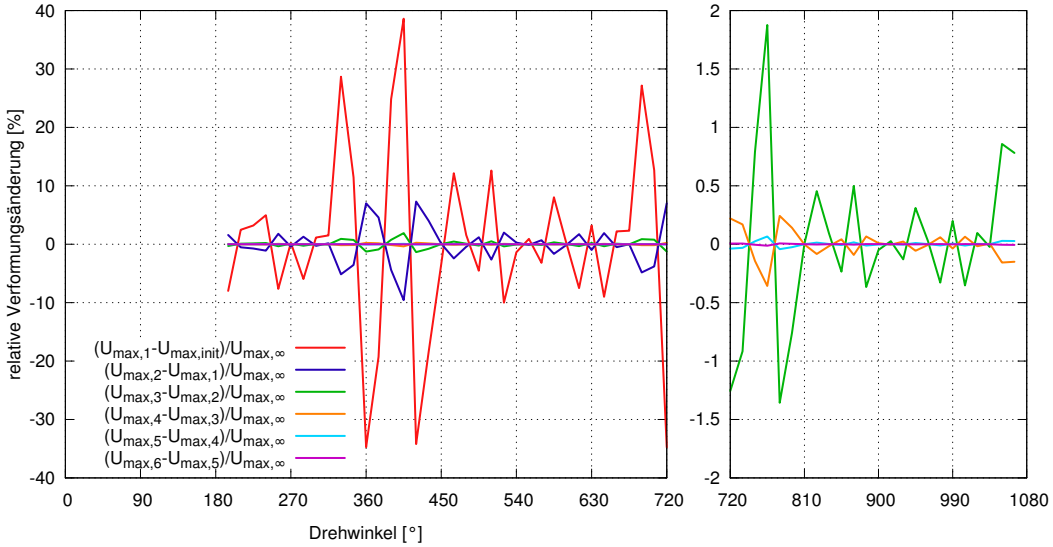


Abbildung 5.8: Relative Änderung der maximalen Verformung gegenüber der vorhergehenden Kopplungsiteration.

hung kleiner als 1% sind. Folglich kann das Ergebnis der dritten Umdrehung sicher als periodisches Ergebnis für die Bewegung des Körpers in dem inhomogenen Nachstromfeld angesehen werden.

Einfluss der impliziten Wechselwirkung

Bei moderaten Belastungen ist zu erwarten, dass die Rückkopplung zwischen Verformung und Strömung nur geringen Einfluss auf die Verformung hat. Um den Einfluss der impliziten Kopplung auf die Schwingung des Propellers zu ermitteln, wurde zum Vergleich eine Berechnung durchgeführt, bei der die Umströmung für einen starren Propeller ermittelt wurde und die sich hier einstellende Last in einer instationären Rechnung auf das FE-Modell des Flügels aufgeprägt wurde. Dabei wurde das FE-Modell zunächst mit der mittleren stationären Kraftverteilung belastet, um eine geeignete Startlösung zu erhalten.

In Abbildung 5.13 ist der zeitliche Verlauf der Verschiebung der Blattspitze über dem Drehwinkel dargestellt. Hierbei ist der Propeller bei zwei Drehzahlen untersucht worden. Die Ergebnisse zeigen bei der kleineren Drehzahl (*40* rpm) das erwartete Ergebnis. Zwar sind unterschiedliche Einschwing-

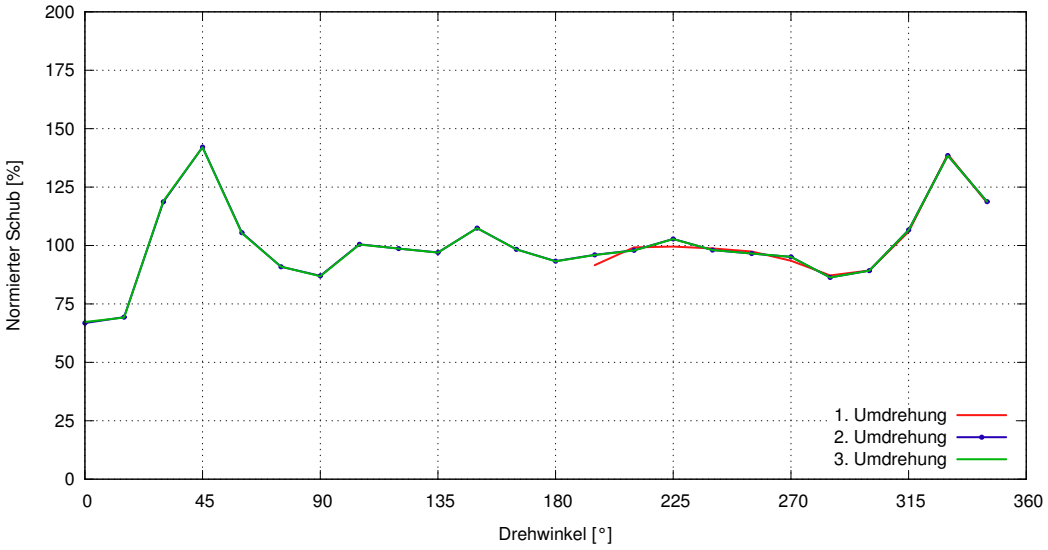


Abbildung 5.9: Normierter Schubverlauf als Funktion vom Drehwinkel, während der 1. 2. und 3. Umdrehung.

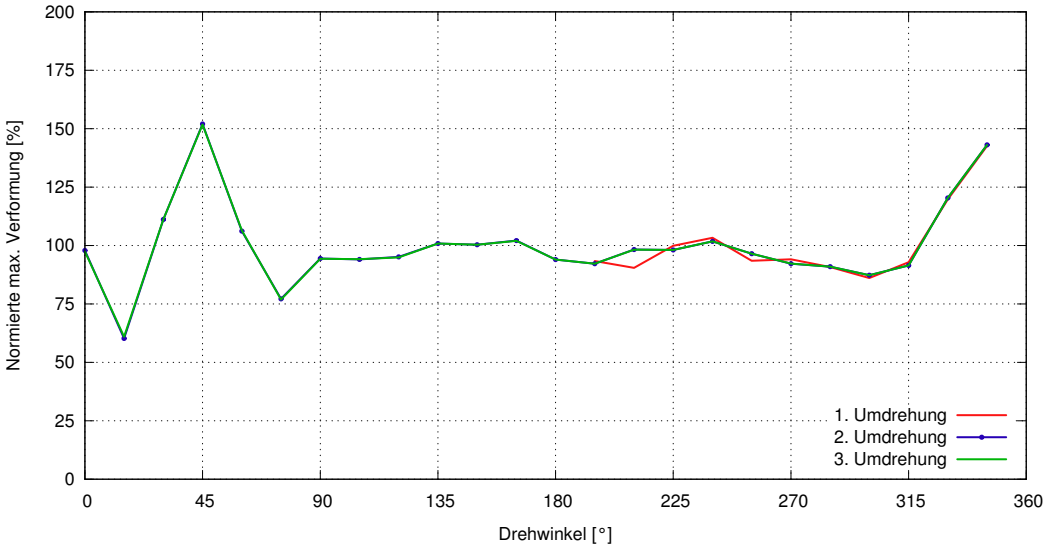


Abbildung 5.10: Normierte maximale Verformung als Funktion vom Drehwinkel, während der 1. 2. und 3. Umdrehung.

vorgänge zu sehen, in der nachfolgenden Bewegung ergeben sich aber keine Unterschiede mehr. Bei der größeren Drehzahl hingegen findet trotz der Initialisierung bei der unidirektionalen Kopplung ein Einschwingvorgang statt. Dieser klingt zwar während einer Umdrehung langsam ab, wird aber regelmäßig von den starken Schubschwankungen in der zwischen 330° und 390° erneut angeregt. Dieses Verhalten ist bei einer implizten Kopplung nicht zu beobachten. Das unterschiedliche Verhalten ist auf die Wirkung der mitbeschleunigten hydrodynamischen Massen zurückzuführen.

5.5.3 Eigenschaften des hydroelastischen Propellers

Stationäre Propellerverformung

Um den Einfluss der Propellerverformung auf die hydrodynamischen Kenngrößen zu ermitteln, eignen sich stationäre Untersuchungen bei unterschiedlichen Propellerdrehzahlen. Die radiale

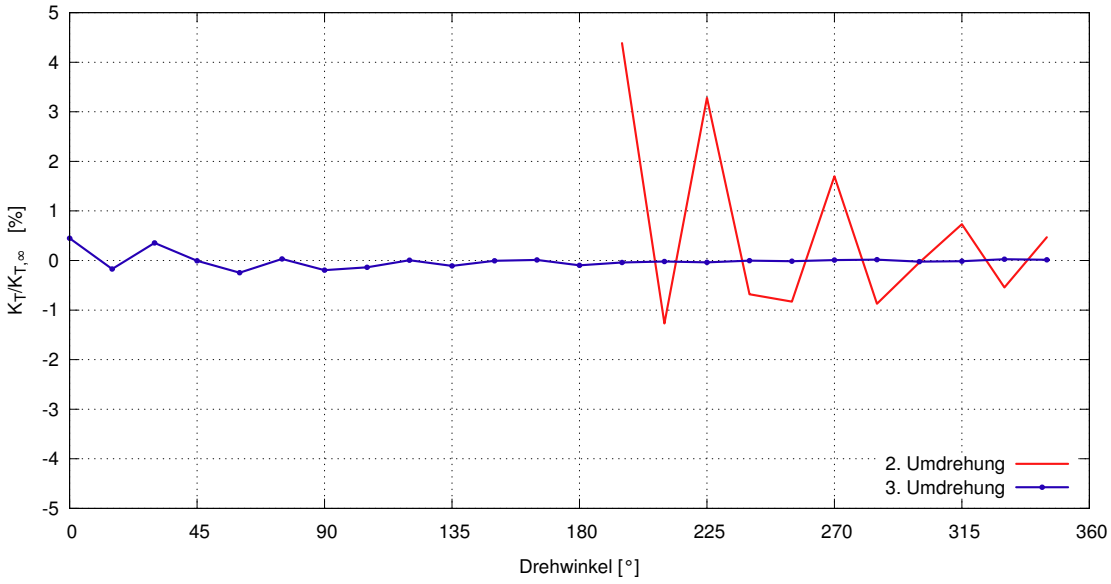


Abbildung 5.11: Relative Änderung des Schubes gegenüber der vorhergehenden Propellerumdrehung.

