

246 | September 1969

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

Jaroslav Tichý

Die Hydrodynamik des Antriebssystems „Propeller-Düse-Leitapparat“

TUHH

Technische Universität Hamburg-Harburg

Die Hydrodynamik des Antriebssystems „Propeller-Düse-Leitapparat“

J. Tichý

Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1969

© Technische Universität Hamburg-Harburg

Schriftenreihe Schiffbau

Schwarzenbergstraße 95c

D-21073 Hamburg

<http://www.tuhh.de/vss>

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr. 246

DIE HYDRODYNAMIK DES ANTRIEBSSYSTEMS

"PROPELLER - DÜSE - LEITAPPARAT"

von

Jaroslav Tichý

Hamburg, September 1969

INSTITUT FÜR SCHIFFBAU DER UNIVERSITÄT HAMBURG

Bericht Nr. 246

DIE HYDRODYNAMIK DES ANTRIEBSSYSTEMS

"PROPELLER - DÜSE - LEITAPPARAT"

von

Dr.-Ing. Jaroslav Tichý

Dozent an der T.H. Bratislava, Tschechoslovakei

Stipendiat der Alexander v.Humboldt-Stiftung

an der Universität Hamburg

Hamburg, September 1969

I n h a l t:

	Seite
I. Einleitung	1
II. Beschreibung des Antriebssystems. Voraussetzungen und Vereinfachungen bei der Lösung	4
III. Linearisierte Theorie des Rinflügels nach Morgan in dem System Propeller- Düse-Leitrad	9
IV. Die Induktionsfaktoren nach Lerbs und ihre Anwendung auf den in der Düse arbeitenden Propeller	28
V. Entwurf des Düsenpropellers	
V.-1. Anwendung des Grim'schen Verfahrens zur Berücksichtigung der Festigkeit und Kavitation an den einzelnen Flügelpro- filen des Düsenpropellers	38
V.-1-A Festigkeitsbeanspruchung des Propeller- flügels in der Düse	39
V.-1-B Vermeidung der Kavitationsgefahr	44
V.-1-C Bestimmung der Profilparameter und der Gleitzahl	45
V.-2. Schub- und Leistungsbeiwerte des Düsenpropellers	47
V.-3. Wirkungsgrad des Düsenpropellers	50
VI. Kraftwirkungen der Düse bei Vorhandensein eines Propellers	

	Seite	
VI.-1	Idealer Schub- und Schubbelastungsgrad der Düse	51
VI.-2	Die von den freien Wirbeln des Propellers bzw. Leitrades auf dem Düsenzylinder indu- zierten Geschwindigkeiten	52
VI.-2-A	Die instationäre Auffassung	53
VI.-2-B	Die stationäre Auffassung. Die Berechnung der in der Umfangsrichtung der Düse kon- stanten Durchschnittswerte	64
VI.-3	Widerstand der Düse	76
VI.-3-A	Düsenwiderstandsbeiwert bei schwacher Belastung	80
VI.-3-B	Düsenwiderstandsbeiwert bei optimaler Belastung	80
VI.-3-C	Optimaler Zustand	84
VI.-3-D	Düsenwiderstandsbeiwerte bei anderen Belastungen	86
VI.-4	Der effektive Schubbelastungsgrad der Düse	87
VI.-5	Gesamtwirkungsgrad des Systems Propeller + Düse	87
VII.	Entwurf des festen, hinter dem Propeller in der Düse stehenden Leitapparates	
VII.-1	Hydrodynamik des festen Leitrades	90
VII.-2	Anwendung der Lerbs'schen Induktionsfaktoren- methode des freien Propellers auf den Entwurf des festen Leitapparates in der Düse	99

	Seite	
VII.-3	Entwurf des Profils der Leitschaufel	102
VII.-4	Vortriebswirkung des festen Leitrades	105
VII.-5	Gesamtwirkungsgrad des Systems Propeller-Düse-Leitrad	106
VIII.	Wechselwirkung zwischen dem Propeller und des Düse. Ein Beispiel der Bestimmung der Konstruktionsparameter des Propellers und des Leitrades	109
IX.	Einige Rechenergebnisse für das Antriebssystem Düse-Propeller-Leitrad	115
X.	Die Druckverteilung an der Düse	124
	Zusammenfassung	132
	Bezeichnungen	134
	Schrifttum	139
	Anhang I - IV	141

I. Einleitung

=====

Die Idee des von Ing. Kort vorgeschlagenen Antriebssystems mit dem Propeller, der ummantelt in einem Ringflügel - genannt Kortdüse - arbeitet, ist fast 40 Jahre alt. Die praktische Anwendung hat aber erst in den letzten 10 Jahren einen größeren Umfang erreicht. Mit Vorteil benutzt man diese Anordnung besonders zur Verbesserung der Vortriebswirkung stark belasteter Propeller, d.h. im Schiffbau für Schlepper und Binnenschiffe, im Flugzeugbau für Kolopteren, Luftkissenboote und senkrecht startende Flugzeuge.

Noch viel früher wurde die Möglichkeit der Propulsionswirkungsgradverbesserung durch die Benutzung eines hinter der Schraube angeordneten Leitapparates bekannt. Jedoch im Gegensatz zur erfolgreichen Anwendung der Düse kann man sagen, daß heutzutage der feste Leitapparat nicht mehr benutzt wird; einerseits vielleicht weil die Verbesserungen des Propulsionsgütegrades nicht so hoch sind, wie sie ursprünglich geschätzt wurden, andererseits wahrscheinlich auch aus einigen konstruktiven Gründen.

Für die erfolgreiche Anwendung solcher Propulsionsmittel zur Verbesserung der Antriebseigenschaften spielt aber auch der richtige Entwurf eine wesentliche Rolle, der aber von dem Grad der wissenschaftlichen Kenntnisse abhängig ist. Durch unvollkommene oder verkehrte Voraussetzungen beim Entwurf können die Propulsionseigenschaften des Antriebsorganes noch verschlechtert werden. Vor Entwicklung der mehrdimensionalen Theorie waren manchmal die praktischen Ergebnisse des gut entworfenen Antriebssystems "Propeller + Düse" besser als die theoretischen Voraussagen erwarten liessen. Im Falle des Leitapparates war es aber öfter umgekehrt.

Dank der Entwicklung der elektronischen Rechenanlagen ist es heutzutage möglich, auch die komplizierten Ausdrücke der dreidimensionalen Theorien der Ringwirbel der Düse sowie des Wirbelsystems des Propellers zu berechnen. Dadurch ist man in der Lage, Probleme zu lösen, die bei kombinierten Antriebssystemen, wie z.B. Düse-Propeller-festes Leitrad oder Düse mit zwei gegenläufigen Propellern entstehen.

Bei der bisherigen dreidimensionalen Theorie des Propulsionsystems "Propeller + Düse" [1] wurde der Drall des Düsenpropellers vernachlässigt, also praktisch vorausgesetzt, daß in der Düse eine solche Einrichtung vorhanden ist, die den Propellerdrall verhindert (festes Leitrad oder gegenläufiger Propeller). Man kann dann den Propeller als Senkenscheibe betrachten. Wie aber eine solche drallverhindernde Einrichtung aussehen soll oder wie man sie entwerfen kann, wurde nicht gesagt. Dickmann [2] hat eine theoretische Studie über die Grenzen der Anwendbarkeit von Leitapparaten gemacht, aus welcher folgt, daß man bei stark belasteten hydraulischen Maschinen das Leitrad vorteilhaft benutzen kann, weil hier die durch den Leitapparat verursachten zusätzlichen Verluste kleiner sein können als der durch die Drallverhinderung bewirkte Gewinn. Die in der Düse arbeitenden Propeller sind meistens stark belastete Propeller, weil bekanntlich die Düse genügend große Vortriebswirkung nur bei schwer belasteten und langsam fahrenden Schleppern bzw. bei beschränktem Schraubendurchmesser (D) ergibt (d.h., S groß, v klein und D klein). Diese Fälle sind durch einen großen Schubbelastungsgrad c_s des Antriebsorgans gekennzeichnet.

$$c_s = \frac{S}{\frac{\rho}{2} v^2 \cdot \frac{\pi}{4} D^2}$$

Man kann also einige Vorteile des festen Leitapparates gerade bei dem System Propeller + Düse erwarten.

Der zweite Grund der möglichen erfolgreichen Anwendung des Leitrades hinter dem Propeller in der Düse ist die konstruktive Möglichkeit, den Leitapparat fest in der Düse einzubauen und ihn gleichzeitig als Propellerwellenlager zu benutzen. Auch die Anordnung von zwei hintereinander liegenden gegenläufigen Propellern in der Düse bietet einige Vorteile, weil im Vergleich zu den Verhältnissen ohne Düse hier keine größeren axialen Geschwindigkeitsänderungen vorhanden sind und weil der Strom in der Düse annähernd homogen ist.

II. Beschreibung des Antriebssystems.

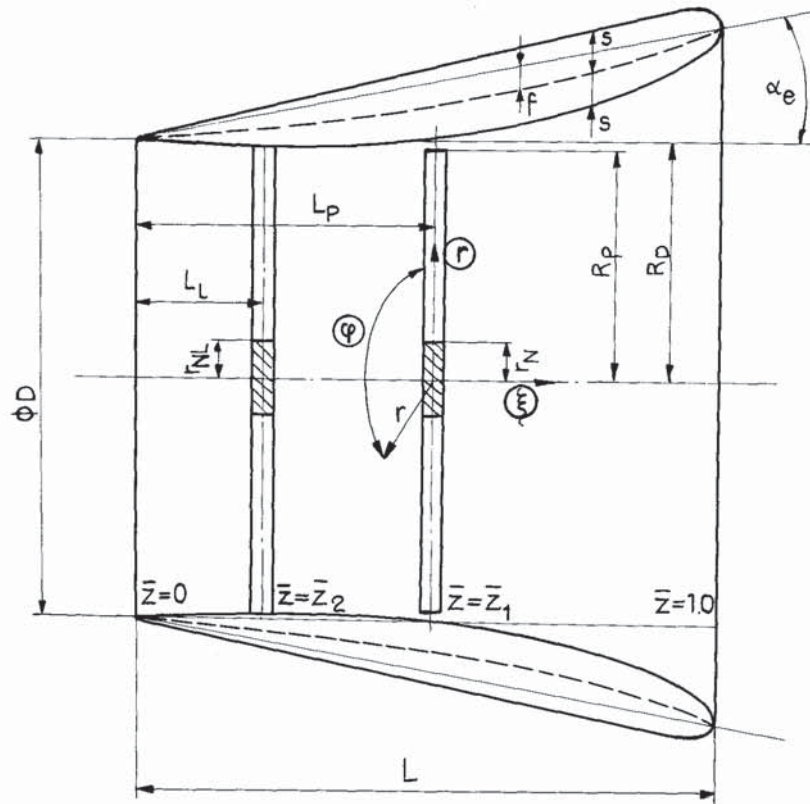
=====

Voraussetzungen und Vereinfachungen bei der Lösung.

=====

Das hier betrachtete Propulsionssystem "Düse-Propeller-Leitrad" besteht im Grunde aus drei Gliedern mit gegenseitiger Wechselwirkung. Die Düse ändert die Geschwindigkeits- und Kraftverhältnisse des Propellers und Leitrades, aber die Strömungsverhältnisse an der Düse sind hauptsächlich von den Arbeitsbedingungen des Antriebsorgans abhängig. Das bedeutet, daß die Endwerte der Wirkungen der Düse, des Propellers sowie des Leitrades nur nach mehreren Iterationsschritten unter Berücksichtigung der gegenseitigen Beeinflussung festzustellen sind. Als Leitrad kann entweder ein fester in der Düse eingebauter Leitapparat oder ein zweiter gegenläufiger Propeller angenommen werden.

Im Gegensatz zu Dickmann-Weissinger's Theorie des Systems "Propeller + Düse" [1] oder zu der Arbeit von Morgan [17] wurde hier die sogenannte zweite, d.h. die direkte Aufgabe gelöst, bei der die Form der Düse und die Konstruktionsdaten des Propellers bzw. Leitrades am Anfang stehen und die Wirkungen berechnet werden. (Bei der ersten, d.h. der inversen Hauptaufgabe ist es umgekehrt, zuerst muß die Druckverteilung, bzw. Zirkulationsbelegung vorgegeben sein.) Hier wird also die Düse gegebener Form betrachtet, die durch den Konstruktionsparameter $h = L/D$ (Bild 1), Öffnungswinkel α_e und durch $N + 1$ Werte der Dicke s/L sowie der Krümmung f/L des Düsenprofils gekennzeichnet ist.



$$\begin{aligned}
 h &= \frac{L}{D} \\
 x &= \frac{r}{R_p} \\
 x_N &= \frac{r_N}{R_p} \\
 z &= \xi / L \\
 \bar{z}_1 &= L_1 / L \\
 \bar{z} &= z + \bar{z}_1 \\
 \bar{z}_2 &= L_2 / L
 \end{aligned}$$

Bild 1

Diese Werte des Düsenprofils müssen an den Stellen z_i gegeben werden, wobei

$$z_i = 0,5 \left[1 + \cos \left(i \frac{\pi}{N} \right) \right]$$

wobei

$$i = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Nach der Darstellung des Profils der Düse sind hier die Krümmungswerte f negativ und die Werte s nur die Hälfte der Profildicke.

Der Propeller ist durch die Flügelzahl z_p , den Nabenradius x_N und durch die Verhältnisse β und β_i gegeben. Diese können

in die Rechnung durch die Parameter λ und λ_i oder J und BG bzw. J und A_1 eingeführt werden. Dabei gelten folgende Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= x \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{v}{\pi D n} \\ J &= \pi \cdot \lambda = \pi x \operatorname{tg} \beta = \frac{v}{n D} \end{aligned} \right\} (1)$$
$$\left. \begin{aligned} \lambda_i &= BG = x \cdot \operatorname{tg} \beta \\ \lambda_i &= \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{J}{\pi} + A_1 \right) \end{aligned} \right\} (2)$$

wobei $A_1 = \operatorname{arctg} \lambda_i - \operatorname{arctg} \lambda$
bzw. $A_1 = \operatorname{arctg} BG - \operatorname{arctg} \frac{J}{\pi}$

Die Abstände der Propeller- und Leitradebene sind von der Austrittebene der Düse gemessen und dimensionslos ausgedrückt in der Form

$$\bar{z}_1 = L_P / L \qquad \bar{z}_2 = L_L / L$$

Der Leitapparat ist durch die Flügelzahl z_L , den Nabenradius x_{NL} (bzw. der zweite Propeller durch den Fortschrittsgrad J_L) sowie durch eine geeignete Bedingung zur Beseitigung des Dralles hinter dem ersten Propeller gegeben. Für die Zirkulationsverteilung am Flügel des Propellers bzw. des Leitrades wird die Betz'sche Bedingung des minimalen Energieverlustes benutzt.

Für die Lösung dieses Problems wurden die Arbeiten von Morgan [3], von Lerbs [4] und von Grim [5] zugrunde gelegt. Das bedeutet also praktisch die Anwendung:

- 1) der Kenntnisse der dreidimensionalen Theorie des Ringflügels im Singularitätenverfahren nach Morgan,
- 2) der Traglinientheorie des Propellers nach der von Lerbs ausgearbeiteten Methode der Induktionsfaktoren,
- 3) der neuesten Methoden und Auffassungen der Wirkung von Leitapparaten hinter dem Propeller nach Grim.

Bei Morgan wird die Düse durch einen Düsenzylinder mit konstantem Durchmesser D ersetzt, auf dem die Quell-Senken-Belegung $q(\bar{z})$ - der Profildicke entsprechend - sowie die von der Anströmung der Düse abhängige Zirkulationsverteilung $\gamma(\bar{z})$ der Ringwirbel wirken.

Bei Lerbs wird der Propeller mit der Flügelzahl z_p durch z_p gebundene Wirbellinien und durch schraubenförmige halbunendliche freie Wirbel ersetzt. Dabei nimmt man für die halbunendlichen Zylinder der freien Wirbel in der axialen Richtung konstante Durchmesser an, sowie an einzelnen Radien konstante Steigung, also praktisch vernachlässigt man die Kontraktion und die Beschleunigung des Stroms.

Diese vereinfachten hydrodynamischen Modelle vom Propeller und von der Düse werden auch hier benutzt. Setzt man weiter voraus, daß die Düse koaxial mit dem Propeller und rotations-symmetrisch ist und daß die Werte für die Dicke, Krümmung und den Öffnungswinkel nicht sehr groß sind, dann sind auch die linearisierten Bedingungen für die Düse nach Morgan gültig. Bei dem Leitapparat (auch beim festen) wird dasselbe Wirbelmodell wie beim Propeller benutzt und für die Lösung wird ebenfalls die Lerbs'sche Induktionsfaktormethode angewendet.

Nach Bild 1 betrachtet man die homogene, ungestörte Anströmung des Systems mit der konstanten Geschwindigkeit v . Die einzelnen axialen Geschwindigkeiten $w_{a\gamma}$, $w_{a\alpha}$, w_p , w_L werden positiv, wenn sie in derselben Richtung wie die Anströmgeschwindigkeit v wirken. Nach der Morgan'schen Theorie der Düse ist die Düsenzirkulation $\gamma(\bar{z})$ positiv, wenn sie in Richtung in die Düse dreht, d.h. wenn sie die Verzögerung der Strömung in der Düse, bzw. die Zusatzgeschwindigkeiten gegen die Anströmung v hervorruft. Das entspricht den Bedingungen der allein stehenden Düse - ohne Propeller.

Es werden hier die Zylinderkoordinatensysteme r bzw. x, φ , und ξ bzw. z benutzt.

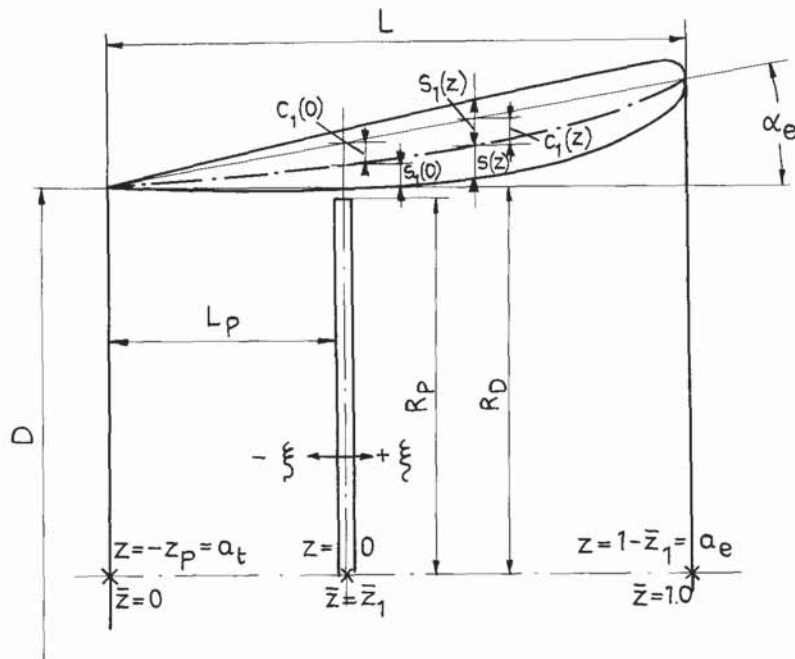
Man behandelt weiter das Problem als stationär, was bedeutet, daß die Werte der Zirkulation oder der radialen induzierten Geschwindigkeiten auf dem Düsenzylinder in der Umfangsrichtung konstant sind. So kann man voraussetzen, daß das Koordinatensystem (d.h. auch die Düse) sich mit dem Propeller dreht. Da aber Propeller mit endlicher Flügelzahl in der Umfangsrichtung veränderliche Werte $[w_r(x, \varphi, z)]_p$ hervorrufen (siehe Kapitel VI-2), werden von diesen Werten in Umfangsrichtung nur Durchschnittswerte $[w_r(x, z)]_{p_d}$ benutzt. So bleiben auch die Zirkulationswerte $\gamma(\bar{z})$ der Düse von dem Polarwinkel φ unabhängig. Diese Auffassung entspricht aber der unendlichen Flügelzahl des Propellers, dessen Gesamtwirkung an der Düse gleich dem Propeller mit endlicher Flügelzahl z_p ist.

Ferner rechnet man mit einer idealen, inkompressiblen Flüssigkeit, bei der keine Ablösung der Strömung möglich ist. Die Effekte der Zähigkeit der realen Flüssigkeit an der Düsenfläche und den verschiedenen Querschnitten des Propellers und des Leitrades werden hinterher als Korrekturen mit Hilfe der Widerstandsbeiwerte eingeführt. Die eventuell mögliche Ablösung der Strömung an der Düse kann bei den gegebenen Arbeitsbedingungen des Antriebssystems auch aufgrund des hier eingeführten Druckverteilungsverfahrens beurteilt werden.

III. Linearisierte Theorie des Ringflügels nach

Morgan in dem System Propeller-Düse-Leitrad

Morgan [3] untersucht ähnlich wie Dickmann [1] die Strömungsverhältnisse in der Düse mit Hilfe des Singularitätenverfahrens. Außer der Ringwirbelbelegung $\gamma(\bar{z})$ benutzt man hier auch die Quell-Senken-Belegung $q(\bar{z})$, womit wie bei Weissinger [6] der Einfluß der Dicke des Düsenprofils berücksichtigt wird. Man betrachtet eine Düse gegebener Form, wobei der Düsenzylinder mit der Quell-Senken-Verteilung und der später ausgerechneten Ringwirbelbelegung belegt wird: Der Durchmesser ist dabei gleich dem charakteristischen Durchmesser der Düse und die Länge gleich der Düsenlänge. Es werden hier dimensionslose Koordinaten und Ausdrücke benutzt, die in radialer Richtung auf den Propellerradius R_p und in der axialen Richtung auf die Düsenlänge L bezogen sind.



$$x_D = R_D / R_p$$

$$x = r / R_p$$

$$z = \xi / L$$

$$\bar{z}_1 = L_p / L$$

$$c(z) = \frac{c_1(z)}{L}$$

$$s(z) = \frac{s_1(z)}{L}$$

$$h = \frac{L}{2R_D} = \frac{L}{D}$$

$$z = \bar{z} - \bar{z}_1$$

Bild 2

Nach Bild 2 kann man für den beliebigen Punkt des Düsenprofils $R_{\text{prof}}(z)$ schreiben

$$\frac{R_{\text{prof}}}{R_p}(z) = x_D + x_D \cdot 2h \left[s(0) + c(0) + z \cdot \text{tg } \alpha_e - c(z) \pm s(z) \right],$$

wobei das positive Vorzeichen für die äußere und das negative für die innere Kontur des Düsenprofils gilt.

Die Belegung mit Ringwirbeln längs des Düsenzylinders für den Fall der vorgegebenen Düse mit bestimmter Profilform ergibt sich aus der Lösung einer singulären Integralgleichung, durch die die Randbedingungen an der Düsenkontur sichergestellt werden.

Die erste Strömungsrandbedingung für das Profil eines Ringflügels kann man aus der Forderung erhalten, daß die Normalgeschwindigkeit an jedem Punkt der Profilkontur gleich Null sein muß. Für einen bestimmten Punkt (φ, z) der Düsenkontur, an dem die Neigung $\partial R / \partial z$ bekannt ist, wird diese Forderung durch die radialen Geschwindigkeiten, die auf dem Düsenzylinder von allen möglichen Singularitäten induziert werden, durch die folgende Gleichung [6] ausgedrückt

$$\left[\frac{w_r}{v}(\varphi, \bar{z}) \right]_{r, q, \frac{\partial r}{\partial \varphi}} = \frac{\partial R}{\partial z}(\varphi, \bar{z}) \quad (3)$$

Die zweite Randbedingung kann man bekommen durch die Anwendung dieser Gleichung auf den Punkt der Hinterkante der Düse, wo nach Morgan die Summe der radialen Geschwindigkeiten bzw. die Neigung Null sein soll

$$\left[\frac{w_r}{v}(\varphi, 0) \right]_{r, q, \frac{\partial r}{\partial \varphi}} = 0 \quad (4)$$

Für die linearisierte Bedingung der Düse nach Bild 2 bei Vorgabe des Öffnungswinkels α_e der Düse sowie der Dicke s und Krümmung c des Düsenprofils hat Morgan im Sinne der Gl.(3) den folgenden allgemeinen Zusammenhang abgeleitet ([3], Gl.2.5-3)

$$\left[\frac{w_r}{v} (x_D \pm 0, \varphi, z) \right]_{\gamma} + \left[\frac{w_r}{v} (x_D \pm 0, \varphi, z) \right]_q + \left[\frac{w_r}{v} (x_D \pm 0, \varphi, z) \right]_{\frac{\partial r}{\partial \varphi}} = \quad (5)$$

$$= - \left[\frac{\partial c}{\partial z} (\varphi, z) + \operatorname{tg} \alpha_e (\varphi) \pm \frac{\partial s}{\partial z} (\varphi, z) \right]$$

wobei wie vorher das positive Vorzeichen für die äußere und das negative Vorzeichen für die innere Seite des Düsenprofils gilt.

In unserem Fall vernachlässigen wir den instationären Charakter der Strömung an der Düse, d.h. wir betrachten keine freien Längswirbel $\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi} \right)$ hinter der Düse und auch die Intensitäten der Düsenzirkulation (γ) und der Quellen und Senken (q) an der Düse sind keine Funktionen des Polarwinkels φ . Bei der Betrachtung der durchschnittlichen, in der Umfangsrichtung auch konstanten Radialgeschwindigkeiten an der Düse, die vom Düsenpropeller (P_d) und von dem in der Düse angeordneten Leitapparat (L_d) induziert werden, können wir die erste Strömungsrandbedingung in der folgenden Form ausdrücken:

$$\left[\frac{w_r}{v} (x_D \pm 0, \bar{z}) \right]_{\gamma} + \left[\frac{w_r}{v} (x_D \pm 0, \bar{z}) \right]_q + \left[\frac{w_r}{v} (x_D, \bar{z}) \right]_{P_d} + \left[\frac{w_r}{v} (x_D, \bar{z}) \right]_{L_d} =$$

$$= - \left[c'(\bar{z}) + \operatorname{tg} \alpha_e \pm s'(\bar{z}) \right] \quad (6)$$

Die ersten zwei Glieder sind die radialen Geschwindigkeiten an dem Düsenzylinder, die durch die an dem Düsenmantel liegenden Singularitäten, d.h. durch die Ringwirbel mit der Intensität $\gamma(z')$ und durch die Quell-Senken von der Ergiebigkeit $q(z')$ induziert sind. Hier können wir von Morgan gegebene Ausdrücke benutzen.

Durch die Umformung der Gl.(2.8-7 in [3]) von Morgan

$$\left[\frac{w_r}{v}(x, \bar{z}) \right]_y = - \frac{h}{2\pi} \int_0^1 \frac{\gamma(z')}{\left(\frac{x}{x_D}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot k \cdot \left[2h(\bar{z} - z') \right] \cdot \left[K(k) - E(k) - \frac{2 \frac{x}{x_D} \cdot E(k)}{4h^2(\bar{z} - z')^2 + \left(\frac{x}{x_D} - 1\right)^2} \right]$$

bekommt man für die Verhältnisse an dem Düsenzylinder ($x=x_D$) das erste Glied in der Form

$$\left[\frac{w_r}{v}(x_D, \bar{z}) \right]_y = - \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \frac{\gamma(z')}{(\bar{z} - z')} \cdot k \left\{ 4h^2(\bar{z} - z')^2 [K(k) - E(k)] - 2E(k) \right\} dz' \quad (7)$$

Für das zweite Glied kann man nach Morgan (2.8-13 in [3]) schreiben

$$\left[\frac{w_r}{v}(x_D \pm 0, z) \right]_q = + \frac{h}{2\pi} \int_0^1 q(z') \cdot k \cdot [K(k) - E(k)] dz' \pm \frac{1}{2} q(\bar{z}) \quad (8)$$

Hierbei ist

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \vartheta}} d\vartheta \quad (9)$$

das vollständige elliptische Integral erster Gattung und

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \vartheta} d\vartheta \quad (10)$$

das vollständige elliptische Integral zweiter Gattung, wobei

$$k^2 = \frac{1}{h^2 (\bar{z} - z')^2 + 1} \quad (11)$$

Die durchschnittlichen Geschwindigkeiten am Düsenzylinder, induziert durch den Propeller (das dritte Glied der Gl.(6)) und durch das Leitrad (das vierte Glied), sind Funktionen der radialen Zirkulationsverteilung an dem Propeller G_p und an dem Leitrad G_L , sowie der Steigung (β_i bzw. β_{iL}) der freien Wirbel des Propellers bzw. Leitrades. Auf diese Problematik wird näher in Kapitel VI eingegangen.

Setzt man die Gleichungen (Gl.7 und 8) für die radialen Geschwindigkeiten in die erste Strömungsrandbedingung (Gl.6) ein, dann erhält man die folgende Integralgleichung

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{4\pi} \int_0^1 k \left\{ 4h^2 (\bar{z} - z')^2 \left[K(k) - E(k) \right] - 2E(k) \right\} \cdot \frac{\gamma(z')}{\bar{z} - z'} \cdot dz' = \\ & - \left[c'(\bar{z}) + \operatorname{tg} \alpha \pm s(\bar{z}) \right] - \frac{h}{2\pi} \int_0^1 q(z') k \left[K(k) - E(k) \right] dz' \quad (12) \\ & \mp \frac{1}{2} q(\bar{z}) - \left[\frac{w_r}{v} (x_D, \bar{z}) \right]_{P_d} - \left[\frac{w_r}{v} (x_D, \bar{z}) \right]_{L_d} \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung kann man die bekannte Erkenntnis der linearisierten Profilttheorie ableiten, daß bei Berücksichtigung der Profildicke die Intensität der Quell-Senken nur von dem Gradienten der Profildicke abhängt, also

$$q(\bar{z}) = - 2 s'(\bar{z}) \quad (13)$$

Mit dieser Beziehung können wir die Hauptgleichung für die Bestimmung der Intensität der Wirbelbelegung an dem Düsenzylinder schreiben:

$$\int_0^1 k \left\{ 4h^2 (\bar{z} - z')^2 \left[K(k) - E(k) \right] - 2 E(k) \right\} \frac{\gamma(z')}{(\bar{z} - z')} dz' =$$

$$4\pi \left[c'(\bar{z}) + tq\alpha \right] - 4h \int_0^1 s'(z') k \left[K(k) - E(k) \right] dz' \quad (14)$$

$$+ 4\pi \left[\frac{w_r}{v}(\bar{z}) \right]_{P_d} + 4\pi \left[\frac{w_r}{v}(\bar{z}) \right]_{L_d}$$

Aus dieser Gleichung erkennt man, daß, anders als bei der linearisierten Theorie des gewöhnlichen Tragflügels, die Profildicke bei dem Ringflügel einen bestimmten Einfluß auch auf die Wirbelverteilung $\gamma(\bar{z})$ hat, (d.h. es wird eine gegenüber einem Flügel gleicher Skelettlinie mit dünnem Profil zusätzliche Wirbeldichte bedingt [7]). Die Intensität der Ringwirbel an dem Düsenzylinder ist also eine Funktion des Öffnungswinkels der Düse, der Dicke und der Krümmung des Düsenprofils und der radialen Geschwindigkeiten aller in dem Strömungsfeld betrachteten Singularitäten.

Der eingeführte Ausdruck (14) ist im Grunde die Morgan'sche Grundgleichung ([3], Gl.2.3-1) für die unbekannte Wirbelbelegung $\gamma(\bar{z})$, jetzt aber erweitert durch Glieder, die den Einfluß von Propeller und Leitapparat angeben:

$$\oint_0^1 q(\bar{z}, z') \frac{\gamma(z')}{(\bar{z} - z')} dz' = H(\bar{z}) + 4\pi \left[\frac{w_f}{v}(\bar{z}) \right]_{P_d} + 4\pi \left[\frac{w_f}{v}(\bar{z}) \right]_{L_d} \quad (15)$$

Dabei sind

$$q(\bar{z}, z') = k \left\{ 4h^2 (\bar{z} - z')^2 [K(k) - E(k)] - 2E(k) \right\} \quad (16)$$

und

$$H(\bar{z}) = 4\pi \left[c'(\bar{z}) + \operatorname{tg} \alpha \right] - 4h \int_0^1 s'(z') \cdot k [K(k) - E(k)] dz' \quad (17)$$

mit $K(k)$, $E(k)$ und k nach den Gleichungen 9,10 und 11.

Analog*) kann man also die allgemeine Beziehung zur Bestimmung der unbekanntenen Wirbelbelegung am Düsenzylinder mit Berücksichtigung der durchschnittlichen Wirkungen von Propeller und Leitrad umformen. Dabei benutzt man die zweite Randbedingung (4), daß die Zirkulation an der Hinterkante Null sein soll. Um die Singularität an der Vorderkante zu vermeiden, wird von Morgan eine neue abhängige Größe eingeführt, die Pseudozirkulation genannt wird:

$$\gamma^*(\bar{z}) = \sqrt{1 - \bar{z}} \cdot \gamma(\bar{z}) \quad (18)$$

*) Die Ausführungen folgen den Entwicklungen von Morgan, wobei - abweichend von diesem - die radialen Geschwindigkeiten berücksichtigt werden.

Man kann die Lösung in Form einer Integralgleichung erhalten, die aber durch zwei Cauchy-Integrale ausgedrückt ist. Um diese Teilrechnung zu erleichtern, ist es zweckmäßig, eine neue Variable für die axiale Koordinate in folgender allgemeinen Form

$$z = \frac{1}{2} (1 + \cos \vartheta) \quad (19)$$

einzuführen und weiterhin die vorgegebenen Dicken- und Krümmungswerte des Düsenprofils in Fourier-Reihen zu entwickeln.

Für die Profildicke können wir schreiben

$$s(z) \equiv s(\vartheta) = \sum_{m=1}^{\infty} s_m \sin m \vartheta \quad (20)$$

mit dem allgemeinen Fourier-Koeffizienten

$$s_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} s(\vartheta) \sin m \vartheta d \vartheta, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (21)$$

Der benötigte Gradient der Dicke wird durch die Ableitung nach z gegeben

$$s'(z) = \frac{ds}{dz} = \frac{ds}{d\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dz}$$

also

$$s'(\vartheta) = - \frac{2}{\sin \vartheta} \sum_{m=1}^{\infty} m s_m \cos m \vartheta \quad (22)$$

So kann man die Gleichung (13) für die Bestimmung der Quell-Senken-Belegung am Düsenzylinder in sehr einfacher Form ausdrücken

$$q(\bar{\vartheta}) = + \frac{4}{\sin \bar{\vartheta}} \sum_{m=1}^{\infty} m s_m \cos m \bar{\vartheta} \quad (23)$$

Ein solches Beispiel des Verlaufes der Quell-Senken-Belegung an einer Düse gegebener Form ist im Anhang II angegeben (Diagramm 8 bzw. 11).

Analog können wir für den Wert des Krümmungsgradienten schreiben

$$c'(\bar{\vartheta}) = -\frac{2}{\sin \bar{\vartheta}} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n \cdot \cos n \bar{\vartheta} \quad (24)$$

wobei

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} c(\vartheta) \sin n \vartheta d \vartheta$$

Dann kann die Gl.(17) für unseren Fall vorteilhaft in der folgenden Form ausgedrückt werden

$$H(\vartheta'') = 4\pi (\operatorname{tg} \alpha + c') + 4h \sum_{m=1}^{\infty} m s_m \int_0^{\pi} \left\{ k [K(k) - E(k)] \cos m \vartheta' \right\} d \vartheta' \quad (25)$$

Die Lösung für die unbekannte Belegung der Pseudozirkulation an dem Düsenzylinder erhält man in Form der Fredholm'schen Integralgleichung zweiter Art ([3], Gl.2.3-8)

$$\gamma^*(\bar{\vartheta}) = \gamma(\bar{\vartheta}) \sin \frac{1}{2} \bar{\vartheta} = F(\bar{\vartheta}) + \int_0^{\pi} K(\vartheta, \vartheta') \cdot \gamma^*(\vartheta') d \vartheta' \quad (26)$$

wobei die Cauchy-Integrale für den Fall der Anwesenheit des Propellers und Leitapparates in der Düse wie folgt aussehen

$$F(\bar{\vartheta}) = -\frac{1}{2\pi^2} \cos \frac{1}{2} \bar{\vartheta} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos \vartheta''}{\cos \vartheta'' - \cos \bar{\vartheta}} \left\{ H(\vartheta'') + 4\pi \left[\frac{w_r}{v}(\vartheta'') \right]_{P_d} + \right. \quad (27)$$

$$\left. + 4\pi \left[\frac{w_r}{v}(\vartheta'') \right]_{L_d} d \vartheta'' \right.$$

und

$$K(\bar{\vartheta}, \vartheta') = -\frac{1}{2\pi^2} \cos \frac{1}{2} \bar{\vartheta} \cdot \cos \frac{1}{2} \vartheta' \int_0^\pi \frac{1 - \cos \vartheta''}{\cos \vartheta'' - \cos \bar{\vartheta}} \left[\frac{2 + g(\vartheta'', \vartheta')}{\cos \vartheta'' - \cos \vartheta'} \right] d\vartheta'' \quad (28)$$

Betrachten wir zunächst das erste Glied der Integralgleichung, also $F(\bar{\vartheta})$.

Setzen wir in die Gleichung für $F(\bar{\vartheta})$ den Ausdruck (25) ein, ergibt sich

$$F(\bar{\vartheta}) = -\frac{2}{\pi} \cos \frac{1}{2} \bar{\vartheta} \int_0^\pi \frac{1 - \cos \vartheta'' (\operatorname{tg} \alpha + c')}{\cos \vartheta'' - \cos \bar{\vartheta}} d\vartheta'' - \frac{2h}{\pi^2} \cos \frac{1}{2} \bar{\vartheta} \cdot \int_0^\pi \left\{ \frac{1 - \cos \vartheta''}{\cos \vartheta'' - \cos \bar{\vartheta}} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} m s_m \cdot \int_0^\pi k \cdot [K(k) - E(k)] \cos m \vartheta' d\vartheta' \right\} d\vartheta'' -$$

$$-\frac{2}{\pi} \cos \frac{1}{2} \bar{\vartheta} \int_0^\pi \frac{(1 - \cos \vartheta'') \left[\frac{w_r}{v}(\vartheta'') \right]_{Pd}}{\cos \vartheta'' - \cos \bar{\vartheta}} d\vartheta'' - \frac{2}{\pi} \cos \frac{1}{2} \bar{\vartheta} \int_0^\pi \frac{(1 - \cos \vartheta'') \cdot \left[\frac{w_r}{v}(\vartheta'') \right]_{Ld}}{\cos \vartheta'' - \cos \bar{\vartheta}} d\vartheta''$$

In Übereinstimmung mit Morgan bezeichnet man

$$\int_0^\pi k [K(k) - E(k)] \cos m \vartheta' d\vartheta' = 3 G(\vartheta'', m) \quad (30)$$

mit

$$k^2 = \frac{4}{h^2 (\cos \bar{\vartheta} - \cos \vartheta') + 4} \quad (31) \quad K(k) \text{ und } E(k) \text{ nach Gl. (9) und (10).}$$

Die Werte $G(\vartheta'', m)$ für das Düsenverhältnis $h = 0,5$ sind für $m = 1, 2, 3, \dots, 12$ und $\vartheta'' = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, \dots, 180^\circ$ ausgerechnet und in Diagramm 1 und in der Tabelle 1 des Anhangs I angegeben.

Es ist vorteilhaft, die Ausdrücke für die Krümmungsgradienten, sowie für die radialen Geschwindigkeiten, multipliziert mit $(1 - \cos \vartheta'')$ in gerade Fourier-Reihen zu entwickeln:

$$c' (1 - \cos \vartheta'') = \sum_{n=0}^{\infty} CF_n \cos n \vartheta''$$

$$\left[\frac{w_r}{v} (\vartheta'') \right]_{P_d} \cdot (1 - \cos \vartheta'') = \sum_{u=0}^{\infty} WP_u \cdot \cos u \vartheta'' \quad (32)$$

$$\left[\frac{w_r}{v} (\vartheta'') \right]_{L_d} \cdot (1 - \cos \vartheta'') = \sum_{v=0}^{\infty} WL_v \cdot \cos v \vartheta''$$

Dabei sind die einzelnen Koeffizienten CF_n , WP_u , WL_v durch die allgemeinen Ausdrücke der Fourier-Zerlegung gegeben, z.B.

$$WP_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{w_r}{v} (\vartheta'') \right]_p \cdot (1 - \cos \vartheta'') d\vartheta'' \quad (33)$$

und

$$WP_u = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{w_r}{v} (\vartheta'') \right]_p \cdot (1 - \cos \vartheta'') \cos u \vartheta'' d\vartheta'' \quad (34)$$

Dann lautet die Gleichung für $F(\bar{\vartheta})$ (29):

$$F(\bar{\vartheta}) = -\frac{2}{\pi} \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \frac{1}{2} \bar{\vartheta} \int_0^1 \frac{1 - \cos \vartheta''}{\cos \vartheta'' - \cos \bar{\vartheta}} d\vartheta'' - \frac{2}{\pi} \cos \frac{1}{2} \bar{\vartheta} \sum_{n=0}^{\infty} CF_n \cdot \int_0^{\pi} \frac{\cos n \vartheta''}{\cos \vartheta'' - \cos \bar{\vartheta}} d\vartheta'' - \frac{6h}{\pi^2} \cos \frac{1}{2} \bar{\vartheta} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos \vartheta''}{\cos \vartheta'' - \cos \bar{\vartheta}} \sum_{m=1}^{\infty} m s_m G(m, \vartheta'') d\vartheta'' - \quad (35)$$

$$-\frac{2}{\pi} \cos \frac{1}{2} \bar{\vartheta} \sum_{u=0}^{\infty} WP_u \int_0^{\pi} \frac{\cos u \vartheta''}{\cos \vartheta'' - \cos \bar{\vartheta}} d\vartheta'' - \frac{2}{\pi} \cos \frac{1}{2} \bar{\vartheta} \sum_{v=0}^{\infty} WL_v \int_0^{\pi} \frac{\cos v \vartheta''}{\cos \vartheta'' - \cos \bar{\vartheta}} d\vartheta'' \quad (35)$$

Hier können wir die Lösung des Glauert-Integrals [9] benutzen

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos m \vartheta''}{\cos \vartheta'' - \cos \bar{\vartheta}} d\vartheta'' = \pi \frac{\sin m \bar{\vartheta}}{\sin \bar{\vartheta}} \quad (36)$$

aus welcher sich noch die weiteren Ausdrücke ableiten lassen

$$\int_0^{\pi} \frac{1 - \cos \vartheta''}{\cos \vartheta'' - \cos \bar{\vartheta}} = -\pi \quad (37)$$

und

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos m \vartheta'' (1 - \cos \vartheta'')}{\cos \vartheta'' - \cos \bar{\vartheta}} = \pi (1 - \cos \bar{\vartheta}) \frac{\sin m \bar{\vartheta}}{\sin \bar{\vartheta}} \quad (38)$$

Führen wir weiter, wie Morgan, die Entwicklung der Werte $G(\vartheta'', m)$ in der Form ein:

$$G(\vartheta'', m) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p(m) \cos p \vartheta'' \quad (39)$$

Die Fourier-Koeffizienten dieser Entwicklung

$$a_0(m) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} G(\vartheta'', m) d\vartheta'' \quad (40)$$

$$a_p(m) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} G(\vartheta'', m) \cos p \vartheta'' d\vartheta''$$

sind für verschiedene Werte p und m (bis p und $m = 12$) in der Tafel 2 des Anhangs I eingetragen.

Für $F(\bar{\vartheta})$ kann man dann schreiben:

$$\begin{aligned}
 F(\bar{\vartheta}) = & 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \frac{1}{2} \bar{\vartheta} - 2 \frac{\cos \frac{\bar{\vartheta}}{2}}{\sin \bar{\vartheta}} \sum_{n=1}^{\infty} C F_n \sin n \bar{\vartheta} + \\
 & + \frac{6h}{\pi} \cos \frac{1}{2} \bar{\vartheta} \sum_{m=1}^{\infty} m s_m a_0(m) - \\
 & - \frac{6h}{\pi} \frac{(1 - \cos \bar{\vartheta})}{\sin \bar{\vartheta}} \cdot \cos \frac{1}{2} \bar{\vartheta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} m \cdot a_p(m) \cdot s_m \cdot \sin p \bar{\vartheta} - \\
 & - 2 \frac{\cos \frac{\bar{\vartheta}}{2}}{\sin \bar{\vartheta}} \sum_{u=1}^{\infty} W P_u \sin u \bar{\vartheta} - 2 \frac{\cos \frac{\bar{\vartheta}}{2}}{\sin \bar{\vartheta}} \sum_{v=1}^{\infty} W L_v \sin v \bar{\vartheta}
 \end{aligned} \tag{41}$$

Mit den Bezeichnungen von Morgan

$$F_m = + \frac{6h}{\pi} m a_0(m) \tag{42}$$

$$B_m(\bar{\vartheta}) = - \frac{6h}{\pi} m \sum_{p=1}^{\infty} a_p(m) \sin p \bar{\vartheta} \tag{43}$$

und den Beziehungen

$$\sin \bar{\vartheta} = 2 \sin \frac{\bar{\vartheta}}{2} \cos \frac{\bar{\vartheta}}{2}, \quad (1 - \cos \bar{\vartheta}) = 2 \sin^2 \frac{\bar{\vartheta}}{2}$$

kann man das erste Glied der Integralgleichung für die Bestimmung der Zirkulationsverteilung an der Düse schließlich in der folgenden Form ausdrücken

$$\begin{aligned}
 F(\bar{\vartheta}) = & \cos \frac{1}{2} \bar{\vartheta} \left[2 \operatorname{tg} \alpha + \sum_{m=1}^{\infty} F_m \cdot s_m \right] + \sin \frac{1}{2} \bar{\vartheta} \left[\sum_{m=1}^{\infty} B_m(\bar{\vartheta}) \cdot s_m \right] - \\
 & - \frac{1}{\sin \frac{1}{2} \bar{\vartheta}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} C F_n \sin n \bar{\vartheta} + \sum_{u=1}^{\infty} W P_u \sin u \bar{\vartheta} + \sum_{v=1}^{\infty} W L_v \sin v \bar{\vartheta} \right] \quad (44)
 \end{aligned}$$

Dieser Teil der Integralgleichung enthält also die Terme $W P_u$ und $W L_v$, die die Wechselwirkung des Propellers P und des Leitrades L mit der Düse ausdrücken.

Die Lösung der Gleichung (44) ergibt keinen singulären Punkt für $\bar{\vartheta} = 0$, weil für $\bar{\vartheta} = 0$ gilt

$$\lim_{\bar{\vartheta} \rightarrow 0} \frac{\sin m \bar{\vartheta}}{\sin \frac{1}{2} \bar{\vartheta}} = \frac{m \cos \bar{\vartheta}}{\frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} \bar{\vartheta}} = 2m$$

Die Funktionen F_m (42) und $B_m \bar{\vartheta}$ (43) sind von der Profilmform unabhängig und sind für den Fall $h = 0,5$ für $m=1,2,\dots,12$ in den Diagrammen 2 und 3 des Anhangs I dargestellt und für $\bar{\vartheta} = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, \dots, 180^\circ$ in der Tabelle 3.

Der zweite Teil der Integralgleichung (26), - der Kern $K(\bar{\vartheta}, \bar{\vartheta}')$ (28) - bleibt unverändert wie in der Morgan'schen Theorie und wird hier ausgewertet und dargestellt.

Die für die Gleichung (28) notwendigen $g(\bar{\vartheta}'', \bar{\vartheta}')$ -Werte sind durch die Gleichung (16) gegeben und für das Düsenverhältnis $h = 0,5$ in der Tabelle 4 und im Diagramm 4 des Anhangs I dargestellt. Um die Lösung des Cauchy-Integrals zu vereinfachen, ist es zweckmäßig, die folgende Entwicklung einzuführen

$$\frac{2 + g(\bar{\vartheta}'', \bar{\vartheta}')}{\cos \bar{\vartheta}'' - \cos \bar{\vartheta}'} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\bar{\vartheta}') \cos n \bar{\vartheta}'' \quad (45)$$

wobei

$$\begin{aligned}
 b_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{2 + g(\vartheta'', \vartheta')}{\cos \vartheta'' - \cos \vartheta'} d\vartheta'' \\
 b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{2 + g(\vartheta'', \vartheta')}{\cos \vartheta'' - \cos \vartheta'} \cdot \cos n\vartheta'' d\vartheta''
 \end{aligned} \tag{46}$$

Die einzelnen Fourier-Koeffizienten $b_n(\vartheta')$ sind in der Tabelle 5 gegeben und im Diagramm 5 dargestellt.

Mit Hilfe des Glauert-Integrals kann man für den Kern der Integralgleichung (28) schreiben ([3], Gl.2.3-19)

$$K(\bar{\vartheta}, \vartheta') = \frac{1}{\pi} \cos \frac{1}{2} \vartheta' \left[-b_0(\vartheta') \cos \frac{1}{2} \bar{\vartheta} + \sin \frac{1}{2} \bar{\vartheta} \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\vartheta') \sin n \bar{\vartheta} \right] \tag{47}$$

Diese Werte sind allgemein gültig und von dem System Propeller + Leitrad nicht abhängig. Sie sind für das Verhältnis der Düse $h = 0,5$ für die einzelnen Koordinaten $\bar{\vartheta}$ und ϑ' in der Tabelle 6 und im Diagramm 6 des Anhangs I dargestellt.

Beide Funktionen $F(\bar{\vartheta})$ Gl.(44) und $K(\bar{\vartheta}, \vartheta')$ Gl.(47) sind nun in einer Form gegeben, in der man sie berechnen kann. Dann ist die Fredholm'sche Integralgleichung

$$\gamma^*(\bar{\vartheta}) = \gamma(\bar{\vartheta}) \sin \frac{1}{2} \bar{\vartheta} = F(\bar{\vartheta}) + \int_0^{\pi} K(\bar{\vartheta}, \vartheta') \cdot \gamma^* d\vartheta' \tag{26}$$

für die unbekannte Zirkulationsverteilung $\gamma(\bar{\vartheta})$ auf dem Düsenzylinder lösbar.

Der Einfluß der Konstruktionsparameter der Düse mit Ausnahme des Verhältnisses h - (also Öffnungswinkel, Dicke und Krümmung des Düsenprofils), sowie der Betriebsbedingungen des Antriebssystems (Belastung des Düsenpropellers, Einfluß des Leitrades usw.) ist nur in dem ersten Glied $F(\bar{\vartheta})$ der Integralgleichung (26) enthalten. Das bedeutet also, daß die Funktion $F(\bar{\vartheta})$ Gl.(44) für jeden konkreten Entwurfsfall untersucht und bestimmt werden muß.

Ein Entwurfsbeispiel ist im Anhang II angeführt. Für eine feste, zur Achse symmetrische Düse der vorhergegebenen Form mit dem Verhältnis $h = L/D = 0,5$, dem Öffnungswinkel $\alpha_e = 12,7^0$ und dem modifizierten Düsenprofil NACA 5415 (siehe Tabellen 7 und 8 bzw. Bild 7) sind alle für die Auswertung der Funktion $F(\bar{\vartheta})$ notwendigen Größen - wie z.B. Fourierkoeffizienten der Dicken- und Krümmungsentwicklung s_m und c_n ausgerechnet. Mit diesen Fourierkoeffizienten kann man nach Gl.(23) und (24) die Quell-Senken-Belegung $q(\vartheta)$ an der Düse und die Ableitung des Krümmungsverlaufs $c'(\vartheta)$ des Düsenprofils berechnen. Diagramm 8 des Anhanges II zeigt den Charakter dieser Kurven. Für den Fall der nullten Approximation, bei der man den Einfluß des Propellers $\left(\frac{w_r}{v}(\bar{\vartheta})\right)_{p_d} = 0$ und des Leitrades $\left(\frac{w_r}{v}(\bar{\vartheta})\right)_{L_d} = 0$ noch nicht kennt, ist der Verlauf der Funktion $F(\bar{\vartheta})$ - Gl.(44) im Diagramm 9 im Anhang II dargestellt.

Die Lösung der Fredholm'schen Integralgleichung zweiter Art (26) mit der Funktion $F(\bar{\vartheta})$ (44) und den bekannten Werten des Kerns $K(\bar{\vartheta}, \bar{\vartheta}')$ (47) kann nach mehreren Methoden durchgeführt werden. Hier wurden zwei Methoden benutzt: Die gröbste Art der Lösung besteht darin, die Integralgleichung durch ein lineares Gleichungssystem zu ersetzen. Eine wesentlich genauere Berechnung ermöglicht die Methode des lösenden Kerns. Im vorliegenden Fall wurden zur Probe beide Methoden verwendet. Für den Fall der Düse ($h = 0,5$, $\alpha_e = 12,7^0$, NACA 5415) sind die Ergeb-

nisse der beiden Methoden im Diagramm 10 verglichen. Die Unterschiede sind nur gering. Das zeigt, daß selbst die sehr ungenaue Methode, bei der die Integralgleichung durch ein lineares Gleichungssystem ersetzt wird, in unserem Fall schon brauchbare Ergebnisse liefert. Da aber die Methode des lösenden Kerns auf jeden Fall genauer ist, wurden die Ergebnisse dieser Methode für die folgenden Rechnungen zugrunde gelegt und in allen weiteren Fällen die Zirkulation nach dieser Methode berechnet.

Der Vergleich der Ergebnisse $\gamma^*(\bar{\vartheta})$ (Diagramm 10) mit den $F(\bar{\vartheta})$ -Werten (Diagramm 9) zeigt, daß der Einfluß der zweiten Funktion $K(\bar{\vartheta}, \vartheta')$ (Gl.47) geringfügig ist.

Die eigentliche Zirkulationsbelegung auf dem Düsenzylinder wird mit Hilfe der Pseudozirkulationswerte durch folgende Beziehung bestimmt

$$\gamma(\bar{z}) = \frac{\gamma^*(\bar{z})}{\sqrt{1-\bar{z}}} \quad \text{bzw.} \quad \gamma(\bar{\vartheta}) = \frac{\gamma^*(\bar{\vartheta})}{\sin \frac{1}{2} \bar{\vartheta}} \quad (48)$$

Der Charakter der Zirkulationsbelegung γ sowie der Pseudozirkulationsverteilung γ^* an der Düse $h = 0,5$, $\alpha_e = 12,7$ [mit einem modifizierten NACA 5415 - Profil] ohne Berücksichtigung des Propellers und des Leitapparates ist im Bild 3 (bzw. im Diagramm 11 des Anhangs II) dargestellt.

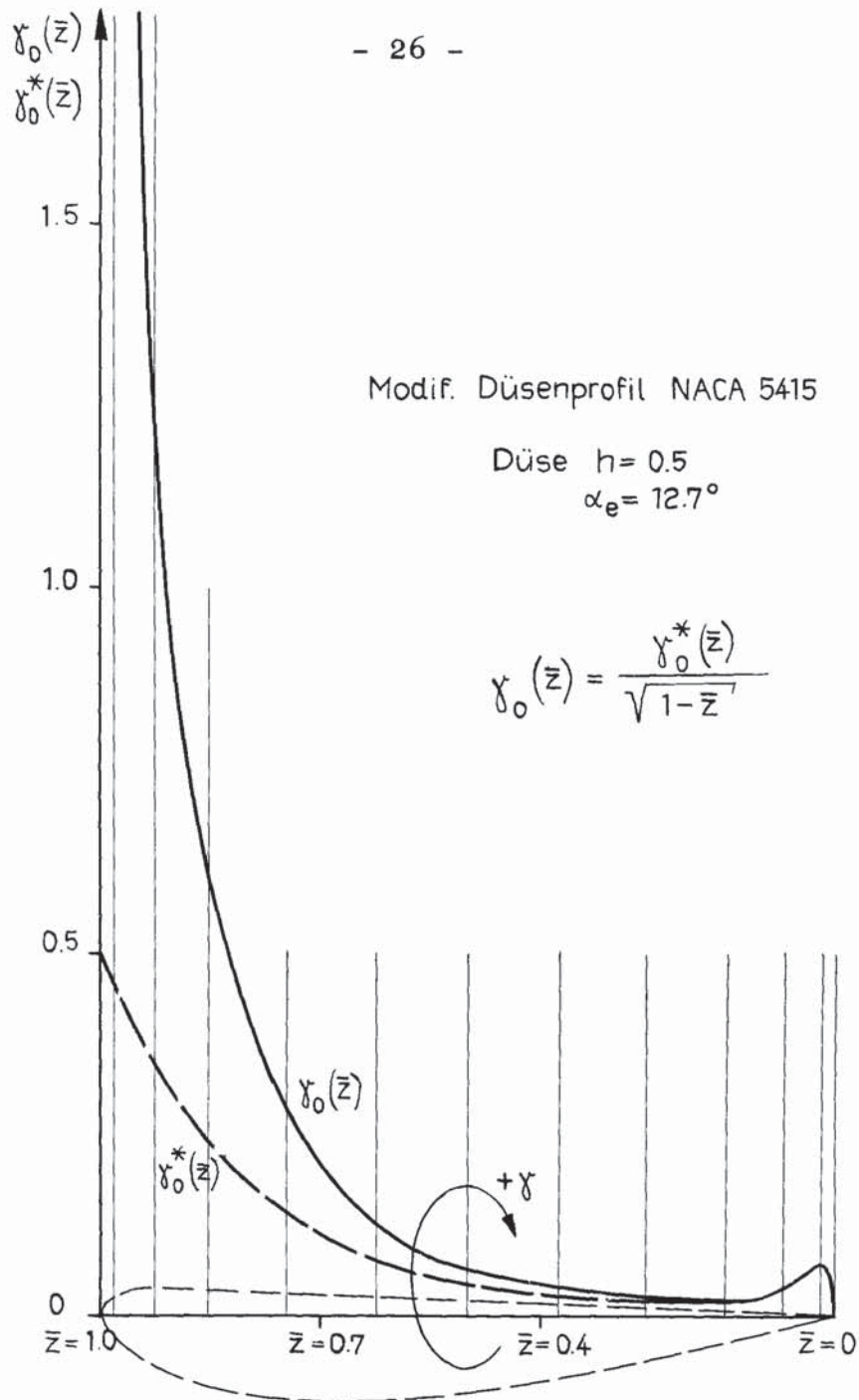


Bild 3

An der Vorderkante tritt eine logarithmische Singularität $\gamma(0^\circ)$ auf, wie z.B. auch beider ersten Form der Birnbaum'schen theoretischen Grundverteilung der Flügelzirkulation

$$\gamma \approx \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Bei Rechnungen mit Singularitäten erscheinen solche singulären Punkte häufig in der Lösung. Dabei wurde mehrmals die Methode angewendet, die Schrittweite im Bereich der vorkommenden Singularität feiner zu unterteilen, d.h. von $\Delta \vartheta$ zu $\frac{\Delta \vartheta}{n}$ überzugehen. Anstatt der Koordinate ϑ für den singulären Punkt werden die sehr nahen Punkte $\vartheta \pm \Delta \vartheta / n \cdot 2e$ betrachtet.

Das Maß der Verfeinerung der Teilung wird durch Vorgabe einer Schranke für die zulässige Abweichung der Ergebnisse von zwei aufeinander folgenden Näherungen bestimmt.

IV. Die Induktionsfaktoren nach Lerbs und ihre Anwendung
 =====
 auf den in der Düse arbeitenden Propeller
 =====

Der Propeller in der Düse ist ein besonderer Fall einer Antriebschraube, die unter anderen Geschwindigkeits- und Druckbedingungen arbeitet. Eine Düse kann durch ihre Kraftwirkungen die Belastung der Düsenschauben als ganzes verringern. Durch die Ummantelung kann der Charakter der optimalen Zirkulationsverteilung an dem Propellerflügel beeinflusst werden, besonders wenn der Spalt zwischen den Flügelenden und der inneren Düsenseite sehr klein ist. Außerdem wird durch die Düse eine zusätzliche positive Axialgeschwindigkeit induziert, die bei dem Propellerentwurf berücksichtigt werden muß.

Die axiale, von der Düse in der Propellerebene induzierte Geschwindigkeit ist durch die Addition der Geschwindigkeiten aus den einzelnen Singularitäten auf dem Düsenzylinder, also von den Wirbeln $\gamma(\bar{z})$ und von den Quell und Senken $q(\bar{z})$ gegeben.

$$\left[\frac{w_a}{v}(x, z) \right]_D = \left[\frac{w_a}{v}(x, z) \right]_\gamma + \left[\frac{w_a}{v}(x, z) \right]_q \quad (49)$$

Die Gleichungen für die Bestimmung der axialen Geschwindigkeiten aus der Ringwirbelbelegung und aus den Ringquellen- und Ringsenken sind aus dem Biot-Savart-Induktionsgesetz abgeleitet [10], und sie sind für unsere Darstellung durch folgende Formeln gegeben.

$$\left[\frac{w_a}{v}(x, \bar{z}_1) \right]_\gamma = -\frac{h}{2\pi} \int_0^1 \frac{\gamma(z')}{(x/x_D)^{\frac{1}{2}}} \left[K(k_1) - E(k_1) - \frac{2(\frac{x}{x_D} - 1) \cdot E(k_1)}{4h^2(\bar{z}_1 - z')^2 + (\frac{x}{x_D} - 1)^2} \right] dz' \quad (50)$$

und

$$\left[\frac{w_a}{v} (x, \bar{z}_1) \right]_q = -\frac{h}{2\pi} \int_0^1 \frac{q(z')}{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot k_1 \left[\frac{2[2h(\bar{z}_1 - z')]}{4h^2(\bar{z}_1 - z')^2 + \left(\frac{x}{x_D} - 1\right)^2} \right] \cdot E(k_1) dz' \quad (51)$$

wobei

$$K(k_1) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \vartheta}} \quad \text{nach Gl. (9)}$$

$$E(k_1) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \vartheta} d\vartheta \quad \text{nach Gl. (10)}$$

und

$$k_1^2 = \frac{4 \frac{x}{x_D}}{4h^2(\bar{z}_1 - z')^2 + \left(\frac{x}{x_D} + 1\right)^2} \quad (52)$$

bestimmt werden können.

Die Stelle der Propellerebene wurde hier $\bar{z}_1 = 0.400$ gewählt.

In dem vereinfachten Fall der Vernachlässigung des Spalteinflusses und des instationären Charakters des Systems kann man die Geschwindigkeitsverhältnisse des Düsenpropellers in einem beliebigen radialen Schnitt $x = r/R$ nach Bild 4 darstellen

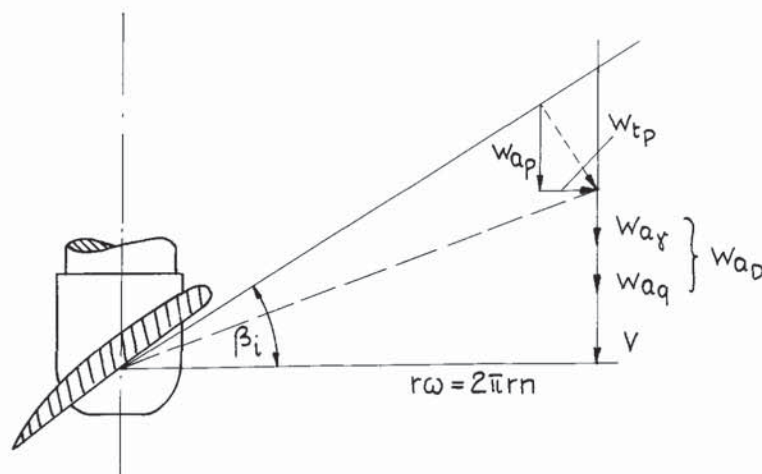


Bild 4

Von dem Diagramm des freifahrenden Propellers unterscheidet sich dieses Diagramm durch die Berücksichtigung der axialen Geschwindigkeit w_{aD} , induziert in der Propellerebene von der Düse.

Beim Propellerentwurf ist die Richtung der Geschwindigkeit v bzw. w_{ap} als positiv gewählt worden, deswegen haben wir für diese (Gl. 50 und 51) die umgekehrten Vorzeichen wie Morgan [10].

Die Betz'sche Bedingung der optimalen Zirkulationsverteilung, d.h. der geringsten Energieverluste

$$\frac{\operatorname{tg} \beta_i}{\operatorname{tg} \beta} = \text{konst} \quad (53)$$

kann man bei Benutzung der bekannten Beziehungen aus der Theorie des freien Propellers

$$\frac{r\omega}{v} = \frac{x \cdot \pi D_n}{v} = \frac{x}{\lambda} = \frac{x\pi}{J} \quad (54) \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \beta_i = \frac{v + w_a}{r\omega - w_t} \quad (55)$$

für den Fall des Propellers in der Düse in der folgenden Form ausdrücken

$$\frac{x \left[1 + \left(\frac{w_a}{v} \right)_f + \left(\frac{w_a}{v} \right)_q + \left(\frac{w_a}{v} \right)_p \right]}{\frac{x\pi}{J} - \left(\frac{w_t}{v} \right)_p} = x \cdot \operatorname{tg} \beta_i \quad (56)$$

$$\text{Dabei } J = \frac{v}{nD} \quad - \quad \text{Fortschrittsgrad} \quad (57)$$

Für die weitere Rechnung ist es zweckmäßig, die Bedingung (56) wie folgt zu schreiben

$$\left(\frac{w_a}{v} \right)_p + \operatorname{tg} \beta_i \left(\frac{w_t}{v} \right)_p = \frac{\pi \cdot x}{J} \operatorname{tg} \beta_i - 1 - \left(\frac{w_a}{v} \right)_f - \left(\frac{w_a}{v} \right)_q \quad (58)$$

Aus dieser Gleichung kann man die Zirkulationsverteilung am Propeller in der Düse bestimmen. Dabei ist der Düseneinfluß durch die axialen Geschwindigkeiten aus der Quellbelegung und der Düsenzirkulation in der Propellerebene berücksichtigt.

Es ist zweckmäßig, auch für die in der Düse arbeitende Schraube die bekannte Lerbs-Induktionsfaktoren-Methode [3, 11] des freifahrenden Propellers zu benutzen. Dabei muß der Einfluß der von der Düse induzierten Geschwindigkeiten immer berücksichtigt werden.

In dieser Theorie betrachtet Lerbs die Flügelzahl des Propellers als endlich, was auf ein dreidimensionales Strömungsproblem hinführt. Dementsprechend werden die Propellerblätter in ihrer Wirkung auf die Flüssigkeit durch die gebundenen Wirbellinien ersetzt, deren Fortsetzung die freien schraubenförmigen Wirbelflächen bilden. Man setzt voraus, daß die Steigung der einzelnen Wirbel, sowie der Durchmesser in Richtung der axialen Koordinate unverändert bleiben. Die Steigung in Richtung der radialen Koordinate ist veränderlich und durch die Entwurfparameter (J und die Bedingung für β_i) gegeben.

Bezeichnet man den dimensionslosen Radius des Aufpunkts, d.h. die Stelle, an der die Wirkung untersucht wird mit

$$x = r/R_p \quad (59)$$

und den Radius der beliebigen schraubenförmigen Wirbellinie mit

$$x_0 = S/R_p \quad (60)$$

dann wird die von dem Propeller induzierte Geschwindigkeit im allgemeinen ausgedrückt durch

$$\frac{w}{v} = \frac{1}{2} \int_{x_N}^1 i \cdot \frac{dG}{dx_0} \frac{dx_0}{x - x_0} \quad (61)$$

wobei

G die dimensionslose Zirkulation an den einzelnen Radien des Propellerflügels bedeutet,

i den Induktionsfaktor als Funktion von x_0 und x , z und β_i ,

x_N den dimensionslos ausgedrückten Nabenradius.

Aufgrund dieser Beziehung kann man die Bedingung (58) für die optimale Zirkulationsverteilung $G_p(x_0)$ auf dem Propellerflügel in der Düse durch die folgende Integro-Differentialgleichung ausdrücken

$$\int_{x_N}^1 \frac{dG_p}{dx_0} \frac{1}{x - x_0} (i_a + i_t \cdot \operatorname{tg} \beta_i) dx_0 = \frac{\pi x \operatorname{tg} \beta_i}{J} - 1 - \left(\frac{w_a}{v} \right)_r - \left(\frac{w_a}{v} \right)_q \quad (62)$$

Die Ausdrücke für die axialen und tangentialen Induktionsfaktoren i_a und i_t , als Grundlage der Propellerrechnung sind von Lerbs übernommen. Für einen Propeller mit der gegebenen Flügelzahl z_p und mit der Bedingung für die Steigung der Wirbellinien β_{i0} sind diese Faktoren durch die folgenden Beziehungen gegeben [11]:

$$i_a = - z_p \frac{x}{x_0 \cdot \operatorname{tg} \beta_{i0}} \left(\frac{x_0}{x} - 1 \right) B_1 \quad (63)$$

$$i_t = -z_p \left(\frac{x_o}{x} - 1 \right) (1 + B_1) \quad (64)$$

Innerer Bereich ($x < x_o$)

$$i_a = z_p \frac{x}{x_o \cdot \text{tg } \beta_{i0}} \left(\frac{x_o}{x} - 1 \right) (1 + B_2) \quad (65)$$

$$i_t = z_p \left(\frac{x_o}{x} - 1 \right) B_2 \quad (66)$$

mit

$$B_{1(\text{bzw. } 2)} = \left(\frac{1 + y_o^2}{1 + y^2} \right)^{0,25} \left[\frac{1}{e^{z_p \cdot A1(2)} - 1} \begin{matrix} (+) \\ (-) \end{matrix} \frac{1}{2z} \cdot \frac{y_o^2}{(1 + y_o^2)^{1,5}} \cdot \right. \\ \left. \cdot \lg_e \left(1 + \frac{1}{e^{z_p \cdot A1(2)} - 1} \right) \right]$$

und

$$A1(\text{bzw. } 2) = \begin{matrix} (+) \\ (-) \end{matrix} \left(\sqrt{1 + y^2} - \sqrt{1 + y_o^2} \right) \begin{matrix} (-) \\ (+) \end{matrix} \frac{1}{2} \lg_e \frac{(\sqrt{1 + y_o^2} - 1)(\sqrt{1 + y^2} + 1)}{(\sqrt{1 + y_o^2} + 1)(\sqrt{1 + y^2} - 1)}$$

wobei

$$y_o = \frac{x_o}{k_o} = \frac{1}{\text{tg } \beta_{i0}} ; \quad y = \frac{x}{k_o} = \frac{x}{x_o \cdot \text{tg } \beta_{i0}} \quad \text{und} \quad k_o = x_o \cdot \text{tg } \beta_{i0}$$

Aus diesen Beziehungen kann man für die Grenzwerte ableiten

$$\frac{x_0}{x} \rightarrow 0 \quad : \quad i_a = 0 ; \quad i_t = z_p$$

$$\frac{x_0}{x} \rightarrow \infty \quad : \quad i_a = \frac{z_p}{\operatorname{tg} \beta_{i0}} ; \quad i_t = 0$$

$$\frac{x_0}{x} \rightarrow 1 \quad i_a = \cos \beta_{i0} ; \quad i_t = \sin \beta_{i0}$$

Für den dimensionslosen Radius x bzw. x_0 wird eine neue Variable φ bzw. φ_0 eingeführt

$$x = 0,5 (1 + x_N) - 0,5 (1 - x_N) \cdot \cos \varphi \quad (67)$$

Der Winkel φ in dem benutzten Bereich von 0 bis π wird in N gleiche Teile unterteilt.