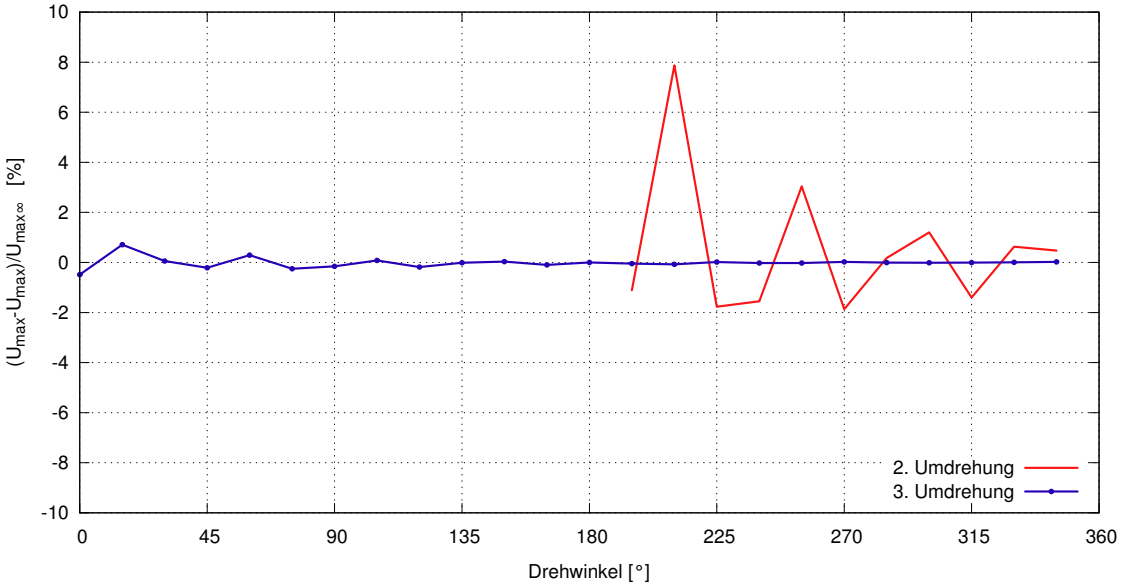


Abbildung 5.12: Relative Änderung der maximalen Verformung am Flügel gegenüber der vorhergehenden Propellerumdrehung.

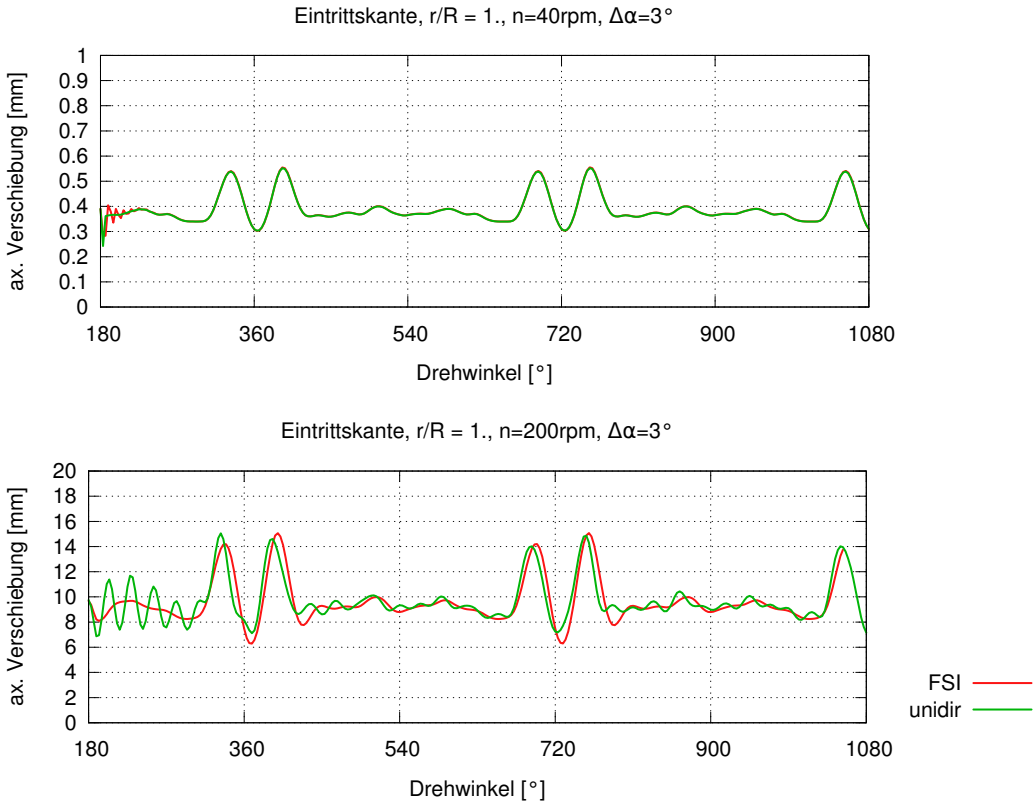


Abbildung 5.13: Vergleich unidirektionale und implizite Kopplung bei unterschiedlichen Propellerdrehzahlen.

Lastverteilung auf dem Flügel kann mit einem umfangsgemittelten Nachstromfeld erfasst werden. In erster Näherung sind bei einem gegebenen Fortschrittsgrad Schub und Drehmoment proportional zum Quadrat der Drehrate. Die auf den linear-elastischen Körper wirkenden Kräfte sind proportional zu dessen Verformung, so dass die Verformung ebenso quadratisch mit der Drehzahl ansteigt. Diese linearisierte Annahme gilt für den untersuchten Propeller bedingt. In Abbildung 5.14 ist die Verformung eines Punktes an der Eintrittskante der Blattspitze dargestellt. Zusätzlich ist als quadratische Funktion die Näherungsfunktion für die Abbildung der Verformung dargestellt, die auf die Werte bei n = 40 *rpm* skaliert ist. Aus der Darstellung geht hervor, dass die Verformungen etwas weniger als quadratisch anwächst, was im Folgenden näher untersucht werden soll.

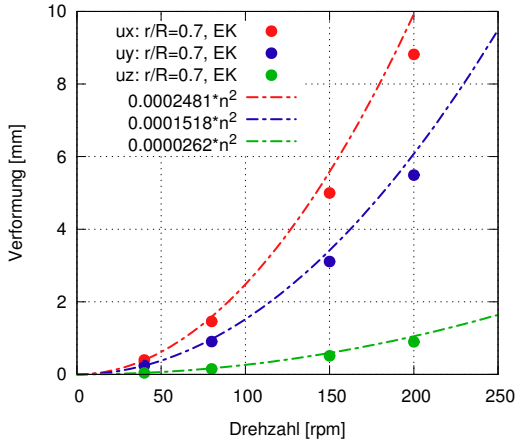


Abbildung 5.14: Verformung der Blattspitze bei wachsender Drehzahl.

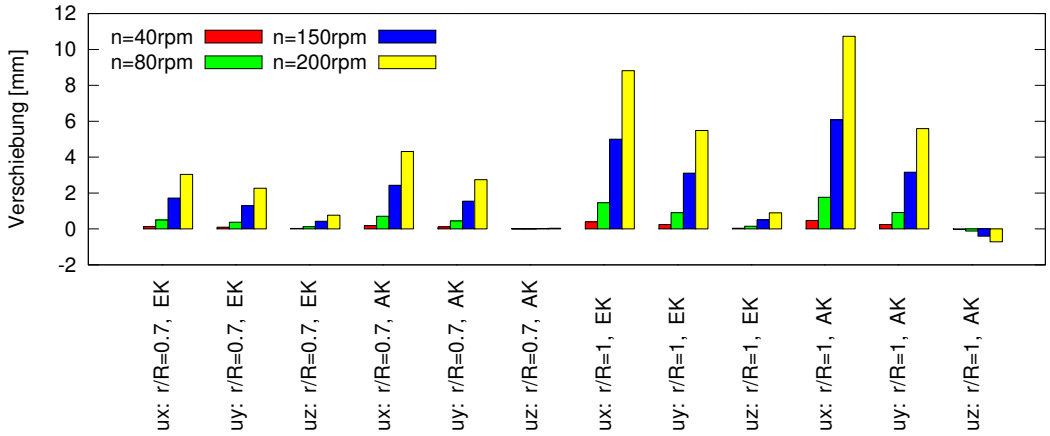


Abbildung 5.15: Verschiebung der Ein- und Austrittskante am relativen Radius 0.7 und 1.0.

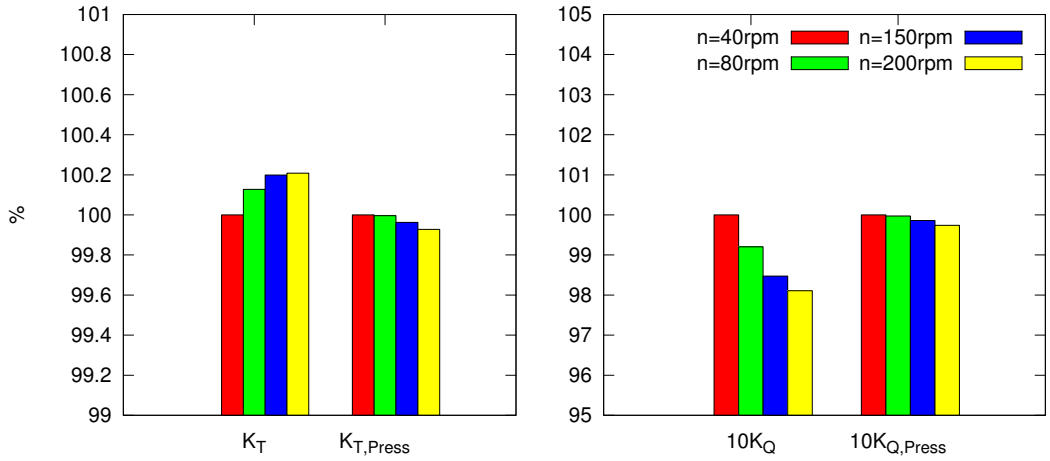


Abbildung 5.16: Änderung von Schub- und Momentenbeiwert bei Drehzahländerung.

In Abbildung 5.15 ist die Verformung des Flügels an zwei Radienschnitten, jeweils an der Ein- und Austrittskante, dargestellt. Entsprechend eines Kragträgers nehmen die Verformungen mit dem Radius zu. An beiden Radien ist zu sehen, dass die axialen (x) und tangentialen (y) Verformungen an der Austrittskante etwas größer sind als an der Eintrittskante. Daraus läßt sich folgern, dass der belastete Flügel dazu neigt, sich selbst zu entlasten, indem er den Anströmwinkel verringert.

Dieses selbstentlastende Verhalten ist auch bei den Schub- und Drehmomentbeiwerten in Abbildung 5.16 erkennbar, auch wenn hier zwei Effekte überlagert sind. Wie in der Abbildung gezeigt, geht mit der Drehzahlerhöhung eine geringe Schubbeiwerterhöhung um 0.2 % und eine Verringerung des Drehmomentenbeiwerts von 2 % einher. Betrachtet man jedoch die Schub- und Momentenbeiwerte, die sich aus der reinen Druckverteilung also ohne die Reibungsanteile ergeben, verringern sich Schub- und Momentenbeiwert. Dies entspricht der oben diskutierten Beobachtung, dass sich die Blattspitze mit zunehmender Drehzahl entlastet. Grund für dieses Verhalten sind zwei Effekte, die sich überlagern. Während die Verformung des Körpers mit steigender Drehzahl zu einer Selbstentlastung führt, ändern sich gleichzeitig die Reibungskräfte auf der Körperoberfläche. Mit der steigenden Reynoldszahl wird der Reibungsbeiwert auf der Oberfläche kleiner, so dass in der Summe das Drehmoment um ca. 2% sinkt und der Schub leicht steigt. Darüber hinaus kann beobachtet werden, dass mit zunehmender Drehzahl die Änderung in Folge der Reynoldszahlerhöhung immer geringer wird. Bei den Beiwerten, die aus der Druckverteilung gewonnen werden, wächst mit der Drehzahl auch die Änderung des Beiwerts.

Die Auswirkungen der elastischen Strukturverformung sind zwar etwa um eine Größenordnung kleiner als der Reynoldszahleinfluss, können aber anhand der Beiwerte, die nur auf der Druckverteilung basieren, belegt werden.

Auch wenn die Auswirkungen der Propellerverformung auf die hydrodynamischen Eigenschaften gering sind, so sind sie dennoch nachweisbar und können bei Propellern mit deutlich geringeren Steifigkeiten an Einfluss gewinnen.

Instationäre Propellerverformung

Wie bei der stationären Propellerverformung soll der Einfluss der Drehzahl auf die Ergebnisse untersucht werden und eine Aufteilung in hydrodynamische Effekte und solche, die aus der Kopplung resultieren, vorgenommen werden. Darüber hinaus soll eine Art Funktion für die Übertragung der Anregung ermitttelt werden. Hierfür ist eine Betrachtung im Frequenzbereich erforderlich. Um einen Vergleich bei unterschiedlichen Drehzahlen herzustellen, ist es hilfreich normierte Kenngrößen heranzuziehen. Da der Schub, abgesehen vom Reibungssanteil, proportional zum Quadrat der Drehzahl wächst, werden zum Vergleich alle dargestellten Kräfte mit $\rho n^2 D^4$ normiert. Für die Schubkraft folgt daraus der der Schubbeiwert:

$$K_T = \frac{T}{\rho n^2 D^4} \tag{5.4}$$

Das linear-elastische Verformungsmodell beinhaltet eine konstante Steifigkeitsmatrix für den Körper, so dass die Verschiebungen $\vec{u}$, die proportional mit der Last ansteigen, mit n^2 normiert werden. Der normierte Verformungswert $\vec{u}'$ ist somit weiterhin dimensionsbehaftet:

$$\vec{u}' = \frac{\vec{u}}{n^2} \tag{5.5}$$

Diese Normierung ist ebenfalls nur eine Näherung, da die Zentrifugalkraft, die ausschließlich radial wirkt, die Charakteristik des Lastfalls bei unterschiedlichen Drehzahlen verändert.

Neben den Kopplungsergebnissen für n=40 *rpm* und n=200 *rpm* sind zum Vergleich die Werte für den unidirektional gekoppelten Propeller dargestellt. Für diesen wurden zunächst Lasten am starren Körper berechnet und anschließend auf das FE-Modell aufgebracht, ohne eine Rückkopplung der Verformung auf die Strömung zu erfassen.

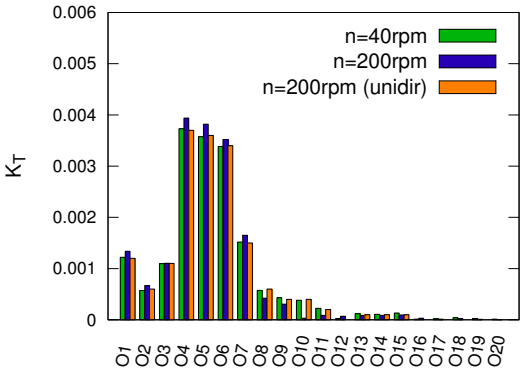


Abbildung 5.17: Amplitude des normierten Schubs.

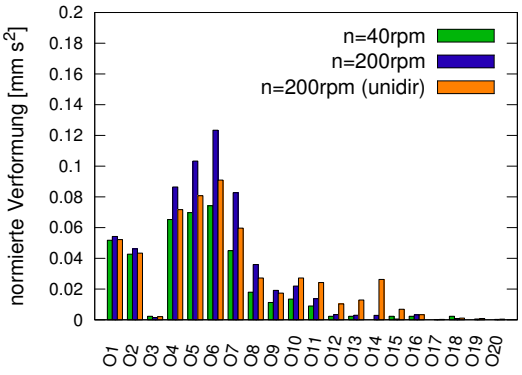


Abbildung 5.18: Amplitude der normierten Knotenverschiebung.

Die normierten Werte werden im Anschluss fouriertransformiert, so dass die resultierenden Amplituden ebenfalls normierte Schwingungsamplituden darstellen. In den Abbildungen 5.17 und 5.18 sind die normierte Schubamplitude und die normierte Verformung dargestellt. Die Resultate zeigen

einen ähnlichen Verlauf wie die in Abbildung 2.16 dargestellte Fourieranalyse des Nachstromfeldes mit einer deutlichen Antwort in der 4.–7. Ordnung der Propellerdrehfrequenz. Es ist deutlich zu sehen, dass die Amplituden in der implizit gekoppelten Berechnung mit der Drehzahl zunehmen. Die Lasten, die für den unidirektional gekoppelten Propeller ermittelt wurden (bei $n = 200$ rpm), haben eine höhere Übereinstimmung mit den implizit gekoppelten Ergebnissen für $n = 40\ rpm$. Dies bedeutet zum einen, dass die Elastizität des Propellers bei kleinen Drehzahlen kaum Einfluss auf die entstehenden Lasten hat. Zum anderen lässt sich folgern, dass die Reynoldszahl die Schubamplituden nur gering beeinflusst, da der unidirektional gekoppelte Propeller bei einer deutlich höheren Drehzahl untersucht wurde.

Bei der Analyse der normierten Verformungen ist ein ähnliches Verhalten des unidirektional gekoppelten Propellers zu beobachten. Es ist wiederum zu sehen, dass die normierten Verformungen höher ausfallen. Auch hier liegen die Verformungsamplituden des unidirektional gekoppelten Propellers näher an den Ergebnissen des bidirektional gekoppleten Propellers mit der geringeren Drehzahl. Erst ab etwa der 8. Ordnung entwickelt der unidirektionale Fall ein eigenes Verhalten, das aus der fehlenden Strömungsrückkopplung resultiert. Deutlicher zu sehen ist das Verhalten der Propeller, wenn die Ergebnisse der Fourieranalyse auf die Anregung bezogen werden und so eine Art Vergrößerungsfunktion ermittelt wird.

Um eine Proportionalität zwischen Erregung und Antwort zu erreichen, ist die in Abbildung 2.16 gezeigte Amplitude der Anströmgeschwindigkeit ungeeignet, da diese gegenphasig zu Kraft und Verformung schwingt. Ist die Anströmgeschwindigkeit hoch, so ist der resultierende Schub gering und umgekehrt. Aus diesem Grund wird näherungsweise ein Anstellwinkel bestimmt, der für die Fourieranalyse verwendet wird. Bei Vernachlässigung der induzierten Geschwindigkeit wird der Anstellwinkel wie folgt ermittelt:

$$\alpha = atan\left(\frac{\frac{P}{D}}{\pi r}\right) - atan\left(\frac{V_A}{2\pi nr}\right) \tag{5.6}$$

wobei als Radius r der Referenzradius 0.7 R verwenet wird. Die Fourieranalyse des so transformier-

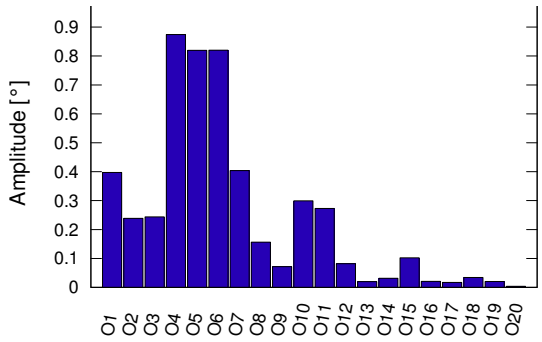


Abbildung 5.19: Amplitude des Profilanströmwinkels bei $r/R = 0.7$ im effektiven Nachstromfeld.

ten Nachstromfeldes ist in Abbildung 5.19 gezeigt. Sowohl Schubamplituden und Verformungsamplituden können auf diese Anregung bezogen werden. In den Abbildungen 5.20 bis 5.21 wird zudem die Phasenverschiebung zwischen Anregung und Antwort betrachtet.