In unseren Fall haben wir $N = 12$ gewählt. Die an den Stellen φ von dem einzelnen Wirbel mit dem Radius φ_0 ermittelten Induktionsfaktoren i_a und i_t werden in gerade Fourier-Reihen entwickelt

$$i_a(t) (\varphi, \varphi_0) = \sum_{\nu=0}^N J_{\nu}^{a(t)} \varphi \cdot \cos \nu \varphi_0 \quad (68)$$

Mit den Werten $J_{\nu}(\varphi)$ können die weiter notwendigen Funktionen h_{μ}^a und h_{μ}^t für jeden Radius φ berechnet werden.

$$h_{\mu}^{a(\text{bzw. } t)}(\varphi) = \frac{\pi}{\sin \varphi} \left[\sin(\mu, \varphi) \sum_{\nu=0}^{\mu} J_{\nu}^{a(t)}(\varphi) \cdot \cos(\nu \varphi) + \cos(\mu \varphi) \sum_{\nu=\mu+1}^{\infty} J_{\nu}^{a(t)}(\varphi) \cdot \sin(\nu \varphi) \right] \quad (69)$$

An den Endpunkten $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ ist der Ausdruck (69) für die Funktionen unbestimmt. Man erhält in diesen Punkten durch eine Anwendung der Regel von L'Hospital die folgenden Werte

$$h_{\mu}^a(0) = \pi \left[\mu \sum_{\nu=0}^{\mu} J_{\nu}^a(0) + \sum_{\nu=\mu+1}^{\infty} J_{\nu}^a(0) \right] \quad (70)$$

$$h_{\mu}^a(\pi) = -\pi \cos(\mu \pi) \left[\mu \sum_{\nu=0}^{\mu} J_{\nu}^a \cos(\nu \pi) + \sum_{\nu=\mu+1}^{\infty} \nu J_{\nu} \cos(\nu \pi) \right]$$

und entsprechend für die $-\text{Werte}$.

Außer den Induktionsfaktoren $i_{a(t)}$ bzw. den Werten $h_{\mu}^{a(t)}$ muß man für die Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten die Werte der gebundenen Zirkulation an dem Propellerflügel $G_p(x_o)$ bestimmen. Diese können aus einer bestimmten Bedingung ermittelt werden. Bei dem in der Düse arbeitenden Propeller haben wir die Betz'sche Bedingung des geringsten Energieverlustes in der Form der Gl. (62) ausgedrückt. Zuerst aber benutzen wir für die noch unbekanntenen Werte von $G_p(\varphi)$ die Zerlegung in eine Fourier-Sinus-Reihe ([4], Gl. 10)

$$G_p(\varphi) = \sum_{\mu=1}^{N-1} G_\mu \cdot \sin(\mu \cdot \varphi) \quad (71)$$

Dadurch erhält man für die allgemeine Gleichung für die vom Propeller induzierten Geschwindigkeiten (61) ([4], Gl.12)

$$\frac{w_{ap}}{v}(\varphi) = \frac{1}{1-x_N} \cdot \sum_{\mu=1}^{N-1} \mu \cdot G_\mu \cdot h_\mu^a(\varphi) \quad (72)$$

bzw.

$$\frac{w_{tp}}{v}(\varphi) = \frac{1}{1-x_N} \cdot \sum_{\mu=1}^{N-1} \mu \cdot G_\mu \cdot h_\mu^t(\varphi)$$

Aufgrund dieser Beziehungen kann man für die Zirkulation am Propeller einschließlich des Düseninflusses anstatt der Integro-Differentialgleichung (62) das folgende Gleichungssystem schreiben

$$\sum_{\mu=1}^{N-1} \mu \cdot G_\mu \left[h_\mu^a(\varphi) + h_\mu^t(\varphi) \cdot \operatorname{tg} \beta_{i\varphi} \right] = \quad (73)$$

$$= (1-x_N) \left[\frac{\pi x}{J} \cdot \operatorname{tg} \beta_{i\varphi} - 1 - \left[\frac{w_a}{v}(\varphi, \bar{z}_1) \right]_x - \left[\frac{w_a}{v}(\varphi, \bar{z}_1) \right]_q \right]$$

Die rechten Seiten des Gleichungssystems sind bekannt und durch die Eingabedaten des Propellers x_N , z_p , J (Gl.1) und BG (Gl.2), sowie durch die für die 'Düse berechneten induzierten Geschwindigkeiten w_{a_x} und w_{a_q} gebildet.

Durch die Lösung dieses Gleichungssystems von $N-1$ Gleichungen (wobei N gleich 12 gewählt wurde) für 11 Werte von φ (nämlich $15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, \dots, 165^\circ$) erhält man die für die weiteren Rechnungen notwendigen Fourier-Koeffizienten G_μ .

Mit G_μ -Koeffizienten kann man auch die von dem Düsenpropeller induzierten axialen und tangentialen Geschwindigkeiten in der Propellerebene (Gl.72) sowie die Werte der gebundenen Zirkulation (Gl.71) an verschiedenen Radien (Gl.67) des in der Düse arbeitenden Propellers bestimmen.

V. Entwurf des Düsenpropellers

=====

V.1 Anwendung des Grim'schen Verfahrens zur Berücksichtigung der Festigkeit und Kavitation an den einzelnen Flügelprofilen des Düsenpropellers

Für den Auftrieb des Profils kann man allgemein schreiben

$$dA = c_a \cdot l \cdot \rho \frac{v^2}{2} ds = \rho \Gamma v ds \quad (74)$$

Mit Benutzung des bekannten Zusammenhangs zwischen den Zirkulationsgrößen $\Gamma \left[\frac{m^2}{s} \right]$ und $G [-]$

$$G = \frac{\Gamma}{\pi D v} \quad (75)$$

können wir die Zirkulation des Profils in den folgenden Formen ausdrücken

$$\Gamma = \frac{1}{2} c_a \cdot l \cdot v \quad (76) \quad \text{bzw.} \quad 2\pi G = \frac{c_a \cdot l}{D} \quad (77)$$

Der Wert der Flügelzirkulation enthält also das Produkt $c_a \cdot l$, d.h. die zwei wichtigen Konstruktionswerte: Länge l und Auftriebsbeiwert c_a des Profils.

Hinsichtlich der hydrodynamischen Verhältnisse ist es zweckmäßig, den Wert des Auftriebsbeiwerts c_a möglichst groß zu wählen, weil sich die Gleitzahl des Profils ξ mit wachsendem c_a -Wert verbessert.

$$\varepsilon = \frac{dw}{dA} = \frac{c_w}{c_a} \quad (78)$$

c_w ist der Widerstandsbeiwert des Profils ($c_w = 0.0075$ gewählt).

Allerdings muß man die Grenzen der Kavitation und Festigkeit beachten. Mit wachsendem c_a -Wert nehmen die Belastung sowie die Kavitationsgefahr zu. Aus beiden Bedingungen kann man ein solches Dickenverhältnis des Profils s/l bestimmen, das unter Berücksichtigung der Festigkeit und Kavitation den besten Wert ε ergibt.

V.-1-A Festigkeitsbeanspruchung des Propellerflügels in der Düse

Die Geschwindigkeits- und Kraftverhältnisse an einem beliebigen Flügelschnitt des Düsenpropellers sind in Bild 5 dargestellt

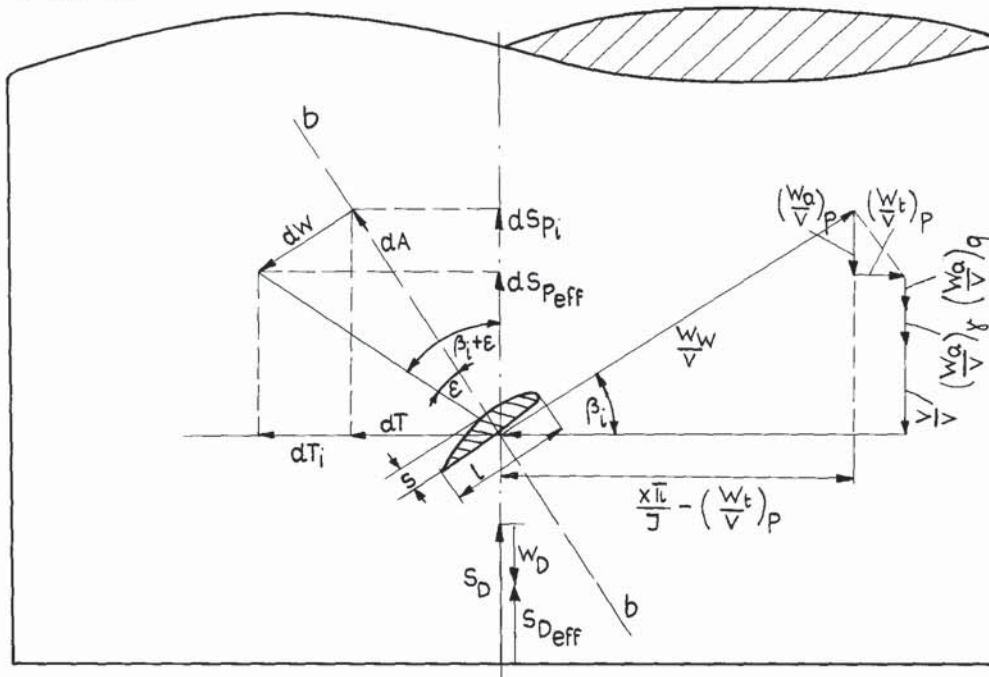


Bild 5

Für jedes beliebige Profil des Düsenpropellers kann man das Produkt $c_a \cdot l$ unter Benutzung der erwähnten Beziehungen nach Bild 7 schreiben

$$c_a \cdot \frac{l}{D} = \frac{2\pi G}{\left(\frac{w_w}{v}\right)} = \frac{2\pi G \cdot \cos \beta_i}{\frac{\pi x}{J} - \left(\frac{w_t}{v}\right)_p} \quad (79)$$

Nimmt man zunächst den Wert $c_a = 0.5$, dann kann man die Länge des Profils dimensionslos in folgender Form ausdrücken

$$\frac{l}{D} = \frac{l_{0,5}}{D} \cdot \frac{0,5}{c_a} \quad (80)$$

wobei

$$\frac{l_{0,5}}{D} = \frac{4\pi G \cdot \cos \beta_i}{\frac{x\pi}{J} - \left(\frac{w_t}{v}\right)_p} \quad (81)$$

Für die an einem Flügelschnitt wirkenden Kräfte in axialer Richtung $dS \equiv Px$ und in tangentialer Richtung $dT = Py$ können wir mit Hilfe des Kutta-Joukowski-Gesetzes und der Gl.(75) nach Bild 5 schreiben

$$dS = \varrho \Gamma \left[\frac{x\pi}{J} - \left(\frac{w_t}{v}\right)_p \right] \cdot v dr = \varrho G \pi D v^2 \left[\frac{x\pi}{J} - \left(\frac{w_t}{v}\right)_p \right] R \cdot dx \quad (82)$$

bzw.

$$(Px \equiv) dS = 4G \left[\frac{x\pi}{J} - \left(\frac{w_t}{v}\right)_p \right] dx \cdot \frac{\varrho v^2}{2} \frac{\pi D^2}{4} \quad (83)$$

Analog in der tangentialen Richtung

$$(P_y \equiv) dT = 4G \left[1 + \left(\frac{w_a}{v} \right)_q + \left(\frac{w_a}{v} \right)_r + \left(\frac{w_a}{v} \right)_p \right] dx \cdot \frac{\rho v^2}{2} \frac{\pi D^2}{4} \quad (84)$$

Aus diesen Kräften resultiert in dem beliebigen Schnitt x_0 ein Biegemoment M_b

$$M_b = M_x \cos \beta_i + M_y \sin \beta_i \quad (85)$$

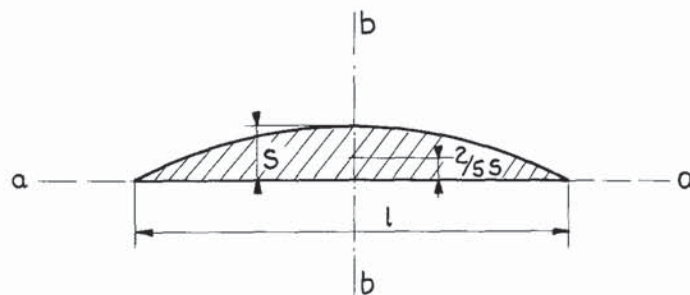
wobei

$$M_x = 4 \int_{x_0}^l G \left[\frac{\pi x}{J} - \left(\frac{w_t}{v} \right)_p \right] (x - x_0) \frac{\rho v^2}{2} \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{D}{2} \cdot dx \quad (86)$$

und

$$M_y = 4 \int_{x_0}^l G \left[1 + \left(\frac{w_a}{v} \right)_q + \left(\frac{w_a}{v} \right)_r + \left(\frac{w_a}{v} \right)_p \right] (x - x_0) \cdot \frac{\rho v^2}{2} \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{D}{2} dx \quad (87)$$

Für das im Bild 6 gezeigte Kreissegmentprofil



$$F = \frac{2}{3} s l$$

$$J_a = \frac{16}{105} s^3 l$$

Bild 6

kann man für das Widerstandsmoment näherungsweise schreiben

$$W \approx \frac{l_s^2}{12}$$

Damit ist es möglich, die Beanspruchung σ des Profils in der folgenden Form anzugeben

$$\sigma = \frac{M_b}{W} = \frac{M_b \cdot 12}{l^3 \left(\frac{s}{l}\right)^2} \quad (88)$$

Bei Benutzung der Gl.(80) ist

$$\sigma = \frac{M_b \cdot 12 \cdot 8 \cdot c_a^3}{l_{0,5}^3 \cdot (s/l)^2} \quad (89)$$

Aus diesem Ausdruck kann der Auftriebsbeiwert c_a des Profils ausgedrückt werden

$$c_a = \sqrt{\frac{\sigma}{\frac{M_b}{l_{0,5}^3} \cdot 12 \cdot 8}} \left(\frac{s}{l}\right)^{\frac{2}{3}} = KK \cdot \left(\frac{s}{l}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (90)$$

Den Parameter KK in dieser Gl.(90) können wir mit Hilfe der Gl. (89), (85), (86) und (87) folgendermaßen umformen

$$KK = \sqrt[3]{\frac{\sigma_{zul} \cdot \left(\frac{l_{0,5}}{D}\right)^3 \cdot D^3}{12 \cdot 8 \cdot 4 \sum_{\varphi=0}^N G(x-x_0) \left\{ [WTX] \cos \beta_i + [WAX] \sin \beta_i \right\} \frac{\rho v^2}{2} \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{D}{2} \frac{1-x_N}{2} \frac{\pi}{N} \cdot \sin(\varphi)}}$$

wobei

$$WTX = \frac{\pi x}{J} - \left(\frac{w_t}{v}\right)_p \quad (92)$$

$$WAX = 1 + \left(\frac{w_a}{v}\right)_q + \left(\frac{w_a}{v}\right)_r + \left(\frac{w_a}{v}\right)_p \quad (93)$$

Bei Benutzung der maximal zulässigen Spannung

$$\sigma_{zul} = 600 \text{ kp/cm}^2$$

bzw.

$$\sigma_{zul} = 6,000\,000 (1 + 0,3x) \quad \left[\frac{\text{kp}}{\text{m}^2} \right]$$

und mit Benutzung des von der Gl.(67) abgeleiteten Ausdruckes

$dx = 0,5(1-x_N) \sin \varphi d\varphi$ mit $d\varphi = \frac{\pi}{N}$ bekommt man den Festigkeitsparameter KK (92) in der Form

$$KK = \sqrt[3]{\frac{4800 (1 + 0,3x) \cdot \left(\frac{t_{0,5}}{D}\right)^3 N}{v^2 \pi^2 (1-x_N) \sum_{\varphi=0}^N G(x-x_0) \sin \varphi [W_{TX} \cdot \cos \beta_i + WAX \cdot \sin \beta_i]}} \quad (94)$$

Für den Wert v^2 wurde näherungsweise die Beziehung

$$v^2 = 40 \cdot J$$

gewählt.

Alle Werte der Gl.(94) sind aus den vorherigen Rechnungen bekannt, so daß man mit dem Parameter KK die Gleichung (90) für einzelne Dickenverhältnisse s/l bestimmen kann.

Diese Parabeln entsprechen der maximal zulässigen Spannung was bedeutet, daß alle Werte c_a in Abhängigkeit von dem Dickenverhältnis s/l bei einem bestimmten Festigkeitsparameter KK unter der Kurve I, die dem Parameter KK entspricht, liegen müssen (siehe Verläufe KK im Bild 7).

V.-1-B Vermeidung der Kavitationsgefahr

Das Druckverhältnis $\frac{\Delta p}{q}$, bei dem unter gewissen Bedingungen die Kavitation eintritt, ist als Kavitationszahl σ_x in folgender Form gegeben

$$\sigma_x = \frac{(p_0 - e)}{\rho/2 v^2 (1 + \frac{u^2}{v^2})} = \frac{K}{v^2 (1 + 10 \frac{x^2}{j^2})} \quad (95)$$

wobei $K = 2 \left(\frac{p_0 - e}{\rho} \right)$ (96)

und e der Dampfdruck des Wasserdampfes. (Es wird $e = 200 \text{kp/m}^2$ gewählt).

ρ die Dichte der Masse $\left[\rho = 104 \frac{\text{kp} \cdot \text{s}^2}{\text{m}^4} \right]$

p_0 der Druck kp/m^2 an der betrachteten Stelle.

Den maximal zulässigen Auftriebsbeiwert in Bezug auf die Kavitationsgefahr kann man aufgrund der Auswertung der Messungen an Profilen aus verschiedenen Gleichungen bestimmen, z.B. nach der von Lerbs ([12], Gl.37) entworfenen Formel

$$c_a \leq \frac{\pi}{2} \sigma_x - 4 \text{ s/l}$$

hier benutzt in der Form

$$c_a = 1,4 \sigma_x - 6 \text{ s/l} \quad (97)$$

In der eingeführten Abhängigkeit (siehe Kurven II im Bild(7)) bedeutet dies, daß zur Vermeidung der Kavitationsgefahr der Wert c_a bei einer bestimmten Kavitationszahl σ_x in dem Bereich unter der entsprechenden Kurve II liegen muß.

Da der Wert c_a möglichst groß sein soll, wäre es am besten, einen Wert zu wählen, der im Schnittpunkt der beiden Kurven Gl.(90) und Gl.(97) liegt, für den also gilt

$$1,4 \sigma_x - 6 \text{ s/l} = KK \left(\text{s/l} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (98)$$

Daraus kann man näherungsweise das optimale Dickenverhältnis s/l an einzelnen Radien folgendermaßen ausdrücken

$$\left(\frac{s}{l}\right)^{\frac{1}{2}} = -0,057 \kappa\kappa + \sqrt{0,00325 \kappa\kappa^2 + 0,2333 \sigma_x} \quad (99)$$

Bei geringer Kavitationsgefahr (σ_x sehr groß) würde der Wert c_a bzw. s/l zu groß. Darum wird in Bezug auf die Ablösung die willkürliche Grenzkurve III gewählt, z.B.

$$c_a = 0,9 - 6 \left(\frac{s}{l}\right)^{\frac{4}{3}} \quad (100)$$

(bzw. nach Grim $c_a = 1,2 - 9 \left(\frac{s}{l}\right)^{\frac{4}{3}}$ - G Kurve }
 siehe Bild 7 }

Der Schnittpunkt der Kurven I Gl.(90) und III Gl. (100) gibt das optimale Dickenverhältnis

$$\left(\frac{s}{l}\right)^{\frac{2}{3}} = - \frac{\kappa\kappa + \sqrt{\kappa\kappa^2 + 21,6}}{12} \quad (101)$$

bzw.

$$\left(\frac{s}{l}\right)^{\frac{2}{3}} = - \frac{\kappa\kappa + \sqrt{\kappa\kappa + 43}}{18}$$

V.-1-C Bestimmung der Profilparameter und der Gleitzahl

Der durch die Gl.(99) bestimmte Wert von s/l bzw. c_a muß geprüft werden, ob er innerhalb des durch die Kurve III begrenzten Bereiches liegt (siehe Bild 7). Wenn das nicht der Fall ist, muß s/l aus Gl.(101) bestimmt werden. Praktisch wird immer der kleinere der beiden Werte s/l für die Bestimmung des Profils gewählt.

$$\frac{l}{D} = \frac{4 \pi G \cos \beta_i}{\frac{x\pi}{J} - \left(\frac{w_t}{v}\right)_p} \cdot \frac{0,5}{KK \cdot (s/l)^{\frac{2}{3}}} \quad (103)$$

Ferner kan die Gleitzahl ε Gl.(78) berechnet werden. Der Widerstandsbeiwert des Profils c_w hängt bei stoßfreier Anströmung in bekannter Weise von der Reynold'schen Zahl und dem Dickenverhältnis ab. Für den überkritischen Modellbereich ($Re > 10^6$) können wir dann für die Gleitzahl ε schreiben

$$\varepsilon = \frac{c_w}{c_a} = \frac{0,0075 (1 + 2s/l)}{c_a} \quad (104)$$

wobei s/l durch die Gl.(99) bzw. (101) und c_a durch die Gl.(90) gegeben ist.

Die so bestimmten c_a - und l -Werte sind für den Entwurf der Profile nötig.

V.-2 Schub- und Leistungsbeiwert des Düsenpropellers

Mit Hilfe der in Kapitel IV definierten Geschwindigkeiten (w_{a_y} und w_{a_q}), die in der Propellerebene von der Düse und den Geschwindigkeiten (w_{a_p}, w_{t_p}) des Düsenpropellers (w_{a_p}, w_{t_p}) induziert sind, können wir die Geschwindigkeitsverhältnisse des Düsenpropellers berechnen. Fernerhin haben wir auch die Werte der Zirkulation $G_p(\varphi)$ an dem Düsenpropellerflügel bestimmt.

Benutzen wir weiter die allgemeinen Beziehungen der Propellertheorie Gl. (57 und 75), so können wir nach dem Gesetz von Kutta-Joukowski

$$dA = \rho \Gamma w_w dr \quad (105)$$

die einzelnen Kraftwirkungen des Düsenpropellers folgendermaßen ausdrücken:

V.-2-A Schubbelastungsgrad des Düsenpropellers

$$C_{S_p} = \frac{S_p}{\frac{\rho v^2}{2} \pi R_p^2}$$

wobei S_p der effektive Schub des Propellers ist [kp].

$$S_{p_{eff}} = z_p \cdot R_p \int_{x_N}^1 \rho \Gamma (\omega r - w_{t_p}) (1 - \varepsilon \operatorname{tg} \beta_i) dx$$

Dann lautet der Ausdruck für den Schubbelastungsgrad des Düsenpropellers

$$C_{S_p} = 4 z_p \int_{x_N}^1 G \left[\frac{x \pi}{J} - \left(\frac{w_t}{v} \right)_p \right] \frac{\cos(\beta_i + \varepsilon)}{\cos \beta_i} dx \quad (106)$$

V.-2-B Leistungsgrad des Antriebssystems

$$C_N = \frac{N_h}{\rho \frac{v^3}{2} \pi R_p^2} \quad (107)$$

wobei N_h die Leistung des Propellers in $\left[\frac{\text{kpm}}{\text{s}} \right]$ unter Berücksichtigung der Verluste infolge der Zähigkeit der Flüssigkeit ist.

$$N_n = \int_0^R dT r \omega dr = z_p R_p^2 \int_{x_N}^1 \rho \Gamma (v + w_{a_p} + w_{a_y} + w_{a_q}) \cdot x \cdot \omega \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \beta_i}\right) dx$$

$$C_N = 4 z_p \int_{x_N}^1 G \cdot x \cdot \frac{R \omega}{v} \frac{v + w_{a_p} + w_{a_y} + w_{a_q}}{v} \frac{(\sin \beta_i + \varepsilon \cos \beta_i)}{\sin \beta_i} dx$$

Der Leistungsbeiwert des Propellers in der Düse kann man dann folgendermaßen ausdrücken

(108)

$$C_N = \frac{4 z_p \cdot \pi}{J} \int_{x_N}^1 G \cdot x \left[1 + \left(\frac{w_a}{v}\right)_p + \left(\frac{w_a}{v}\right)_y + \left(\frac{w_a}{v}\right)_q \right] \frac{\sin(\beta_i + \varepsilon)}{\sin \beta_i} dx$$

V.-2-C Taylor-Wert für die Belastung

In der Propellertheorie benutzt man sehr oft den von Taylor eingeführten Beiwert

$$B_P = \frac{N \cdot \sqrt{P_D}}{v^{2,5}}$$

wobei

N Drehzahl/min

P_D Leistung in HP

v Geschwindigkeit in kn.

Als Vergleichswert können wir diese Größe für unsere Zwecke benutzen in der Form

$$B_P = 8,2575 \sqrt{\frac{C_N}{J^2}} \quad (109)$$

wobei c_N durch Gl.(107) und J durch Gl.(57) gegeben sind.

V.-3 Wirkungsgrad des Düsenpropellers

Im Sinne der Propellertheorie kann der Wirkungsgrad des Düsenpropellers definiert werden als

$$\eta_p = \frac{S_p \cdot v}{N_n} = \frac{c_{sp}}{c_N} \quad (110)$$

Dabei ist

c_{sp} Schubbelastungsgrad des Düsenpropellers
nach Gl. (105) bzw. (106)

c_N Leistungsgrad des Antriebssystems
nach Gl. (107) bzw. (108)

VI. Kraftwirkungen der Düse bei Vorhandensein eines Propellers
=====

VI.-1 Idealer Schub und Schubbelastungsgrad der Düse

Infolge der Strömungsverhältnisse, die durch den in der Düse arbeitenden Propeller ausgebildet werden, wird von der Düse Schub erzeugt. Diesen kann man nach dem Gesetz von Kutta-Joukowski bestimmen; dafür müssen die Zirkulationsbelegung längs der Düse und die radialen Geschwindigkeiten am Düsenzylinder bekannt sein.

Zwischen den dimensionslosen Werten der Zirkulation an der Düse $\gamma(z')$ [-], die aus den Gl.(18) bzw. (26) in Kapitel III berechnet werden, und den für das Kutta-Joukowski-Gesetz notwendigen Werten $\gamma_L(\xi)$ [m/s] gilt die folgende Beziehung

$$\int_0^L \gamma_L(\xi) d\xi = L \int_0^1 \gamma(z') v dz' \quad (111)$$

Für den idealen Schub der Düse kann man nach dem Gesetz von Kutta-Joukowski schreiben

$$S_D = 2\pi R_D \rho \int_0^L \gamma_L(\xi) \cdot w_{rpd}(\xi) d\xi \quad (112)$$

Wenn man die Schubbelastung der Düse definiert analog der Belastung des Propellers Gl.(106) durch den Ausdruck

$$c_{SDi} = \frac{S_D}{\rho/2 v^2 \pi R_p^2} \quad (113)$$

dann kann man für die ideale Belastung der Düse schreiben

$$C_{SDi} = \frac{2\pi R_D \rho v L_0 \int_0^1 \gamma(z') w_{rpd}(z') dz'}{\pi \frac{\rho v^2}{2} R_P^2}$$

Bei der Bezeichnung $x_D = \frac{R_D}{R_P}$ und $h = \frac{L}{D} = \frac{L}{2R_D}$ lautet der ideale Schubbelastungsgrad der Düse C_{SDi} folgendermaßen

$$C_{SDi} = \frac{S_D}{\rho/2 v^2 \pi R_P^2} = 8 \cdot h \cdot x_D^2 \int_0^1 \gamma(z') \cdot \left[\frac{w_r}{v}(x_D, z') \right]_{Pd} \cdot dz' \quad (114)$$

Dabei sind

$\gamma(z')$ die Werte der Zirkulation längs der Düse, die als Ergebnis der Integralgleichung (26) in dem Kapitel III festgestellt sind und

$\left[\frac{w_r}{v}(x_D, z') \right]_{Pd}$ die Werte der durchschnittlichen radialen Geschwindigkeiten, die von dem Düsenpropeller auf dem Düsenzylindermantel induziert sind. Diese werden in dem folgenden Kapitel bestimmt.

VI.-2 Die von den freien Wirbeln des Propellers bzw. Leitrades auf dem Düsenzylinder induzierten Geschwindigkeiten

Für die Bestimmung der Düsenwirkung (112) sowie für die Bildung des ersten Gliedes $F(\mathfrak{S})$ (44) der Integralgleichung für die Berechnung der Düsenzirkulation $\gamma(\mathfrak{S}')$ (26) müssen die radialen Geschwindigkeiten (bzw. ihre Fourier-Koeffizienten WP_u und WL_v) des Propellers und Leitrades an der Düse bekannt sein.

Für die Berechnung der Druckverteilung entlang der Düse werden wir nicht nur die Werte der radialen sondern auch der axialen Geschwindigkeiten brauchen, die auf dem Düsenzylinder induziert werden.

Die von dem Propeller bzw. Leitrad auf dem Düsenzylinder induzierten Geschwindigkeiten können wir aufgrund des Biot-Savart'schen Induktionsgesetzes bestimmen, indem wir den Propeller oder das Leitrad durch gebundene und freie Wirbel ersetzen. Wir vernachlässigen den instationären Charakter der Strömung an der Düse und rechnen mit den an der Düse in der Umfangsrichtung konstanten Durchschnittswerten. Das bedeutet, daß wir die Wirkung der gebundenen Stabwirbel vernachlässigen (auch bei der Betrachtung der unendlichen Flügelzahl haben die gebundenen Wirbel keine Wirkung) und der Propeller bzw. das Leitrad durch die freien schraubenförmigen halbunendlichen Wirbellinien ersetzen. Wie schon in dem Kapitel IV beim Propeller gesagt wurde, betrachtet man in der axialen Richtung konstante Werte der Durchmesser und der Steigungen der freien Wirbel an den einzelnen Radien (gleich $x_0 \cdot \operatorname{tg} \beta_i$). Aus den so bestimmten Werten der induzierten Geschwindigkeiten auf einem beliebigen Ring des Düsenzylinders können wir später in der Umfangsrichtung einen Durchschnittswert bilden, der den stationären Charakter der Düsenströmung ausdrückt.

VI.-2-A Die instationäre Auffassung

Bezeichnet man nach Bild 8 den Aufpunkt U auf der Düse mit den Zylinderkoordinaten $(r \cos \varphi, r \sin \varphi, \xi)$ und den Anfangspunkt des freien Wirbels auf einem Flügel in der Propeller- bzw. Leitradene mit $P'_0 (r_0 \cos \varphi_p, r_0 \sin \varphi_p, 0)$, dann kann man die Koordinate des beliebigen Punktes P auf

bzw.

$$R^2 = r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi + r_o^2 \cos^2 (\varphi_p - \alpha) + r_o^2 \sin^2 (\varphi_p - \alpha) -$$

$$- 2 r r_o \underbrace{[\cos \varphi \cdot \cos (\varphi_p - \alpha) + \sin \varphi \cdot \sin (\varphi_p - \alpha)]}_{\cos [\varphi - (\varphi_p - \alpha)]} + [\xi + d r_o \operatorname{tg} \beta_i]^2$$

also

$$R^2 = r^2 + r_o^2 + [\xi + \alpha r_o \operatorname{tg} \beta_i]^2 - 2 r r_o \cos (\varphi - \varphi_p + \alpha) \quad (116)$$

Die von einer freien halbunendlichen schraubenförmigen Wirbellinie mit der Zirkulation $\Gamma = \frac{d\Gamma}{dr_o} dr_o$ im Aufpunkt U induzierte Geschwindigkeit kann man nach dem Biot-Savart'schen Induktionsgesetz berechnen

$$W_i = - \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^{-\infty} \frac{\vec{R} \times d\vec{s}}{R^3} \quad (117)$$

Der Vektor $d\vec{s}$ ist die Tangente an die Wirbellinie ds im Bereich des Punktes P.

Es gilt:

$$ds = r_o d\alpha$$

Damit können wir den Einheitsvektor ausdrücken in der Form

$$\frac{d\vec{s}}{ds} = -\vec{i} \sin (\varphi_p - \alpha) + \vec{j} \cos (\varphi_p - \alpha) + \vec{k} \operatorname{tg} \beta_i \quad (118)$$

Die Vektormultiplikation der Werte im Zähler des Integranden von Gl.(117) können wir in Determinantenform schreiben

$$\vec{R} \times \frac{\vec{ds}}{ds} = \begin{vmatrix} & i & j & k \\ r \cos \varphi - r_0 \cos(\varphi_p - \alpha) & & & \xi + \alpha r_0 \operatorname{tg} \beta_i \\ & r \sin \varphi - r_0 \sin(\varphi_p - \alpha) & & \\ -\sin(\varphi_p - \alpha) & \cos(\varphi_p - \alpha) & & \operatorname{tg} \beta_i \end{vmatrix}$$

Die allgemeine induzierte Geschwindigkeit ergibt sich mit ihren Komponenten i, j, k in x-, y- und z-Richtung folgendermaßen

$$\begin{aligned} w_i = \frac{\Gamma}{4\pi} r_0 \int_0^\infty & \left[\frac{(\xi + \alpha r_0 \operatorname{tg} \beta_i) \cos(\varphi_p - \alpha) - (r \sin \varphi - r_0 \sin(\varphi_p - \alpha)) \operatorname{tg} \beta_i}{R^3} \vec{i} + \right. \\ & + \frac{(\xi + \alpha r_0 \operatorname{tg} \beta_i) \sin(\varphi_p - \alpha) + (r \cos \varphi - r_0 \cos(\varphi_p - \alpha)) \operatorname{tg} \beta_i}{R^3} \cdot \vec{j} \quad (119) \\ & \left. + \frac{r_0 \cos^2(\varphi_p - \alpha) - r \cos \varphi \cdot \cos(\varphi_p - \alpha) - r \sin \varphi \cdot \sin(\varphi_p - \alpha) + r_0 \sin^2(\varphi_p - \alpha)}{R^3} \cdot \vec{k} \right] d\alpha \end{aligned}$$

Die axiale induzierte Geschwindigkeit einer solchen Wirbel-
linie in dem Punkt U ist die Komponente in z-Richtung, also

$$w_a = w_i \cdot \vec{k}$$

Bei der Benutzung der Beziehung (116) für den Radiusvektor R können wir sie ausdrücken in der Form

$$w_a = \frac{\Gamma r_o}{4\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{r_o - r \cdot \cos(\varphi - \varphi_p + \alpha)}{[r^2 + r_o^2 - 2rr_o \cos(\varphi - \varphi_p + \alpha) + (\xi + \alpha r_o \operatorname{tg} \beta_i)^2]^{\frac{3}{2}}} \right\} d\alpha \quad (120)$$

Für die radiale Komponente der induzierten Geschwindigkeit kann man schreiben

$$\begin{aligned} w_r &= - (w_x \cos \varphi + w_y \sin \varphi) \\ &= - (i w_i \cos \varphi + j w_i \sin \varphi) \end{aligned} \quad (121)$$

also

$$w_r = \frac{\Gamma r_o}{4\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{(\xi + \alpha r_o \operatorname{tg} \beta_i) \cdot \cos(\varphi - \varphi_p + \alpha) - r_o \operatorname{tg} \beta_i \sin(\varphi - \varphi_p + \alpha)}{[r^2 + r_o^2 - 2rr_o \cos(\varphi - \varphi_p + \alpha) + (\xi + \alpha r_o \operatorname{tg} \beta_i)^2]^{\frac{3}{2}}} \right\} d\alpha \quad (122)$$

Die Ausdrücke (120) und (122) für eine schraubenförmige halbunendliche Wirbellinie können wir auch auf die freien Wirbel des Propellers bzw. Leitrades anwenden.

An verschiedenen Radien eines Flügels werden solche Wirbellinien der Intensität $\Gamma(r_o) = \frac{d\Gamma}{dr_o} \cdot dr_o$ betrachtet, und die gesamten axialen und radialen Geschwindigkeiten von jedem Flügel werden durch Integration über den Radius gebildet. Von mehreren Flügeln z_p mit dem Abstand $2\pi/z_p$ bekommen wir in einem beliebigen Aufpunkt U die gesamten

induzierten Geschwindigkeitskomponenten durch die Summation über die Flügelzahl z_p , wobei

$$\psi_p = \frac{2\pi}{z_p} (p-1) \quad \text{mit } p = 1, 2 \dots z_p \quad (123)$$

Allgemein kann man schreiben

$$W_i = \frac{1}{4\pi} \int_{r_N}^R \left[\frac{d\Gamma}{dr_o} r_o \sum_{p=1}^{z_p} \int_0^\infty \left\{ A, R \right\} d\alpha \right] dr_o \quad (124)$$

wobei die Ausdrücke A bzw. R die Integranden der Gleichungen (120) und (122) bezeichnen.

Wir nehmen den Radius des Aufpunkts U gleich dem Radius des Düsenzylinders an,

$$r = R_D \quad (125)$$

und erweitern beide Gleichungen durch den Ausdruck

$$\frac{\frac{1}{R_D}}{\frac{1}{R_D}} = \frac{\frac{1}{R_D}}{R_D^2 \left[\frac{1}{R_D^2} \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (126)$$

Benutzen wir die dimensionslosen Werte der Zirkulation aus Gl.(75) und die Ausdrücke

$$\begin{aligned} r_o &= x_o R_p \\ dr_o &= R dx_o \\ r_N &= x_N R_p \\ R_D &= x_D R_p \end{aligned}$$

so bekommen wir für die von den freien Wirbeln des Propellers bzw. des Leitrades im beliebigen Punkt U an der Düse induzierten Geschwindigkeiten folgende Gleichungen:

$$\frac{w_r}{v} = \frac{1}{2} \int_{x_N}^1 \left\{ \frac{dG_P}{dx_o} \left(\frac{x_o}{x_D} \frac{1}{x_D} \sum_{p=1}^{z_p} \int_0^\infty \cdot \left[\frac{\left[\frac{\xi}{R_D} + \alpha \left(\frac{x_o}{x_D} \right) \operatorname{tg} \beta_i \right] \cos(\varphi - \varphi_p + \alpha) - \left(\frac{x_o}{x_D} \right) \operatorname{tg} \beta_i \sin(\varphi - \varphi_p + \alpha)}{\left\{ 1 + \left(\frac{x_o}{x_D} \right)^2 + \left[\frac{\xi}{R_D} + \alpha \left(\frac{x_o}{x_D} \right) \operatorname{tg} \beta_i \right]^2 - 2 \left(\frac{x_o}{x_D} \right) \cos(\varphi - \varphi_p + \alpha) \right\}^{\frac{3}{2}}} d\alpha \right) \right\} dx_o \quad (127)$$

$$\frac{w_a}{v} = \frac{1}{2} \int_{x_N}^1 \left\{ \frac{dG_P}{dx_o} \frac{1}{x_D - x_o} \cdot \left(\frac{x_o}{x_D} \frac{x_D - x_o}{x_D} \sum_{p=1}^{z_p} \int_0^\infty \cdot \left[\frac{\left(\frac{x_o}{x_D} \right) - \cos(\varphi - \varphi_p + \alpha)}{\left\{ 1 + \left(\frac{x_o}{x_D} \right)^2 + \left[\frac{\xi}{R_D} + \alpha \frac{x_o}{x_D} \operatorname{tg} \beta_i \right]^2 - 2 \frac{x_o}{x_D} \cos \varphi - \varphi_p + \alpha \right\}^{\frac{3}{2}}} d\alpha \right) \right\} dx_o \quad (128)$$

Benutzen wir weiter die Bezeichnung nach der Darstellung der Düse in Bild 2 oder in Schema 9

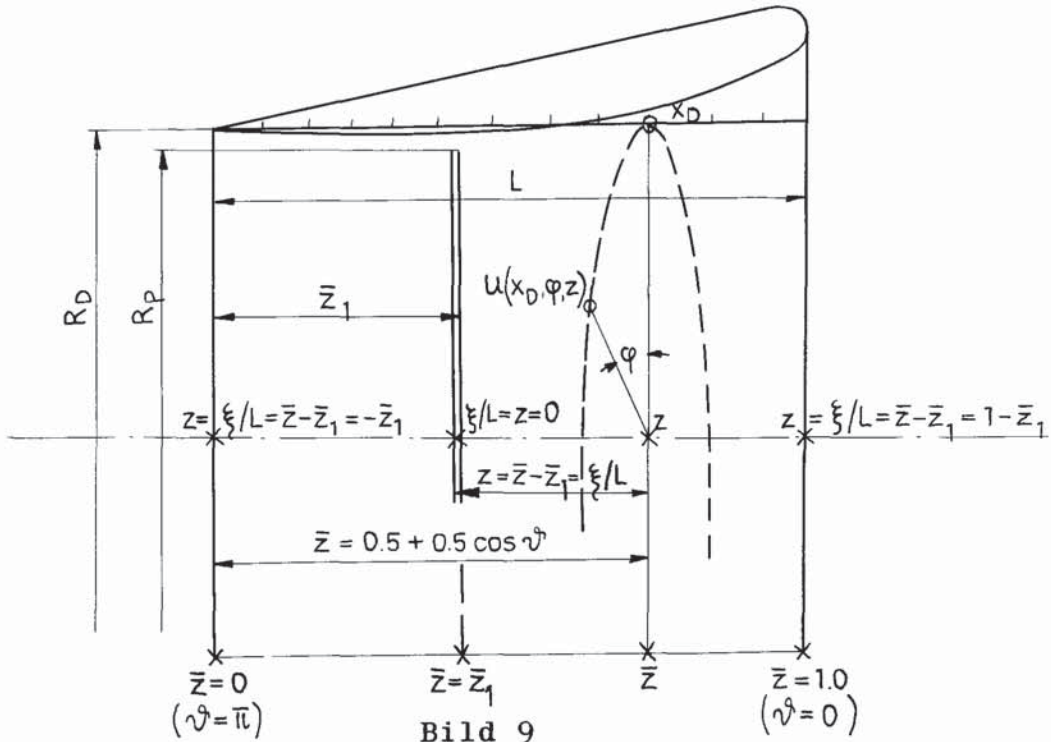
$$\frac{\xi}{L} = z = \bar{z} - \bar{z}_1, \quad (129)$$

dann ist

$$\frac{\xi}{R_D} = \left(\bar{z} - \bar{z}_1 \right) 2h = 2hz \quad (130)$$

wobei $\bar{z} = 0.5 + 0.5 \cos \vartheta$ eine beliebige Stelle auf dem Düsenzylinder und

\bar{z}_1 die Entfernung der Propeller- bzw. Leitradenebene von der Austrittsebene der Düse ist.



So kann man für einen beliebigen Punkt $U(x_D, \varphi, z)$ auf dem Düsenzylinder die einzelnen induzierten Geschwindigkeiten von den freien Wirbeln des Propellers bzw. Leitrades in ähnlichen Formen wie bei Lerbs [4] Gl. (7) und Morgan [3] Gl.(3.1-1) ausdrücken

$$\left[\frac{w_a}{v}(x_D, \varphi, z) \right]_{Pf} = \frac{1}{2} \int_{x_N}^1 \frac{dG_P}{dx_o} \frac{1}{x_D - x_o} \left[i_a' \left(\frac{x_P}{x_D}, \varphi, z \right) \right] dx_o \quad (131)$$

und

$$\left[\frac{w_r}{v}(x_D, \varphi, z) \right]_{Pf} = \frac{1}{2} \int_{x_N}^1 \frac{dG_P}{dx_o} \left[i_r' \left(\frac{x_o}{x_D}, \varphi, z \right) \right] dx_o \quad (132)$$

wobei $i_a^{(1)}$ und $i_r^{(1)}$ den Lerbs-Faktoren analoge Induktionsfaktoren der axialen (a) und radialen (r) Geschwindigkeiten der freien Wirbel (f) sind, diesmal aber für eine beliebige Ebene z und für verschiedene Punkte in der Umfangsrichtung. Aus dem Vergleich der Gleichungen (131) und (132) mit den Gleichungen (127) und (128) erhält man die Ausdrücke für die Induktionsfaktoren

$$\left[i_a^{(1)} \left(\frac{x_o}{x_D}, \varphi, z \right) \right] = \frac{x_o}{x_D} \frac{x_D - x_o}{x_D} \sum_{p=1}^{z_p} \int_0^\infty \cdot \left[\frac{\left(\frac{x_o}{x_D} \right) - \cos(\varphi - \varphi_p + \alpha)}{\left\{ 1 + \left(\frac{x_o}{x_D} \right)^2 + (2h(\bar{z} - \bar{z}_1) + \alpha \left(\frac{x_o}{x_D} \right) \operatorname{tg} \beta_i) \right\}^2 - 2 \left(\frac{x_o}{x_D} \right) \cos(\varphi - \varphi_p + \alpha)} \right] d\alpha \quad (133)$$

$$\left[i_r^{(1)} \left(\frac{x_o}{x_D}, \varphi, z \right) \right] = \frac{x_o}{x_D} \frac{1}{x_D} \sum_{p=1}^{z_p} \int_0^\infty \cdot \left[\frac{\left\{ 2h(\bar{z} - \bar{z}_1) + \alpha \left(\frac{x_o}{x_D} \right) \operatorname{tg} \beta_i \right\} \cos(\varphi - \varphi_p + \alpha) - \left(\frac{x_o}{x_D} \right) \operatorname{tg} \beta_i \sin(\varphi - \varphi_p + \alpha)}{\left\{ 1 + \left(\frac{x_o}{x_D} \right)^2 + (2h(\bar{z} - \bar{z}_1) + \alpha \frac{x_o}{x_D} \operatorname{tg} \beta_i) \right\}^2 - 2 \frac{x_o}{x_D} \cos(\varphi - \varphi_p + \alpha)} \right]^{\frac{3}{2}} d\alpha \quad (134)$$

Durch Umformung des Nenners unter Verwendung von

$$\frac{\xi}{R_p} = z_p^* \quad \text{bzw.} \quad 2h(\bar{z} - \bar{z}_1) = \frac{z_p^*}{x_D} \quad (135)$$

ergibt sich die Form

$$\left[i_r^{(1)} \left(\frac{x_o}{x_D}, \varphi, z \right) \right] = \frac{x_o}{x_D} \frac{1}{x_D} \sum_{p=1}^{z_p} \int_0^\infty \cdot \left[\frac{\left\{ \frac{z_p^*}{x_D} + \alpha \left(\frac{x_o}{x_D} \right) \operatorname{tg} \beta_i \right\} \cos(\varphi - \varphi_p + \alpha) - \left(\frac{x_o}{x_D} \right) \operatorname{tg} \beta_i \cdot (\sin \varphi - \varphi_p + \alpha)}{\left\{ \left(1 - \frac{x_o}{x_D} \right)^2 + \left(\frac{z_p^*}{x_D} + \alpha \left(\frac{x_o}{x_D} \right) \operatorname{tg} \beta_i \right)^2 + 4 \left(\frac{x_o}{x_D} \right) \cdot \sin^2 \frac{1}{2} (\varphi - \varphi_p + \alpha) \right\}^{\frac{3}{2}}} \right] dx \quad (136)$$

Es werden hier einige Ergebnisse der Berechnung der radialen Geschwindigkeiten $\left[\frac{w_r}{v}(x_D, \varphi, z) \right]_{Pf}$ nach der Gl. (132) mit den Induktionsfaktoren nach Gl. (134) für den Fall des Propellers mit $z_p = 4$ und $BG = x_0 \cdot \operatorname{tg} \beta_i = 0,164$ für gegebene Werte der Propellerzirkulation $G_p(x_0)$ bzw. $G_\mu(\varphi)$ für $x_D = 1,0$ gebracht.

Der Charakter des Verlaufes des Integranden der Gl. (134) für einen $i_r^{(1)}$ -Wert mit den Aufpunktkoordinaten $\frac{x_0}{x_D} = 1,0$; $\varphi = 0^\circ$; und $z = \bar{z} - \bar{z}_1 = 0.6$ ist in dem Diagramm 12 des Anh. III zu entnehmen. Die absoluten Größen der Werte hängen von den Koordinaten des Aufpunkts $z, \varphi, \frac{x_0}{x_D}$ ab. Die Maxima der einzelnen Verläufe sind immer um 2π verschoben. Für die α - und z -Werte gilt die Beziehung

$$\alpha = \frac{2(\bar{z} - \bar{z}_1) \cdot h}{\operatorname{tg} \beta_i} \cdot \frac{x_D}{x_0} = \frac{2hz \cdot x_D}{BG} \quad (137)$$

Die Werte des Integranden sind in dem Bereich $\alpha > 12\pi$ geringfügig, der Unterschied zwischen den Ergebnissen der Integration bis $\alpha = 12\pi$ und $\alpha = 20\pi$ ist praktisch Null. (Z.B. für oben genannten Fall $i_r^{(1)}(1,0; 0; 0.6)$ ergibt die Integration von $\alpha = 0$ bis $\alpha = 12\pi$ den Wert 1.435735 und von $\alpha = 0$ bis $\alpha = 20\pi$ den Wert 1.437029).

Für die Integration wurde folgende Teilung benutzt

$$d\alpha = \pi/48 \quad \text{im Bereich} \quad \alpha = 0 \quad \text{bis} \quad 3/2 \pi$$

$$d\alpha = \pi/24 \quad \text{im Bereich} \quad \alpha = 3/2 \pi \quad \text{bis} \quad 7/2 \pi$$

$$d\alpha = \pi/12 \quad \text{im Bereich} \quad \alpha = 7/2 \pi \quad \text{bis} \quad \alpha = 6 \cdot 2\pi$$

Für die doppelt so feine Teilung ($d\alpha = \pi/96, \pi/48$ und $\pi/24$) unterscheiden sich die Ergebnisse von denen mit der größeren

Intervallbreite um weniger als 1%, wie aus der Tabelle 9 ersichtlich.

TAB: 9

$$x_o \cdot \operatorname{tg} \beta_i = 0,164$$

$$z_p = 4$$

$$h = 0,5$$

$i_r^{(1)} \left(\frac{x_o}{x_D}, \varphi, z \right)$	Benutzte Teilung $\left(\frac{\pi}{48} \dots \right)$	Feinere Teilung	Differenz
$i_r^{(1)} (0,2; 0; 0.6):$	0.07708586	0.07648000	0.78595 ‰
$i_r^{(1)} (0.6; 0; 0.6):$	0.65832709	0.65305497	0.80081 ‰
$i_r^{(1)} (1.0; 0; 0.6):$	1.44916110	1.43573570	0.92646 ‰

Der Verlauf der radialen Induktionsfaktoren $i_r^{(1)}$ in der Eintrittsebene der Düse ($z = 0.6$) für die einzelnen Radien $\frac{x_o}{x_D}$ in der Umfangsrichtung φ ist im Diagramm 13 des Anhangs III dargestellt.

Man kann sehen, daß der Verlauf für den Bereich $2\pi/z_p$ periodisch ist, darum wird er für unsere Verhältnisse der Flügelzahl $z_p = 4$ nur im ersten Quadranten $0 \div \pi/2$ der Umfangsrichtung untersucht.

Wie sich der Verlauf der Induktionsfaktoren $i_r^{(1)} \left(z, \varphi, \frac{x_o}{x_D} \right) \equiv iR(J, U, L)$ in den einzelnen Schnitten des Düsenzylinders ändert, ist in den Diagrammen 14 und 15 des Anhangs III gezeigt.

Dabei sind die axialen Entfernungen von der Propellerebene ($\bar{z}_1 = 0.4$)

$$z = \bar{z} - \bar{z}_1 = 0,5 \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot J\right) + 0,1 \quad (138)$$

die einzelnen Radien (beim Nabenradius $x_N = 0.2$ und $x_D = 1,0$)

$$\frac{x_o}{x_D} = 0,6 - 0,4 \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot L\right) \quad (139)$$

und die Punkte in der Umfangsrichtung

$$\varphi = \frac{\pi}{12} \cdot U \quad (140)$$

durch die Indices J, U, L bezeichnet, wobei

$$J = 0, 1, 2, \dots, 12$$

$$L = 0, 1, 2, \dots, 12$$

$$U = 0, 1, 2, \dots, 6$$

Die Faktoren schwanken in der Umfangsrichtung φ besonders an den äußeren Radien ($\frac{x_o}{x_D} = 0,8 \div 1,0$ d.h. $L > 9$) und in den Schnitten hinter der Propellerebene (z-Werte negativ, bzw. $J > 6$).

Für unseren Fall des Propellers mit $BG = x_o \operatorname{tg} \beta_i = 0,164$ mit der Zirkulationsverteilung G_p längs des Propellerflügels nach Bild 16 im Anhang III sind die radialen Geschwindigkeiten an der Düse ($x_D = 1,0$) in einzelnen Ebenen J vor dem Propeller ($z = 0,6 \div 0$).

$\frac{w_r}{v}(z, x_D, \varphi)$ in Abhängigkeit von Umfangsrichtung U ($\varphi = 0 \div \pi/2$) im Bild 10 dargestellt.

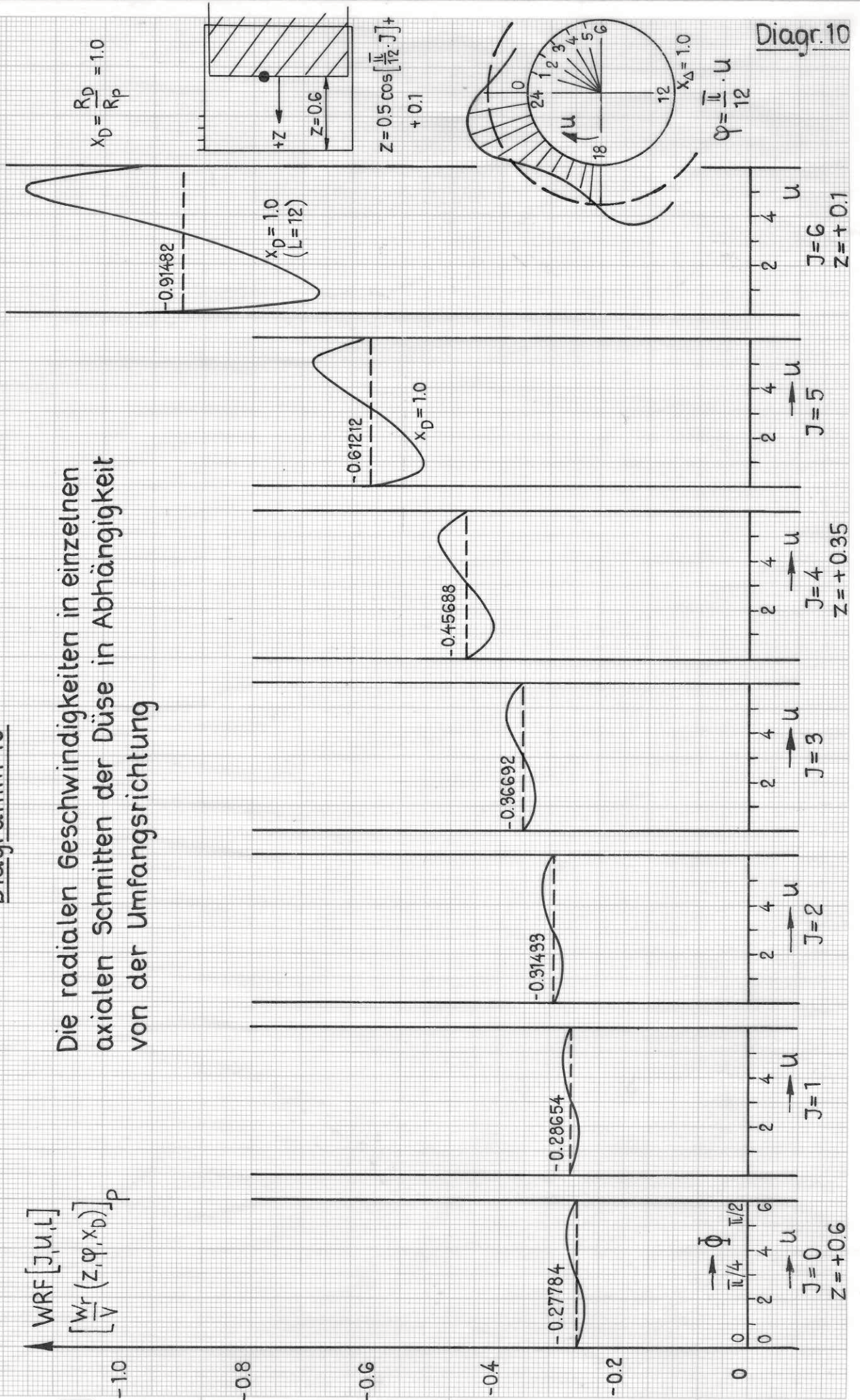
VI.-2-B Die stationäre Auffassung. Die Berechnung der in der Umfangsrichtung der Düse konstanten Durchschnittswerte

Wenn wir den Charakter der Strömung an der Düse als stationär ansehen, müssen wir in der Umfangsrichtung konstante

Diagramm 10

Die radialen Geschwindigkeiten in einzelnen axialen Schnitten der Düse in Abhängigkeit von der Umfangsrichtung

$WRF [J, u, L]$
 $\left[\frac{w_r}{V} (z, \varphi, x_D) \right]_p$



Durchschnittswerte der von den freien Wirbeln des Propellers bzw. Leitrades induzierten Geschwindigkeiten betrachten. Diese können wir in den folgenden Formen bestimmen

$$\frac{w_i}{v}(x_D, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{w_i}{v}(x_D, \varphi, z) d\varphi \quad (141)$$

d.h.

$$\left[\frac{w_a}{v}(x_D, z) \right]_{Pd} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{x_N}^1 \left[\frac{dG_p}{dx_o} \frac{1}{x_D - x_o} \left(\frac{x_o}{x_D} \cdot \frac{x_D - x_o}{x_o} \sum_{p=1}^{z_p} \int_0^{\infty} \cdot \left(\frac{\frac{x_o}{x_D} - \cos(\varphi - \varphi_p + \alpha)}{\left\{ 1 + \left(\frac{x_o}{x_D} \right)^2 + \left[2hz + \alpha \left(\frac{x_o}{x_D} \right) \operatorname{tg} \beta_i \right]^2 - 2 \left(\frac{x_o}{x_D} \right) \cos(\varphi - \varphi_p + \alpha) \right\}^{\frac{3}{2}}} \right) d\alpha \right] dx_o \right\} d\varphi \quad (142)$$

und

$$\left[\frac{w_r}{v}(x_D, z) \right]_{Pd} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{x_N}^1 \left[\frac{dG_p}{dx_o} \left(\frac{x_o}{x_D} \cdot \frac{1}{x_D} \sum_{p=1}^{z_p} \int_0^{\infty} \cdot \left(\frac{\left[2hz + \alpha \left(\frac{x_o}{x_D} \right) \operatorname{tg} \beta_i \right] \cdot \cos(\varphi - \varphi_p + \alpha) - \frac{x_o}{x_D} \operatorname{tg} \beta_i \sin(\varphi - \varphi_p + \alpha)}{\left\{ 1 + \left(\frac{x_o}{x_D} \right)^2 + \left[2hz + \alpha \frac{x_o}{x_D} \operatorname{tg} \beta_i \right]^2 - 2 \frac{x_o}{x_D} \cos(\varphi - \varphi_p + \alpha) \right\}^{\frac{3}{2}}} \right) d\alpha \right] dx_o \right\} d\varphi \quad (143)$$

In den Gleichungen (142) und (143) treten die Ableitungen der Propellerzirkulation längs des Radius $\frac{dG_p}{dx_o}$ auf. Dafür kann man zweckmäßig die Zerlegung

$$G_p(\varphi) = \sum_{\mu=1}^{N-1} G_{\mu} \sin(\mu, \varphi) \quad \text{Gl. (71)}$$

benutzen und

$$\frac{dG}{dx_o} = \frac{dG}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dx_o}$$

schreiben mit

$$x_0 = 0,5(1 + x_N) - 0,5(1 - x_N) \cos \varphi \quad (67)$$

Dann ist

$$\int_{x_N}^1 \frac{dG_p}{dx_0} dx_0 = \int_0^\pi \frac{dG}{d\varphi} d\varphi \quad (144)$$

wobei

$$\frac{dG}{d\varphi} = \sum_{\mu=1}^{N-1} \mu \cdot G_\mu \cdot \cos(\mu \cdot \varphi) \quad (145)$$

- I. Die Gleichung für die Durchschnittswerte der radialen Geschwindigkeiten von den freien Wirbeln des Propellers bzw. Leitrades (143) kann man mit Hilfe der vollständigen elliptischen Integrale umformen.

Nach der Gl. (143) rechnet man zwar mit der Wirkung des Propellers mit endlicher Flügelzahl z_p an der Düse, tut aber so, als ob jeder Flügel die gleiche Wirkung hat, die dem Durchschnittswert entspricht. Deshalb kann statt der Summierung über die einzelnen Flügel jetzt der Durchschnittswert mit der Flügelzahl multipliziert werden. Dafür substituieren wir auch

$$\varphi - \varphi_p = \bar{\varphi} \quad (146)$$

So können wir die Gleichung (143) für die durchschnittlichen radialen Geschwindigkeiten ausdrücken in der Form

$$\left[\frac{W_r}{v} (x_D, z) \right]_{Pd} = \frac{z_P}{4\pi} \int_{x_N}^1 \left\{ \frac{dG_P}{dx_o} \frac{x_o}{x_D} \frac{1}{x_D} [J_2] \right\} dx_o \quad (147)$$

mit

$$J_2 = \left[\int_{-\pi}^{+\pi} \left\{ \int_0^{\infty} \left(\frac{[2hz + \alpha \left(\frac{x_o}{x_D}\right) \operatorname{tg} \beta_i] \cos(\bar{\vartheta} + \alpha) - \frac{x_o}{x_D} \operatorname{tg} \beta_i \sin(\bar{\vartheta} + \alpha)}{\left\{ 1 + \left(\frac{x_o}{x_D}\right)^2 + [2hz + \alpha \left(\frac{x_o}{x_D}\right) \operatorname{tg} \beta_i]^2 - 2 \frac{x_o}{x_D} \cos(\bar{\vartheta} + \alpha) \right\}^{\frac{3}{2}}} \right) d\alpha \right\} d\bar{\vartheta} \right]$$

Der Ausdruck J_2 Gl. (148) in eckigen Klammern kann folgendermaßen umgeformt werden

1. Nenner der Gleichung

$$\begin{aligned} & 1 + \left(\frac{x_o}{x_D}\right)^2 - 2\left(\frac{x_o}{x_D}\right) \cos(\bar{\vartheta} + \alpha) + \left[2hz + \alpha \left(\frac{x_o}{x_D}\right) \operatorname{tg} \beta_i \right]^2 = \\ & = \left(1 + \frac{x_o}{x_D} \right)^2 - \underbrace{2 \frac{x_o}{x_D} - 2 \frac{x_o}{x_D} \cos(\bar{\vartheta} + \alpha)}_{-2 \frac{x_o}{x_D} [1 + \cos(\bar{\vartheta} + \alpha)]} + \left[2hz + \alpha \left(\frac{x_o}{x_D}\right) \operatorname{tg} \beta_i \right]^2 = \\ & = \left(1 + \frac{x_o}{x_D} \right)^2 - 4 \frac{x_o}{x_D} \cos^2 \frac{\bar{\vartheta} + \alpha}{2} + \left[2hz + \alpha \frac{x_o}{x_D} \operatorname{tg} \beta_i \right]^2 \end{aligned}$$

2. Benutzen wir weiter die Substitution

$$\frac{\bar{\vartheta} + \alpha}{2} = \Phi \quad (149)$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \bar{\vartheta} &= 2\Phi - \alpha & \bar{\vartheta} = \pi &\rightarrow \Phi = \frac{\pi}{2} + \alpha \\ d\bar{\vartheta} &= 2d\Phi & \bar{\vartheta} = -\pi &\rightarrow \Phi = -\frac{\pi}{2} + \alpha \end{aligned}$$

Der Ausdruck J_2 Gl. (148) lautet damit:

$$J_2 = 2 \int_0^\infty \left\{ \int_{-\frac{\pi}{2}+\alpha}^{+\frac{\pi}{2}+\alpha} \left[\frac{[2hz + \alpha \left(\frac{x_o}{x_D}\right) \operatorname{tg} \beta_i] \cos^2 \Phi - \left(\frac{x_o}{x_D}\right) \operatorname{tg} \beta_i \cdot \sin^2 \Phi}{\left\{ (2hz + \alpha \left(\frac{x_o}{x_D}\right) \operatorname{tg} \beta_i)^2 + \left(1 + \frac{x_o}{x_D}\right)^2 - 4 \left(\frac{x_o}{x_D}\right) \cos^2 \Phi \right\}^{\frac{3}{2}}} \right] d\Phi \right\} d\alpha \quad (150)$$

3. Erweitern wir diese Gleichung analog wie in (126) durch den Ausdruck

$$\frac{\frac{1}{\frac{x_o}{x_D} \operatorname{tg} \beta_i}}{\frac{1}{\frac{x_o}{x_D} \operatorname{tg} \beta_i}} = \frac{1}{\left(\frac{x_o}{x_D}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \beta_i \left[\frac{1}{\left(\frac{x_o}{x_D} \operatorname{tg} \beta_i\right)^2} \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (151)$$

dann ist

$$J_2 = 2 \int_0^\infty \left\{ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left[\frac{\left[\frac{2hz}{\frac{x_o}{x_D} \operatorname{tg} \beta_i} + \alpha \right] \cos 2\Phi - \sin 2\Phi}{\left(\frac{x_o}{x_D}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \beta_i \left\{ \left[\frac{2hz}{\frac{x_o}{x_D} \operatorname{tg} \beta_i} + \alpha \right]^2 + \frac{\left(1 + \frac{x_o}{x_D}\right)^2 - 4 \left(\frac{x_o}{x_D}\right) \cos^2 \Phi}{\left(\frac{x_o}{x_D}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \beta_i} \right\}^{\frac{3}{2}}} \right] d\Phi \right\} d\alpha \quad (152)$$

4. Wir wählen folgende Bezeichnungen

$$\frac{2hz}{\frac{x_o}{x_D} \operatorname{tg} \beta_i} = \xi \quad (153); \quad \frac{2hz}{\frac{x_o}{x_D} \operatorname{tg} \beta_i} + \alpha = \xi + \alpha = \eta \quad (154)$$

und

$$\frac{\left(1 + \frac{x_o}{x_D}\right)^2 - 4 \left(\frac{x_o}{x_D}\right) \cos^2 \Phi}{\left(\frac{x_o}{x_D}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \beta_i} = \sigma^2 \quad (155)$$

Dann erhalten wir für J_2

$$J_2 = \frac{2}{\left(\frac{x_o}{x_D}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \beta_i} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left\{ \int_0^\infty \left[\frac{(\xi + \alpha) \cos 2\Phi - \sin 2\Phi}{\left[(\xi + \alpha)^2 + \sigma^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right] d\alpha \right\} d\Phi \quad (156)$$

Mit der erwähnten Substitution (154)

$$\begin{aligned}\xi + \alpha &= \varrho \\ d\alpha &= d\varrho\end{aligned}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}J_2 &= \frac{2}{\left(\frac{x_o}{x_D}\right)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \beta_i} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left[\cos 2\Phi \int_{\xi}^{\infty} \frac{\varrho}{[\varrho^2 + \sigma^2]^{\frac{3}{2}}} d\varrho \right] d\Phi - \\ &- \frac{2}{\left(\frac{x_o}{x_D}\right)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \beta_i} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left[\sin 2\Phi \int_{\xi}^{\infty} \left(\frac{1}{[\varrho^2 + \sigma^2]^{\frac{3}{2}}} \right) d\varrho \right] d\Phi\end{aligned}\tag{157}$$

Integrale dieses Typs sind in [13] (Int.206 und 207) gelöst. Die partielle Integration ergibt

$$J_2 = \frac{2}{\left(\frac{x_o}{x_D}\right)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \beta_i} \left\{ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos 2\Phi \left[\frac{1}{(\varrho^2 + \sigma^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_{\varrho=\xi}^{\varrho=\infty} d\Phi - \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sin 2\Phi \left[\frac{\varrho}{\sigma^2(\varrho^2 + \sigma^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_{\varrho=\xi}^{\varrho=\infty} d\Phi \right\}\tag{158}$$

Das zweite Integral ist gleich Null, weil sein Integrand antimetrisch ist. Da aber der erste Integrand eine symmetrische Funktion ist, können wir weiter für J_2 schreiben

$$J_2 = \frac{2}{\left(\frac{x_o}{x_D}\right)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \beta_i} \cdot \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos 2\Phi \frac{1}{(\xi^2 + \sigma^2)^{\frac{1}{2}}} d\Phi = \frac{4}{\left(\frac{x_o}{x_D}\right)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \beta_i} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\Phi}{\sqrt{\xi^2 + \sigma^2}} d\Phi\tag{159}$$

Das elliptische Integral dieses Typs können wir mit Hilfe der bekannten vollständigen elliptischen Integrale der ersten und zweiten Gattung $K(k_1)$ Gl.(9) und $E(k_1)$ Gl.(10) mit

$$k_1^2 = \frac{4 \frac{x_o}{x_D}}{\left(1 + \frac{x_o}{x_D}\right)^2 + 4 h^2 z^2} ; \quad (160)$$

folgendermaßen umformen:

5. Bei Benutzung der Bezeichnungen von 3), d.h. Gl.(153) und (155) ist das Integral J_2 gleich

$$J_2 = \frac{4}{\left(\frac{x_o}{x_D}\right)^2 \cdot \text{tg}^2 \beta_i} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\cos 2\Phi}{\sqrt{\frac{4 h^2 z^2}{\left(\frac{x_o}{x_D}\right)^2 \text{tg}^2 \beta_i} + \frac{\left(1 + \frac{x_o}{x_D}\right)^2 - 4 \left(\frac{x_o}{x_D}\right) \cos^2 \Phi}{\left(\frac{x_o}{x_D}\right)^2 \cdot \text{tg}^2 \beta_i}}} \right) d\Phi \quad (161)$$

6. Diese Gleichung ersetzt man zweckmäßig mit dem Ausdruck k_1 Gl. (160)

$$J_2 = \frac{4}{\frac{x_o}{x_D} \text{tg} \beta_i \sqrt{4 \left(\frac{x_o}{x_D}\right)}} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{k_1 \cdot \cos 2\Phi}{\frac{\sqrt{4 h^2 z^2 + \left(1 + \frac{x_o}{x_D}\right)^2 - 4 \frac{x_o}{x_D} \cos^2 \Phi}}{\sqrt{4 h^2 z^2 + \left(1 + \frac{x_o}{x_D}\right)^2}}} \right) d\Phi \quad (162)$$

Dann wird

$$J_2 = \frac{2}{\left(\frac{x_o}{x_D}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \text{tg} \beta_i} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{k_1 \cdot \cos 2\Phi}{\sqrt{1 - k_1^2 \cos^2 \Phi}} \right) d\Phi$$

bzw.

$$J_2 = \frac{2}{\operatorname{tg} \beta_i \left(\frac{x_0}{x_D}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot k_1} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{k_1^2 (2 \cos^2 \Phi - 1)}{\sqrt{1 - k_1^2 \cos^2 \Phi}} \right) d\Phi \quad (163)$$

7. Mit der Substitution

$$\begin{aligned} \cos^2 \Phi &= \sin^2 \vartheta \\ d\Phi &= -d\vartheta \\ \Phi = 0 &\rightarrow \vartheta = \pi/2 \\ \Phi = \pi/2 &\rightarrow \vartheta = 0 \end{aligned} \quad (164)$$

kann man für J_2 schreiben

$$J_2 = \frac{2}{\operatorname{tg} \beta_i \left(\frac{x_0}{x_D}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot k_1} \cdot J_0 \quad (165) \quad \text{wobei}$$

$$J_0 = \int_0^{\pi/2} \frac{k_1^2 (2 \sin^2 \vartheta - 1)}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \vartheta}} d\vartheta \quad (166)$$

8. Den Ausdruck für J_0 Gl. (166) können wir folgendermaßen umformen

$$J_0 = \int_0^{\pi/2} \frac{2k_1^2 \sin^2 \vartheta - k_1^2 - 2 + 2}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \vartheta}} d\vartheta = \int_0^{\pi/2} \frac{-2(1 - k_1^2 \sin^2 \vartheta) + 2 - k_1^2}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \vartheta}} d\vartheta \quad (167)$$

$$J_0 = -2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \vartheta} d\vartheta + (2 - k_1^2) \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \vartheta}} d\vartheta$$

Hier ist

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k_1^2 \sin^2 \vartheta}} d\vartheta = K(k_1) \quad (9) \quad \begin{array}{l} \text{das vollständige elliptische} \\ \text{Integral der ersten Gattung} \end{array}$$

und

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k_1^2 \sin^2 \vartheta} d\vartheta = E(k_1) \quad (10) \quad \begin{array}{l} \text{das vollständige elliptische} \\ \text{Integral der zweiten Gattung,} \end{array}$$

k_1 ist durch die Gl.(160) gegeben.

Dann ist

$$J_0 = -2 E(k_1) + (2 - k_1^2) K(k_1) \quad (168)$$

und nach der Gl. (165)

$$J_2 = \frac{2}{\operatorname{tg} \beta \left(\frac{x_0}{x_D}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot k_1} \left[(2 - k_1^2) K(k_1) - 2 E(k_1) \right] \quad (169)$$

Der Ausdruck für die durchschnittliche radiale Geschwindigkeit (147), die von dem Propeller am Düsenzylinder induziert wird

$$\left[\frac{w_r}{v} (x_D, z) \right]_{P_d} = \frac{z_P}{4\pi} \int_{x_N}^i \left\{ \frac{dG_P}{dx_0} \left(\frac{x_0}{x_D} \right) \left(\frac{1}{x_D} \right) [J_2] \right\} dx_0$$

erhält dann schließlich die Form

$$\left[\frac{w_r}{v} (x_D, z) \right]_{P_d} = \frac{z_P}{2\pi x_D} \int_{x_N}^i \left\{ \frac{dG_P}{dx_0} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \beta_i} \cdot \frac{1}{k_1} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x_0}{x_D}\right)^{\frac{3}{2}}} \left[(2 - k_1^2) K(k_1) - 2 E(k_1) \right] \right\} dx_0 \quad (170)$$

Die einzelnen Größen k_1 , $K(k_1)$, $E(k_1)$ wurden durch die Gl. (160), (9 und 10) erklärt.

Die Zuverlässigkeit dieser Gleichung (170) wurde an einem Beispiel geprüft. Die durchschnittlichen Radialgeschwindigkeiten $\left[\frac{w_r}{v}(x_D, z) \right]_{Pd}$ wurden für denselben Propeller ($z_p = 4$; $BG = x_0 \cdot \tan \beta_i = 0,164$; mit den gleichen Zirkulationswerten) auf zwei Arten gerechnet. Einmal wurden die Werte nach Gl. (170) berechnet. Die Ergebnisse der Gl. (170) für diesen Fall sind in der Tabelle 10 in der Spalte mit der Bezeichnung "Methode I" gegeben.

Für die Vergleichsrechnung wurde von der Formel (132) mit dem Ausdruck (134) bzw. (135) für $i_r^{(1)}$ ausgegangen. Von den so erhaltenen Werten $\left[\frac{w_r}{v}(x_D, \varphi, z) \right]_p$ in verschiedenen Punkten des Umfangs wurden die Durchschnittswerte $\left[\frac{w_r}{v}(x_D, z) \right]_{Pd}$ gebildet Gl. (141). Diese Werte zeigten in den Ebenen vor dem Propeller sehr gute Übereinstimmung, in den Ebenen hinter dem Propeller leider nicht, weil die $i_r^{(1)}$ -Faktoren an den äußeren Radien sehr großen Schwankungen unterworfen sind (siehe Diagramm (14) und (15) im Anhang III). Daher wäre für eine genauere Bestimmung der radialen Geschwindigkeiten in den Ebenen hinter dem Propeller eine bedeutend genauere Rechnung (feinere Unterteilung in der Umfangsrichtung) erforderlich gewesen. Die Ergebnisse $\left[\frac{w_r}{v}(x_D, \varphi, z) \right]$ aus Gl. (132) für einzelne Ebenen vor dem Propeller sind in Bild 10 dargestellt. In der Spalte "Methode II" der Tabelle 10 sind die Durchschnittswerte von diesen aus der Gl. (132) bestimmten Werten, die nach der Gl. (141) gebildet worden sind, angegeben; aus den schon genannten Gründen - betreffend die Genauigkeit der Rechnung - nur für die Ebenen vor dem Propeller. Da aber der Verlauf der ra-

dialen Geschwindigkeiten am Düsenzylinder zur Propellerebene symmetrisch sein muß, kann man aus der Übereinstimmung der Werte in den Ebenen vor dem Propeller die Zuverlässigkeit der Gl. (170) erkennen.

Im Bild 11 sind die Ergebnisse beider Methoden dargestellt. Man sieht, daß im Rahmen der Zeichengenauigkeit kein Unterschied vorhanden ist. In der Propellerebene ($\bar{z} = 0.4$ bzw. $z = 0$) treten extreme Werte bzw. für $x_D = 1.0$ eine Singularität auf. Darum sind die Werte von $W_{r_{pd}}$ nicht direkt in der Propellerebene bestimmt worden.

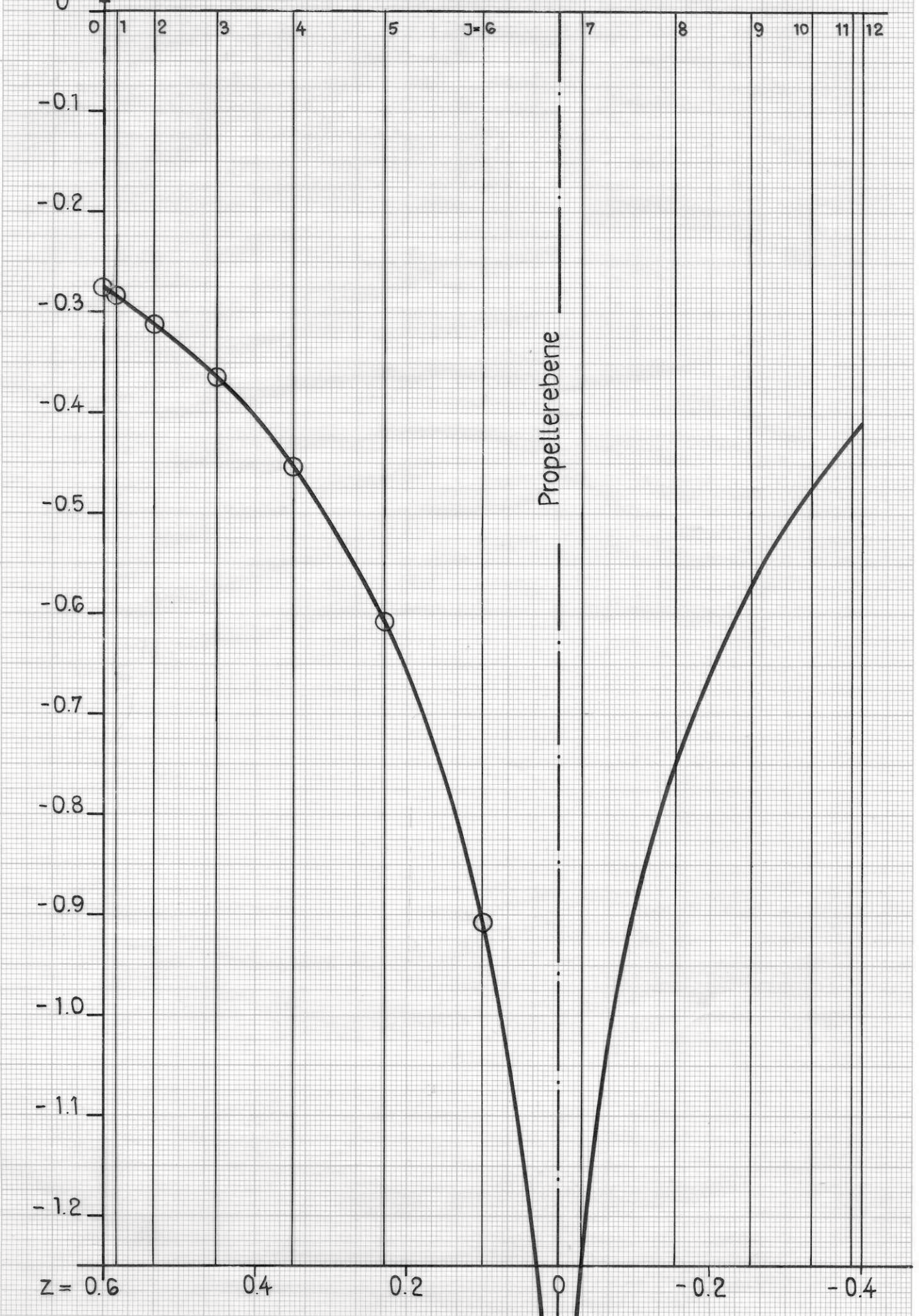
TAB. 10

Propeller $z_p = 4$ $x_D = 1.0$
 BG=0.164 $\bar{z}_p = 0.4$ $\left[\frac{w_r}{v}(x_D, z) \right]_{pd}$ - Werte

J	$\bar{z} = 0.5$ $+ 0.5 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \cdot J$	$z = \bar{z} - z_p$ $= \bar{z} - 0.4$	METHODE I Gl. (170) $\left[\frac{w_r}{v}(x_D, z) \right]_p = f[K(k_i), E(k_i)]$	METHODE II Gl. (141) bzw. (143) $\left[\frac{w_r}{v}(x_D, z) \right]_{pd} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{w_r(x_D, \varphi, z)}{v} d\varphi$
0	1.0000	+ 0.6000	- 0.27775	- 0.27784
1	0.98295	+ 0.58295	- 0.28641	- 0.28654
2	0.9330	+ 0.5333	- 0.31409	- 0.31433
3	0.85355	+ 0.4535	- 0.36648	- 0.36692
4	0.7500	+ 0.3500	- 0.45612	- 0.45688
5	0.6294	+ 0.2294	- 0.61081	- 0.61212
6	0.5000	+ 0.1000	- 0.91143	- 0.91482
PE	0,400	0,000	Propellerebene	
7	0.3706	- 0.0294	- 1.26553	
8	0.2500	- 0.1500	- 0.76794	
9	0.14645	- 0.25355	- 0.57366	
10	0.0670	- 0.3330	- 0.47392	
11	0.017055	- 0.3825	- 0.42438	
12	0.000	- 0.4000	- 0.40920	

Diagramm 11

$\left[\frac{w_r}{V} (x_D, z) \right]_{Pd}$ Die Radialgeschwindigkeiten des Propellers a.d. Düse



II. Die vom Propeller an der Düse induzierten Axialgeschwindigkeiten können aus der Gl.(131), d.h. mit Hilfe der axialen Induktionsfaktoren i_a Gl.(133) bestimmt werden. Wie die axialen Induktionsfaktoren $i_a(Z, \varphi, \frac{x_0}{x_D}) = IA [J, U, L]$ - Bezeichnungen analog den radialen Faktoren - in etwa verlaufen, ist in Diagr.7 in Anhang III gezeigt. Für unseren Propeller ($BG=0.164, G_p$ -Werte nach Bild 16/III) sind die Axialgeschwindigkeiten $\frac{w_a}{v}(Z, \varphi, x_D)$ in einzelnen Punkten an der Düse ($h=0.5, \alpha_e=7.7^\circ$) in Diagr.18 des Anhangs III dargestellt. Der Vergleich mit den Radialgeschwindigkeiten an der Düse zeigt hier die größeren Schwankungen in der Umfangsrichtung schon in den Ebenen nahe vor der Propellerebene.

Die in der Umfangsrichtung konstanten Durchschnittswerte der Axialgeschwindigkeiten an der Düse kann man aus Gl.(141), bzw. Gl.(142) berechnen. Die für einige Ebenen der Düse so berechneten Werte sind in Diagr.19 (Anh.III) eingetragen. Der Verlauf dieser Axialgeschwindigkeiten an der Düse ist zur Propellerebene antimetrisch. Die Berechnung der Induktionsfaktoren und daher auch die Auswertung der Gl.(142) benötigt einen großen Zeitaufwand. Aus diesem Grunde werden für die weiteren Rechnungen des Druckverlaufs an der Düse die möglichen Strömungsabläufe an der Düse mit Hilfe der Tabellen von Hough und Ordway [18] für die induzierten Axialgeschwindigkeiten abgeschätzt. Diese Tabelle wurde ebenfalls in der neuesten Arbeit von Morgan [17] benutzt; sie erscheint hier als Tabelle 11.

Die Tabellenwerte gelten eigentlich für die linearen Bedingungen des Propellers, d.h. für kleine Belastungen (bis $c_s \approx 1$). Für die Bestimmung der Radialgeschwindigkeiten sind sie zu ungenau; diese wurde besser aus Gl.(170) bestimmt.

Diagr.19 (Anh.III) zeigt den Verlauf der Axialgeschwindigkeit für unser Beispiel ($c_{sp} = 6.66238$ und $\frac{w_a}{v} = 0.8568$, d.h. $c_t = 3.5879$), und zwar einmal der Werte nach Gl.(142) und zum andern nach den Werten der Tabelle 11.

TABELLE 11

Table 1 Propeller-Induced Velocities on Duct. (18)

Z/2R	$\frac{w_a}{V} / c_T$ AXIAL	$\frac{w_r}{V} / c_T$	Z/2R	$\frac{w_a}{V} / c_T$ AXIAL	$\frac{w_r}{V} / c_T$
0.0		- 0.1950			
0.05	0.0250	- 0.1862	0.55	0.0294	- 0.0103
0.10	0.0428	- 0.1726	0.60	0.0270	- 0.0090
0.15	0.0540	- 0.1544	0.65	0.0250	- 0.0080
0.20	0.0564	- 0.0697	0.70	0.0230	- 0.0070
0.25	0.0518	- 0.0275	0.75	0.0211	- 0.0061
0.30	0.0461	- 0.0224	0.80	0.0194	- 0.0054
0.35	0.0425	- 0.0186	0.85	0.0180	- 0.0048
0.40	0.0385	- 0.0157	0.90	0.0167	- 0.0043
0.45	0.0350	- 0.0135	0.95	0.0156	- 0.0039
0.50	0.0320	- 0.0115	1.00	0.0146	- 0.0035

- 1) w_a/V is symmetrical in absolute value fore and aft of the propeller. It is in the direction of freestream velocity in front of the propeller and in the opposite direction to the freestream velocity aft of the propeller.
- 2) w_r/V is symmetrical fore and aft of the propeller.
- 3) From the magnitude of the induced velocities given in Table 1, the application of linearized theory for propeller thrust coefficients greater than 1.0 would be questionable.

Die Belastung c_T des Düsenpropellers ist mit unseren Bezeichnungen:

$$c_T = \frac{S_p}{\rho/2 \pi R_p^2 (v+w_{apm})v} = \frac{1}{\frac{1}{c_{sp}} + \frac{1}{c_{sp}} \left(\frac{w_a}{v} \right)_{pm}}$$

mit c_{sp} nach Gl.(105) und (106)

und $\left(\frac{w_a}{v} \right)_{pm}$ mittlere Axialgeschwindigkeit des Düsenpropellers:

$$\left(\frac{w_a}{v} \right)_{pm} = 2 \int_{x_N}^1 x \cdot \left[\frac{w_a}{v}(x) \right]_p dx = (1-x_N) \int_0^\pi x_\varphi \cdot \left[\frac{w_a}{v}(\varphi) \right]_p \cdot \sin \varphi d\varphi$$

$$\left(\frac{w_a}{v} \right)_{pm} = \frac{\pi(1-x_N)}{N} \sum_{i=0}^N x_i \cdot \left[\left(\frac{w_a}{v} \right)_p \right]_i \sin \left(i \frac{\pi}{N} \right)$$

VI.-3 Widerstand der Düse

Für die Bestimmung der effektiven Werte der Düsenwirkung muß der Widerstand der Düse bestimmt werden

$$S_{D_{\text{eff}}} = S_D - W_D \quad (171)$$

Den Düsenwiderstand W_D können wir vorteilhaft durch die folgende Gleichung definieren:

$$W_D = \xi_{WD} \frac{\rho v^2}{2} \pi R_p^2 \quad (172)$$

Den Widerstandsbeiwert ξ_{WD} der Düse ist ein sehr problematischer Wert, weil man durch die Versuche eigentlich nur den effektiven Düsen Schub $S_{D_{\text{eff}}}$ also den Schub einschließlich Widerstand der Düse feststellen kann.

Aus den bekannten Düsenversuchen der holländischen Versuchsanstalt in Wageningen [8] kann man die Werte des Düsenwiderstandsbeiwertes nur für den Fall des schublos in der Düse arbeitenden Propellers feststellen.

Analoge Abhängigkeit zeigen mehr die Ergebnisse der Versuche von Gutsche [14], die er mit Düsen ohne Propeller durchgeführt hat. Diese Widerstandsbeiwerte der Düse ξ_{WD} sind in folgendem Diagramm 12 dargestellt.

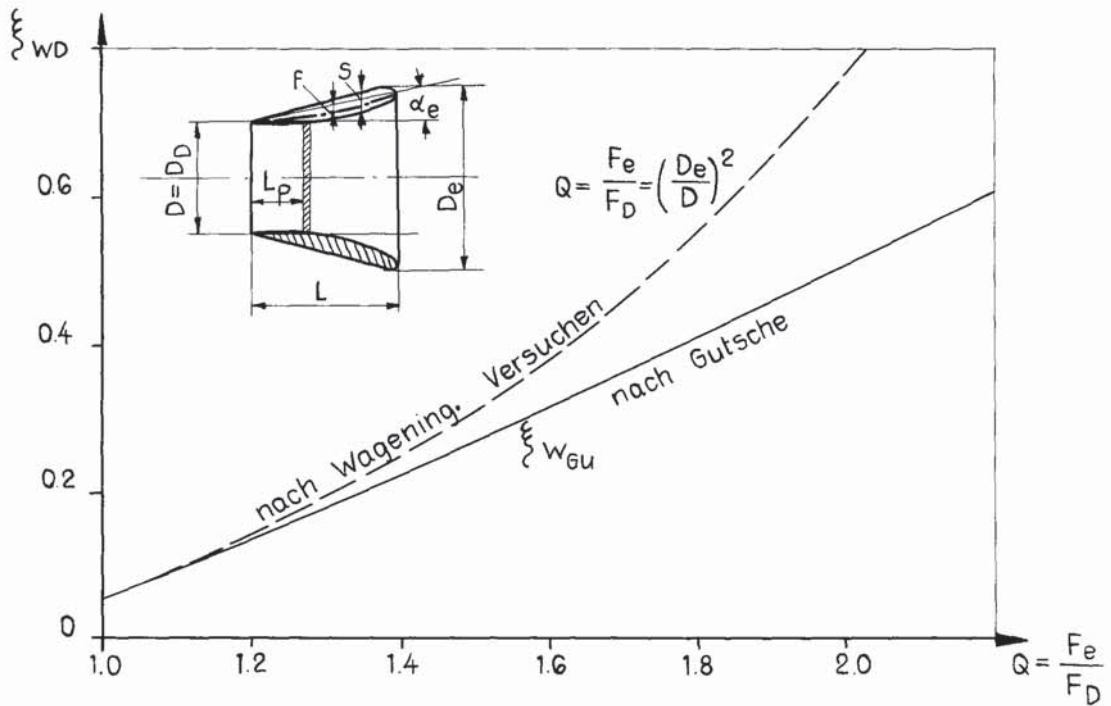


Diagramm 12

Dabei ist nach dem Bild:

- Q Öffnungsverhältnis der Düse,
- F_e Flächeninhalt des äußeren Düsenquerschnittes in der Eintrittsebene,
- F_d Flächeninhalt des inneren Düsenquerschnittes in der Arbeitsebene des Propellers.

$$Q = \frac{F_e}{F_D} = \left(\frac{D_e}{D}\right)^2 \quad (173)$$

Für die Werte Q , die wir oft brauchen werden, können wir nach der Darstellung der Düse in Bild 1 näherungsweise auch den folgenden Ausdruck benutzen

$$Q = 1,04 \left[1 + 2 \frac{L}{D} \left(0,95 \frac{f}{L} + 0,38 \frac{s}{L} + (1 - \bar{z}_1) \operatorname{tg} \alpha_e \right) \right]^2 \quad (174)$$

Für die benutzten modifizierten Düsenprofile NACA 5415, (also mit der Krümmung des Düsenprofils $f/L = 0,05$ und mit dem Dickenverhältnis des Profils $s/L = 0,15$) bei Betrachtung der Propellerebene $L_p/L = \bar{z}_1 = 0,4$ ist die Abhängigkeit $Q = \frac{D_e}{D} - \alpha_e$ in dem folgenden Diagramm 13 dargestellt.

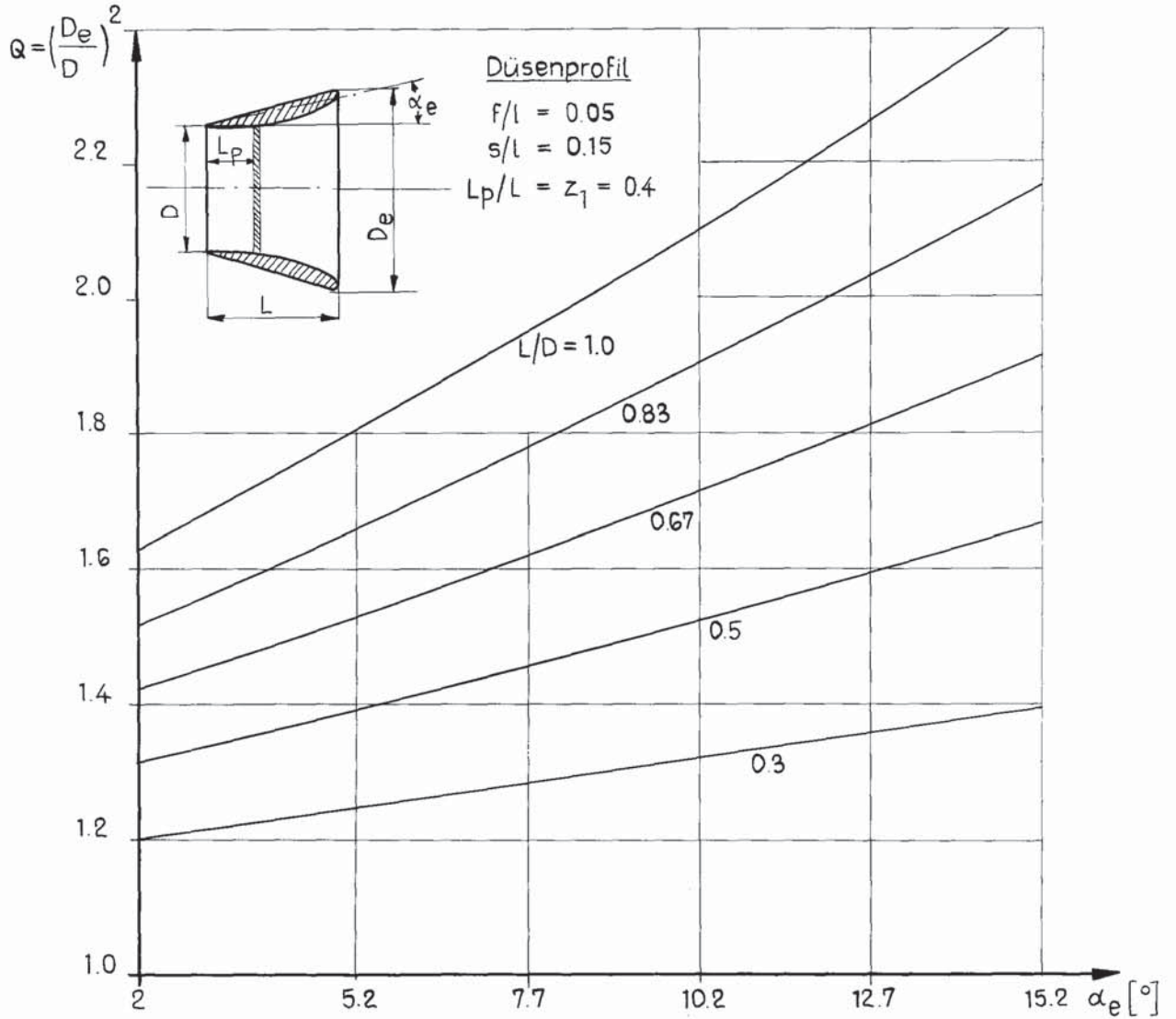


Diagramm 13

Die Widerstandsbeiwerte ξ_{WD} nach Gutsche (Diagramm 12) sind nur für die Düse alleine oder für die Düse mit dem schublos arbeitenden Propeller gültig.

Verglichen mit den Widerstandsbeiwerten ξ_{w0} , die Dickmann und Weissinger [1] aus der Profiltheorie für die Düse benutzt haben

$$\xi_{w0} = \frac{W_D}{\frac{\rho V^2}{2} \pi D L} = 0,01 \div 0,02 \quad (175)$$

sind die Werte von Gutsche [14] sehr hoch. Man kann aber voraussagen, daß der Fall der Anströmung der schwach belasteten Düse oder der Düse ohne Propeller sehr große Ablösung ergibt, die später bei den optimalen Strömungszuständen nicht mehr auftritt.

Auf diese Tatsache wurde auch in der Erörterung in dem Jahrbuch der STG 1959 [14] besonders durch Amtsberg hingewiesen. Er ist auch der Meinung, daß die Widerstandsbeiwerte der Düse von der Belastung des Düsenpropellers abhängig sind.

Der Unterschied in den Werten ξ_{WD} nach Gutsche und ξ_{w0} nach Dickmann-Weissinger ist aber sehr groß, (z.B. für das in der Diskussion erwähnte Beispiel $Q = 1,8$ ist der Widerstandsbeiwert nach Gutsche 16mal größer).

Um diesen Widerspruch zu beseitigen, sowie den Mangel an gemessenen Werten des Düsenwiderstandes bei Belastung zu überwinden, benutzen wir zur Bestimmung von möglichst genauen Düsenwiderstandsbeiwerten bei Belastung die in den folgenden Kapiteln erörterte Hypothese.

VI.-3-A Düsenwiderstandsbeiwert bei schwacher Belastung

Bei schwachen Belastungen $c_{sp} = 0 \div 0,1$ können wir die von Gutsche durch Experimente festgestellten Beiwerte des Düsenwiderstands als richtig annehmen. Sie enthalten auch den großen Ablösungswiderstand, der bei solchen Strömungsverhältnissen auftreten kann. Diese Werte können wir durch die folgende Gleichung ausdrücken (Kurve $\xi_{W_{Gu}}$ in dem Diagramm 12)

$$\xi_{W_{Gu}} = 0,05 Q^2 + 0,305 Q - 0,300 \quad (176)$$

Dabei kann $\sqrt[Q]{\xi}$ aus Gl.(173) bzw. (174) bestimmt werden:

VI.-3-B Düsenwiderstandsbeiwert bei optimaler Belastung

Eine Düse mit einem bestimmten Öffnungsverhältnis Q entspricht einer bestimmten optimalen Belastung $c_{s_{opt}}$. Bei solcher Belastung tritt keine Ablösung ein, und der Düsenwiderstand hängt vom Belastungsgrad ab. Bei der Bestimmung der Abhängigkeit des Düsenwiderstands W_D vom Belastungsgrad c_{sp} muß man beachten, daß durch die Belastung des Düsenpropellers sich nur ein Teil des Gesamtwiderstandes der Düse ändert und zwar der Reibungsanteil des inneren Düsenmantels W_{ri} , der von der Durchtrittsgeschwindigkeit v_D in der Düse abhängig ist.

Bezeichnet man den Zustand, bei dem der Belastungseinfluß unberücksichtigt ist, mit Index 0, dann kann man für den Düsenwiderstand schreiben

$$\begin{aligned} W_{D_0} &= W_{r_{i0}} - W_{rest_0} \\ W_D &= W_{r_i} - W_{rest} \end{aligned} \quad (177)$$

wobei

$$W_{rest} = W_{rest_0}$$

Es gilt also die Gleichung

$$W_D = W_{D_0} + W_{r_{i0}} \left[\frac{W_{r_i}}{W_{r_{i0}}} - 1 \right] \quad (178)$$

Der Widerstandsbeiwert, z.B. auch der aus der Profilttheorie durch Dickmann und Weissinger [1] entlehnte Düsenwiderstandsbeiwert ξ_{w_0} (Gl.(175), setzt sich nach Gutsche aus einem Normal(druck)widerstandsteil ξ_{N_0} und aus einem Reibungsanteil ξ_{r_0} zusammen. Der Reibungswiderstandsbeiwert hängt von den Strömungsverhältnissen ab und ist eine Funktion der Reynolds'schen Zahl Re , z.B. nach Prandtl-Schlichting (Bild 2.1 in [15])

$$\xi_r = \frac{0,455}{\log Re^{2,58}} \quad (179)$$

Für $Re \approx 10^5$ ist $\xi_{r_0} \approx 0,007$

Die einzelnen Glieder der Gl. (178) kann man also folgendermaßen ausdrücken

$$W_{D_0} = \xi_{w_0} \rho/2 v^2 \pi D L \quad (180)$$

$$W_{r_{i0}} = \xi_{r_0} \rho/2 v^2 \pi D L \quad (181)$$

Der Reibungswiderstandsanteil des inneren Düsenmantels W_{ri} ist dem Quadrat der Durchschnittsgeschwindigkeit v_D proportional und dabei eine Funktion der Belastung. Mit Hilfe der bekannten Ausdrücke der Propellertheorie

$$S_p = \rho F_p (v + c_a) c_a \quad (182)$$

$$c_{sp} = \frac{S_p}{\rho/2 v^2 F_p} \quad (106)$$

gilt für den Düsenpropeller

$$\frac{c_a}{v} = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 2c_{sp}} \right) \quad (183)$$

und für die Durchtrittsgeschwindigkeit in der Düse v_D

$$v_D = v \cdot \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{1 + 2c_{sp}} \right] \quad (184)$$

Für das Verhältnis des Reibungswiderstands des inneren Düsenmantels bei Berücksichtigung der Belastung zum Reibungswiderstand, ohne Berücksichtigung der Belastung, ergibt sich:

$$\frac{W_{ri}}{W_{ri0}} = \frac{\xi_r}{\xi_{r0}} \cdot \frac{v_D^2}{v^2} = \frac{1}{2} \left(1 + c_{sp} + \sqrt{1 + 2c_{sp}} \right) \cdot \frac{\xi_r}{\xi_{r0}} \quad (185)$$

Dabei soll der Quotient ξ_r / ξ_{r0} die Änderung des Reibungsbeiwertes in Abhängigkeit von der Reynolds'schen Zahl darstellen.

Setzt man die Ausdrücke (175), (180), (181) und (185) in Gl.(178) ein, dann bekommt man für den Widerstandsbeiwert der Düse mit Belastung:

$$\xi_{WD} = 4 \frac{L}{D} \xi_{w0} + 4 \frac{L}{D} \xi_{r0} \left[\frac{1}{2} \frac{\xi_r}{\xi_{r0}} \left(1 + c_{sp} + \sqrt{1 + 2c_{sp}} \right) - 1 \right] \quad (186)$$

Wir können also die Gl.(186) in der Form schreiben

$$\xi_{WD} = \xi_{WD0} + \Delta \xi_{WD} \quad (187)$$

wobei $\Delta \xi_{WD}$ die Änderung des Düsenwiderstandsbeiwerts infolge der Belastung ist. Diese ist durch die Änderung des Reibungswiderstandes des Düsen-Innenmantels entstanden.

Für den gewählten Fall $\xi_{w0} = 0,010$ (wie in der Theorie von Dickmann-Weissinger [1]), und $\xi_r = \xi_{r0} = 0,007$ (Modell) sind die Widerstandsbeiwerte ξ_{WD} der Düse nach Gl.(186) im Diagramm 14 dargestellt.

Diese Abhängigkeit des Düsenwiderstandsbeiwertes von der Belastung soll aber nur für den Fall der optimalen Strömungsverhältnisse (also ohne Ablösung) gültig sein.

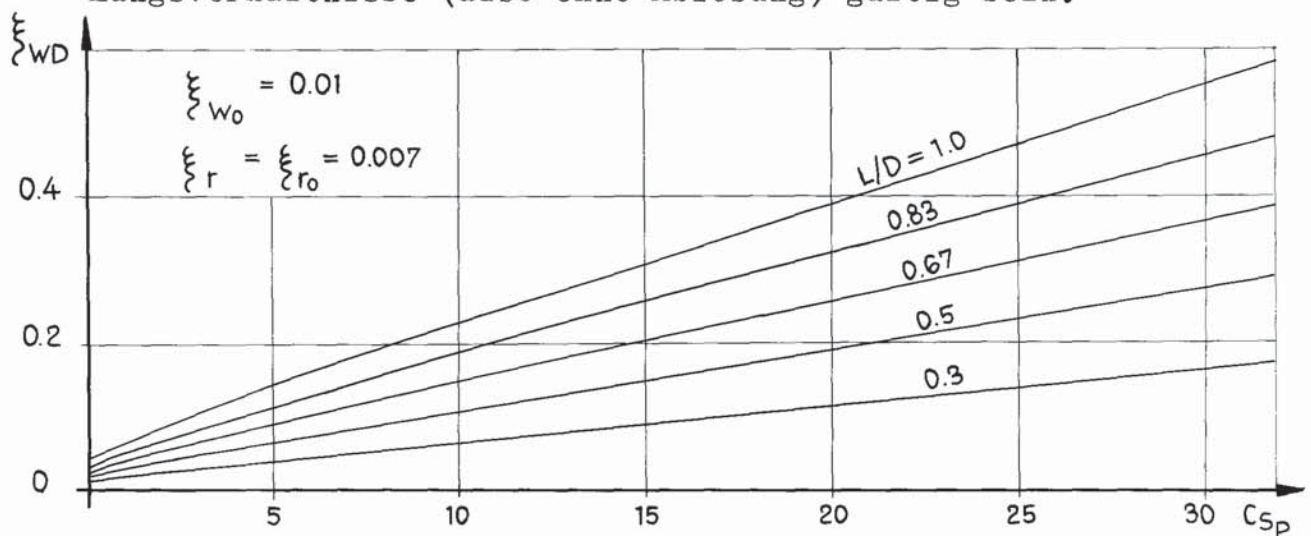


Diagramm 14

VI.-3-C Optimaler Zustand

Mit dem Begriff optimaler Zustand kann man bei einer Düse mit dem Öffnungsverhältnis Q eine solche Belastung $c_{S_{opt}}$ bezeichnen, bei welcher die Düse optimal angeströmt ist. In der ersten Näherung können wir die von Gutsche [14] (S. 157, Bild 18) dargestellte Abhängigkeit benutzen, siehe Diagramm 15.

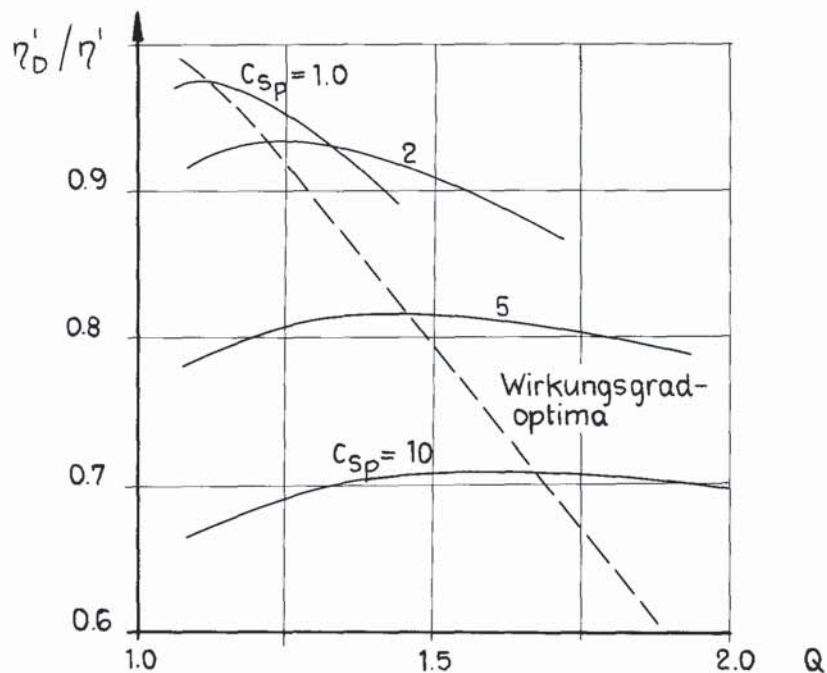


Diagramm 15

In diesem Diagramm kann man das Verhältnis des Düsenwirkungsgrades zum Wirkungsgrad des ohne Düse arbeitenden Propellers η_D'/η' für einige Belastungen c_{Sp} in Abhängigkeit von den Düseneröffnungsverhältnissen Q sehen.

Daraus können wir für unsere Zwecke in erster Näherung folgende optimale Abhängigkeit der Düseneröffnungsverhältnisse von den Belastungsgraden ableiten (siehe Diagramm 16):

$$c_{S_{opt}} = 16,59 Q^2 - 29,859 Q + 13,593 \quad (188)$$

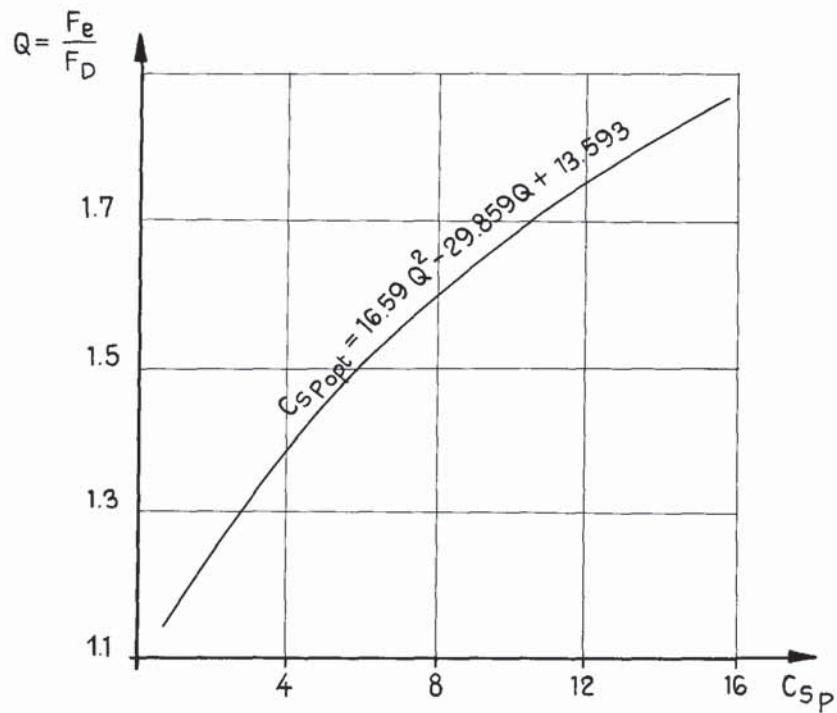


Diagramm 16

Diese Abhängigkeit kann später präzisiert werden, z.B. durch Auswertung der Rechenergebnisse von mehreren Antriebssystemen Propeller + Düse, bzw. durch die Auswertung von mehreren Druckverläufen an den einzelnen Düsenprofilen.

Mit den auf diese Art näherungsweise festgestellten optimalen Belastungen $c_{S_{opt}}$ kann man den entsprechenden Düsenwiderstandsbeiwert $\xi_{WD_{opt}}$ aus Gl.(186) bestimmen, indem wir c_S durch $c_{S_{opt}}$ ersetzen:

$$\xi_{WD_{opt}} = 4h \cdot \xi_{w0} + 4h \left[0,5 \xi_r (1 + c_{S_{opt}} + \sqrt{1 + 2c_{S_{opt}}}) - \xi_{r0} \right] \quad (189)$$

Dabei:

ξ_{w0} nach Dickmann-Weissinger aus Gl.(175)

ξ_r, ξ_{r0} Funktionen der Reynolds-Zahl nach Gl.(179)

und

$c_{s_{opt}}$ Funktion des Düsenöffnungsverhältnisses nach Gl. (188).

VI.-3-D Düsenwiderstandsbeiwerte bei anderen Belastungen

Weil wir für die Bestimmung des Düsenwiderstands in diesen Gebieten keine theoretischen und praktischen Unterlagen haben, benutzen wir rein spekulativ das folgende Verfahren:

1. Für die Belastungen $c_{sp} > c_{sp_{opt}}$ (wobei $c_{sp_{opt}}$ nach Gl. (188) berechnet worden ist) können die Düsenwiderstandsbeiwerte näherungsweise nach der Gl. (186) als Funktion von $\frac{L}{D}$ und c_{sp} ermittelt werden.
2. Für die Belastungen $0,1 < c_{sp} < c_{sp_{opt}}$ können die Widerstandsbeiwerte ξ_{WD} durch lineare Interpolation aus den Werten ξ_{WGU} für die nichtbelastete Düse Gl. (176) und den Werten $\xi_{WD_{opt}}$ für die optimal angeströmte Düse Gl.(189) durch die folgende Gleichung bestimmt werden

$$\xi_{WD} = \xi_{WGU} - \left(\xi_{WGU} - \xi_{WD_{opt}} \right) \frac{1 + \log c_{sp}}{1 + \log c_{s_{opt}}} \quad (190)$$

Die Optimalbelastung $c_{s_{opt}}$ die in $\xi_{WD_{opt}}$ und dem logarithmischen Faktor enthalten ist, ergibt sich aus Gl.(188).

Diese Abhängigkeit ist für die Düsenparameter $L/D = 0,5$ und $L/D = 0,83$ in den Diagrammen 17 und 18 dargestellt. Die logarithmische Auftragung der Belastung gestattete es, Zwischenwerte durch lineare Interpolation besser zu bestimmen.

VI.-4 Der effektive Schubbelastungsgrad der Düse

Ähnlich wie beim idealen Schubbelastungsgrad der Düse Gl.(114) können wir für den effektiven Schubbelastungsgrad der Düse bei Berücksichtigung ihres Widerstandes mit Hilfe der Gl.(171) und (172) schreiben

$$C_{SD} = \frac{S_D - W_D}{\frac{\rho v^2}{2} \pi R_P^2} = C_{SDi} - \xi_{WD} = 8 h x_D^2 \int_0^1 \gamma(z') \cdot \left[\frac{w_t}{v}(x_D, z') \right]_{Pd} \cdot dz' - \xi_{WD} \quad (191)$$

Das erste Glied ist durch die Gl.(114) und das zweite Glied durch das hier beschriebene Verfahren Gl.(190) gegeben.

VI.-5 Gesamtwirkungsgrad des Systems Propeller + Düse

Der Gesamtwirkungsgrad des Antriebssystems Propeller in der Düse mit Berücksichtigung des durch die Zähigkeit verursachten Widerstandes, gekennzeichnet durch

$$\eta_{PD} = \frac{S_{ges\,eff} \cdot v}{N_h} = \frac{[S_P + (S_D - W_D)] \cdot v}{N_h} \quad (192)$$

0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1

Düsenwiderstandsbeiwert

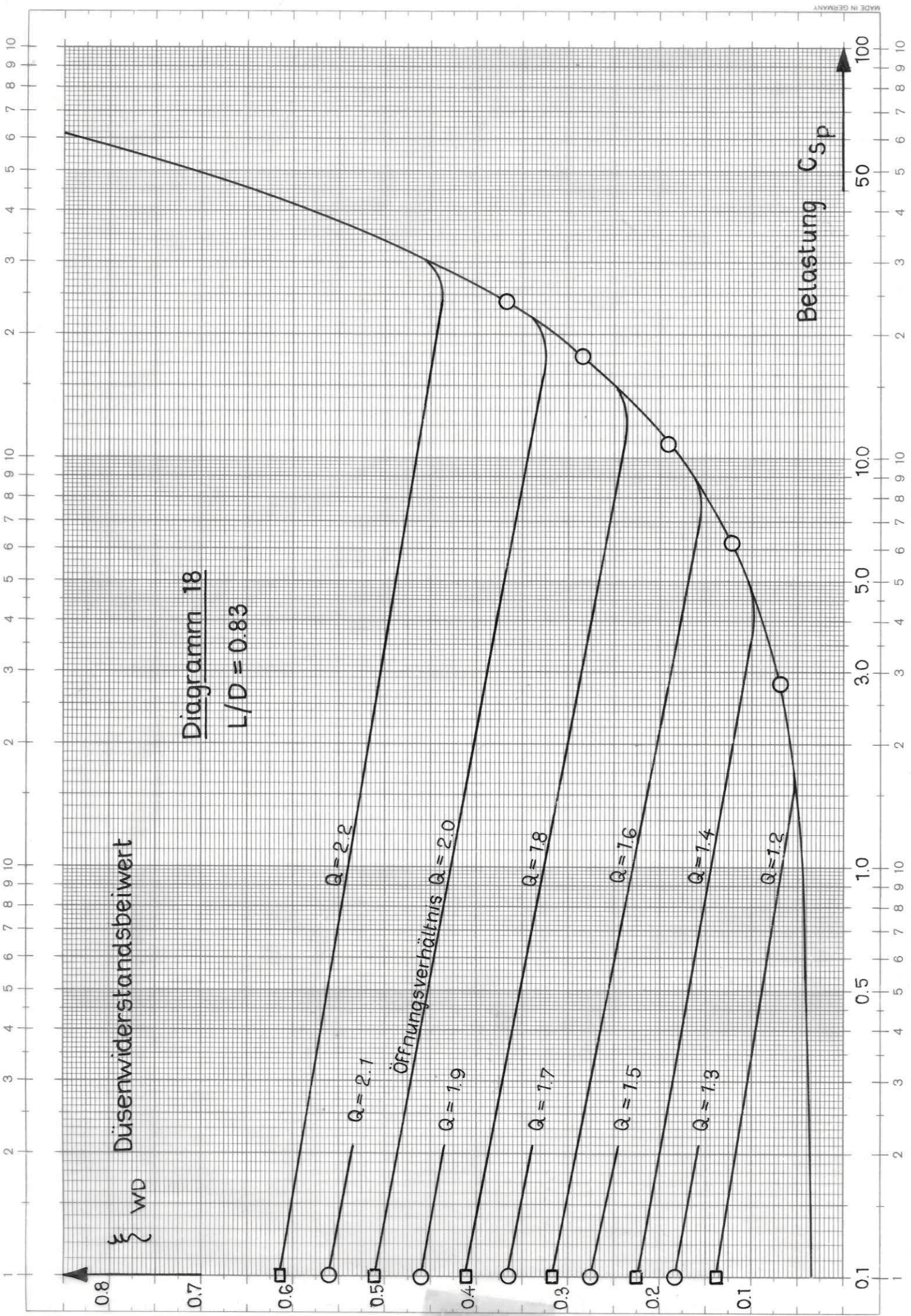
0.8

Diagramm 17
 $L/D = 0.05$

Belastung C_{sp}

0.1 0.5 1.0 2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 20.0 50.0 100.0

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 2 3 4 5 6 7 8 9 10 2 3 4 5 6 7 8 9 10



kann aufgrund der Gl.(106), (108), (114) und (172) gegeben werden in der Form

$$\eta_{PD} = \frac{c_{SP} + c_{SDi} - \xi_{WD}}{c_N}$$

Bei Benutzung der Gl. (191) ist der Gesamtwirkungsgrad des Systems Propeller + Düse gleich

$$\eta_{PD} = \frac{c_{SP} + c_{SD}}{c_N} = \frac{c_{SPD}}{c_N} \quad (193)$$

Dabei ist

$$c_{SPD} = \frac{S_P + (S_D - W_D)}{\rho/2 v^2 \pi R_P^2} \quad (194)$$

der Gesamtbelastungsbeiwert des Systems Propeller + Düse.

Als weitere Auswertungsparameter können noch dienen der schon erwähnte Taylor-Belastungsbeiwert des Propellers Gl.(109) und die von van Manen eingeführte Sogziffer der Düse \mathfrak{D}_D [8], die hier mit dem umgekehrten Vorzeichen als relativer Schubgewinn der Düse δ_D betrachtet wird.

$$\delta_D = - \mathfrak{D}_D \quad (195)$$

Dann ist

a) relativer Schubgewinn ideal (ohne Düsenwiderstand):

$$\delta_{Di} = \frac{S_{ges;D} - S_P}{S_P} = \frac{S_{Di}}{S_P} = \frac{c_{SDi}}{c_{SP}} \quad (196)$$

b) relativer Schubgewinn effektiv:

$$\delta_D = \frac{S_{ges} - S_P}{S_P} = \frac{S_{Deff}}{S_P} = \frac{c_{SD}}{c_{SP}} \quad (197)$$

Die einzelnen Belastungsbeiwerte der Düse c_{SDi} und c_{SD} können durch die Gl. (114) und (191) und die des Propellers c_{SP} bzw. c_N durch die Gl. (106) bzw. (108) bestimmt werden.

Die Wirkungsgradverbesserung des Systems Propeller + Düse im Verhältnis zum Wirkungsgrad des Propellers in der Düse kann man folgendermaßen ausdrücken:

$$\frac{\eta_{PD} - \eta_P}{\eta_P} = \frac{(c_{SP} + c_{SD} - c_{SP})/c_N}{c_{SP}/c_N} = \frac{c_{SD}}{c_{SP}} = \delta_D \quad (198)$$

bzw.

$$\frac{\eta_{PD}}{\eta_P} = 1 + \delta_D \quad (199)$$

VII. Entwurf des festen, hinter dem Propeller
=====

in der Düse stehenden Leitapparates
=====

VII.-1 Hydrodynamik des festen Leitrades

Wie schon am Anfang kurz gesagt wurde, ist bei stark belasteten Propellern im Drall des Schraubenstrahles eine merkliche kinetische Energie enthalten, die wir als Drallverlust bzw. Leistungsverlust des Propellers betrachten können. Zweck des hinter dem Propeller sich befindenden Leitapparates ist, diesen Verlust zu verhindern, d.h. die Strömungsenergie des Schraubenstrahles zum großen Teil zurückzugewinnen und in nützliche Arbeit umzusetzen. Man kann von einem Gewinn nur sprechen, wenn der gesamte durch die Zähigkeit der Flüssigkeit bewirkte Widerstand der Leitschaufeln kleiner ist als die Vortriebswirkung des Leitapparates.

Das Antriebssystem Propeller + Düse benutzt man vorteilhaft nur in dem Bereich größerer Belastungsgrade. Nach Dickmann [2] kann man einen Leitapparat mit Erfolg besonders bei den stark belasteten hydraulischen axialen Maschinen benutzen. Es scheint/also zweckmäßig zu sein, eine solche Einrichtung in der Düse hinter dem Düsenpropeller einzubauen.

Um einen Überblick über die von einer solchen Anordnung zu erwartenden Wirkungen zu gewinnen, wollen wir uns die Frage stellen, was für einen Gewinn man bei optimalem Entwurf des Leitapparates bei verschiedenen Betriebsbedingungen und bei den vorausgesetzten Leitradverlusten erwarten kann.

Für die tangentialen Geschwindigkeiten hinter dem Propeller in der Düse gelten dieselben Gleichungen der Propellertheorie wie für den freien Propeller

$$z_p \Gamma = 2\pi r w_t \quad (200)$$

wobei $\Gamma = \pi D v G \quad (75)$

Man kann also für den Strahl unmittelbar hinter dem Propeller die durchschnittlichen tangentialen Geschwindigkeiten ausdrücken in der Form

$$\left[\frac{w_t}{v}(x) \right]_{P_{5m}} = \frac{z_p \cdot G_p(x)}{x} \quad (201)$$

In der axialen Richtung werden wir in der Düse anstatt der induzierten Axialgeschwindigkeiten, die an den einzelnen Propellerflügeln induziert sind,

$$\left(\frac{w_a}{v}(x) \right)_p = - \frac{1}{2} \frac{z_p G_p(x)}{x \operatorname{tg} \beta_i} \quad (202)$$

die Durchschnittswerte längs des Propellerradius betrachten; diese können wir analog Grim 5 folgendermaßen ausdrücken

$$\left[\frac{w_a}{v}(x) \right]_{PD_m} = - \frac{z_p}{2} \int_{x_0}^1 \frac{dG_p(x_0)}{dx_0} \frac{dx_0}{x_0 \operatorname{tg} \beta_i} \quad (203)$$

Die Gleichung (203) gilt für die Verhältnisse in der Propellerebene des freien Propellers, bzw. auch für die Verhältnisse hinter dem Propeller in einem Zylinder mit kleinem Spalt ($x_D \rightarrow 1.0$).

Für den optimalen Entwurf müssen wir die Geschwindigkeitsverhältnisse am Ort des Leitrades kennen. In der Düse gelten bei Voraussetzung des stationären Charakters der Ström-

mung an der Düse in der tangentialen Richtung dieselben Bedingungen wie hinter dem freien Propeller Gl.(201), weil die Düse keine zusätzlichen tangentialen Geschwindigkeiten induziert. In der axialen Richtung müssen wir aber in der Leitradenebene \bar{z}_2 auch die axialen induzierten Geschwindigkeiten der Düse $w_{a\gamma}$ und $w_{a\varrho}$ betrachten. Diese sind von der Zirkulations- und Quell-Senken-Belegung auf dem Düsenzylinder abhängig und sind durch folgende - den Gleichungen (50) und (51) analoge - Ausdrücke gegeben.

$$\left[\frac{w_a}{v}(x, \bar{z}_2) \right]_{\gamma} = -\frac{h}{2\pi} \int_0^1 \frac{\gamma(z')}{x^{1/2}} \left[K(k_2) - E(k_2) - \frac{2(x-1) \cdot E(k_2)}{4h^2(\bar{z}_2-z')^2 + (x-1)^2} \right] dz' \quad (204)$$

und

$$\left[\frac{w_a}{v}(x, \bar{z}_2) \right]_{\varrho} = -\frac{h}{2\pi} \int_0^1 \frac{\varrho(z')}{x^{1/2}} \cdot k_2 \left[\frac{2[2h(\bar{z}_2-z') \cdot E(k_2)]}{4h^2(\bar{z}_2-z')^2 + (x-1)^2} \right] dz' \quad (205)$$

Dabei ist

$$k_2^2 = \frac{4x}{4h^2(\bar{z}_2-z')^2 + (x+1)^2} \quad (206)$$

\bar{z}_2 die Stelle der Leitradenebene in der Düse
 $\bar{z}_2 = 0.210$ gewählt)

$K(k_2)$ und $E(k_2)$ die elliptischen Integrale
 nach den Gleichungen (9) und (10).

Als mittlere axiale induzierte Geschwindigkeiten des Propellerstrahles in der Düse kann man in der Leitradenebene die folgenden Werte betrachten

$$\left[\frac{w_a}{v}(x) \right]_{P_{Sm}} = \left[\frac{w_a}{v}(x) \right]_{PD_m} + \left[\frac{w_a}{v}(x, \bar{z}_2) \right]_{\gamma} + \left[\frac{w_a}{v}(x, \bar{z}_2) \right]_{\varrho} \quad (207)$$

wobei die einzelnen Glieder durch die Gl. (203), (204) und (205) ausgedrückt sind.

Die mittleren tangentialen Geschwindigkeiten des Propellerstrahles wurden durch die Gl.(201) gegeben.

Die Strahleinschnürung sowie die Geschwindigkeitsschwankungen betrachten wir aufgrund unserer Voraussetzungen jetzt nicht.

Die Geschwindigkeitsverhältnisse an einem beliebigen Schnitt x der Leitschaukel sind in Bild 19 dargestellt:

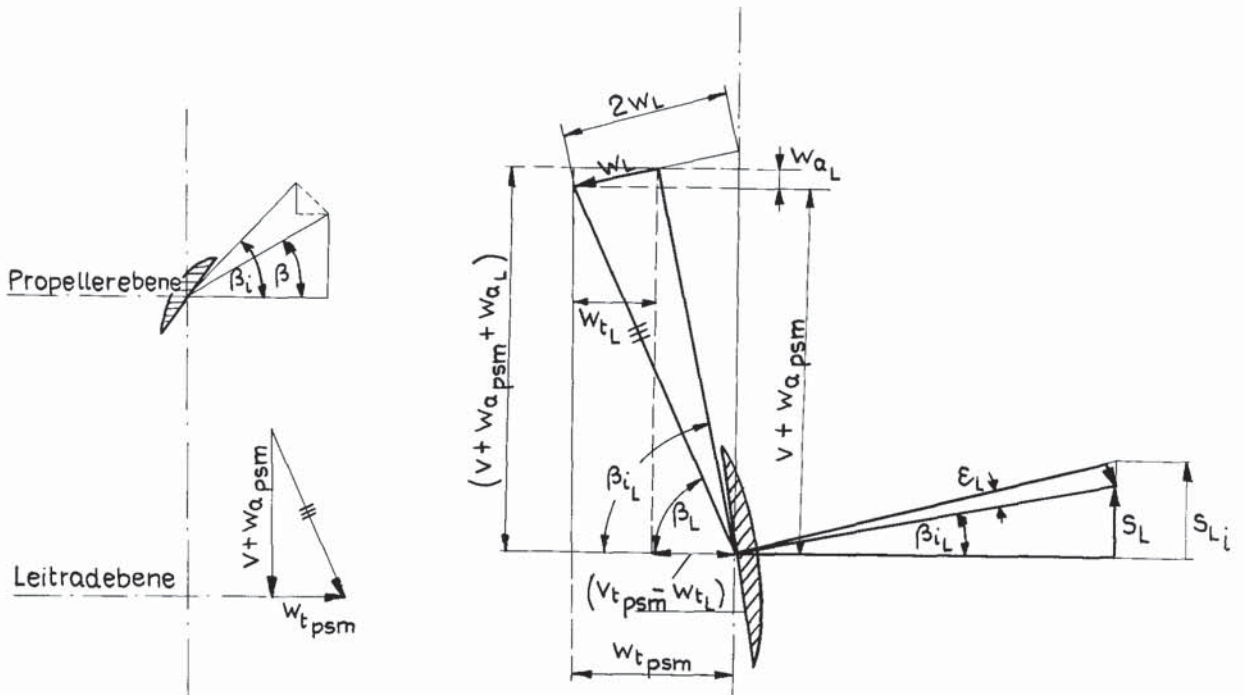


Bild 19

Analog zum Propellerdiagramm kann man mit β_L den Winkel bezeichnen, der im Propellerstrahl in der Düse ohne Wirkung des Leitapparates zwischen der gesamten axialen Geschwindigkeit $v + w_{a,psm}$ und der Umfangsgeschwindigkeit $w_{t,psm}$

(hier $r\omega_L = 0$) des Propellerstrahles gebildet wird. An jedem Radius des im Propellerstrahl angeordneten festen Leitapparates wird die induzierte Geschwindigkeit W_L in der Leitradenebene und die Geschwindigkeit $2W_L$ im Strahl weit hinter dem Leitapparat betrachtet. Diese steht in der Leitradenebene senkrecht zu der Gesamtanströmungsgeschwindigkeit, die mit der Leitradenebene den hydrodynamischen Anstellwinkel β_{iL} bildet.

Für die Winkel β_L und β_{iL} können wir nach Bild 19 für den festen Leitapparat schreiben

$$\operatorname{tg} \beta_L = \frac{v + w_{aPsm}}{w_{tPsm}} \quad (208) \quad \operatorname{tg} \beta_{iL} = \frac{v + w_{aPsm} + w_{aL}}{w_{tPsm} - w_{tL}} \quad (209)$$

Die von dem Leitrad in der Leitradenebene induzierte Geschwindigkeit W_L hat die tangentielle Geschwindigkeitskomponente w_{tL} , durch die der Drall des Strahles verringert, bzw. ganz beseitigt wird. Die zusätzliche axiale Geschwindigkeitskomponente w_{aL} beschleunigt den Propellerstrahl zusätzlich in axialer Richtung und bringt dadurch den gewünschten Gewinn, während durch die Zähigkeit der Flüssigkeit am Leitrad Verluste verursacht werden. Die so verschlechterten Verhältnisse verändern die mögliche Energieumwandlung.

Die Vortriebswirkung des Leitapparates ist eigentlich als ein verhinderter Verlust der Propellerleistung anzusehen. Um diese so groß wie möglich zu bekommen, muß man die Zirkulationsverteilung an einer Schaufel des Leitrades so wählen, daß die tangentialen Geschwindigkeiten hinter dem Leitrad verschwinden. Eine solche Optimumsbedingung können wir

in der folgenden Form schreiben [16]

$$w_{tPSm} - w_{tLSm} = 0 \quad (210)$$

Dabei ist:

w_{tPSm} die schon erwähnte tangentiale Geschwindigkeit im Propellerstrahl am Ort des Leitrades
und
 w_{tLSm} die weit hinter dem Leitrad von diesem selbst induzierte durchschnittliche tangentiale Geschwindigkeit.

Für den Wert $\left[\frac{w_t}{V} (x) \right]_{LSm}$ gilt theoretisch auch ein der Gl. (201) analoger Ausdruck; die Werte der Leitradzirkulation $G_L(x_0)$ sind aber noch nicht bekannt. In der ersten Annäherung kann man einen bestimmten Zusammenhang zwischen dem Strahl hinter dem Propeller und dem Strahl hinter dem Leitrad annehmen

$$\frac{w_{tPSm}}{w_{tP}} \approx \frac{w_{tLSm}}{w_{tL}} \quad (211)$$

und dann die Optimumsbedingung (210) in ganz einfacher Form schreiben

$$w_{tP}(x) \approx w_{tL}(x) \quad (212)$$

Die optimale Zirkulationsverteilung an dem Leitradflügel soll so gewählt sein, daß die tangentialen, vom Leitrad induzierten Geschwindigkeiten an jedem Radius die Optimumsbedingung erfüllen, d.h. gleich den entsprechenden Tangentialgeschwindigkeiten in der Propellerebene werden.

Nach Bild 19, bzw. der Gl. (209) kann man für die Verhältnisse an dem stehenden Leitrad in der Düse schreiben

$$\frac{1 + \left[\frac{w_a}{v} \right]_{PSm} + \left(\frac{w_a}{v} \right)_L}{\left[\frac{w_t}{v} \right]_{PSm} - \left(\frac{w_t}{v} \right)_L} = \operatorname{tg} \beta_{iL} \quad (213)$$

Diese Beziehung können wir für die weiteren Rechnungen vorteilhaft in der folgenden Form ausdrücken

$$\left(\frac{w_a}{v} \right)_L + \operatorname{tg} \beta_{iL} \left(\frac{w_t}{v} \right)_L = \left[\frac{w_t}{v} \right]_{PSm} \cdot \operatorname{tg} \beta_{iL} - 1 - \left[\frac{w_a}{v} \right]_{PSm} \quad (214)$$

Gleichung (214), die später als Grundgleichung für die Bedingung der optimalen Zirkulationsverteilung am Leitrad dienen wird, kann man mit Hilfe der vereinfachten Optimumsbedingung (212) und der allgemeinen Beziehung (siehe Bild 19)

$$w_{aL} = \frac{w_{tL}}{\operatorname{tg} \beta_{iL}} \quad (215)$$

folgendermaßen umformen:

$$\left[\left(\frac{w_t}{v} \right)_{PSm} - \left(\frac{w_t}{v} \right)_P \right] \operatorname{tg} \beta_{iL} - \left[\left(\frac{w_t}{v} \right)_P \right] \frac{1}{\operatorname{tg} \beta_{iL}} = 1 + \left[\frac{w_a}{v} \right]_{PSm} \quad (216)$$

Durch die Lösung dieser quadratischen Gleichung für $\operatorname{tg} \beta_{iL}$ bekommen wir den Wert $\operatorname{tg} \beta_{iL}$ - als einen der Entwurfs-

parameter des festen Leitrades - in der Form

$$\operatorname{tg} \beta_{i_L} = \frac{1 + \left(\frac{w_a}{v}\right)_{PSm} + \sqrt{\left[1 + \left(\frac{w_a}{v}\right)_{PSm}\right]^2 + 4 \left[\left(\frac{w_t}{v}\right)_{PSm} - \left(\frac{w_t}{v}\right)_P\right] \cdot \left(\frac{w_t}{v}\right)_P}}{2 \left[\left(\frac{w_t}{v}\right)_{PSm} - \left(\frac{w_t}{v}\right)_P\right]} \quad (217)$$

Diese exakte Gleichung (217) für die Bestimmung des hydrodynamischen Winkels β_{i_L} des festen Leitrades kann auch durch eine einfachere Form der Gleichung ersetzt werden, wenn man die Näherung betrachtet: $w_{tPSm} \approx 2w_L$ (siehe Bild 19), d.h. nach Gl. (210) und (211)

$$w_{tPSm} \approx 2 w_{tP} \quad (218)$$

Dann erhalten wir die Gl. (217) in der Form

$$\operatorname{tg} \beta_{i_L} = \frac{1 + \left(\frac{w_a}{v}\right)_{PSm}}{\left(\frac{w_t}{v}\right)_{PSm}} + \sqrt{\frac{\left[1 + \left(\frac{w_a}{v}\right)_{PSm}\right]^2 + \left(\frac{w_t}{v}\right)_{PSm}^2}{\left(\frac{w_t}{v}\right)_{PSm}^2}}$$

was mit Berücksichtigung der Gl. (208) gleichbedeutend ist mit

$$\operatorname{tg} \beta_{i_L} = \operatorname{tg} \beta_L + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta_L} \quad (219)$$

Diesen Ausdruck können wir weiter umformen:

$$\operatorname{tg} \beta_{i_L} = \frac{1 + \sin \beta_L}{\cos \beta_L} = \frac{1 + \sqrt{1 + \cos^2 \beta_L}}{\cos \beta_L} = \frac{2 + 2\sqrt{1 + \cos \beta_L} \cdot \sqrt{1 - \cos \beta_L}}{2 \cos \beta_L}$$

$$\frac{1 + \cos \beta_L + 1 - \cos \beta_L + 2\sqrt{1 + \cos \beta_L} \cdot \sqrt{1 - \cos \beta_L}}{1 + \cos \beta_L - 1 + \cos \beta_L} = \frac{(\sqrt{1 + \cos \beta_L} + \sqrt{1 - \cos \beta_L})^2}{(1 + \cos \beta_L) - (1 - \cos \beta_L)} =$$

$$\frac{\sqrt{1 + \cos \beta_L} + \sqrt{1 - \cos \beta_L}}{\sqrt{1 + \cos \beta_L} - \sqrt{1 - \cos \beta_L}} = \frac{1 + \sqrt{\frac{1 - \cos \beta_L}{1 + \cos \beta_L}}}{1 - \sqrt{\frac{1 - \cos \beta_L}{1 + \cos \beta_L}}} = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\beta_L}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\beta_L}{2}} =$$

$$= \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta_L}{2} \right)$$

Es ist also

$$\operatorname{tg} \beta_{iL} = \operatorname{tg} \left(\frac{\frac{\pi}{2} + \beta_L}{2} \right) \quad (220)$$

Diese einfachere Bedingung für den β_{iL} -Wert des festen Leitrades kann man auch physikalisch ableiten aus Bild (19) bei der Voraussetzung einer idealen Flüssigkeit.

Bei Berücksichtigung des durch die Zähigkeit der Flüssigkeit verursachten Widerstandes des Leitrades kann man die Gleichung für β_{iL} des festen Leitapparates in folgender Form

$$\operatorname{tg} \beta_{iL} = \operatorname{tg} \left(\frac{\frac{\pi}{2} + \beta_L}{2} - \varepsilon_{LD} \right) \quad (221)$$

mit

ϵ_{LD} abgeschätzte Gleitzahl der Leitradprofile

β_L durch die Gl.(208) gegeben.

VII.-2 Anwendung der Lerbs'schen Induktionsfaktormethode
des freien Propellers auf den Entwurf des festen
Leitapparates in der Düse

Für die Berechnung des Leitrades können wir auch die Induktionsfaktormethode von Lerbs [11] wie beim Propellerverfahren benutzen, obwohl das Leitrad sich nicht dreht ($r\omega = 0$). Die einzelnen Schaufeln des festen Leitrades sind eigentlich wie die Flügel eines Düsenpropellers mit unendlich kleinem Spalt, dessen Drehzahl gegen Null geht. Der Fortschrittsgrad J ist also für das feste Leitrad unendlich groß ($J \rightarrow \infty$). Der Wert des hydrodynamischen Anstellwinkels β_{iL} für jeden Radius des Leitrades ist durch die Gl. (217) bzw. (221) gegeben.

Als weitere wählbare Parameter für den Leitradentwurf dienen noch die Flügelzahl z_L sowie der dimensionslos ausgedrückte Nabenradius x_{NL} des Leitrades. Die Ebene des Leitrades in der Düse ist durch die Größe \bar{z}_2 nach Bild (1) gegeben.