Aus den Vergrößerungsfunktionen für den Schubbeiwert und die nach Gl. 5.5 normierte Verschiebung in Abbildung 5.20 geht hervor, dass die Kräfte am Propellerblatt und die Verformungen infolge der hydroelastischen Kopplung mit der Drehzahlerhöhung leicht überproportional anwachsen. Wenn auch nicht ganz einheitlich, nimmt die Phasenverschiebung in Abb. 5.21 zwischen Erregung und Antwort mit zunhemender Ordnung zu. Insbesondere bei den höheren Ordnungen ist die Auswertung des Phasenwinkels problematisch, da die Amplituden sehr klein werden und

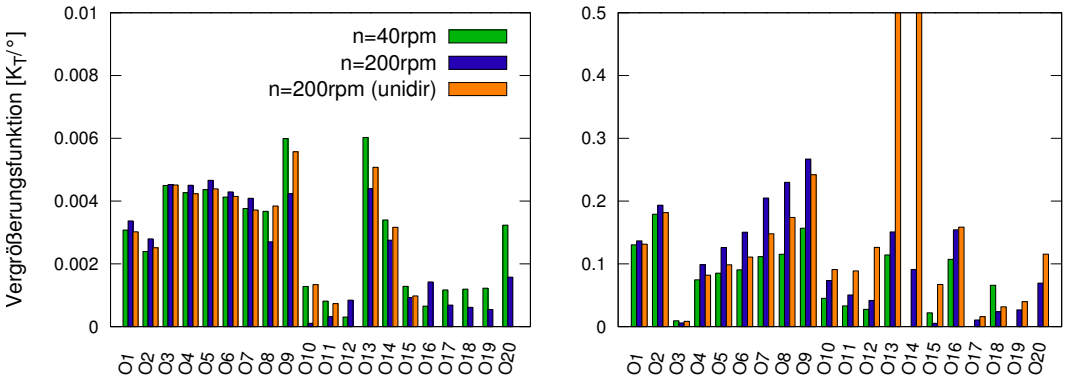


Abbildung 5.20: Vergrößerungsfunktion für Schub/hyd. Anstellwinkel (links) und normierte Verformung/hyd. Anstellwinkel (rechts).

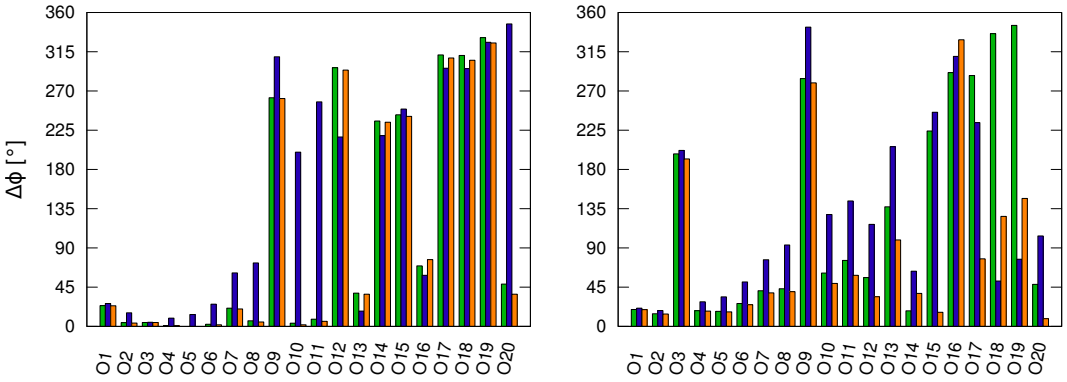


Abbildung 5.21: Phasenverschiebung zwischen Schub und hyd. Anstellwinkel (links) sowie normierter Verformung und hyd. Anstellwinkel (rechts).

folglich die numerischen Fehler als auch getroffenen Näherungsansätze wie beispielsweise für den Profilanstellwinkel ins Gewicht fallen.

Auffällig sind bei der Vergrößerungsfunktion der Verformung zum einen die durchweg sehr geringe Übertragung der dritten Ordnung als auch die extrem starke Vergrößerung der 14. und 15. Ordnung des unidirektional gekoppelten Propellers.

Die geringe Übertragung der dritten Ordnung wird in unabhängig von der Drehzahl und unabhängig vom verwendeten Kopplungsmodus prognostiziert, so dass hier kein speziell hydroelastischer Effekt vorliegt. Da in der dritten Ordnung eine Anregung des Blattes durch eine Kraftamplitude vorliegt, ist die geringe Übertragung dieser Ordnung wohl darauf zurückzuführen, dass der ausgewertete Ort an einem Schwingungsknoten der Bewegungsform liegt.

Die zweite Auffälligkeit ist die extrem starke Vergrößerung der 13. und 14. Ordnung in der unidirektionalen Rechnung, die im Zeitbereich auch in Abbildung 5.13 sichtbar ist. Bei der Drehzahl von 200 *rpm* fällt die unterste Eigenfrequenz des Propellers in diese Ordnung. Diese Überhöhung tritt ausschließlich in der unidirektionalen Kopplung auf, da hier der Einfluss der umgebenden Wassermassen keine Berücksichtigung findet. Die zusätzliche Masse des umgebenden Wassers führt zu einer Verringerung der Eigenfrequenz, da die Steifigkeit des Propellers unverändert bleibt. Eine Überhöhung der Verformung in der bidirektionalen Kopplung bei $n = 200\ rpm$ ist jedoch nicht zu beobachten, so dass zu folgern ist, dass Dämfung und hydrodynamische Masse für diesen Mode hoch sind.

5.6 Bewertung der Kopplungsergebnisse

Mit Hilfe der Fluid-Struktur-Kopplung können auf Basis der Potenzialtheorie für die Strömungsberechnungen Aussagen über hydroelastische Effekte getroffen werden. Es konnte gezeigt werden, dass das verwendete Verfahren für die untersuchten Fälle, wie beispielsweise die Propelleranregung im inhomogenen Nachstromfeld, stabil zu einer periodischen Lösung konvergiert. Anhand zweier Beispiele wurde nachgewiesen, dass bestimmte Schwingungsformen nur durch das Zusammenwirken beider Verfahren angeregt werden bzw. im Falle des untersuchten Propellers in Folge der Berücksichtigung der Fluid-Struktur-Wechselwirkung nicht auftreten. Für den Propeller konnte darüber hinaus die Drehzahlabhängigkeit der Ergebnisse gezeigt werden. Bei kleinen Belastungen, wie sie im unteren Drehzahlbereich auftreten, ist es noch ausreichend die elastische Verformung ohne die Rückkopplung mit der Strömung zu bewerten. Bei höheren Belastungen spielt die Interaktion eine stärker werdende Rolle, so dass die dynamischen Verformungen im Falle des Propellers mit der höheren Drehzahl überproportional zunehmen.

Durch eine unidirektionale Kopplung kann die Dämpfung der Bewegung durch die Strömung und auch deren Trägheitseinfluss auf das System nicht erfasst werden. Um eine Bewertung der Anregung von Eigenmoden vornehmen zu können, ist es erforderlich eine implizite Kopplung der Strömungs- und Strukturanalyse durchzuführen.

Zusammenfassung

Die Ziele dieser Arbeit, instationäre Fluid-Struktur-Wechselwirkungen und Wirbelkavitationseffekte an Propellern potenzialtheoretisch zu untersuchen, wurden durch die Entwicklung einer Paneelmethode erreicht. Es wurde ein Verfahren erstellt, mit dessen Hilfe die instationäre Umströmung von Propellern im inhomogenen Schiffsnachstromfeld berechnet werden kann. Mit Hilfe des instationären Verfahrens konnte ein Modell für die Berechnung des Einsatzpunktes der Spitzenwirbelkavitation entwickelt werden. Zudem konnte das Verfahren genutzt werden, um den Einfluss hydroelastischer Effekte an einem Propeller zu untersuchen. Hierzu wurde eine Fluid-Struktur-Wechelwirkung mit einem Finite-Elemente-Verfahren implementiert.

Im Folgenden werden die gewählten Lösungsansätze für die Kavitationsberechnung und die Fluid-Struktur-Interaktion kurz erläutert und eine Bewertung der erzielten Ergebnisse vorgenommen. Die für diese speziellen Lösungsansätze benötigten und implementierten potenzialtheoretischen Methoden werden zuvor zusammengefasst.

6.1 Potenzialtheoretische Methoden

Das entwickelte potenzialtheoretische Verfahren ist ein paneelbasiertes Randelementeverfahren, mit dessen Hilfe die stationäre und instationäre Umströmung tiefgetauchter Körper berechnet werden kann. Die Umströmung wird durch eine diskretisierte Quell- und Dipolverteilung repräsentiert. Hierbei wird neben der Verdrängungswirkung des Körpers auch der dynamische Auftrieb und die damit verbundene Zirkulation um den Körper erfasst. Der untersuchte Strömungsfall wird durch ein unstrukturiertes Paneelgitter auf der Körperoberfläche und daran geknüpfte Randbedingungen definiert, die individuell vom Anwender über ein Skript vorgegeben werden können. Damit unterscheidet sich das Programm von den meisten anderen potenzialtheoretischen Verfahren zur Propellerberechnung, bei denen die Netzerzeugung und auch alle weiteren Berechnungseinflüsse im Programm selbst implementiert sind. Aus der Trennung von Netz und Definition der Randbedingungen vom eigentlichen Berechnungsverfahren ergibt sich eine hohe Flexibilität in der Anwendbarkeit, so dass neben Propellern ohne Weiteres auch nicht rotierende Körper wie beispielsweise Ruder und andere Tragflächen sowie Wechselwirkungen zwischen mehreren Körpern mit unterschiedlichen Bewegungseigenschaften simuliert werden können. Die verwendeten Potenzialansatzfunktionen haben deutlichen Einfluss auf die berechnete Umströmung des Körpers und können für jeden Anwendungsfall über das Eingabeskript angepasst werden. Somit ermöglicht die Flexibilität in der Definition des Rechenfalls neben einem breiteren Anwendungsprektrum eine Einflussnahme des Anwenders auf die angesetzten Potenzialfunktionen und die damit verknüpften Randbedingungen sowie eine bessere Kontrolle über die Qualität der verwendeten Gitter.