Die Bedingung für die optimale Zirkulationsbelegung längs des Leitradflügels kann man bei Anwendung der Lerbs'schen Methode der Induktionsfaktoren analog Gl.(62) folgendermaßen ausdrücken:

$$\int_{x_{NL}}^1 \frac{dG_L}{dx_0} \frac{1}{x-x_0} \left(i_a + i_t \operatorname{tg} \beta_{iL} \right) dx_0 = \left[\frac{W_t}{V} \right]_{PSm} \cdot \operatorname{tg} \beta_{iL} - 1 - \left[\frac{W_a}{V} \right]_{PSm} \quad (222)$$

Durch die Zerlegung der Induktionsfaktoren in geraden Fourier-Reihen (Gl. 68) kann man dann die für jeden Radius notwendigen Funktionen h_{μ}^a und h_{μ}^t berechnen (Gl. 69).

Die für die Berechnung der Zirkulation am Leitradflügel brauchbaren Fourier-Koeffizienten G_{μ}^L bekommen wir analog Gl. (73) durch die Lösung des Gleichungssystems, welches die Optimumsbedingung (222) enthält:

$$\sum_{\mu=1}^{N-1} \mu G_{\mu}^L [h_{\mu}^a(\varphi) + h_{\mu}^t(\varphi) \cdot \operatorname{tg} \beta_{iL}(\varphi)] = \quad (223)$$

$$= (1 - x_{NL}) \left\{ \left[\frac{w_t}{v}(\varphi) \right]_{PSm} \operatorname{tg} \beta_{iL} - 1 - \left[\frac{w_a}{v}(\varphi) \right]_{PSm} \right\}$$

wobei zwischen den Größen x und φ für beliebigen Radius der Zusammenhang Gl. (67) gilt.

Hier wurde für den Nabenradius $x_{NL} = x_N = 0,2$ und als N -Wert für das Leitrad auch $N = 12$ - wie beim Propellerentwurf - gewählt.

Die Werte der Zirkulation an einzelnen Radien des Leitradflügels sind dann

$$G_L(\varphi) = \sum_{\mu=1}^{N-1} G_{\mu}^L \sin(\mu \cdot \varphi) \quad (224)$$

Die Werte $G(0)$ und $G(\pi)$, d.h. an der Nabe und am Ende des Flügels, d.h. an der Düse, sind im Sinne der Lerbs-Theorie

gleich Null gesetzt. Die einzelnen durch das Leitrad induzierten tangentialen und axialen Geschwindigkeiten kann man aus den folgenden Gleichungen

$$\left(\frac{W_t}{V}\right)_L(\varphi) = \frac{1}{1-x_{NL}} \sum_{\mu=1}^{N-1} \mu G_{\mu}^L \cdot h_{\mu}^t(\varphi)$$

und

(225)

$$\left(\frac{W_a}{V}\right)_L(\varphi) = \frac{1}{1-x_{NL}} \sum_{\mu=1}^{N-1} \mu G_{\mu}^L \cdot h_{\mu}^a(\varphi)$$

berechnen.

Für die Bestimmung der Rückwirkung des Leitapparates auf das System Düse mit Propeller sind die Werte der radialen Geschwindigkeiten vom Leitrad an der Düse von Bedeutung. Für die durchschnittlichen Radialgeschwindigkeiten, die an dem Düsenzylinder von dem Leitrad induziert werden, kann man analog der Gl.(170) schreiben

$$\left[\frac{W_r}{V}(x_D, \bar{z})\right]_{Ld} = \frac{z_L}{2\pi} \int_{x_{NL}}^1 \frac{dG_L(x_0)}{dx_0} \frac{1}{\operatorname{tg}\beta_{iL}} \frac{1}{k_2} \left(\frac{1}{x_0}\right)^{1/2} \cdot \left[(2-k_2^2) \cdot K(k_2) - 2E(k_2) \right] dx_0 \quad (226)$$

mit

$$k_2^2 = \frac{4x_0}{(1+x_0)^2 + 4h^2(\bar{z} - \bar{z}_2)^2} \quad (227)$$

und $K(k_2)$ sowie $E(k_2)$ nach Gl.(9) und (10). Die Stelle der Leitradebene in der Düse wurde $\bar{z}_1 = 0.210$ gewählt.

VII.-3 Entwurf des Profils der Leitschaufel

Das im Kapitel V.-1 beschriebene Verfahren zur Bestimmung des Profils bei Berücksichtigung der Festigkeit und Kavitation kann man auch auf den Profilentwurf der Schaufeln des festen Leitrades anwenden.

Das bekannte Produkt $c_a \cdot l$ (79) läßt sich für die Verhältnisse des in der Düse hinter dem Propeller stehenden Leitapparates folgendermaßen ausdrücken

$$\frac{c_a \cdot l}{D} = \frac{2 \bar{\pi} G_L \cdot \cos \beta_{iL}}{\left[\frac{w_t}{v} \right]_{PSm} - \left[\frac{w_t}{v} \right]_L} \quad (228)$$

Die für die Festigkeitsrechnungen nötigen Gleichungen werden in diesem Fall

$$M_x = 4 \int_{x_0}^1 G_L \left[\left(\frac{w_t}{v} \right)_{PSm} - \left(\frac{w_t}{v} \right)_L \right] \cdot (x - x_0) \frac{g v^2}{2} \frac{\bar{\pi} D^2}{4} \frac{D}{2} dx \quad (229)$$

und

$$M_y = 4 \int_{x_0}^1 G_L \left[1 + \left(\frac{w_a}{v} \right)_{PSm} + \left(\frac{w_a}{v} \right)_L \right] \cdot (x - x_0) \frac{g v^2}{2} \frac{\bar{\pi} D^3}{8} dx \quad (230)$$

Hinsichtlich der Befestigung der Leitschaufeln an beiden Seiten (an der Nabe und an der Düse) kann man den Wert der zulässigen Beanspruchung $\sigma_{zul.} [kp/cm^2]$ größer als beim Propellerentwurf wählen. Der Festigkeitsparameter KK (beim Propeller Gl.(91)) erhält für den festen Leitapparat die Form

$$KK = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot \sigma_{zul} \cdot N \left[\frac{4\pi G_L \cdot \cos\beta_i}{W_{TX}} \right]^3}{v^2 \pi^2 (1-x_N) \sum_{\nu=0}^N G_L (x-x_0) \sin\varphi [W_{TX} \cos\beta_i + W_{AX} \sin\beta_i]}} \quad (231)$$

wobei

$$W_{TX} = \left(\frac{W_t}{v} \right)_{PSm} - \left(\frac{W_t}{v} \right)_L \quad (232)$$

und

$$W_{AX} = 1 + \left(\frac{W_a}{v} \right)_{PSm} + \left(\frac{W_a}{v} \right)_L \quad (233)$$

Die Kavitationszahl für das feste (nicht drehende) Leitrad ist

$$\sigma_x = \frac{p_0 - e}{\frac{\rho}{2} (v + w_{a_{PSm}})^2} = \frac{K}{v^2 \left[1 + \left(\frac{w_a}{v} \right)_{PSm} \right]^2} \quad (234)$$

wobei der K-Wert durch die Gl. (96) gegeben wird.

Das Dickenverhältnis s/l und der Auftriebswert c_a des Leitradprofils können beim Propellerentwurf durch die Gleichungen

$$\left(\frac{s}{l} \right)^{1/2} = -0.057 KK + \sqrt{0.00325 KK^2 + 0.2333 \sigma_x} \quad (99)$$

und
$$c_a = KK (s/l)^{2/3} \quad (90)$$

berechnet werden. Es wird auch hier die Grenzkurve III

$$c_a = 0.9 - 6 (s/l)^{4/3} \quad (100)$$

(siehe Diagramm 7) eingeführt, d.h. es wird benutzt der Wert s/l aus der Gleichung

$$(s/l)^{2/3} = - \frac{KK + \sqrt{KK^2 + 21.6}}{12} \quad (101)$$

in dem Fall, daß er kleiner ist als der Wert s/l aus der Gl.(99).

Analog Gl.(103) können wir für das feste Leitrad die Länge des Profils ausdrücken in der Form

$$\frac{L}{D} = \frac{4\pi G_L \cos \beta_{iL}}{\left(\frac{w_t}{V}\right)_{P5m} - \left(\frac{w_t}{V}\right)_L} \cdot \frac{0.5}{KK (s/l)^{2/3}} \quad (235)$$

Die Gleitzahl des Leitradprofils ist gekennzeichnet als

$$\varepsilon_L = \frac{c_w}{c_a} = \frac{0.010 (1 + 2s/l)}{c_a} \quad (236)$$

Dabei wird c_a aus der Gl.(90) mit dem Wert s/l aus Gl.(99) oder (101) berechnet, je nachdem, welche der beiden Gleichungen den kleineren s/l -Wert ergibt.

VII.-4 Vortriebswirkung des festen Leitrades

Mit den berechneten Werten der Zirkulation des Leitrades der einzelnen induzierten Geschwindigkeiten und den Werten der Gleitzahl kann auch die Vortriebswirkung S_L des in der Düse eingebauten Leitapparates bestimmt werden. Nach Bild 19 und nach dem Kutta-Joukowski-Gesetz erhält man für die axiale Kraftwirkung des Leitrades

$$S_{Li} = z_L \cdot g \cdot R_L \int_0^1 \Gamma_L (w_{t_{PSm}} - w_{t_L}) dx \quad (237)$$

bzw. bei Berücksichtigung der Verluste infolge der Zähigkeit der Flüssigkeit

$$S_L = z_L \cdot g \cdot R_L \int_0^1 \Gamma_L (w_{t_{PSm}} - w_{t_L}) (1 - \varepsilon_L \cdot \operatorname{tg} \beta_i) dx \quad (238)$$

Wir können auch hier den idealen und effektiven Schubleistungsgrad des Leitrades zweckmäßig in den Formen

$$c_{SLi} = \frac{S_{Li}}{\frac{g}{2} v^2 \pi R_p^2} \quad (239) \quad \text{und} \quad c_{SL} = \frac{S_L}{\frac{g}{2} v^2 \pi R_p^2} \quad (240)$$

einführen und dann schreiben

$$c_{SLi} = 4 z_L \left(\frac{R_L}{R_p} \right)^2 \int_{x_{NL}}^1 G_L \left[\left(\frac{w_t}{v} \right)_{PSm} - \left(\frac{w_t}{v} \right)_L \right] dx \quad (241)$$

bzw.

$$c_{SL} = 4 z_L \left(\frac{R_L}{R_p} \right)^2 \int_{x_{NL}}^1 G_L \left[\left(\frac{w_t}{v} \right)_{PSm} - \left(\frac{w_t}{v} \right)_L \right] \frac{\cos(\beta_{iL} - \varepsilon_L)}{\cos \beta_{iL}} dx \quad (242)$$

Bei Berücksichtigung der Gleichungen (224) und (67) gelangt man zu dem folgenden Ausdruck

$$C_{SL} = 2(1-x_{NL}) \cdot z_L \left(\frac{R_L}{R_P}\right)^2 \int_0^{2\pi} \left\{ \left[\sum_{\mu=1}^{N-1} G_L(\mu) \sin(\mu\varphi) \right] \left[\left(\frac{W_t}{V}\right)_{PSm} - \left(\frac{W_t}{V}\right)_L \right] \cdot \frac{\cos(\beta_{iL} + \varepsilon_L)}{\cos\beta_{iL}} \cdot \sin\varphi \right\} d\varphi \quad (245)$$

VII.-5 Gesamtwirkungsgrad des Systems Propeller-Düse-Leitrad

Durch die Wirkung des Leitrades ändert sich auch der Gesamtbelastungsbeiwert des Antriebssystems. Für diesen setzen wir:

$$C_{SPDL} = \frac{S_P + (S_D - W_D) + S_L}{\frac{\rho}{2} V^2 \pi R_P^2} = C_{SP} + C_{SD} + C_{SL} \quad (246)$$

Der Wirkungsgrad des gesamten Antriebssystems "Propeller-Düse-Leitrad" kann in folgender Form gegeben werden (analog Gl.(192) und (193)):

$$\eta_{PDL} = \frac{(S_P + S_{D\text{eff}} + S_L) \cdot V}{N_H} = \frac{C_{SP} + C_{SD} + C_{SL}}{C_N} = \frac{C_{SPDL}}{C_N} \quad (247)$$

Dabei sind C_{SP} , C_{SD} , C_{SL} die Belastungsbeiwerte des Propellers (106), der Düse (191) und des Leitrades (242) und c_N der Leistungsbeiwert (108).

Analog der Auswertung der Düsenwirkung Gl. (196) und (197) führen wir hier folgende Beiwerte des Leitrades ein:

$$\delta_{Li} = \frac{S_{Li}}{S_P} = \frac{C_{SLi}}{C_{SP}} \quad (248) \quad \text{und} \quad \delta_L = \frac{S_L}{S_P} = \frac{C_{SL}}{C_{SP}} \quad (249)$$

bzw.

$$\delta_{LSi} = \frac{S_{Li}}{S_P + S_{D_{\text{eff}}}} = \frac{C_{SLi}}{C_{SPD}} \quad (250) \quad \text{und} \quad \delta_{LS} = \frac{S_L}{S_P + S_{D_{\text{eff}}}} = \frac{C_{SL}}{C_{SPD}} \quad (251)$$

Die Beiwerte drücken eigentlich den relativen idealen, bzw. realen (effektiven) Gewinn des Leitrades aus, und zwar entweder bezüglich des Propellers allein oder bezüglich des Systems Propeller in der Düse ohne Leitrad.

Mit den Gl. (264), (193) und (110) kann man schreiben

$$\frac{\eta_{PDL} - \eta_{PD}}{\eta_P} = + \frac{C_{SL}}{C_{SP}} = \delta_L \quad (252)$$

bzw. bei dem System Propeller + Düse

$$\frac{\eta_{PDL} - \eta_{PD}}{\eta_{PD}} = + \frac{C_{SL}}{C_{SP} + C_{SD_{\text{eff}}}} = \frac{C_{SL}}{C_{SPD}} = \delta_{LS} \quad (253)$$

Zwischen diesen beiden Beiwerten gilt die Beziehung

$$\delta_L = \delta_{LS} (1 + \delta_D) \quad (254)$$

bzw.

$$\delta_{Li} = \delta_{LSi} (1 + \delta_D) \quad (255)$$

wobei δ_D nach Gl.(197) der effektive relative Gewinn der Düse ist.

Zur Feststellung des Gewinnes bei Benutzung des Leitrades in der Düse hinter dem Düsenpropeller können noch weitere Beziehungen benutzt werden, z.B.

$$\frac{\eta_{PDL}}{\eta_{PD}} = 1 + \delta_{LS} \quad (256)$$

bzw.

$$\frac{\eta_{PDL}}{\eta_P} = 1 + \delta_D + \delta_L = (1 + \delta_D)(1 + \delta_{LS}) \quad (257)$$

VIII. Wechselwirkung zwischen dem Propeller und der Düse.

=====
Ein Beispiel der Bestimmung der Konstruktionspara-
=====
meter des Propellers und des Leitrades
=====

Wie schon am Anfang gesagt wurde, besteht das Antriebssystem Propeller-Düse-Leitrad aus drei Gliedern, die sich gegenseitig beeinflussen.

Die Integralgleichung (26) für die Bestimmung der Zirkulation $\gamma(\bar{\mathfrak{D}})$ an der Düse enthält in der Funktion $F(\bar{\mathfrak{D}})$ Gl.(44) zwei Terme WP_u und WL_v , die den Einfluß des Propellers und des Leitrades angeben. Die Ausdrücke WP_u und WL_v sind nach Gl. (32) und (34) eigentlich die Fourier-Koeffizienten der Entwicklung der Funktionen der radialen Geschwindigkeiten, die an der Düse vom Propeller Gl.(179) und vom Leitrad Gl.(226) induziert werden.

Andererseits enthält das Gleichungssystem für die Berechnung der Zirkulation G am Propellerflügel Gl.(73) und der Zirkulation des Leitrades Gl.(223) die Axialgeschwindigkeiten w_{a_p} und w_{a_q} die von der Düse in der Propellerebene Gl.(50) und (51) und in der Leitradebene Gl.(204 und (205) induziert werden.

Daraus folgt, daß die Endwerte der Zirkulation an der Düse $\gamma(\bar{\mathfrak{D}})$ am Propeller $G_p(x)$ und am Leitradflügel $G_L(x)$, sowie die entsprechenden induzierten Geschwindigkeiten w_γ, w_q, w_p, w_L endgültig erst nach mehreren Iterationsschritten festgestellt werden können.

Zu Beginn, in der sogenannten nullten Iteration wurden in der Integralgleichung (26) für die Bestimmung der Pseudozirkulation

an der Düse die Werte WP_u und WL_v (in der Funktion $F(\bar{\vartheta})$), da noch unbekannt, gleich Null gesetzt. Mit den so bestimmten Werten der Düsenzirkulation (Düse allein) können die Axialgeschwindigkeiten $w_{a\gamma}$ in der Propellerebene Gl.(50), bzw. auch in der Leitradenebene Gl.(204) berechnet werden.

Die Quell-Senken-Belegung der Düse $q(\bar{\vartheta})$ hängt nur von der Profildicke ab Gl.(13), deswegen sind auch die von ihr induzierten Geschwindigkeiten in der Propeller- und Leitradenebene Gl.(51) und (205) von den Iterationen unabhängig.

Die $w_{a\gamma}$ und $w_{a\varrho}$ -Werte gehen in die rechte Seite des Gleichungssystems (73) für die Zirkulation $G_p^{(1)}$ des Propellers, bzw. für ihre Fourier-Koeffizienten $G_\mu(\varphi)$ ein, mit denen nach Gl.(72) die vom Propeller selbst induzierten Geschwindigkeiten bestimmt werden. Aufgrund dieser Werte können aus Gl.(201-107) die mittleren axialen und tangentialen Geschwindigkeiten $w_{a\text{psm}}$ und $w_{t\text{psm}}$ in der Leitradenebene sowie die Anstellwinkel β_i des Leitrades (217) bzw. (221) festgestellt werden. Durch die Lösung des Gleichungssystems (223) erhalten wir auch die Zirkulationswerte G_L am Leitradflügel.

Mit den Werten G_p und G_L können die durchschnittlichen radialen Geschwindigkeiten an der Düse vom Propeller Gl.(170) und vom Leitrad Gl.(226), sowie die für die erste Iteration der Integralgleichung (26) benötigten Terme WP_u und WL_v Gl.(32) der Funktion $F(\bar{\vartheta})$ Gl.(44) und damit die neuen Zirkulationswerte $\gamma_1(\bar{\vartheta})$ ermittelt werden.

Bei Ausführung von Proberechnungen wurde festgestellt, daß die Rückwirkung des festen Leitrades auf der Düse und auf den Propeller sehr gering ist.

Die Werte w_{rLD} Gl.(226) des Leitrades (aus denen sich der Term WL_v ergibt) erreichen höchstens 1/100 der Werte w_{rPD} Gl.(170) des Propellers, und entsprechend bleiben die Werte der Pseudozirkulation der Düse bei Berücksichtigung der Leitradwirkung fast unverändert. Daß der Einfluß des Leitrades auf die radialen Geschwindigkeiten an der Düse so geringfügig ist, hat seine Ursache vor allem in der großen Steigung ($\tan \beta_i$) der freien Wirbel des Leitrades (β_i -Werte des festen Leitrades sind im Bereich von 75° - 90° , wie aus dem Bild 29-A ersichtlich).

Darum wurde bei dem Iterationsverfahren die Rückwirkung des festen Leitrades auf die Düse vernachlässigt und der Leitapparat nach Beendigung des Iterationsverfahrens berechnet.

Mit den Zirkulationswerten der Düse $\gamma_{(1)}(\bar{\varphi})$ der 1. Iteration bestimmt man die neuen Werte $w_{a\gamma}$ Gl.(50) in der Propeller-ebene und damit aus dem Gleichungssystem (73) die neuen Zirkulationswerte des Propellers $G_p^{(2)}$ und die neuen Radialgeschwindigkeiten an der Düse w_{rPD} Gl.(170) der zweiten Iteration. Danach kann man wieder die Pseudozirkulation - jetzt in zweiter Iteration $\gamma_2^*(\bar{\varphi})$ - ermitteln.

Das Verfahren wiederholt sich, bis sich die Werte $\gamma_n^*(\bar{\varphi})$ an der Düse von den Werten $\gamma_{(n-1)}^*(\bar{\varphi})$ der vorhergehenden Iteration nur noch um einen beliebig klein gewählten Wert ϵ unterscheiden. Um die Iteration zu beschleunigen, d.h. um eine schnellere Konvergenz der Werte $\gamma^*(\bar{\varphi})$ zu erreichen, wurden für die einzelnen Iterationsschritte die mittleren Werte gebildet:

$$\frac{\gamma_{(0)}^*(\bar{\varphi}) + \gamma_{(1)}^*(\bar{\varphi})}{2} = \gamma_{(1)\text{mittl.}}^*(\bar{\varphi})$$

$$\frac{\gamma_{(1)\text{mittl.}}^*(\bar{\varphi}) + \gamma_{(2)}^*(\bar{\varphi})}{2} = \gamma_{(2)\text{mittl.}}^*(\bar{\varphi})$$

allgemein

$$\frac{\gamma_{(n-1)\text{mittl.}}^* (\bar{\mathcal{F}}) + \gamma_n^* (\bar{\mathcal{F}})}{2} = \gamma_{(n)\text{mittl.}}^* (\bar{\mathcal{F}}) \quad (258)$$

und für diese Werte die Axialgeschwindigkeit der Zirkulation berechnet. Die Konvergenz der $\gamma_{(n)\text{mittl.}}^* (\bar{\mathcal{F}})$ -Werte kann man aus Bild 20 sehen. Bei Wahl der Schranke $\varepsilon = 0.0075$, d.h.

$$\gamma_{(n)\text{mittl.}}^* (\bar{\mathcal{F}}) - \gamma_{(n-1)\text{mittl.}}^* (\bar{\mathcal{F}}) < 0,0075 \quad (259)$$

sind durchschnittlich $n = 5$ Iterationsschritte nötig.

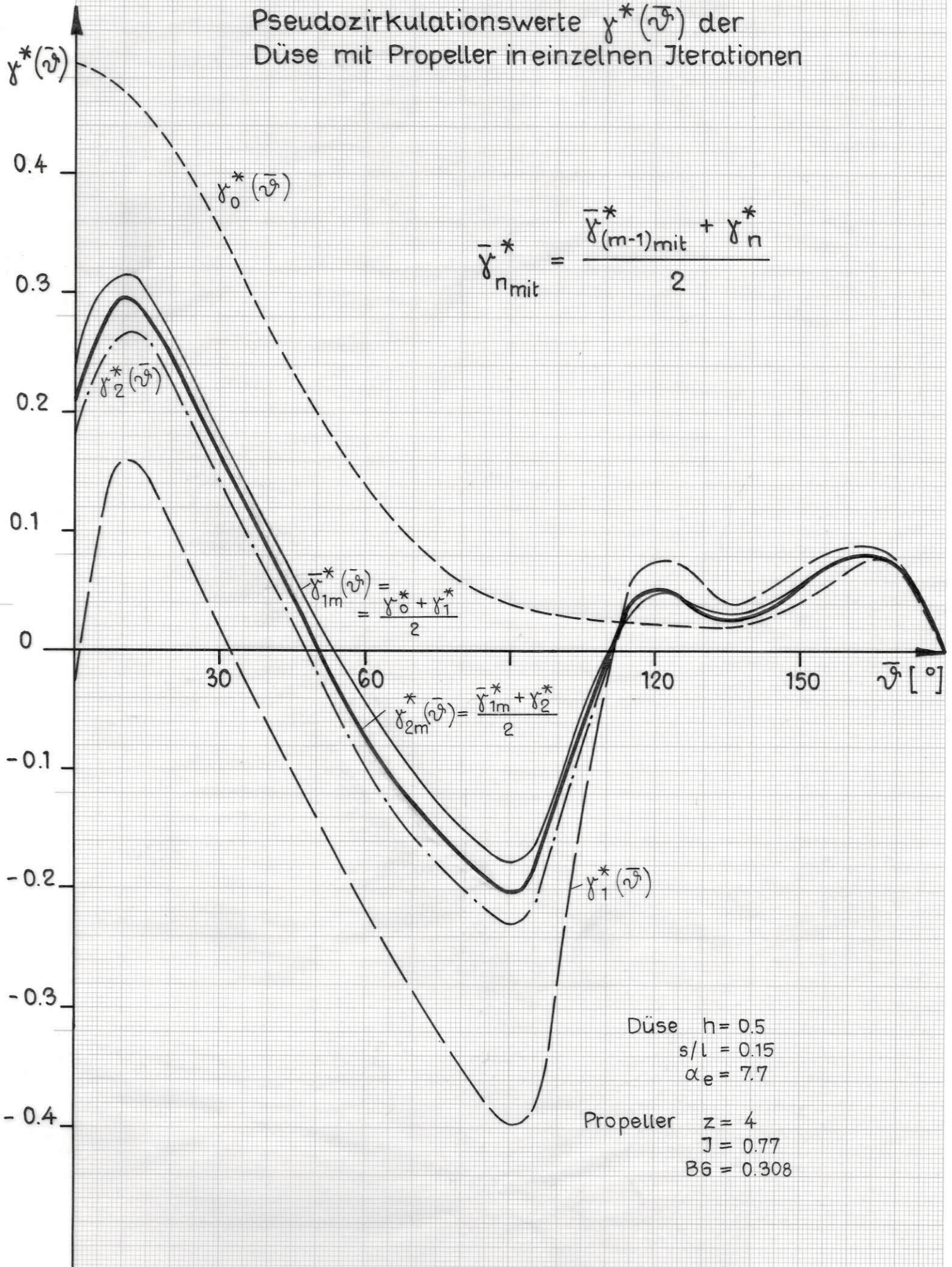
Aus den folgenden Bildern kann man anschaulich die Verläufe der Zirkulations- und Geschwindigkeits-Werte bei den einzelnen Iterationen sehen.

In Diagramm 21 sind die Zirkulationsverteilungen $\gamma (\bar{\mathcal{F}})$ an der gegebenen Düse ($h = 0.5$; $\alpha_e = 7.7^\circ$, modif. Profil NACA 5412) für die Düse alleine $\gamma_{(0)} (\bar{\mathcal{F}})$ und für mehrere Iterationen für die Düse mit dem gegebenen Düsenpropeller ($z_p = 4$, $J = 0.22$, $BG = 0.164$) dargestellt.

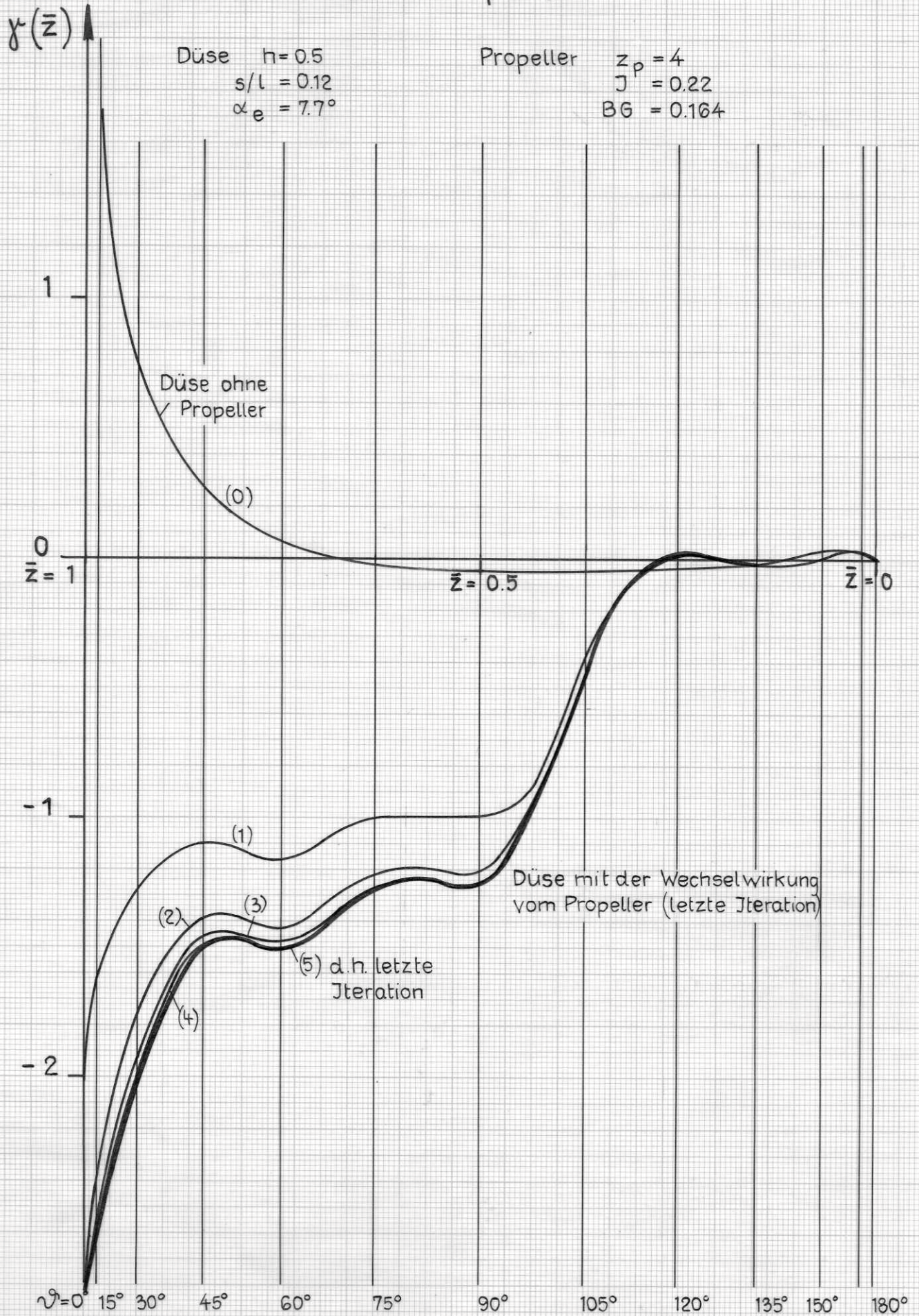
Die durch diese Zirkulationsverteilungen an der Düse in der Propellerebene induzierten Axialgeschwindigkeiten $w_{a\gamma}^{(n)}$ sind in Bild 22 zu sehen, ebenfalls die Geschwindigkeiten $w_{a\varrho}$ die durch die Quell-Senken-Belegung der Düse in der Propellerebene induziert sind.

Wie sich die Zirkulationsbelegung $G_p^{(n)}$ am Flügel eines Düsenpropellers bei den einzelnen Iterationen ändert, ist aus Diagramm 23 ersichtlich.

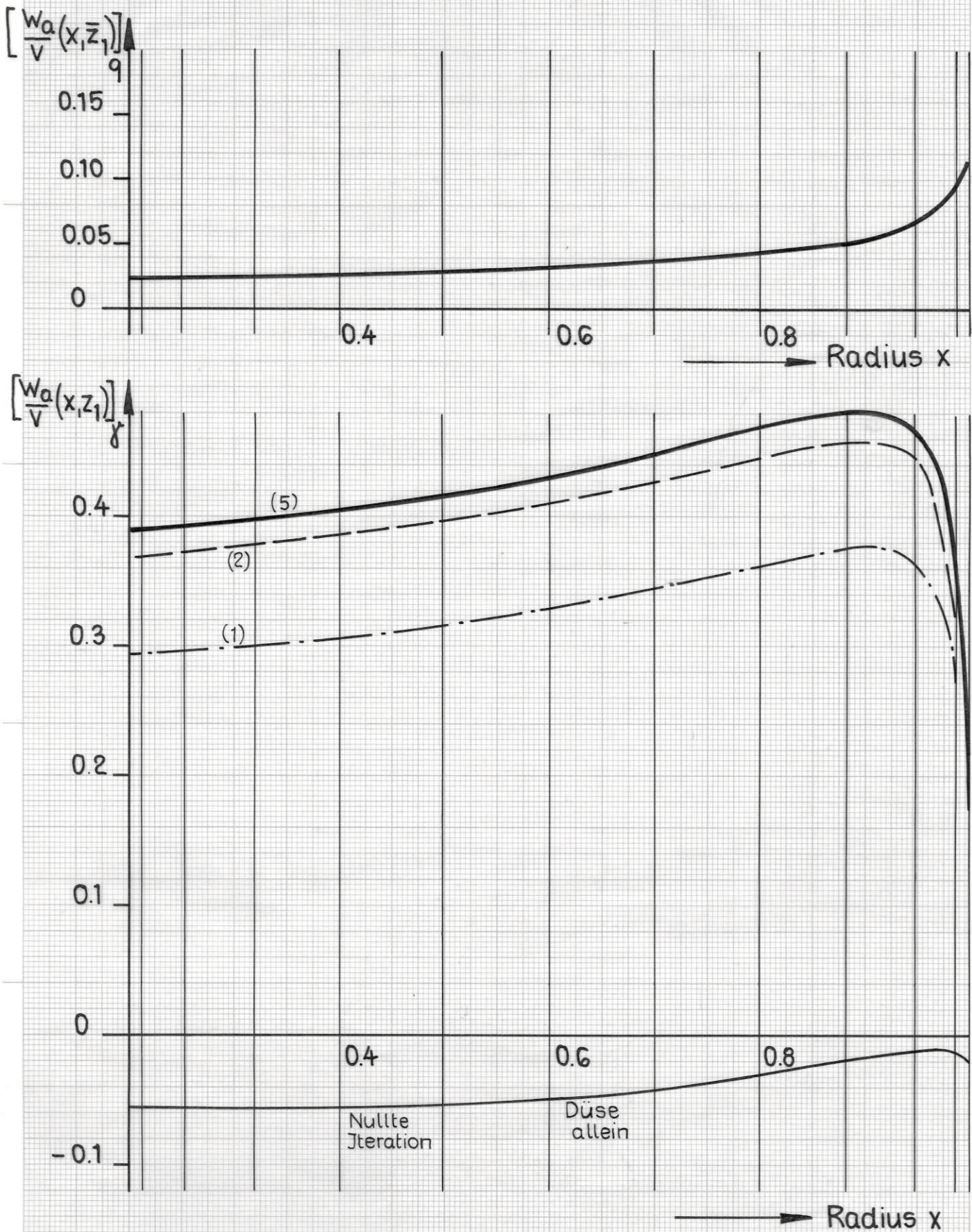
Pseudozirkulationswerte $\gamma^*(\bar{\nu})$ der Düse mit Propeller in einzelnen Iterationen



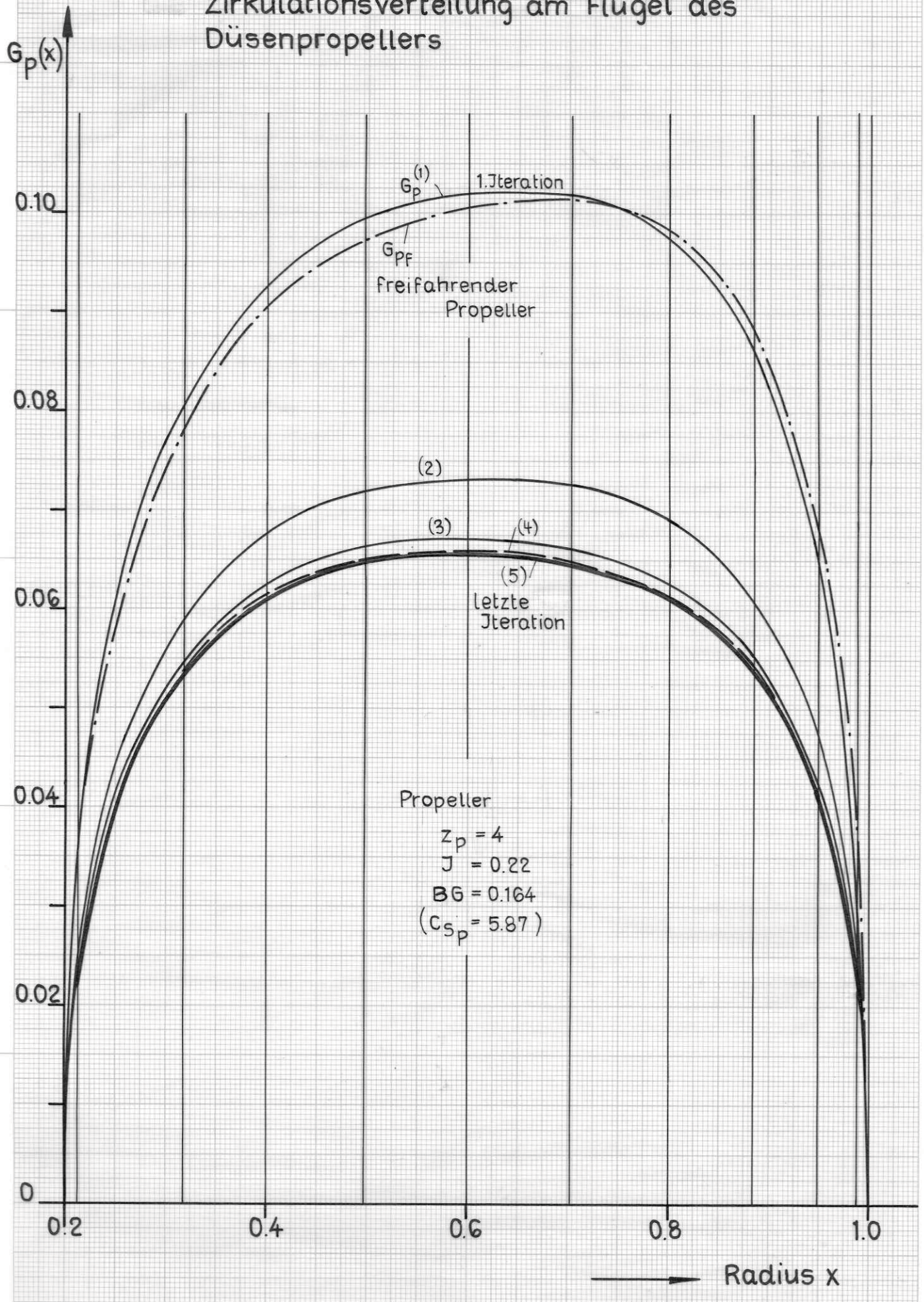
Zirkulationsbelegung $\gamma(\bar{z})$ der Düse mit dem Propeller



Die von der Quell-Senken- und der Zirkulationsbelegung der Düse in der Propellerebene induzierten Axialgeschwindigkeiten



Zirkulationsverteilung am Flügel des Düsenpropellers



Im Vergleich zu den Werten G_{pf} des freifahrenden Propellers mit denselben Eingabedaten zeigt die 1. Iteration des Düsenpropellers größere Werte G_{pf} der Zirkulation. Diese Erscheinung hängt zusammen mit den negativen Werten der Axialgeschwindigkeiten der Düse in der nullten Iteration (siehe Bild 22). (Die allein für sich betrachtete Düse mit größerem Öffnungswinkel α_e ruft in der Düse eine Verzögerung des Stromes hervor). Die Endwerte der Flügelzirkulation des Düsenpropellers G_p sind aber kleiner als die des freifahrenden Propellers G_{pf} , wodurch sich die Entlastung des Propellers in dem System Propeller in der Düse ausdrückt.

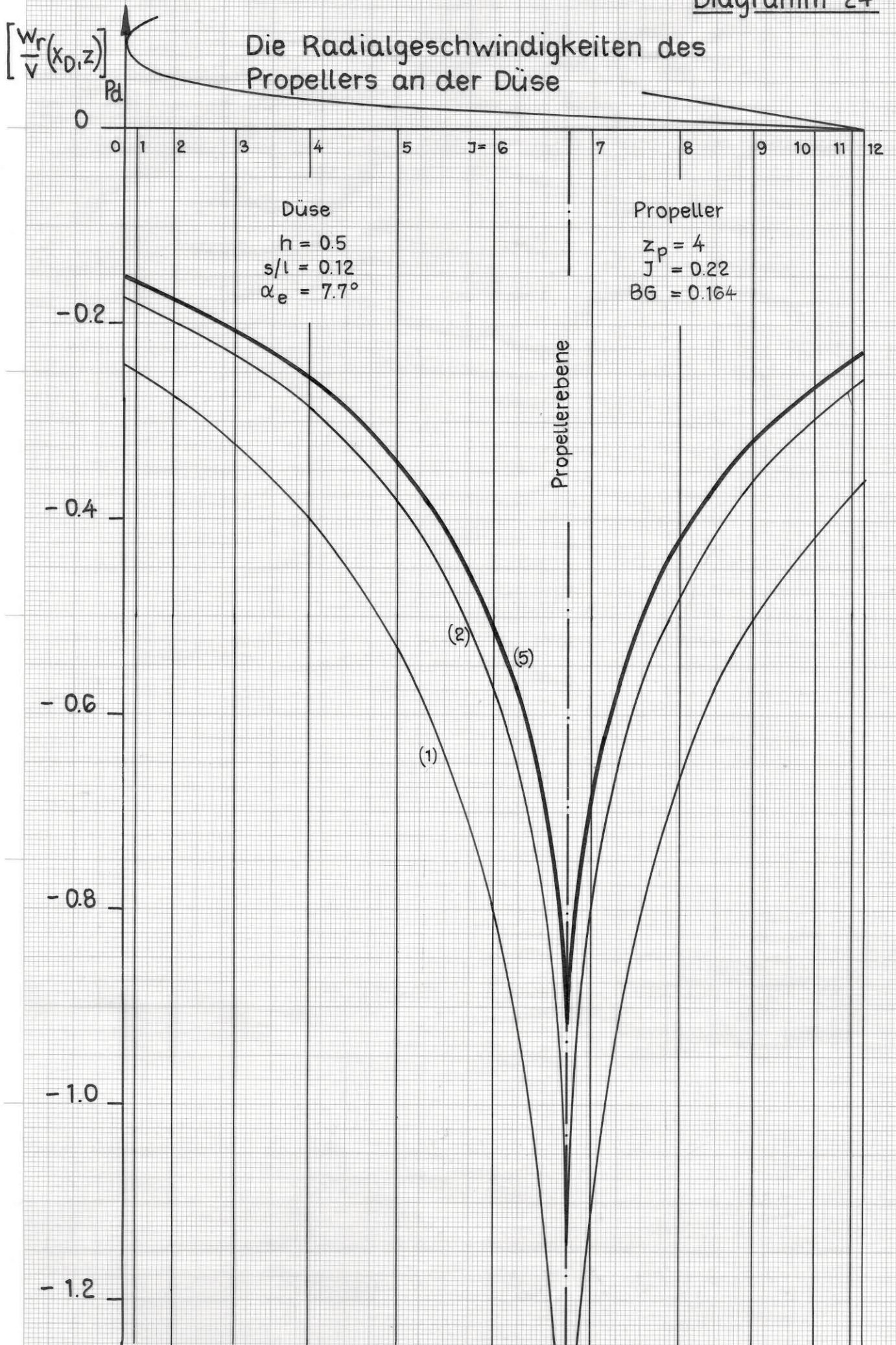
In dem nächsten Bild 24 ist der Verlauf der durchschnittlichen Radialgeschwindigkeiten an der Düse dargestellt.

Nachdem die Endwerte der Zirkulation an der Düse und am Propellerflügel bestimmt sind, kann man zur Berechnung des Leitrades übergehen.

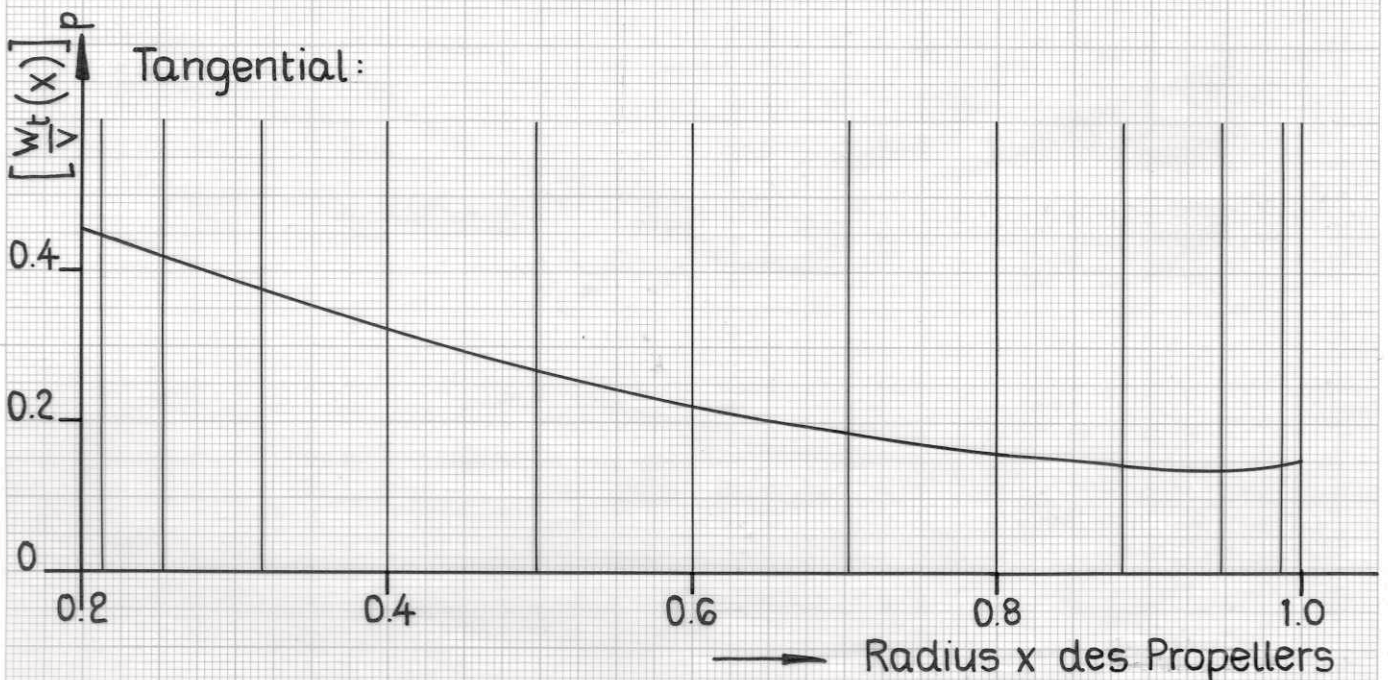
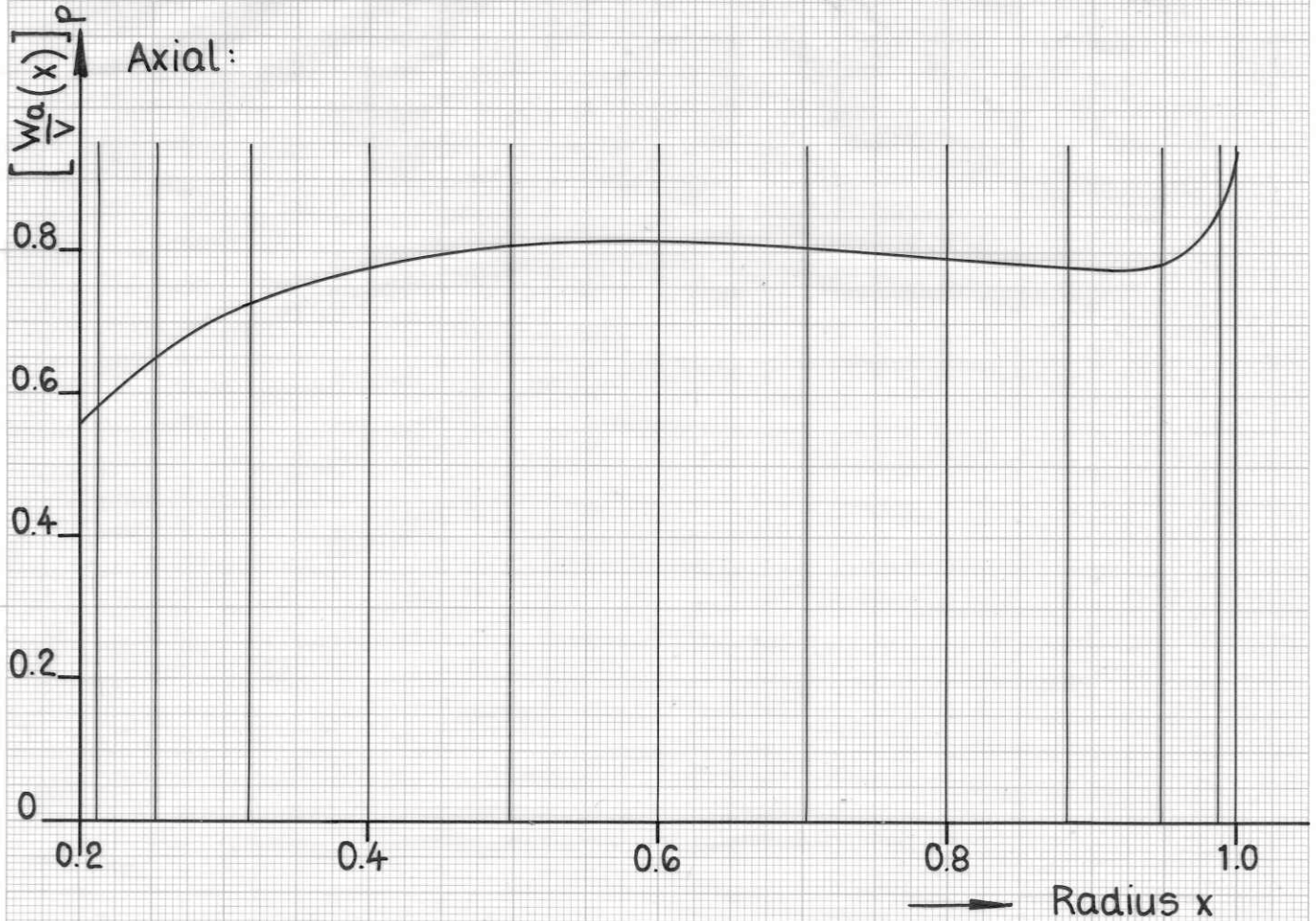
Zuerst muß man die vom Propeller induzierten axialen und tangentialen Geschwindigkeiten w_{ap} und w_{tp} Gl.(72) bestimmen. Diese sind für den angegebenen Fall in Bild 25 dargestellt.

In einem weiteren Diagramm 26 sind die mittleren Axial- und Tangentialgeschwindigkeiten w_{apsm} und w_{tpsm} des Propellerstrahles am Ort des Leitrades in der Düse dargestellt (Gl.(207 und 201)).

Für die Bestimmung dieser $\left[\frac{w_a}{v}(x) \right]$ -Werte sind auch die von der Quell-Senken-Belegung $q(\bar{z})$ und der Zirkulationsverteilung



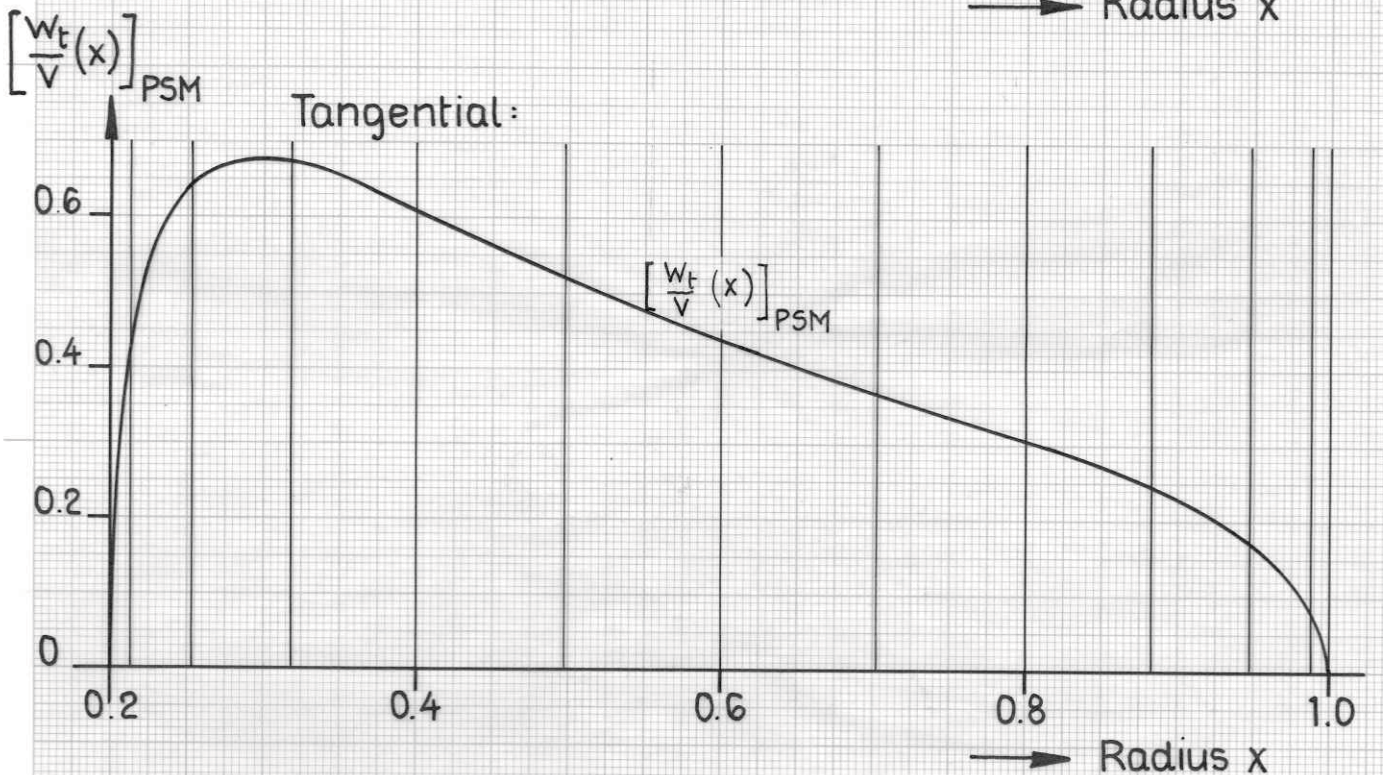
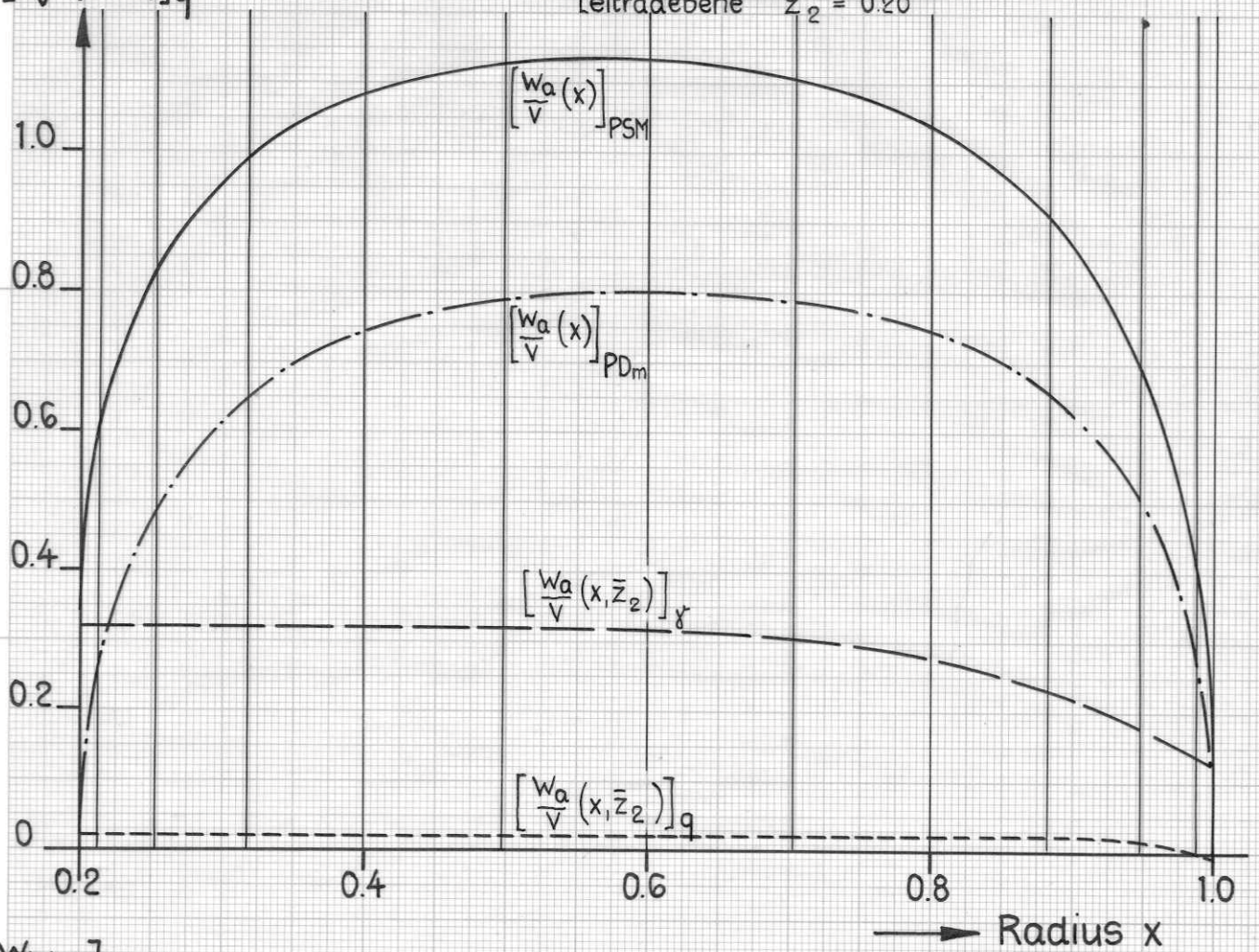
Die vom Düsenpropeller selbstinduzierten axialen und tangentialen Geschwindigkeiten
 (Propeller $z_p=4$ $J=0.22$ $BG=0.164$ ($c_{sp}=5.87$))



Die induzierten Geschwindigkeiten in der Leitradenebene der Düse

Axial (Gl. 207): Propeller $z_p=4$ $J=0.22$ $BG=0.164$
 Leitradenebene $\bar{z}_2 = 0.20$

- $[\frac{w_a}{v}(x)]_{PSM}$
- $[\frac{w_a}{v}(x)]_{PDm}$
- $[\frac{w_a}{v}(x, \bar{z}_2)]_{\gamma}$
- $[\frac{w_a}{v}(x, \bar{z}_2)]_q$



der Düse in der Leitradenebene induzierten Axialgeschwindigkeiten $\left[\frac{w_a}{v} (x, \bar{z}_2) \right]_q$ Gl.(205) und $\left[\frac{w_a}{v} (x, \bar{z}_2) \right]_x$ Gl.(204), sowie die durchschnittlichen Axialgeschwindigkeiten des Düsenpropellers $\left[\frac{w_a}{v} (x) \right]_{PDm}$ Gl.(203) nötig. Sie sind deshalb auch in Bild 26 dargestellt.

Mit den Werten $w_{a_{psm}}$ und $w_{t_{psm}}$ kann man die β_{iL} -Winkel des Leitradprofils nach Gl.(208) und (211) berechnen (siehe Bild 28 A) und auch die Zirkulationsbelegung G_L am Leitradflügel. Für das Leitrad mit der Flügelzahl $z_L = 7$ sind die Verteilung der Zirkulation $G_L(x)$ und auch die vom Leitrad induzierten Axial- und Tangentialgeschwindigkeiten w_{aL} und w_{tL} Gl.(225) in Bild 27 aufgetragen. Die weiteren Entwurfsparameter des Düsenpropellers und des Leitrades, wie z.B. die relativen Längen und Dicken des Profils l/D , s/l sind in den Bildern 28 und 29 dargestellt.

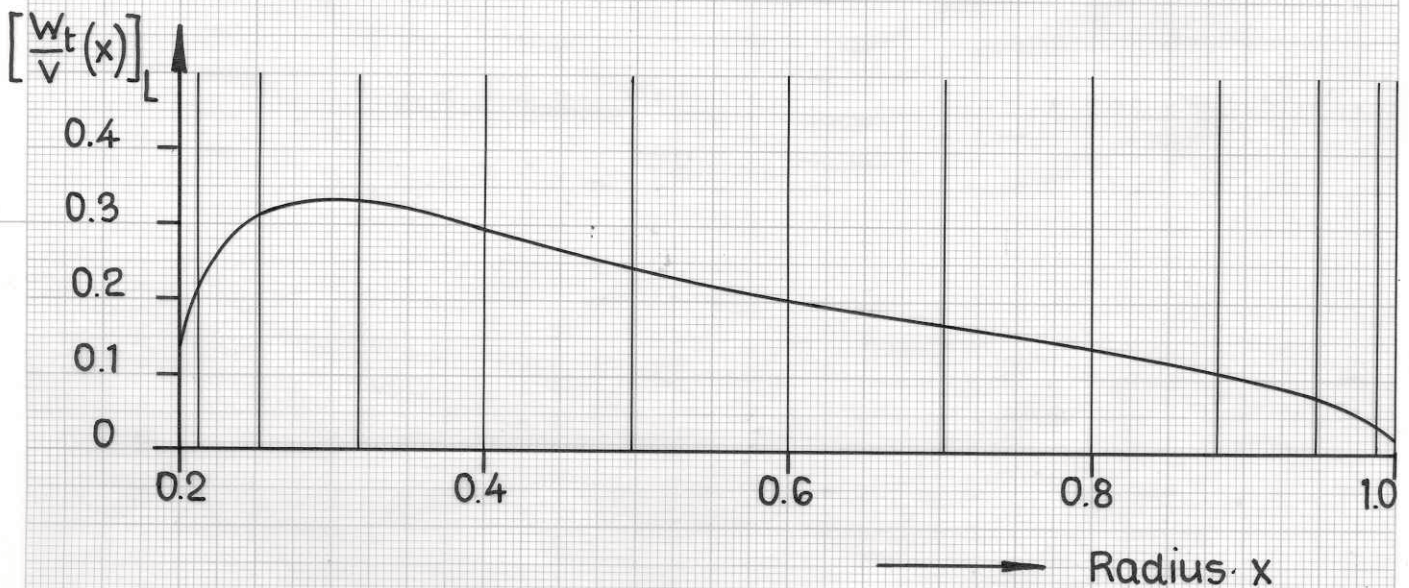
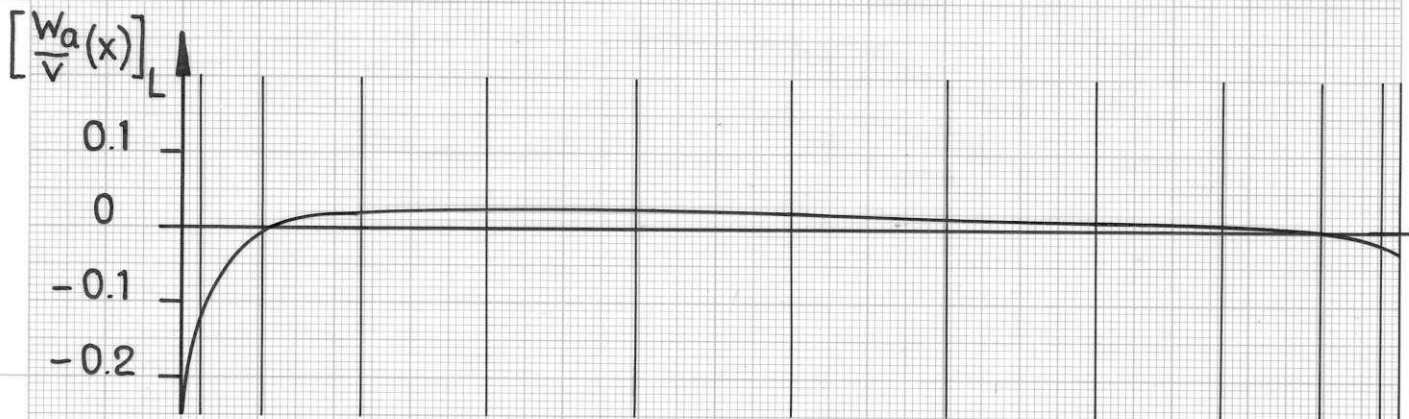
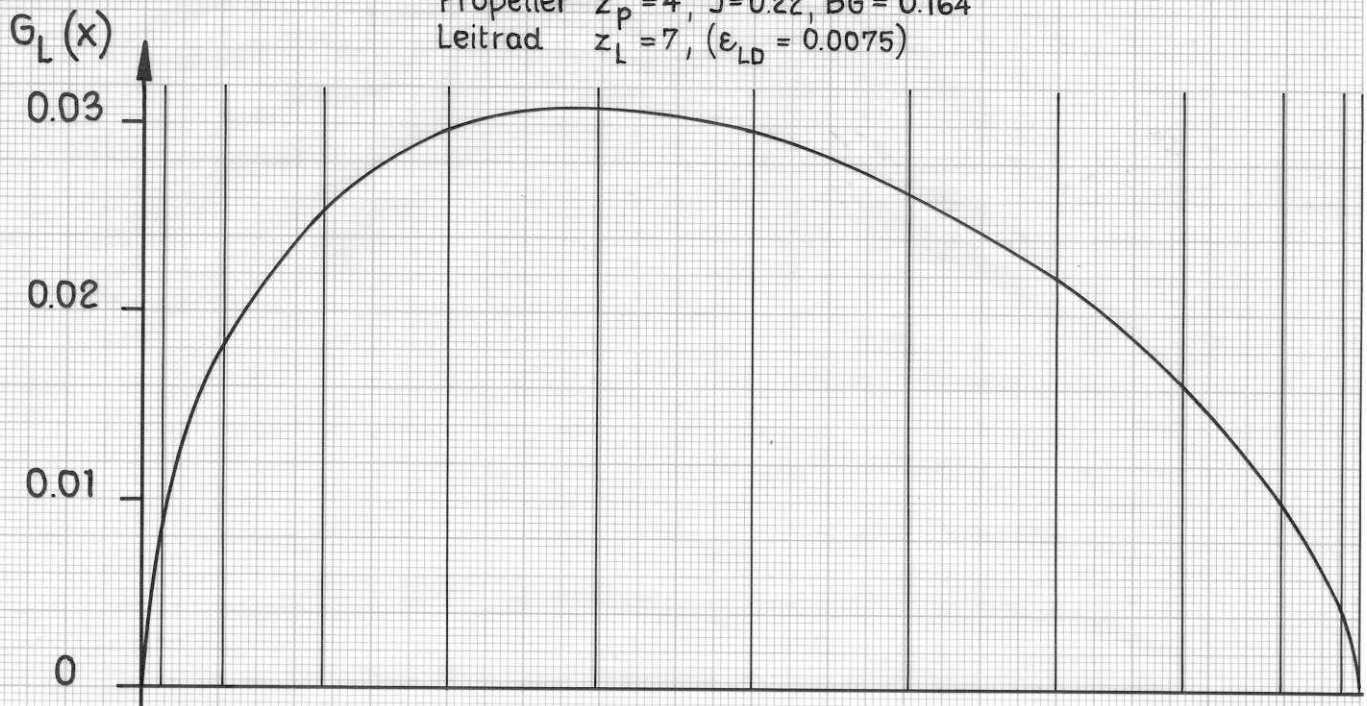
Den Umriß des Flügels (die Werte l/D) kann man noch korrigieren. Das Flächenverhältnis des Propellers (bzw. auch des Leitrades) kann durch folgende Ausdrücke bestimmt werden

$$\frac{F_a}{F} = \frac{z \int_{r_N}^R l_r \cdot dr}{\pi R^2} = \frac{2z}{\pi} \int_{x_N}^1 \left(\frac{l}{D} \right)_x dx \quad (260)$$

$$\frac{F_a}{F} \approx \frac{z(1-x_N)}{N} \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{l}{D} \right)_i \cdot \sin \left(i \frac{\pi}{N} \right) \quad (261)$$

Zirkulationsverteilung und selbst induzierte Geschwindigkeiten des Leitrades

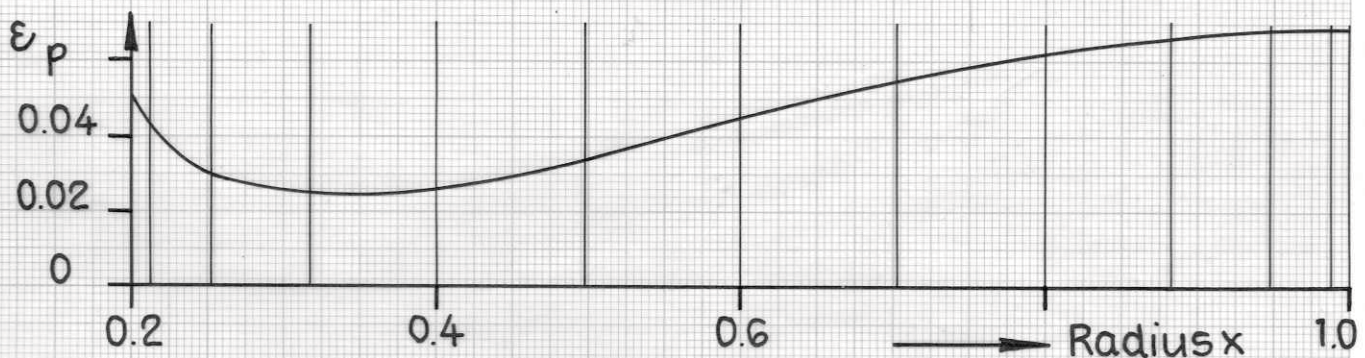
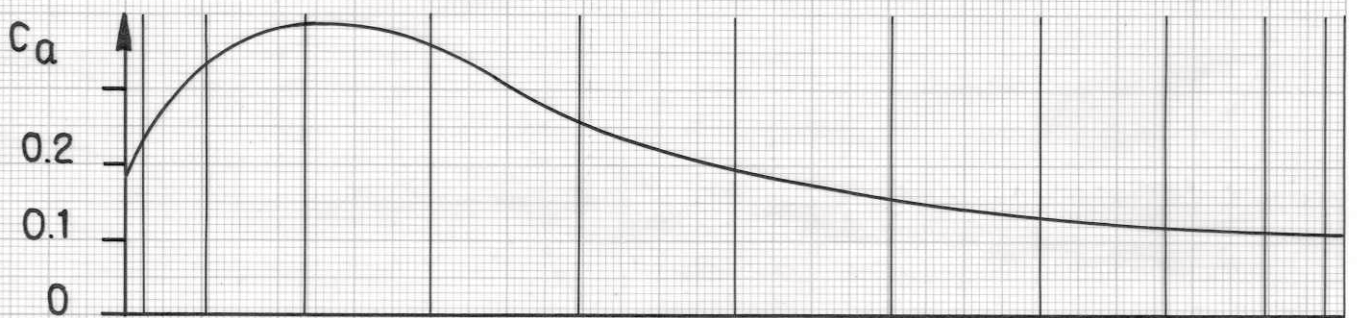
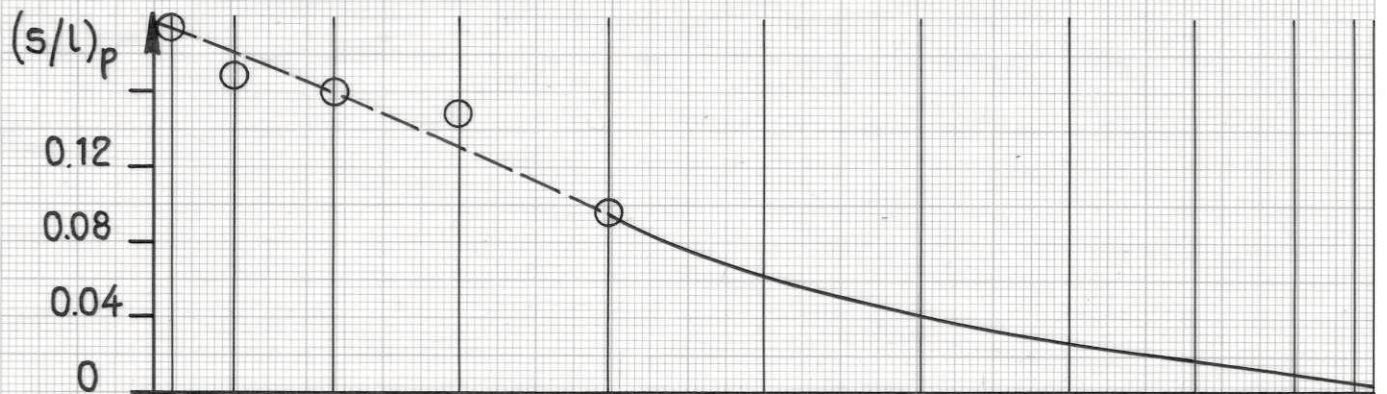
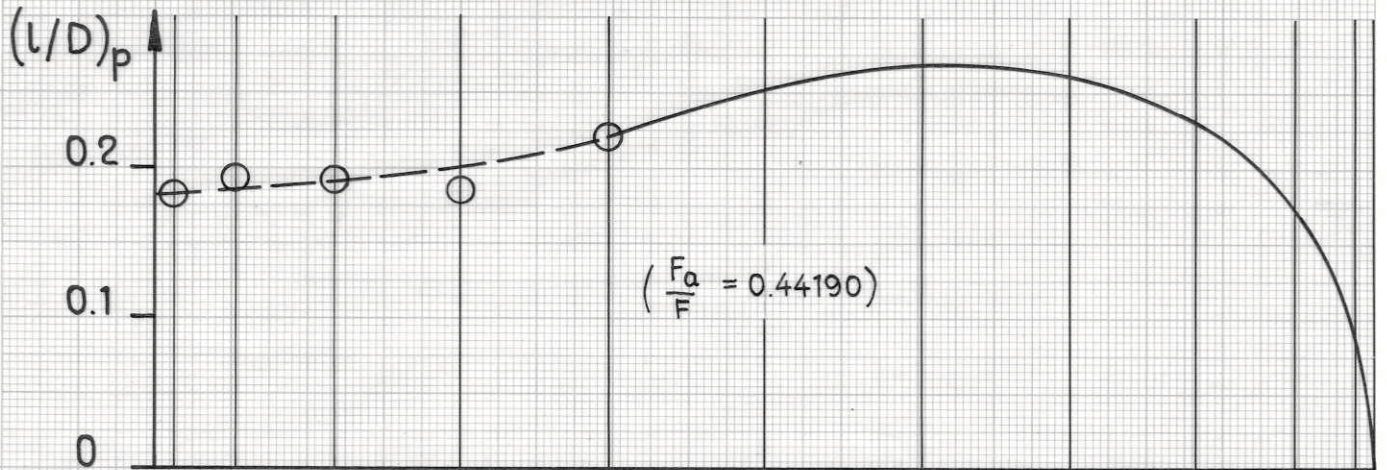
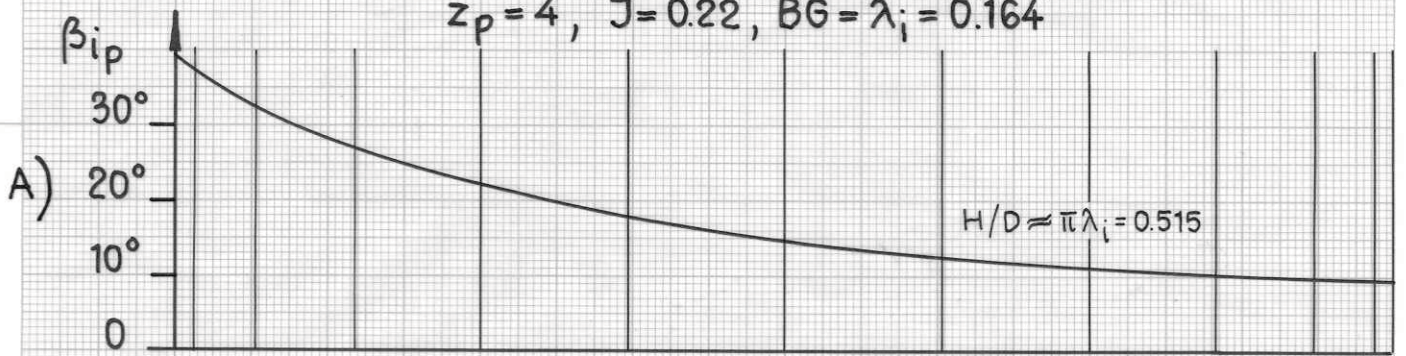
Propeller $z_p = 4, J = 0.22, BG = 0.164$
 Leitrad $z_L = 7, (\epsilon_{LD} = 0.0075)$



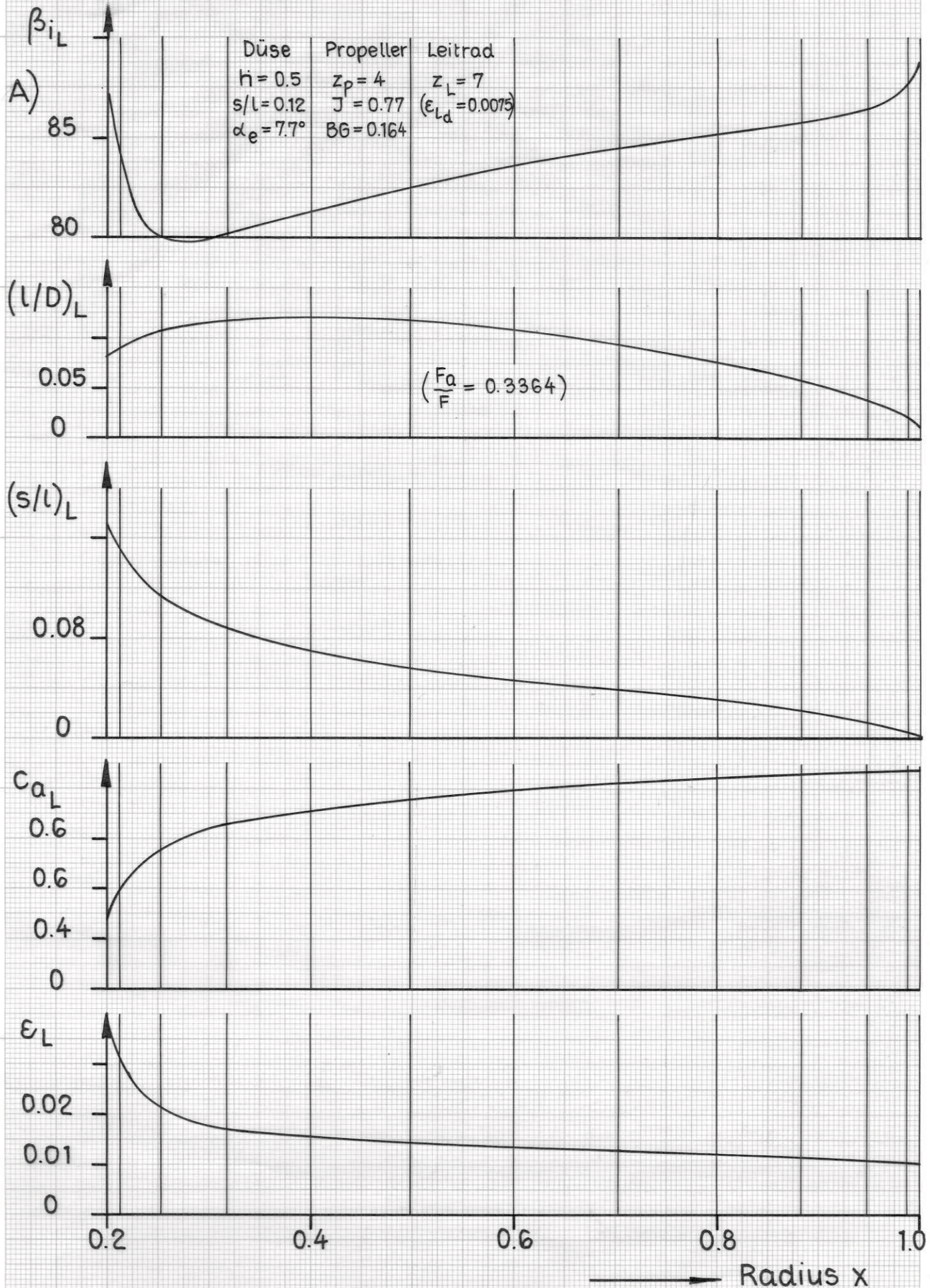
→ Radius · x

Entwurfsparameter für den Düsenpropeller

$z_p = 4, J = 0.22, BG = \lambda_i = 0.164$



Entwurfsparameter für das feste Leitrad in der Düse.



IX. Einige Rechenergebnisse für das Antriebssystem

=====

Düse-Propeller-Leitrad

=====

In den vorhergehenden Kapiteln wurde die Methode erläutert, nach der die Düsenwirkung und die Propulsionsparameter des Propellers und des Leitrades im System Düse-Propeller-Leitrad bestimmt werden. Das Verfahren ist programmiert, so daß man die Ergebnisse für den gewählten Fall der Eingabedaten schnell bekommen und die gesuchten Gesetzmäßigkeiten des Antriebssystems finden kann. Es wurden mehrere Kombinationen von Düsen, Propellern und Leiträdern untersucht. Da die Zahl der Entwurfparameter sehr groß ist, konnten hier nur einige Abhängigkeiten behandelt werden.

1. Die Düse ist durch den Öffnungswinkel α_e , das Längenverhältnis h der Düse und durch die Werte der Dicke s/l sowie der Krümmung c/l des Düsenprofils gegeben. Für das benutzte modifizierte Düsenprofil NACA 5415 (also mit $s/l = 0.15$) sind die Zirkulationsverteilungen $\gamma(\bar{z})$ der Düse mit $h = 0.5$ für verschiedene Öffnungswinkel α_e in Diagramm 30 dargestellt. Die Abhängigkeit dieser Werte von h und s/l ist sehr gering.

Wie sich die Geschwindigkeitsverhältnisse in den verschiedenen Düsenebenen $\bar{z} = 0.5, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1, 0$ ändern (Düse allein, ohne Propeller, $h = 0.5, s/l = 0.12, \alpha_e = 12,7^\circ$) kann man aus dem Diagramm 31 sehen. Der Einfluß des Öffnungswinkels α_e auf diese - von der Zirkulation der Düse - induzierten Geschwindigkeiten $\left[\frac{w_a}{v}(x, z) \right]_r$ in einer beliebigen Ebene der Düse ($\bar{z} = 0.4$) ist in Diagramm 32 dargestellt.

Die nur von der Dicke des Düsenprofils abhängige Quell-Senken-Belegung $q(\bar{z})$ der Düse ist für die modifizierten NACA 5415 und

$\gamma(\bar{z})$

Zirkulationsbelegung $\gamma(\bar{z})$ an
der Düse ohne Propeller
Einfluß des Öffnungswinkels α_e

2.0

1.5

1.0

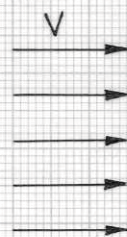
0.5

0

1.0

$\bar{z} = 1$

$\bar{z} = 0$



NACA 5415

$h = 0.5$
 $s/l = 0.15$

$\alpha_e = 15.2^\circ$

12.7°

10.2°

7.7°

3.0°

0.5°

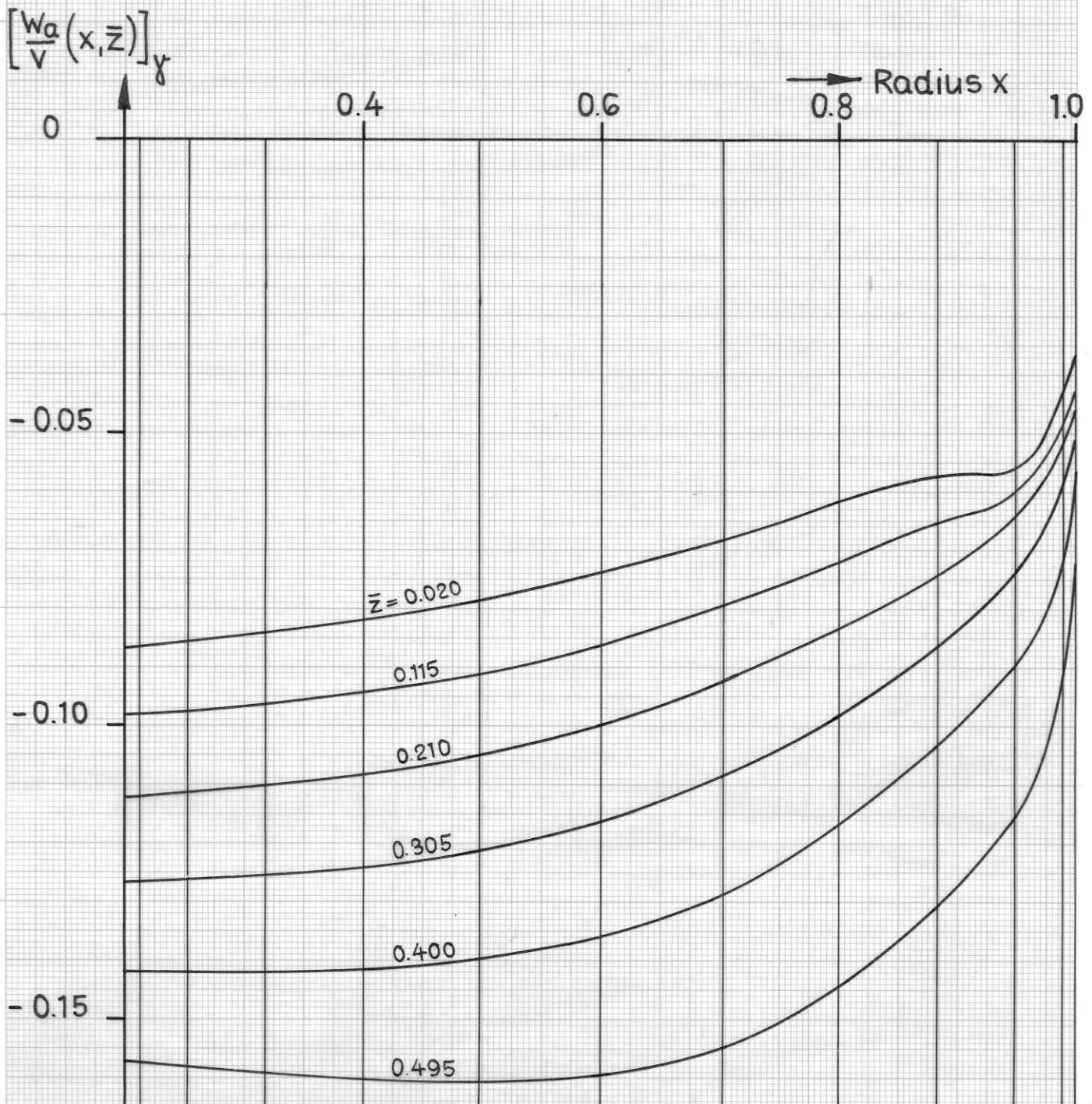
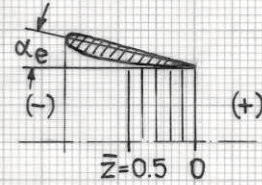
0.5

\bar{z}

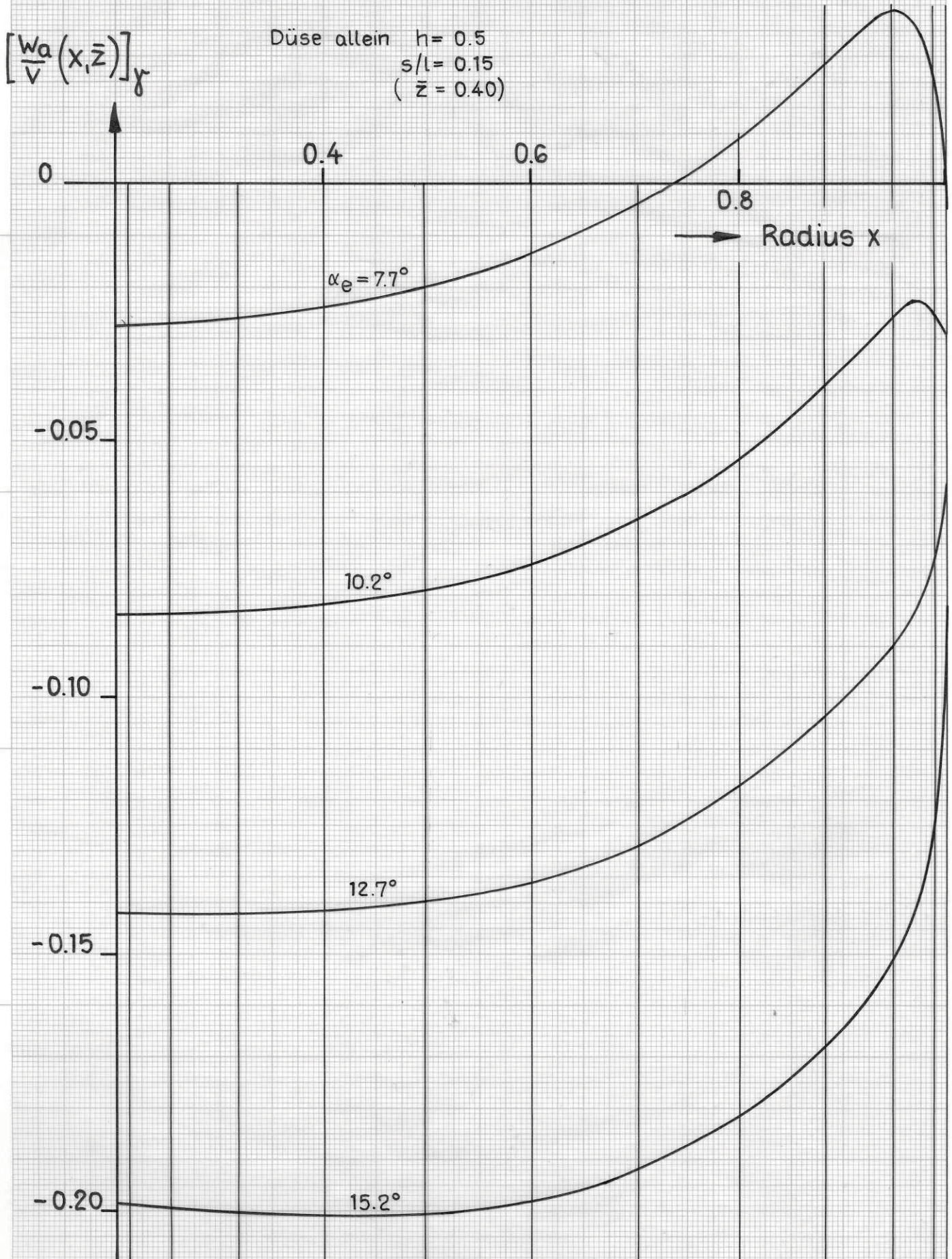
0

Die Axialgeschwindigkeiten der Düsenzirkulation $\gamma(\bar{z})$ in einzelnen Düsen-ebenen \bar{z} .

Düse allein $h = 0.5$
 $s/l = 0.15$
 $\alpha_e = 12.7^\circ$



Die Axialgeschwindigkeiten der Düsenzirkulation $\chi(\bar{z})$ in der Ebene $\bar{z} = 0.4$ in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel der Düse α_e



5412 Düsenprofile im folgenden Bild 33 gezeigt. Die von einer solchen Quell-Senken-Belegung induzierten Geschwindigkeiten $\left[\frac{w_a}{v} (x, \bar{z}) \right]_q$ in verschiedenen Ebenen der Düse (NACA 5412 Profil) können wir in Diagramm 34 sehen.

2. Die Eingabedaten des Düsenpropellers sind die Flügelzahl z_p , der Nabenradius x_n und zwei wichtige Parameter J und $\lambda_i = BG$ (siehe Gl.(1) und (2)). Durch Letztere sind die Winkel β und β_i und ihr Zusammenhang gegeben. Die Größe J ist der sogenannte Fortschrittsgrad und der Wert BG ist der Steigung des Propellers H/D proportional. Bei Benutzung der Kármán-Treffitz-Profile ist der hydrodynamische Steigungswinkel β_i dem Anstellwinkel φ gleich und für die Steigung des Propellers gilt dann

$$H/D = \pi x \cdot \operatorname{tg} \varphi \rightarrow \pi x \cdot \operatorname{tg} \beta_i = \pi \cdot BG \quad (262)$$

Um aus den Grunddiagrammen für freifahrende Propeller (K_s - J - η bzw. K_m - J - η) einen optimalen Propeller zu erhalten, d.h. einen Propeller, der für die gewünschte Belastung c_{Bel} (z.B. c_s , c_N , B_p usw.) auch den größtmöglichen Wirkungsgrad hat, ist es notwendig, die Eingabedaten J und BG so zu wählen, daß dieses Resultat erzielt wird. Das wird auf Anhieb nicht der Fall sein. Deshalb müssen mehrere Male die Werte J und BG variieren, um dadurch den Optimalfall zu finden.

Um den Einfluß der Flügelzahl z_p des Propellers im System Propeller + Düse genauer zu untersuchen, wäre es nötig, auch den Einfluß der endlichen Flügelzahl auf die Strömungsverhältnisse an der Düse zu betrachten, was zur instationären Auffassung des Problems führen würde. Weil wir uns hier auf den stationären Fall beschränken wollen, wurde die Propellerflügelzahl nicht variiert und $z_p = 4$ gewählt.

$q(\bar{z})$

2.0

1.5

1.0

0.5

0

-0.3

Quell-Senken-Belegung $q(\bar{z})$ der Düsen
 Modif. Düsenprofile NACA 5415 u. NACA 5412
 (Dickverteilung siehe Tab. 8)

für NACA 5415
 für NACA 5412

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

5412
 5415

$\bar{z} = 1.0$

$\bar{z} = 0.5$

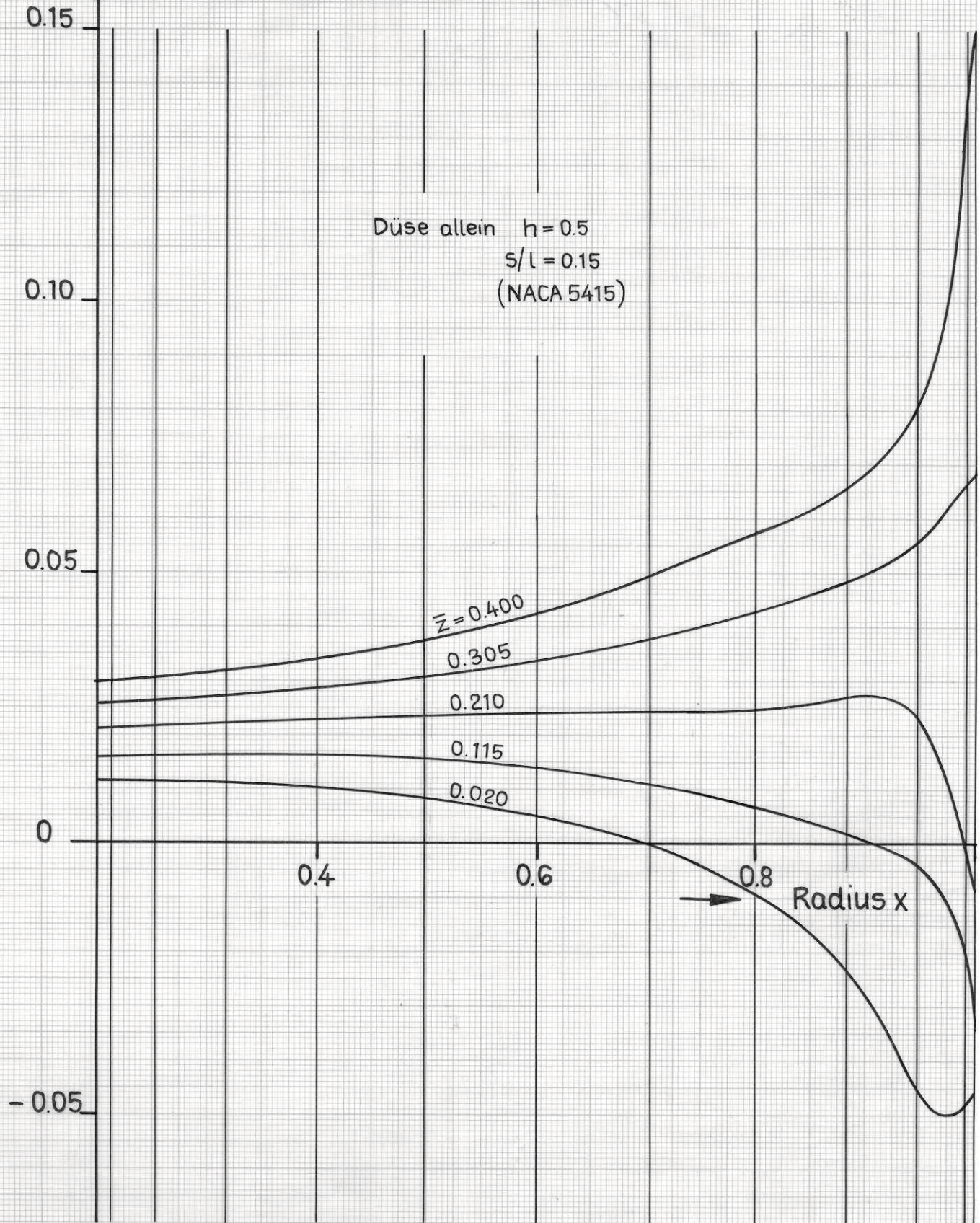
$\bar{z} = 0$

Die von der Quell-Senken-Belegung $q(\bar{z})$ der Düse induzierten Axialgeschwindigkeiten

$$\left[\frac{w_a(x, \bar{z})}{v} \right]_q$$

$$\left[\frac{w_a}{v} (x, \bar{z}) \right]_q$$

in einzelnen Ebenen der Düse



Als eine der wichtigsten Gesetzmäßigkeiten wurde hier die Abhängigkeit der Endergebnisse des Systems Propeller + Düse von der Belastung untersucht. Es wurden für die Belastung die Stufen ungefähr c_{spD} 0,8, 2, 7 und 14 gewählt. Für eine bestimmte Düse ($h = 0.5$, $s/l = 0.12$, $\alpha_e = 7,7^\circ$) sind die Zirkulationsverteilungen an der Düse bei Vorhandensein von verschiedenen Propellern in Diagramm 35 dargestellt und die Endergebnisse des Systems Propeller + Düse in Tabelle 12 eingetragen.

TABELLE 12

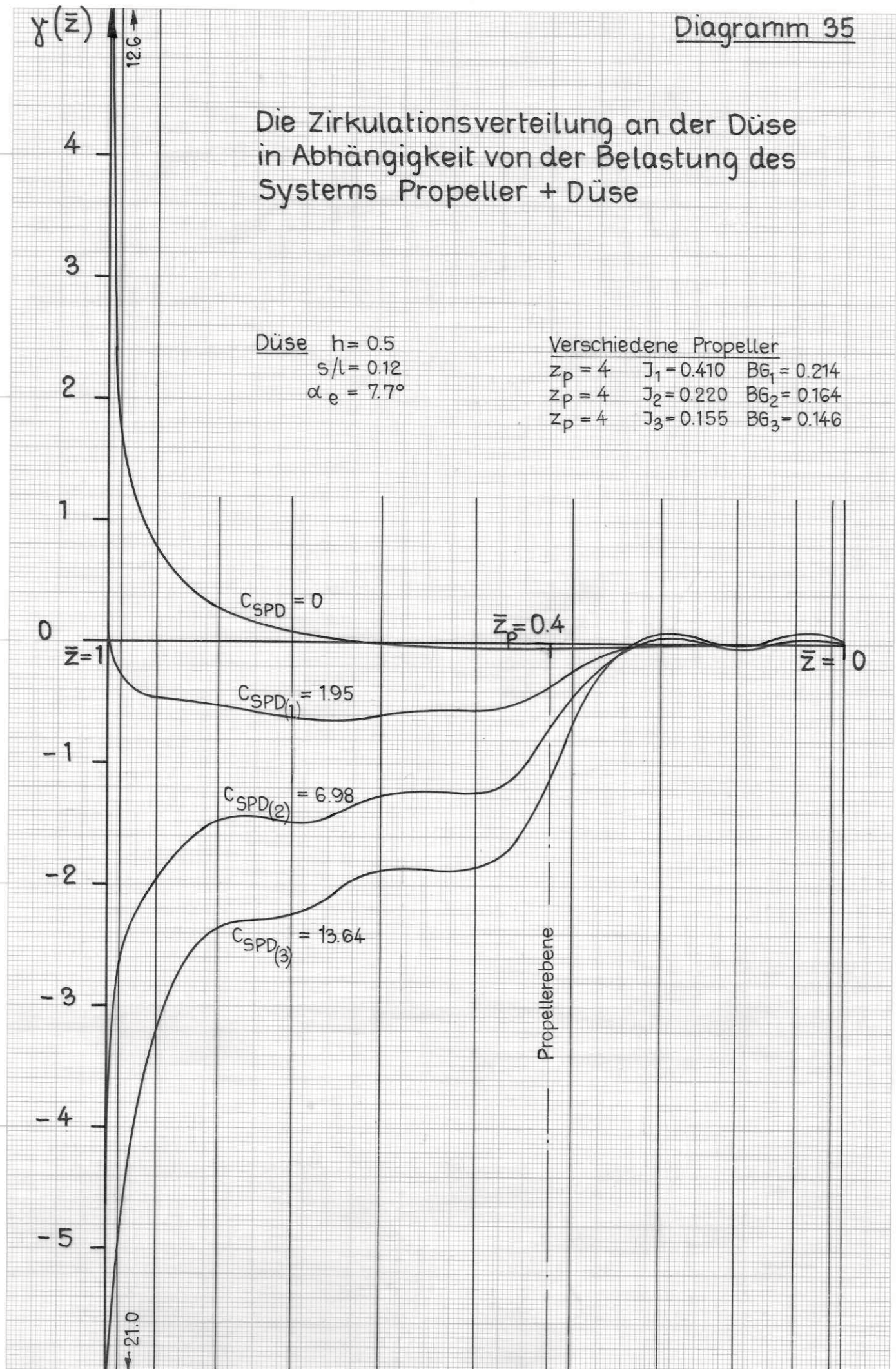
Belastung	~ 0.8	~ 2	~ 7	~ 14
J	0.700	0.410	0.220	0.155
BG	0.318	0.214	0.164	0.146
c_{spi}	0.919184	1.867619	5.956946	11.247379
c_{sp}	0.910723	1.849038	5.874617	11.037090
η_p	0.669833	0.55253	0.343744	0.242142
C_{SDi}	0.054920	0.207684	1.184899	2.727510
ξ_{wD}	0.134998	0.107695	0.079116	0.123884
C_{SD}	-0.080078	0.099989	1.105783	2.605626
C_N	1.35963	3.34649	17.09008	45.58109
B_p	13.75500	36.84337	155.16648	359.67416
C_{spD}	0.83064	1.94903	6.98040	13.64072
η_{pD}	0.61094	0.58241	0.40845	0.29926
δ_{Di}	0.060303	0.112320	0.201698	0.247122
δ_D	-0.087928	0.054076	0.188230	0.235898

Die Zirkulationsverteilung an der Düse
in Abhängigkeit von der Belastung des
Systems Propeller + Düse

Düse $h = 0.5$
 $s/l = 0.12$
 $\alpha_e = 7.7^\circ$

Verschiedene Propeller

$z_p = 4$	$J_1 = 0.410$	$BG_1 = 0.214$
$z_p = 4$	$J_2 = 0.220$	$BG_2 = 0.164$
$z_p = 4$	$J_3 = 0.155$	$BG_3 = 0.146$



Die relativen Werte des idealen und effektiven Gewinnes der Düse δ_{Di} und δ_D Gl.(196) und (197)) in Abhängigkeit von der Gesamtbelastung des Antriebssystems kann man für diese Fälle aus dem Bild 36 sehen. Diese Abhängigkeit entspricht aber nicht der optimalen Lösung; für die gewünschte Belastung C_{SPD} sollte der optimale Düsenpropeller (durch J- und BG-Werte) und die dazugehörige optimale Düse (mit α_e , h und Profilparameter) gefunden werden.

Bei Wahl anderer Düsenparameter erhält man für denselben Düsenpropeller (J- und BG-Parameter) die Werte des Wirkungsgrades η_{PD} , bei anderen Belastungsgraden c_{SPD} . Um die Möglichkeit zum Vergleich zu haben, wurden in einem engen Intervall der Belastungen C_{SPD} sogenannte äquipotentiale Kurven benutzt, d.h. solche Kurven, die als Funktionen von C_{SPD} einen bestimmten Bruchteil der von C_{SPD} abhängigen Werte η_i (idealer Wirkungsgrad) geben, analytisch ausgedrückt durch

$$\eta_{PD} = \eta_h \cdot \eta_i \quad (263)$$

mit

η_P äquipotentiale Kurve

η_i idealer Wirkungsgrad als Funktion der Belastung, gegeben durch

$$\eta_i = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + c_{SPD}}} \quad (264)$$

η_h Äquipotentialwert; dieser ergibt sich auf folgende Art: Für das genannte enge Intervall (C_{SPD1} , C_{SPD2}) haben wir für unseren Fall die Wirkungsgrade η_{PD1} und η_{PD2} errechnet. Durch diese beiden Punkte wollen wir zwei zu η_i Gl.(264) äquipotentiale Kurven legen Gl.(263). Die Werte η_{h1} und

Diagramm 36

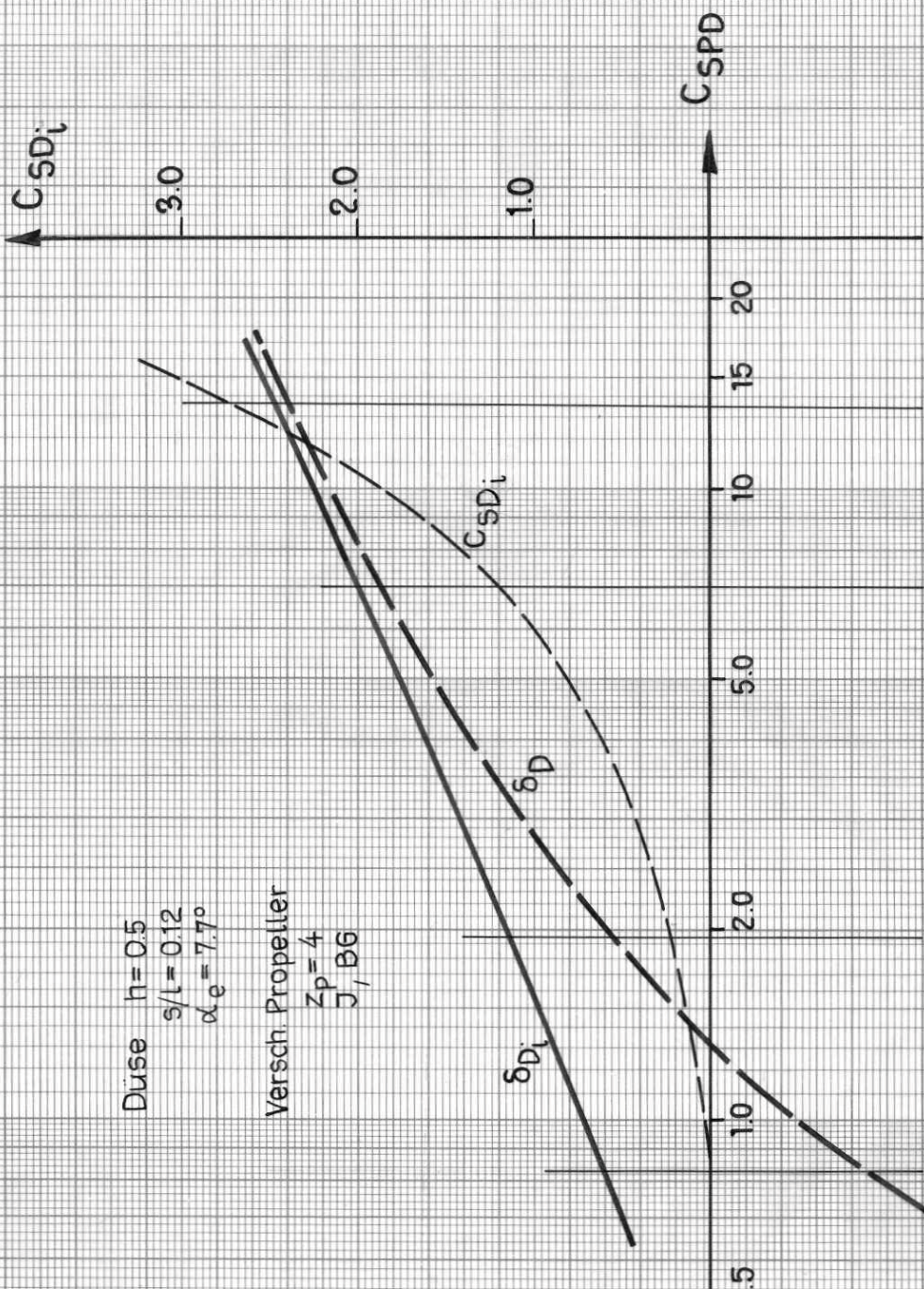
Schubgewinn der Düse in Abhängigkeit von der Belastung des Systems

Düse $h = 0.5$
 $s/l = 0.12$
 $\alpha_e = 7.7^\circ$

Versch. Propeller
 $Z_p = 4$
 J, BG

$$\delta_{D_i} = \frac{C_{SD_i} - W_D}{C_{SP} - \eta_P} \cdot \eta_P$$

$$\delta_{D_i} = \frac{C_{SD_i} - W_D}{C_{SP} - \eta_P} \cdot \eta_P$$



η_{h2} hierfür erhalten wir aus

$$\eta_{h_{1,(2)}} = \frac{\eta_{PD_{1,(2)}}}{2 \sqrt{1 + c_{SPD_{1,(2)}}}} \quad (265)$$

Wenn wir diese beiden Kurven zeichnen, sehen wir für welchen der beiden Werte η_{PD} die Kurve näher an der ursprünglichen η_i -Kurve (264) liegt.

Durch Vergleich der Äquipotentialwerte $\eta_{h(j)}$ von verschiedenen Fällen (j) kann man so die errechneten Wirkungsgrade im Bereich kleiner Belastungsunterschiede auswerten, z.B. in Bezug auf den Fall mit beliebig zugrundegelegten Parametern.

Wenn wir z.B. bei dem Fall $J=0.220$, $BG=0.164$ mit der Düse $h=0.5$, $s/l=0.12$, den Öffnungswinkel α_e von $7,7^\circ$ auf $15,2^\circ$ ändern, bekommen wir

$$\frac{\eta_{h_{15,2}}}{\eta_{h_{7,7}}} = \frac{0,5 \eta_{PD_{15,2}} \cdot (1 + \sqrt{1 + c_{SPD_{7,7}}})}{0,5 \eta_{PD_{7,7}} \cdot (1 + \sqrt{1 + c_{SPD_{15,2}}})} \quad (266)$$

konkret

$$\frac{0,5 \cdot 0,39138 \cdot (1 + \sqrt{1 + 7,51794})}{0,5 \cdot 0,40845 \cdot (1 + \sqrt{1 + 6,9804})} = \frac{0,76682}{0,78115} = 0,98165$$

Wenn man von allen untersuchten Fällen (verschiedene Düsen mit dem gleichen durch J und BG gegebenen Propeller) den Fall mit der Düse $h = 0.5$, $s/l = 0.12$ (NACA 5412), $\alpha_e = 7,7^\circ$ als "optimalen" Fall $c_{SPD_{opt}} - \eta_{PD_{opt}}$ kennzeichnet, dann bekommt man für die anderen Fälle ($h, s/l, \alpha_e$) den folgenden Zusammenhang für die Endergebnisse

$$\frac{\eta_{PD} \cdot (1 + \sqrt{1 + c_{SPD}})}{\eta_{PD_{opt}} \cdot (1 + \sqrt{1 + c_{SPD_{opt}}})} = \frac{\eta_h(h, s/l, \alpha_e)}{\eta_h(0,5, 0,12, 7,7)} = \frac{\eta_h}{\eta_{h_{opt}}} \quad (267)$$

Dazu Diagramm 37. Darin ist für einige Belastungsstufen $c_{s_{pp}}$ (durch J und BG gegeben) anschaulich dargestellt, wie sich der Wirkungsgrad des Systems bei Anwachsen des Parameters $h = L/D$ und des Öffnungswinkels α_e der Düse ändert. Bei den kleinen Belastungsgraden ist die Verschlechterung vor allem durch die Vergrößerung des Profilwiderstandes der Düse verursacht, der den Parametern h und α_e proportional ist. Selbstverständlich kann dazu auch der Widerstand, der durch die mögliche Strömungsablösung an den äußeren Seiten der Düse durch größere Öffnungswinkel verursacht wird, beitragen. Bei kleinen Belastungen ist die Wahl des dünneren Düsenprofils ($s/l = 0.12$ im Vergleich mit $s/l = 0.15$) vorteilhaft.

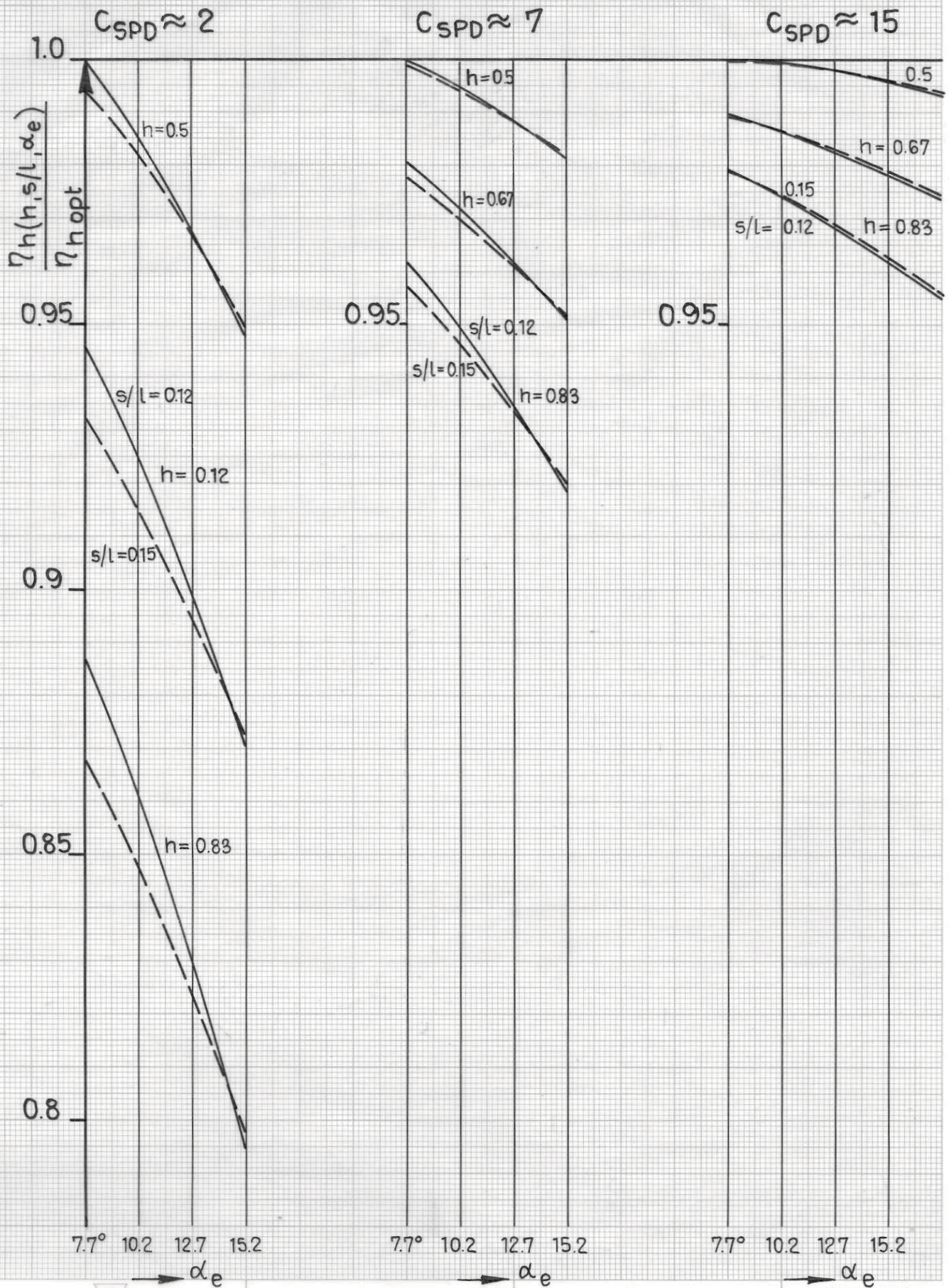
Nach der in Diagramm 37 dargestellten Gesetzmäßigkeit scheint es, daß der optimale Öffnungswinkel auch bei größeren Belastungen in dem Bereich sehr kleiner Werte α_e liegen sollte. Das steht aber im Widerspruch zur Wirklichkeit. Man darf nicht vergessen, daß die hier betrachtete Strömung ideal, d.h. auch ablösungsfrei ist. Bei größeren Belastungen kann bei der Wahl solcher kleinen Öffnungswinkel α_e Ablösung an der Seite der Düse auftreten, die die idealen Verhältnisse und Ergebnisse ungültig macht.

Die Ablösungsgefahr an der Düse kann man aufgrund der Druckverteilung an der äußeren und der inneren Seite des Düsenprofils schätzen, worüber im folgenden Kapitel genauer gesprochen wird.

3. Bei dem Entwurf des Leitrades wurde vor allem die Optimalbedingung (21), d.h. die Voraussetzung $w_{tL} \approx w_t$ nachgeprüft und zwar durch die Wahl des Wertes ϵ_{Ld} in Gl. (221).

$$\operatorname{tg} \beta_{iL} = \operatorname{tg} \left(\frac{\frac{\pi}{2} + \beta_L}{2} - \epsilon_{Ld} \right)$$

Der Wirkungsgrad des Systems Propeller + Düse
in Abhängigkeit von den Düsenparametern $h, s/l,$
 α_e bei verschiedenen Belastungen C_{SPD}



Bei einem Fall des Systems wurde ϵ_{Ld} variiert. Die Ergebnisse sind in der Tabelle 13 gezeigt.

TABELLE 13

Düse: $h = 0.5$ Propeller: $z_P = 4$ Leitrad: $z_L = 7$
 $s/l = 0.12$ $J = 0.22$ ($x_{NP} = x_{NL} = 0.2$)
 $\alpha_e = 7.7$ $BG = 0.164$

Abschätzung der ϵ_{Ld}	0,000	0,0075	0,015
$c_{SLi} = \frac{s_{Li}}{\rho/2 v^2 \cdot \pi R_p^2}$	0,127944	0.127421	0.125644
$c_{SL} = \frac{s_L}{\rho/2 v^2 \pi R_p^2}$	0,111166	0,11160	0,110798
$c_{SPDL} = c_{SPD} + c_{SL}$	7.091565	7,09200	7,091198
PDL	0,414952	0,414977	0,414930

Auswertung:

$\delta_{Di} = \frac{c_{SLi}}{c_{SP} + c_{SD}}$	0,018329	0,018254	0,017999
$\delta_{De} = \frac{c_{SL}}{c_{SPD}} = \frac{\eta_{PDL} - \eta_{PD}}{\eta_{PD}}$	0,015925	0,015988	0,015872
$\delta_{Li} = \frac{c_{SLi}}{c_{SP}}$	0,021779	0,021690	0,021387
$\delta_{Le} = \frac{c_{SL}}{c_{SP}} = \frac{\eta_{PDL} - \eta_{PD}}{\eta_P}$	0,018923	0,018997	0,018860

Dabei war: $c_{SP} = 5.87462$

$\eta_P = 0.34374$

$c_{SPD} = 6.98040$

$\eta_{PD} = 0.40845$

Die Unterschiede sind sehr klein. Wie man auch aus dem Diagramm 38 sehen kann, bestätigen die Ergebnisse für den idealen Fall des Leitrades (ohne Berücksichtigung der Reibungsverluste) die Richtigkeit der Voraussetzung Gl.(212), die als Optimumsbedingung für den Leitradentwurf die Gl.(220) gibt, also mit $\epsilon_{Ld} = 0$. Da man aber bei dem Leitrad mit Verlusten infolge der Zähigkeit der Flüssigkeit rechnet, wurde weiter mit dem Wert $\epsilon_{Ld} = 0.0075$ gerechnet, womit die effektiven Werte ihr Maximum erreichen.

Durch Wahl kleinerer β_{iL} -Winkel des Leitrades (d.h. infolge der größeren ϵ_{Ld} -Werte) werden auch die Werte der Zirkulation $G_L(x)$, der tangentialen Geschwindigkeiten $\left[\frac{w_t}{v}(x, \bar{z}_2) \right]_L$ des Leitrades sowie die Gleitzahlwerte ϵ_L kleiner, wie das aus dem Diagramm 39 folgt.

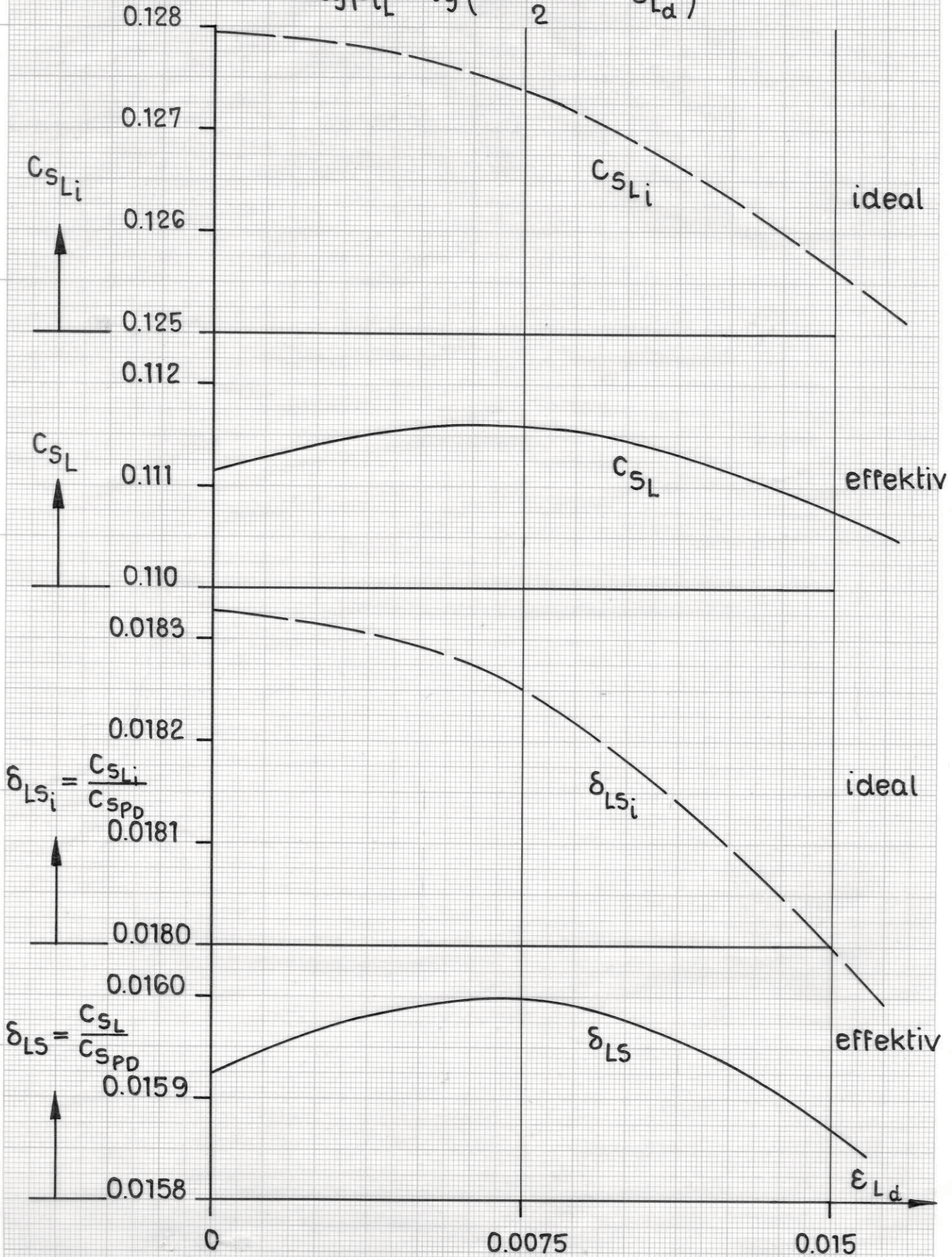
Weiter wurde für unser Musterbeispiel die Flügelzahl des Leitrades variiert. Die Ergebnisse zeigt die Tabelle 14.

Der Verlauf der δ_{Li} - und δ_L -Werte in Abhängigkeit von der Flügelzahl des Leitrades ist auch in Diagramm 40 dargestellt. Man sieht, daß der relative Schubgewinn δ_{Li} des idealen Leitrades (ohne Zähigkeitsverluste) mit der Flügelzahl des Leitrades wächst. Da aber mit wachsender Flügelzahl auch die durch die Zähigkeit der Flüssigkeit verursachten Leitradverluste ansteigen, (siehe ϵ_L -Werte in Bild 41) scheint der effektive Gewinn δ_L des Leitrades bei der Flügelzahl $z_L = 11$ bis 17 zu liegen, wo die Kurve δ_L bzw. δ_{LS} nur noch sehr schwach ansteigt.

Aus Bild 40 bzw. Tabelle 14 kann man gleichzeitig sehen, daß schon durch die Profilierung der Streben eines in der Düse eingebauten Wellenlagerbockes (mit 2 oder 3 Streben) bei den hier benutzten Parametern der Düse und des Propellers bereits mehr als 1% Schubgewinn erzielt wird.

Leitrad, Einfluß des ϵ_{Ld} -Wertes

$$\text{tg} \beta_{iL} = \text{tg} \left(\frac{\pi/2 + \beta_L}{2} - \epsilon_{Ld} \right)$$

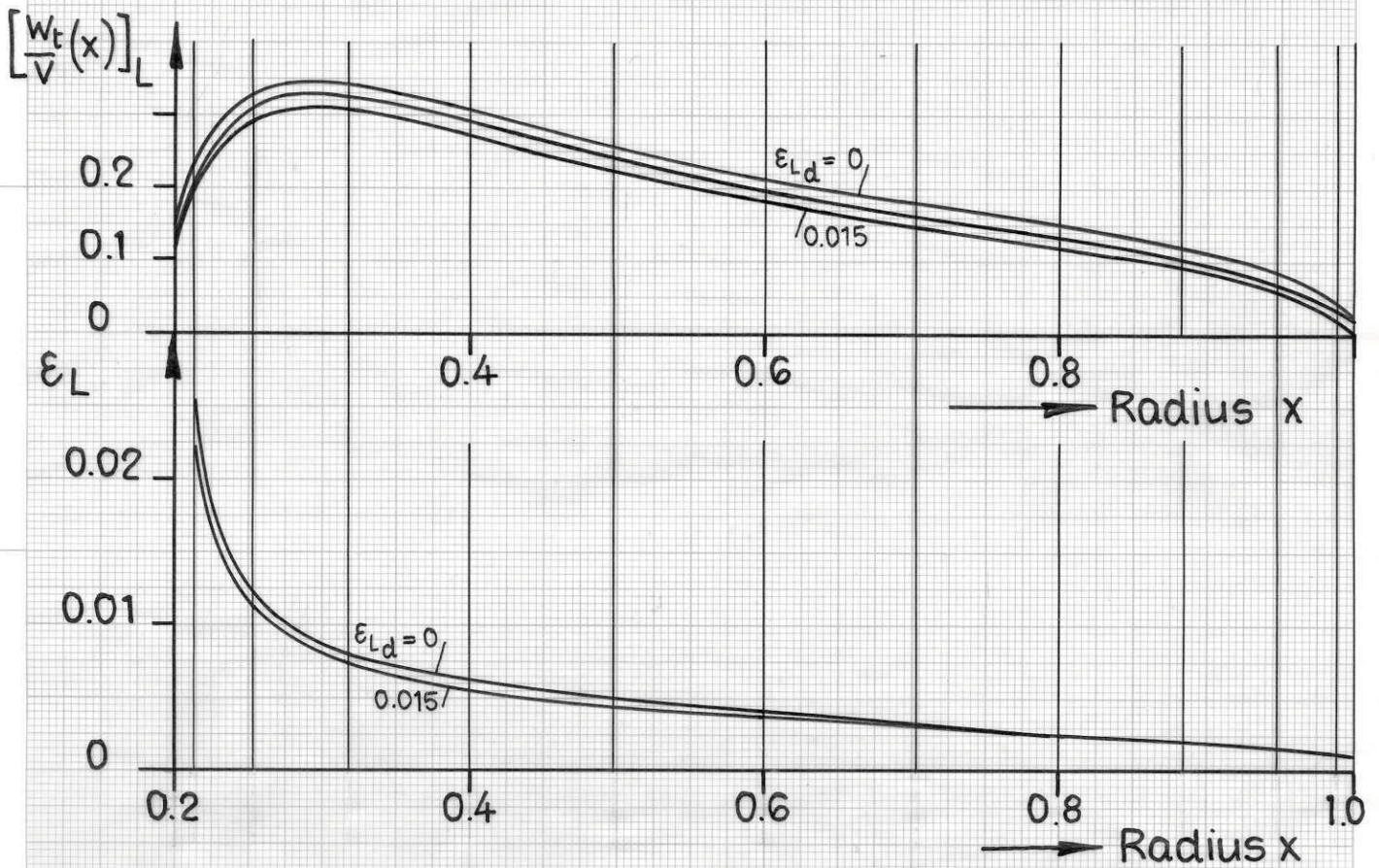
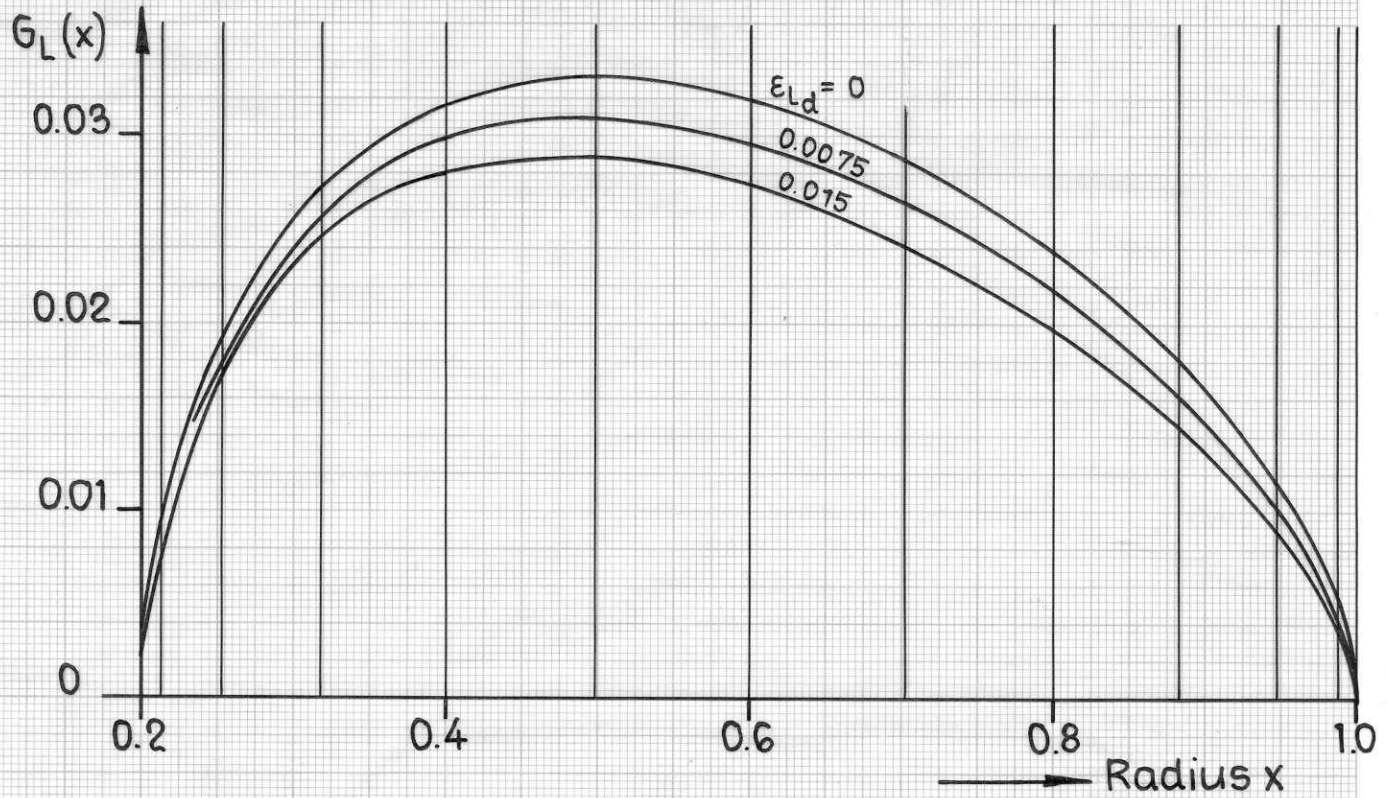


Leitrad, Einfluß des ϵ_{Ld} - Wertes

Propeller $z_p = 4$
 $J = 0.220$
 $BG = 0.164$

Leitrad $z_L = 7$

$$\text{tg } \beta_i = \text{tg} \left(\frac{\pi/2 + \beta_L - \epsilon_{Ld}}{2} \right)$$



Einfluß der Flügelzahl des Leitrades auf den Leitradgewinn

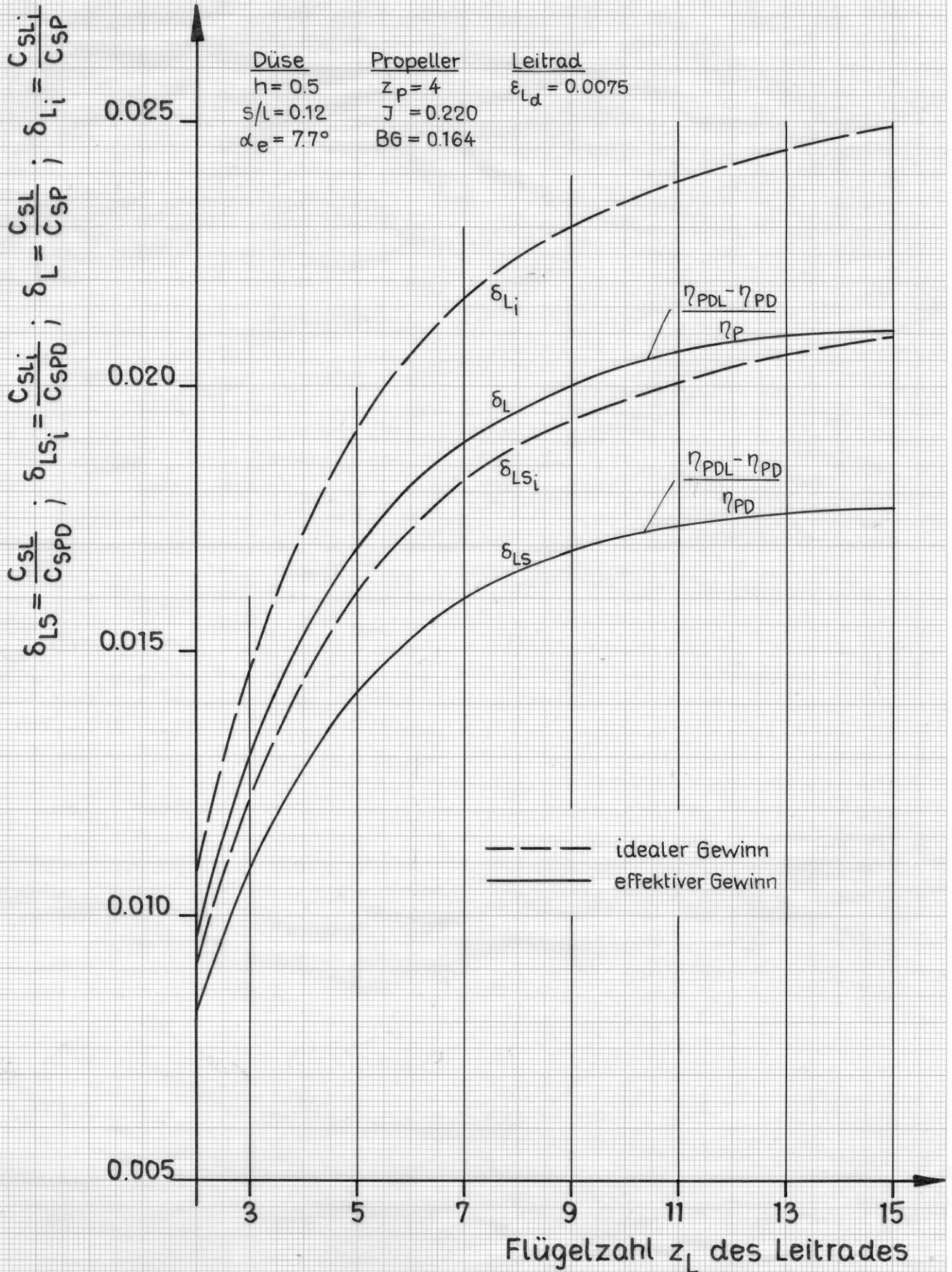


TABELLE 14

Propeller:

Düse:

$J = 0.220$, $BG = 0.164$, $z_p = 4$

$h = 0.5$

$s/l = 0.12$

$\alpha_e = 7.7^\circ$

Flügelzahl des Leitrades:

	$z_L = 2$	$z_L = 3$	$z_L = 11$	$z_L = 13$	$z_L = 15$
C_{SLi}	0.06319	0.08541	0.14064	0.14398	0.14631
C_{SL}	0.05633	0.07585	0.12117	0.12299	0.12392
C_{SPDL}	7.0367	7.0562	7.1015	7.1034	7.1043
η_{PDL}	0.41174	0.41288	0.41554	0.41564	0.41569

Auswertung:

δ_{LSi}	0.00907	0.01223	0.02014	0.02063	0.02096
δ_{LS}	0.00807	0.01087	0.01736	0.01762	0.01775
$\delta_{Li} = \frac{C_{SLi}}{C_{SPD}}$	0.01077	0.01454	0.02394	0.02451	0.02491
$\delta_l = \frac{C_{SL}}{C_{SPD}}$	0.00959	0.01291	0.02063	0.02093	0.02109

Dabei war: $C_{SP} = 5.8746$

$\eta_P = 0.34374$

$C_{SPD} = 6.9804$

$\eta_{PD} = 0.40845$

Im Diagramm 41 sind außer ϵ_L -Werten zusätzlich die Flügelumrisse des Leitapparates mit verschiedener Flügelzahl dargestellt.

Der Schubgewinn des Leitrades in Abhängigkeit von der Belastung des Systems Propeller + Düse ist im folgenden Diagramm 42 gezeigt. Die Wahl der Parameter J und BG des Düsenpropellers und der Größen h , s/l und α_e der Düse entspricht nicht den optimalen Entwurfparametern bei der gegebenen Belastung C_{SPD} ; deswegen darf diese Abhängigkeit auch nicht als optimal betrachtet werden.