Die freien Wirbel in der Strömung werden im potenzialtheoretischen Verfahren über eine Dipolschicht in der Strömung hinter dem Tragflügel erfasst. Die Lage der freien Wirbel, die a priori nicht bekannt ist, kann in stationären Fällen mittels verschiedener Methoden initial geschätzt werden und anschließend iterativ an die resultierende Strömung angepasst werden. In instationären Fällen erfolgt die iterative Änderung als konvektiver Transport der Wirbelelemente. Auf der Ausbildung

der Dipolschicht, die die freien Wirbel repräsentieren, baut das Wirbelkavitationsmodell auf, das im Anschluss an die Darstellung des Potenzialverfahrens erläutert wird.

Als Normalenrandbedingung auf der Körperoberfläche sind sowohl die Dirichletsche Bedingnung für das Potenzial selbst aber auch eine Neumannsche Randbedingungen für die Geschwindigkeit implementiert. Die Validierungen haben gezeigt, dass die Dirichletsche Randbedingung besser geeignet ist, um die Freifahrteigenschaften eines Propellers abzubilden. Für die Verwendung der Dirichletschen Randbedingung spricht zudem, dass die Herleitung der Randbedingung über den 2. Greenschen Satz sowohl eine Lösung für die Quell- als auch für die Dipolverteilung liefert. Bei Verwendung der Neumannschen Randbedingung gibt es keine unmittelbare Verknüpfung zwischen den beiden Verteilungen und eine zusätzlich Annahme muss getroffen werden. Hinzu kommt, dass die Dirichletsche Bedingung oftmals zu numerisch stabiler lösbaren Gleichungssystemen führt.

Um das Verfahren recheneffizient zu gestalten, wurden periodische und spiegelnde Randbedingungen implementiert. Diese berücksichtigen, dass beispielsweise bei einem homogen angströmten Propeller das Potenzial, das durch den Propeller in der Strömung induziert wird, für alle Flügel identisch ist. Durch die Ausnutzung dieser Eigenschaft kann die Größe des Gleichungssystems erheblich reduziert werden. Ein ganz ähnliches Vorgehen ist auch für instationäre Strömungen vorgesehen. Hierbei wird ebenfalls nur für einen Referenzrotorflügel das Gleichungssytem aufgestellt und für die übrigen Flügel eine alternative Lösung verwendet. Die alternative Lösung ergibt sich aus dem Potenzial, das für den Referenzflügel in der entsprechenden Position ermittelt wurde. Diese alternative Lösung konvergiert bereits nach wenigen Umdrehungen zu einem periodischen Verlauf. Im Vergleich zu einem Vollmodell des Rotors benötigt die Methode durch das kleinere Gleichungssystem deutlich weniger Rechenzeit für die Ermittlung einer periodischen Lösung, auch wenn in der Regel etwas mehr Zeitschritte bis zur Konvergenz benötigt werden.

Da die potenzialtheoretische Strömung keine Reibung im Fluid berücksichtigt, ist es erforderlich Reibbeiwerte auf dem Körper über einen semi-empirischen Zusammenhang zu erfassen. Hierzu wird an Hand der Strömungsgeschwindigkeiten auf einem Paneel eine lokale Reynoldszahl ermittelt. Hierfür wird auf dem unstrukturiertem Gitter der Abstand eines Paneels zur Eintrittskante berechnet. Über vereinfachte Grenzschichtzusammenhänge an der ebenen Platte wird eine Reibkraft ermittelt, die neben der Druckkraft am Paneel wirkt.

In der Literatur wird vielfach eine nichtlineare Kutta-Rangbedingung empfohlen, um die Freifahrteigenschaften eines Propellers besser erfassen zu können. Der Vorteil der Randbedingung konnte nicht nachgewiesen werden. Es stellen sich bei der Untersuchung der Bedingung zudem mehrere Unstimmigkeiten heraus. Zum einen hängt die resultierende Druckverteilung stark vom Startwert des iterativen Lösungsvorgangs ab. Folglich führt die nichtlineare Bedingung nicht zu einer eindeutigen Lösung. Zum anderen wird durch die Randbedingung, die zwar zur Druckgleichheit an der Hinterkante auf beiden Seiten des Profils führt, die Helmholtzbedingung nicht eingehalten. Folglich entspricht der am Tragflügel gebundene Wirbel nicht mehr dem freien Wirbel in der Strömung.

Das Verfahren wurde an Hand repräsentativer Rechenfälle validiert, wobei der Fokus auf der Umströmung freier Propeller lag. Hierzu gehörte auch eine Gitternetztstudie und ein Vergleich der unterschiedlichen Möglichkeiten bei den angesetzten Potenzialfunktionen und bei der Formulierung der Randbedingungen. Die Validierung der stationären Propellerumströmung erfolgte an Hand eines Vergleichs mit Messergebnissen der Wageningen B-Serie für verschiedene Flächen- und Steigungsverhältnisse. Zur Validierung der instationären Rechenfälle wurde ein oszillierender Tragflügel in paralleler Anströmung sowie ein Propeller im inhomogenen Schiffsnachstrom herangezogen. Die Rechnungen zeigen, dass die Freifahrteigenschaften eines Propellers im Allgemeinen über einen weiten Fortschrittsgradbereich zuverlässig berechnet werden können.

6.2 Wirbelkavitation

Die Prognose von Kavitationserscheinungen ist ein zentraler Bestandteil eines Propellerentwurfs. Während für die Entstehung und Ausdehnung von Schichtkavitation eine Reihe von Berechnungsverfahren existieren, bestehen kaum Ansätze, mit denen der Einsatz der Wirbelkavitation prognostiziert werden kann. Die Auswertung physikalischer Eigenschaften der Spitzenwirbelkavitationen zeigt, dass die Entstehung von Spitzenwirbelkavitation vereinfacht als das Zusammenwirken der Zirkulation an der Blattspitze und der viskosen Grenzschicht betrachtet werden kann. So sammelt sich die Zirkulation um den Tragflügel in einem Wirbel, der jeweils an den Enden des Tragflügels gebildet wird. In dem Wirbel steigen die Umfangsgeschwindigkeiten zum Zentrum des Wirbels hin an, so dass der Druck zum Wirbelkern hin abnimmt, bis schließlich der Druck den Dampfdruck unterschreitet und sich eine Kavitationsblase bildet. Auf Grund der hohen Geschwindigkeitsgradienten im Zentrum des Wirbels dominieren hier viskose Effekte. Es kann durch Messungen gezeigt werden, dass die Ausdehnung des Wirbelkerns mit der Grenzschichtdicke bzw. mit der Reynoldszahl im Bereich der Blattspitze korreliert. Detaillierte Betrachtungen zeigen, dass zahlreiche weitere Effekte die Ausbildung der Wirbelkavitation beeinflussen. So können andere Kavitationserscheinung in der Nähe des Spitzenwirbels den Einsatz des Wirbels stark beeinflussen. Beispielsweise kann sich eine Kavitation an der Eintrittskante bis in die Spitze erstrecken und sich von dort aus in dem anschließenden Wirbel fortsetzen. Eine solche Wirbelkavitation wird nun nicht mehr ausschließlich durch die Zirkulation des Wirbels getrieben. In der messtechnischen Bewertung der Kavitation, die in der Regel durch optische Beurteilung erfolgt, kann zwischen Ursachen für die Wirbelkavitation kaum unterschieden werden, so dass auf Grund der komplexen physikalischen Wechselwirkungen ein einziger gültiger Zusammenhang zwischen der Wirbelstärke und dem Kavitationseinsatz nicht hergestellt werden kann. Ist die Wirbelkavitation hingegen die erste Kavitationsart, die in einem Betriebspunkt einsetzt, so kann man davon ausgehen, dass keine Wechselwirkung mit einer anderen Kavitationsart besteht, sondern ausschließlich die Wirbelstärke und die Grenzschichtdicke ausschlaggebend sind.

In dem entwickelten Kavitationsmodell wird die in dem freien Wirbel vorhandene Zirkulation in einen äquvalenten 2D-Wirbel überführt. Das verwendete Wirbelmodell von Hamel-Oseen ist eine spezielle Lösung der Navier-Stokes-Gleichung, das im Wirbelkern von viskosen Effekten dominiert wird, während im Außenbereich die Geschwindigkeits- und Druckverteilung dem Potenzialwirbel entspricht. Der Bereich, in dem die viskosen Effekte dominieren, wird über einen sogenannten viskosen Kerndurchmesser charakterisiert. Dieser Kerndurchmesser wird über einen Proportionalitätsfaktor an die Grenzschichtdicke im Bereich der Blattspitze gekoppelt. Je kleiner der Kerndurchmesser ist, um so geringer fallen die Unterdrücke aus.

Aufgrund der Dominanz viskoser Effekte im Wirbelkern wird die Wirbelkavitation stark von der Reynoldszahl beeinflusst. Daher müssen im Modellmaßstab durchgeführte Versuche mit einem geeigneten Verfahren auf die Großausführung umgerechnet werden. Da in dem entwickelten Verfahren die Bestimmung des Kerndurchmessers auf die semiempirische Ermittlung der Grenzschichtdicke zurückgeht, werden Reynoldszahleinflüsse erfasst. Hierdurch ist der wesentliche Maßstabseffekt in die Berechnung integriert.

Der Kerndurchmesser wächst aufgrund der Viskosität des Fluids mit dem Alter des Wirbels an, so dass der Druck im Kern bei gleicher Wirbelstärke mit dem Alter des Wirbels wieder ansteigt. Der Aufrollvorgang der freien Wirbel im Spitzenwirbel führt dazu, dass sich die Zirkulation in einem Wirbel an der Blattspitze sammelt. Mit dem Aufrollvorgang wächst auch die Stärke des freien Wirbels. Die Kombination aus zunehmender Wirbelstärke und wachsendem Wirbelkern führt dazu, dass das Druckminimum im Wirbel meist ein Stück weit hinter der Blattspitze auftritt und nicht an die Hinterkante des Tragflügels stößt. Es wurden zwei Methoden untersucht, mit deren Hilfe die Stärke des Spitzenwirbels approximiert wird. Die erste Methode beruht auf der

geometrischen Auswertung der freien Wirbel. Ausgehend vom ersten Paneel an der Blattspitze wird schnittweise ein Wirbelzentrum ermittelt. Hierfür werden die Paneele analysiert, die um ein gemeinsames Zentrum gruppiert sind. Aus der Dipolstärke dieser Paneele resultiert die Wirbelstärke des Spitzenwirbels. Da die Bewertung des Aufrollvorgangs ein numerisches Verfahren ist, dessen Zuverlässigkeit stark von der Stabilität der iterativen Verschiebung der freien Wirbel abhängt, wurde eine zweite vereinfachte Methode betrachtet. Hier wird ein fester Bereich an Paneelen im Bereich der Blattspitze gewählt, die zu dem kavitierenden Wirbel beitragen. Die Wahl des Bereichs wurde in mehreren Kalibrierungsrechnungen abgestimmt. Diese zweite Vorgehensweise ist numerisch deutlich robuster, da die Konvergenz der Paneelverschiebung in den freien Wirbel nur noch eine untergeordnete Rolle spielt. Ein Nachteil ist jedoch, dass mit dem zunehmenden Aufrollvorgang kein Wachstum der Wirbelstärke im Ersatzwirbel einhergeht. Das erste Verfahren hingegen bietet die Möglichkeit die zeitliche Entwicklung des freien Wirbels zu berücksichtigen.

Mit Hilfe beider Methoden konnten Eigenschaften des Wirbelkavitationseinsatz mehrerer messtechnisch untersuchter Propeller abgebildet werden. In guter Übereinstimmung mit Messungen kann mit dem entwickelten Verfahren der Fortschrittsgrad mit minimaler Wirbelkavitation prognostiziert werden, dabei wird der Einfluss des Nachstromfeldes auf die Lage des Minimums erfasst. Weniger genau fällt die Prognose der Kavitationszahl, bei der die Bildung der Dampfblase auftritt, aus. Dies ist auch auf die schwierige Interpretation der Messergebnisse zurückzuführen. So ist die äquivalente Wirbelstärke bei einer vollständig entlasteten Blattspitze verschwindend gering, so dass auch die Kavitationszahl gegen null geht. Im Versuch wird in dem Betriebspunkt der entlasteten Spitze meist immer noch ein signifikanter Kavitationseinsatzpunkt ermittelt, so dass davon auszugehen ist, dass im Bereich des Kavitationsminimums eine Wechselwirkung mit einer anderen Kavitationsart besteht. In Messungen können mitunter Sprünge in der Kavitationseinsatzkurve beobachtet werden. Solche nicht stetigen Verläufe können mit einem kontinuierlich arbeitenden Verfahren nicht erfasst werden.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die physikalischen Zusammenhänge, die zur Entstehung von Wirbelkavitation beitragen, derzeit nicht vollständig numerisch und experimentell erfassbar sind. Hinzu kommt eine gegenseitige Beeinflussung von verschiedenen Kavitationsarten. Vor diesem Hintergrund ist es dennoch möglich die Grundzüge der Wirbelkavitationseigenschaften mit dem vereinfachten Kavitationsmodell vorherzusagen. So können Breite und Lage des Bereichs minimaler Wirbelkavitation abgeschätzt werden. Diese Informationen können beispielsweise genutzt werden, um in Optimierungsprozessen die Entlastung der Blattspitze auf den Betriebspunkt abzustimmen oder auch, um einen Propeller mit einem möglichst breiten Bereich minimaler Kavitationsausbreitung zu erzielen. Um hier weitere Fortschritte zu erzielen, sind gezielte messtechnische Untersuchungen erforderlich, mit deren Hilfe der Einfluss lokaler Geometriemodifikationen an der Blattspitze untersucht werden können. Bei solchen Untersuchungen wäre zudem eine weiter standardisierte messtechnische Erfassung des Einsatzpunktes wünschenswert, die nicht von der subjektiven Beobachtung des Versuchduchführenden abhängt.

6.3 Fluid–Struktur–Interaktion

In der vorliegenden Arbeit wurde das elastische Verhalten eines Propellers unter instationärer, inhomogener Zuströmung untersucht. Die hierfür entwickelte und implementierte Methodik basiert auf der impliziten Kopplung des Paneelverfahrens mit einem Finite-Elemente-Verfahren. Mit dieser Vorgehensweise wurde das Ziel verfolgt den Einfluss des elastischen Verformungsverhaltens auf hydrodynamische Eigenschaften eines Propellers zu bewerten.

Für eine gekoppelte Berechnung der Fluid-Strukturwechselwirkung wurde ein Finite-Elemente-Verfahren gewählt, da diese den Stand der Technik bei der Berechnung elastischer Strukturverfor-

mungen bilden. Von Vorteil stellt sich bei der Kopplung heraus, dass ähnliche Diskretisierungsweiten auf Seiten der Strukturanalyse wie auch auf Seiten des Paneelverfahrens verwendet werden können. Dies führt dazu, dass identische Rechennetze auf der Körperoberfläche verwendet werden können, wodurch Interpolationsfehler entfallen und das Verfahren recheneffizient umgesetzt werden kann.

Die Kopplung findet durch mehrmaligen Abgleich der Verformung und der resultierenden Kräfte in Form eines Datenaustauschs zwischen beiden Programmen statt. Hierzu wird zunächst eine hydrodynamische Last des unverfomten Körpers potenzialtheoretisch ermittelt und auf das FE-Modell des Körpers aufgebracht. Die daraus resultiernde Verformung wird anschließend in der Strömungsberechnung berücksichtigt, so dass sich neue Lasten ergeben, die wiederum aufgebracht werden können. Dieser Ablauf findet mehrmals statt, bis sich Konvergenz für die Kräfte als auch für die Verformungen einstellt. In stationären Fällen liegt damit bei erfolgter Konvergenz ein hydroelastisches Gleichgewicht vor. In instationären Fällen muss dieser Abgleich mehrmals für einen Zeitschritt durchgeführt werden. Dabei ist in der Randbedingung nicht nur die neue Lage des Paneels nach einem Iteriationsschritt zu berücksichtigen, sondern auch die Verformungsgeschwindigkeit der Körperoberfläche. Diese geht bei der Strömungsberechnung in die Normalenrandbedingung auf dem Körper ein. Je nach Größe der Verformungeschwindigkeit stellt sich eine Konvergenz innerhalb weniger Iterationsschritte ein. Drei Iterationsschritte haben sich hierbei meist als ausreichend erwiesen.

Zur Anwendung kamen auf Seiten der FE-Analyse zwei Verfahren. Es wurden das komerzielle Verfahren ANSYS-FEM und auch das quelloffene Programm CalculiX eingesetzt. Auch wenn im Letzteren auf Grund der vorliegenden Programmquellen eine tiefergehende Kopplung grundsätzlich möglich wäre, wurde in beiden Fällen ein Austausch auf Dateibasis gewählt.

Vor der Auswertung der Propellereigenschaften wurde eine Verifikation an Hand geeigneter Testfälle durchgeführt. So wurde beispielsweise die Konvergenz innerhalb eines Zeitschritts und auch das Erreichen periodischer Ergebnisse bei einer periodischen Anregung untersucht. Geprüft wurde das Verfahren an einem oszillierenden Tragflügel in paralleler Anströmung. Hier wurde beispielsweise ein Interaktionseffekt erzeugt, der ausschließlich bei der impliziten Kopplung des Verfahrens auftritt.

Zur Bewertung der hydroelastischen Eigenschaften eines Propellers wurden zunächst in stationären Untersuchungen der Einfluss der Drehgeschwindigkeit auf die Verformung untersucht. Durch das elastische Verhalten entstehen Verformungen, die kleiner ausfallen als nach einer linearisierten Annahme zu erwarten ist. Ursächlich hierfür sind neben einer geänderten Druckverteilung in Folge der Verformung, die in dem speziellen Fall zu einer Entlastung der Struktur führt, auch Reynoldszahleinflüsse, die bei einer höheren Drehzahl auch zu geringeren Drehmomenten und damit zu einer weiteren Entlastung des Körpers führen. Entsprechend haben sowohl das elastische Verhalten als auch die Reynoldszahl Einfluss auf die entstehenden Schub- und Drehmomentbeiwerte.

In weitern Untersuchungen wird ein Vergleich zwischen einer impliziten und einer expliziten Kopplung erarbeitet. Im Gegensatz zu der bidirektionalen impliziten Kopplung besteht ebenso die Möglichkeit zunächst Strömungskräfte mit Hilfe eines Starrköpers zu berechnen und diese dann nachträglich auf das FE-Modell des Körpers explizit aufzubringen. Eine solche Kopplung wird wegen der fehlenden Rückkopplung als unidirektionale Kopplung bezeichnet. Bei geringen Propellerbelastungen stellen sich fast identische Schwingungsformen am Propeller ein. Bei zunehmender Belastung kommen in der unidirektionalen Kopplung höherfrequente Schwingungen zu dem eigentlichen Verformungsvorgang hinzu. Da dies lediglich in der unidirektionalen Kopplung der Fall ist, ist davon auszugehen, dass durch die Strömung dämpfende Effekte ausgeübt werden, bzw. die Eigenfreuqenzen des Propellers durch die hinzukommende hydrodynamische Masse verändert werden.

In einer abschließenden Untersuchung wird der Einfluss einzelner Frequenzen der inhomogen Anregung auf die Strukturantwort untersucht. Hierzu wird das Nachstromfeld in frequenzabhängige normierte Kennwerte zerlegt und über eine Fourieanalyse mit den Schub- und Verformungsbeiwerten verglichen. Die zuvor mit zunehmender Drehzahl beobachtete Selbstentlastung in stationären Fällen ist nicht auf den Frequenzgang übertragbar. In den durchgeführten Rechnungen steigen die normierte Verformungsamplitude und die normierte Schubamplitude in den bidirektionalen Kopplungen an, während die Beiwerte in der unidirektionalen Kopplung drehzahlunabhängig bleiben.