Einfluß der Flügelzahl z_L des Leitrades:

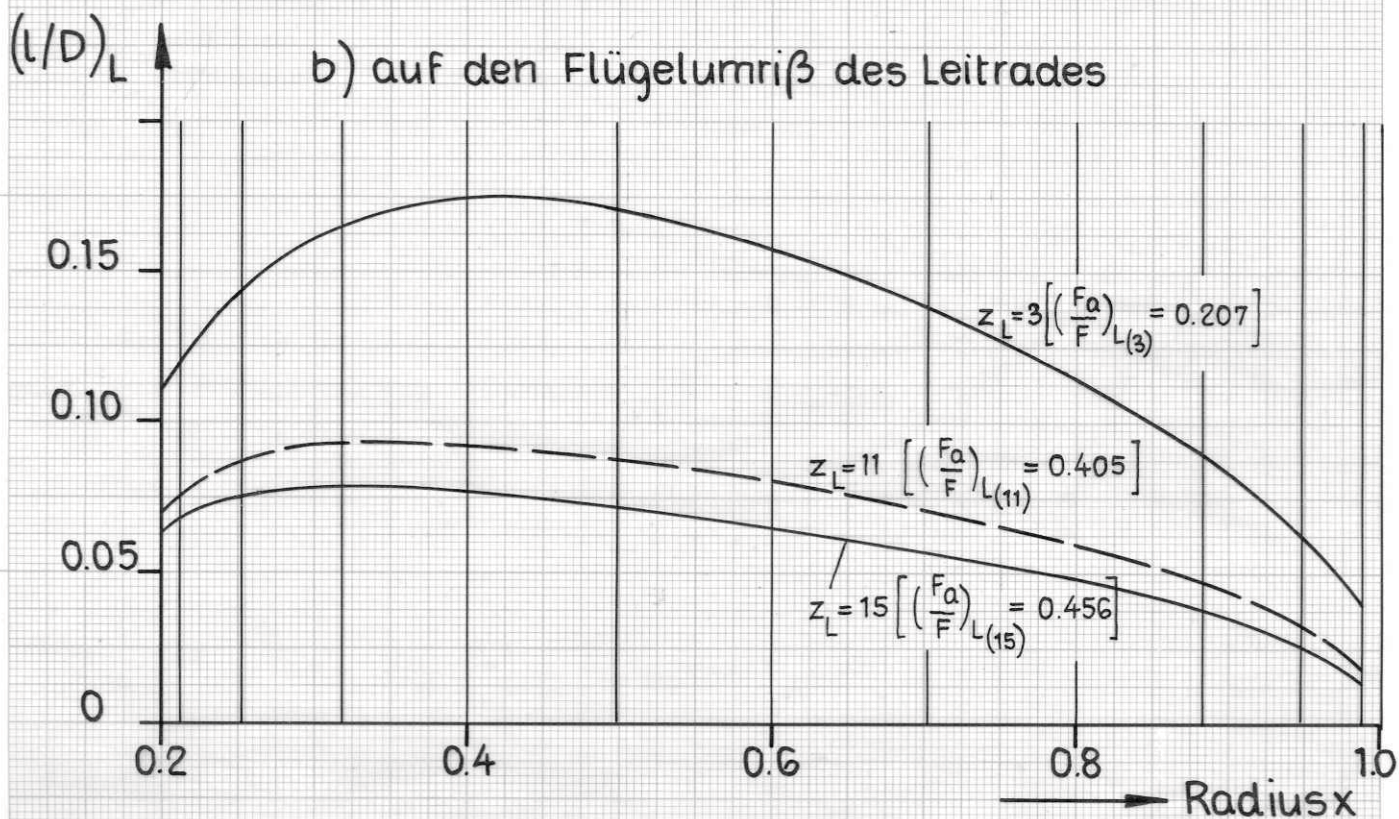
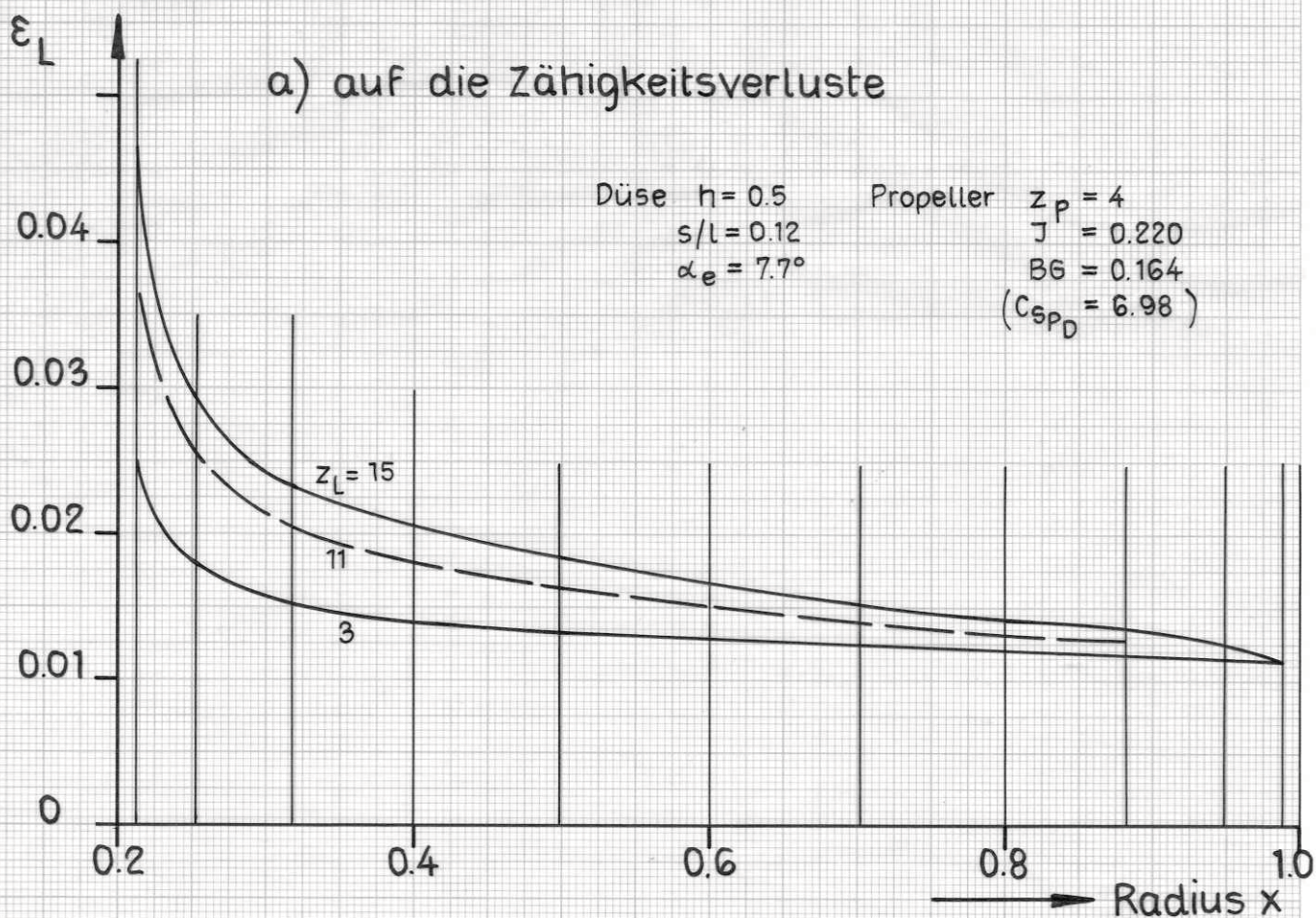
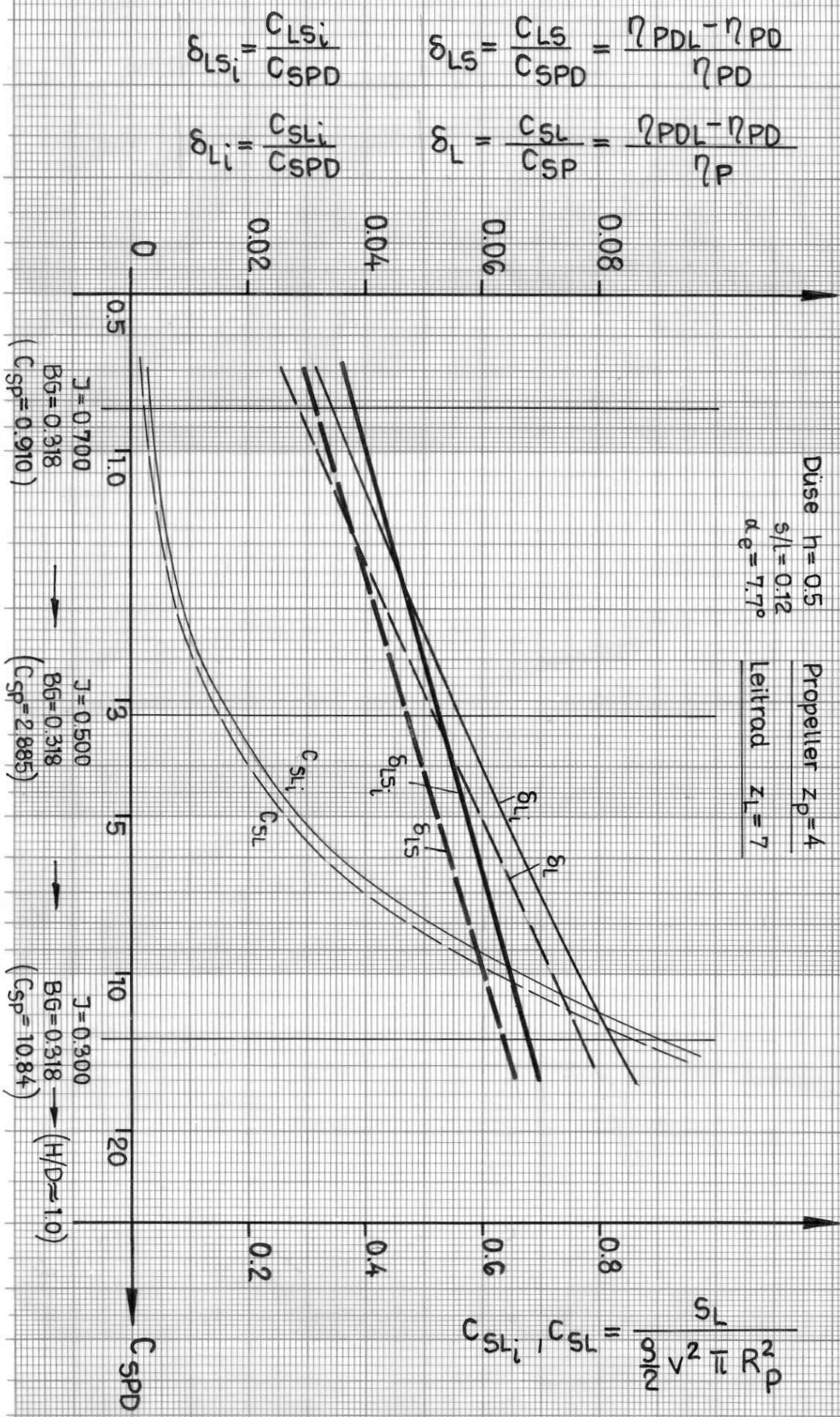


Diagramm 4.2

Schubgewinn des Leitrades in Abhängigkeit von der Belastung des Systems



X. Die Druckverteilung an der Düse

Wie bereits gesagt wurde, ist die hier betrachtete Strömung ideal, d.h. auch ablösungsfrei. Deshalb dürfen in den Bereichen, in denen die Strömungsablösungen an der Düse auftreten können, die Endergebnisse nicht mehr als zuverlässig angesehen werden. Nur durch die Vernachlässigung der Ablösungserscheinungen an der inneren Seite der Düse kann man sich die zur Wirklichkeit im Widerspruch stehenden unwahrscheinlich guten Ergebnisse des Antriebssystems erklären, wenn man bei den großen Belastungen (siehe Bild 37) kleine Längenverhältnisse h und kleine Öffnungswinkel α_e der Düse wählt.

Um die Ablösungsmöglichkeit zu beurteilen, muß man die Druckverteilung längs der inneren und äußeren Kontur der Düse bei Vorhandensein des Düsenpropellers kennen. Da es sich aber um die größeren Belastungen handelt, müssen wir über die linearisierten Bedingungen der Morgan'schen und Lerbs'schen Theorie hinausgehend auch die Quadrate der induzierten Geschwindigkeiten betrachten. Für eine beliebige Stelle \bar{z} der Düse kann man nach der Bernoulli'schen Gleichung

$$p_0 + \frac{\rho}{2} v^2 = p_z + \frac{\rho}{2} (v + w_{a_{ges}})^2 + \frac{\rho}{2} w_{r_{ges}}^2 \quad (268)$$

den relativen Druck folgendermaßen ausdrücken:

$$\frac{p_z - p_0}{\frac{\rho}{2} v^2} = \frac{\Delta p}{\rho} = c_p = -2 \left(\frac{w_a}{v} \right)_{ges} - \left(\frac{w_a}{v} \right)_{ges}^2 - \left(\frac{w_r}{v} \right)_{ges}^2 \quad (269)$$

In diesem Ausdruck ist jede axiale oder radiale Gesamtzusatzgeschwindigkeit die Summe der Beiträge aller wirkenden Singularitäten, d.h.

$$\left(\frac{W_i}{V}\right)_{\text{ges}} = \left(\frac{W_i}{V}\right)_{\gamma} + \left(\frac{W_i}{V}\right)_{q} + \left(\frac{W_i}{V}\right)_{p} + \left(\frac{W_i}{V}\right)_{L} \quad (270)$$

Da aber die Axial- und Radialgeschwindigkeiten an der Düse von dem festen Leitrad (index L) infolge der großen β_{iL} -Werten (75-90°) sehr gering sind, können wir sie vernachlässigen.

Weiter muß in der Gl.(270) beachtet werden, daß für einige induzierte Geschwindigkeiten für die äußere Seite (Pluszeichen) und für die innere Seite (Minuszeichen) der Düse folgende Zusammenhänge gelten ([3] Gl.2.8-13):

$$\left[\frac{W_r}{V}(x_D \pm 0, z)\right]_q = \left[\frac{W_r}{V}(x_D \pm 0, z)\right]_{q_{\text{mit}}} \pm \frac{1}{2} q(\bar{z}) \quad (271)$$

und ([3] Gl.2.6-4)

$$\left[\frac{W_a}{V}(x_D \pm 0, z)\right]_{\gamma} = \left[\frac{W_a}{V}(x_D \pm 0, z)\right]_{\gamma_{\text{mit}}} \pm \frac{1}{2} \gamma(\bar{z}) \quad (272)$$

Die Druckverteilung der Düse kann man so in der folgenden Form ausdrücken:

1) äußere Seite der Düse

$$\begin{aligned} C_{P+}(x_D, \bar{z}) = & -2 \left\{ \left[\frac{W_a}{V}(x_D, \bar{z})\right]_{\gamma_{\text{mit}}} + \frac{\gamma(\bar{z})}{2} + \left[\frac{W_a}{V}(x_D, \bar{z})\right]_q + \left[\frac{W_a}{V}(x_D, \bar{z})\right]_{Pd} \right\} - \\ & - \left\{ \left[\frac{W_a}{V}(x_D, \bar{z})\right]_{\gamma_{\text{mit}}} + \frac{\gamma(\bar{z})}{2} + \left[\frac{W_a}{V}(x_D, \bar{z})\right]_q + \left[\frac{W_a}{V}(x_D, \bar{z})\right]_{Pd} \right\}^2 - \\ & - \left\{ \left[\frac{W_r}{V}(x_D, \bar{z})\right]_{\gamma} + \left[\frac{W_r}{V}(x_D, \bar{z})\right]_{q_{\text{mit}}} + \frac{q(\bar{z})}{2} + \left[\frac{W_r}{V}(x_D, \bar{z})\right]_{Pd} \right\}^2 \end{aligned} \quad (273)$$

2) innere Seite der Düse

$$\begin{aligned}
 C_{P_{-}}(x_{D_1}, \bar{z}) = & -2 \left\{ \left[\frac{w_a}{v}(x_{D_1}, \bar{z}) \right]_{\gamma_{\text{mit}}} - \frac{\gamma(\bar{z})}{2} + \left[\frac{w_a}{v}(x_{D_1}, \bar{z}) \right]_q + \left[\frac{w_a}{v}(x_{D_1}, \bar{z}) \right]_{p_d} \right\} \\
 & - \left\{ \left[\frac{w_a}{v}(x_{D_1}, \bar{z}) \right]_{\gamma_{\text{mit}}} - \frac{\gamma(\bar{z})}{2} + \left[\frac{w_a}{v}(x_{D_1}, \bar{z}) \right]_q + \left[\frac{w_a}{v}(x_{D_1}, \bar{z}) \right]_{p_d} \right\}^2 \quad (274) \\
 & - \left\{ \left[\frac{w_r}{v}(x_{D_1}, \bar{z}) \right]_{\gamma} + \left[\frac{w_r}{v}(x_{D_1}, \bar{z}) \right]_{q_{\text{mit}}} - \frac{q(\bar{z})}{2} + \left[\frac{w_r}{v}(x_{D_1}, \bar{z}) \right]_{p_d} \right\}^2
 \end{aligned}$$

Die Werte der Quell-Senken $q(\bar{z})$ wurden aus Gl.(23) bestimmt und die Werte der Zirkulation $\gamma(\bar{z})$ an der Düse bei Zusammenwirken mit dem Düsenpropeller sind als Ergebnis der Integralgleichung (26) für die letzte Iteration vorhanden. Die Durchschnittswerte der vom Propeller an der Düse induzierten Radialgeschwindigkeiten können aus Gl.(170) berechnet werden. Für die durchschnittlichen Axialgeschwindigkeiten, die an der Düse vom Propeller induziert sind, steht leider nur die Gl.(142) zur Verfügung, deren Berechnung sehr viel Rechenzeit braucht. Wie schon im Kapitel VI-2-B gesagt wurde, können wir hier näherungsweise die Tabellenwerte von Hough und Ordway [18] benutzen, siehe Tab.11 (bzw. Bild 19/III.Anhang).

Die Ausdrücke für die Radialgeschwindigkeiten an der Düse von der Düsenzirkulation γ und der Quell-Senken-Verteilung q wurden für die Bildung der Integralgleichung (26) im Kapitel III Gl.(7) und (8) benutzt. Hier folgen noch einmal die speziellen Ausdrücke dafür.

$$\left[\frac{w_r}{v}(x_D, \bar{z}) \right]_{\gamma} = -\frac{1}{4\pi} \int_0^1 iG(z') dz' = -\frac{1}{4\pi} \int_0^1 \frac{\gamma(z')}{(\bar{z}-z')} \cdot k \left\{ 4h^2(\bar{z}-z') \cdot [K(k)-E(k)] - 2E(k) \right\} dz' \quad (275)$$

und aus Gl.(8)

$$\left[\frac{w_r}{v}(x_D, \bar{z}) \right]_{q_{\text{mit}}} = \frac{h}{2\pi} \int_0^1 iQ(z') dz' = \frac{h}{2\pi} \int_0^1 q(z') \cdot k [K(k)-E(k)] dz' \quad (276)$$

Für die Axialgeschwindigkeiten an der Düse hat Morgan folgende Gleichungen abgeleitet:

1) aus der Quell-Senken-Belegung der Düse

$$\left[\frac{w_a}{v}(x_D, \bar{z}) \right]_q = \frac{h}{2\pi} \int_0^1 \frac{q(z')}{(x/x_D)^{1/2}} k \left[\frac{2(2h(\bar{z}-z') \cdot E(k))}{4h^2(\bar{z}-z')^2 + (x/x_D - 1)^2} \right] dz' \quad ([3], \text{ Gl.2.8-11})$$

2) aus der Düsenzirkulation

$$\left[\frac{w_a}{v}(x_D \pm 0, \bar{z}) \right]_{\gamma} = \frac{h}{2\pi} \int_0^1 \gamma(z') \cdot k [K(k)-E(k)] dz' \pm \frac{1}{2} \gamma(\bar{z}) \quad ([3], \text{ Gl.2.6-4}).$$

Für unsere Verhältnisse benutzen wir die umgekehrten Vorzeichen und berechnen nur die Werte an der Düse, d.h. wir setzen $x = x_D = \text{const.}$ Dann ist

$$\left[\frac{w_a}{v}(x_D, \bar{z}) \right]_q = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 iQA(z') dz' = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 q(z') \cdot k \left[\frac{E(k)}{(\bar{z}-z')} \right] dz' \quad (277)$$

und

$$\left[\frac{w_a}{v}(x_D, \bar{z}) \right]_{\gamma_{\text{mit}}} = -\frac{h}{2\pi} \int_0^1 iGA(z') dz' = -\frac{h}{2\pi} \int_0^1 \gamma(z') \cdot k [K(k)-E(k)] dz' \quad (278)$$

Dabei sind $K(k)$, $E(k)$ und k durch die Gl.(7,8 und 9) gegeben.

Den Charakter der Verläufe der einzelnen Integranden in den Gl.(275) bis (267) kann man in den Diagrammen 20, 21, 22 und 25 in Anhang IV sehen. Da die Werte $q(\bar{z})$ und $\gamma(\bar{z})$ an der Eintrittskante der Düse (Punkt $\bar{z} = 1$ bzw. $\mathcal{V}' = 0$) singularär sind, berechnen wir die Werte der Integranden in dem benachbarten Punkt $\mathcal{V}' = \frac{\bar{\pi}/12}{2e}$. Ebenfalls können wir in dem singularären Punkt für $\bar{z} - \bar{z}' = 0$, d.h. $\mathcal{V}' = \mathcal{V}''$ bzw. $i = j$ die Werte nicht ausrechnen, und darum benutzen wir anstatt der Koordinate \mathcal{V}_i den Wert $\mathcal{V}_i - \frac{\bar{\pi}/12}{2e}$.

Dies ist vor allem wichtig für die Gl.(279), weil in den Punkten $\mathcal{V}_i - \frac{\bar{\pi}/12}{2e}$ und $\mathcal{V}_i + \frac{\bar{\pi}/12}{2e}$ die extremen Werte des Integranden das gleiche Vorzeichen haben.

Bei den Integranden IG und IQA der Gleichungen (275) und (277) haben die Werte des Integranden in den genannten Punkten ungleiche Vorzeichen, d.h. in den singularären Punkten haben wir die Werte gleichzeitig positiv und negativ, darum wurde hier für die annähernde Lösung bei $\bar{z} = z'$ mit dem Wert gleich Null gerechnet.

Die Durchführung der Integration der Gleichungen 275, 276, 277 und 278 ist sehr grob; die gewählte Teilung $\bar{\pi}/12$ die für die Bestimmung von $\gamma(\bar{\mathcal{V}})$ und $q(\bar{\mathcal{V}})$ -Singularitäten benutzt worden ist, sollte man wegen der singularären Punkte verfeinern. Da es sich aber nur um eine grobe Abschätzung handelt, ob an der Düse Ablösung auftreten kann oder nicht, wurde aus Zeitmangel die Druckverteilung der Düse mit den Tabellenwerten (Tab.11) für $\left[\frac{w_a}{v}(x_D, z)\right]_{p_d}$ und mit einer ziemlich ungenauen Integration der weiteren Geschwindigkeitskomponenten Gl.(275)÷(278) durchgeführt.

Für die lineare Methode der Bestimmung der Druckverteilung (bei Betrachtung nur der ersten Glieder in Gl.(269) bzw. (274) ergibt sich nach Morgan ([18], Gl.(16) und (17)) der Zusammenhang zwischen der Druckverteilung und der Düsenzirkulation in der folgenden Form

$$\frac{c_{P+} - c_{P-}}{2} = -\gamma \quad (279)$$

Bei Berücksichtigung der Quadrate der Geschwindigkeiten erhält man die folgende Beziehung

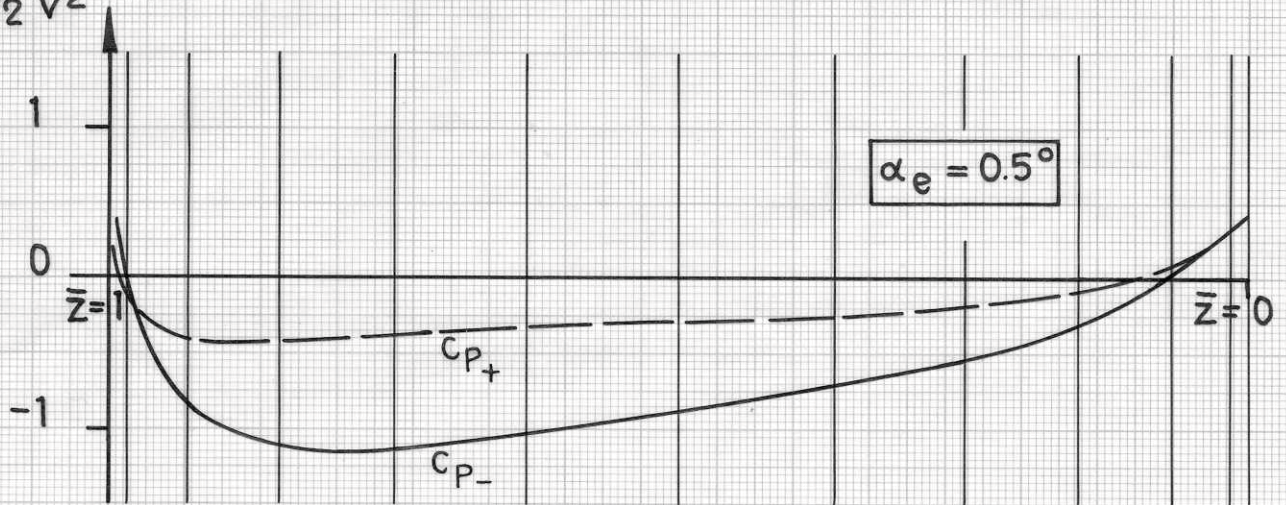
$$\frac{c_{P+} - c_{P-}}{2} = -\gamma \left[1 + \frac{\left(\frac{w_a}{v}\right)_{ges+} + \left(\frac{w_a}{v}\right)_{ges-}}{2} \right] - q \left[\frac{\left(\frac{w_r}{v}\right)_{ges+} + \left(\frac{w_r}{v}\right)_{ges-}}{2} \right] \quad (280)$$

Diese kann der Kontrolle der Ergebnisse der Druckverteilung dienen.

Die Druckverteilungen der Düsen allein mit dem Längenverhältnis $h = 0.5$ in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel α_e kann man aus dem Diagramm 43 sehen. Bei größerem Öffnungswinkel α_e kann an der äußeren Seite (Plus-Vorzeichen) der Düse Ablösung auftreten, was man aus dem steilen Druckanstieg an der Eintrittskante abschätzen kann (siehe Verlauf bei $\alpha_e = 15,2^\circ$). Die Möglichkeit, daß Ablösung an der äußeren Düsenseite auftritt, gibt es auch für das System Düse + Propeller bei kleineren Belastungen des Düsenpropellers. Für die kleineren Belastungen liefert die linearisierte Methode Gl.(279) genügend genaue und zuverlässige Ergebnisse. Die Quadrate der induzierten Geschwindigkeiten dürfen aber bei den größeren Belastungen nicht vernachlässigt werden, wie das an einem Beispiel im Diagramm 44 ersichtlich ist. Bei Zugrundelegung der linearisier-

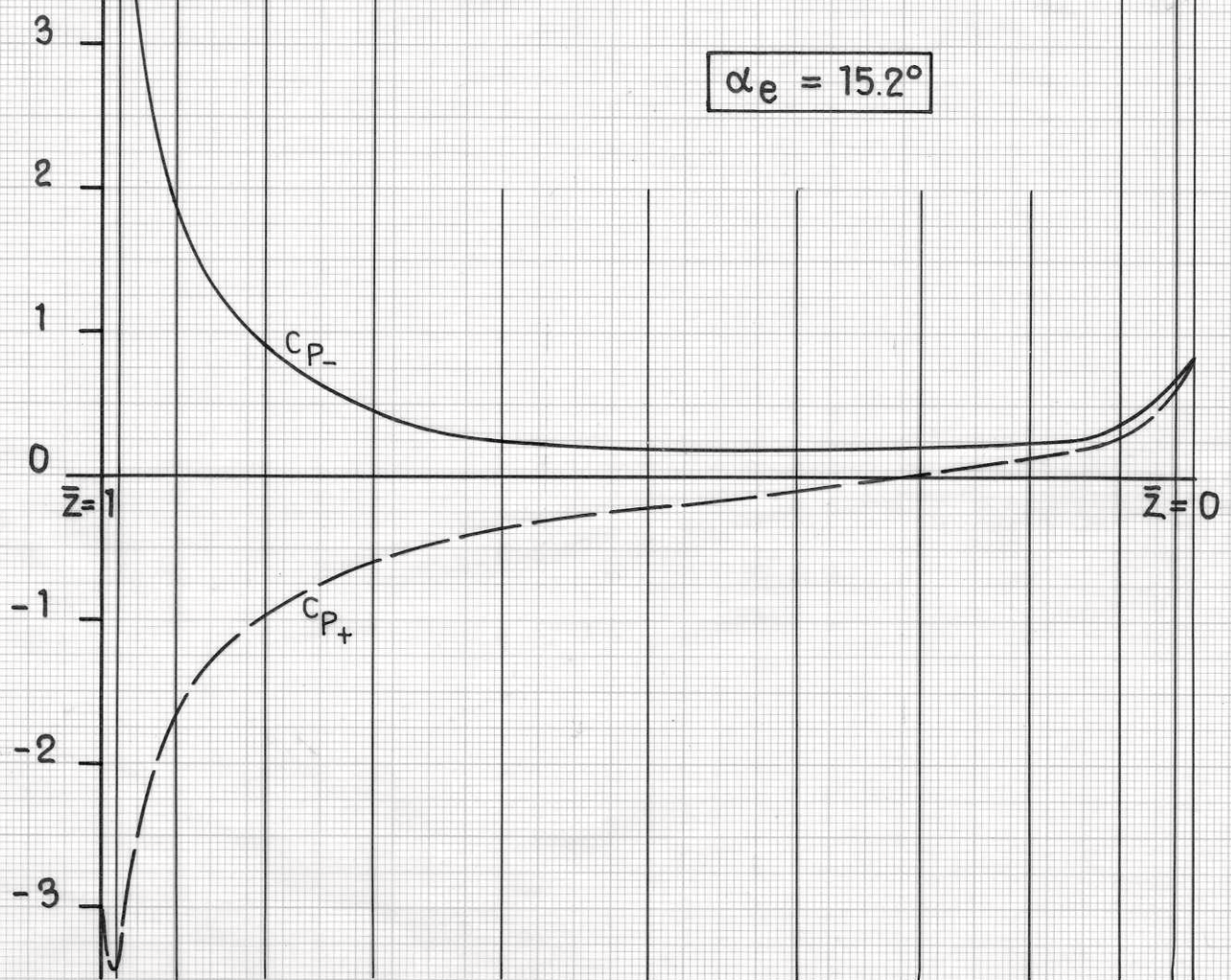
$$C_p = \frac{P_x - P_0}{\frac{3}{2} v^2}$$

Die Druckverteilung der Düse allein
 $h = 0.5 \quad s/l = 0.12$



$$C_p = \frac{P_x - P_0}{\frac{3}{2} v^2}$$

— - — - — äußere Seite der Düse
 ———— innere Seite der Düse

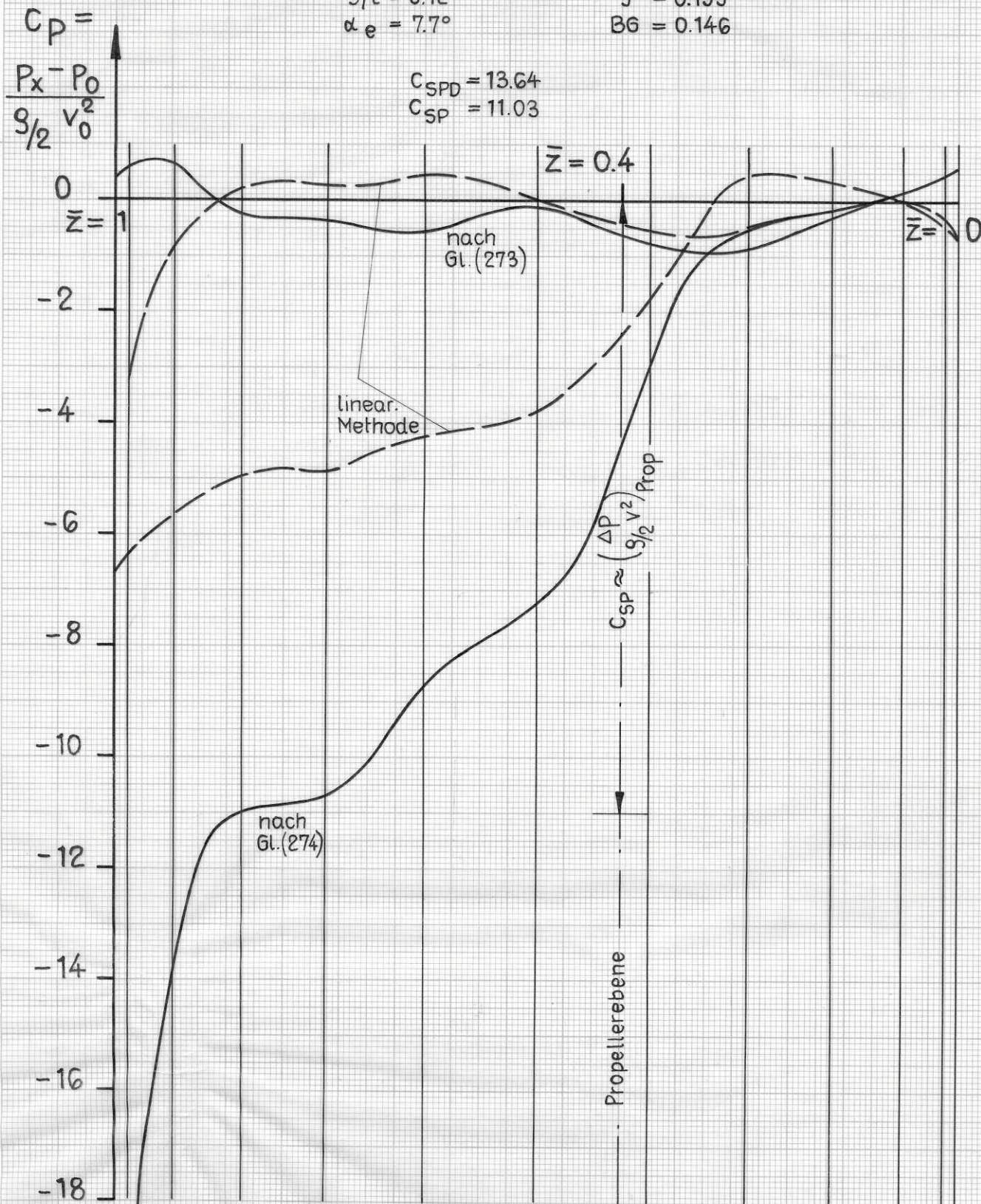


Die Druckverteilung der Düse

Vergleich der Ergebnisse mit den Werten der linearisierten Methode

Düse $h = 0.5$ Propeller $z_p = 4$
 $s/L = 0.12$ $J = 0.155$
 $\alpha_e = 7.7^\circ$ $BG = 0.146$

$C_{SPD} = 13.64$
 $C_{SP} = 11.03$



ten Theorie weicht der Verlauf der C_P -Kurven stark von der Wirklichkeit ab; vor allem der in der inneren Seite der Düse durch den Propellerschub verursachte Drucksprung in der Propellerebene entspricht nicht der wirklichen Belastung des Düsenpropellers

$$C_{S_P} = \frac{S_P}{\frac{\rho}{2} v^2 \pi R_P^2} = \frac{\Delta P}{q} = C_{P_-}$$

Im Gegensatz dazu zeigen alle Kurven bei Berücksichtigung der Geschwindigkeitsquadrate deutlich den erwähnten realen Drucksprung an der Stelle des Düsenpropellers in der Düse, obwohl die Rechnung aus den schon genannten Gründen nur sehr grob durchgeführt werden konnte.

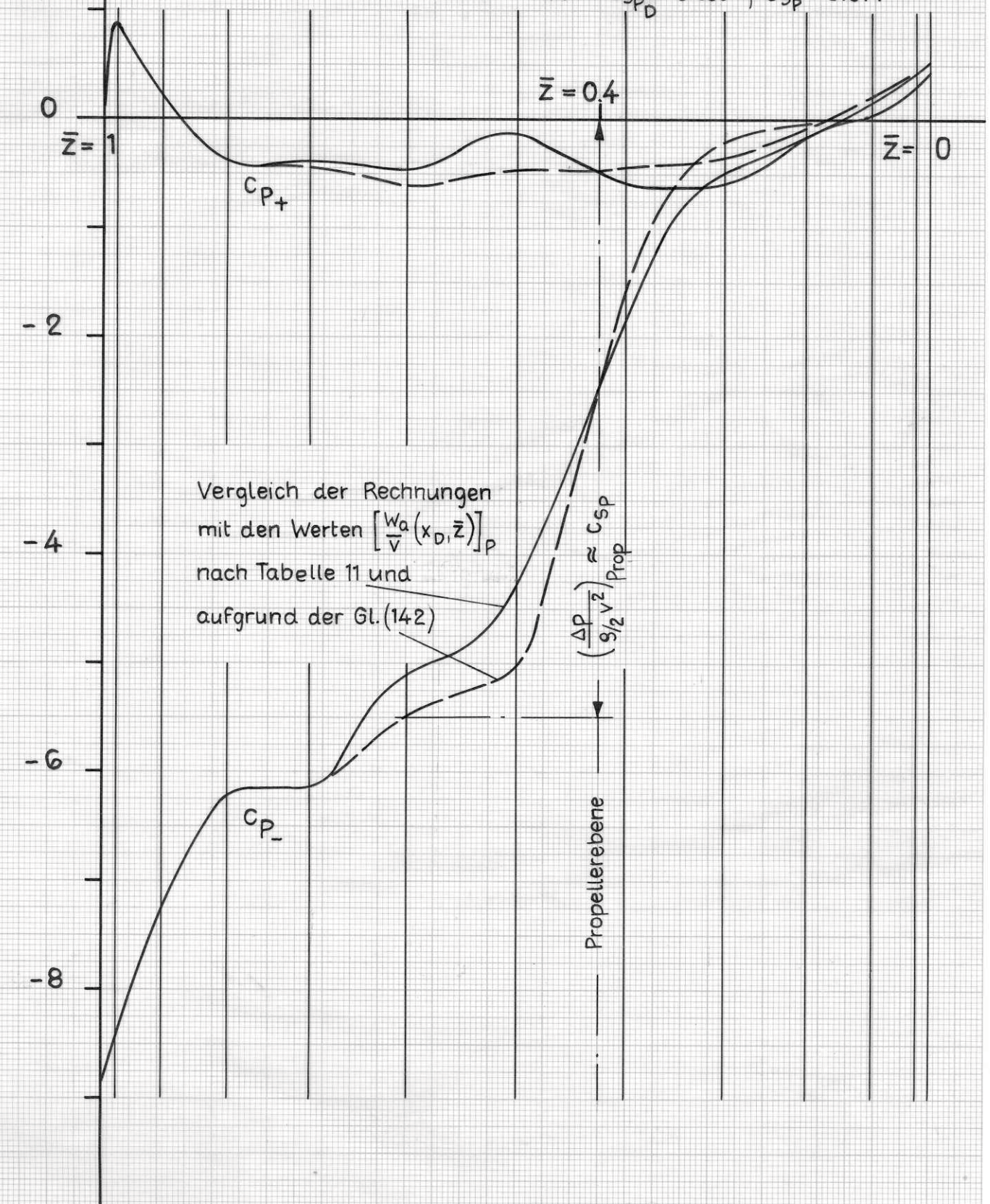
Das nächste Bild (Diagr. 45) zeigt für unser Beispiel (Düsenpropeller mit $J = 0.220$, $BG = 0.164$, Düse mit $\alpha_e = 7,7^\circ$) die Druckverteilung an der Düse einmal unter Zugrundelegung der Tabellenwerte von Hough und Ordway [18] (Tab.11) für die Axialgeschwindigkeiten des Propellers an der Düse $\left[\frac{w_a}{v}(x_D, z)\right]_{Pd}$ und zum andern die Druckverteilungen, die sich bei Berechnung des Axialgeschwindigkeiten nach Gl. (142) mit axialen Induktionsfaktoren ergeben. Der Vergleich der beiden Kurven zeigt, daß die mit Hilfe der Gl.(142) berechneten Werte $\left[\frac{w_a}{v}(x_D, z)\right]_{Pd}$ bedeutend besser sind, d.h. der daraus resultierende Druckverlauf entspricht mehr der Wirklichkeit. Der Verlauf an der äußeren Seite ist gleichmäßiger und an der inneren Seite ist der Drucksprung stärker ausgeprägt. Aus dem Druckverlauf an der inneren Seite der Düse kann man abschätzen, ob Ablösung auftritt oder nicht. Wenn die Druckverteilung an der Eintrittskante sehr steil ansteigt, dann tritt die Ablösungsgefahr ein. Durch Vergrößerung des Öffnungswinkels α_e kann man diese vermeiden, wie man aus Diagramm 46 ersieht, in welchem die Druckverläufe für den gleichen Fall wie vorher, nur für den größeren Öffnungswinkel der Düse $\alpha_e = 15,2^\circ$ dargestellt sind.

Die Druckverteilung der Düse mit Propeller

$$C_P = \frac{\Delta P}{\rho/2 \cdot v^2}$$

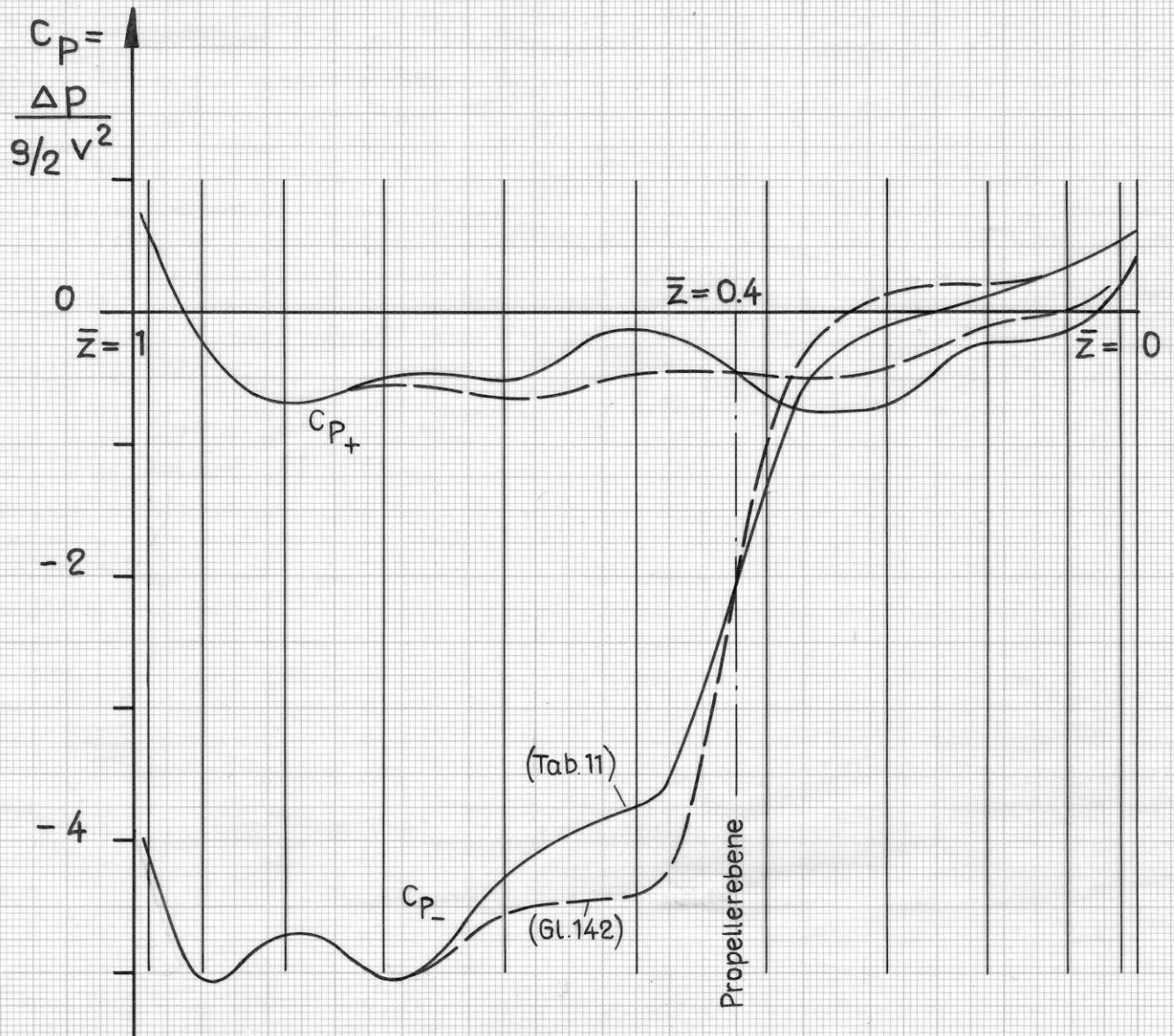
Düse $h=0.5$
 $s/l=0.12$
 $\alpha_e=7.7^\circ$

Propeller $z_p=4$
 $J=0.220$
 $BG=0.164$
 mit $C_{SPD}=6.980$; $C_{SP}=5.874$



Die Druckverteilung der Düse mit Propeller

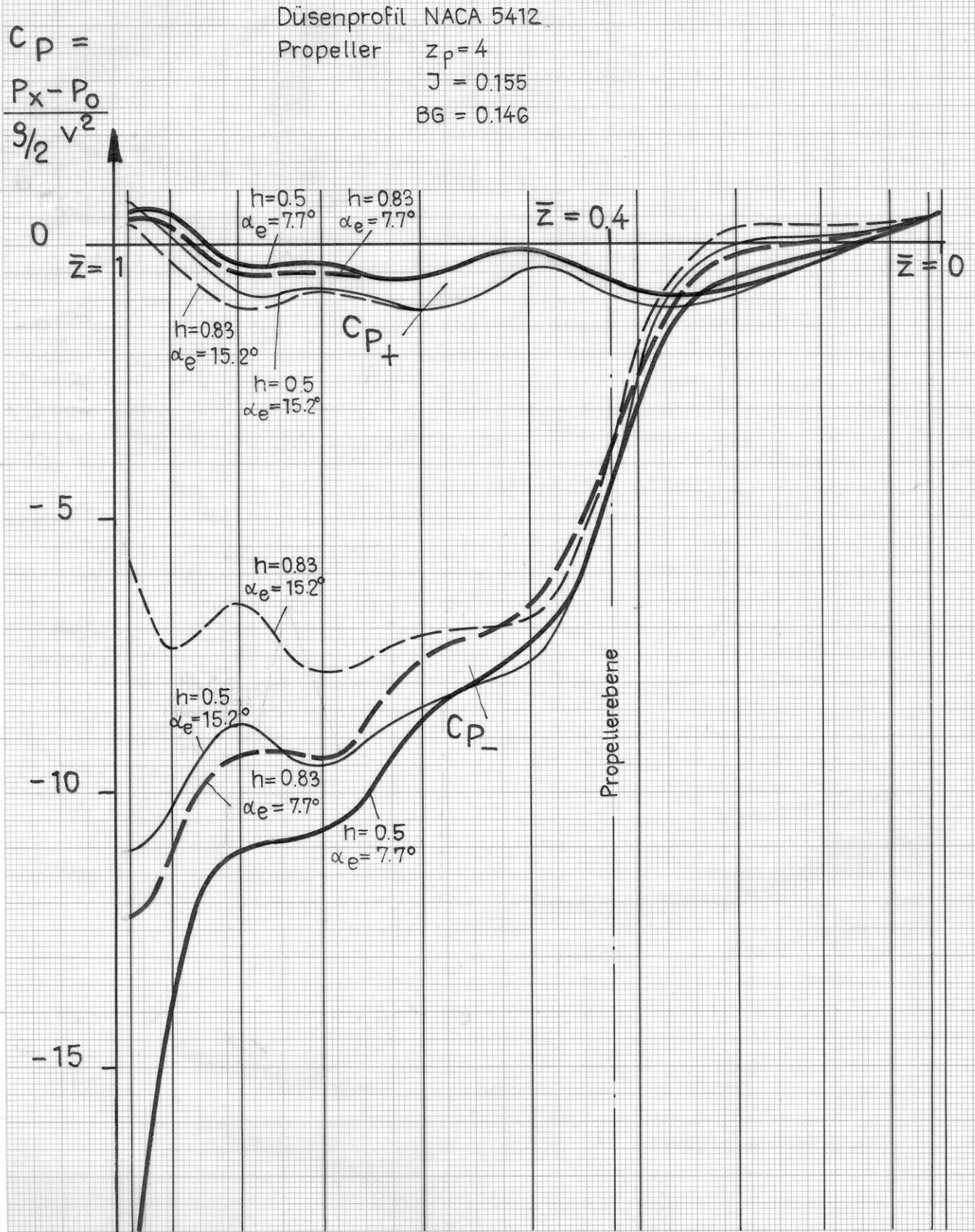
Düse $h = 0.5$ Propeller $z_p = 4$
 $s/l = 0.12$ $J = 0.220$
 $\alpha_e = 15.2^\circ$ $BG = 0.104$



In Diagramm 47 ist für den Fall hoher Belastung ($C_{SPD} \approx 15$) deutlich zu erkennen, für welche Längenverhältnisse h und Öffnungswinkel α_e der Düse Ablösung an der inneren Seite der Eintrittskante auftritt. Wir sehen, daß dies für kleine h - und α_e -Werte stets der Fall ist, z.B. tritt für $h = 0.5$ und $\alpha_e = 7,7^\circ$ Ablösung auf, die für den gleichen h -Wert bei Vergrößerung von α_e auf $15,2^\circ$ vermieden wird. Eine entsprechende Wirkung hat die Vergrößerung von h auf 0.83 bei Beibehaltung des Winkels $\alpha_e = 7,7^\circ$.

Daraus ist ersichtlich, wie weit, d.h. für welche h - und α_e -Werte, die Ergebnisse der Rechnungen für die Antriebssysteme mit der Düse brauchbar sind, nämlich nur für die Bereiche, in denen keine Ablösung an der Innenseite der Eintrittskante der Düse auftritt (Bild 37).

Druckverteilung an der äußeren (+) und inneren (-) Seite der Düse
Einfluß der h - und α_e -Parameter



Zusammenfassung

Bei größeren Belastungen wird der Düsenpropeller durch Einführung einer Düse entlastet, weil die durch die Strömungsverhältnisse an der Düse erzeugte Schubkraft größer sein kann als der Düsenwiderstand.

Der hinter dem Propeller stehende Leitapparat verwandelt die Drallenergie der Propellerstrahler in Vortriebsenergie. Das hier beschriebene Antriebssystem "Düse-Propeller-Leitrad" soll diese beiden Vorteile ausnutzen und so eine möglichst große Wirkungsgradverbesserung, besonders bei höheren Belastungen, erzielen.

Die Rechenmethode basiert auf der Anwendung der neuesten Theorien der Düse und des Propellers nach Morgan und Lerbs. Das feste Leitrad wurde ebenfalls nach der Lerbs'schen Induktionsfaktorenmethode für Propeller gerechnet. Das hier beschriebene System der Wechselwirkungen kann prinzipiell auch der Lösung des Problems zweier gegenläufiger Propeller in der Düse angepaßt werden. Ein in ALGOL programmiertes Rechenverfahren ermöglicht Berechnungen für Antriebssysteme "Düse + Propeller" und "Düse-Propeller-festes Leitrad". Eine gewisse Unsicherheit birgt die Abschätzung der Zähigkeitsverluste am Leitrad und an der Düse sowie der Krümmungsablösung an der äußeren bzw. inneren Seite der Düse. Die Zähigkeitsverluste des Leitrades werden genauso wie beim Propeller an jedem Flügelschnitt durch die zum Profil gehörige Gleitzahl ausgedrückt und anschließend durch Korrekturen berücksichtigt. Für die Düse bei Vorhandensein des Düsenpropellers wurde eine Näherungsmethode zur Abschätzung des Düsenwiderstandsbeiwertes in Abhängigkeit von der Belastung abgeleitet. Eine mögliche Strömungsablösung an der Düse kann bei gegebenen Betriebsbedingungen des Antriebssystems aufgrund des hier eingeführten Druckverteilungsverfahrens beurteilt werden.

Mit dem Rechenprogramm wurde eine Reihe von Beispielen gerechnet und aus den Ergebnissen verschiedene grundlegende Gesetzmäßigkeiten abgeleitet, die insbesondere den Einfluß der Belastung zeigten.

Dank

An dieser Stelle möchte der Autor allen danken, die ihm die Durchführung dieser Forschungsarbeit an der Universität Hamburg ermöglicht haben und die ihm während seiner Tätigkeit im Institut für Schiffbau behilflich waren.

Vor allem gebührt Dank der Alexander von Humboldt-Stiftung, die ihm als ausländischem Akademiker die Durchführung dieses Forschungsvorhabens durch die Gewährung von Stipendien und finanziellen Beihilfen ermöglicht hat.

Besonders dankbar ist der Autor den leitenden Herren des Instituts für Schiffbau der Universität Hamburg, insbesondere seinem Betreuer, Prof.Dr.-Ing. O.Grim, Professor der Universität und Direktor der Hamburgischen Schiffbauversuchsanstalt für die wissenschaftliche Anleitung und für viele fachliche Ratschläge. Dank gebührt auch den anderen Mitarbeitern des Instituts, die bei dieser Forschungsaufgabe behilflich waren, vor allem Frau Dr. M.Kirsch für die Zusammenarbeit bei der mathematischen Bearbeitung der Aufgabe und der Durchführung der Rechnungen.

Auch der Technischen Hochschule Bratislava, die diesen Studienaufenthalt an der Universität Hamburg bewilligt hat, sei hiermit vielmals gedankt.

Bezeichnungen

$BG \equiv \lambda_i$	Steigungsparameter des Propellers Gl.(2)
B_p	Taylor-Wert für die Belastung Gl.(109)
c_a	Auftriebsbeiwert des Profils
c_1	Krümmungswert des Profils
$c = \frac{c_1}{L}$	Krümmung des Profils
f/L	Charakteristisches Krümmungsverhältnis des Profils
$c_S = \frac{S}{\frac{\rho}{2} v^2 \pi R_p^2}$	Schubbelastungsgrad
$c_N = \frac{N}{\frac{\rho}{2} v^3 \pi R_p^2}$	Leistungsbeiwert
$C_{P+} = \frac{\Delta_{p+}}{\frac{\rho v^2}{2}}$	Druckverteilung an der äußeren Seite des Düsenprofils
$C_{P-} = \frac{\Delta_{p-}}{\frac{\rho v^2}{2}}$	Druckverteilung an der inneren Seite des Düsenprofils
D	Durchmesser des Düsenzylinders
$e = 2.71828$	Basis des natürlichen Logarithmus
$E(k)$	Vollständiges elliptisches Integral der zweiten Gattung Gl.(10)
F	Flächeninhalt des Kreises
$G = \frac{\Gamma}{\pi D v}$	Zirkulation (dimensionsloser Verhältniswert)
$h = \frac{L}{D}$	Längenverhältnis der Düse
H/D	Steigung des Propellers
i_a, i_r	Axiale und radiale Induktionsfaktoren
J	Fortschrittsgrad Gl.(1)

k, k_1, k_2	Module der elliptischen Integrale Gl.(11, 52 und 206)
$K(k)$	Vollständiges elliptisches Integral der zweiten Gattung Gl.(9)
l	Länge des Profils
L	Länge der Düse
L_P	Axiale Entfernung zwischen der Propeller- ebene und der Austrittskante der Düse
L_L	Axiale Entfernung zwischen Leitradebene und Austrittskante der Düse
n	Drehzahl
N	Gewählte Anzahl der Teilung (des Propeller- radius bzw. der Düsenlänge)
N_h	Wellenleistung
q_z	Quell-Senken-Verteilung der Düse
Q	Öffnungsverhältnis der Düse Gl.(173)
r	Radiale Koordinate
R_P	Propellerradius
$R_D = \frac{D}{2}$	Radius des Düsenzylinders
s_1	halbe Dicke des Profils
$s = \frac{s_1}{L}$	halbe Dicke des Profils (Verhältniswerte)
s/l	Charakteristisches Dickenverhältnis des Profils
S	Schub
W_D	Widerstand der Düse
U	Umfangsgeschwindigkeit
V	Anströmgeschwindigkeit des Antriebssystems

w, w_i	Induzierte Geschwindigkeiten
w_a	Axiale Komponente
w_r	Radiale Komponente
w_t	Tangentiale Komponente
$z = \frac{\xi}{L}$	Axiale Entfernung von der Propellerebene
$\bar{z}_1 = \frac{L_p}{L}$	Dimensionslose Koordinate der Propellerebene in der Düse
$\bar{z}_2 = \frac{L_L}{L}$	Dimensionslose Koordinate der Leitrad-ebene in der Düse
$\bar{z} = z + \bar{z}_1$	Axiale Entfernung von der Austrittskante der Düse in Bezug auf die Düsenlänge
z_p	Propellerflügelzahl
z_L	Leitradflügelzahl
$x = \frac{r}{R_p}$	Dimensionslose radiale Koordinate
$x_D = \frac{R_D}{R_p}$	Radienverhältnis des Düsenzylinders
x_N	Nabenradius (dimensionslos)
α_e	Öffnungswinkel
β	Steigungswinkel
β_i	Hydrodynamischer Steigungswinkel
Γ	Zirkulation
γ^*	Pseudozirkulation an der Düse
γ	Zirkulation an der Düse
δ_D	Relativer Schubgewinn der Düse Gl.(197)
δ_L	Relativer Schubgewinn des Leitrades Gl.(252) in Bezug auf den Propeller

δ_{LS}	Relativer Gewinn des Leitrades Gl.(193) in Bezug auf das System Propeller + Düse
ϵ	Gleitzahl
ξ	Axiale Koordinate der Propellerebene
$\xi_P \equiv c_w$	Reibungsbeiwert des Profils
ξ_{W0}	Düsenwiderstandsbeiwert nach Dickmann-Weissinger Gl.(175)
ξ_{GU}	Düsenwiderstandsbeiwert nach Gutsche Gl.(176)
ξ_{WD}	Düsenwiderstandsbeiwert bei Vorhandensein des belasteten Propellers Gl.(190)
$\eta_h = \frac{S \cdot v}{N_h}$	Wirkungsgrad
η_h	Äquipotential
ρ	Dichte
σ_x	Kavitationszahl des Profils Gl.(95)
φ	Umfangskoordinate, Polarwinkel
ω	Winkelgeschwindigkeit

Indices:

P	Propeller
D	Düse
L	Leitapparat
PD	System Propeller + Düse
PDL	System Propeller - Düse - Leitapparat
N	Nabe
PSm	mittlere Werte im Propellerstrahl
γ	Düsenzirkulation
q	Quell-Senken-Verteilung der Düse
a	axial
r	radial
t	tangential
d	durchschnittlich (in der Umfangs- richtung konstant)
m	Mittelwert
ges	gesamt
opt	optimal
i	ideal (ohne Zähigkeitseffekte)
eff	effektiv
+ Vorzeichen	äußere Seite der Düse
- Vorzeichen	innere Seite der Düse
$\bar{z}, \bar{\vartheta}, (x)$	Aufpunktstelle
$z', \vartheta', (x_0)$	Stelle der wirkenden Singularität
$(0), (1), (2), \dots (n)$	n-ter Iterationsschritt

Schrifttum

- 1 Dickmann, H.E. und J. Weissinger: Beitrag zur Theorie optimaler Düsenschauben (Kortdüsen). Jahrb. STG Bd. 49 (1955).
- 2 Dickmann, H.E.: Grenzen der Anwendbarkeit von Leitapparaten bei axialen hydraulischen Arbeitsmaschinen. Schiffstechnik (1956).
- 3 Morgan, W.B : Theory of the Annular Airfoil and Ducted Propeller. Fourth Symposium of Naval Hydrodynamics, Washington (1962).
- 4 Lerbs, H.: Ergebnisse der angewandten Theorie des Schiffpropellers. Jahrb. STG Bd. 49 (1955).
- 5 Grim, O.: Propeller und Leitrad. Jahrb. STG Bd.60 (1966)
- 6 Weissinger, J.: Zur Aerodynamik des Ringflügels III. Der Einfluß der Profildicke. DVL-Bericht Nr. 42 (1957).
- 7 Isay, W.H.: Propellertheorie. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer-Verlag 1964.
- 8 van Manen, J.D.: Ergebnisse systematischer Versuche mit Schiffsdüsenanlagen. Jahrb.STG Bd. 47 (1953).
- 9 Schmeidler, W.: Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik. Leipzig 1950.
- 10 Morgan, W.B.: A Theory of the Ducted Propeller with a Finite Number of Blades. University of California, Berkeley (1961).
- 11 Lerbs, H.: Moderately Loaded Propellers with a Finite Number of Blades and an Arbitrary Distribution of Circulation. Soc.Nav.Arch.and Marine Engineers. New York, Vol.60 (1952).

- 12 Lerbs, H.: An Approximate Theory of Heavily Loaded Free-running Propellers in the Optimum Condition. Soc.Nav.Arch.and Marine Engineers. New York, Vol. 58 (1950).
- 13 Bronstein, J.N. und K.A. Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik. Leipzig 1962.
- 14 Gutsche, F.: Düsenpropeller in Theorie und Experiment. Jahrb. STG Bd. 53 (1959).
- 15 Henschke, W.: Schiffbautechnisches Handbuch. Bd. 1. Berlin 1966.
- 16 Weicker, D.: Die Vortriebswirkung des Schiffsruders im Propellerstrahl. Schiffbauforschung 4 Nr.5/6 (1965).
- 17 Morgan, W.B.: Some Results From the Inverse Problem of the Annular Airfoil and Ducted Propeller. Journal of Ship Research, Vol.13(March 1969).
- 18 Hough, G.R. and D.E. Ordway: The Generalised Actuator Disk. Development in Theoretical and Applied Mechanics, Vol.2, Pergamon Press, (1965).

A N H A N G I
=====

Die zur Berechnung der Zirkulation an der Düse
brauchbaren Funktionen

TABELLE 1

$$\int_0^{\pi} k [K(k) - E(k)] \cos m \vartheta'' d\vartheta'' = 36 [\vartheta'; m]$$

$$K^2 = \frac{4}{h^2} [\cos \vartheta' - \cos \vartheta'']^2 + 4$$

h=0.5

	$\vartheta' = 0$	$\vartheta' = 15$	$\vartheta' = 30$	$\vartheta' = 45$	$\vartheta' = 60$	$\vartheta' = 75$	$\vartheta' = 90$	$\vartheta' = 105$	$\vartheta' = 120$	$\vartheta' = 135$	$\vartheta' = 150$	$\vartheta' = 165$	$\vartheta' = 180$
m=1	3,2854	3,1634	2,8522	2,3387	1,6604	0,8620	0	-0,8620	-1,6604	-2,3387	-2,8522	-3,1634	-3,2854
m=2	1,6391	1,4130	0,8100	-0,0199	-0,8513	-1,4613	-1,6850	-1,4613	-0,8513	-0,0199	-0,8100	-1,4130	-1,6391
m=3	1,1287	0,7974	-0,0236	-0,8349	-1,1640	-0,8194	0	+0,8194	+1,1640	+0,8349	+0,0236	-0,7974	-1,1287
m=4	0,9041	0,4538	-0,4911	-0,9406	-0,4610	+0,4690	+0,9309	+0,4690	-0,4610	-0,9406	-0,4911	+0,4538	+0,9041
m=5	0,7792	0,1932	-0,7410	-0,5788	+0,4134	+0,7832	0	-0,7832	-0,4134	+0,5788	+0,7410	-0,1932	-0,7792
m=6	0,6996	-0,0313	-0,7860	+0,0071	+0,7464	-0,0020	-0,7365	-0,0020	+0,7464	+0,0071	-0,7860	-0,0313	+0,6996
m=7	0,6380	-0,2271	-0,6355	+0,5039	+0,3436	-0,6596	0	+0,6596	-0,3436	-0,5039	+0,6355	+0,2271	-0,6380
m=8	0,5777	-0,3805	-0,3412	+0,6516	-0,3169	-0,3120	+0,6211	-0,3120	-0,3169	+0,6516	-0,3412	-0,3805	+0,5777
m=9	0,5081	-0,4683	-0,0081	+0,4118	-0,5606	+0,3890	0	-0,3890	+0,5606	-0,4118	+0,0081	+0,4683	-0,5081
m=10	0,4222	-0,4703	0,2365	+0,0102	-0,2372	+0,3969	-0,4544	+0,3969	-0,2372	+0,0102	+0,2365	-0,4703	+0,4222
m=11	+0,3163	-0,3795	+0,3025	-0,2355	+0,1621	-0,0827	0	+0,0827	-0,1621	+0,2355	-0,3025	+0,3795	-0,3163
m=12	0,1897	-0,2099	+0,1921	-0,1890	+0,1879	-0,1875	+0,1873	-0,1875	+0,1879	-0,1890	+0,1921	-0,2099	+0,1897

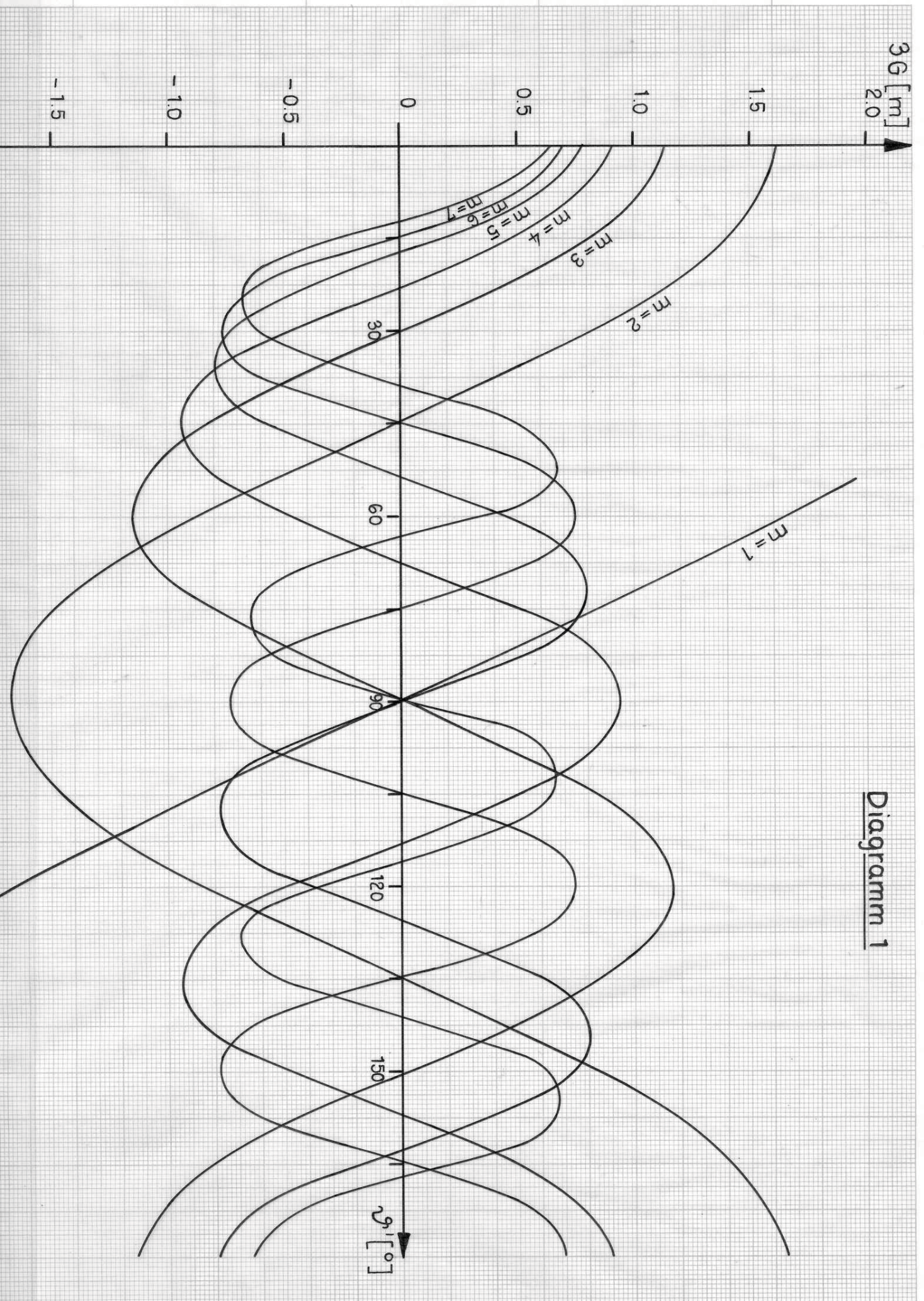


Diagramm 1

$$3G(\vartheta', m) = \int_0^{\pi} k [K(k) - E(k)] \cos m \vartheta' d\vartheta'$$

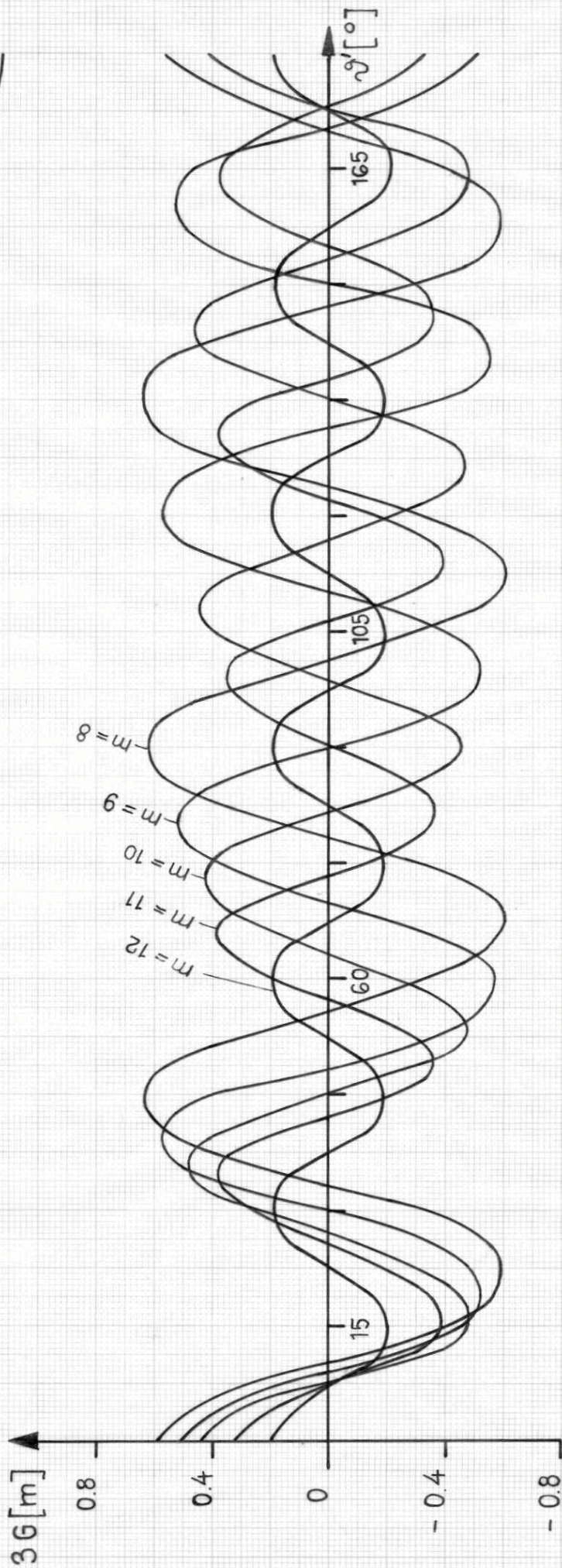


TABELLE 2

$$\frac{3G[\nu', m]}{3} = \sum_{p=0}^{12} a_p(m) \cos p \nu' \quad \text{mit} \quad a_p(m) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} G(\nu', m) \cos p \nu' d\nu'$$

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
m=1	0	1,0973	0	-0,0049	0	+0,0001	0	0,0006	0	0,0010	0	0,0012	0
m=2	-0,0074	0	0,5536	0	-0,0007	0	0,0001	0	0,0002	0	0,0004	0	0,0004
m=3	0	-0,0078	0	+0,3847	0	+0,0009	0	-0,0003	0	-0,0006	0	-0,0006	0
m=4	-0,0029	0	-0,0046	0	0,3106	0	0,0019	0	-0,0009	0	-0,0017	0	-0,0019
m=5	0	-0,0073	0	-0,0035	0	+0,2727	0	+0,0025	0	-0,0018	0	-0,0028	0
m=6	-0,0047	0	-0,0082	0	-0,0025	0	+0,2501	0	+0,0028	0	-0,0025	0	-0,0035
m=7	0	-0,0104	0	-0,0084	0	-0,0012	0	0,2326	0	+0,0029	0	-0,0029	0
m=8	-0,0055	0	-0,0104	0	-0,0077	0	+0,0003	0	0,2141	0	+0,0028	0	-0,0020
m=9	0	-0,0104	0	-0,0092	0	-0,0062	0	+0,0019	0	+0,1903	0	+0,0030	0
m=10	-0,0044	0	-0,0084	0	-0,0070	0	-0,0039	0	+0,0035	0	0,1585	0	+0,0051
m=11	0	-0,0059	0	-0,0053	0	-0,0038	0	-0,0012	0	+0,0044	0	0,1173	0
m=12	-0,0010	0	-0,0018	0	-0,0012	0	-0,0003	0	+0,0009	0	+0,0025	0	0,1284