In den Rechnungen konnte gezeigt werden, dass eine implizite Kopplung notwendig ist, um den Schwingungsvorgang eines Propellers in inhomogener Strömung abbilden zu können. Auch wenn die Verformungen verhältnismäßig klein sind, ist dennoch die Anregung von Eigenfrequenzen zu vermeiden. Wie an einigen Beispielen gezeigt, können hydroelastische Anregungen einer Struktur mit dem hier entwickelten Verfahren erreicht werden. Im Umkehrschluss kann geprüft werden, ob und wie bestimmte Eigenfrequnzen eines Körpers unter Einfluss der Strömungumgebung verändert werden.

Nomenklatur

7.1 Nomenklatur

7.1.1 Operatoren, Potenzialfunktionen und Konventionen zur Beschreibung von Variablen

∇	Nabla-Operator	$(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})^T$
Δ	Laplace-Operator	$\nabla\nabla$
G_1	von einer Punktquelle erzeugte Potenzialfunktion	$[1/m]$
G_2	von einem Dipol erzeugte Potenzialfunktion	$[1/m^2]$
$\sigma g_{1,i,j}$	Potenzial, das von einer konstanten Quellverteilung der Stärke σ auf dem Paneels i am Ort $\vec{x}_j$ verursacht wird	$[m^2/s]$
$\sigma \vec{g}_{1,i,j}$	induzierte Geschwindigkeit, die von der Quellverteilung der Stärke σ auf dem Paneel i am Ort $\vec{x}_j$ verursacht wird	$[m/s]$
$\mu g_{2,i,j}$	Potenzial, das von einer konstanten Dipolverteilung der Stärke μ auf dem Paneel i am Ort $\vec{x}_j$ verursacht wird	$[m^2/s]$
$\mu \vec{g}_{2,i,j}$	induzierte Geschwindigkeit, die von der Dipolverteilung der Stärke μ auf dem Paneel i am Ort $\vec{x}_j$ verursacht wird	$[m/s]$
x	skalare Größe	
$\vec{x}$	Richtungsvektor im $\mathbb{R}^3$	$[(m,m,m)^T]$
$\mathbf{x}$	Vektor beliebiger Größe	
$\mathbf{X}$	Matrix	
x_x, x_y, x_z	Größe x in einem kartesischen Koordinatensystem mit ihren Ableitungen in x-, y- und z-Richtung	
x_r, x_θ	Größe x in einem Polarkoordinatensystem mit ihren Ableitungen in radialer und Winkel-Richtung	

7.1.2 Stoffgrößen

$\vec{g}$	Erdbeschleunigung	$[m/s^2]$
p_L	Luftdruck	$[N/m^2]$
p_v	Dampfdruck	$[N/m^2]$
ρ	Dichte	$[kg/m^3]$
ν	kinematische Viskosität	$[m^2/s]$

7.1.3 Geometrische und strömungstechnische Größen

p	Druck	$[N/m^2$
p_{ref}	Referenzdruck	$[N/m^2]$

$\vec{F}$	Kraftvektor	$[(N,N,N)^T]$
$\vec{F}_p$	Druckanteil des Kraftvektors	$[(N,N,N)^T]$
$\vec{F}_f$	Reibungsanteil des Kraftvektors	$[(N,N,N)^T]$
H	Tauchtiefe eines Körpers	$[m]$
r	Abstand zwischen zwei Punkten	$[m]$
Re	Reynoldszahl	$[-]$
S	Fläche, die das Strömungsgebiet Ω berandet	$[m^2]$
$\vec{n}$	Normalenvektor	$[(m,m,m)^T]$
$\vec{v}$	Geschwindigkeit	$[(m/s,m/s,m/s)^T]$
$\vec{v}_N$	Geschwindigkeit im Nachstromfeld	$[(m/s,m/s,m/s)^T]$
$\vec{V}_{def}$	Verformungsgeschwindigkeit eines Körpers	$[(m/s,m/s,m/s)^T]$
$\vec{V}_K$	lokale Geschwindigkeit eines Körpers	$[(m/s,m/s,m/s)^T]$
$\vec{V}_{Parallel}$	translatorische Geschwindigkeit eines Körpers	$[(m/s,m/s,m/s)^T]$
$\vec{x}_0$,$\vec{x}_j$	Paneelmittelpunkt, Mittelpunkt des Paneels j	$[(m,m,m)^T]$
$\vec{x}_{inner}$	Punkt im inneren eines Körpers	$[(m,m,m)^T]$
Z	Flügelzahl eines Propellers	$[-]$
ϵ	infinitesimaler Radius	$[m]$
$\vec{\omega}$	Drehgeschwindigkeit eines Körpers	$[(rad/s,rad/s,rad/s)^T]$
μ	Dipolstärke	$[m^4/s]$
σ	Quellstärke	$[m^3/s]$
Ω	Strömungsgebiet	$[m^3]$
Φ	Strömungspotenzial	$[m^2/s]$

7.1.4 Zähler und Indizes

k	Kantennummer eines Paneels, Nummer des Propellerflügels oder Index des Wirbelstreifens
K	bezogen auf den Körper
N	Zähler für die Paneelanzahl
W	bezogen auf die freien Wirbel
upper	bezogen auf die Saugseite des Profils
lower	bezogen auf die Druckseite des Profils
i	Nummer eines Paneels
j	Nummer eines Paneels, gemeint ist in der Regel der Kollokationspunkt

Abbildungsverzeichnis

2.1 Größen und Randbedingungen im Strömungsgebiet 21
2.2 Trennung der Singularitäten vom Strömungsgebiet Ω 21
2.3 Paneele und deren Dipolstärke an der Hinterkante zur Bestimmung der Kutta-Bedingung 25
2.4 Potenzial- und Geschwindigkeitsverteilung um ein Wirbelpaar 30
2.5 Wirkung zweier unterschiedlich großer Paneele auf den gegenüberliegenden Kollokationspunkt an der Hinterkante 31
2.6 Indizierung der Paneele an der Hinterkante zur Substitution der Kutta-Randbedingung 33
2.7 Verschiebung der Paneele in den freien Wirbeln 34
2.8 Verschiebung der Paneele in den freien Wirbeln 35
2.9 Einfluss der nicht-linearen Kutta-Randbedingung auf die Druckverteilung 39
2.10 Einfluss der Diskretisierung auf den Druckverlauf bei Verwendung der nichtlinearen Kutta-Bedingung 40
2.11 Ausrichtung des Paneelkoordinatensystems 41
2.12 Biquadratische Interpolation der Dipolstärke μ 43
2.13 Beschreibung des nicht orthogonalen Paneelkoordinatensystems 44
2.14 Vergleich der Schubkräfte am Einzelflügel bei vollständig paneeliertem Propeller und bei Einsatz der Key-Blade-Technik 50
2.15 Nominelles, effektives und Gesamtnachstromfeld im Vergleich 54
2.16 Amplituden im nominellen, effektiven und Gesamtnachstromfeld 54

3.1 Konvergenz der Freifahrteigenschaften bei Erhöhung der radialen Paneelverteilung 56
3.2 Konvergenz der Freifahrteigenschaften bei Erhöhung der peripheren Paneelverteilung 57
3.3 Konvergenz der Freifahrteigenschaften bei Verlängerung der freien Wirbel 58
3.4 Konvergenz der Freifahrteigenschaften bei Erhöhung der Auflösung der freien Wirbel 58
3.5 Vergleich der direkten und indirekten Methode bei der Berechnung von Freifahrtdiagrammen 59
3.6 Nachrechnung der Wageningen B-Serie mit prognostizierter Wirbelgeometrie . . . 61
3.7 Nachrechnung der Wageningen B-Serie mit iterierter Wirbelgeometrie 62
3.8 Druckverteilung auf der beschleunigten Kugel. links: Beschleunigung in Richtung x-Richtung. rechts: Beschleunigung in y-Richtung 64
3.9 Abhängigkeit des Auftriebsbeiwerts vom Anstellwinkel 65
3.10 Abhängigkeit des Auftriebs-, Widerstands und Drehmomentbeiwerts vom Anstellwinkel 66
3.11 Berechnete und gemessene Freifahrteigenschaften eines Propellers in freier Anströmung und im Nachstrom 67
3.12 Kraftverlauf während einer Umdrehung im inhomogenen Nachstromfeld 68

4.1 Skizze zur Ermittlung des Ersatzwirbels anhand der Bewertung des Aufrollvorgangs 73
4.2 Aufrollvorgang hinter einem Propeller mit stark entlasteter Spitze 73

4.3 Berechnete Wirbelstärken (links: Bewertung über Aufrollvorgang am ersten Nachlaufpaneel, rechts: Bewertung an 8% der Blattspitze) 74
4.4 Messtechnisch ermittelter Zusammenhang zwischen dem Schubbeiwert und dem Verhältnis Wirbeldurchmesser zu Wirbelstärke 76
4.5 Radiale Zirkulationsverteilung für Propeller B und Propeller C 77
4.6 Berechneter Kavitationseinsatz des Spitzenwirbels im Vergleich zu Messergebnissen 78
4.7 Kavitationseinsatz an einem elliptischen Profil. Der Spalt gibt den Abstand der Blattspitze zu einer Wand an 81
4.8 Axiale Komponente des verwendeten Nachstromfeldes für die Ermittlung des Einsatzpunktes der Spitzenkavitation von Propeller Variante A 82
4.9 Berechneter Kavitationseinsatz für Propeller A 82
4.10 Kavitationszahl im Spitzenwirbel für verschiedene Winkelstellungen des Key-Blades ($J = 0.5$) 83
4.11 Vergleich der berechneten Wirbelkavitationseigenschaften von Propeller A und B mit den gemessenen Kavitationseinsatzkurven des Spitzenwirbels 84