TABELLE 3

$$B_m(\vec{\nu}) = -\frac{6h}{\pi} m \left[\sum_{p=1}^{12} a_p(m) \sin p \vec{\nu} \right]$$

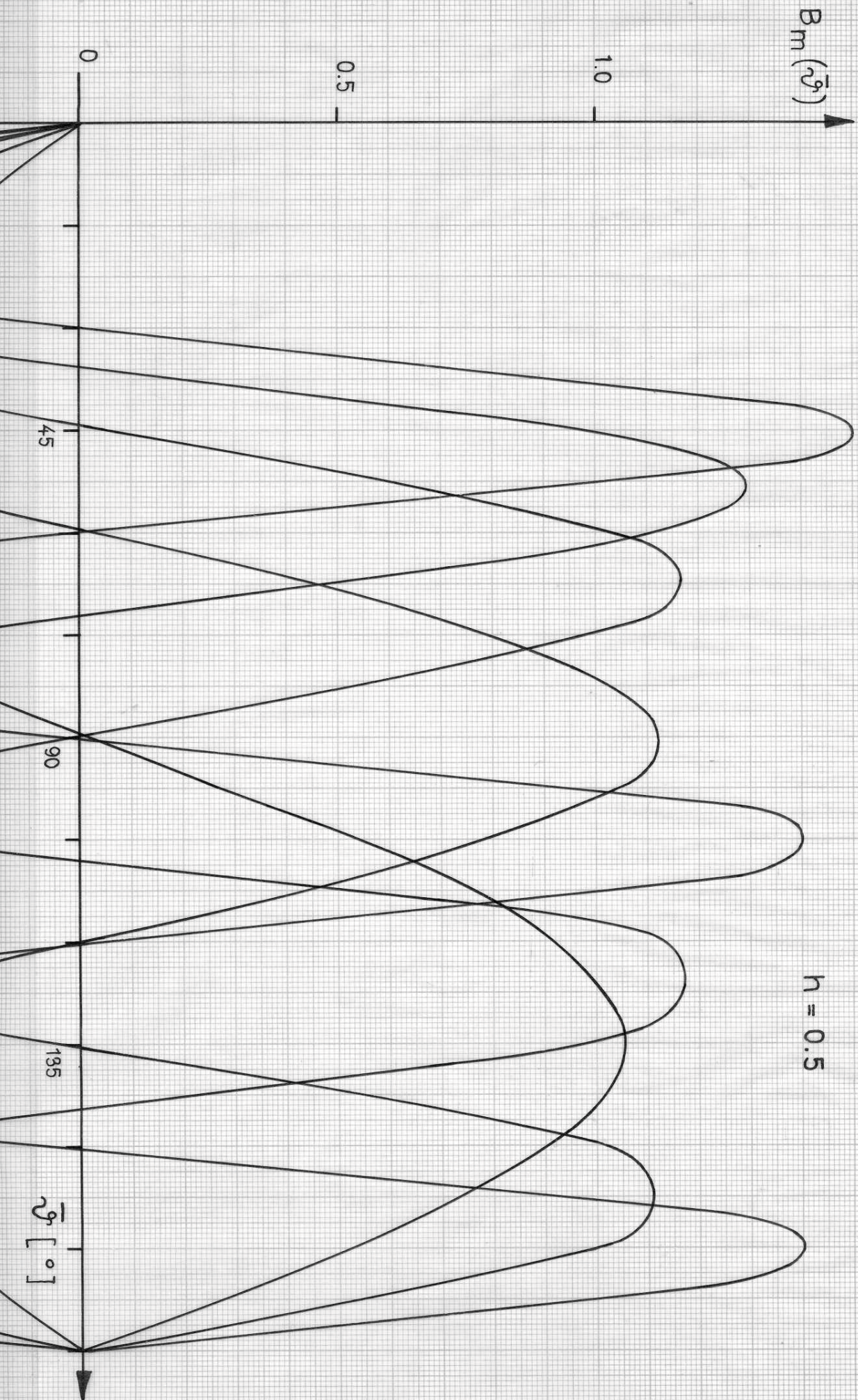
$$h=0.5$$

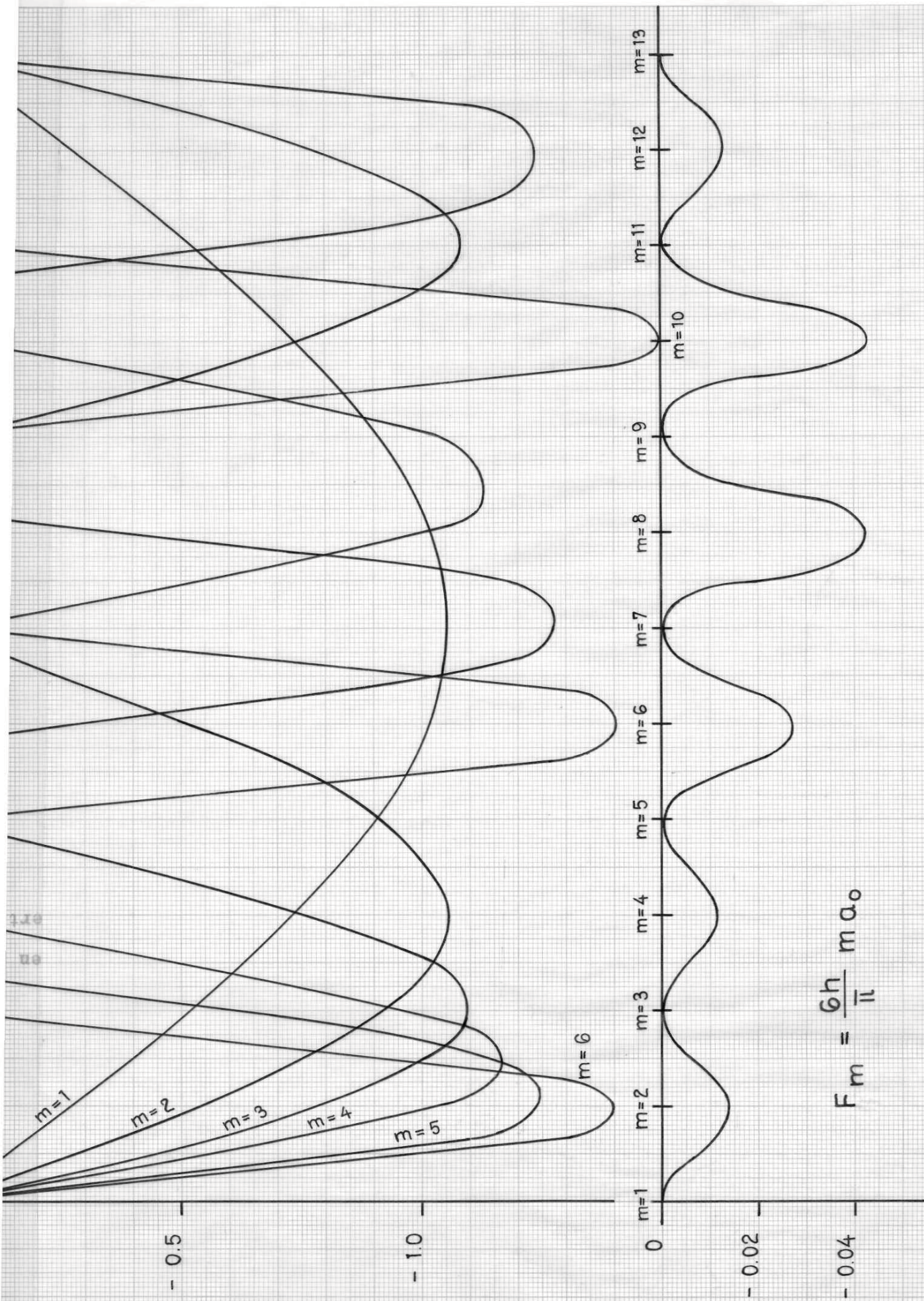
$\vec{\nu}=0^\circ$	$\vec{\nu}=15^\circ$	$\vec{\nu}=30^\circ$	$\vec{\nu}=45^\circ$	$\vec{\nu}=60^\circ$	$\vec{\nu}=75^\circ$	$\vec{\nu}=90^\circ$	$\vec{\nu}=105^\circ$	$\vec{\nu}=120^\circ$	$\vec{\nu}=135^\circ$	$\vec{\nu}=150^\circ$	$\vec{\nu}=165^\circ$	$\vec{\nu}=180^\circ$
m=1 0	-0,2694	-0,5175	-0,7386	-0,9069	-1,0160	-1,0518	-1,0160	-0,9069	-0,7386	-0,5175	-0,2694	0
m=2 0	-0,5283	-0,9134	-1,0578	-0,9165	-0,5300	0	+0,5300	+0,9165	+1,0578	+0,9134	+0,5283	0
m=3 0	-0,7735	-1,0951	-0,7596	+0,0207	+0,8010	+1,1209	+0,8010	+0,0207	-0,7596	-1,0951	-0,7735	0
m=4 0	-1,0195	-1,0210	+0,0313	1,0404	1,0295	0	-1,0295	-1,0404	-0,0313	+1,0210	+1,0195	0
m=5 0	-1,2386	-0,6261	+0,9809	1,1355	-0,3113	-1,2773	-0,3113	+1,1355	+0,9809	-0,6261	-1,2386	0
m=6 0	-1,4036	+0,0543	1,4942	+0,0017	-1,4006	0	+1,4006	-0,0017	-1,4942	-0,0543	+1,4036	0
m=7 0	-1,4452	+0,8818	1,1821	-1,3101	-0,3407	+1,5384	-0,3407	-1,3101	+1,1821	+0,8818	-1,4452	0
m=8 0	-1,3387	+1,5544	+0,0597	-1,3799	1,3917	0	-1,3917	+1,3799	-0,0597	-1,5544	+1,3387	0
m=9 0	-1,0483	1,8070	-1,0812	+0,0394	1,1711	-1,5288	+1,1711	+0,0394	-1,0812	+1,8070	-1,0483	0
m=10 0	-0,6499	+1,4667	-1,4705	+1,2940	-0,7077	0	+0,7077	-1,2940	+1,4705	-1,4667	+0,6499	0
m=11 0	-0,2450	+0,7619	-0,8584	+1,0976	-1,1231	+1,2205	-1,1231	+1,0976	-0,8584	+0,7619	-0,2450	0
m=12 0	+0,0028	+0,0641	-0,0120	+0,0216	-0,0037	0	+0,0037	-0,0216	+0,0120	-0,0641	-0,0028	0

Diagramm 2

$$B_m(\bar{\nu}) = -\frac{6h}{\pi} m \left[\sum_{p=1}^{12} a_p(m) \sin p \bar{\nu} \right]$$

$$h = 0.5$$





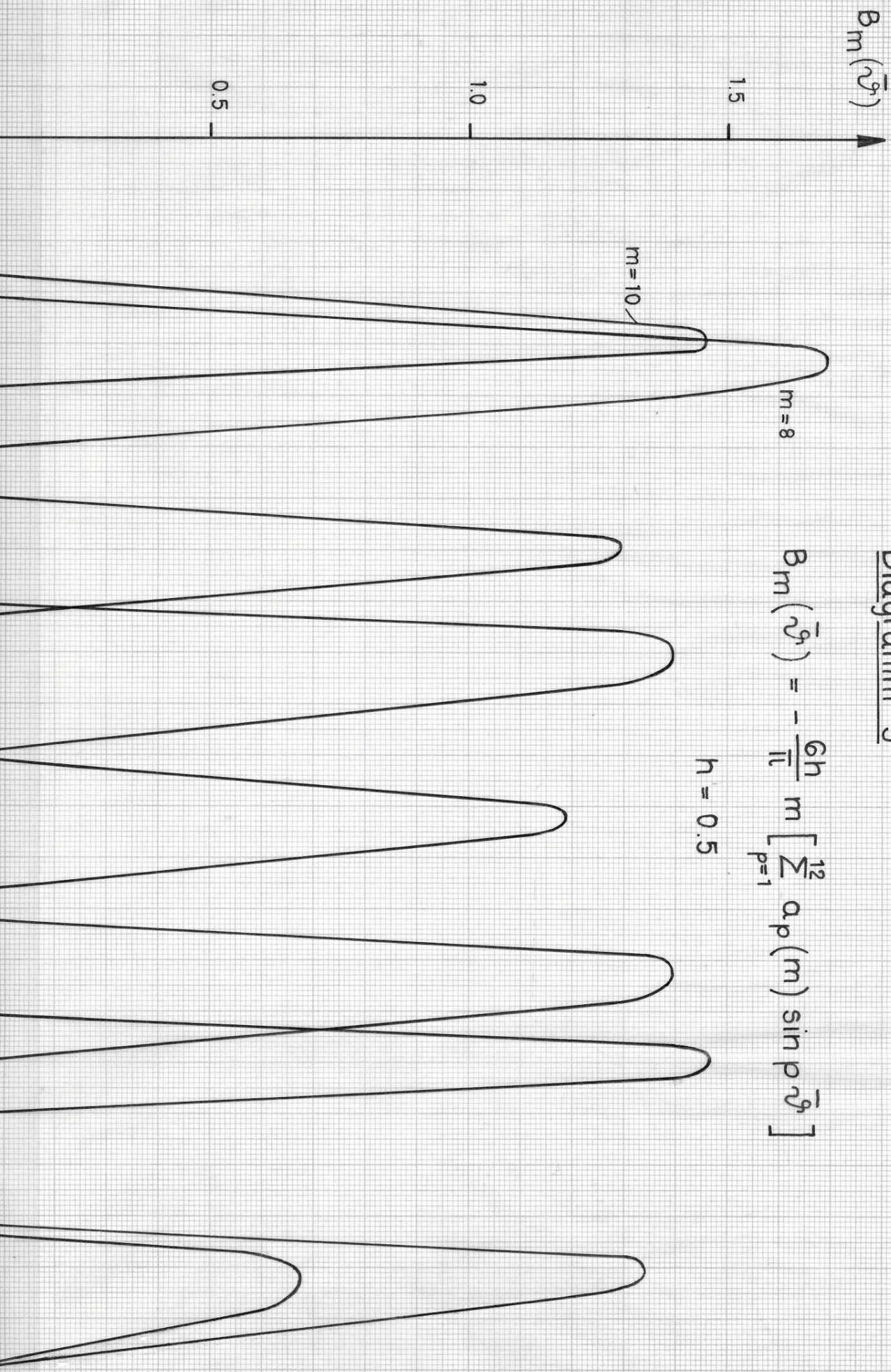
$$F_m = \frac{6h}{\pi} m a_0$$



Diagramm 3

$$B_m(\bar{\nu}^i) = -\frac{6h}{1l} m \left[\sum_{p=1}^{12} a_p(m) \sin p \bar{\nu}^i \right]$$

$$h = 0.5$$



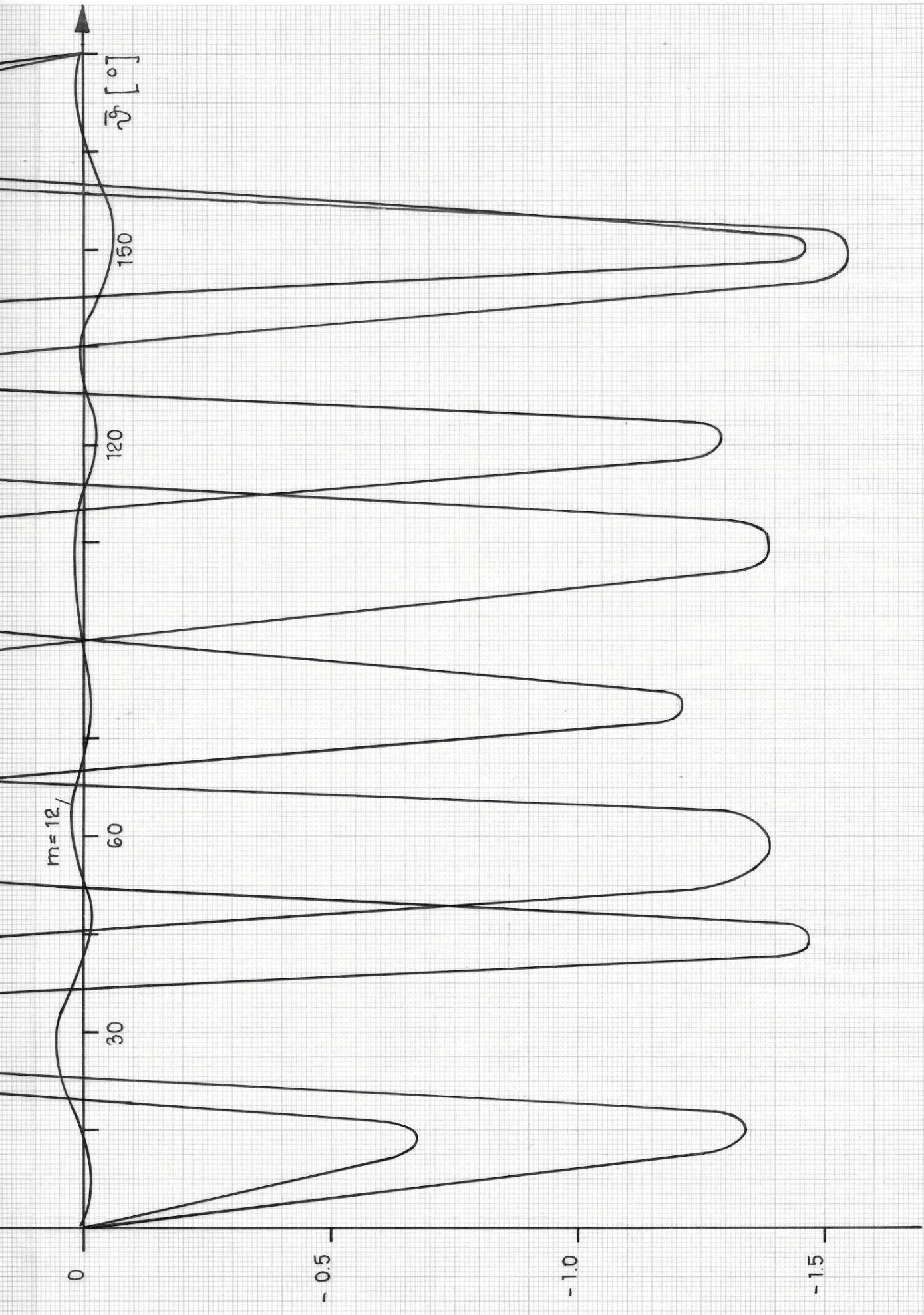


TABELLE 4

$$g(\vartheta'', \vartheta')$$

$\vartheta'' = 0^\circ$	$\vartheta'' = 15^\circ$	$\vartheta'' = 30^\circ$	$\vartheta'' = 45^\circ$	$\vartheta'' = 60^\circ$	$\vartheta'' = 75^\circ$	$\vartheta'' = 90^\circ$	$\vartheta'' = 105^\circ$	$\vartheta'' = 120^\circ$	$\vartheta'' = 135^\circ$	$\vartheta'' = 150^\circ$	$\vartheta'' = 165^\circ$	$\vartheta'' = 180^\circ$
$\vartheta' = 0^\circ$ -2,0000	-2,0018	-2,0206	-2,0774	-2,1827	-2,3305	-2,5011	-2,6704	-2,8181	-2,9331	-3,0125	-3,0582	-3,0730
$\vartheta' = 15^\circ$ -2,0018	-2,0000	-2,0124	-2,0631	-2,1636	-2,3086	-2,4785	-2,6486	-2,7981	-2,9151	-2,9962	-3,0430	-3,0582
$\vartheta' = 30^\circ$ -2,0206	-2,0214	-2,0000	-2,0277	-2,1114	-2,2461	-2,4122	-2,5837	-2,7376	-2,8601	-2,9461	-2,9962	-3,0125
$\vartheta' = 45^\circ$ -2,0774	-2,0631	-2,0277	-2,0000	-2,0434	-2,1540	-2,3086	-2,4785	-2,6372	-2,7671	-2,8601	-2,9151	-2,9331
$\vartheta' = 60^\circ$ -2,1827	-2,1636	-2,1114	-2,0434	-2,0000	-2,0561	-2,1827	-2,3419	-2,5011	-2,6372	-2,7376	-2,7980	-2,8181
$\vartheta' = 75^\circ$ -2,3305	-2,3086	-2,2461	-2,1540	-2,0561	-2,0000	-2,0631	-2,1928	-2,3419	-2,4785	-2,5837	-2,6486	-2,6704
$\vartheta' = 90^\circ$ -2,5011	-2,4785	-2,4122	-2,3086	-2,1827	-2,0631	-2,0000	-2,0631	-2,1827	-2,3086	-2,4122	-2,4785	-2,5011
$\vartheta' = 105^\circ$ -2,6704	-2,6486	-2,5837	-2,4785	-2,3419	-2,2461	-2,1827	-2,0631	-2,0561	-2,1540	-2,2461	-2,3086	-2,3305
$\vartheta' = 120^\circ$ -2,8181	-2,7981	-2,7376	-2,6392	-2,5011	-2,3419	-2,1827	-2,0561	-2,0000	-2,0434	-2,1114	-2,1636	-2,1827
$\vartheta' = 135^\circ$ -2,9331	-2,9151	-2,8601	-2,7671	-2,6372	-2,4785	-2,3086	-2,1540	-2,0434	-2,0000	-2,0277	-2,0631	-2,0774
$\vartheta' = 150^\circ$ -3,0125	-2,9962	-2,9461	-2,8601	-2,7376	-2,5837	-2,4122	-2,2461	-2,1114	-2,0277	-2,0000	-2,0124	-2,0206
$\vartheta' = 165^\circ$ -3,0582	-3,0430	-2,9962	-2,9151	-2,7981	-2,6486	-2,4785	-2,3086	-2,1636	-2,0631	-2,0124	-2,0000	-2,0018
$\vartheta' = 180^\circ$ -3,0730	-3,0582	-3,0125	-2,9331	-2,8181	-2,6704	-2,5011	-2,3305	-2,1827	-2,0774	-2,0206	-2,0018	-2,0000

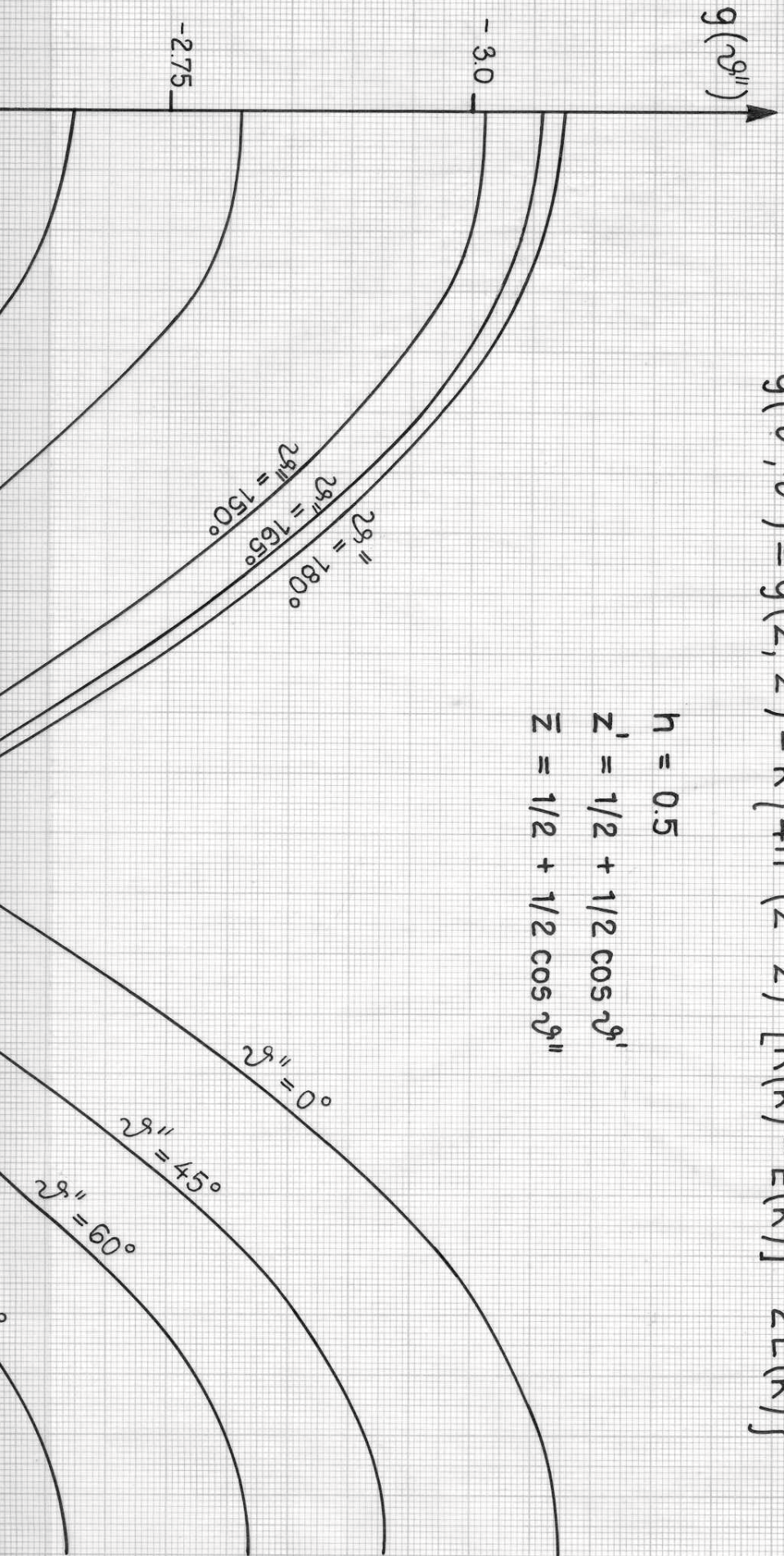
Diagramm 4

$$g(\vartheta'', \vartheta') \equiv g(\bar{z}, z') = k \left\{ 4h^2 (\bar{z} - z')^2 [K(k) - E(k)] - 2E(k) \right\}$$

$$h = 0.5$$

$$z' = 1/2 + 1/2 \cos \vartheta'$$

$$\bar{z} = 1/2 + 1/2 \cos \vartheta''$$



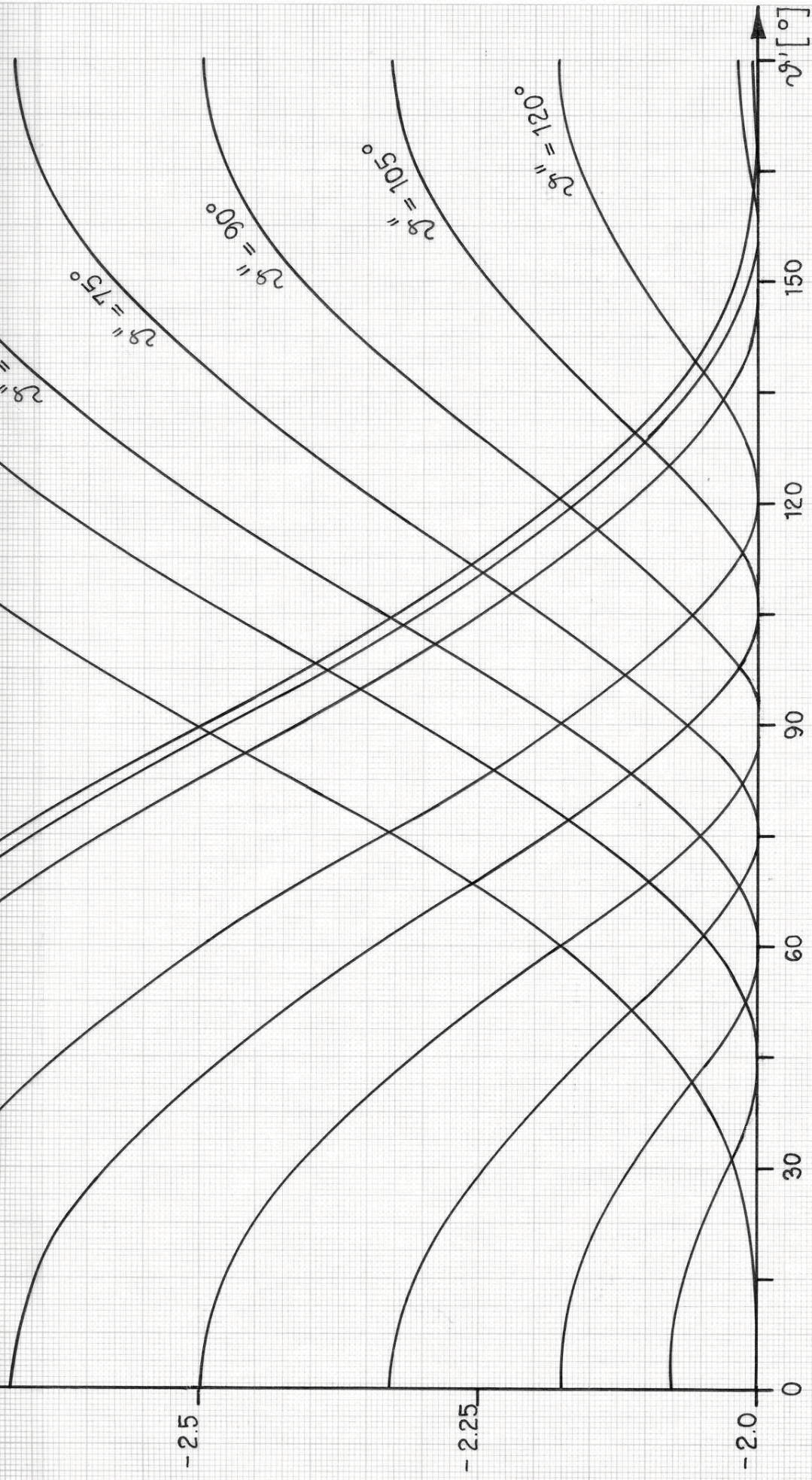
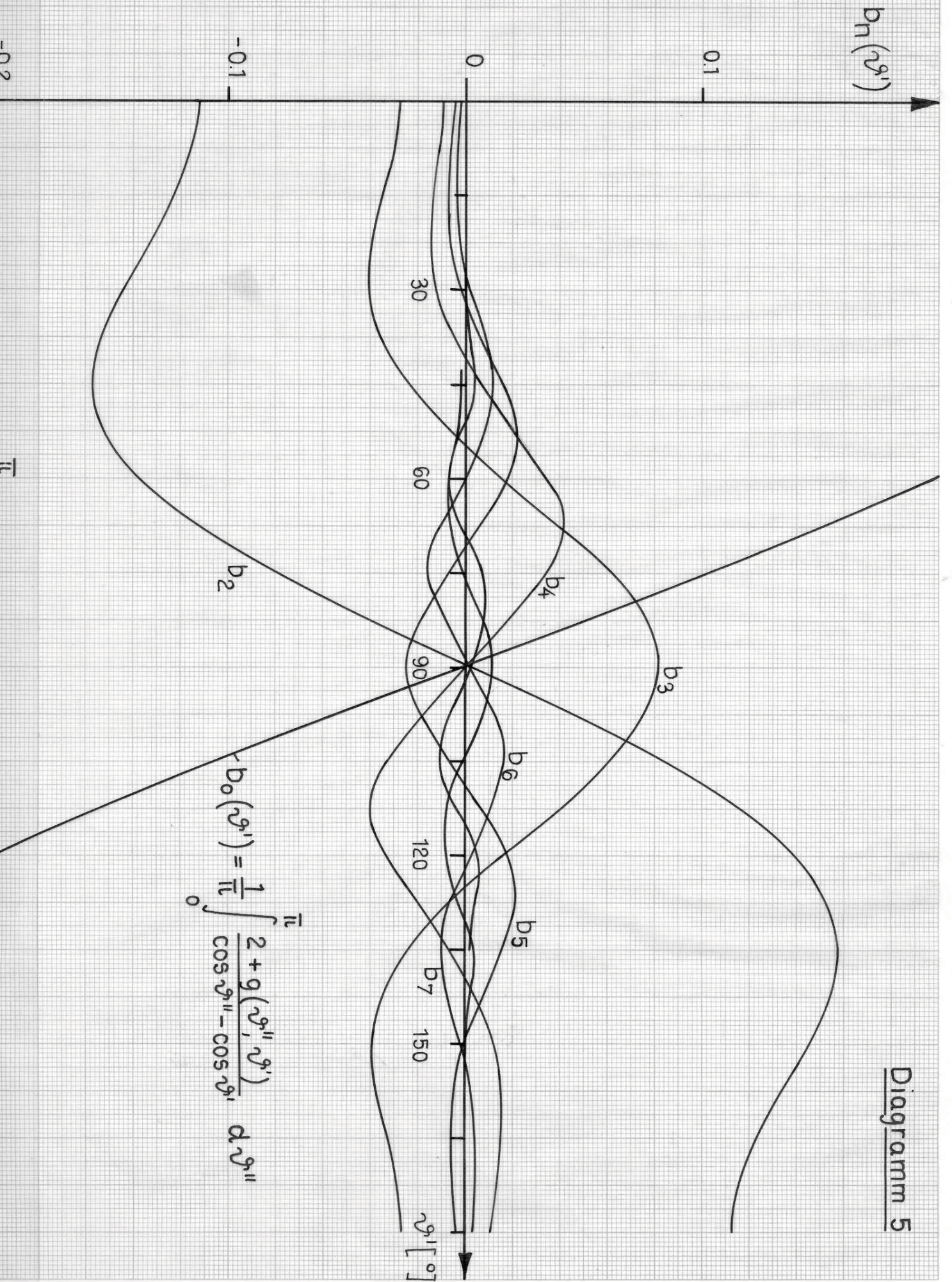


TABELLE 5

 $b_n(\vartheta')$ $h=0.5$

	$\vartheta' = 0^\circ$	$\vartheta' = 15^\circ$	$\vartheta' = 30^\circ$	$\vartheta' = 45^\circ$	$\vartheta' = 60^\circ$	$\vartheta' = 75^\circ$	$\vartheta' = 90^\circ$	$\vartheta' = 105^\circ$	$\vartheta' = 120^\circ$	$\vartheta' = 135^\circ$	$\vartheta' = 150^\circ$	$\vartheta' = 165^\circ$	$\vartheta' = 180^\circ$
n=0	0,3965	0,3831	0,3438	0,2810	0,1989	0,1030	0	-0,1030	-0,1989	-0,2810	-0,3438	-0,3831	-0,3965
n=1	-0,2308	-0,2527	-0,3129	-0,3959	-0,4801	-0,5423	-0,5652	-0,5423	-0,4801	-0,3959	-0,3129	-0,2527	-0,2308
n=2	-0,1124	-0,1227	-0,1446	-0,1570	-0,1388	-0,0824	0	+0,0824	+0,1388	+0,1570	+0,1446	+0,1227	+0,1124
n=3	-0,0283	-0,0341	-0,0402	-0,0259	+0,0147	+0,0612	+0,0819	+0,0612	+0,0147	-0,0259	-0,0402	-0,0341	-0,0283
n=4	-0,0100	-0,0137	-0,0124	+0,0085	+0,0345	+0,0337	0	-0,0337	-0,0345	-0,0085	+0,0124	+0,0137	+0,0100
n=5	-0,0052	-0,0074	-0,0020	+0,0153	+0,0174	-0,0078	-0,0254	-0,0078	+0,0174	+0,0153	-0,0020	-0,0074	-0,0052
n=6	-0,0031	-0,0042	+0,0027	+0,0116	-0,0017	-0,0160	0	+0,0160	+0,0017	-0,0116	-0,0027	+0,0042	+0,0031
n=7	-0,0020	-0,0023	+0,0043	+0,0046	-0,0090	-0,0023	+0,0113	-0,0023	-0,0090	+0,0046	+0,0043	-0,0023	-0,0020
n=8	-0,0014	-0,0010	+0,0040	-0,0010	-0,0055	+0,0067	0	-0,0067	+0,0055	+0,0010	-0,0040	+0,0010	+0,0014
n=9	-0,0011	-0,0002	+0,0026	-0,0032	+0,0006	+0,0034	-0,0053	+0,0034	+0,0006	-0,0032	+0,0026	-0,0002	-0,0011
n=10	-0,0009	+0,0003	+0,0010	-0,0023	+0,0027	-0,0018	0	+0,0018	-0,0027	+0,0023	-0,0010	-0,0003	+0,0009
n=11	-0,0008	+0,0006	-0,0002	-0,0004	+0,0010	-0,0014	+0,0016	-0,0014	+0,0010	-0,0004	-0,0002	+0,0006	-0,0008
n=12	-0,0008	+0,0007	-0,0007	+0,0005	-0,0004	+0,0002	0	-0,0002	+0,0004	-0,0005	+0,0007	-0,0007	+0,0008

Diagramm 5



$$b_n(\nu^1) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{2 + g(\nu^1, \nu^1)}{\cos \nu^1 - \cos \nu^1} \cos n \nu^1 d\nu^1$$

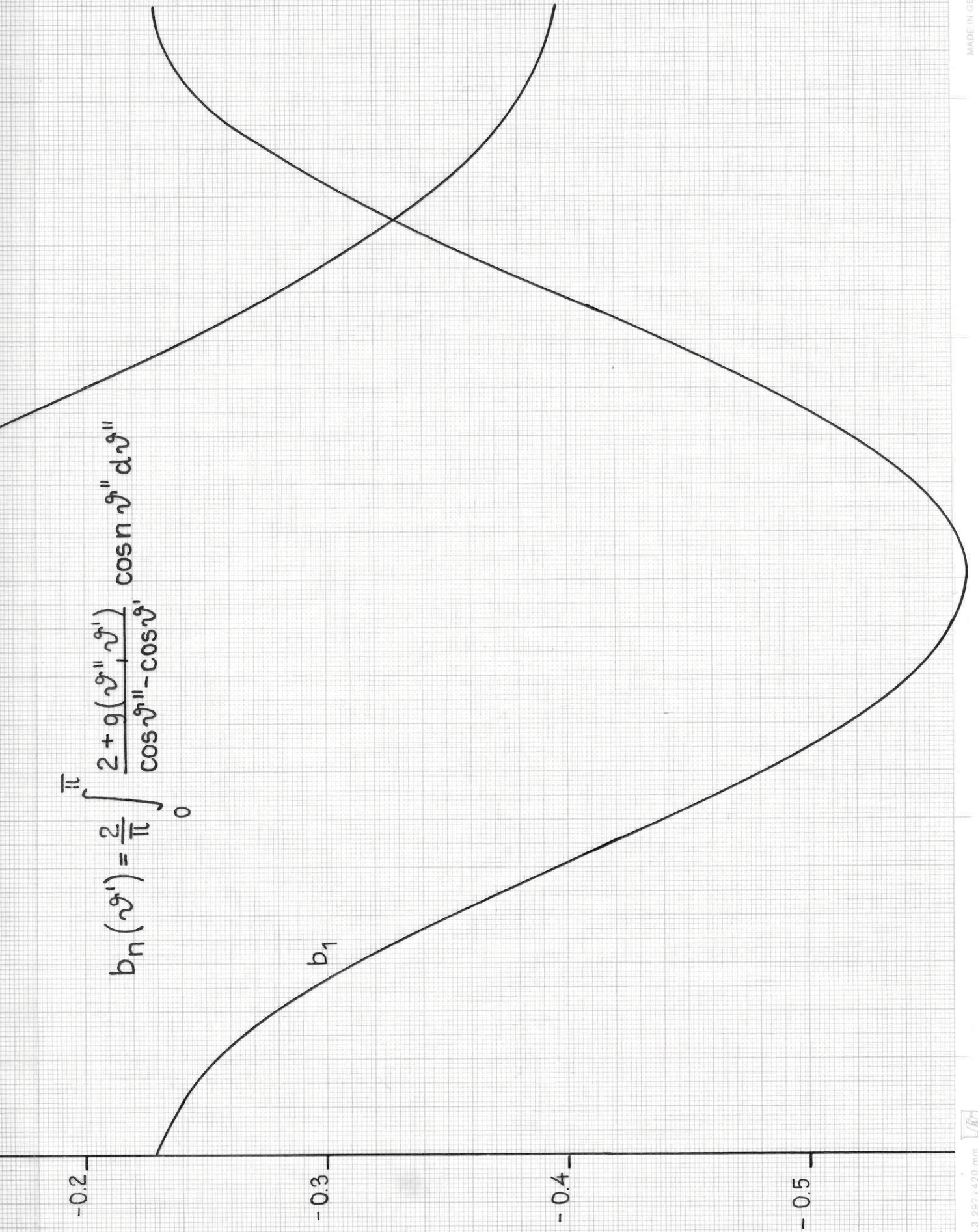
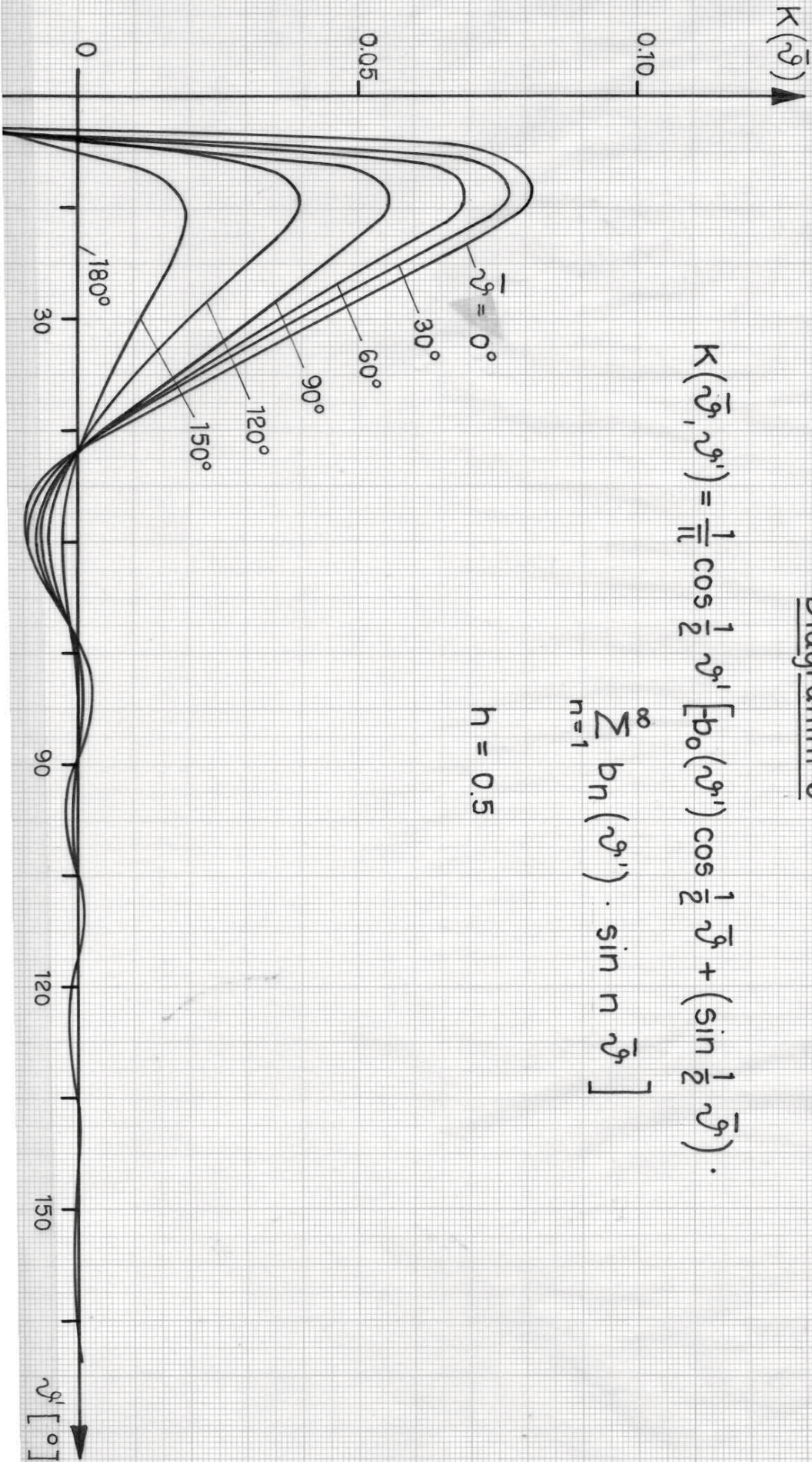


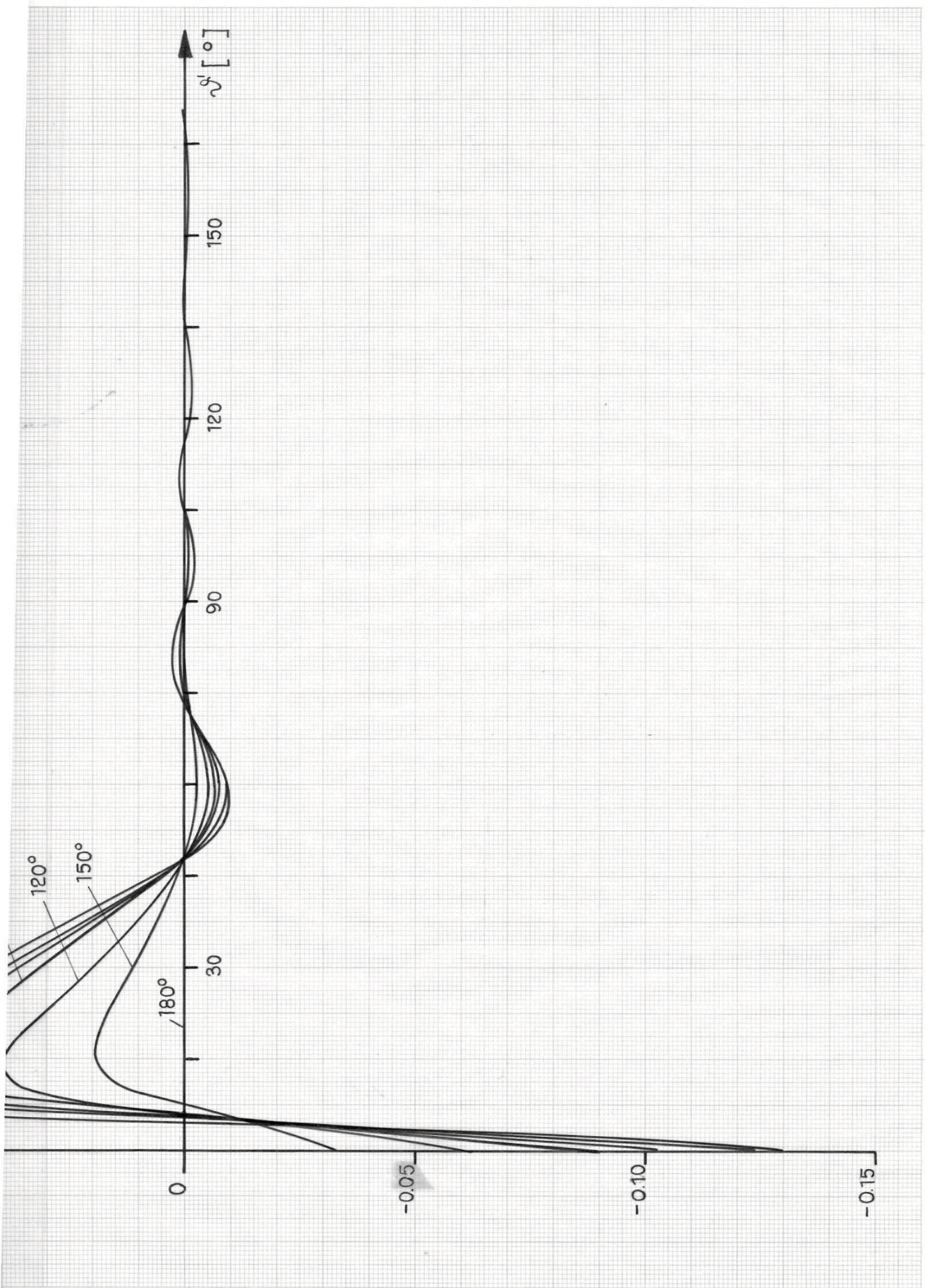
Diagramm 6

$$K(\bar{\nu}, \nu') = \frac{1}{11} \cos \frac{1}{2} \nu' [b_0(\nu') \cos \frac{1}{2} \bar{\nu} + (\sin \frac{1}{2} \bar{\nu}) \cdot$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(\nu') \cdot \sin n \bar{\nu}]$$

$$h = 0.5$$





A N H A N G I I
=====

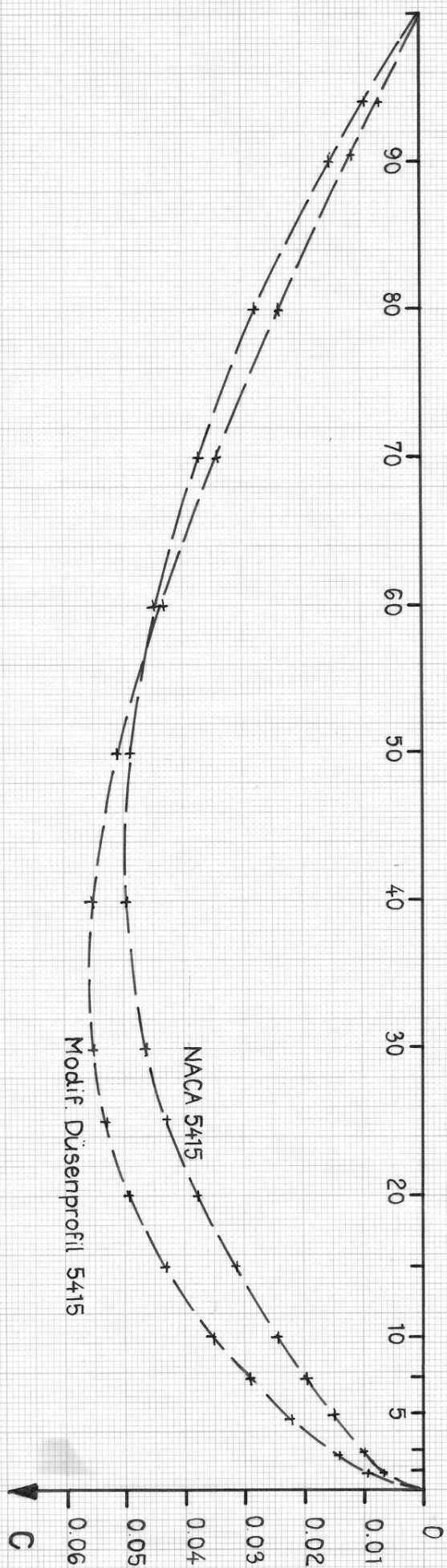
Modifizierte Düsenprofile, Zirkulations- und
Quell-Senken-Belegungen an der Düse

TABELLE 7

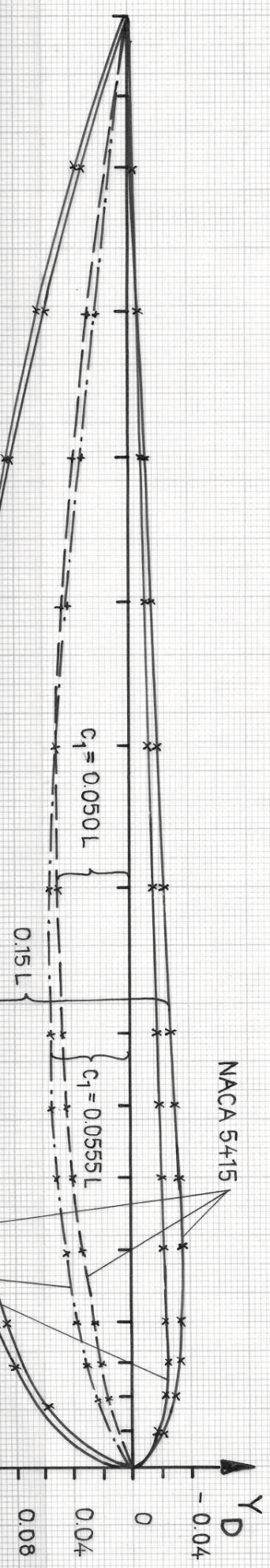
x/L %	N A C A		5415 (nach [8])		MODIF. DÜSENPROFIL 5415				MODIF. DÜSENPROFIL 5412			
	$y_H = y_0/L$	$y_D = y_u/L$	$s = \frac{0,5s_1/L}{y_H - y_D}$	$c = c_1/L = (y_H - s)$	s	c	y _H	y _D	S	C	y _H	y _D
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,25	0,0323	-0,0163	0,0243	0,0080	0,0243	-0,0107	-0,03500	+0,01360	0,01944	-0,00856	-0,02800	0,01088
2,5	0,0438	-0,0227	0,03325	0,01055	0,03325	-0,0152	-0,04845	0,01805	0,02660	-0,01216	-0,03876	0,01444
5,0	0,0605	-0,0296	0,04505	0,01545	0,04505	-0,0233	-0,06835	0,02175	0,03604	-0,01864	-0,05468	0,01740
7,5	0,0731	-0,0331	0,0531	0,0200	0,0531	-0,0295	-0,08260	0,02360	0,04248	-0,02360	-0,06608	0,01888
10	0,0832	-0,0350	0,0591	0,0241	0,0591	-0,0347	-0,09380	0,02440	0,04728	-0,02776	-0,07504	0,01952
15	0,0991	-0,0354	0,06725	0,03185	0,06725	-0,0438	-0,11105	0,02345	0,05380	-0,03504	-0,08884	0,01876
20	0,1101	-0,0339	0,0720	0,0381	0,0720	-0,0496	-0,12160	0,02240	0,05760	-0,03968	-0,09728	0,01792
25	0,1179	-0,0311	0,0745	0,0434	0,0745	-0,0534	-0,12790	0,02110	0,05960	-0,04272	-0,10232	0,01688
30	0,1219	-0,0281	0,0750	0,0469	0,0750	-0,0552	-0,13020	0,01980	0,06000	-0,04416	-0,10416	0,01584
40	0,1225	-0,0225	0,0725	0,0500	0,0725	-0,0555	-0,12800	0,01700	0,05800	-0,04440	-0,10240	0,01360
50	0,1151	-0,0174	0,066125	0,04885	0,066125	-0,05105	-0,117175	0,015075	0,05290	-0,04084	-0,09374	0,01206
60	0,1020	-0,0124	0,05720	0,0448	0,05720	-0,0435	-0,10070	0,01370	0,04576	-0,03480	-0,08056	0,01096
70	0,0839	-0,0079	0,0469	0,0370	0,0469	-0,0347	-0,08160	0,01220	0,03752	-0,02776	-0,06528	0,00976
80	0,0612	-0,0046	0,0329	0,0283	0,0329	-0,0243	-0,05720	0,00860	0,02632	-0,01944	-0,04576	0,00688
90	0,0339	-0,0026	0,01825	0,01565	0,01825	-0,0123	-0,03055	0,00595	0,01460	-0,00984	-0,02444	0,00476
95	0,0183	-0,0020	0,01015	0,00815	0,01015	-0,0060	-0,01615	0,00415	0,00812	-0,00480	-0,01292	0,00332
100	0,0016	-0,0016		0,00000	0,00	0,0	0	0	0	0	0	0

Diagramm 7

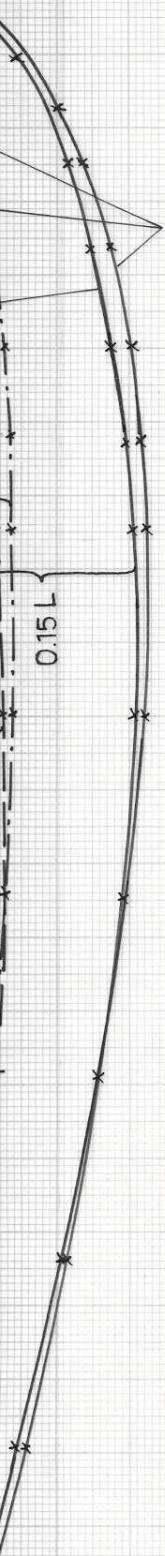
Krümmung des Modif. Düsenprofils 5415 — im Vergleich mit den Werten der Krümmung von NACA 5415 — Profil



Modif. Düsenprofil NACA 5415



0.08
0.12
Y_H



Modif. Düsenprof. 5415

Modif. Düsenprofil NACA 5412

Y_D
-0.02
0
0.04
0.08
Y_H

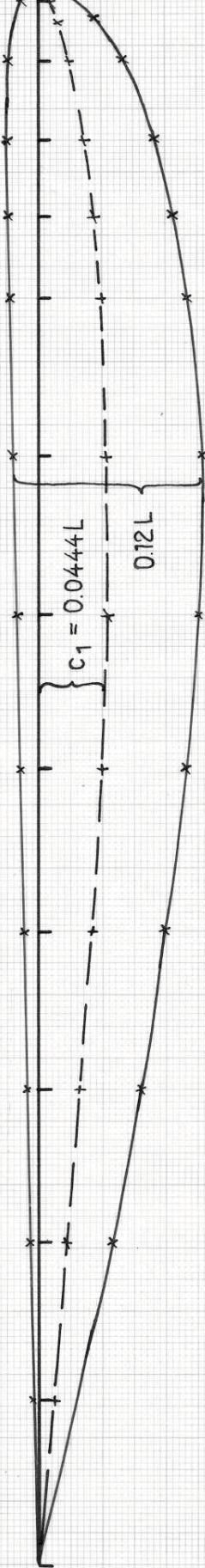
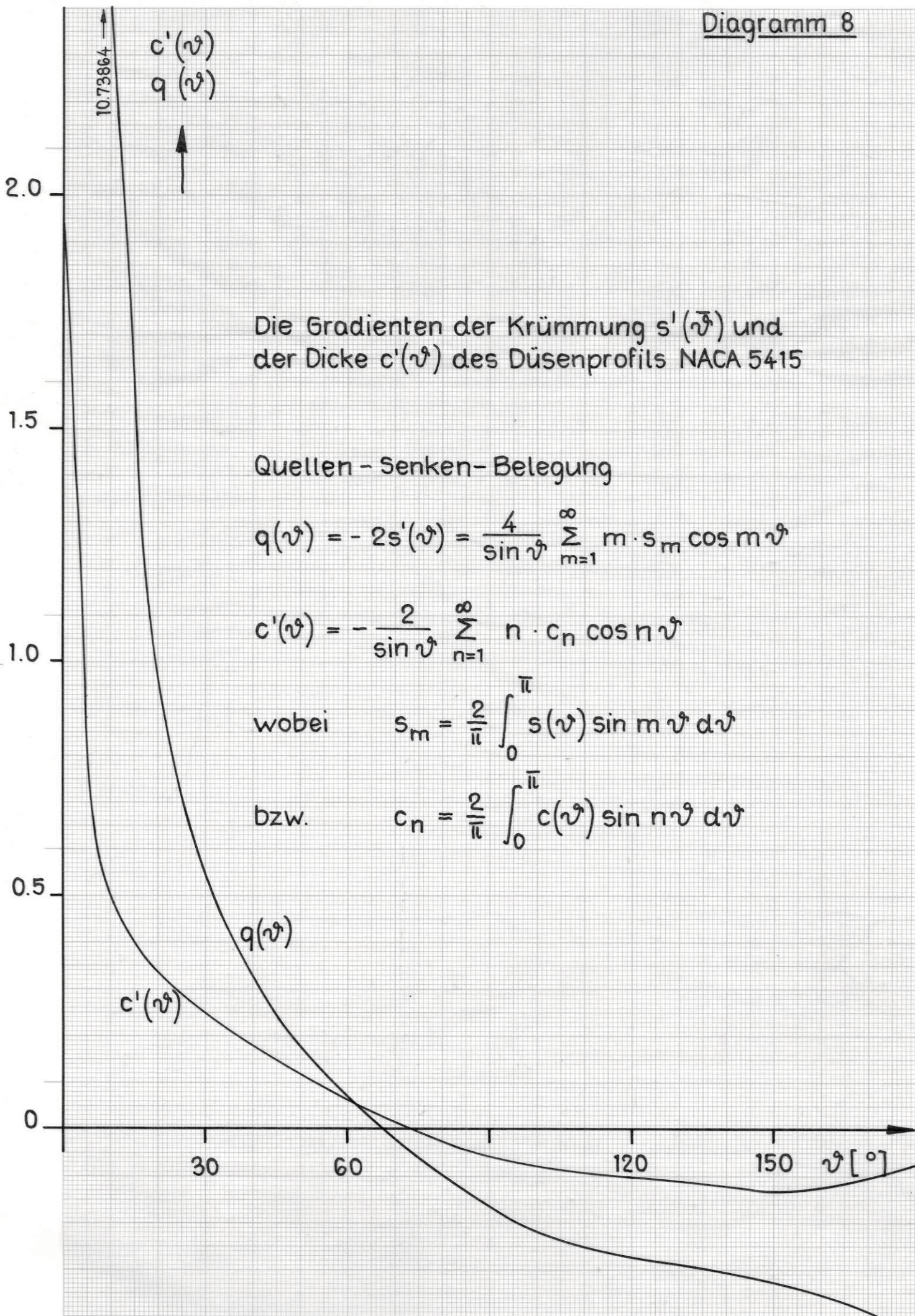


TABELLE 8

Werte der benutzten Düsenprofile für das Rechenprogramm

	$z = \frac{1}{2} (1 + \cos \vartheta)$	5415		5412	
		Dicke s	Krümmung c	Dicke s	Krümmung c
0	$\vartheta = 0^\circ$ $z = 0,5(1 + \cos \vartheta) = 1,00$	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1	$\vartheta = 15^\circ$	0,02825	-0,01245	0,02260	-0,00996
2	$\vartheta = 30^\circ$	0,05000	-0,02775	0,04000	-0,02220
3	$\vartheta = 45^\circ$	0,06675	-0,04340	0,05340	-0,03472
4	$\vartheta = 60^\circ$	0,07450	-0,05340	0,05960	-0,04272
5	$\vartheta = 75^\circ$	0,07380	-0,05600	0,05904	-0,04480
6	$\vartheta = 90^\circ$	0,066125	-0,05105	0,05290	-0,04084
7	$\vartheta = 105^\circ$	0,05440	-0,04105	0,04352	-0,03284
8	$\vartheta = 120^\circ$	0,04020	-0,02950	0,03216	-0,02360
9	$\vartheta = 135^\circ$	0,02540	-0,01810	0,02032	-0,01448
10	$\vartheta = 150^\circ$	0,01310	-0,00812	0,01048	-0,006496
11	$\vartheta = 165^\circ$	0,00400	-0,001805	0,00320	-0,001444
12	$\vartheta = 180^\circ$	0,00000	-0,00000	0,00000	-0,00000



Die Gradienten der Krümmung $s'(\vartheta)$ und der Dicke $c'(\vartheta)$ des Düsenprofils NACA 5415

Quellen - Senken - Belegung

$$q(\vartheta) = -2s'(\vartheta) = \frac{4}{\sin \vartheta} \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot s_m \cos m \vartheta$$

$$c'(\vartheta) = -\frac{2}{\sin \vartheta} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n \cos n \vartheta$$

wobei $s_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} s(\vartheta) \sin m \vartheta d\vartheta$

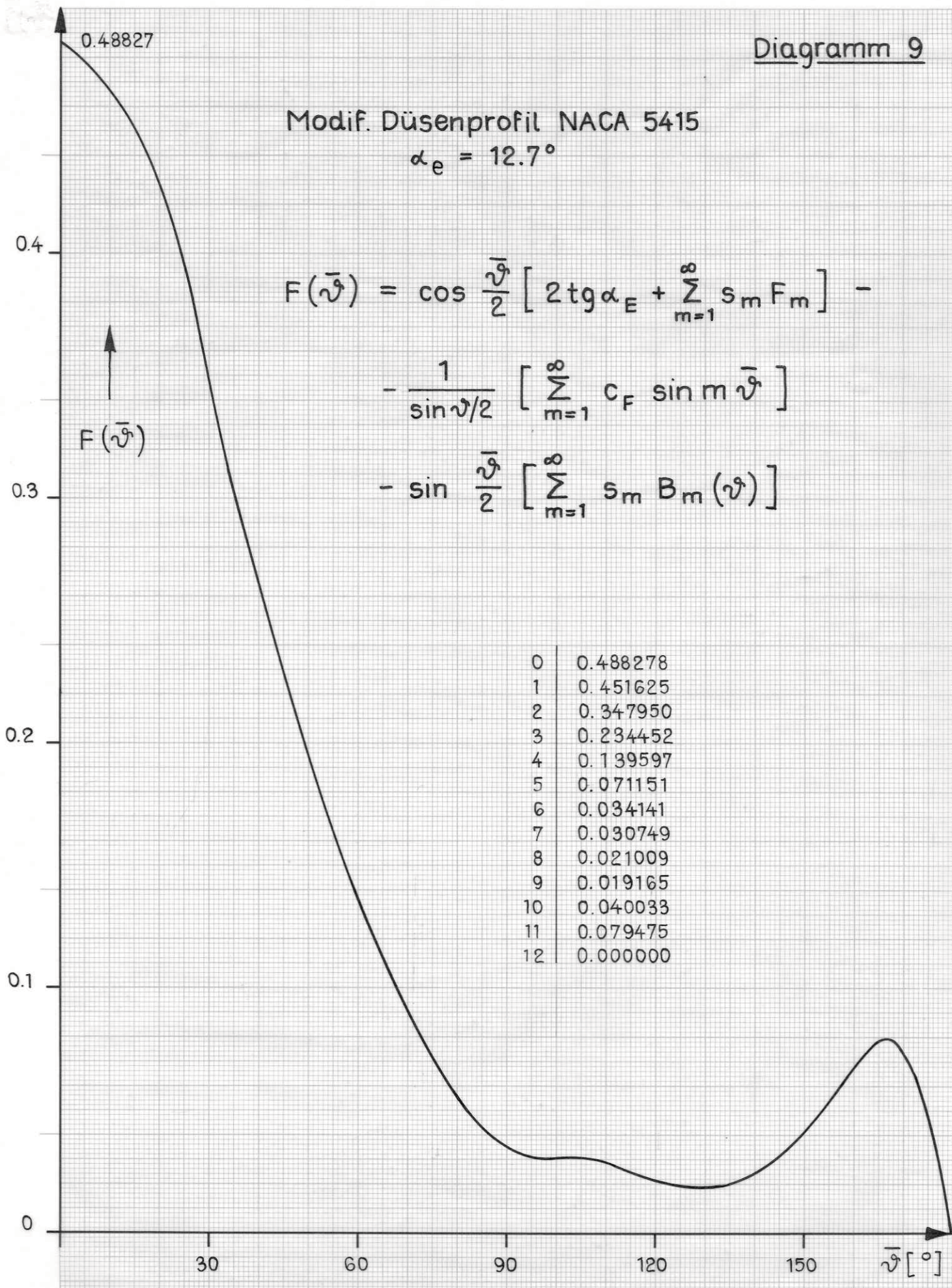
bzw. $c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} c(\vartheta) \sin n \vartheta d\vartheta$

Modif. Düsenprofil NACA 5415
 $\alpha_e = 12.7^\circ$

$$F(\bar{\vartheta}) = \cos \frac{\bar{\vartheta}}{2} \left[2 \operatorname{tg} \alpha_E + \sum_{m=1}^{\infty} s_m F_m \right] -$$

$$- \frac{1}{\sin \bar{\vartheta}/2} \left[\sum_{m=1}^{\infty} c_F \sin m \bar{\vartheta} \right]$$

$$- \sin \frac{\bar{\vartheta}}{2} \left[\sum_{m=1}^{\infty} s_m B_m(\bar{\vartheta}) \right]$$

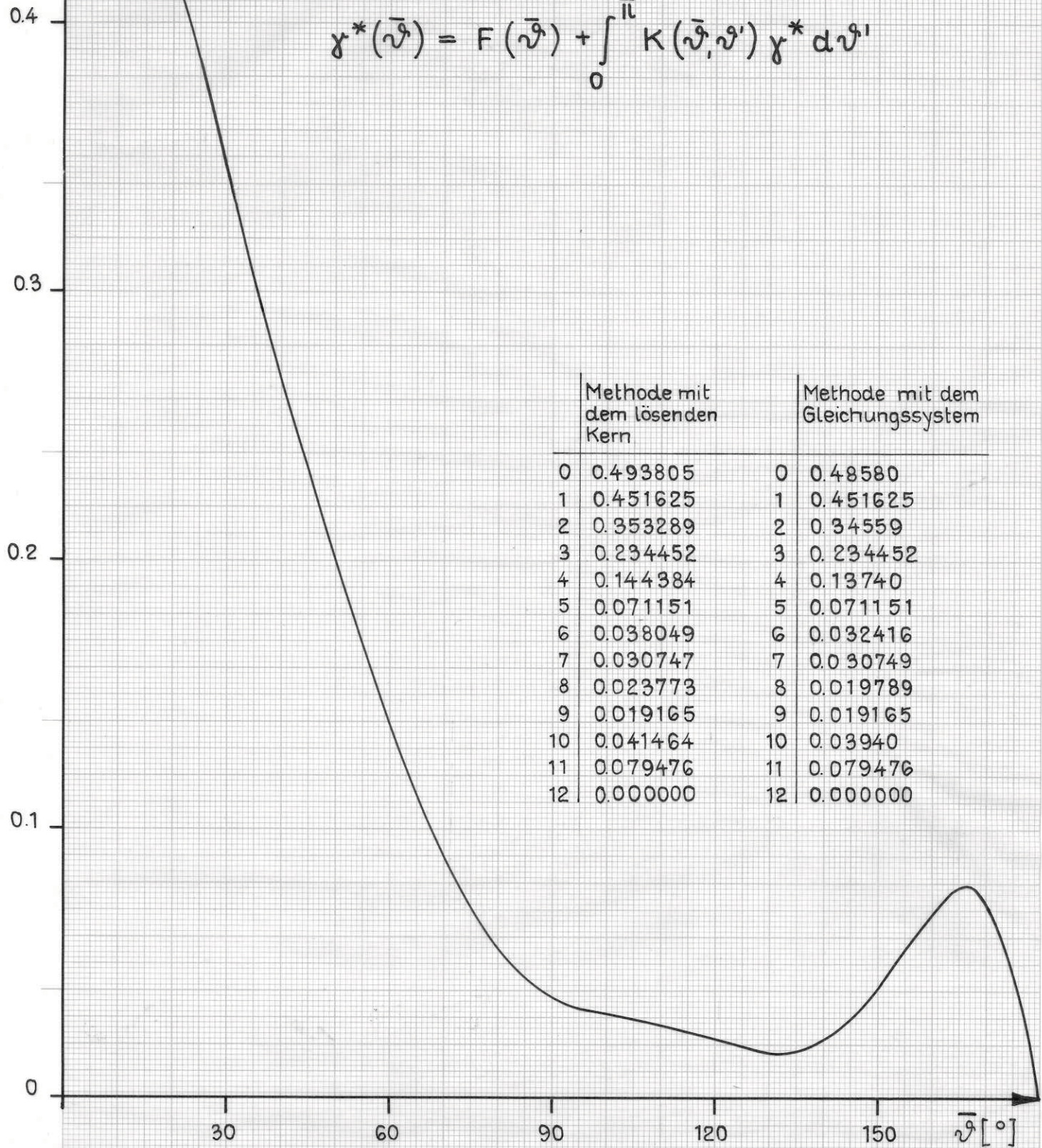


0	0.488278
1	0.451625
2	0.347950
3	0.234452
4	0.139597
5	0.071151
6	0.034141
7	0.030749
8	0.021009
9	0.019165
10	0.040033
11	0.079475
12	0.000000

Modif. Düsenprofil NACA 5415

$\alpha_e = 12.7^\circ$ $L/D = 0.5$

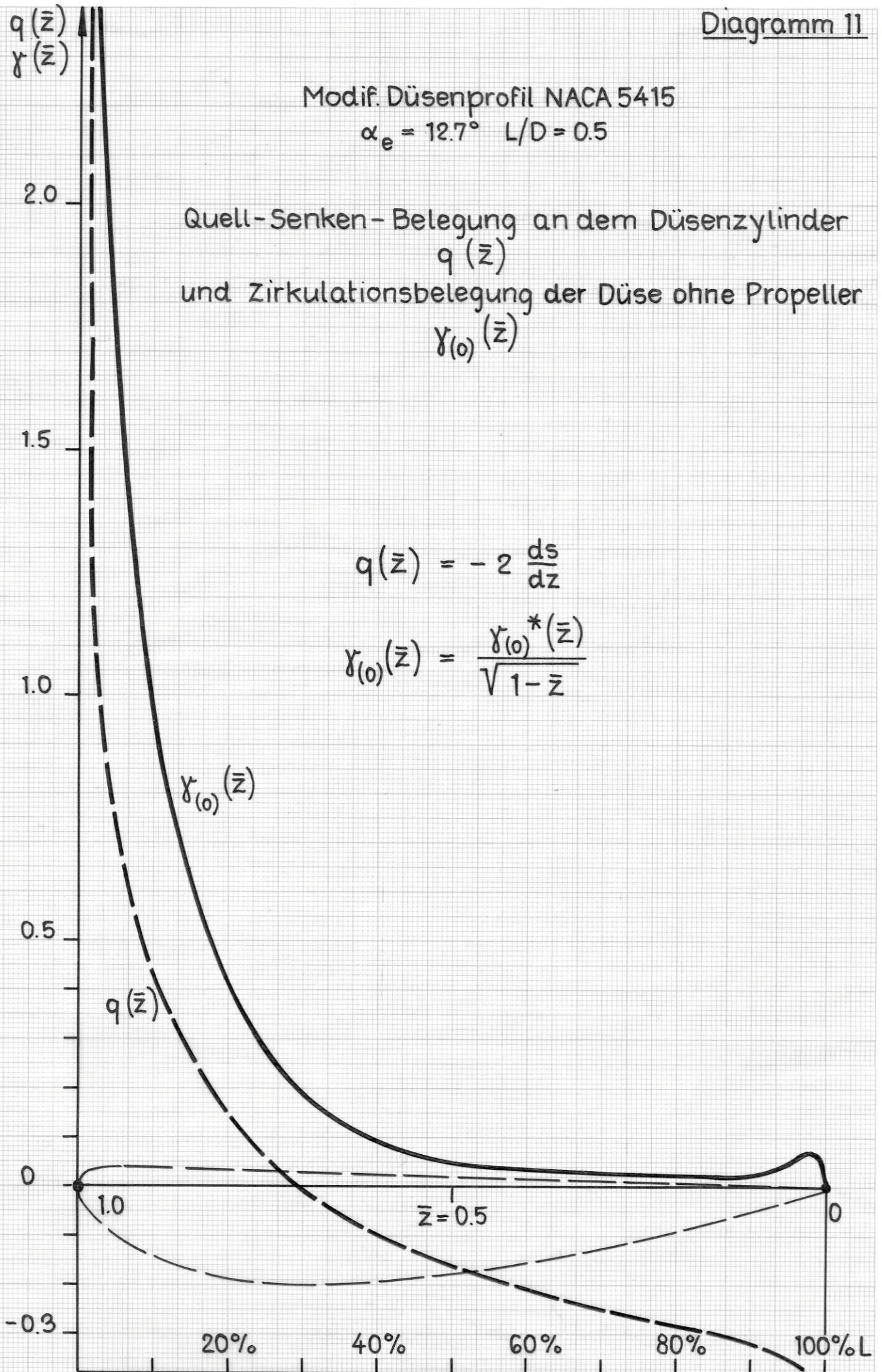
$$\gamma^*(\bar{\nu}) = F(\bar{\nu}) + \int_0^{\bar{\nu}} K(\bar{\nu}, \bar{\nu}') \gamma^* d\bar{\nu}'$$



	Methode mit dem lösenden Kern		Methode mit dem Gleichungssystem
0	0.493805	0	0.48580
1	0.451625	1	0.451625
2	0.353289	2	0.34559
3	0.234452	3	0.234452
4	0.144384	4	0.13740
5	0.071151	5	0.071151
6	0.038049	6	0.032416
7	0.030747	7	0.030749
8	0.023773	8	0.019789
9	0.019165	9	0.019165
10	0.041464	10	0.03940
11	0.079476	11	0.079476
12	0.000000	12	0.000000

Modif. Düsenprofil NACA 5415
 $\alpha_e = 12.7^\circ \quad L/D = 0.5$

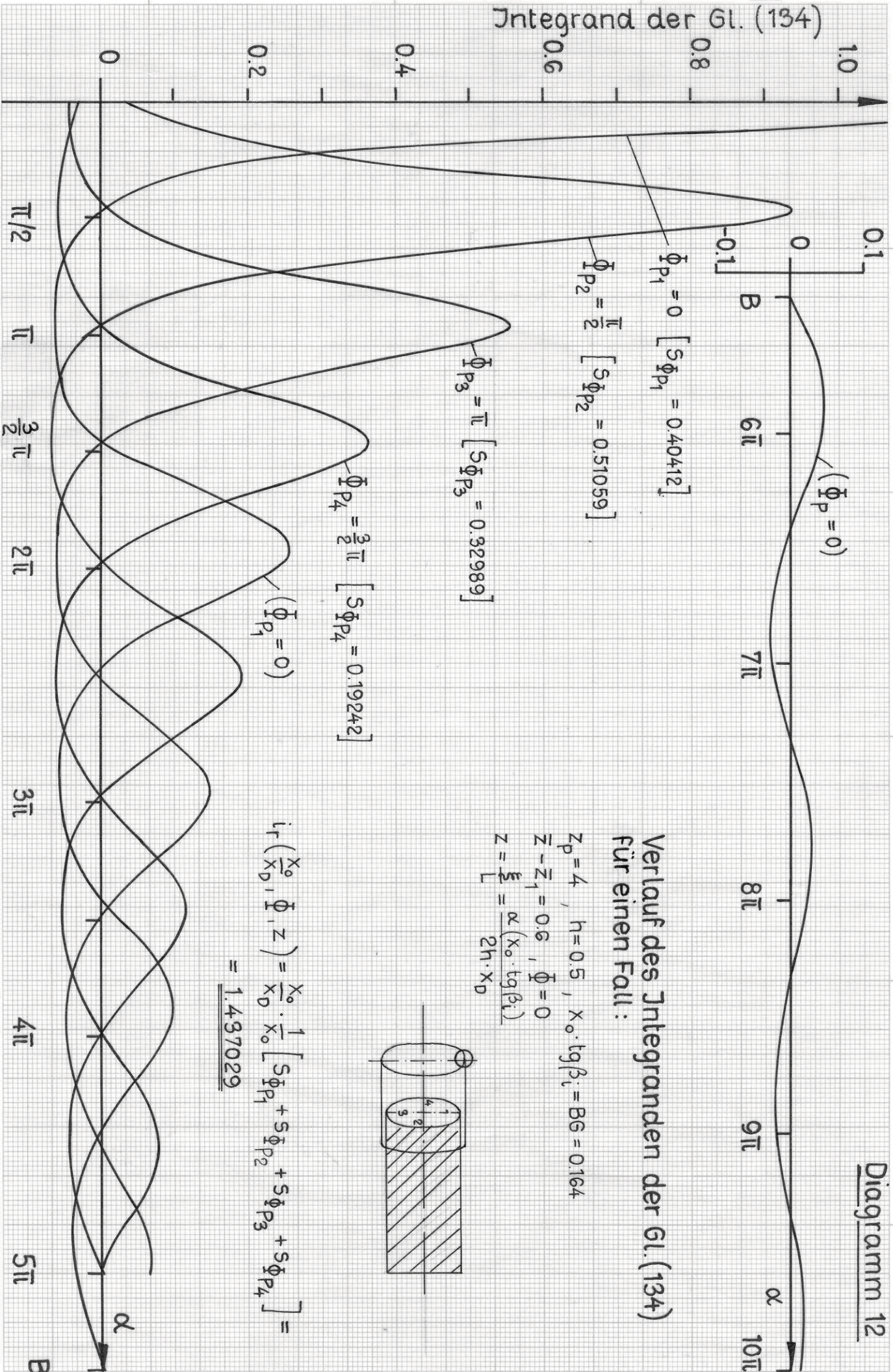
Quell-Senken-Belegung an dem Düsenzylinder
 $q(\bar{z})$
 und Zirkulationsbelegung der Düse ohne Propeller
 $\gamma_{(0)}(\bar{z})$



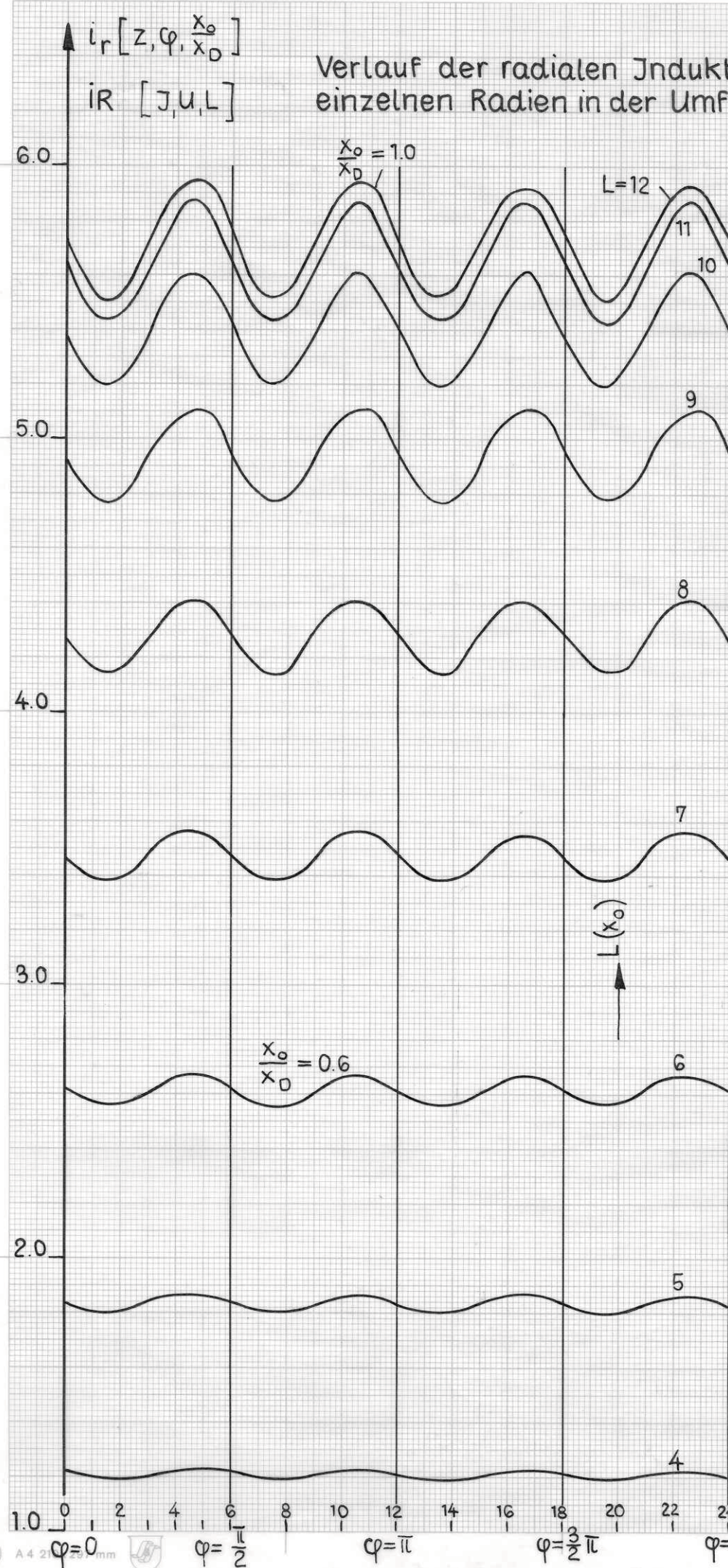
A N H A N G III
=====

Die zur Bestimmung der radialen und axialen
von dem Düsenpropeller an der Düse induzierten
benötigten Funktionen

Diagramm 12



Verlauf der radialen Induktionsfaktoren an einzelnen Radien in der Umfangsrichtung



Fall
 $z = \bar{z} - \bar{z}_1 = 0.6$
 $J = 0$

Propeller
 $Z_p = 4$
 $x_0 \cdot \text{tg} \beta_i = BG = 0.164$

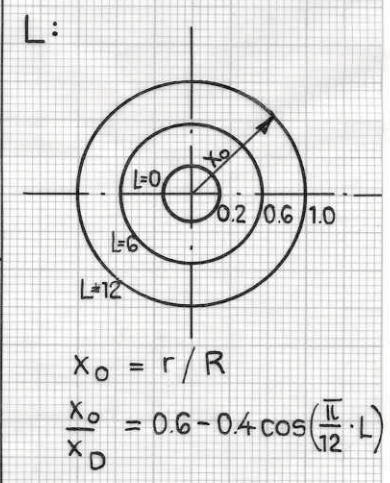
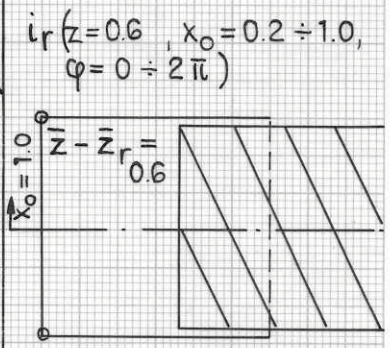
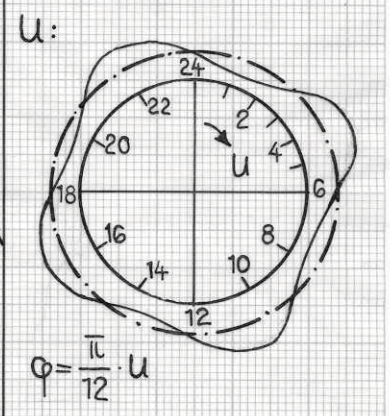
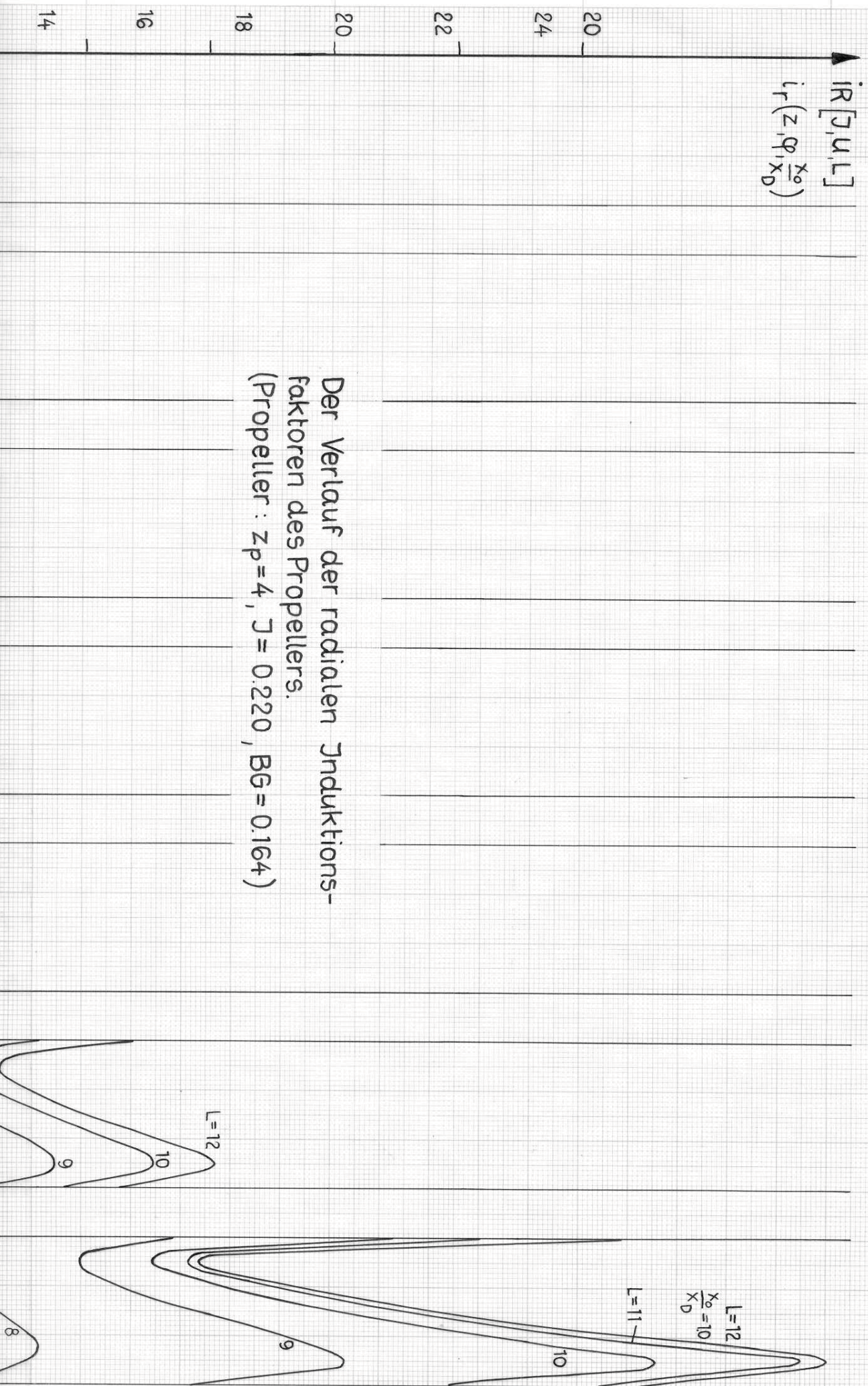
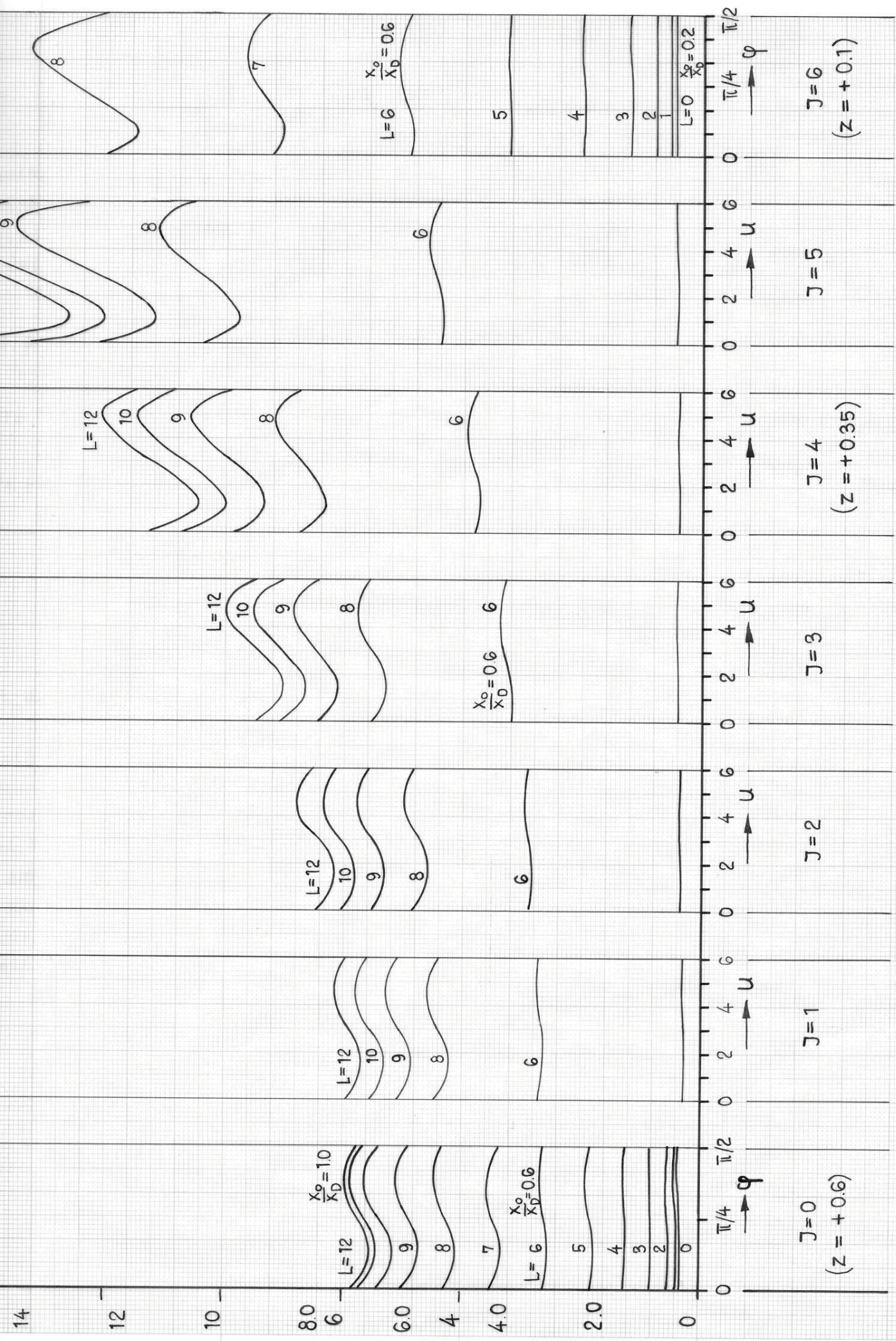
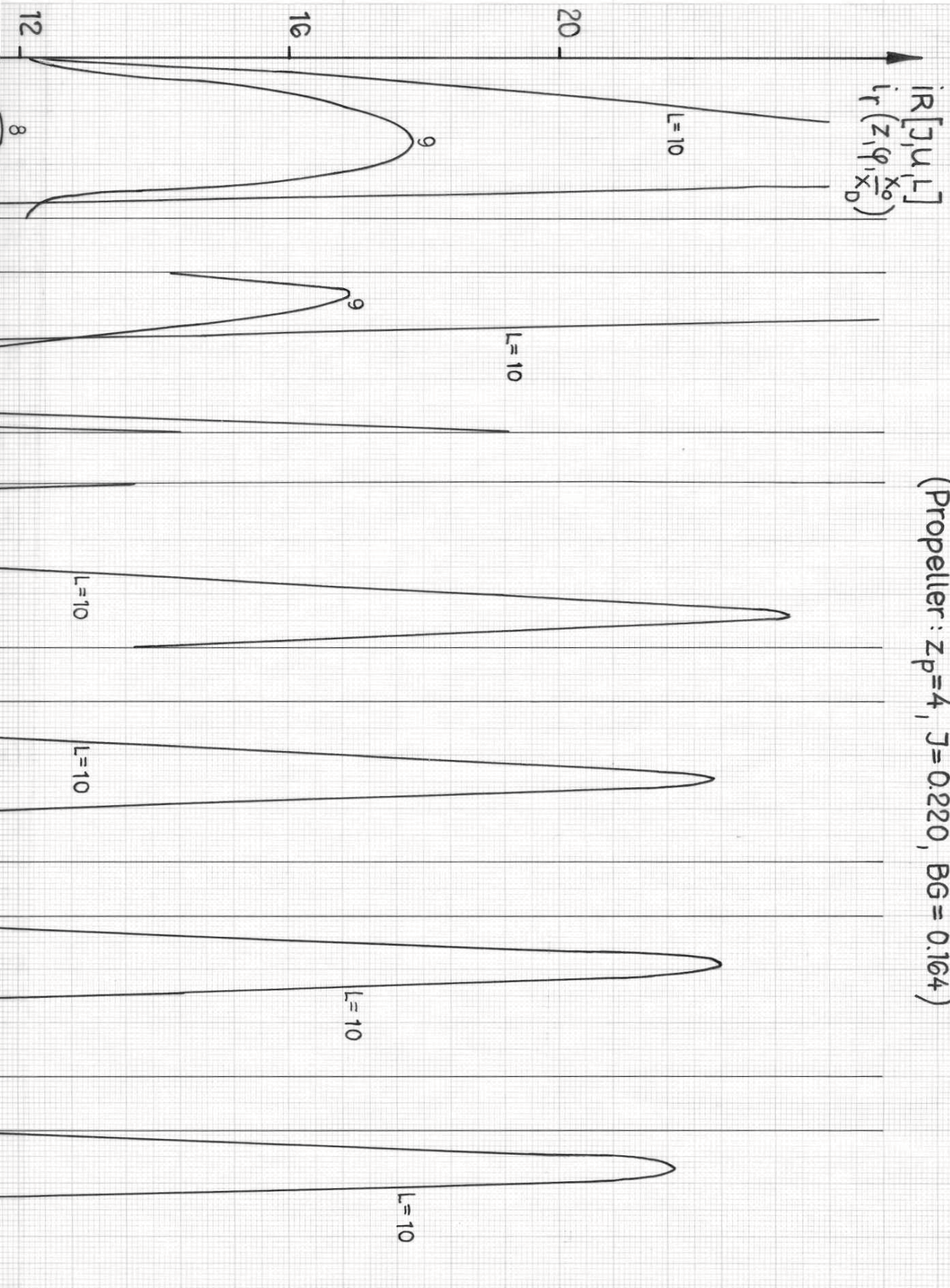


Diagramm 14

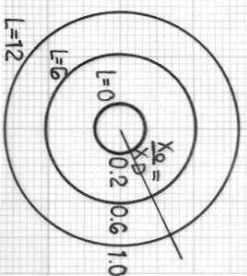


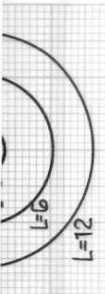


Der Verlauf der radialen Induktionsfaktoren des Propellers
 (Propeller: $z_p=4$, $J=0.2220$, $B_G=0.164$)



$L:$
 $x_0 = r/R$



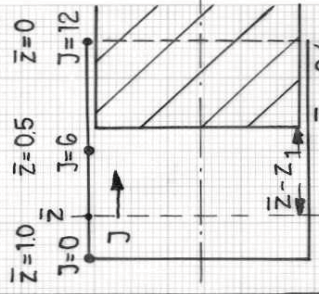


$$\frac{x_0}{x_D} = 0.6 - 0.4 \cos \left[\frac{\pi}{12} \cdot L \right]$$

J:

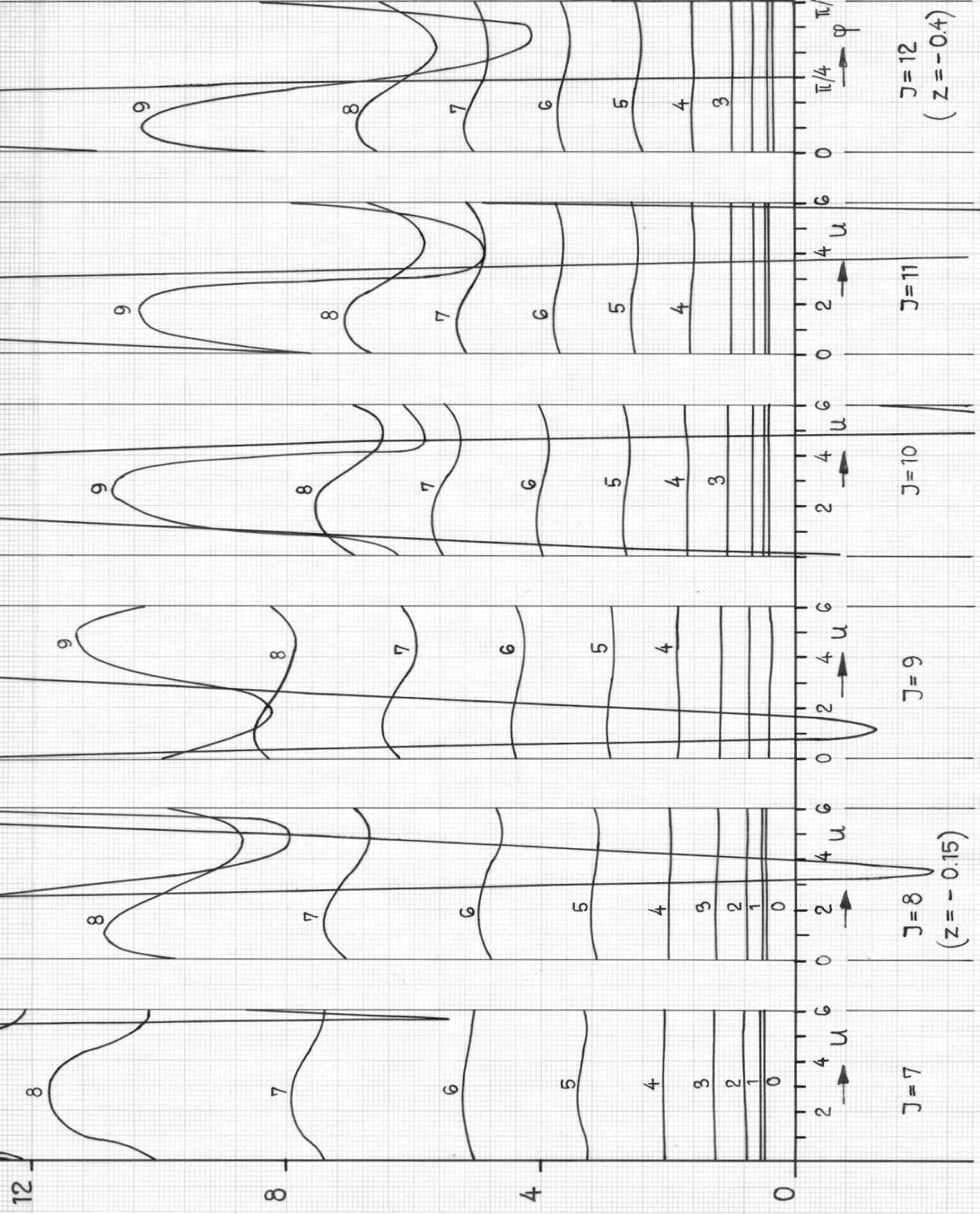
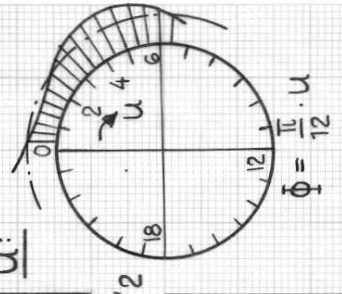
$$\bar{z} - \bar{z}_1 = 0.5 \cos \psi + 0.5 - \bar{z}_1$$

$$\psi = \frac{\pi}{12} \cdot J$$



$$z = \bar{z} - \bar{z}_1 = 0.5 \cos \left[\frac{\pi}{12} \cdot J \right] + 0.1$$

u:



J=12
(z = -0.4)

J=11

J=10

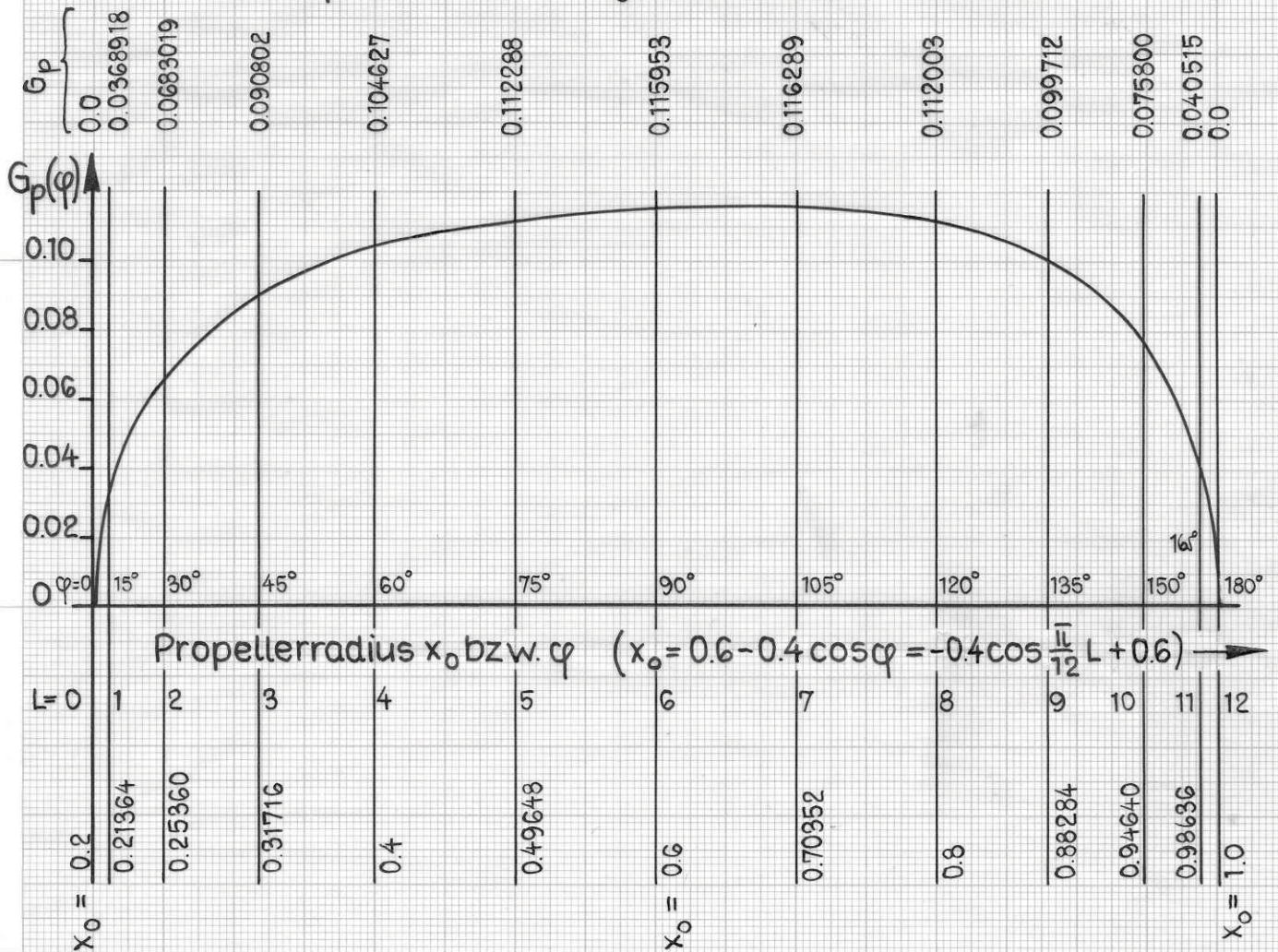
J=9

J=8
(z = -0.15)

J=7

Zirkulationsverteilung an einem Propellerflügel

$(z_p = 4, BG = x_o \cdot \text{tg}\beta_i = 0.164)$



G_n - Werte

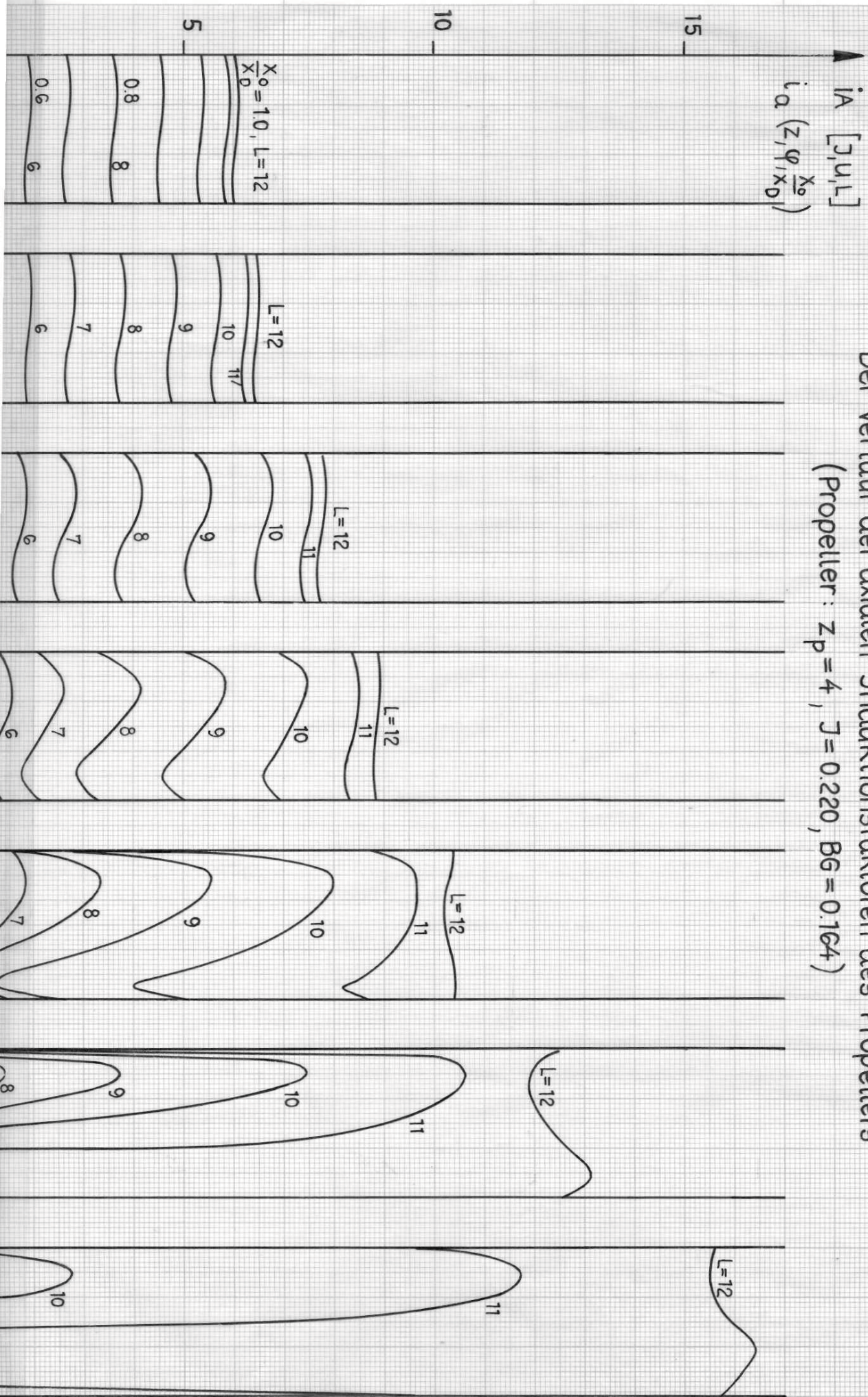
$n=1$	$1.251917 \cdot 10^{-1}$
2	$-4.267367 \cdot 10^{-3}$
3	$9.328174 \cdot 10^{-3}$
4	$3.682545 \cdot 10^{-5}$
5	$-6.457715 \cdot 10^{-5}$
6	$2.142985 \cdot 10^{-5}$
7	$-1.967312 \cdot 10^{-5}$
8	$7.204993 \cdot 10^{-5}$
9	$-5.480700 \cdot 10^{-5}$
10	$2.650601 \cdot 10^{-5}$
11	$-1.220648 \cdot 10^{-5}$

$$G_p(\varphi) = \sum_{n=1}^{11} G_n \sin(n \cdot \varphi)$$

$$\int_{0.2}^1 \frac{dG_p}{dx_o} dx_o = \int_0^{\pi} \frac{dG_p}{d\varphi} d\varphi$$

$$\frac{dG_p}{d\varphi} = \sum_{n=1}^{11} n \cdot G_n \cdot \cos(n \cdot \varphi)$$

Der Verlauf der axialen Induktionsfaktoren des Propellers
(Propeller: $Z_p = 4$, $J = 0.220$, $B_g = 0.164$)



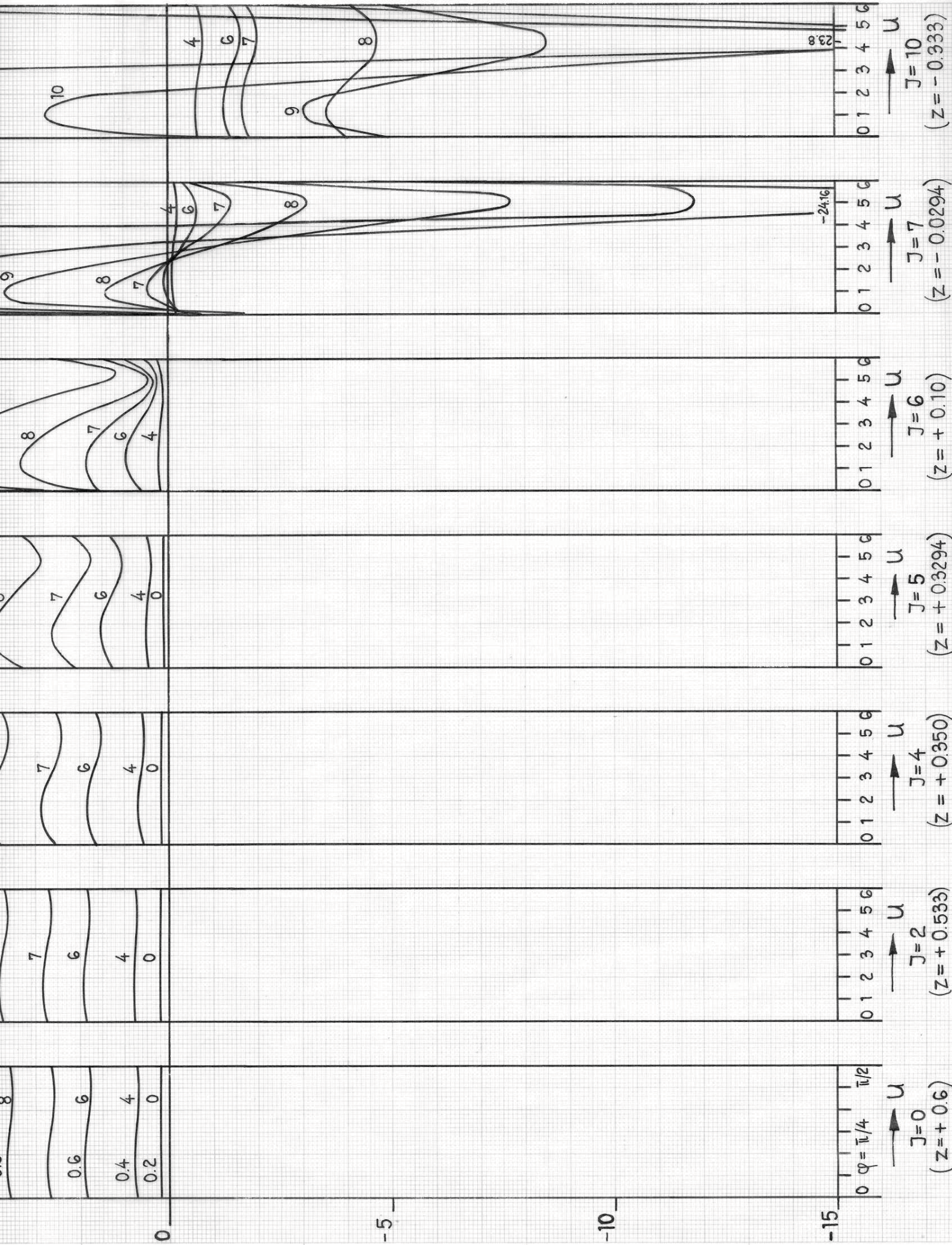
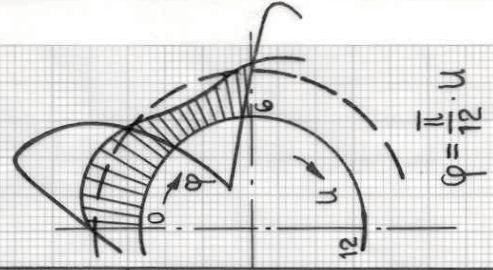
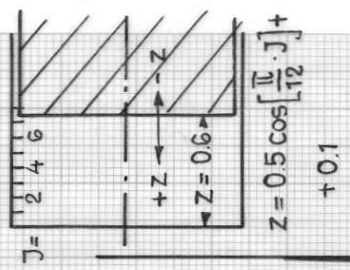


Diagramm 18

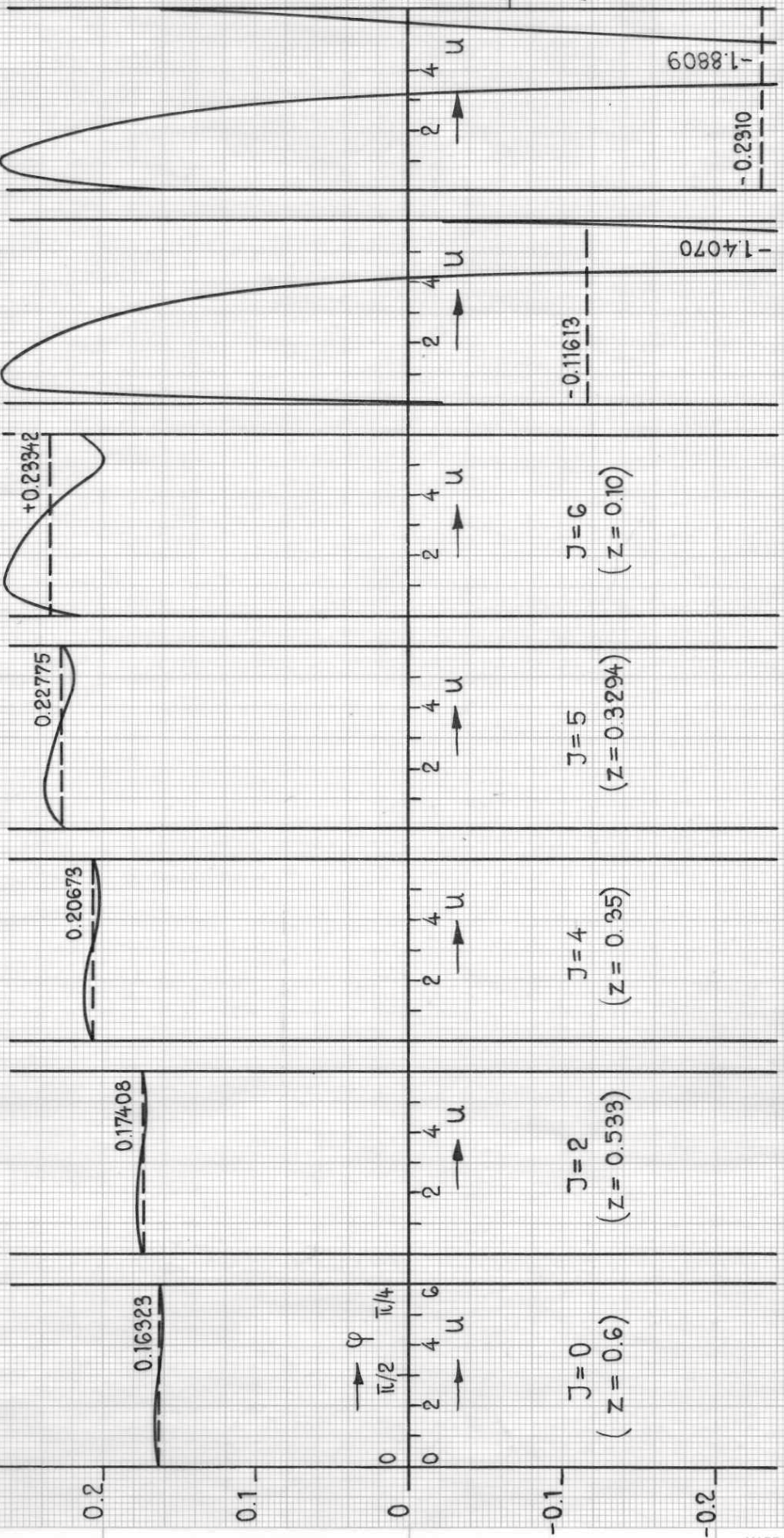
Die Axialgeschwindigkeiten eines Propellers in einzelnen axialen Schnitten an der Düse in Abhängigkeit von der Umfangsrichtung

$X_D = \frac{R_D}{R_P} = 1.0$



Diagr. 18

$WAF [J, u, L]$
 $\left[\frac{w_a}{v} (z, \varphi, x_D) \right]_p^{(1)}$



J = 0
(z = 0.6)

J = 2
(z = 0.533)

J = 4
(z = 0.35)

J = 5
(z = 0.3294)

J = 6
(z = 0.10)

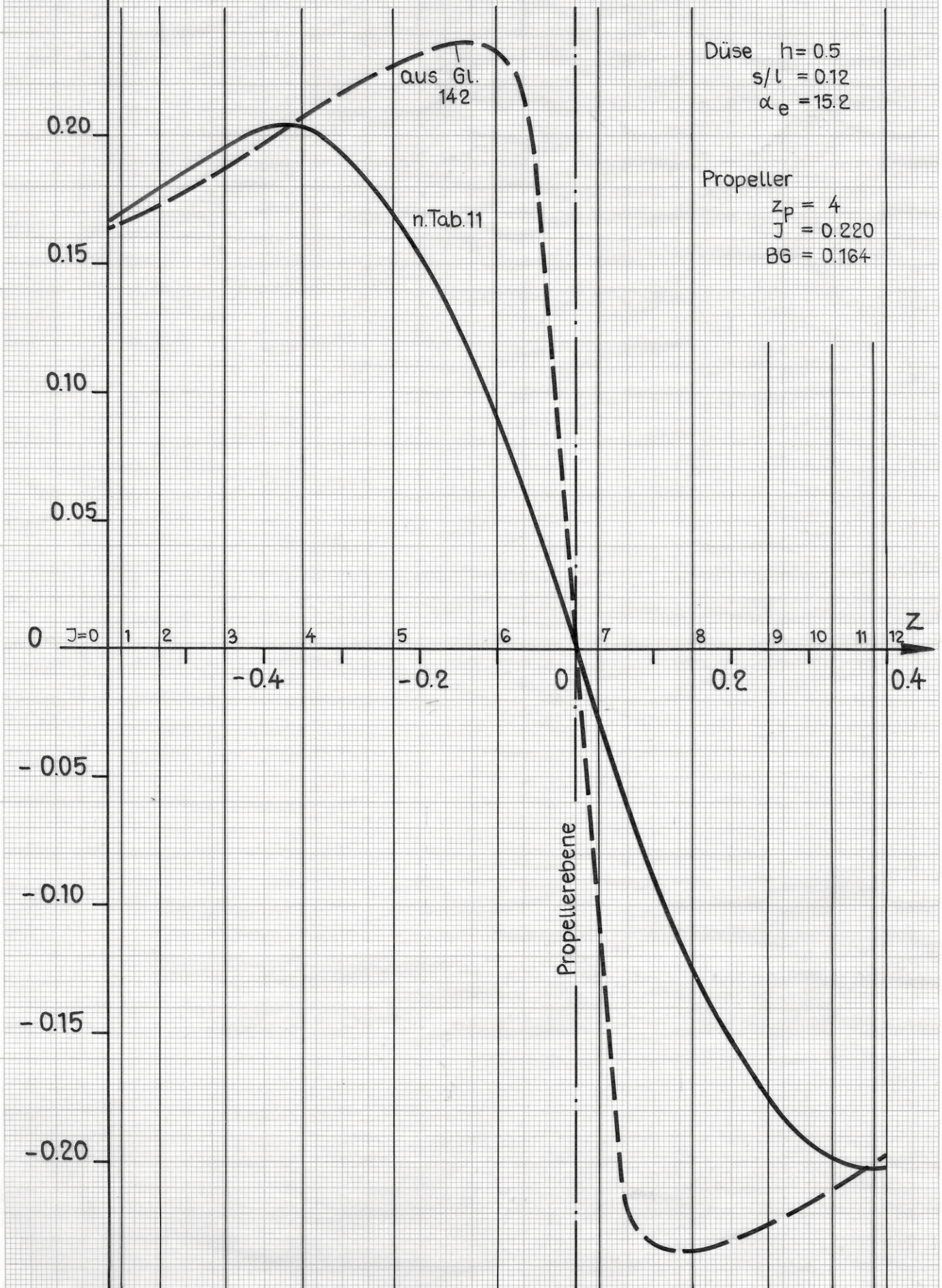
J = 7
(z = -0.0294)

J = 10
(z = -0.333)



$$\left[\frac{w}{v} x_D, z \right]_{Pd}$$

Die vom Propeller an der Düse
indizierten Axialgeschwindigkeiten



A N H A N G I V
=====

Die Funktionen der von den Düsensingularitäten
 $\gamma(\bar{z})$ und $q(\bar{z})$ an der Düse induzierten Radial- und
Axialgeschwindigkeiten

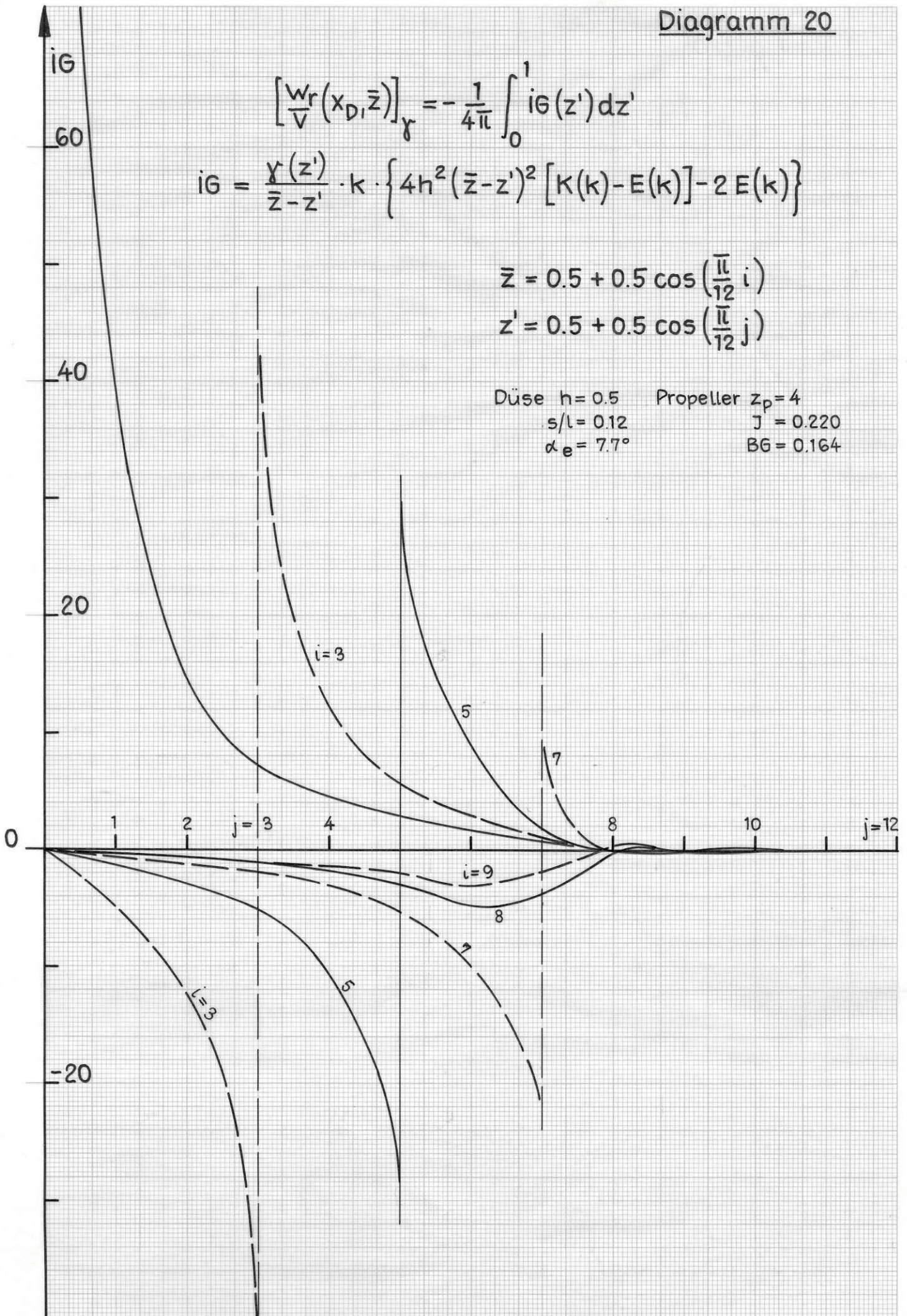
$$\left[\frac{w_r}{V}(x_{D1}, \bar{z}) \right]_r = -\frac{1}{4\pi} \int_0^1 iG(z') dz'$$

$$iG = \frac{\gamma(z')}{\bar{z} - z'} \cdot k \cdot \left\{ 4h^2(\bar{z} - z')^2 [K(k) - E(k)] - 2E(k) \right\}$$

$$\bar{z} = 0.5 + 0.5 \cos\left(\frac{\pi}{12} i\right)$$

$$z' = 0.5 + 0.5 \cos\left(\frac{\pi}{12} j\right)$$

Düse $h = 0.5$ Propeller $z_p = 4$
 $s/l = 0.12$ $J = 0.220$
 $\alpha_e = 7.7^\circ$ $BG = 0.164$

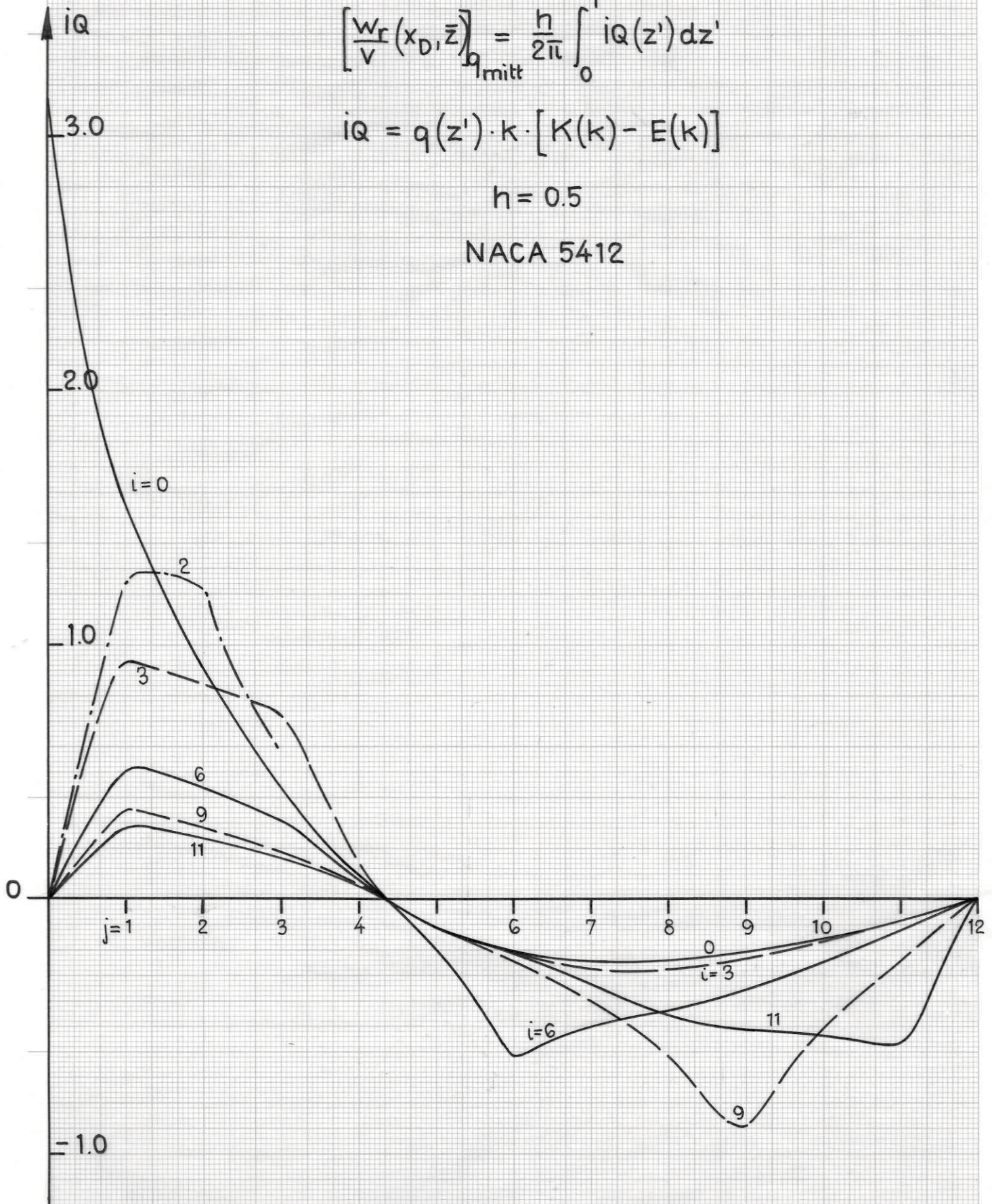


$$\left[\frac{w_r(x_D, \bar{z})}{v} \right]_{q_{\text{mitt}}} = \frac{h}{2\pi} \int_0^1 iQ(z') dz'$$

$$iQ = q(z') \cdot k \cdot [K(k) - E(k)]$$

$$h = 0.5$$

NACA 5412



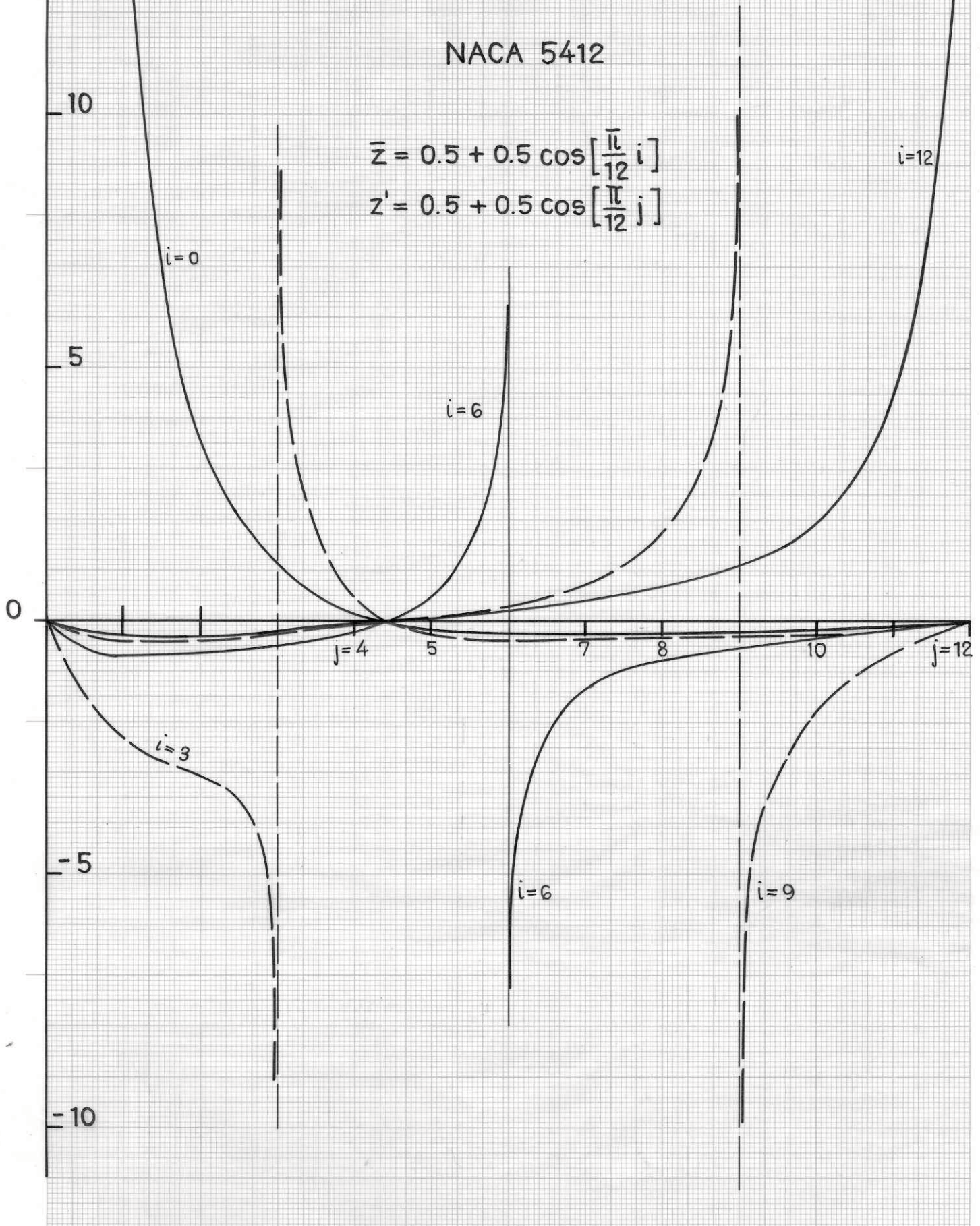
$$\left[\frac{w_a(x_D, \bar{z})}{V} \right]_q = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 iQA(z') dz'$$

$$iQA = q(z') \cdot k \left[E(k) / (\bar{z} - z') \right]$$

NACA 5412

$$\bar{z} = 0.5 + 0.5 \cos \left[\frac{\pi}{12} i \right]$$

$$z' = 0.5 + 0.5 \cos \left[\frac{\pi}{12} j \right]$$

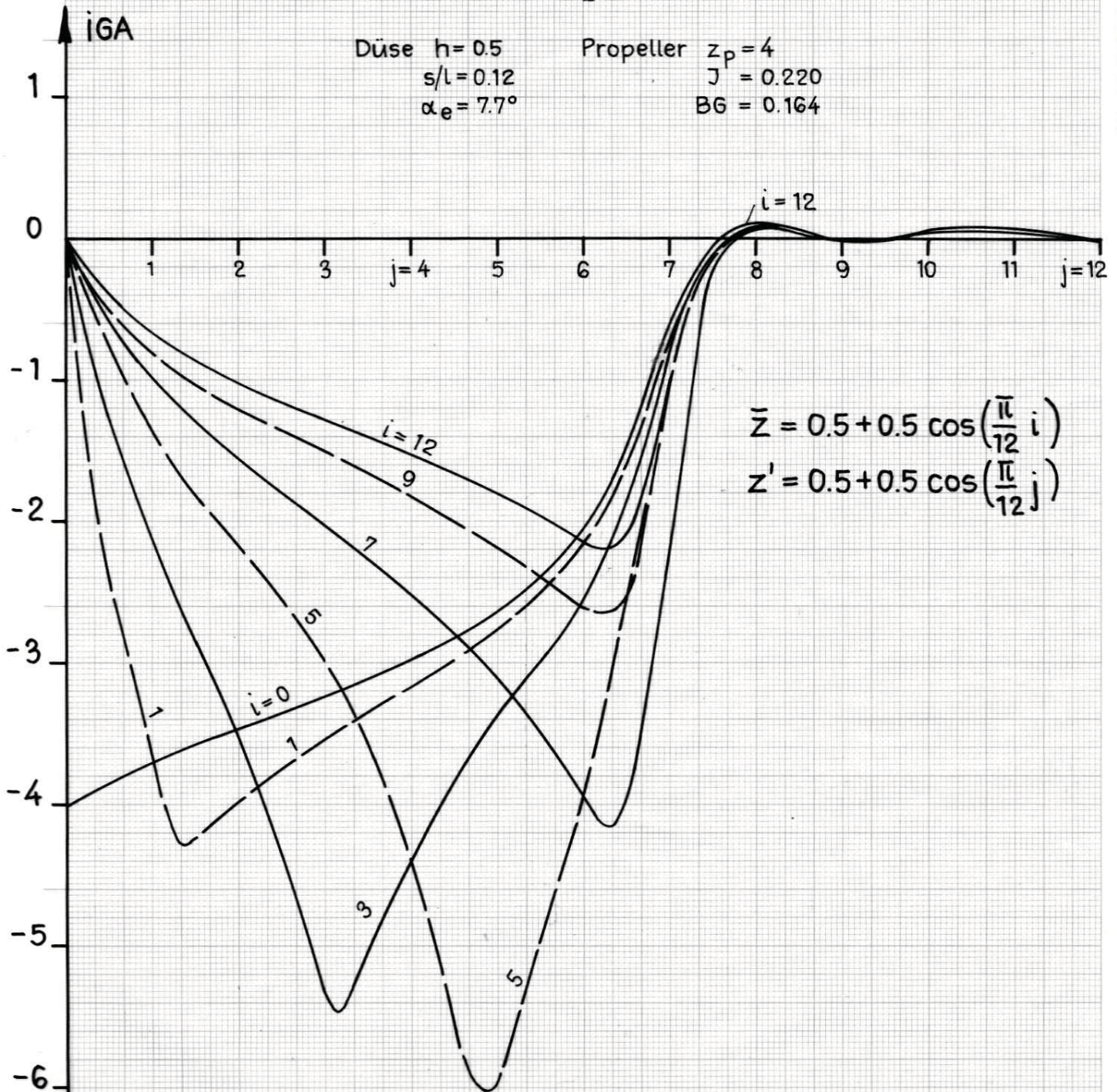


$$\left[\frac{W_a(x_D, \bar{z})}{V} \right]_{\gamma_{\text{mitt}}} = -\frac{h}{2\pi} \int_0^1 iGA(z') dz'$$

$$iGA = \gamma(z') \cdot k \cdot [K(k) - E(k)]$$

Düse $h=0.5$
 $s/l=0.12$
 $\alpha_e=7.7^\circ$

Propeller $z_p=4$
 $J=0.220$
 $BG=0.164$



$$\bar{z} = 0.5 + 0.5 \cos\left(\frac{\pi}{12} i\right)$$

$$z' = 0.5 + 0.5 \cos\left(\frac{\pi}{12} j\right)$$