5.1 Programmablaufplan der Fluid-Struktur-Kopplung 90
5.2 Skizze des um die x-Achse oszillierenden Tragflügels in paralleler Anströmung . . 91
5.3 Kräfte am flexiblen, oszillierenden Flügel im Zeitbereich 91
5.4 Kraftamplituden am felxiblen, oszillierenden Flügel im Frequenzbereich 92
5.5 Darstellung der ersten vier Eigenmoden der untersuchten Flügels (ohne umgebendes Fluid) 93
5.6 Amplituden im effektiven Nachstromfeld auf dem Radius $r/R = 0.7$ 94
5.7 Relative Änderung des Schubes gegenüber der vorhergehenden Kopplungsiteration 96
5.8 Relative Änderung der maximalen Verformung gegenüber der vorhergehenden Kopplungsiteration 96
5.9 Normierter Schubverlauf als Funktion vom Drehwinkel, während der 1. 2. und 3. Umdrehung 97
5.10 Normierte maximale Verformung als Funktion vom Drehwinkel, während der 1. 2. und 3. Umdrehung 97
5.11 Relative Änderung des Schubes gegenüber der vorhergehenden Propellerumdrehung 98
5.12 Relative Änderung der maximalen Verformung am Flügel gegenüber der vorhergehenden Propellerumdrehung 98
5.13 Vergleich unidirektionale und implizite Kopplung bei unterschiedlichen Propellerdrehzahlen 99
5.14 Verformung der Blattspitze bei wachsender Drehzahl 99
5.15 Verschiebung der Ein- und Austrittskante am relativen Radius 0.7 und 1.0 100
5.16 Änderung von Schub- und Momentenbeiwert bei Drehzahländerung 100
5.17 Amplitude des normierten Schubs 101
5.18 Amplitude der normierten Knotenverschiebung 101
5.19 Amplitude des Profilanströmwinkels bei $r/R = 0.7$ im effektiven Nachstromfeld . 102
5.20 Vergrößerungsfunktion für Schub/hyd. Anstellwinkel (links) und normierte Verformung/hyd. Anstellwinkel (rechts) 103
5.21 Phasenverschiebung zwischen Schub und hyd. Anstellwinkel (links) sowie normierter Verformung und hyd. Anstellwinkel (rechts) 103

Literaturverzeichnis

Achkinadze, A. S. und Krasilnikov, V. I. (2001). 'A New Velocity Based BEM for Analysis of Non-cavitating and Cavitating Propellers and Foils'. In 4th International Symposium on Cavitation

Achkinadze, A. S., Krasilnikov, V. I. und Stepanov, I. E. (2003). 'Numerical Analysis of Podded and Steering System Using a Velocity Based Source Boundary Element Method with a Modified Trailing Edge'. In Proceedings of the Propellers/Shafting '2003 Symposium

Arndt, R. E. A. (2002). 'Cavitation in vortical flows'. Annu. Rev. Fluid Mech, 34:143–175

Baltazar, J., de Campos, J. F. und Bosschers, J. (2011). 'Open-Water Thrust and Torque Predictions of a Ducted Propeller System With a Panel Method'. In International Symposium on Marine Propulsors 2011

Boulon, O., Callenaere, J.-P. F. und J.-M., M. (1999). 'An experimental insight into the effect of confinement on tip vortex cavitation of an elliptical hydrofoil'. Journal of Fluid Mechanics, 390:1–23

Dhondt, G. (2011). 'CalculiX v2.4'. http://www.dhondt.de/

Franc, J.-P. und Michel, J.-M. (2004). Fundamentals of Cavitation. Kluwer Academic Publishers

Gao, Z. und Zou, Z. (2008). 'A Three-Dimensional Desingularized High Order Panel Method Based On NURBS'. Journal of Hydrodynamics, 20:137–146

Gothenburg 2000 – A workshop on CFD in Ship Hydrodynamics (2000). http://old.iihr.uiowa.edu/gothenburg2000/

Greco, L., Leone, S., Testa, C., Salvatore, F. und Mauro, S. (2011). 'Theoretical and Numerical Hydromechanics Analysis of Self-Pitching Propellers'. In International Symposium on Marine Propulsors 2011

Greve, M., Wöckner-Kluwe, K., Abdel-Maksoud, M. und Rung, T. (2012). 'Viscous-Inviscid Coupling Methods for Advanced Marine Propeller Applications'. International Journal of Rotating Machinery, 2012

Hepperle, M. (2006). 'JavaFoil – Analysis of Airfoils'. http://www.mh-aerotools.de/airfoils/javafoil.htm

Hess, J. L. (1972). 'Calculation of potential flow about arbitrary three-dimensional lifting bodies'. Douglas Aircraft Company

Hess, J. L. und Smith, A. M. O. (1962). 'Calculation of non-lifting potential flow about arbitrary three-dimensional bodies'. Douglas Aircraft Co., Inc.

Hoerner, S. F. (1965). Fluid-Dynamic Drag. Hoerner Fluid Dynamics, Bricktown N.J.

Hsu, C. C. (1989). 'Studies of Scaling of Tip Vortex Cavitation Inception on Marine Lifting Surfaces'. In International Symposium on Cavitation Inception

Isay, W.-H. (1970). Moderne Probleme der Propellertheorie. Springer

Isay, W.-H. (1991). 'Eine Näherungslöung für das Geschwindigkeits- und Druckfeld eines Flügelspitzenwirbels in turbulenter Strömung'. ehem. Institut für Schiffbau

Johnson, F. T. (1980). 'A General Panel Method for the Analysis and Design of Arbitrary Configurations in Incompressible Flows'. NASA CR 3079

Katz, J. (2001). Low speed aerodynamics. Cambridge University Press

Kerwin, J. E. und Lee, C.-S. (1978). 'Prediction of steady and unsteady marine propeller performance by numerical lifting-surface theory'. In SNAME Transactions

Kerwin, J. E., Kinnas, S. A. und Lee, J.-T. (1987). 'A Surface Panel Method for the Hydrodynamic Analysis of Ducted Propellers'. In SNAME Transactions

Kimball, R. und Epps, B. (2010). 'OpenProp v2.4 propeller/turbine design code'. http://openprop.mit.edu

Kinnas, S. A. und Coney, W. B. (1992). 'The Generalized Image Model – An Application to the Design of Ducted Propellers'. Journal of Ship Research, 36

Kinnas, S. A. und Hsin, C. Y. (1992). 'Boundary Element Method for the Analysis of the Unsteady Flow Around Extreme Propeller Geometries'. AIAA Journal, 30

Kinnas, S. A., Hsin, C. Y. und Keenan, D. (1991). 'A potential based panel method for the unsteady flow around open and ducted propellers'. In 18^th Symposium on Naval Hydrodynamics

Koronowicz, T. und Szantyr, J. A. (1995). 'A New Theoretical Model of Formation of Vortex Cavitation'. In PROPCAV '95

Lan, C. E. (1974). 'A Quasi-Vortex-Lattice Method in Thin Wing Theory'

Latorre, R., Ligneul, P. und Bovis, A. (1984). 'Analysis of Tip Vortex Cavitation Inception from Elliptical Planform Hydrofoils with Roll-Up and Acoustic Considerations'. In International Symposium on Cavitation Inception

Lee, H. und Kinnas, S. A. (2001). 'Modeling of unsteady blade sheet and developed tip vortex cavitation'. Fourth Inernational Symposium on Cavitation

Lee, H. und Kinnas, S. A. (2005). 'Fully Unsteady Wake Alignment for Propellers in Non-axisymmetric Flows'. Journal of Ship Research, 49

Liu, P., Bose, N. und Colbourne, B. (2002). 'A broyden numerical Kutta condition for an unsteady panel method'. International Shipbuilding Progress

Mc Cormick, B. (1962). 'On cavitation produced by a vortex trailing from a lifting surface'. Journal of Basic Engineering, 84:369-379

Morino, L. und Kuo, C.-C. (1974). 'Subsonic Potential Aerodynamics for Complex Configurations: A General Theory'. AIAA Journal

Mueller, A. C. und Kinnas, S. A. (1999). 'Propeller Sheet Cavitation Prediction Using a Panel Method'. Journal of Fluids Engineering, 121

Müller, G. und Groth, C. (2007). FEM für Praktiker – Band 1: Grundlagen. expert Verlag

Oosterveld, M. und Oossanen, P. (1975). 'Further Computer-Analysis Data of the Wageningen B-Screw Series'. Publication No. 479 of the N.S.M.B

Salvatore, F., Testa, C., Ianniello, S. und Pereira, F. (2006). 'Theoretical Modelling of Unsteady Cavitation and Induced Noise'. In Sixth International Symposium on Cavitation

Steden, M., Mueller, S., Neugebauer, J. und El-Haddad, M., M.F.and Abdel Maksoud (2006). 'Comparing a Propeller Model with a Rotating Propeller in a CFD-Simulation of the Viscous Flow around a Ship'. In 9^th Numerical Towing Tank Symposium

Stelzmann, U., Groth, C. und Müller, G. (2008). FEM für Praktiker – Band 2 : Strukturdynamik. expert Verlag

Streckwall, H. (1997). 'Description of a Vortex Lattice Method for Propellers in Steady and Non Steady Flow'. Hamburgische Schiffbau-Versuchsanstalt GmbH. Nr. 18/97

Szantyr, J. A. (2006). 'A computational model of the propeller cavitation tip vortex interating with the rudder'. Sixth Inernational Symposium on Cavitation

Truckenbrodt, E. (1999). Fluidmechanik – Band 2: Elementare Strömungsvorgänge dichteveränderlicher Fluide sowie Potential- und Grenzschichtströmungen. Springer Verlag Berlin Heidelberg

Tuncer und Cebeci (2005). Computational Fluid Dynamics for Engineers. Springer

Young, Y. L. und Kinnas, S. A. (2003a). 'Analysis of Supercavitating and Surface-Piercing Propeller Flows via BEM'. Journal of Computational Mechanics, 32

Young, Y. L. und Kinnas, S. A. (2003b). 'Fluid and Structural Modeling of Cavitating Propeller Flows'. In Fifth International Symposium on Cavitation

Young, Y. L. und Kinnas, S. A. (2003c). 'Numerical Modeling of Supercavitating Propeller Flows'. Journal of Ship Research, 47

Yuanpei, Y. (1984). 'Some Aspects of Hub Vortex Cavitation'. In International Symposium on Cavitation Inception